Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

ad usum

F. Joïs Damasceni à S. Maximily.

Augustin. Discal.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBRI XV.

Accessit liber XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMONSTRATIONIbus accuratisque scholiis illustrati: nunc quartò editi, ac multarum rerum accessione post primam editionem locupletati.

Auctore

CHRISTOPHORO CLAVIO
Bambergensi è Societate IESV.

FRANCOFVRTI.

Sumptibus hæredum JONÆ RÒSÆ.

ANNO M.DC.LIV.

CHRISTOPHORVS CLAVIVS E SOCIETATE JESU

AD LECTOREM.

SCRIPSERAM superioribus annis in elementa Geometrica Euclidis, id est, in initia disciplinarum Mathematicarum, commentarios: quorum omnibus iam distractis exemplaribus, cum alia essent recudenda, volui etiam dare operam, vt locupletiores multo, atque vberiores ederentur, quod Dei beneficio successit. Sic enim se res habet, quemadmodum nihil est simul inuentum, & perfectum, sic nemo est, qui à principio in qualibet re scribenda, aut exponenda possit omnia peruidere: multa apparent iterum ac sæpius cogitanti, quæ aciem quamlibet acutam ante fugiebant. Recte hoc quoque Euripides, vt plerique

raque omnia, ſapientiores ſolent eſſe poſteriores cogitantes. cum quo congruit, & cohæret vulgatum illud prouerbium, quod Publio tribuitur, Diſcipulus eſt prioris poſterior dies. Itaq; cum priorem editionē ſumerem poſtea in manus, multa eſſe animaduerti, quæ ſi adderētur, nō pauca ex Archimedis, Apollonij, Ptolemæi, aliorumque inuentis videbantur melius explicari poſſe: ſi videlicet è pronuciatis ac theorematis Euclideis alia quoque necterentur. Quod ipſum etſi tunc etiam præſtiti, multo tamen nunc feci copioſius: interijciens ea ſcilicet, quæ vel vtilia, vel neceſſaria fore cenſui ad aliorum, vt dixi, auctorum cognitionem. Addidi inter cætera, vt ſpecimen dem aliquod rerum, quæ hoc volumine acceſſerunt, demonſtrationem Geometricam, eamque apertiſſimam axiomatis vndecimi, quod proponitur ab Euclide: cum ea, quam allatam ſcimus à Proclo, mutila eſſe atquè imperfecta videatur. Deſcriptionem item omnium figurarum, quæ rectilineæ æqualium laterum & angulorum appellantur, in circulo. Rationem præterea & breuem, nec obſcuram circuli

culi quadrandi: rem, vt ſcis, tum à veteribus, tum à recentioribus ſic expetitam, vt multorum in ea conatus magis apparuerit, quam effectus. Effeci autem hoc (niſi fallor) ita accurate, ac ſubtiliter, vt tam perfecte approbetur quadratum æquale circulo, quam exquiſite rectilinea figura quælibet ad quadratum æquale ab Euclide dirigitur: imò (vt loquar aliquid audacius) aliquanto perfectius: cum ad quadrandum circulum paucioribus linearum ductibus ſit opus, quam ad figuram rectilineam plurimorum angulorum, via & ratione quadrandam, vt aperte docebitur libro ſexto. Ad nonum denique librum adieci numerorum fractorum demonſtrationes clariſſimas, aliaque nonnulla, quæ nunc quidem non numero, quod ea mihi volo ad ipſamet loca, quibus explicabuntur, plena atque integra reſeruari. Laborem igitur hunc meum, qualiſcunque ſit, lector benigne ſuſcipe eoque in commodum tuum diu feliciterque vtere. Vale.

QVÆ PRÆCIPVE PRIMÆ editioni addita sint.

I.

DEMONSTRATIO Geometrica Axiomatis vndecimi Euclidis, [Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores] multo euidentior, quam ea, quam Proclus affert. *Ad propos. 28. lib. 1.*

II.

DIVISIO lineæ rectæ in quotuis æquales partes, per solas priores 40. propos. lib. 1. absque ope proportionum sexti lib. *Ad propos. 40. lib. 1.*

III.

QVO pacto construenda sint triangula amblygonia, & oxygonia, vt in numeris apparere possint, quæ ab Euclide demonstrata sunt propos. 12. & 13. lib. 2. *Ad propos. 12. & 13. lib. 2.*

IV.

RESPONSIO ad Apologiam Iacobi Peletarij, de angulo contactus. *Ad propos. 16. lib. 3*

V.

CONSIDERATIO pulcherrima de figuris planis æquilateris, atque æquiangulis intra circulũ, & extra circulum descriptis: Num scilicet, omnis

omnis æquilatera ſit æquiangula etiã, & omnis æquiangula ſit quoque æquilatera. *Ad finem lib. 4.*

VI.

TRACTATIO copioſiſſima de proportionibus, & tribus præcipuis proportionalitatibus, Arithmetica, Geometrica, atque Harmonica. *Ad defin. 4. lib. 5.*

VII.

PVLCHRA contemplatio, cur Euclides in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æquè multiplicia definierit. *Ad defin. 8. lib. 5.*

VIII.

DESCRIPTIO inflexæ cuiuſdam lineæ facillima, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium deſcribitur: circulus quadratur: angulus rectilineus in quotuis partes æquales diſtribuitur: Cuilibet arcui circuli recta æqualis exhibetur, & contrà; Et denique alia ſcitu iucũdiſſima perficiuntur. *Ad finem lib. 6.*

IX.

QVO pacto pleraque theoremata libri 7. demonſtrentur quoque de numeris fractis, ſiue ipſis adhæreant numeri integri, ſiue non. *Ad propoſitiones lib. 7.*

X.

MINVTIARVM, ſiue numerorum fractorum demonſtrationes clariſſimæ. *Ad finem lib. 7.*

XI.

DE proportionum compoſitione, quo videlicet

licet modo Additio, Subtractio, Multiplicatio ad Diuisio fieri debeat: aduersus quosdam Recentiores. *Ad finem lib. 9.*

XII.

DESCRIPTIO quinque corporum Regularium in data sphæra, ex Pappo Alexandrino, & quidem facilior, quàm ea, quam nobis tradidit Euclides. *Ad finem lib. 16.*

XIII.

COMPARATIO Soliditatum, & superficierum conuexarum, eorundem quinque corporum Regularium inter se. *Ad finem lib. 16.*

Cætera, quæ passim hisce commentarijs adiecta sunt non pauca, quæ in alijs editionibus desunt, cuiusmodi est præsertim accuratior inuentio vltimorum punctorum Quadratricis per lineas perpendiculares, non autem per obliquas linearum intersectiones, &c.. diligens Lector nullo negotio notabit.

PRO-

PROPOSITIONES OMNIVM XVI. LIBRORVM, QVARVM EAS, QVÆ IN *lib. 5. 14. 15. & 16.* Euclidis non sunt, quamvis in numerum propositionum relatæ sint, alio charactere expressimus.

PRIMI LIBRI.

SVPER data recta linea terminata triangulum æquilaterum constituere.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

3 DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de majore æqualem minori rectam lineam detrahere.

4 Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumq; utriq;, habeant verò & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt; eritque triangulum triangulo æquale, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

5 ISOSCELIVM triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se æquales erunt.

6 SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: Et sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

7 SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, utraque utrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

8 SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, utrumque utrique, æqualia; habuerint verò & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

9 DATVM angulum rectilineum bifariam secare.

10 DATAM rectam lineam finitam bifariam secare.

11 DATA recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

12 SVPER datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

13 CVM recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam angulos facit: Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

14 SI ad aliquam rectam lineam, atque ad ejus punctum, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ductæ eos, qui ſunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

15 SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecuerint, angulos ad verticem æquales inter ſe efficient.

16 CVIVSCVNQVE trianguli uno latere producto, externus angulus utrolibet interno, & oppoſito major eſt.

17 CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis ſunt minores, *omnifariam ſumpti.*

18 OMNIS trianguli majus latus majorem angulum ſubtendit.

19 OMNIS trianguli major angulus majori lateri ſubtenditur.

20 OMNIS trianguli duo latera reliquo ſunt majora, quomodocunque aſſumpta.

21 SI ſuper trianguli uno latere, & ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius conſtitutæ fuerint: hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, majorem verò angulum continebunt.

22 EX tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum conſtituere. Oportet autem duas reliquas eſſe majores omnifariam ſumptas: quoniam uniuſcujuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta reliquo ſunt majora.

23 AD datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere.

24 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrumque utrique angulum verò angulo majorem ſub æqualibus rectis lineis contentum: Et baſin baſi majorem habebunt.

25 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrumq; utriq;, baſin verò baſi majorem: Et angulum ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo majorē habebunt.

26 SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, utrumque utrique, unumque latus uni lateri æquale, ſive quod æqualibus adjacet angulis, ſeu quod uni æqualium angulorum ſubtenditur: Et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

27 SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter ſe fecerit: Parallelæ erunt inter ſe illæ rectæ lineæ.

28 SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes, æqualem fecerit, aut

rit, aut internos, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales. Parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

29 IN parallelas rectas lineas recta incidens lineá: Et alternatim angulos inter ſe æquales efficit; & externum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem; & internos, & ad eaſdem partes, duobus rectis æquales facit.

30 QVÆ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ.

31 A dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

32 CVIVSCVNQVE trianguli uno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppoſitis eſt æqualis: Et trianguli tres interni anguli duobus ſunt rectis æquales.

33 RECTÆ lineæ quæ æquales, & parallelas lineas ad partes eaſdem conjungunt; Et ipſæ æquales, & parallelæ ſunt.

34 PARALLELOGRAMMORVM ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex adverſo & latera, & anguli: Atque illa bifariam ſecat diameter.

35 PARALLELOGRAMMA ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtitúta, inter ſe ſunt æqualia.

36 PARALLELOGRAMMA ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

37 TRIANGVLA ſuper eadem baſi conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.

38 TRIANGVLA ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.

39 TRIANGVLA æqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta: Et in eiſdem ſunt parallelis.

40 TRIANGVLA æqualia ſuper æqualibus baſibus, & ad eaſdem partes conſtituta: Et in eiſdem ſunt parallelis.

41 SI parallelogrammum cum triangulo eandem baſin habuerit, in eiſdemque fuerit parallelis: Duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli.

42 DATO triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

43 IN omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum, inter ſe ſunt æqualia.

44 AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

45 AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

46 A data rectilinea quadratum deſcribere.

47 IN triangulis rectangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur, quadratis.

48 SI quadratum, quod ab uno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

SECVNDI LIBRI.

1 SI fuerint duæ rectæ lineæ, secetur q; ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

2 SI recta linea secta sit utcunque; Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato.

3 SI recta linea secta sit utcunque: Rectangulum sub tota, & uno segmentorum comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur quadrato.

4 SI recta linea secta sit utcunque; Quadratum, quod à totâ describitur, æquale est & illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

5 SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, una cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod à dimidia describitur, quadrato.

6 SI recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adjiciatur: Rectangulum comprehensum sub tota cum adjecta, una cum quadrato à dimidia, æquale est quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adjecta componitur, tanquam ab una, descripto.

7 SI recta linea secetur utcunque; Quod à tota, quodque ab uno segmentorum, utraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

8 SI recta linea secetur utcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & uno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquam ab una linea describitur quadrato.

9 SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quę ab inęqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & ejus, quod à dimidia, & ejus quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

10 SI recta linea secetur bifariam, adjiciatur autem ei in rectum adjuncta

adjuncta quæpiam recta linea: Quod à tota cum adjuncta, & quod ab adjuncta, utraque simul quadrata, duplicia sunt & ejus, quod à dimidia, & ejus, quod à composita ex dimidia & adjuncta, tanquam ab una, descriptum sit, quadrati.

11 DATAM rectam lineam secare, ut comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

12 IN amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subtendente, majus est quadratis, quę fiunt à lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

13 IN oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente, minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso, & ab uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

14 DATO rectilineo æquale quadratum constituere.

TERTII LIBRI.

1 DATI circuli centrum reperire.

2 SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint: Recta linea, quæ ad ipsa puncta adjungitur, intra circulum cadet.

3 SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet: Et ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

4 SI in circulo duæ rectæ lineæ seſe mutuò secent non per centrum extensæ: Seſe mutuo bifariam non secabunt.

5 SI duo circuli seſe mutuo secent, nõ erit illorũ idem centrum.

6 SI duo circuli seſe mutuo interius tangant eorum non erit idem centrum.

7 SI in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima verò reliqua; aliarum verò propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore semper major est: Duæ autem solum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utrasque partes minimæ, vel maximæ.

8 SI extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, reliquæ verò ut libet: In cavam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper major est: In convexam verò peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa; quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est: Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad utrasque partes minimæ vel maximæ.

9 SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales: Acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

10 CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat.

11 SI duo circuli sese intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra: Ad eorum centra adjuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

12 SI duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adjungitur, per contactum transibit.

13 CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam uno, sive intus, sive extra tangat.

14 IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro: Et quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

15 IN circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper major.

16 QVÆ ab extremitate diametri cujusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: Et semicirculi quidem angulus, quovis angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.

17 A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum tanget circulum.

18 SI circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adjungatur recta quædam linea: quæ adjuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

19 SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

20 IN circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

21 IN

21 IN circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli sunt inter se æquales.

22 QVADRILATERORVM in circulis descriptorum anguli, qui ex adverso, duobus rectis sunt æquales.

23 SVPER eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.

24 SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

25 CIRCVLI segmento dato, describere circulum, cujus est segmentum.

26 IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripheriis insistunt, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant.

27 IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis insistunt, sunt inter se æquales, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant.

28 IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, majorem quidem majori, minorem autem minori.

29 IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.

30 DATAM peripheriam bifariam secare.

31 IN circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in majore segmento, minor recto: qui verò in minore segmento, major est recto. Et insuper angulus majoris segmenti, recto quidem major est: minoris autem segmenti angulus, minor est recto.

32 SI circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

33 SVPER data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

34 A dato circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

35 SI in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis unius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

36 SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera verò tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & convexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.

37 SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat, ſit autem, quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & convexam peripheriam aſſumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur quadrato; Incidens ipſa circulum tanget.

QVARTI LIBRI.

1 IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit major.

2 IN dato circulo triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.

3 CIRCA datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.

4 IN dato triangulo circulum inſcribere.

5 CIRCA datum triangulum circulum deſcribere.

6 IN dato circulo quadratum deſcribere.

7 CIRCA datum circulum quadratum deſcribere.

8 IN dato quadrato circulum deſcribere.

9 CIRCA datum quadratum circulum deſcribere.

10 ISOSCELES triangulum conſtituere, quod habeat utrumque eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum, duplum reliqui.

11 IN dato circulo Pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

12 CIRCA datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

13 IN dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribere.

14 CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum deſcribere.

15 IN dato circulo hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

16 IN dato circulo quintidecagonum, & æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

QVINTI LIBRI.

1 SI ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum, æque multiplices: quàm multiplex eſt unius una magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

2 SI pri-

2 SI prima ſecundę ęquè fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundę ęquè multiplex, atque ſexta quartę: Erit & compoſita prima cum quinta, ſecundę atque multiplex, atque tertia cum ſexta, quartę.

3 SI ſit prima ſecundę ęquè multiplex, atque tertia quartę; ſumantur autem ęquè multiplices primę, & tertię: Erit & ex ęquo ſumptarum utraque utriuſque ęquè multiplex; altera quidem ſecundę, altera autem quartę.

4 SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam ęquè multiplices primę & tertię, ad ęquè multiplices ſecundę & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptę fuerint.

5 SI magnitudo magnitudinis ęquè fuerit multiplex, atque ablata ablatę: Etiam reliqua reliquę ita multiplex erit, ut tota totius.

6 SI duę magnitudines duarum magnitudinum ſint ęquè multiplices, & detractę quędam ſint earundem ęquè multiplices: Et reliquę eiſdem aut ęquales ſunt, aut ęquè ipſarum multiplices.

7 ÆQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad ęquales.

8 INÆQVALIVM magnitudinum major ad eandem, majorem rationem habet, quàm minor: Et eadem ad minorem, majorem rationem habet, quàm ad majorem.

9 QVÆ ad eandem, eandem habent rationem, ęquales ſunt inter ſe: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque ſunt inter ſe ęquales.

10 AD eandem magnitudinem rationem habentium, quę majorem rationem habet, illa major eſt; Ad quam autem eadem majorem rationem habet, illa minor eſt.

11 QVÆ eidem ſunt eędem rationes, & inter ſe ſunt eędem.

12 SI ſint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum ſe habuerit una antecedentium ad unam conſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

13 SI prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia verò ad quartam, majorem rationem habuerit, quàm quinta ad ſextam. Prima quoque ad ſecundam majorem rationem habebit, quàm quinta ad ſextam.

14 SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem quàm tertia ad quartam; prima verò, quàm tertia, major fuerit; Erit & ſecunda major, quàm quarta. Quòd ſi prima fuerit ęqualis tertię, erit & ſecunda ęqualis quartę: Si verò minor, & minor erit.

15 PARTES cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuò respondent, ita sumantur.

16 SI quatuor magnitudines proportionales fuerint; Et vicissim proportionales erunt.

17 SI compositæ magnitudines proportionales fuerint; Hæ quoque divisæ proportionales erunt.

18 SI divisæ magnitudines sint proportionales; Hæ quoque compositæ proportionales erunt.

19 SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: Et reliquum ad reliquum, ut totum ad totum, se habebit.

20 SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima quàm tertia, major fuerit; Erit & quarta quàm sexta, major. Quod si prima quàm tertia fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; Sin illa minor, hæc quoque minor erit.

21 SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima, quàm tertia, minor fuerit; Erit & quarta, quàm sexta, major. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; Sin illa minor, hæc quoque minor erit.

22 SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

23 SI sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

24 SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam, eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam, eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

25 SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: Maxima & minima reliquis duabus majores erunt.

26 SI prima ad secundam habuerit majorem proportionem, quàm tertia ad quartam: habebit convertendo secunda ad primam minorem proportionem, quàm quarta ad tertiam.

27 SI prima ad secundam habuerit majorem proportionem, quàm tertia ad quartam: Habebit quoq; vicissim prima ad tertiam majorem proportionem, quàm secunda ad quartam.

28 SI prima ad secundam habuerit majorem proportionem, quàm tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda

cunda, ad ſecundam majorem proportionem, quàm compoſita tertia cum quarta ad quartam.

29 *SI compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam majorem habuerit proportionem, quàm compoſita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoq; dividendo prima ad ſecundam, majorem proportionem, quàm tertia ad quartam.*

30 *SI compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam habuerit majorem proportionem, quàm compoſita tertia cum quarta ad quartam: Habebit per converſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam, minorem proportionem, quàm tertia cum quarta ad tertiam.*

31 *SI ſint tres magnitudines, & alia ipſis æquales numero, ſitq; major proportio prima priorum ad ſecundam, quàm prima poſteriorum ad ſecundã: Item ſecunda priorũ ad tertiam major, quàm ſecunda poſteriorũ ad tertiam: Erit quoq; ex æqualitate, major proportio prima priorum ad tertiam, quàm prima poſteriorum ad tertiam.*

32 *SI ſint tres magnitudines, & alia ipſis æquales numero, ſitq; major proportio prima priorũ ad ſecundã, quàm ſecunda poſteriorum ad tertiam; Itẽ ſecunda priorũ ad tertiã major, quàm prima poſteriorũ ad ſecundã: Erit quoq; ex æqualitate, major proportio prima priorũ ad tertiã, quàm prima poſteriorũ ad tertiã.*

33 *SI fuerit major proportio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum major proportio, quàm totius ad totum.*

34 *SI ſint quotcunq; magnitudines, & alia ipſis æquales numero, ſitq; major proportio prima priorum ad primam poſteriorum, quàm ſecunda ad ſecundam; & hæc major, quàm tertia ad tertiam, & ſic deinceps: Habebunt omnes priores ſimul ad omnes poſteriores ſimul, majorem proportionẽ, quàm omnes priores, relicta prima ad omnes poſteriores, relicta quoq; prima; minorem autem, quàm prima priorum ad primam poſteriorum, majorem denique etiam quàm ultima priorum ad ultimam poſteriorum.*

SEXTI LIBRI.

1 TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe, ut baſes.

2 SI ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea: hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera. Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint: quæ ad ſectiones adjuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipſius trianguli latus parallela.

3 SI trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum

gulum recta linea secuerit & basin : Basis segmenta eanden habebunt rationem, quàm reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera: Recta linea, quæ à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat triangulum ipsius angulum.

4 ÆQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

5 SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

6 SI duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

7 SI duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant, reliquorum verò simul utrumque aut minorem, aut non minorem recto: Æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

8 SI in triangulo rectangulo ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: Quæ ad perpendicularem triangula tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

9 A data recta linea imperatam partem auferre.

10 DATAM rectam lineam insectam similiter secare, ut data altera recta secta fuerit.

11 DVABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinvenire.

12 TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem invenire.

13 DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinvenire.

14 ÆQVALIVM, & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulum uni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

15 ÆQVALIVM, & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

16 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub

sub mediis comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

17 SI tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: illæ tres rectę lineæ proportionales erunt.

18 A data recta linea dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere.

19 SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

20 SIMILIA polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

21 QVÆ eidem rectilineo sunt similia; & inter se sunt similia.

22 SI quatuor rectę lineę proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint; ipsę etiam rectę lineę proportionales erunt.

23 ÆQVIANGVLA parallelogramma inter se rationem habent eam, quę ex lateribus componitur.

24 IN omni parallelogrammo, quę circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.

25 DATO rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituere.

26 SI à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum: Hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

27 OMNIVM parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus similiterque positis ei, quod à dimidia describitur: maximum id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

28 AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cùm similes fuerint defectus & ejus, quod ad dimidiam applicatur, & ejus, cui simile deesse debet.

29 AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelo-
grammum applicare excedens figura parallelogramma, quæ
similis sit parallelogrammo alteri dato.

30 PROPOSITAM rectam lineam terminatam, extremam ac
media ratione secare.

31 IN rectangulis triangulis, figura quævis à latere rectam an-
gulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ prio
illi similes, & similiter positæ à lateribus rectum angulu
continentibus describuntur.

32 SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus propo-
tionalia habeant, secundum unum angulum composita fu-
rint, ita ut homologa eorum latera sint etiam parallela: Tu
reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collo
cata reperientur.

33 IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem
cum peripheriis, quibus insistunt, sive ad centra, sive ad p
ripherias constituti insistant: Insuper verò & sectores, quip
qui ad centra consistunt.

SEPTIMI LIBRI.

1 SI duobus numeris inæqualibus propositis, detrahatur se
per minor de majore, alterna quadam detractione, neq; r
quus unquam metiatur præcedentem, quoad assumpta sit u
tas: qui principio propositi sunt numeri, primi inter se eru

2 DVOBVS numeris datis non primis inter se, maxima
eorum communem mensuram reperire.

3 TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam c
rum communem mensuram reperire

4 OMNIS numerus, omnis numeri, minor majoris, aut p
est, aut partes.

5 SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pa
Et simul uterque utriusque simul eadem pars erit, quæ u
unius.

6 SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem
tes: Et simul uterque utriusque simul eædem partes erit
unus unius.

7 SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: E
liquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

8 SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati
reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

9 SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem p
Et vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertii, eadem
erit, vel eædem partes & secundus quarti.

10 SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſſim, quæ partes eſt primus tertii, aut pars, eędem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

11 SI fuerit ut totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, ut totus ad totum.

12 SI ſint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum unus antecedentium ad unum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

13 SI quatuor numeri proportionales ſint; Et viciſſim proportionales erunt.

14 SI ſint quotcunque numeri, & alii illis æquales multitudine, qui bini ſumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

15 SI unitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et viciſſim æquè unitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

16 SI duo numeri mutuo ſeſe multiplicantes fecerint aliquos: Geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt.

17 SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

18 SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

19 SI quatuor numeri proportionales fuerint: qui ex primo, & quarto fit numerus, æqualis erit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero. Et ſi qui ex primo, & quarto fit, numerus æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero: Ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

20 SI tres numeri proportionales fuerint, qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, qui à medio efficitur. Et ſi qui ſub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio deſcribitur: Ipſi tres numeri proportionales erunt.

21 MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationem habentes, major quidem majorem, minor verò minorem.

22 SI fuerint tres numeri, & alii ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

23 PRIMI inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

24 MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt.

25 SI

25 SI duo numeri primi inter se fuerint: qui unum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

26 SI duo numeri ad quempiam primi fuerint: etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

27 SI duo numeri primi inter se fuerint; Etiam ex uno eorum genitus ad reliquum primus erit.

28 SI duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi fuerint: Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.

29 SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans uterque seipsum fecerit aliquem: Et geniti ex ipsis primi inter se erunt. Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt; Et semper circa extremos hoc eveniet.

30 SI duo numeri primi inter se fuerint; Etiam uterque simul ad quemlibet illorum primus erit. Et si uterque simul ad unum aliquem illorum primus fuerit; Etiam qui in principio, numeri primi inter se erunt

31 OMNIS primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

32 SI duo numeri sese mutuò multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: Is etiam unum eorum, qui in principio, metietur.

33 OMNEM compositum numerum aliquis primus numerus metitur.

34 OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

35 NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipsis.

36 DVOBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

37 SI duo numeri numerum quempiam metiantur. Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

38 TRIBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur numerum.

39 SI numerum quispiam numerus metiatur: Ille quem metitur, partem habebit à metiente denominatam.

40 SI numerus partem habuerit quamlibet: metietur illum numerus à parte denominatus.

41 NVMERVM reperire, qui minimus cùm sit, habeat datas partes.

OCTAVI LIBRI

1 SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi

tremi verò ipsorum primi inter se fuerint: Ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

2 NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque jusserit quispiam, in data ratione.

3 SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium: Illorum extremi sunt inter se primi.

4 RATIONIBVS datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

5 PLANI numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.

6 SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius quispiam ullum metietur.

7 SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur: Is etiam metietur secundum.

8 SI inter duos numeros medii continua proportione ceciderint numeri: Quot inter eos medii continua proportione cadunt numeri, tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medii continua proportione cadent.

9 SI duo numeri sint inter se primi, & inter eos medii continua proportione ceciderint numeri: quot inter eos medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter utrumque eorum, ac unitatem medii continua proportione cadent.

10 SI inter duos numeros, & unitatem, continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter utrumque ipsorum & unitatem deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medii continua proportione cadent.

11 DVORVM quadratorum numerorum unus medius proportionalis est numerus. Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

12 DVORVM cuborum numerorum duo medii proportionales sunt numeri. Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

13 SI sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum faciat aliquos: qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primum positi multiplicantes jam factos fecerint aliquos: Ipsi quoque proportionales erunt; & semper circa extremos hoc eveniet.

14 SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus unius metietur latus alterius. Et si unius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

15 SI cubus numerus cubum numerum metiatur: & latus unius metietur latus alterius. Et si latus unius cubi latus alterius metiatur: & cubus cubum metietur.

16 SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus unius metietur alterius latus. Et si latus unius quadrati non metiatur latus alterius: neque quadratus quadratum metietur.

17 SI cubus numerus cubum numerum non metiatur; neque latus unius latus alterius metietur. Et si latus cubi unius latus alterius non metiatur; neque cubus cubum metietur.

18 DVORVM similium planorum numerorum unus medius proportionalis est numerus. Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

19 DVORVM similium solidorum numerorum duo medii proportionales sunt numeri. Et solidus ad solidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

20 SI inter duos numeros unus medius proportionalis cadat numerus: Similes plani erunt illi numeri.

21 SI inter duos numeros duo medii proportionales cadant numeri: Similes solidi sunt illi numeri.

22 SI tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus: Et tertius quadratus erit.

23 SI quatuor numeri, deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus: Et quartus cubus erit.

24 SI duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus; & secundus quadratus erit.

25 SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus; & secundus cubus erit.

26 SIMILES plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

27 SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

NONI LIBRI.

1. SI duo similes plani numeri multiplicantes se mutuò faciant quendam: Productus quadratus erit.

2 SI duo numeri se mutuò multiplicantes faciant quadratum, similes plani erunt.

3 SI cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem: Productus cubus erit.

4 SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem : Factus cubus erit.

5 SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum: Et multiplicans cubus erit.

6 SI numerus seipsum multiplicans cubum faciat; Et ipse cubus erit.

7 SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans quempiam faciat: Factus solidus erit.

8 SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab unitate quadratus est, & unum intermittentes omnes; Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes; Septimus verò cubus simul & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

9 SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post unitatem, sit quadratus: Et reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post unitatem sit cubus: Et reliqui omnes cubi erunt.

10 SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post unitatem, non sit quadratus; neque alius ullus quadratus erit; præter tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes. At si, qui post unitatem non sit cubus; neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes.

11 SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Minor majorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

12 SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum ultimum metiuntur, iidem & eum, qui unitati proximus est, metientur.

13 SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post unitatem, primus sit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

14 SI minimum numerum primi numeri metiantur; Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.

15 SI tres numeri deinceps proportionales fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

16 SI duo numeri, primi inter se fuerint: Non erit, ut primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

17 SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint; Non erit, ut primus ad secundum: ita ultimus ad alium quempiam.

18 DVOBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inveniri.
19 TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inveniri.
20 PRIMI numeri plures sunt, omni propositâ multitudine primorum numerorum.
21 SI pares numeri quotcunque componantur; Totus par erit.
22 SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.
23 SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: Et totus impar erit.
24 SI à pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.
25 SI à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.
26 SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.
27 SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.
28 SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.
29 SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem: Factus impar erit.
30 SI impar numerus parem numerum metiatur: Et illius dimidium metietur.
31 SI impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.
32 NVMERORVM à binario duplorum, unusquisque pariter par est tantùm.
33 SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantùm.
34 SI par numerus neque à binario duplus sit, neq; dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.
35 SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo, & ultimo æquales ipsi primo: Erit ut secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.
36 SI ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in ultimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit Perfectus.

DECIMI LIBRI.

1 DVABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si à majore

jore auferatur majus quàm dimidiū; & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur majus quàm dimidium; & hoc semper fiat; Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.

2 SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de majore, alterna quadam detractione, & reliqua minimè præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

3 DVABVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

4 TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem invenire.

5 COMMENSVRABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

6 SI duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerū: Commensurabiles erunt magnitudines.

7 INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

8 SI duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines.

9 QVÆ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata: inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata: Inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

10 SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima verò secundę fuerit commensurabilis. Et tertia quartę commensurabilis erit: Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis; Et tertia quartæ incommensurabilis erit.

11 PROPOSITÆ rectæ lineæ invenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentia.

12 QVÆ eidem magnitudini sunt commensurabiles: & inter se sunt commensurabiles.

13 SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera verò incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.

14 SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.

15 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima verò tantò plus possit, quàm secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; Et tertia tantò plus poterit, quàm quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: Quod si prima tantò plus possit, quàm secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit, quàm quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

16 SI duæ magnitudines commensurabiles componantur: Et tota magnitudo utrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum commensurabilis fuerit: Et quæ à principio magnitudines, commensurabiles erunt.

17 SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur: Et tota magnitudo utrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo uni ipsarum incommensurabilis fuerit: Et quæ à principio magnitudines, incommensurabiles erunt.

18 SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam dividat: Major tantò plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si major tantò plus possit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figura quadrata: In partes longitudine commensurabiles ipsam divider.

19 SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam dividat: Major tantò plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si major tanto plus possit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figura quadrata: In partes longitudine incommensurabiles ipsam dividet.

20 QVOD ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis ſecundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum, Rationale eſt.

21 SI rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine commenſurabilem.

22 QVOD ſub Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Irrationale eſt: Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.

23 QVOD à Media fit, ad Rationalem applicatum; latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.

24 MEDIÆ commenſurabilis, Media eſt.

25 QVOD ſub Mediis longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium eſt.

26 QVOD ſub Mediis potentia tantùm commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale eſt, vel Medium.

27 MEDIVM non ſuperat Medium Rationali.

28 MEDIAS invenire potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant.

29 MEDIAS invenire potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineant.

30 INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commenſurabiles, ita ut major quàm minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi commmenſurabilis.

31 INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commenſurabiles, ita ut major quàm minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

32 INVENIRE duas Medias potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita ut major plus poſſit quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

33 INVENIRE duas Medias potentia ſolùm commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita ut major plus poſſit, quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

34 INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quę faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale: Rectangulum verò ſub ipſis contentum, Medium.

35 INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ipſarum qua-

dratis, Medium: Rectangulum verò ſub ipſis contentum, Rationale.

36 INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quę faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.

37 SI duæ Rationales potentia tantùm commenſurabiles componantur; Tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

38 SI duæ mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, quæ Rationale contineant: Tota irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima.

39 SI duæ Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, quæ Medium contineant; Tota irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda.

40 SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod autem ſub ipſis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Major.

41 SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: Tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

42 SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: Tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

43 QVÆ ex binis nominibus, ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

44 QVÆ ex binis Mediis prima, ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

45 QVÆ ex binis Mediis ſecunda, ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

46 MAIOR ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

47 RATIONALE ac Medium potens, ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

48 BINA Media potens, ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

49 INVENIRE ex binis nominibus primam.

50 INVENIRE ex binis nominibus ſecundam.

51 INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

52 INVENIRE ex binis nominibus quartam.

53 INVENIRE ex binis nominibus quintam.

54 INVENIRE ex binis nominibus sextam.

55 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

56 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis prima appellatur.

57 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur.

58 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ vocatur Major.

59 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

60 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

61 QVADRATVM ejus, quæ est ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

62 QVADRATVM ejus, quæ ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

63 QVADRATVM ejus, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatū, latitudinē facit ex binis nominibus tertiam.

64 QVADRATVM Majoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

65 QVADRATVM ejus, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

66 QVADRATVM ejus, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

67 EI, quæ est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

68 EI, quæ est ex binis Mediis, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atque ordine eadem.

69 MAIORI commensurabilis, & ipsa Major est.

70 RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Medium potens est.

71 BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

72 SI Rationale & Medium componantur: Quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Major, vel Rationale ac Medium potens.

73 SI duo Media inter se incommensurabilia componantur: duæ reliquæ Irrationales fiunt; vel ex binis Mediis secunda, vel bina Media potens.

74 SI à Rationali Rationalis auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

75 SI à Media Media auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

76 SI à Media Media auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

77 SI à recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

78 SI à recta, recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositũ quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

79 SI à recta, recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

80 APOTOMÆ una tantùm congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti.

81 MEDIÆ Apotomæ primæ una tantùm congruit recta linea Media potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

82 MEDIÆ Apotomæ secundæ una tantùm congruit recta linea Media potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

83 MINORI una tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium.

84 EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, una tantùm congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum

& cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

85 EI, quæ cum Medio Medium totum facit, una tantùm congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

86 INVENIRE primam Apotomen.

87 INVENIRE secundam Apotomen.

88 INVENIRE tertiam Apotomen.

89 INVENIRE quartam Apotomen.

90 INVENIRE quintam Apotomen.

91 INVENIRE sextam Apotomen.

92 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima: Recta linea spatium potens Apotome est.

93 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda: Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.

94 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotome tertia: Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.

95 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta: Recta linea spatium potens, Minor est.

96 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta: Recta linea spatium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

97 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta: Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totũ efficit.

98 QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

99 QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam.

100 QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

101 QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

102 QVADRATVM ejus, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

103 QVADRATVM ejus, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

104 RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis, & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

105 RECTA linea Mediæ Apotomæ commensurabilis, & ipsa Mediæ Apotome est, atque ordine eadem.

106 RE-

106 RECTA linea Minori commensurabilis, & ipsa Minor est.

107 RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum rationali Medium totum efficiens est.

108 RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum medio Medium totum efficit, & ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.

109 MEDIO à rationali detracto: Recta linea, quæ reliquum spatium potest, una ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

110 RATIONALI à Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

111 MEDIO à Medio detracto, quod sit incommensurabile toti: Reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

112 APOTOME non est eadem, quæ ex binis nominibus.

113 QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus ejus, quę est ex binis nominibus, & in eadem proportione: & adhuc Apotome, quę fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.

114 QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt Apotome nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.

115 SI spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quę ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus Apotome, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens est Rationalis.

116 A Media infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

117 PROPOSITVM sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

VNDECIMI LIBRI.

1 RECTÆ lineæ pars quædam non est in subjecto plano, quædam verò in sublimi.

2 SI duæ rectæ lineæ se mutuò secent, in uno sunt plano. Atq; Triangulum omne in uno est plano.

3 SI duo plana se mutuò secent; communis eorum sectio est linea recta.

4 SI

4 SI recta linea rectis duabus lineis se mutuò secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat; illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.

5 SI recta linea rectis tribus lineis se mutuò tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat; Illæ tres rectæ in uno sunt plano.

6 SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

7 SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adjungitur, in eodem est cum parallelis plano.

8 SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

9 QVÆ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelæ.

10 SI duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, ad duas rectas se mutuò tangentes sint parallelæ, non autem in eodem plano; Illæ angulos æquales comprehendent.

11 A dato puncto in sublimi, ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

12 DATO plano à puncto, quod in illo datum est, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

13 DATO plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.

14 AD quæ plana, eadem recta linea recta est. Illa sunt parallela.

15 SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano; Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana.

16 SI duo plana parallela plano quopiam secentur; communes illorum sectiones sunt parallelæ.

17 SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; in easdem rationes secabuntur.

18 SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

19 SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos; communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

20 SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet ut ut assumpti tertio sunt majores.

21 OMNIS solidus angulus sub minoribus, quàm quatuor rectis angulis planis continetur.

22 SI fuerint tres anguli plani, quorum duo ut libet assumpti reliquo sint majores, comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales:

æquales: Fieri potest, ut ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.

23 EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt majores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

24 SI solidum parallelis planis contineatur: Adversa illius plana, parallelogramma sunt similia & æqualia.

25 SI solidum parallelepipedum plano secetur adversis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

26 AD datam rectam lineam, ejusque punctum, angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

27 A data recta linea, dato solido parallelepipedo simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

28 SI solidum parallelepipedū plano secetur per diagonios adversorum planorū: Bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

29 SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in isdem collocantur rectis lineis: Sunt inter se æqualia.

30 SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in iisdem collocantur rectis lineis: Inter se sunt æqualia.

31 SOLIDA parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: Æqualia sunt inter se.

32 SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine: Inter se sunt, ut bases.

33 SIMILIA solida parallelepipeda inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

34 ÆQVALIVM solidorum parallelepipedorū bases, & altitudines reciprocantur. Et quorum solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur: Illa sunt æqualia.

35 SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrique, in sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis verò, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adjunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

36 SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto à media linea solido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum verò prædicto,

37 SI

37 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint. Et solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

38 SI planum ad planum rectum fuerit, & ab aliquo puncto eorum, quæ in uno sunt planorum, ad alterum perpendicularis ducta fuerit. In communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

39 SI solidi parallelepipedi eorum, quæ ex adverso, planorum latera bifariam secta sint, per sectiones autem plana sint extensa: Communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuo secabunt.

40 SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin parallelogrammum, illud verò triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata.

DVODECIMI LIBRI.

1 QVÆ in circulis polygona similia, inter se sunt, ut à diametris quadrata.

2 CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata.

3 OMNIS pyramis triangularem habens basim, dividitur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; & in duo prismata æqualia, quæ duo prismata majora sunt dimidio totius pyramidis.

4 SI fuerint duæ pyramides ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum utraque divisa & in duas pyramides æquales inter se & similes toti; & in duo prismata æqualia: Ac eodem modo divisa sit utraque pyramidum, quæ ex superiore divisione natæ sunt, idq; semper fiat: Erit ut unius pyramidis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in una pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

5 SVB eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases: Inter se sunt, ut bases.

6 SVB eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases; inter se sunt, ut bases.

7 OMNE prisma triangularem habens basim, dividitur in tres pyramides æquales inter se triangulares bases habentes.

8 SI-

8 SIMILES pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorum laterum ratione.

9 ÆQVALIVM pyramidum, & triangulares baſes habentium, reciprocantur baſes, & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes habentium reciprocantur baſes, & altitudines: Illæ ſunt æquales.

10 OMNIS conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem.

11 SVB eadem altitudine exiſtentes coni, & cylindri, inter ſe ſunt, ut baſes.

12 SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.

13 SI cylindrus plano ſecetur adverſis planis parallelo: Erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

14 SVPER æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri, inter ſe ſunt, ut altitudines.

15 ÆQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes, & altitudines. Et quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes, & altitudines: Illi ſunt æquales.

16 DVOBVS circulis circa idem centrum exiſtentibus, in majori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribere, quod non tangat minorem circulum.

17 DVABVS ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in majori ſphæra ſolidum polyedrum inſcribere, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem.

18 SPHÆRÆ inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum.

TERTII DECIMI LIBRI.

1 SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur: Majus ſegmentum aſſumens dimidiam totius, quintuplum poteſt ejus, quod à dimidia totius deſcribitur, quadrati.

2 SI recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplum poſſit: Duplæ prædicti ſegmenti extrema ac media ratione ſectæ, majus ſegmentum reliqua pars eſt ejus, quæ à principio, rectæ.

3 SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur: minus ſegmentū aſſumens dimidiam majoris ſegmenti, quintuplum poteſt ejus, quod à dimidia majoris ſegmenti deſcribitur, quadrati.

4 SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur: Quod à tota, quodque à minore ſegmento, ſimul utraque quadrata; tripla ſunt ejus, quod à majore ſegmento deſcribitur, quadrati.

5 SI recta

5 SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; apponaturque ei æqualis majori segmento: Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & majus segmentum est, quæ à principio, recta linea.

6 SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumque segmentum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

7 SI pentagoni æquilateri tres anguli, sive qui deinceps, sive qui non deinceps sint, æquales fuerint: Æquiangulum erit ipsum pentagonum.

8 SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ: Hæ extrema & media ratione se mutuò secant, & majora ipsarum segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

9 SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & majus ejus segmentum est hexagoni latus.

10 SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

11 SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

12 SI in circulo triangulum æquilaterum describatur: Trianguli latus potentia triplum est ejus lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

13 PYRAMIDEM constituere, & data sphæra complecti, & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit sesquilatera lateris ipsius pyramidis.

14 OCTAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit dupla lateris ipsius octaedri.

15 CVBVM constituere, & sphæra complecti, qua & priores figuras, & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

16 ICOSAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras, & demonstrare, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

17 DODECAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & prædictas figuras, & demonstrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

18 LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

QVARTI DECIMI LIBRI.

1 QVÆ ex centro circuli cujuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt utriuſq; lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

2 SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur; ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones.

3 SI in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur: quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, utraq; ſimul quadrata, quintupla ſunt ejus, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati.

4 SI latus hexagoni alicujus circuli ſecetur extrema ac media ratione: majus illius ſegmentū erit latus decagoni ejuſdē circuli.

5 IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum, eidem ſphæræ inſcriptorum.

6 SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus pentagoni: Erit quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Dodecaedri ſuperficiei æquale.

7 SI ex centro circuli triangulum Icoſaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus trianguli: Erit quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Icoſaedri ſuperficiei æquale

8 RECTANGVLVM contentum ſub tribus quartis partibus diametri alicujus circuli, & quinque ſextis partibus lineę ſubtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti, æquale eſt dicto pentagono.

9 SVPERFICIES Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri.

10 SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione: Erit ut recta potens id, quod à tota, & id, quod à majori ſegmento ad rectam potentem id, quod à tota, & id, quod à minori ſegmento, ita latus cubi ad latus Icoſaedri eidem ſphæræ cum cubo inſcripti.

11 DODECAEDRVM ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt ut cubi latus ad latus Icoſaedri, in una eademque ſphæra.

12 LATVS trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineæ perpendicularis ab uno angulo ad latus oppoſitum deductæ.

13 SI ſphæræ diameter fuerit Rationalis: Erit tàm ſuperficies Tetraedri, quàm Octaedri in ea ſphæra, Media.

14 SI

14 SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribantur. Erit basis Tetraedri sesquitertia basis Octaedri; superficies autem Octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri.

15 RECTA linea ex angulo quovis Tetraedri in sphæra descripti per centrum sphæræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, estque perpendicularis ad dictam basim.

16 OCTAEDRVM in sphæra descriptum dividitur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis vero utriusq; est quadratum subduplum quadrati diametri sphęræ.

17 TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, ut rectangulum sub linea potente vigintiseptem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes ejusdem lateris comprehensum, ad quadratum diametri sphæræ.

Vel ut Campanus habet.

TETRAEDRVM sphęrę impositum ad Octaedrum in eadem sphęra descriptum se habet, ut rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquitertia trium quartarum partium lateris Tetraedri, & sub linea superquintupartiente vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris Tetraedri contentum, ad quadratum diametri sphæræ.

18 LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basim oppositam demissa, tripla est ejus perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem basim deducitur.

19 SI Octaedrum sphæræ inscribatur. Erit semidiameter sphæræ potentia tripla ejus perpendicularis, quæ ex centro sphæræ in basin quamcunque Octaedri ducitur.

20 DVPLVM quadrati ex diametro cujuslibet sphæræ descripti, æquale est superficiei cubi in illa sphęra collocati; Perpendicularis autem à centro sphæræ in aliquam basin cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi:

21 IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum & Octaedri triangulum, ejusdem sphæræ.

22 SI Octaedrum, atque Tetraedrum eidem sphæræ inscribantur: Erit Octaedrum ad triplum Tetraedri, ut latus Octaedri ad latus Tetraedri.

23 SI recta linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & majus ejus segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus ejus segmentum: Erit majus segmentum prioris lineæ latus Icosaedri, minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri ejus sphæræ, cujus recta linea proposita diameter existit.

24 SI latus Octaedri potuerit majus & minus segmentū rectæ li-

nea extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosaedrii in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.

25 SI recta linea divisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus Octaedri ejus sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.

26 SI latus Tetraedri possit majus & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ: Latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.

27 CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est ut superficies cubi ad Octaedri superficiem: Item ut latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

28 SI sint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita ut sit eadem antecedens omnium: Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam ejusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

29 QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab uno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

30 SI Cubus, & Tetraedrum in eadem sphæra describantur: Erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, ut latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex uno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.

31 LATVS Tetraedri potentia sesquialterum est axis, seu altitudinis ipsius; Axis verò, sive altitudo Tetraedri potentia sesquitertia est lateris cubi in eadem sphæra descripti.

32 CVBVS triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti.

QVINTI DECIMI LIBRI.

1 IN dato cubo pyramidem describere.
2 IN data pyramide Octaedrum describere.
3 IN dato cubo Octaedrum describere.
4 IN dato Octaedro cubum inscribere.
5 IN dato Icosaedro Dodecaedrum inscribere.
6 IN dato Octaedro pyramidem describere.
7 IN dato Dodecaedro Icosaedrum describere.
8 IN dato Dodecaedro cubum describere.
9 IN dato Dodecaedro Octaedrum describere.

10 IN dato Dodecaedro pyramidem deſcribere.
11 IN dato Icoſaedro cubum deſcribere.
12 IN dato Icoſaedro Pyramidem deſcribere.
13 IN dato cubo Dodecaedrum deſcribere.
14 IN dato cubo Icoſaedrum deſcribere.
15 IN dato Icoſaedro Octaedrum deſcribere.
16 IN dato Octaedro Icoſaedrum deſcribere.
17 IN dato Octaedro Dodecaedrum deſcribere.
18 IN data pyramide Cubum deſcribere.
19 IN data pyramide Icoſaedrum deſcribere.
20 IN data pyramide Dodecaedrum deſcribere.
21 IN dato ſolido regulari ſphæram deſcribere.

SEXTI DECIMI LIBRI.

1 SI in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: Erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrũ interius proportionis, quam habet majus ſegmentũ ad minus rectę lineę diviſę extrema ac media ratione, triplicata.

2 LINEA perpendicularis ex quovis angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur à recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione.

3 SI ab angulis trianguli pyramidis ducantur rectæ oppoſitę latera ſecantes extrema ac media ratione, ita ut propè quemvis angulũ ſit majus ſegmentum unius lateris, & minus alterius; Hę ſectionibus ſuis in medio producent baſin Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alii triangulo æquilatero, cujus anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri.

4 MINVS ſegmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione ſecti duplum eſt potentia lateris Icoſaedri in ea Pyramide deſcripti.

5 LATVS cubi potentia dimidium eſt lateris pyramidis in eo deſcriptæ: Latus verò pyramidis duplum eſt longitudine lateris Octaedri ſibi inſcripti: Latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti Octaedri.

6 LATVS Dodecaedri majus ſegmentum eſt rectæ, quæ potentia eſt dimidia lateris pyramidis ſibi inſcriptæ.

7 SI in cubo deſcribatur & Icoſaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icoſaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

8 LATVS pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti.

9 LATVS pyramidis potentia Octodecuplum est rectę extrema ac media ratione sectæ, cujus majus segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

10 SI in Octaedro Icosaedrum describatur: Erit latus Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris Octaedri extrema ac media ratione divisi.

11 LATVS Octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in seipso descripti.

12 LATVS Icosaedri majus segmentum est ejus rectę extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris Octaedri in Icosaedro descripti.

13 LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam ejus, quam habet majus segmentum ad minus rectæ lineæ divisæ exterma ac media ratione: Latus verò Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionē habet, quam minus segmentū ad majus ejusdē rectę lineę.

14 LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscripti pyramidis.

15 SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; Relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

16 LATVS Dodecaedri minus segmentum est rectę lineæ extrema ac media ratione divisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti.

17 DIAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris pyramidis in eo descriptę sesquialterum.

18 LATVS Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus se habet, ut minus segmentum lineæ perpendicularis ab uno angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, atque extrema ac media ratione divisæ, ad partem ejusdem lineæ inter centrum pentagoni & latus ejusdem positæ.

19 SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque ejus segmentum à toto latere Icosaedri sublatum; a reliqua quoque recta pars rursum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.

20 CVBVS sibi inscriptæ pyramidis triplus est.

21 PYRAMIS sibi inscripti Octaedri dupla est.

22 CVBVS sibi inscripti Octaedri sextuplex est.

23 OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

24 OCTAEDRVM sibi inscriptæ pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

25 PYRAMIS sibi inscripti cubi nuncupla est.

26 OCTAEDRVM ad sibi inscripti in Icosaedrum proportionem

tionem habet, quam duæ baſes Octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.

27 ICOSAEDRVM ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum Icoſaedro ſphæra deſcripti, & ex proportione triplicata ejus, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum conjungentem.

28 DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cujus quidem baſis à quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaq; parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, at verò altitudo ab altitudine, ſive latere cubi, minore ſegmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.

29 DODECAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitã ex proportione triplicata ejus, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra baſium Dodecaedri oppoſitarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti.

30 DODECAEDRVM Pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, latitudo verò tertiæ parti minoris ſegmenti lateris ejuſdem cubi, altitudo denique à latere ejuſdem cubi deficit minore ſegmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ejuſdem minus ſegmentum exiſtit: Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti eſt æqualis, altitudo verò minus ſegmentum ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ejuſdem ſegmentum minus exiſtit, ita ut amborum altitudines ſimul altitudini, ſive lateri ejuſdem cubi ſint æquales.

31 OCTAEDRVM excedit ſibi deſcriptum Icoſaedrum Parallelepipedo, cujus baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, altitudo verò majus ſegmentum ſemidiametri Octaedri extrema ac media ratione ſectæ.

INDEX PROBLEMATVM AC THEOREMATVM, QVÆ PRÆTER PROpositiones in sexdecim libris Euclidis contentas in hisce commentariis demonstrantur.

IN PRIMO LIBRO.

1 REGVLVM pro lineis rectis ducendis examinare, num sit, nec ne. *Ad defin. 4.*

2 ANGVLVM rectilineum examinare, num rectus sit, an obtusus, vel acutus. *Ad defin 12.*

3 NORMAM pro angulis rectis constituendis examinare, num accuratè fabricata sit. *Ad defin. 12.*

4 CIRCVLVS bifariam à diametro secatur. *Ad def. 18.*

5 CIRCVLVS à linea per centrum non transeunte secatur in partes inæquales, majorq; est ea, in qua centrum. *Ad def. 18.*

6 DVÆ rectæ lineæ non habent unum & idem segmentum commune. *Ad Axioma 10.*

7 DVÆ rectæ in uno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessariò se mutuò in eo puncto intersecabunt. *Ad Ax. 11.*

8 OMNES anguli recti sunt inter se æquales. *Ad Axioma 12.*

9 DVÆ rectæ lineæ spatium non comprehendunt *Ad Axioma 14.*

10 SVPER data recta linea terminata triangulum Isosceles, & Scalenum constituere. *Ad propos. 1.*

11 OMNE triangulum æquilaterum est etiam æquiangulum. *Coroll. propos. 5.*

12 OMNE triangulum æquiangulum est etiam æquilaterum. *Coroll. propos. 6.*

13 SI trianguli cujuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basin fiant æquales: Et duo latera illa æqualia inter se erunt. *Ad propos. 6.*

14 SI duo triangula bases habuerint æquales, & angulos super bases constitutos æquales, utrumq; utrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, utrumque utrique, quæ videlicet æqualibus angulis subtenduntur, angulosque reliquos hisce lateribus inclusos, æquales. *Ad propos. 8.*

15 SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus utrumque utrique æqualia, habuerint verò & basim basi æqualem: Æquiangula inter se erunt, & æqualia. *Coroll. propos. 8.*

16 DVÆ

16 DVÆ lineę rectę se mutuò secantes efficiunt ad punctũ sectionis quatuor angulos quatuor rectis æquales. *Coroll 1. propos. 15.*

17 QVOTLIBET anguli circa unum & idem punctum constituti, quatuor rectis sunt æquales. *Coroll. 2. propos. 15.*

18 SI ad aliquam rectam lineam, ad ejusque signum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint: ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt. *Ad propos. 15.*

19 SI quatuor rectæ lineæ ab uno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint; Erunt quælibet duæ lineæ adversæ in rectũ sibi, & continuũ conjunctæ. *Ad propos 15.*

20 A B uno puncto ad eandem lineam rectam non possunt duci plures lineæ, quàm duæ inter se æquales *Ad propos. 16.*

21 A B uno puncto ad eandem lineam rectam non possunt duci plures lineæ perpendiculares, quàm una. *Ad propos. 17.*

22 IN omni triangulo, cujus unus angulus fuerit rectus, aut obtusus, reliqui sunt acuti. *Coroll. 1. propos. 17.*

23 SI linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, unum obtusum, & acutum alterum: Linea perpendicularis ex quovis ejus puncto ad aliam illam rectam dimissa cadit ad partes anguli acuti. *Coroll. 2. propos. 17.*

24 OMNES tres anguli in triangulo æquilatero, & duo supra basin in Isoscele, sunt acuti. *Coroll. 3. propos. 17.*

25 OMNES tres anguli in triangulo Scaleno sunt inæquales. *Coroll. propos. 18.*

26 OMNIVM rectarum ex quovis puncto ad rectam quamcunque ductarum, ea quæ perpendicularis est, minima existit. *Coroll. propos. 19.*

27 SI trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansque angulum recta linea ad basin ducta in partes inæquales ipsam dividat: Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & majus quidem illud, quod cum majori basis segmento coincidit, minus verò quod cum minori. *Ad propos. 19.*

28 SI trianguli duo latera inæqualia fuerint; Linea recta bifariam dividens angulũ ipsis cõtentum, secabit basin in partes inæquales, majusq; segmentum erit propè majus latus. *Ad propos. 19.*

29 SI trianguli angulum recta linea bifariam dividens, basin bifariam quoque secet: Erunt duo latera angulum continentia æqualia. Quod si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam divjdit *Ad propos. 19.*

30 IN triangulo aliquo duci possunt duæ rectæ, una quidem ab extremo lateris, altera verò à puncto propè alterum extremum ejusdem lateris, intra triangulum concurrentes, quæ majores sint duobus lateribus triangulis. *Ad propos. 21.*

31 SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, utrumq; utrique: Vnumque latus uni lateri æquale, sive quod æqualibus adjacet angulis, seu quod uni æqualium angulorum subtenditur: Ipsa æqualia inter se erunt. *Coroll. propos.* 26.

32 IN triangulo æquilatero, sive Isoscele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenso ducta, dividensque vel angulum vel basim bifariã, perpendicularis est ad basim; Et si quidem angulum bifariam dividat; secabit quoque basim bifariam; si verò basim secet bifariam, dividet quoque angulum bifariam. Et contrà, Linea perpendicularis ad basim ducta dividit & basim, & angulum bifariam. *Ad propos.* 26.

33 TRIANGVLVM, in quo linea recta ab uno angulorum ducta ad basim perpendicularis dividit vel basim, vel angulum bifariam, habet duo latera dictum angulum comprehendentia æqualia. Et si quidem basis dividatur bifariam, angulus quoq; bifariam secabitur, si verò angulus bifariam secetur, basis quoque dividetur bifariam. *Ad propos* 26.

34 SI ab uno puncto duæ rectę lineæ angulum facientes infinitè producantur, semper magis ac magis inter se distabunt, ōnemq; finitam magnitudinem ipsarum distantia excedet. *Ad propos.* 28.

35 SI duarum parallelarum rectarũ linearum alteram secet quædam recta linea, reliquã quoq; productam secabit. *Ad propos.* 28.

36 SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales; quarum extrema puncta per lineam rectam conjungantur; Erit perpendicularis ex quovis puncto hujus rectæ ad priorem rectam demissa, utrilibet priorum perpendicularium æqualis. *Ad propos.* 28.

37 SI ad rectam lineam duę perpendiculares rectę lineę erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectã conjungantur: Efficiet hæc recta cum utraque perpendiculari angulum rectum. *Ad propos.* 28.

38 SI in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum una earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum: Duæ illæ rectæ minus semper inter se distabunt ad eas partes, ubi est angulus acutus, ex altera verò parte semper inter se magis distabunt. *Ad propos.* 28.

39 SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat: Duæ illę rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores. *Ad propos.* 28. *Estque axioma* 13. *Hæ porrò quatuor ultimæ propositiones demonstrantur ex solis* 28. *propositionibus Euclidis, nulla adhibita proprietate parallelarum.*

40 PARALLELOGRAMMVM constituere, cujus unus angu-

angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraq; angulum illum comprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia. *Ad propos.* 31.

41 A dato puncto extra datam rectam lineam, rectam lineam ducere, quæ cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem. *Ad propos.* 31.

42 A dato puncto in extremo lineæ rectæ, ad ipsam, licet non producatur, aut produci non possit, perpendicularem lineam excitare. *Ad propos* 31.

43 A dato puncto in extremo ferè plani, & extra lineam rectam, ad ipsam rectam lineam perpendicularē demittere. *Ad propos.* 31.

44 SI ab vno angulo trianguli linea recta extra triangulum ducatur faciens externum angulū æqualem duobus internis, & oppositis: Illa linea erit in directū ipsi lateri constituta. *Ad prop.* 32.

45 OMNES anguli figuræ cujusvis rectilineæ, sunt æquales bis tot rectis, quota ipsa est inter figuras rectilineas. *Ad propos.* 32.

46 OMNES anguli figuræ rectilineæ cujusvis æquales sunt bis tot rectis, demptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos. *Ad propos.* 32.

47 SI singula latera figuræ cujusvis rectilineæ producantur versus eandem partem; omnes anguli externi æquales sunt quatuor tantùm rectis. *Ad propos.* 32.

48 SI pentagoni singula latera producantur in utramq; partem, ita vt quælibet duo extra pentagonum coeant: Efficientur quinq; anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus solùm rectis. *Ad propos.* 32.

49 TRES anguli cujuslibet trianguli simul sumpti æquales sunt tribus ăgulis cujusvis alterius trianguli simul sumptis. *Coroll.* 1. *propos.* 32.

50 IN triangulo Isoscele, si angulus à lateribus æqualibus comprehensus fuerit rectus, erit utervis æqualium angulorum supra basim semirectus; si verò obtusus, minor semirecto, si deniq; acutus, major semirecto. *Coroll.* 2. *propos.* 32.

51 QVILIBET angulus trianguli æquilateri continet duas tertias partes vnius recti, vel vnam tertiam partem duorum rectorum. *Coroll.* 2. *propos* 32.

52 SI ab vno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constituentur duo triangula scalena, quorum vnumquodq; habet vnum angulum rectum prope perpendicularem, alium verò perpendiculari oppositum æqualem duabus tertiis partibus unius recti, reliquum denique æqualem tertiæ parti unius recti. *Coroll.* 4. *propos.* 32.

53 ANGVLVM rectum in tres angulos æquales dividere. *Ad propos.* 32.

54 OMNE

54 OMNE quadrilaterum habens latera oppoſita æqualia, eſt parallelogrammum. *Ad propoſ. 34.*

55 OMNE quadrilaterum habens angulos oppoſitos æquales, eſt parallelogrammum. *Ad propoſ. 34.*

56 OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum. *Ad propoſ. 34.*

57 IN quadrato & Rhombo anguli oppoſiti bifariam ſecantur à diametro. *Ad propoſ. 34.*

58 IN altera parte longiori, & Rhomboide, anguli oppoſiti non bifariam ſecantur à diametro. *Ad propoſ. 34.*

59 IN quadrato, & altera parte longiori, duæ diametri ſunt inter ſe æquales. *Ad propoſ. 34.*

60 IN Rhombo, & Rhomboide, duæ diametri non ſunt inter ſe æquales. *Ad propoſ. 34.*

61 IN omni parallelogrammo diametri ſe mutuò bifariam dividunt. *Ad propoſ. 34.*

62 OMNE quadrilaterum, in quo diametri ſe mutuò bifariam dividunt, parallelogrammum eſt. *Ad propoſ. 34.*

63 RECTA linea ſecans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, dividit parallelogrammum quoq; bifariam. Et recta linea dividens parallelogrammum bifariam quovis modo, ſecat quoque diametrum bifariam. *Ad propoſ. 34.*

64 A quovis dato puncto lineam rectam ducere, quæ parallelogrammum datum ſecet bifariam. *Ad propoſ. 34.*

65 INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam, datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum cuivis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum, & eum, qui lineis datis continetur, minores eſſe duobus rectis. *Ad propoſ. 34.*

66 IN aliquo triangulo conſtitui poſſunt intra ipſum duæ rectæ à duobus punctis baſis, æquales duobus lateribus. *Ad propoſ. 34.*

67 IN omni figura rectilinea latera habente numero paria, ſi quidem fuerit æquilatera & æquiangula, duo quælibet latera oppoſita parallela inter ſe ſunt. *Ad propoſ. 34.*

68 PARALLELOGRAMMA æqualia ſuper eandem baſin, ad eaſdemque partes conſtituta, inter eaſdem ſunt parallelas. *Ad propoſ. 35.*

69 PARALLELOGRAMMA æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdem partes conſtituta, inter eaſdem ſunt parallelas. Et parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta. *Ad propoſ. 36.*

70 SI duo parallelogramma inter eaſdem parallelas habeant baſes inæquales, illud, cujus baſis major eſt, majus erit. Et contrà, ſi duo

si duo parallelogramma sunt inæqualia inter easdem parallelas, basis majoris major erit. *Ad propos. 36.*

71 TRIANGVLA, quorum duo latera unius æqualia sint duobus lateribus alterius, utrumque utrique, & angulus unius illis lateribus contentus major angulo alterius, si quidem ambo simul duobus sint rectis æquales, æqualia sunt: Si verò duobus sint rectis majores, minus illud est, quod majorem habet angulum; si denique sint minores duobus rectis, majus illud erit, quod majorem angulum habet. *Ad propos. 37.*

72 SI à quovis angulo trianguli linea recta ducatur dividens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secabit. *Ad propos. 38.*

73 A puncto quovis dato in uno latere trianguli propositi lineam rectam ducere, quæ bifariam secet triangulum datum. *Ad propos. 38.*

74 LINEA recta secans duo trianguli latera bifariam; reliquo lateri est parallela. *Ad propos. 39.*

75 OMNE quadrilaterum, quod ab utraque diametro bifariam dividitur, parallelogrammum est. *Ad propos. 39.*

76 TRIANGVLA æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basim, super æquales bases erunt constituta. *Ad propos. 40.*

77 SI duo triangula inter easdem parallelas habeant bases inæquales, illud, cujus basis major est, majus erit. Et contrà, si duo triangula sint inæqualia inter easdem parallelas, basis majoris major erit. *Ad propos. 40.*

78 TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum oppositæ bases æquales sint, sunt inter se æqualia. Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas æquales. *Ad propos. 40.*

79 TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum oppositæ bases sint inæquales, inæqualia sunt, majusq; est illud, cujus basis major est. Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas inæquales, majorq; est illa, cujus trapezium majus est. *Ad propos. 40.*

80 TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorum oppositæ bases sint æquales, æqualia sunt. Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent bases oppositas æquales. *Ad propos. 40.*

81 TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorum oppositæ bases sint inæqnales, inæqualia sunt, majusque est illud, cujus basis major est: Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent oppositas inæquales bases, majorque est illa, cujus trapezium majus est. *Ad propos. 40.*

82 SI in triangulo linea recta uni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo opposito ducta, dividensque alterutram parallelarum bifariã, dividit quoq; alteram bifariam. *Ad propos.* 40.

83 DATAM rectam lineam finitam in quotlibet partes æquales secare. *Ad propos.* 40.

84 SI triangulum duplam habuerit basim, fueritq; in eisdem parallelis cum parallelogrammo: Triangulum parallelogrammo æquale est. *Ad propos.* 41.

85 SI parallelogrammum & triangulum æquales habuerint bases, in eisdemque fuerint parallelis: Duplum erit parallelogrammum trianguli. *Ad propos.* 41.

86 SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemque habuerint basim, vel æquales, & ad easdem partes constitutas: Erunt ipsa in eisdem parallelis: Et si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eisdemque parallelis: Erunt bases æquales, si non sit eadem. *Ad propos.* 41.

87 SI triangulum & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint parallelis, major autem linea parallela trapezii sit basis trianguli: Erit trapezium minus duplo trianguli: Si verò minor linea trapezii basis sit trianguli, erit trapezium majus duplo trianguli. *Ad propos.* 41.

88 TRAPEZIVM habens duo latera opposita parallela, duplum est trianguli, quod basim habet unum latus trapezii conjungens duas parallelas; verticem verò in medio puncto lateri oppositi: *Ad propos.* 41.

89 DATO parallelogrammo æquale triangulum constituere, in dato angulo rectilineo. *Ad propos.* 42.

90 SI parallelogrammum divisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita ut ex illis duo adversa sint æqualia: Consistent reliqua duo circa diametrum. *Ad propos.* 43.

91 AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo constituere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo. *Ad prop.* 44.

92 DATIS duobus rectilineis inæqualibus, excessum majoris supra minus inquirere. *Ad propos.* 45.

93 LINEARVM æqualium æqualia sunt quadrata Et quadratorum æqualium æquales sunt lineæ. *Ad propos.* 46.

94 TRES numeros invenire, ita ut quadrati numeri duorum quadrato numero reliqui sint æquales. *Ad propos.* 47.

95 SI in quadrato quovis diameter ducatur, quadratum à diametro descriptum, duplum erit prædicti quadrati. *Ad prop.* 47.

96 QVADRATVM diametri figuræ altera parte longioris æquale est duobus quadratis laterũ inæqualium. *Ad propos.* 47.

97 SI fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis opposita sint æqualia: Erunt duo quadrata reliquorum duorum

duorum laterum unius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius. *Ad propos.* 47.

98 DVOBVS quadratis inæqualibus propositis, invenire alia duo quadrata, quæ & æqualia sint inter se, & simul sumpta æqualia duobus inæqualibus propositis simul sumptis. *Ad prop.* 47.

99 PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, invenire id, quo plus potest major, quàm minor. *Ad propos.* 47.

100 PROPOSITIS quotcunque quadratis, sive æqualibus, sive inæqualibus, invenire quadratum omnibus illis æquale. *Ad propos.* 47.

101 PROPOSITIS duobus quadratis quibuscunq;, alteri illorum adjungere figuram, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita ut tota figura composita sit etiam quadrata. *Ad propos.* 47.

102 COGNITIS duobus lateribus quibuscunq; trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris pervenire. *Ad propos* 47.

103 *SI* ex angulo à duobus lateribus inæqualibus trianguli comprehenso ad basin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum: Secabitur basis in partes inæquales, majorq; pars juxta majus latus erit. Et contrà, si basis à perpendiculari secetur non bifariam: Erunt duo latera inæqualia, majusq; illud erit, quod majori basis segmento adjacet. *Ad propos.* 47.

104 IN omni triangulo, parallelogramma quæcunq; super duobus lateribus descripta, æqualia sunt parallelogrammo super reliquo latere constituto, cujus alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conveniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli illius producantur *Ad propos.* 47.

105 TRIANGVLORVM comparationes in primo libro demonstratas explicare. *Ad finem lib.* 1.

106 QVANDO duo latera unius trianguli duobus lateribus alterius triangulí æqualia sunt, utrumq; utriq;, & unus angulus uni angulo, qui uni æqualium laterum opponitur; bases æquales esse nequeunt, nisi quando angulus in utroq; triangulo alteri lateri æquali oppositus vel est minor recto, vel non minor recto. *Ad finem lib.* 1.

107 QVANDO duo latera unius trianguli duobus lateribus alterius trianguli æqualia sunt, utrumq; utriq;, & unus angulus uni angulo, ita ut unus uni æqualium laterum, & alter alteri opponatur: Nihil colligi potest. *Ad finem lib.* 1.

108 QVANDO duo latera unius trianguli duobus lateribus alterius trianguli æqualia sunt, utrumq; utriq;, & angulus in uno triangulo illis lateribus comprehensus, æqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur uni illorum laterum: Nihil potest inferri. *Ad finem lib.* 1.

IN

IN SECVNDO LIBRO.

1 IN omni parallelogrammo, si unus angulus duntaxat detur rectus, rel qui etiam tres recti erunt. *Ad defin.* 1.

2 SI fuerint duæ rectæ lineæ, secenturq; ambæ in quotcunq; segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quę sub singulis segmentis unius, & quolibet segmentorū alterius continentur, rectangulis. *Ad propos.* 1.

3 SI sint duę rectæ lineæ, secenturque ambę utcunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, una cum rectangulo sub una parte unius, & una parte alterius comprehenso, æquale est eis, quæ sub totis lineis, & dictis partibus mutuò continentur, rectangulis, una cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso. *Ad propos.* 1.

4 SI linea recta secetur in quotcunque segmenta: Quadratum, quod à toto fit, æquale est eis, quę sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis. *Ad propos* 2.

5 PARALLELOGRAMMA circa diametrum quadrati sunt quadrata. *Ad propos.* 4.

6 DIAMETER cujusvis quadrati dividit ejus angulos bifariam *Ad propos.* 4.

7 SI linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa descriptum, quadruplum est quadrati ex hac descripti. Et si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum est lateris hujus. *Ad propos.* 4.

8 NVMERVM quadratum invenire, cum quo datus quivis numerus quadratum quoque numerum constituat. Et vicissim quadratum numerum reperire, à quo datus quivis numerus subtractus relinquat numerum quoq; quadratum. *Ad propos.* 4. 5. 6. & 8.

9 SI tres lineæ habeant proportionalitatem Arithmeticam; Rectangulum sub extremis contentum, una cum quadrato excessus, æquale est quadrato mediæ. *Ad propos.* 6.

10 SI recta linea in partes inæquales secetur: Earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, una cum quadrato ejus lineę, qua major pars superat minorem. *Ad propos.* 7.

11 IN omni triangulo obtusangulo, linea perpendicularis ducta ex quovis acutorum angulorum ad latus oppositum, cadit in ipsum latus ad partes anguli obtusi protractum. *Ad propos.* 12.

12 SI in triangulo quadratum unius lateris majus sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, obtusus est. *Ad propos.* 12.

13 SI in triangulo quadratum unius lateris majus sit quadratis reli-

reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab opposito angulo demissa abscindit: Demissa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, obtusus. *Ad propos. 12.*

14 AMBLYGONIA triangula constituere laterum commensurabilium, in quibus segmentum inter angulum obtusum, & perpendicularem commensurabile etiam sit latus. *Ad propos 12.*

15 SI in triangulo quadratum unius lateris minus sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, acutus erit. *Ad propos. 13.*

16 SI in triangulo quadratum unius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub recta linea inter angulum priori lateri oppositum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri opposito demissam: Linea hæc demissa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, acutus. *Ad propos. 13.*

17 TRIANGVLA commensurabilium laterum constituere, in quibus segmenta inter perpendicularem, quę in basim cadit, eisdē lateribus commensurabilia quoq; sunt. *Ad propos. 13.*

18 SI in triangulo à quovis angulo recta linea ducatur, dividens latus oppositum bifariam: Erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium simul dupla duorum quadratorum simul sumptorum, quorum unum ex linea ducta, alterum verò ex dimidiato latere describitur. *Ad propos. 13.*

19 AREAM cujusque trianguli latera habentis, nota invenire. *Ad propos. 13.*

20 DATO excessu diametri alicujus quadrati supra latus ejusdem: Invenire latus ipsius quadrati. *Ad propos. 14.*

21 DATIS duobus excessibus diametri alicujus parallelogrammi rectanguli supra utrumq; latus: Invenire latera ipsius rectanguli. *Ad propos. 14.*

IN TERTIO LIBRO.

1 SI in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet: in secante est centrum circuli. *Coroll. propos. 1.*

2 LINEA recta, quæ circulum tangit, ita ut eum non secet, uno tantùm puncto ipsum tangit. *Coroll. propos. 2.*

3 IN triangulo æquilatero, vel Isoscele, recta secans basim bifa-

riam, ad basim perpendicularis est. Et perpendicularis ad basim, secat basim bifariam. *Coroll. propos.* 3.

4 DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis, si ab aliquo puncto circumferentiæ exterioris rectæ ducatur interioris circumferentiam secans: Erunt ejus segmenta inter utramq; circumferentiam posita, inter se æqualia. *Ad propos.* 3.

5 SI intra circulum punctum sumatur, ab eoque puncto in circulum rectarum linearum cadentium, una quidem maxima sit, una verò minima; Et reliquarum aliæ sint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima verò erit reliqua pars diametri; & aliarum majores quidem erunt maximæ propinquiores; Æquales autem ab eadem maxima, vel minima æqualiter distabunt. *Ad propos.* 7.

6 SI in semidiametro circuli producta punctum ultra centrum sumatur, circulus ex eo puncto, ut centro, per extremum semidiametri punctum descriptus, tanget priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusque extra eundem cadet. *Ad propos.* 13.

7 RECTA linea à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducta ipsum circulum tangit. Hinc facilè per datum punctum in circumferentiam duci poterit linea circulum tangens. *Coroll. propos.* 16.

8 DIGRESSIO de angulo contactus adversus Iacobum Peletarium. *Ad propos.* 16.

9 QVOTLIBET anguli contactus æquales simul sumpti, minores sunt quovis angulo acuto rectilineo. *Ad propos.* 16.

10 ALIQVA quantitas potest continuè, & infinitè augeri, altera verò infinitè minui: & tamen augmentum illius, quantumcunq; sit, minus semper erit decremento hujus. *Ad prop.* 16.

11 TRANSITVR à minori ad majus, vel contrà, & per omnia media: & tamen non per æquale. Item reperitur majus hoc, & minus eodem: & tamen non æquale. *Ad propos.* 16. & 31.

12 PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterum includat, rectam lineam ducere, quæ utrumque tangat circulum. *Ad propos.* 17.

13 PER datum punctum describere circulum, qui alium tangat sive interius, sive exterius. *Ad propos.* 17.

14 CIRCVLVM, qui duos alios circulos, quorum unus non sit totus intra alium, tangat, describere. *Ad propos.* 17.

15 LINEÆ rectæ, quæ circulum secet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat. *Ad propos.* 17.

16 DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis: Erunt omnes rectæ lineæ interiorem circulum tangentes, & usq; ad circumfe-

rentiam exterioris circuli extensæ, inter se æquales, bifariamq; in punctis contactuum secabuntur. *Ad propos.* 18.

17 IN circulo spatiū ad centrū duplex est anguli ad peripheriam, cùm fuerit eadem peripheria basis spatii & anguli *Ad propos.* 20.

18 SI à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex singulis binæ, quæ ad easdem partes contineant angulos duos æquales: Circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorū descriptus, per alterum quoq; angulum transibit. *Ad prop.* 21.

19 SI in quadrilatero anguli qui ex adverso duobus rectis sint æquales: Circulus, qui per tres quoscūq; ejus āgulos describitur, transibit etiam per reliquum quartū angulum; atq; adeò circa ipsum quadrilaterum circulus describi potest *Ad propos.* 22.

20 SI ex semicirculis, aut circulis, segmenta similia detrahantur; reliqua quoq; segmenta similia erunt. *Ad propos.* 22.

21 ANGVLI insistentes arcubus circulorum similibus sive ad centra, sive ad circumferentias, sunt inter se æquales. Et contra arcus, quibus anguli æquales sive ad centra, sive ad circumferentias insistunt, similes sunt. *Ad propos* 22.

22 SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur atq; ex centro duæ, aut plures rectæ lineæ ducantur: Erunt arcus inter quascunq; duas lineas intercepti, similes. *Ad propos.* 22.

23 SI duo aut plures circuli se mutuò tangant interius in uno puncto, à quo duæ aut plures rectę educantur: Erunt & arcus inter quascunq; duas lineas intercepti, & arcus inter quācunq; lineam, & punctum contactus intercepti, similes *Ad propos.* 22.

24 SI unum latus quadrilateri in circulo descripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis. *Ad propos.* 22.

25 SEGMENTA circulorum æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, sunt similia. *Ad propos.* 24.

26 IN æqualibus circulis inæquales anguli inæqualibus peripheriis insistunt, major majori, & minor minori, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant. *Ad propos.* 26.

27 IN æqualibus circulis anguli, qui in æqualibus peripheriis insistunt, sunt inter se æquales, major, qui majori, & minor, qui minori, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant. *Ad propos.* 27.

28 DVÆ rectæ lineæ, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuò non secantes, sunt parallelę. Et cōtra, duę lineę parallelæ in eodē circulo arcus equales intercipiunt. *Ad prop.* 27.

29 LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicujus ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, quæ peripheriam illam subtendit. *Ad propos.* 29.

30 ANGVLVS rectus in centro insistit quadranti: Acutus verò

arcui quadrante minori: Et obtusus arcui quadrante majori. Et contrà, angulus in centro quadranti insistens rectus est: insistens verò arcui quadrante minori, acutus : Et arcui quadrante majori, obtusus. *Ad propos. 27.*

31 RECTA linea è centro circuli ducta, secansq; aliam rectam non per centrum ductam bifariam, secabit & arcum, cui hæc recta subtenditur, bifariam. Et contrà, si secet & arcum bifariam, secabit & rectam ei subtensam bifariam. *Ad propos. 27.*

32 SI in circulo, ductis duabus diametris sese ad angulos rectos secantibus, altera earum producatur, eiq; ex una parte quotquot parallelę agantur dividentes utrumq; quadrantem in partes æquales, ac deniq; ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctum proximæ parallelæ recta ducatur conveniens cum diametro producta : Erit tota recta inter punctum concursus, & concavā peripheriā circuli, ōnibus parallelis unà cū diametro, quę producta est, simul sūptis, ęqualis. *Ad prop. 27.*

33 IN æqualibus circulis inæquales rectæ lineæ inæquales peripherias auferunt, major quidem majorem, & minor minorem, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo: At verò si de segmentis circuli majoribus sermo habeatur, major minorem, & minor majorem. *Ad propos 28.*

34 IN æqualibus circulis, inæquales peripherias inæquales rectę lineæ subtendunt, majorem quidem major , & minorem minor , si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo: At verò si de segmentis semicirculo majoribus loquamur, minorem major, & majorem minor. *Ad propos. 29.*

35 CIRCVLI, è quibus æquales rectæ lineæ auferunt similes circumferentias, æquales sunt. *Ad propos. 29.*

36 EX circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circumferentias dissimiles auferunt. *Ad propos. 29.*

37 EX circulis inæqualibus lineæ rectæ, quæ circumferentias similes auferunt, inæquales sunt. *Ad propos. 29.*

38 RECTÆ lineæ, quæ ex quibuscunque circulis circumferentias similes inæquales auferunt, inæquales sunt. *Ad propos. 29.*

39 SI in diametro circuli præter centrum punctum sumatur, ab eoq; in peripheriā duæ rectę non in easdē partes cadentes efficiant ad diametrum angulos æquales: Rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abscindent æquales. Et si lineæ sint æquales, constituent ad diametrum angulos æquales, abscindentq; æquales arcus. Si deniq; arcus ęquales abscindant, erunt rectę illæ ęquales, constituentq; ad diametrum angulos ęquales. *Ad propos. 29.*

40 SI in diametro circuli pręter centrum sumatur punctū quodpiam, in quo ad easdē partes duo anguli æquales constituantur,

insistent

insistent hi anguli arcubus inæqualibus, majorque erit ille, qui à minori portione diametri remotior est. *Ad propos. 29.*

41 ANGVLVS trianguli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est. *Coroll. propos. 31.*

42 SEGMENTVM circuli, in quo angulus constitutus est rectus, est semicirculus: In quo verò angulus est acutus, est segmentum majus: Et in quo angulus est obtusus, est segmentum minus: Et segmentum, cujus angulus recto est major, est semicirculo majus, cujus verò angulus est recto minor, est vel semicirculus, vel semicirculo minus. *Ad propos. 31.*

42 SI angulo recto linea recta subtensa, hoc est, si in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, bifariam secetur, & ex puncto divisionis circa illam rectam, vel latus illud circulus describatur: transibit necessariò circulus ille per angulum rectum. *Ad propos. 31.*

43 A dato puncto extra circulum, rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum. *Ad propos. 31.*

44 SI per centrum circuli alius circulus describatur, & per utriusque circuli centrum recta ejiciatur, à puncto verò, ubi hæc recta à posteriori circulo secatur, ducatur recta utcunque; secabitur ejus portio intra priorem circulum à circumferentia posterioris bifariam. *Ad propos. 31.*

45 QVADRILATERVM in circulo descriptum, cujus duo latera opposita sunt parallela, & æqualia, parallelogrammum est rectangulum, hoc est, vel quadratum, vel altera parte longius. *Ad propos. 31.*

46 SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales iis, qui in alternis circuli segmētis cōsistunt, angulis: Linea ducta circulū tāget. *Ad prop. 32.*

47 SI duæ rectæ ita se secent, ut rectangulum sub unius segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo: describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc est, circulus per quælibet tria puncta earum extrema descriptus, per quartum quoque punctum transibit. *Ad propos. 35.*

48 SI à puncto quovis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur: Rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus inter se sunt æqualia. *Coroll. 1. propos. 36.*

49 DVÆ rectæ lineæ ab eodem puncto ductæ, quæ circulum tangant, inter se sunt æquales. *Coroll. 2 propos. 36.*

50 A B eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantùm possunt duæ lineæ, quæ circulum tangant. *Coroll. 3. propos. 36.*

51 SI duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in convexam periphe-

riam incidant, & earum una circulum tangat, altera quoq; circulum tanget. *Coroll. propos.* 36.

52 SI à puncto aliquo binæ lineę rectę finitę egrediantur, quę ita secentur in binas partes, ut rectangula sub totis, & segmentis propè punctum comprehensa sint æqualia; describi poterit per extrema puncta aliorum segmentorum circulus, hoc est, circulus per tria puncta extrema aliorum segmentorũ descriptus, per quartum etiam punctum extremum transibit. *Ad prop.* 36.

53 DATIS duabus rectis sive æqualibus, sive inęqualibus, alteri earum rectam adjungere, ut rectangulũ sub tota composita, & adjuncta comprehensũ, quadrato alterius sit æquale. *Ad pr.* 36.

54 SI à puncto extra circulum dato duę lineæ rectę circulum tangentes ducantur, aut duę lineę usq; ad convexam peripheriam interse æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrũ circuli ejecta angulum ab eis comprehensum dividit bifariam. Et contrà, Linea recta angulũ ab eis comprehensum dividens bifariam, per centrum circuli transibit. *Ad propos.* 37.

IN QVARTO LIBRO.

1 IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quę circuli diametro non sit major, & alteri datę parallelam. *Ad propos* 1.

2 IN omni triangulo, si circulus inscribatur, duo quælibet latera superant reliquum recta linea, cujus quadratum quadruplum est rectãguli comprehensi sub recta ab angulo illis lateribus comprehenso in cavam peripheriam ducta, & sub ejus segmento exteriore. Quod si angulus comprehensus sit rectus, superabunt illa duo latera latus recto angulo oppositum diametro circuli triangulo inscripti. *Ad propos.* 4.

3 SI circulo circa triangulum descripto, centrum intra triangulum cadat, triangulum est acutangulum: Si verò in unum latus trianguli, rectangulum: Si denique extra triangulum obtusangulum. *Coroll propos.* 5.

4 CENTRVM circuli circa triangulum acutangulum descripti intra triangulum cadit: Circa rectangulum verò, in latus recto angulo oppositum: Circa obtusangulum denique, extra triangulum. *Coroll. propos.* 5.

5 PER data tria puncta non in una recta linea existentia circulum describere. *Ad propos* 5.

6 SI circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo quadratum inscribatur. Erit quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum. *Ad propos.* 9.

7 IN triangulo Isoscele, cujus uterq; angulorum æqualium reliqui duplus est: Angulus æqualibus lateribus comprehensus,

quinta

quinta pars est duorum rectorũ, uterlibet autem ęqualiũ, duę quintę partes. Itē illē duas quintas partes vnius recti continet, vterlibet autem horũ quatuor quintas partes. *Coroll. propos.* 10.

8 SI recta linea secetur, vt propos. 11. lib. 2. traditum est: Isosceles triangulũ, cujus basis majori segmento ęqualis est, utrumvis verò laterũ æqualium ipsi datæ lineæ æquale, habet vtrumlibet angulorum æqualium duplum reliqui. *Ad propos.* 11.

9 ANGVLVS pentagoni æquilateri, & æquianguli complectitur tres quintas partes duorum rectorum, vel sex quintas vnius recti. *Coroll. propos.* 11.

10 SVPER data recta linea terminata Pentagonum ęquilaterum, & æquiangulum constituere. *Ad propos* 11.

11 SI in circulo quæcunq; figura æquilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: Hæ perpendiculares constituent aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualium circulo circumscriptam. *Coroll. propos* 12.

12 IN figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est: Recta linea ex quovis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, dividit quoque angulum bifariam: Et contrà, recta linea dividens angulum bifariam secat quoq; latus oppositũ bifariam. Si verò numerus angulorum est par, Recta linea ex quovis angulo ad oppositum angulum ducta, secat utrumq; angulum bifariam: Et contrà, Recta linea secans quemvis angulum bifariam cadit in oppositum angulum, eumque bifariam quoque dividit. *Ad propos.* 12.

13 LATVS hexagoni æquale est semidiametro circuli, in quo describitur. *Coroll. propos.* 15.

14 ISOSCELES triangulum oxygonium constituere, cujus tertium latus utrovis æqualium majus sit. *Ad propos.* 15.

15 SI in circulo ab eodem puncto inscribantur duo latera duarum figurarum ęquilaterarum, & æquiangularum: Continebit arcus inter illa latera inclusus tot latera alterius figuræ inscribendæ in eodem circulo, quot unitatibus inter se differunt denominatores eorundē laterum. Continebit autē figura inscribēda, tot latera, angulosq; ęquales, quot unitates fūt in numero, qui ex multiplicatione denominatorũ producitur. *Ad pr.* 16.

16 OMNIS figura æquilatera circulo inscripta, æquiangula quoq; est: at non omnis figura ęquilatera circulo circumscripta necessario æquiangula quoque est, nisi quando numerus angulorum ipsius est impar, vel si par est, quando duo anguli proximi æquales sunt, vel duo non proximi, dummodo uno eorum primo posito, alter occupet locũ parē quemcunq;, ut quartum ab eo, vel sextum, octavũ, decimum. &c. *Ad propos.* 16.

17 OMNIS figura æquiangula circulo circumſcripta, eſt etiam æquilatera: At non omnis figura æquiangula circulo inſcripta, neceſſario æquilatera quoque eſt, niſi quando numerus laterum ipſius eſt impar; vel ſi par eſt, quando duo latera proxima æqualia ſunt, vel duo non proxima, dummodo uno eorũ poſito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, ut quartum ab eo, vel ſextum, octavum, decimum, duodecimum, &c. *Ad propoſ.* 16.

18 IMPARIVM laterum figuræ inſcribuntur in circulo beneficio Iſoſcelium triangulorum, quorũ anguli æquales ad baſim multiplices ſunt eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum. Parium verò laterum figuræ inſcribuntur beneficio triangulorum Iſoſcelium, quorũ anguli ad baſim æquales, multiplices ſeſquialteri ſunt eorum, qui ad verticem ſunt angulorum. *Ad propoſ.* 16.

19 FIGVRAM quamcunque æquilateram, & æquiangulam in circulo practicè deſcribere, ſine ope triangulorum Iſoſcelium prædictorum. *Ad propoſ.* 16.

20 FIGVRAM quamcunque æquilateram, & æquiangulam ſupra datam rectam practicè deſcribere. *Ad propoſ.* 16.

21 LATERA pentagoni, & decagoni in circulo deſcribendorum, una eademque opera invenire. *Ad propoſ.* 16.

22 SI bifariæ ſectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis conjungantur lineis, inſcripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula totidem laterum in illa figura, idem centrum habens. *Ad propoſ.* 16.

23 INTER omnes figuras æquilateras, & æquiangulas, ſolum triangulum, quadratum, & hexagonum, locum replere poſſunt. *Ad propoſ.* 16.

IN QVINTO LIBRO.

1 TRACTATVS de proportionibus, & proportionalitatibus copioſiſſimis. *Ad defin.* 4.

2 ANGVLVM curvilineum angulo rectilineo exhibere æqualem *Ad defin.* 5.

3 CVR Euclides in defin. 6. & 8. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales, per earum æquè multiplicia definierit. *Ad defin* 8.

4 NVMERVS integer cum fractione in ſe multiplicatus producit neceſſariò numerum integrum cum fractione. *Ad def.* 8.

5 SI quatuor magnitudines fuerint proportionales, & convertendo proportionales erunt. *Coroll. propoſ.* 4.

6 ÆQVALES magnitudines ad æquales eandem habent rationem. *Ad propoſ.* 7.

7 QVÆ eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem. *Ad propoſ.* 11.

8 SI

8 SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Tertia verò ad quartam, minorem rationem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam, minorem rationem habebit, quàm quinta ad ſextam. *Ad propoſ* 13.

9 SI prima ad ſecundam majorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam majorem habuerit quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam multò magis majorem rationem habebit quam quinta ad ſextam. *Ad propoſ.* 13.

10 SI prima ad ſecundam minorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; Tertia autem ad quartam minorem habuerit, quàm quinta ad ſextam: Prima quoq; ad ſecundã multo magis minorẽ rationem habebit, quàm quinta ad ſextã. *Ad propoſ.* 13.

11 SI compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque per Diviſionem rationis converſam proportionales erunt. *Ad propoſ.* 17.

12 SI compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, hę quoque per Diviſionem rationis contrariam proportionles erunt. *Ad propoſ.* 17.

13 SI diviſæ magnitudines proportionales fuerint, hę quoq; per compoſitionem rationis converſam proportionales erunt. *Ad propoſ.* 18.

14 SI diviſæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque per compoſitionem rationis contrariam proportionales erunt. *Ad propoſ.* 18.

15 SI quatuor magnitudines fuerint proportionales: Et quoque per converſionẽ rationis proportionales erunt. *Coroll. prop.* 19.

16 SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam: Habebunt etiam æquè multiplices primæ ac tertiæ ad ſecundam, & quartam, eandem rationem: Item æquè multiplices ſecundæ & quartæ ad primam, & tertiam, eandem rationem habebunt. Et contrà, eandem rationem habebunt ſecunda & quarta, ad æquè multiplices primæ & tertiæ: Item prima ac tertia ad æquè multiplices ſecundæ & quartæ. rationem habebunt eandem. *Ad propoſ.* 22.

17 SI duę magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habeant ad eaſdem eandem proportionem: Et reliquæ ad eaſdem eandem proportionem habebunt. *Ad propoſ.* 24.

18 SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & Minima majores erunt, quàm dupla reliquæ. *Ad propoſ.* 25.

19 SI prima ad ſecundam habuerit minorem proportionem, quàm tertia ad quartã, habebit convertendo ſecunda ad primã majorem proportionem, quàm quarta ad tertiã. *Ad propoſ.* 26.

20 SI prima ad secundam habuerit minorem proportionẽ, quàm tertia ad quartam: habebit quoq; vicissim prima ad tertiam, minorem proportionem, quàm secunda ad quartã. *Ad propos.* 27.

21 SI prima ad secundam, habuerit minorem proportionem quàm tertia ad quartam: habebit quoque composita prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem, quàm composita tertia cum quarta ad quartam. *Ad propos.* 28.

22 SI composita prima cum secunda ad secundam habuerit minorem proportionem, quàm composita tertia cum quarta ad quartam, habebit quoq; dividendo prima ad secundam minorem proportionem, quàm tertia ad quartam. *Ad propos.* 29.

23 SI composita prima cum secunda ad secundam habuerit minorem proportionem, quàm composita tertia cum quarta ad quartam: habebit per conversionem rationis prima cum secunda ad primam, majorem proportionem, quàm tertia cum quarta, ad tertiam. *Ad propos.* 30.

24 SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; minor proportio primæ priorum ad secundam, quàm primæ posteriorum ad secundam: Item secundæ priorum ad tertiam minor, quàm secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate, minor proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiam. *Ad propos.* 31.

25 SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; minor proportio primæ priorum ad secundam, quàm secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam minor, quàm primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, minor proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiam. *Ad propos.* 32.

26 SI fuerit minor proportio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum minor proportio quàm totius ad totum. *Ad propos.* 33.

IN SEXTO LIBRO.

1 PROPOSITIS quotcunque quantitatibus, proportio primæ ad ultimam componitur ex proportionibus omnibus intermediis. *Ad defin.* 5.

2 TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, ut bases, æquales habent altitudines, vel eandem. *Ad propos.* 1.

3 TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum æquales sunt bases, vel eædem, ita se habent inter se, ut altitudines. *Ad propos.* 1.

4 TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, ut altitudines: æquales habeant bases, si unam & eandem non habeant. *Ad propos. 1.*

5 LINEA recta, quæ parallela ducitur uni lateri in triangulo, aufert triangulum toti triangulo simile. *Coroll. propos. 4.*

6 SI ex duobus punctis cujusvis rectæ, quorum alterum sit extremum, alterum verò intra lineam, duæ parallelæ inter se ad easdem partes educantur, ita ut proportionem habeant eandum, quam rectæ inter ipsas, & alterum extremum punctum inclusæ: Recta conjungens extremũ unius earum cum extremo prioris lineæ, transibit per extremũ alterius lineæ. *Ad prop. 4.*

7 SI ex duobus punctis cujusvis rectæ duę parallelę educantur in diversas partes, habentes eandē proportionem, quàm segmenta rectæ inter parallelas conterminas, & aliquod idem punctum intra datam rectam: Recta conjungens extrema puncta parallelarum transibit per dictum punctũ intra rectam. *Ad propos. 4.*

8 SI in triangulo quovis uni lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppositum recta educatur linea: dividentur linea parallela, & latus illud in eadem rationes. *Ad propos. 4.*

9 RECTA perpendicularis, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basim demittitur, est media proportionalis inter duo basis segmenta: Item latus utrumlibet angulum rectum ambiens, medium proportionale est inter totam basim, & illud segmentum basis, quod dicto lateri adjacet. *Coroll. propos. 8.*

10 DATA Mrectam lineam in partes quotcunque æquales dividere. *Ad propos. 10.*

11 DATAM rectam secare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunque datam. *Ad propos. 10.*

12 SI duæ rectæ lineæ secentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoq; intermediæ sectiones in eadem proportione cum quibuslibet segmentis duobus. *Ad propos. 10.*

13 SI linea recta sit secta in quotcunque partes Arithmeticè proportionales, & alia recta secetur in totidem partes, quæ easdem inter se, quas illæ, proportiones habeant: Erunt quoque partes hujus lineæ Arithmeticè proportionales. *Ad propos. 10.*

14 SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & major ad majorem: Erit quoque excessus priorum ad excessum posteriorum, ut priorum linearum una ad unam posteriorum. *Ad propos. 10.*

15 LINEAM rectam datam, vel numerum, in quotvis partes Arithmeticè proportionales secare. *Ad propos. 10.*

16 QVOTLIBET lineas continuè proportionales in data ratione invenire. *Ad propos. 11.*

17 IN.

17 INTER duas rectas, duas medias proportionales practicè invenire. *Ad propos.* 11.

18 DATIS duabus rectis lineis, duas alias in eadem cum illis porportione invenire. *Ad propos.* 12.

19 TRIBVS datis rectis lineis, quartam invenire, quæ sit ad tertiam, ut prima ad secundam. *Ad propos.* 12.

20 RECTA linea, quæ in circulo à quovis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam usque, media est proportionalis inter duo diametri segmenta, quæ à perpendiculari facta sunt. *Ad propos.* 13.

21 DATA recta linea, aliam rectam (quæ minor non sit, quàm dupla illius) ita secare, ut data recta sit media proportionalis inter segmenta hujus. *Ad propos.* 13.

22 RECTA linea quælibet est media proportionalis inter quasvis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. *Ad propos.* 17.

23 SECTA linea recta in duas partes utcunque, alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, ut omnes tres partes sint continuè proportionales. *Ad propos.* 17.

24 DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Arithmetica proportionalitate invenire. *Ad propos.* 17.

25 DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate invenire. *Ad propos.* 17.

26 DATIS duabus rectis lineis, majorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica invenire. *Ad propos* 17.

27 DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate invenire, aliter, quàm propos. 13. factum est. *Ad propos.* 17.

28 DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportionalitate Geometrica invenire, aliter, quàm propos. 11. factum est. *Ad propos.* 17.

29 DATIS duabus rectis lineis, majorem extremitatem in proportionalitate Geometrica invenire, aliter, quàm propos. 11. factum est. *Ad propos.* 17.

30 DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate invenire. *Ad propos.* 17.

31 DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Harmonica Medietate invenire. *Ad propos.* 17.

32 DATIS duabus rectis lineis, majorem extremitatem in proportionalitate Harmonica invenire. *Ad propos.* 17.

33 QVANDO duo numeri proportionem habent duplam majorem, non potest illis adjungi tertius major in proportionalitate Harmonica. *Ad propos.* 17.

34 EX datis quibusvis duobus numeris, tres numeros Harmo-

nice proportionales, quorum extremi eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri, reperire. *Ad propos. 17.*

35 TRES numeros Harmonice proportionales invenire, quorum extremi proportionem habeant datam, & medius sit dato numero æqualis. *Ad propos. 17.*

36 DATIS duobus numeris, medium Harmonice proportionalem invenire. *Ad propos. 17.*

37 DATIS duobus numeris, minorem extremum in proportionalitate Harmonica invenire. *Ad propos. 17.*

38 DATIS duobus numeris, majorem extremum in Harmonica proportionalitate invenire. *Ad propos. 17.*

39 PROPOSITIS tribus terminis Geometrice proportionalibus sive æqualibus, sive inæqualibus: Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa conflata ex secundo & tertio semel; Ac tertius semel, sunt Geometrice proportionales. *Ad propos. 17.*

40 PROPOSITIS tribus terminis sive æqualibus, sive inæqualibus, Geometricè proportionalibus: Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta; Ac summa ex primo, secundo, & tertio semel conflata; Ac denique tertius semel, sunt Arithmeticè proportionales. *Ad propos. 17.*

41 PROPOSITIS tribus terminis sive æqualibus, sive inæqualibus, Geometrice proportionalibus. Summa collecta ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel; Ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel; & deniq; summa ex secūdo semel, & tertio semel coacervata, Harmonice proportionales sunt. *Ad propos. 17.*

42 A data recta linea dato rectilineo simile similiterq; positum rectilineum describere, expeditius, quam ab Euclide factum est. *Ad propos. 18.*

43 SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Erit ut prima ad tertiam, ita triangulum super primā descriptum ad triangulum super secundam simile, similiterque descriptum: Item ita triangulum super secundam ad triangulum super tertiam simile, similiterque descriptum. *Coroll. propos. 19.*

44 SI fuerint tres rectæ lineæ proportionales: Erit ut prima ad tertiam, ita polygonum super primam descriptum ad polygonum super secundam similiterque descriptum: Item ita polygonum super secundam ad polygonum super tertiam simile, similiterque descriptum. *Coroll. propos. 20.*

45 POLYGONA similia, æquilatera & æquiangula dividuntur in similia triangula, & numero æqualia, ductis è centris circulorum ipsa circumscribentium ad omnes angulos rectis lineis. *Ad propos. 20.*

46 SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratū illius quadrato plus erit

plum erit quadrati hujus. Et contrà, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris hujus. *Ad propos. 20.*

47 ÆQVALIA rectilinea similia, similiterque descripta, constituta sunt super æquales rectas lineas. *Ad propos. 22.*

48 SI fuerint tres rectæ lineæ proportionales: Erunt & rectilinea similia, similiterq; descripta ab eis, proportionalia. Et si à tribus rectis lineis similia similiterq; descripta rectilinea proportionalia fuerint: Ipsæ etiam rectæ proportionales erunt. *Ad propos. 22.*

49 TRIANGVLA, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent: proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositam. *Ad propos. 23.*

50 PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, vel pluribus componere. *Ad propos. 23.*

51 PROPORTIONEM minorem ex minore auferre. *Ad prop. 23.*

52 TRIANGVLA, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ sub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur. *Ad propos. 23.*

53 PARALLELOGRAMMA inter se æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulũ continentibus cõprehensa. *Ad prop. 23.*

54 TRIANGVLA & parallelogramma in se proportionem habent compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum. *Ad propos. 23.*

55 DATIS duobus parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus: ex quovis illorum alteri simile resecare. *Ad propos 24.*

56 DATO parallelogrammo, describere aliud majus, aut minus simile illi, similiterque descriptum. *Ad propos 24.*

57 SI ad rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato: ipsum applicatum æquale est rectangulo quod sub segmentis lineæ per applicationem factis continetur. *Ad prop. 28.*

58 SI figura, quæ ab uno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ à reliquis tranguli lateribus describuntur, figuris similibus, similiterq; positis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est. *Ad propos. 31.*

59 SECTOR ad sectorem est, ut angulus ad angulum. *Coroll. 1. propos. 33.*

60 ANGVLVS in centro circuli ita est ad quatuor rectos, ut arcus illi subtensus ad totam circumferentiam. Et contrà. Ita se habent quatuor recti ad angulum in centro, ut tota circumferentia ad arcum illi angulo subtensum. *Coroll. 2. propos. 33.*

61 SIMILIA circulorum segmenta, hoc est, in quibus anguli

sunt æquales, eandem proportionem habent ad integras circumferentias circulorum. *Ad propos.* 33.

62 SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, arq; ex centro duæ, aut plures rectæ lineæ ducantur: Erunt arcus inter quascunq; duas lineas intercepti, similes. *Ad propos.* 33.

63 ÆQVALES rectæ lineæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, majorque est arcus minoris circuli, & etiam major, quàm ut similis sit arcui circuli majoris. *Ad propos.* 33.

64 A dato rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, ut & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuivis rectilineo dato, similiterque positum. *Ad propos.* 33.

65 DVOBVS datis rectilineis, tertium proportionale invenire, *Ad propos.* 33.

66 TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale invenire. *Ad propos.* 33.

67 DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale invenire. *Ad propos.* 33.

68 DATO rectilineo duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterque descripta cuicunq; rectilineo, habeantq; inter se proportionem propositam quamcunq;. *Ad propos.* 33.

69 DATO rectilineo duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuivis rectilineo similia sint, similiterq; descripta, lateraq; eorum homologa habeant inter se proportionem datam. *Ad propos.* 33.

70 DVOBVS datis rectilineis æquale rectilineũ constituere, quod simile sit, similiterq; positum cuivis rectilineo dato. *Ad prop.* 33.

71 SI in circulo duæ rectæ lineę seſe mutuò secuerint: Erunt segmenta unius segmentis alterius reciproca. *Ad propos.* 33.

72 SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum secantes: Erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat: Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum secet, & ejus segmentum exterius. *Ad propos.* 33.

73 SI duæ rectæ lineæ seſe mutuò secuerint, & à duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuò demittantur: Erunt duæ lineæ, quarum una inter unum terminorum & sectionem, altera verò inter sectionem, & prioris lineæ assumptæ perpendicularem interjicitur, aliis duabus eodem modo inclusis reciprocæ. *Ad propos.* 33.

74 IN parallelogrammo duæ rectæ lateribus parallelæ se mutuò secantes, dividunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia. *Ad propos.* 33.

75 OMNE quadrilaterum à duabus diametris se mutuò secantibus dividitur in quatuor triangula proportionalia. *Ad prop.* 33.

76 IN

76 IN triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat basem extrema ac media ratione, tria latera sunt continuè proportionalia. Et si tria latera triāguli rectanguli sunt continuè proportionalia, perpendicularis ad basē ex angulo recto demissa secat basē extrema ac media ratione. *Ad propos.* 33.

77 A dato puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, quæ triangulum dividat in duo segmenta secundum proportionem datam. *Ad propos.* 33.

78 IMPERATAM partem ex triangulo auferre per lineam rectam, quæ à quovis dato puncto lateris ducitur. *Ad propos.* 33.

79 DATO rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere, majus vel minus, secundum proportionem datam. *Ad propos.* 33.

80 IN dato triangulo quocunq; quadratū describere. *Ad prop.* 33.

81 INTRA datum quadratum, aliud quadratum describere in data proportione. Oportet autem datam proportionem dupla non esse majorem. *Ad propos.* 33.

82 SI ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eisdem extremis per unum idemq; punctum circumferentiæ, duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus: Erit rectangulum comprehensum sub utralibet secantium, & ejus segmento interiore, quadrato diametri æquale. *Ad propos.* 33.

83 SI in circulo duæ diametri sese ad rectos angulos secent, & ab unius extremo puncto recta ducatur utcunque secans circumferentiam, & alteram diametrum sive productam, sive non productam: Erit rectangulum comprehensum sub duobus segmentis hujus lineæ ductæ, quorum unum inter extremum punctum prioris diametri, & secundam diametrum, alterum verò inter idem punctum extremum, & circumferentiam interjicitur, æquale quadrato intra circulum descripto.

VEL VNIVERSALIVS.

SI in circulo à quovis puncto diametri ad diametrum perpendicularis excitetur, ad quam ex alterutro terminorum diametri duæ rectæ ducantur, una ad ejus intersectionem in circumferentia, altera verò ubilibet, secans circumferentiam in alio puncto: Erit rectangulū sub segmentis hujus posterioris lineæ, quorum unū sit inter prædictum terminum & perpendicularē, alterum verò inter eundem terminum, & circumferentiam, æquale quadrato prioris rectæ inter eundem terminum, & circumferentiam, seu perpendicularem interceptæ. *Ad propos.* 33.

84 DATO circulo, & duobus punctis sive extra circulum, sive intra, dum

tra, dummodo neutrum sit in circumferentia: Per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod unum punctum circumferentiæ, ita ut recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam secant, parallela sit rectæ data duo puncta connectenti. *Ad propos.* 33.

85 QVADRATRICEM lineam describere. *Ad finem lib. 6.*

86 SI ex centro per quævis puncta lineæ Quadratricis rectæ ducantur usque ad circumferentiam Quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basim demittantur perpendiculares, & aliæ rectæ eidem basi parallelæ: Erunt arcus Quadrantis inter semidiametros interjecti, perpendicularibus, vel segmentis semidiametri inter parallelas positis, proportionales. *Ad finem lib. 6.*

87 DATVM arcum circuli in datam proportionem dividere. *Ad finem lib. 6.*

88 ANGVLVM quemvis rectilineum in duos angulos datam habentes proportionē partiri: Atq; adeo & quemlibet arcum, & angulum in quotvis partes æquales distribuere. *Ad finē l. 6.*

89 ISOSCELES triangulum constituere, cujus uterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam. *Ad finem lib. 6.*

90 OMNES figuras æquilateras in circulo describere. *Ad finem lib. 6.*

91 SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit. Erunt arcus Quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis, continuè proportionales. *Ad finem lib. 6.*

92 RECTAM cuilibet arcui circuli, ex quo Quadratrix descripta est, æqualem reperire. *Ad finem lib. 6.*

93 SI basis Quadratricis statuatur semidiameter alicujus circuli: Erit ejus latus Quadranti ejusdem circuli æqualis. *Ad finem lib. 6.*

94 SI duæ rectæ eandem proportionem habeant, quam basis Quadratricis ad ejus latus, minor autem fiat semidiameter alicujus circuli; Erit major æqualis Quadranti ejusdem circuli. *Ad finem lib. 6.*

95 DATO circulo quadratum æquale constituere. *Ad finem l. 6.*

96 DATO quadrato circulum æqualem describere. *Ad finem lib. 6.*

97 RECTILINEO cuicunque circulum æqualem: Et circulo figuram rectilineam æqualem constituere, quæ dato rectilineo cuicunque similis sit, & similiter descripta. *Ad finem lib. 6.*

98 DATÆ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem. *Ad finem lib. 6.*

99 DATIS duobus circulis inæqualibus, datoq; arcu in uno eo-

rum: ex altero arcum æqualem abscindere. Oportet autem arcum in majore circulo datum non esse majorem circumferentia minoris circuli. *Ad finem lib. 6.*

IN SEPTIMO LIBRO.

1 SI duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de majore, alterna quadam detractione: nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad assumpta sit unitas *Ad propos. 1.*

2 SI propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de majore, alterna quadam detractione: Detractio ad unitatem usque non perveniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur. *Ad propos. 1.*

3 NVMERVS duos numeros metiens, metitur quoque maximam eorum mensuram communem. *Coroll. propos 2.*

4 PROPOSITIS duobus, aut pluribus numeris, explorare, an sint inter se primi, nec ne. *Ad propos. 2.*

5 NVMERVS tres numeros, vel plures metiens, metitur quoque maximam eorum mensuram communem. *Ad prpo. 3.*

6 SI unitas numeri pars fuerit, & altera unitas, vel numerus alterius numeri eadem pars: Et simul utraque unitas, vel unitas, & numerus simul, utriusque numeri simul eadem pars erit, quæ unitas numeri. *Ad propos. 5.*

7 SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum eadem pars: Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ unus unius. *Ad prop. 5.*

8 SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum æquè multiplices: quàm multiplex est unius unus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium. *Ad propos. 5.*

9 SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eædem partes: Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ unus unius. *Ad propos. 6.*

10 SI numerus numeri æquè fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, ut totus totius. *Ad propos. 7.*

11 SI primus secundum æqualiter contineat, atque tertius quartum, eandemque insuper partem, vel partes: Erit è contrario secundus primi eædem partes, quæ quartus tertii. Et si fuerit primus secundi eædem partes quæ tertius quarti: Continebit è contrario secundus primum æqualiter, atque quartus tertium, eandemque insuper partem vel partes. *Ad propos. 11.*

12 QVÆ proportiones numerorum eidem proportioni eædem sunt, inter se quoque sunt eædem. *Ad propos.* 14.

13 SI numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent: Habebunt producti numeri easdem rationes, quas numeri multiplicati, vel multiplicantes. *Ad propos.* 18.

14 SI major fuerit proportio primi ad secundum, quàm tertii ad quartum: qui ex primo & quarto fit, numerus, major erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero. Et si, qui ex primo & quarto fit numerus, major fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: major erit proportio primi ad secundum, quàm tertii ad quartum. *Ad propos.* 19.

15 SI major fuerit proportio primi ad secundum, quàm secundi ad tertium: major fiet numerus ex primo in tertii, quàm ex secundo in se. Et si major numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex secundo in se: major erit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium. *Ad propos.* 20.

16 QVOTLIBET numeri minimi in continuatione suarum proportionum, sive eædem sint, sive diversæ proportiones, metiuntur æquè totidem alios numeros, qui easdem cum eis proportiones habent, primus primum, secundus secundum, tertius tertium, &c. *Ad propos.* 21.

17 SI quatuor numeri proportionales sint: Et convertendo proportionales erunt. *Ad propos.* 22.

18 SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque divisi proportionales erunt. *Ad propos.* 22.

19 SI divisi numeri proportionales sint: Hi quoque compositi proportionales erunt. *Ad propos.* 22.

20 SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque per conversionem rationis proportionales erunt. *Ad propos.* 22.

21 SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quàm tertius cum sexto ad quartum. *Ad propos.* 22.

22 SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habent. *Ad propos.* 22.

23 SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum, habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto. *Ad propos.* 22.

24 SI quotcunq; numeri ad eundē habuerint proportiones, quas

alii illis multitudine æquales ad quendam alium eundem: Habebunt quoque illi omnes simul ad eundem, proportionem, quam alii omnes hi simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunq; numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales: Habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idē alius numerus ad hos ōnes simul. *Ad prop.* 22.

25 QVOTCVNQVE numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunq; numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi. *Ad propos.* 24.

26 NVMERVS, qui ex duobus compositus ad unum illorum primus est, ad reliquum quoque est primus. *Ad propos.* 30.

27 SI duo numeri sese mutuò multiplicantes fecerint aliquem, genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certè ad ipsum sit compositus: Is etiam ad unum eorum, qui in principio, compositus erit. *Ad propos.* 32.

28 MAXIMA mensura quotlibet numerorum metitur ipsos per numeros, qui minimi sunt eandem proportionem cum ipsis habentium. *Coroll. propos.* 35.

29 DVOS minimos numeros invenire, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunque numeri dati continuè proportionales. *Ad propos.* 35.

30 SI duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, major minorem, vel minor majorem, producitur minimus numerus, quem illi metiantur. *Coroll. propos.* 36.

31 SI tres, vel plures numeri numerum quempiam metiantur; metietur quoque eundem minimus numerus, quem illi metiantur. *Coroll. propos.* 38.

32 MINIMVS numerus, quem quotlibet numeri metiuntur, minimus est, habens partes à numeris metientibus denominatas. *Ad propos.* 41.

33 NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes, hac lege, ut quælibet pars subsequentem partem contineat. *Ad propos.* 41.

IN OCTAVO LIBRO.

1 SI tres numeri minimi sint continuè proportionales: Erunt extremi eorum quadrati: Si autem fuerint quatuor, erunt cubi, &c. *Coroll.* 1. *propos.* 2.

2 EXTREMI numeri proportionalium quotcunque secundum doctrinam propos. 2. inventorum, in data ratione minimorum, inter se primi sunt. *Coroll.* 2. *propos.* 2.

3 DVO numeri minimi in data ratione, metiuntur omnes medios quotcunq; minimorum in eadem ratione. *Coroll. 3. prop. 2.*

4 SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex: Neque alius quisquam ullius multiplex erit. *Ad propos. 6.*

5 SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus verò secundum metiatur: & quicunq; alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex: & quicunq; alius cujuslibet sequentium multiplex erit. *Ad propos. 6.*

6 SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam nullum à secundo metiatur: neque primus secundum metietur. Et si primus, vel alius quisquam nullius à secundo sit multiplex: neque primus secundi multiplex erit. *Ad propos. 6.*

7 SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet à secundo metiatur: metietur & primus secundum Et si primus, vel alius quisquam cujuslibet à secundo sit multiplex: primus quoque secundi multiplex erit. *Ad propos. 7.*

8 INTER numeros duplæ proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis, non potest cadere numerus medius proportionalis. *Ad propos. 8.*

9 MVSICVM intervallum, quod Diapason appellatur, bifariam secari non potest in duas proportiones æquales, quod etiam de Tono dicendum est. *Ad propos. 8.*

10 DIAMETER quadrati cujusvis lateri ejusdem est incommensurabilis. *Ad propos. 8.*

11 SI numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit, & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: Erunt omnes producti continuè proportionales ab unitate. *Ad propos. 9.*

12 SI quotquot numeri fuerint ab unitate continuè proportionales: secundus ab unitate in se multiplicatus producit tertium, & ex eodem in hunc fit quartus, & ex eodem in hunc quintus, & sic de cæteris. *Ad propos. 10.*

13 SI sint ab unitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium: habebunt tertii ab unitate proportionem duplicatam ejus, quam habent secundi ab unitate; quarti verò ejusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps uno amplius: *Ad propos. 10.*

14 SI sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorũ continuè proportionaliũ, & multitudine æqualiũ; Habebunt tertii ab illo numero proportionẽ duplicatã ejus, quam habẽt secundi ab eodem; quarti verò ejusdem triplicatam, &c *Ad propos. 10.*

15 SI inter duos numeros, & aliquẽ alium numerum assumptum,

continuè proportionales ceciderint numeri: quot inter utrumque ipsorum, & assumptum, deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medii continua proportione cadent. *Ad propos. 10.*

16 INTER duos quadratos numeros cadit numerus medius proportionalis in cõtinua proportione lateris ad latus. *Ad pro. 11.*

17 NVMERVS medius proportionalis inter duos quadratos, & utervis ipsorum quadratorum, compositi inter se sunt. *Ad propos. 11.*

18 INTER duos cubos cadunt duo numeri medii proportionales in continua proportione lateris ad latus. *Ad propos. 12.*

19 DVO numeri medii proportionales inter duos cubos, & utervis ipsorum cuborum, inter se compositi sunt. *Ad prop. 12.*

20 SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi sit multiplex: & unius latus lateris alterius multiplex erit. Et si unius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex: & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si verò quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex: neque latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex: neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex. *Ad propos. 17.*

21 INTER duos similes planos cadit medius proportionalis in ratione laterum homologorum, per quæ medius proportionalis inquiritur. *Ad propos. 18.*

22 NVMERVS medius proportionalis inter duos planos similes, & utervis ipsorum planorum, sunt inter se compositi. *Ad propos 18.*

23 INTER duos similes solidos cadunt duo medii proportionales in proportione laterum homologorum, per quę medii proportionales inquiruntur. *Ad prop. 19.*

24 DVO numeri medii proportionales inter duos solidos similes & utervis ipsorũ solidorũ, inter se sunt compositi. *Ad pr. 19.*

25 DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem semper numerus, quomodocunque ordinem inter se permutent. *Ad propos. 19.*

26 PROPORTIO cujusvis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum, exhiberi nullo modo potest in duobus numeris quadratis. *Coroll. propos. 24.*

27 NVMERI in dupla proportione vel quintupla proportionẽ non habent, quam quadratus ad quadratum. *Coroll. prop. 24.*

28 PROPORTIO cujusvis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum reperiri non potest in duobus numeris cubis. *Coroll. prop. 25.*

29 NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt. *Ad prop. 26.*

30 PLANI

30 PLANI numeri non ſimiles, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. *Ad propoſ. 26.*

31 NVMERI, qui proportionem habent quam cubus numerus ad cubum numerum, ſunt ſolidi ſimiles. *Ad propoſ. 27.*

32 NVLLI numeri habentes duplam proportionem, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartientem, ſunt ſimiles plani, vel ſolidi. *Ad propoſ. 27.*

33 DVO quivis numeri primi, non ſunt ſimiles plani, vel ſolidi. *Ad propoſ. 27.*

34 DVO quicunque numeri inter ſe primi, qui quadrati non ſint, vel cubi (quamvis neuter eorum primus ſit) plani ſimiles non ſunt, vel ſolidi. *Ad propoſ. 27.*

35 DVO numeri plani, vel ſolidi ſimiles, quorum minor ſit Primus, minor majorem numerat. *Ad propoſ. 27.*

36 DVO numeri inter ſe primi, quorum minor Primus ſit, non poſſunt eſſe plani, vel ſolidi ſimiles. *Ad propoſ. 27.*

37 DVOS numeros planos, vel ſolidos, non ſimiles invenire. *Ad propoſ. 27.*

IN NONO LIBRO.

1 SI duo numeri quadrati ſe mutuò multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit. *Ad propoſ. 2.*

2 SI duo numeri ſe mutuò multiplicantes faciant quadratum, alter autem ſit quadratus: Et reliquus quadratus erit. *Ad propoſ. 2.*

3 SI duo numeri ſe mutuò multiplicantes faciant non quadratum, alter autem ſit quadratus: Reliquus non quadratus erit *Ad propoſ. 2.*

4 SI duo numeri, quadratus & non quadratus, ſe mutuò multiplicantes faciant aliquem, Productus non quadratus erit. *Ad propoſ 2.*

5 SI cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem, Factus non cubus erit. *Ad propoſ. 5.*

6 SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum: Et multiplicatus non cubus erit. *Ad propoſ. 5.*

7 SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: quilibet major numerus acceptus tantum diſtabit ab aſſumpto quovis minore, quantum ab unitate abeſt is numerus, per quem minor majorem metitur. *Ad propoſ. 11.*

8 SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: quilibet illorum ſeipſum multiplicans producit numerū, qui tantum ab eo diſtat in numeris proportionalibus, quantū ipſe ab unitate. Minor verò quivis majorē quēpiā multiplicans

tiplicans producit numerum, qui tantum à majore distat, quantum minor ab unitate. *Ad propos. 11.*

9 NVLLVS numerus primus, qui major sit eo, qui proximus est unitati, aut minor proximum unitati non metiens, metiri potest ultimum, vel quemvis majorem in proportionalibus numeris. *Coroll. propos. 12.*

10 SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi, vel certè ad alterum erit compositus. *Ad propos. 14.*

12 PRIORA 10. theoremata secundi libri in numeris demonstrare. *Ad propos. 15.*

13 NVLLVS numerus secari potest in duas partes ita, ut qui sit ex toto in minorem partem, quadrato majoris partis æqualis sit. *Ad propos. 14. & 29.*

14 SI quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint minimi omnium eandē cum ipsis rationē habentium: Ad quemlibet eorū reliqui omnes simul compositi, erunt primi. *Ad prop. 15.*

15 PROPOSITIS quotcunque numeris continuè proportionalibus, an ipsis possit alius proportionalis adjungi, considerare. *Ad propos. 19.*

16 SI sint quatuor numeri proportionales, sed non deinceps, quorum primus & tertius primi inter se sint, fieri non potest, ut detur alius, ad quem ita se habeat quartus, sicut secundus ad tertium. *Ad propos. 19.*

17 PRIMIS numeris quotcunque propositis, invenire alium primum numerum ab illis diversum. *Ad propos. 20.*

18 IMPAR numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus, facit imparem. *Ad propos. 23.*

19 SI par numerus parem, aut seipsum multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit. *Ad propos 28.*

20 IMPAR numerus in se multiplicatus, imparem gignit. *Coroll. propos. 29.*

21 IMPAR numerus numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur. *Ad propos. 29.*

22 IMPAR numerus numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur. *Ad propos. 29.*

23 NVMERVS impar, qui ad aliquem numerus primus est; Primus quoque est ad ejus duplum, quadruplum, octuplum, & sic deinceps per proportionem duplam progrediendo. *Coroll. propos. 31.*

24 NVMEROS omnes pariter tantùm pares invenire. *Ad propos. 32.*

25 NVME-

25 NVMEROS omnes pariter tantùm impares invenire. *Ad propoſ.33.*

26 NVMEROS omnes, qui & pariter pares ſint & pariter impares invenire. *Ad propoſ. 34.*

27 QVOTCVNQVE numerorum continuè proportionalium, quorum primus, ſecundus, & ultimus noti ſunt, ſummam invenire. *Ad propoſ.35.*

28 NVMEROS omnes perfectos, & eorum partes aliquotas invenire. *Ad propoſ.36.*

29 QVOLIBET numero per duos quoſvis numeros diviſo; Erunt duo hi numeri Quotientibus converſo ordine proportionales. *Ad propoſ.36.*

30 QVOLIBET numero per quotvis numeros diviſo; Erunt bini numeri dividentes binis Quotientibus reſpondentibus converſo ordine proportionales. *Ad propoſ.36.*

31 QVOLIBET numero per quotvis numeros continuè proportionales diviſo; Erunt Quotientes converſo ordine in eadem proportione continuè proportionales. *Ad prop.36.*

32 SI ſint quotvis numeri quicunque, & totidem alii in eiſdem proportionibus: Erit ut ſumma priorum ad quemlibet eorum, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet: *Ad propoſ.36.*

33 SI ſint quotvis numeri quicunque, & totidem alii in eiſdem proportionibus: Summa priorum per ipſos diviſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diviſa facit. *Ad propoſ.36.*

34 SI ſumma quotvis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim dividatur, & Quotientum ſumma per ipſos Quotientes: Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes, & ſic deinceps in infinitum; Procreabuntur alterais ſemper iidem primi Quotientes ordine converſo. *Ad propoſ.36.*

35 SI ſumma quotvis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim dividatur; Erit ſumma omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in ultimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medii Quotientis in ſe. *Ad propoſ.36.*

36 SI ſumma quotvis numerorum continuè proportionalium, quorum numerus ſit impar, per eos ſigillatim dividatur: Erit ſumma omnium Quotientum numerus quadratus, cujus latus, ſive radix eſt medius terminus. *Ad propoſ.36.*

37 NVMEROS quotcunq; in data ratione continuè proportio-

nales reperire, quorum omnium summa æqualis sit numero, qui ex primo in ultimum gignitur, vel ex quibusvis duobus, qui ab extremis æqualiter distant. *Ad propos. 36.*

38 DVOS numeros in data proportione reperire, quorum summa æqualis sit numero producto ex uno in alterũ. *Ad prop. 36.*

39 MINVTIARVM, sive numerorum fractorum proprietates, operationesque varias demonstrare. *Ad finem lib. 9.*

40 PROPORTIONVM compositionem, contra quosdam Recentiores, explicare. *Ad finem lib. 9.*

IN DECIMO LIBRO.

1 SI duabus magnitudinibus incommmensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de majore, alterna quadam detractione. Nunquam reliqua præcedentẽ metietur. *Ad prop. 2.*

2 SI duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de majore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua præcedentem. *Ad propos. 2.*

3 MAGNITVDO metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem. *Coroll. propos. 3.*

4 AN quotlibet magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne, considerare *Ad prop 3.*

5 MAGNITVDO metiens quotlibet magnitudines, metitur & maximam earum mensuram comunem. *Coroll. propos. 4.*

6 SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines, & numeri. *Ad propos. 4.*

7 MAGNITVDINES commensurabiles proportionem habent eandem, quam numeri, per quos earum communis mensura maxima ipsas metitur. *Ad propos. 5.*

8 LINEAM rectam invenire, ad quam ita se habeat quævis alia data recta linea, ut numerus ad numerum. : Item rectam, ad cujus quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, ut numerus ad numerum. *Coroll. prop. 6.*

9 SI sint quotvis quantitates continuè proportionales, & aliæ totidem continuè quoq; proportionales, sitq; ut prima illarum ad ultimam, ita prima harum ad ultimam: Erit & ut prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam. *Ad propos. 8.*

10 RECTÆ lineæ, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia cõmensurabiles sunt: Quę verò potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quę longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles;

rabiles: quæ verò potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt. *Coroll. propos. 9.*

11 DIAMETER quadrati cujusvis lateri ejusdem incommensurabilis est. *Ad propos. 9.*

12 DVOS numeros planos invenire, qui proportionē non habeāt, quam quadratus numerus ad numerū quadratū. *Ad prop. 10.*

13 QVOTLIBET numeros invenire, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. *Ad propos. 10.*

14 RECTA media proportionalis inter duas rectas potentia tantùm commensurabiles, utrilibet illarum incommensurabilis est longitudine & potentia. *Ad propos 11.*

15 SI sint duæ magnitudines incommensurabiles, altera verò sit uni cuipiam commensurabilis: erit & reliqua eidem commensurabilis. *Ad propos. 12.*

16 QVÆ incommensurabilibus sunt commensurabiles: & inter se incommensurabiles erunt. *Ad propos. 14.*

17 DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, invenire id, quo major plus potest, quàm minor. Item datis duabus rectis sive æqualibus, sive inæqualibus, invenire rectam, quæ illas potest. *Ad propos. 14.*

18 SI tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarum; eadem & reliquæ commensurabilis est. *Coroll. propos. 16.*

19 SI tota magnitudo ex duabus composita, incommensurabilis sit alteri ipsarum: eadem & reliquæ incommensurabilis est. *Coroll. propos. 16.*

20 DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad majorem applicare, ita ut deficiat figura quadrata. *Ad propos. 17.*

21 DATAM rectam lineam ita secare, ut rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen majus non fit, quàm quadratū à dimidia linea descriptum. *Ad prop. 17.*

22 SI sint duæ rectæ inæquales, & ad majorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata: Nō erunt segmēta, quę ex applicatione fiunt, æqualia. *Ad prop. 17.*

23 QVOTCVNQVE lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles invenire. *Ad prop. 19.*

24 RATIONALES lineæ non solùm expositæ Rationali, sed etiam inter se sunt commensurabiles. *Ad propos. 19.*

25 SI sint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad secundam, ita quadratum quod fit à prima, ad rectangulum quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et ut secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima. *Ad propos. 19.*

26 SPATIVM Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt. *Ad propoſ. 19.*

27 RECTA linea potens ſpatium Irrationale. Irrationalis eſt *Ad propoſ. 21.*

28 DVAS aut plures quotcunq; lineas Rationales potentia tantùm inter ſe commenſurabiles invenire. *Ad propoſ. 21.*

29 PROPOSITIS quotcunque Rationalibus lineis potentia ſolùm commenſurabilibus, invenire adhuc aliam, quæ omnibus illis commenſurabilis ſit potentia tantùm. *Ad prop. 21.*

30 LINEA media proportionalis inter duas Rationales potentia tantùm inter ſe commenſurabiles, Irrationalis eſt, quæ vocatur Media. *Ad propoſ. 22.*

31 OMNE ſpatium Medium æquale eſt cuidam alteri rectangulo contento ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, ſi ipſum ſub talibus jam non contineatur. *Ad propoſ. 22. & 23.*

32 SPATIVM Medio ſpatio commenſurabile, Medium eſt. *Ad propoſ. 24.*

33 DVAS rectas Medias longitudine commenſurabiles: Item duas potentia tantùm commenſurabiles invenire. *Ad propoſ. 24.*

34 RECTANGVLVM ſub duabus Mediis lõgitudine & potentia incommenſurabilibus contentum, neque Rationale eſt, neque Medium, ſub æquale alteri cuipiam rectangulo, quod continetur ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur. *Ad propoſ. 26.*

35 RATIONALE ſuperat Rationale Rationali. *Ad propoſ. 27.*

36 DVOS numeros planos ſimiles invenire. *Ad propoſ. 29.*

37 DVOS numeros quadratos invenire, ita ut compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit. *Ad propoſ. 29.*

38 DVOS numeros quadratos invenire, quorum exceſſus ſit numerus quadratus. *Ad propoſ. 29.*

39 DVOS numeros quadratos invenire, quorum exceſſus non ſit numerus quadratus. *Ad propoſ. 29.*

40 DVOS numeros quadratos invenire, ita ut compoſitus ex ipſis non ſit quadratus. *Ad propoſ. 29.*

41 DVOS numeros invenire, ita ut ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. *Ad propoſ. 29.*

42 SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, erit ut major ad minorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum minoris. Et ut minor ad majorem, ita rectangulum ſub ipſis ad quadratum majoris. *Ad propoſ. 31.*

43 SI ſint tres lineæ rectæ, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum

gulum ſub prima & ſecunda contentum, ad id, quod ſub ſecunda & tertia continetur. *Ad propoſ.* 32.

44 SI recta linea ſecetur in duas partes inæquales: erit ut una pars ad alteram, ita rectangulum ſub tota & illa parte, ad rectangulum ſub tota & hac altera parte contentum. *Ad prop.* 33.

45 SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, una autem ſecetur bifariam; Erit rectangulum ſub ipſis contentum, duplum rectanguli, quod ſub inſecta linea, & dimidia parte lineæ ſectæ continetur. *Ad propoſ.* 33.

46 FIERI poteſt, ut duo ſpatia Irrationalia componant ſpatium Rationale. *Ad propoſ.* 34.

47 DVO ſpatia Rationalia Rationale ſpatium componunt. *Ad propoſ.* 34.

48 INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommenſurabiles. *Ad propoſ.* 36.

49 QVOD ſub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale eſt. *Ad propoſ.* 38.

50 SI recta linea non bifariam ſecetur, erit compoſitum ex quadratis partium majus, quàm rectangulum ſub partibus bis comprehenſum, quadrato ejus lineæ, qua major pars minorem ſuperat. *Ad propoſ.* 39.

51 SI recta linea in partes inæquales ſecetur, & rurſus in alias partes inæquales: erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul majora quadratis partiũ minus inæqualiũ ſimul. *Ad propoſ.* 42.

52 SI recta linea ſecta ſit utcunque erit: rectangulum ſub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum contentum ſub tota, & una parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis. *Ad propoſ.* 54.

53 EI, quæ eſt ex binis nominibus, potentia tantùm commenſurabilis, & ipſa ex binis nominibus eſt, ſed non ſemper ordine eadem. *Ad propoſ.* 67.

54 EI, quę eſt ex binis Mediis, potentia tantùm commenſurabilis, & ipſa ex binis Mediis eſt, atq; ordine eadem. *Ad propoſ.* 68.

55 RECTA linea, quæ ex binis nominibus, & reliquæ Irrationales per compoſitionem factæ ipſum ſubſequentes, neque ipſi Mediæ, neque inter ſe eædem ſunt. *Ad propoſ.* 73.

56 RECTA linea media proportionalis ſecundum Analogiam Arithmeticam inter duo nomina cujuſvis lineæ irrationalis, quæ per compoſitionem fit, eſt quoque Irrationalis eadem illi, inter cujus nomina media exiſtit. *Ad propoſ.* 73.

57 SI à majori nomine ejus, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome. *Ad propoſ.* 74.

58 SI à majori nomine ejus, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. *Ad propos. 75.*

59 SI à majori nomine ejus, quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda. *Ad propos. 76.*

60 SI à majori nomine lineæ Majoris minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor. *Ad propos. 77.*

61 SI à majori nomine ejus, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens. *Ad propos. 78.*

62 SI à majori nomine ejus, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens. *Ad propos. 79.*

63 SI idem excessus sit inter primam magnitudinem & secundam, qui inter tertiam magnitudinem & quartam, erit vicissim idem excessus inter primam magnitudinem & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam: Ac proinde Quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habent quoque vicissim Arithmeticam Analogiam. *Ad propos. 79.*

64 RECTA linea Apotomæ potentia tantùm commensurabilis, & ipsa Apotome est, sed non semper ordine eadem. *Ad propos. 104.*

65 APOTOME, & cæteræ ipsam consequentes Irrationales lineæ per detractionem factæ, neque ipsi Mediæ, neque inter se sunt eædem. *Coroll prop. 112.*

66 FIERI potest, ut spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. *Coroll. propos. 115.*

67 NON solùm lineæ, sed magnitudines etiam planæ, ac solidæ incommensurabiles esse possunt. *Ad propos. 117.*

IN VNDECIMO LIBRO.

1 A puncto in sublimi ad subjectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. *Ad prop. 13.*

2 SI fuerint duo plana parallela: Recta linea, quæ ad unum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit. *Ad prop. 14.*

3 DATO plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere. *Ad propos. 15.*

4 QVÆ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela: Vel si concurrunt, unum planum efficiunt. *Ad propos. 16.*

5 SI in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea una unius anguli, lineæ uni alterius anguli parallela: Erit quoque alcera linea alteri lineæ parallela, si modo ductæ sint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti. *Ad propos. 16.*

6 SI duæ, aut plures lineæ rectæ in uno plano existentes secentur quotvis lineis parallelis: Segmenta illarum linearum inter parallelas proportionalia erunt. *Ad propos.* 17.

7 DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas: parallela sunt. Et duorum planorum parallelorum, si unum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum. *Ad propos.* 18.

8 PER rectam in plano quovis datam, planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum. *Ad propos.* 18.

9 SI prisma quodcunq; secetur plano adversis planis parallelo; erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum. *Ad prop.* 25.

10 SI Prisma quodcunque secetur plano adversis planis parallelo; sectio est figura æqualis, & similis planis oppositis. *Coroll. propos* 25.

11 SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basim, sive insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, sive non; in eadem sunt altitudine. *Ad propos.* 30.

12 SOLIDA parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, super æquales sunt bases, si non habuerint basim eandem. *Ad propos.* 31.

13 SI solida parallelepipeda inter se sunt, ut bases: ipsa erunt sub eadem altitudine. *Ad propos.* 32.

14 SI fuerint quatuor lineæ rectæ proportionales continuè: ut est prima ad quartam, ita erit parallelepipedum super primam descriptum, ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundam. *Coroll. propos.* 33.

15 PRISMATA, quorum bases sunt triangula super eandem basim, vel æquales, & in eadem altitudine, sunt inter se æqualia. *Ad propos.* 34.

16 PRISMATA, quorum bases sunt triangula, sub eadem altitudine; inter se sunt, ut bases. *Ad propos.* 34.

17 PRISMATA similia, quorum bases sunt triangula, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. *Ad propos.* 14.

18 PRISMATVM æqualium, quorum bases sunt triangula, bases & altitudines reciprocantur. Et quorum prismatum triangulares bases habentium bases & altitudines reciprocantur, illa sunt æqualia. *Ad propos.* 34.

19 SI fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primò positis angulos contineant æquales, utrumq; utriq;: Erunt à punctis extremis linearum sublimium ad plana angulorum primo positorũ demissæ perpendiculares inter se æquales. *Coroll. propos.* 35.

20 SI

20 SI parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo à media linea descripto: Erunt tres rectæ lineæ continuè proportionales. *Ad propos* 36.

21 SI fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia, similiterque descripta ex eis, proportionalia. Et si tria solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: & ipsę tres rectæ lineę proportionales erunt. *Ad propos.* 37.

22 SI quatuor rectæ lineę proportionales fuerint: Et prismata triangulares bases habentia, quæ ab ipsis similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si prismata triangula bases habentia, quę & similia, similiterq; describūtur, fuerint proportionalia. Et ipsę rectæ lineæ proportionales erunt. *Ad prop.* 37.

23 SI fuerint tres rectæ proportionales, erunt & prismata triangulares bases habentia, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia. Et si tria prismata triangulares bases habentia, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ tres rectæ lineæ proportionales erunt. *Ad propos.* 37.

24 IN omni parallelepipedo diametri se mutuò bifariam secant in uno puncto. *Coroll. propos.* 39.

25 SI solidum parallelepipedum plano secetur per centrum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum. *Ad propos.* 39.

IN DVODECIMO LIBRO.

1 CIRCVLVS ad circulum est, ut polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. *Coroll. prop.* 2.

2 SI pyramides triangulares inter se sint, ut bases: ipsæ erunt sub eadem altitudine. *Ad propos.* 5.

3 PYRAMIDES triangulares ejusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constitutæ: sunt inter se æquales. Et pyramides triangulares æquales super eandem, vel æquales bases: eandem habent altitudinem. Item pyramides triangulares æquales, eandemque habentes altitudinem: bases habent æquales, si non habuerint eandem. *Coroll. propos.* 5.

4 PYRAMIDES quarumlibet basium, quæ inter se sunt, ut bases: eandem habent altitudinem. *Ad propos.* 6.

5 PYRAMIDES ejusdem altitudinis super æquales bases quaslibet: vel super eandem constitutę: sunt inter se æquales. Et pyramides æquales super æquales bases quaslibet, vel super eandē constructæ: eandem habent altitudinem. Item pyramides quarumli-

rumlibet basium æquales, eandemq; habentes altitudinem: æquales habent bases, si non habuerint eandem. *Coroll. prop.* 6.

6 PYRAMIS quælibet tertia pars est prismatis, quod eandem habet & basim, & altitudinem; Sive, Prisma quodlibet triplum est pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basim, & altitudinem. *Coroll.* 1. *propos.* 7.

7 PYRAMIS quælibet tertia pars est Prismatis, quod æqualem habet & basim, & altitudinem, licet basis unius plura vel pauciora latera contineat, quam basis alterius. *Ad propos.* 7.

8 PRISMATA sub eadem altitudine, quascunq; habeant bases: inter se sunt, ut bases. Et prismata quarumcunq; basium, si inter se sint, ut bases: sub eadem sunt altitudine. *Ad propos.* 7.

9 PRISMATA ejusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases quascunque: inter se sunt æqualia. Et Prismata æqualia super æquales bases quascunque, vel super eandem: in eadem sunt altitudine. *Coroll.* 2. *propos.* 7.

10 PYRAMIDES similes, quarum bases plura latera, quàm tria, continent: proportionem habent homologorum laterum triplicatam. *Coroll. propos.* 8.

11 PRISMATA similia quarumcunque basium: proportionem habent laterum homologorum triplicatam. *Ad propos.* 8.

12 PYRAMIDES multangulæ similes dividuntur in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. *Ad propos.* 8.

13 PRISMATA multangula similia dividuntur in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. *Ad propos.* 8.

14 PYRAMIDVM æqualium quascunque bases habentium, reciprocantur bases, atque altitudines. Et quarum pyramidum quascunque bases habentium, reciprocantur bases, atque altitudines: illæ sunt æquales. *Ad prop.* 9.

15 PRISMATVM quorumlibet æqualium reciprocantur bases, & altitudines. Et quorum prismatum bases, atque altitudines reciprocantur, illa inter se sunt æqualia. *Ad propos.* 9.

16 OMNIS conus sive rectus, sive scalenus, tertia pars est cujuslibet cylindri, sive recti, sive scaleni, eandem cum ipso & basim, & altitudinem habentis, licet non sit idem axis coni, & cylindri. *Ad propos.* 10.

17 CONI, & cylindri sub eadem altitudine, sive ambo sint recti, sive scaleni; sive unus rectus, & alter scalenus: inter se proportionem habent, quam bases. *Ad propos.* 11.

18 Si coni, & cylindri inter se sint, ut bases: ipsi sub eadem altitudine erunt. *Ad propos.* 11.

19 CONI, & cylindri ejusdem altitudinis super eandē, vel æqua-

les baſes conſtituti, ſive ambo ſint recti, ſive ſcaleni, ſive unus rectus, & alter ſcalenus: inter ſe ſunt æquales. *Coroll. prop.* 11.

20 CONI, & cylindri æquales ſuper eandem, vel æquales baſes in eadem ſunt altitudine. Et coni, ac cylindri æquales in eadem altitudine ſuper æquales baſes ſunt, ſi non habuerint eandem. *Coroll. propoſ.* 11.

21 CONI, & cylindri ſcaleni ſimiles, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus. *Ad propoſ.* 12.

22 CONI, & cylindri ſcaleni ſuper æqualibus baſibus, vel etiam ſi unus ſit rectus, & alter ſcalenus; inter ſe ſunt, ut altitudines. *Ad propoſ.* 14.

23 SVPER æqualibus baſibus priſmata, parallelepipeda, & pyramides; inter ſe ſunt, ut altitudines. *Ad propoſ.* 14.

24 CONI, & cylindri tàm recti, quàm ſcaleni: Item priſmata, parallelepipeda & pyramides, ſi ſint, ut altitudines, baſes habent æquales. *Ad propoſ.* 14.

25 CONORVM, & cylindrorum æqualium, ſive ambo ſcaleni ſint, ſive unus rectus, & alter ſcalenus: baſes & altitudines reciprocantur. Et quorum conorum, & cylindrorum, ſive ambo ſint ſcaleni, ſive unus rectus & alter ſcalenus, baſes & altitudines reciprocantur; illi ſunt æquales. *Ad prop.* 15.

26 SI duobus circulis circa idem centrum exiſtentibus, in majori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribatur minorem circulum non tangens, & ab extremitate unius lateris polygoni inſcripti, quod cum diametro convenit, ad diametrum perpendicularis ducatur: hæc nullo modo circulum minorem tangit, ſed extra ipſum cadit. *Coroll. prop.* 16.

27 DVO polyedra ſimilia in duabus ſphæris deſcripta, proportionem habent triplicatam ejus, quam habent ſpærarum diametri. *Coroll. propoſ.* 17.

28 SPHÆRA ad ſphæram eſt, ut polyedrum in illa deſcriptum, ad polyedrum in hac deſcriptum. *Coroll. propoſ.* 18.

IN TERTIODECIMO LIBRO.

1 SI recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentum aſſumens dimidium majoris ſegmenti quintuplum poſſit ejus, quod à dimidia majoris ſegmenti deſcribitur, quadrati: Recta illa linea ſecte erit extrema & media ratione. *Ad propoſ* 3.

2 SI recta linea inæqualiter ſecetur, ſitque quadratum totius, una cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex majore ſegmento deſcripti: Recta illa linea extrema ac media ratione ſecabitur. *Ad propoſ.* 4.

3 SI recta linea extrema ac media ratione ſecetur: tota linea aſſumens

assumens minus segmentum, quintuplum potest ejus, quod à majori segmento describitur, quadrati. Et si recta linea inæqualiter secetur, totaque assumens minus segmentum possit quintuplũ ejus, quod à majori segmento describitur, quadrati. Recta illa linea extrema & media ratione secta est. *Ad prop.* 4.

4 SI recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahaturq; ex majori segmento segmentum minus: erit majus segmentum sectum extrema ac media ratione, & minus segmentum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat. *Ad propos.* 5.

5 SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia majoris segmenti: Erit quoque dimidia totius divisa extrema ac media ratione, majusque segmentum erit dimidiũ majoris segmenti totius lineæ. *Ad prop.* 5.

6 SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque majus segmentum lineæ Rationali: Erit minus segmentum Apotome. *Ad prop.* 6.

7 REGTA, quæ angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli subtendit, parallela est opposito lateri. *Ad propos.* 8.

8 SI latus hexagoni in quopiam circulo descripti secetur extrema & media ratione: majus illius segmentum est latus decagoni in eodem circulo descripti. *Ad propos.* 9.

9 SI lineæ divisæ extrema ac media ratione, majus segmentum fuerit latus hexagoni alicujus circuli: Erit minus segmentum latus decagoni ejusdem circuli: Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicujus circuli, erit majus segmentum latus hexagoni ejusdem circuli. *Ad propos.* 9.

10 LINEA recta, quæ ex centro circuli ducta dividit arcum quempiam bifariam, dividit quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. *Coroll.* 1 *propos.* 10.

11 DIAMETER circuli ex angulo quovis pentagoni in eo descripti ducta, & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos. *Coroll. propos.* 10.

12 IN dato circulo latera pentagoni, & decagoni una eademq; opera invenire. *Ad propos.* 10.

13 DIAMETER circuli potentia est sesquitertia lateris trianguli æquilateri in eo circulo descripti. *Coroll.* 1. *propos.* 12.

14 SI in circulo triangulum æquilaterum describatur: Diameter ex uno angulo ducta dividet & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos: Semidiameter quoque vicissim bifariam, & ad angulos rectos secabitur à latere opposito. *Ad propos.* 12.

15 SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ sit media proportionalis inter segmẽta lineæ: Semicirculus circa illã lineã rectam

ctam descriptus, transibit per extremum punctum lineæ perpendicularis. *Ad propos. 13.*

14 DIAMETER sphæræ potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri circuli circa basim pyramidis in ea sphæra constructæ descripti. *Coroll. 1. propos. 13.*

15 LINEA perpendicularis ex centro sphæræ ad planum basis pyramidis in ea sphæra constructæ demissa, sexta pars est diametri sphæræ, & tertia pars semidiametri. *Coroll. 2. propos. 13.*

16 ALTITVDO pyramidis in sphæra descriptæ, duas tertias partes diametri sphæræ continet. *Coroll. prop. 13.*

17 IN Octaedro tres diametri se mutuò ad angulos rectos secant in centro sphæræ: nec non & tria quadrata ex lateribus Octaedri composita se mutuò ad angulos rectos secant. *Coroll. 1. prop. 14.*

18 OCTAEDRVM dividitur in duas pyramides similes, & æquales, quarum basis communis est quadratum ex Octaedri lateribus compositum. *Coroll 2. prop. 14.*

19 SI Tetraedrum, & Octaedrum in eadem sphæra describantur; erit Tetraedri latus potentia sesquitertium lateris Octaedri. *Coroll. 3. prop. 14.*

20 BASES Octaedri oppositæ, sunt parallelę. *Coroll. 4. prop. 14.*

21 OMNES diametri cubi sunt inter se æquales, seseque mutuò bifariam secant in centro sphærę; nec non & rectæ lineæ, quæ centra basium cubi oppositarum conjungunt, bifariam in eodem centro dividuntur. *Coroll 1. propos. 15.*

22 POTENTIA diametri sphæræ æqualis est potentiis laterum Tetraedri, & cubi simul sumptis. *Coroll. 2. propos. 15.*

23 DIAMETER sphæræ potentia est quintupla semidiametri circuli quinq; latera Icosaedri pentagonum constituentia ambientis. *Coroll. 1. propos. 16.*

24 DIAMETER sphæræ composita est ex latere hexagoni, hoc est, ex Semidiametro, & duobus lateribus decagoni ejusdē circuli, qui circa quinq; Icosaedri latera describitur *Coroll. 2. prop. 16.*

25 ICOSAEDRI latera opposita, sunt parallela. *Coroll. 3. propos. 16.*

26 SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, majus segmentum est latus Dodecaedri in eadem sphæra cum cubo descripti. *Coroll. 1. prop. 17.*

27 LATVS cubi æquale est lineæ rectę subtendenti angulū pentagoni Dodecaedri eadē sphæra comprehensi. *Coroll. 2. prop. 17.*

28 SI recta linea secetur extrema ac media ratione, cujus minus segmentum est latus Dodecaedri, majus segmentum est latus cubi ejusdem sphæræ. *Coroll. 2. prop. 17.*

29 IN Dodecaedro sunt sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamq; secantur, & ad angulos rectos, à tribus li-

neis

neis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoq; ad angulos rectos secantibus. *Coroll. 3. propos. 17.*

30 SI recta dividens opposita latera Dodecaedri bifariam & ad angulos rectos, secetur extrema ac media ratione: majus segmentum est latus cubi, minus verò latus Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. *Coroll. 4. propos. 17.*

31 PRÆTER quinque corpora regularia, quæ Euclides hoc lib. 13. constituxit, nullum aliud dari potest. *Ad propos. 18.*

32 QVOTNAM latera, & angulos quodvis Regularium solidorum contineat. *Ad propos. 18.*

33 CVBVS, & Octaedrum: Item Icosaedrum, & Dodecaedrum, reciproca sunt, quod ad numerum basium, & angulorum solidorum attinet: Solum Tetraedrum cum nullo reciprocatur, sed tot bases habet, quot angulos solidos. *Ad propos. 18.*

IN QVARTODECIMO LIBRO.

1 LINEA perpendicularis ducta ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secat arcum, quem dicta hæc linea subtendit, bifariam. *Coroll. 1. prop. 1.*

2 LINEA perpendicularis ex centro ad latus pentagoni ducta, æqualis est utrique lineæ simul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidio lateris decagoni. *Coroll. 2. propos. 1.*

3 LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli ad latus ipsius pentagoni. *Ad propos. 2.*

4 SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione: majus segmentū æquale est perpendiculari ex eodē centro ad latus trianguli æquilateri ductæ: minus verò æquale est dimidio lateris decagoni in eodē circulo descriptorū. *Ad pro. 2.*

5 SI in sphæra eadem cubus, & Dodecaedrum inscribantur: quadratum lateris cubi, & quadratū lateris Dodecaedri, utraq; simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis. *Coroll. propos. 3.*

6 SVPERFICIES cujuslibet Dodecaedri ad superficiem cujuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum contentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictū latus. *Coroll. prop. 7.*

7 SI ex centro circuli Triangulum Tetraedri, vel Octaedri, sive quadratum cubi circumscribentis, perpendicularis ducatur ad unum aliquod eorum latus. Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidē sumptum sexies, superficiei Tetraedri; in Octaedro verò, & cubo, duodecies sumptū, superficiei Octaedri, & cubi æquale. *Ad pr.* 7.

8 RECTANGVLVM comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad unum ejus latus ducta, & sub quinque sextis partibus lateris cubi eidem sphæræ, in qua Icosaedrum inscripti, æquale est pentagono Dodecaedri in eadem sphæra constituti. *Coroll. propos.* 8.

9 QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri ejusdem sphæræ, eandem habent latera cubi, & Icosaedri, in quavis alia sphæra descriptorum. *Ad propos.* 10.

10 SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solùm habet eandem proportionem, quam latus Icosaedri in eadem sphæra cum ipsis, ut vult propos. 6. hujus lib. sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphæra. *Ad propos* 10,

11 SI sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit. *Ad propos.* 10.

12 SI planum sphæram secans transierit per centrum, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra: Si verò planum secans per sphęræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum quàm sphæra, illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. *Coroll. propos.* 10.

13 CIRCVLI in sphæra æquales æqualiter distant à centro sphæræ. Et circuli æqualiter distantes à centro sphæræ, æquales sunt. *Ad propos.* 10.

14 EADEM proportio est lateris cubi ad latus Icosaedri, quæ superficiei Dodecaedri ad superficiem Icosaedri: Et lineæ potentis totam quamcunque sectam extrema ac media ratione, & ejus segmentum majus, ad lineam potentem totam eandem, & minus segmentum illius. Et Dodecaedri ad Icosaedrum ejusdem sphæræ. *Coroll. propos.* 11.

15 LINEA perpendicularis ex uno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissa secat & angulum, & latus bifariam. *Coroll propos.* 12.

16 OMNE triangulum æquilaterum, cujus latus sit Rationale, est superficies Media. *Coroll. propos.* 13.

17 LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basim oppositam ducta sesquialtera est ejus quæ inter centrum trianguli, & dictū angulū interjicitur. Hæc autem inter

ter centrum trianguli, & dictum angulum intersecta dupla est ejus perpendicularis, quę ex centro trianguli, ad basim ejusdem ducitur. *Coroll. propos.* 18.

18 SOLIDVM, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri, sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale est cubo. Vel solidū, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale est cubo. *Coroll. propos.* 20.

19 SOLIDVM, quod fit ex perpendiculari è centro cujuscunq; corporis regularis ad aliquam ejus basim ducta, in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est proposito corpori regulari. *Ad propos.* 20.

20 LINEÆ perpendiculares conjungentes centra circulorum, qui bases oppositas tàm cubi, quàm Octaedri in eadem sphæra circumscribunt, inter se æquales sunt. *Coroll. propos.* 21.

21 ALTITVDO Octaedri ad altitudinem Tetraedri ejusdem sphæræ est, ut latus Octaedri ad latus Tetraedri. *Coroll. propos.* 22.

22 DIAMETER sphæræ ad latus Tetraedri est, ut latus Octaedri ad latus cubi ejusdem sphæræ. *Coroll. propos.* 22.

23 SI linea quævis recta secetur extrema ac media ratione, & alia linea potentia hujus sesquialtera sit latus Octaedri: majus segmentum erit latus Dodecaedri ejusdem sphæræ, in qua Octaedrum describitur. *Coroll. propos.* 25.

24 SI in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex uno angulo ad latus oppositum: quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale est ipsi triangulo. *Coroll. propos.* 29.

25 DIAMETER sphæræ potentia est dupla sesquiquarta axis Tetraedri, seu altitudinis ipsius; atq; adeo diameter longitudine est sesquialtera axis, vel altitudinis Tetraedri. *Coroll* 1. *prop.* 31.

26 AXIS, seu altitudo Tetraedri ad latus cubi eidem sphæræ inscripti est, ut latus Tetraedri ad perpendicularem ex uno angulo basis ad latus oppositum ductam. *Coroll.* 2. *propos.* 31.

27 PRISMA eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto. *Coroll. propos.* 32.

IN QVINTODECIMO LIBRO.

1 SI in Tetraedro Octaedrum inscribatur, dividetur Tetraedrum bifariam tribus quadratis æqualibus, quæ Octaedrum bifariam quoq;, & sese ad angulos rectos intersecant. *Coroll. prop.* 2.

2 RECTÆ lineæ centra basium cubi oppositarum connectentes se mutuò & bifariam, & ad angulos rectos secant. *Coroll. propos* 3.

3 IDEM est centrum Icosaedri, ac sibi inscripti Dodecaedri. *Coroll. propos. 5.*

4 SI Tetraedrum Octaedro inscribatur, erunt quatuor bases Tetraedri octo basibus Octaedri parallelæ, singulæ videlicet binis oppositis. *Coroll 1. propos. 6.*

5 SI in Octaedro Tetraedrum inscribatur; recta, quæ centra basium Octaedri oppositarum conjungit, sesquialtera est axis Tetraedri, hoc est, perpendicularis ab angulo Tetraedri ad basim oppositam deductæ. *Coroll. 2. propos. 6.*

6 RECTA subtendens unum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallela est opposito lateri. *Coroll. propos. 8.*

7 DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrū inscribitur. *Ad prop. 13.*

8 SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est Dodecaedri in cubo descripti: Majus verò segmentum latus cubi in hoc Dodecaedro descripti. *Ad propos. 13.*

9 LATVS cubi æquale est duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti. *Ad propos 13.*

10 RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens, æqualis est lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur. *Ad propos 13.*

11 DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis. *Ad propos. 14.*

12 BIFARIÆ sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri conjunguntur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus. *Ad propos. 14.*

13 SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, majus segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti. *Ad propos. 14.*

14 ICOSAEDRI tam latera, quàm triangula opposita sunt inter se parallela. *Ad propos. 14.*

15 IDEM est centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti. *Coroll. propos. 15.*

16 SI duo latera trianguli æquilateri secentur extrema ac media ratione, ita ut unius majus segmentum, alterius verò minus sit propè angulum ab ipsis comprehensum: Recta connectens dictas sectiones duplū potest minoris segmēti. *Coroll 1. prop. 16.*

17 SI in Octaedro Icosaedrum describatur, collocabuntur octo bases Icosaedri in octo basibus Octaedri, idemq; erit centrum basis Octaedri, & basis Icosaedri. *Coroll. 2 prop 16.*

18 IDEM centrum est Octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri. *Coroll. 3 prop. 16.*

19 IDEM est centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. *Coroll. 1. prop. 18.*

20 RE-

20 RECTA conjungens bifarias ſectiones oppoſitorum laterum pyramidis, tranſit per centrum pyramidis, triplaque eſt lateris cubi in pyramide deſcripti. *Coroll. 2. propoſ. 18.*

21 IDEM eſt centrum pyramidis, & Octaedri in ea deſcripti. *Ad propoſ. 18.*

IN SEXTODECIMO LIBRO.

1 LATVS Icoſaedri Octaedro inſcripti, majus eſt ſegmentum rectæ diviſæ extrema ac media ratione, quæ ab uno angulo baſis Octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema quoque ac media ratione. *Coroll. propoſ. 3.*

2 LATVS Icoſaedri in pyramide deſcripti, eſt Apotome. *Coroll. prop. 4.*

3 LATVS Octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti, vel ejus rectæ extrema ac media ratione diviſæ, cujus majus ſegmentum latus eſt Dodecaedri Octaedro inſcripti. *Coroll. propoſ. 11.*

4 DIAMETER Icoſaedri binas rectas poteſt, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambientis. *Coroll. propoſ. 15.*

5 IDEM centrum eſt Octaedri, atque cubi ſibi inſcripti. *Coroll. 1. propoſ. 23.*

6 OCTAEDRVM ad ſibi inſcriptum cubum eandem habet rationem, quam eorum laterum quadrata habent. *Coroll. 2. propoſ. 23.*

7 DODECAEDRVM à duplo cubi ſibi inſcripti deficit duobus parallelepipedis, quorũ unius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti ejuſdem lateris cubi, altitudo demiq; à latere cubi deficit minore ſegmẽto ejus lineæ, quę dimidiati lateris cubi minus ſegmentum exiſtit: Alterius verò & longitudo & latitudo lateri cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentum ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit; ita ut amborũ altitudines ſimul altitudini, ſive lateri cubi ſint æquales. *Coroll. prop. 28.*

8 PYRAMIS excedit duplum Icoſaedri ſibi inſcripti parallelepipedo, cujus baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta linea bifarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri conjungens. *Coroll. propoſ 31.*

9 DATIS duobus circulis in ſphæra parallelis, datæq; in uno eorum linea recta, ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam. *Ad finem lib. 16.*

10 SI in planis parallelis deſcripti ſunt duo circuli, in quibus duę

rectæ parallelæ abscindant arcus similes: erunt duæ rectæ conjungentes extrema unius rectæ cum centro parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro conjungunt. *Ad finem lib.* 16.

11 SI in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad easdem partes centrorum: Rectæ harum parallelarum extrema puncta ad easdem partes conjungentes, æquales quoque, & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares. *Ad finem lib.* 16.

12 SI in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes centrorum: Rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad easdem partes conjungentes, in centro sphæræ se intersecant, ac proinde diametri sphæræ erunt, & inter se æquales: Rectæ verò earundem parallelarum extrema puncta ad easdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter se sunt, & cum parallelis rectos angulos constituunt. *Ad finem lib.* 16.

13 IN data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita ut diameter sphæræ sit utriusque diametri potentia sesquialtera. *Ad finem lib.* 16.

14 IN data sphæra Pyramidem aliter, quam ab Euclide factum est, describere. *Ad finem lib.* 16.

15 IN data sphæra Octaedrum aliter, quam ab Euclide factum est, describere. *Ad finem lib.* 16.

16 IN data sphæra cubum aliter, quam ab Euclide factum est, describere. *Ad finem lib.* 16.

17 IN data sphæra Icosaedrum aliter, quam ab Euclide factum est, describere. *Ad finem lib.* 16.

18 IN data sphæra Dodecaedrum aliter, quam ab Euclide factum est, describere. *Ad finem lib.* 16.

19 SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera: erunt viginti triangula simul majora, quàm octo quadrata simul. *Ad finem lib.* 16.

20 OCTO quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti. *Ad finem lib.* 16.

21 SI Octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur; erit perpendicularis è centro sphæræ ad unam basim Icosaedri ducta, major perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad unam basim Octaedri, & cubi ducta. *Ad finem lib.* 16.

22 SI cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur: superficies Icosaedri superficie cubi major est. *Ad finem lib.* 16.

23 DODECAEDRVM Icosaedro in eadem sphæra majus est. *Ad finem lib.* 16.

24 ICOSAEDRVM cubo in eadem sphæra majus est. *Ad finem lib.* 16.

25 CVBVS

25 CVBVS Octaedro in eadem sphæra major est. *Ad finem l. 16.*

26 OCTAEDRVM Tetraedro in eadem sphæra majus est. *Ad finem lib. 16.*

27 SVPERFICIES convexa Dodecaedri major est superficie convexa Icosaedri in eadem sphæra: Et superficies Icosaedri major superficie cubi: Et superficies cubi major superficie Octaedri: Superficies denique Octaedri major superficie Tetraedri. *Ad finem lib.* 16.

28 ANGVLVM inclinationis duarum basium cujuscunque corporis regularis invenire. *Ad finem lib.* 16.

29 OMNES inclinationes basium cujuscunque corporis regularis, æquales inter se sunt. *Ad finem lib.* 16.

ITAQVE in Codicibus Græcis habentur in primo libro propositiones 48: In secundo 14: In tertio 37: In quarto, 16.: In quinto, 25: In sexto, 33: In septimo, 41: In octavo 27: In nono 36: In decimo, 117: In undecimo, 40: In duodecimo, 18: In tertiodecimo, 18: In quartodecimo, 11: In quintodecimo, 5: Atque in universum, 486.

PROPOSITIONES verò additæ, in quinto libro, 9: In quartodecimo, 21. In quintodecimo, 16: In sextodecimo, 31: Atque omnes numero, 77.

IN scholiis denique, & corollariis demonstrantur propositiones in primo libro, 108: In secundo, 21: In tertio, 54: In quarto, 23: In quinto: 26: In sexto, 99: In septimo, 33: In Octavo, 37: In nono, 40: In decimo, 67: In undecimo, 25: In duodecimo, 28: In tertiodecimo, 33: In quartodecimo, 27: In quintodecimo, 21: In sextodecimo, 29. Quæ omnes conficiunt numerum 671.

IN universum ergo 1234. propositiones in nostro Euclide demonstrantur.

IN EV-

IN EVCLIDIS ELEMENTA

PRÆFATIO.

SI QVIS fortè miratur, cur post tot præclarissimos in Euclidis Elementa Geometrica Commentarios ab egregiis, & in primis Mathematicarum rerum peritis Scriptoribus editos, novas adhuc ipsi commentationes conscripserimus; is facilè sibi persuadebit, non temerè id à nobis esse factum, si consilii nostri rationem cognoverit. Cum enim longa diuturnaque experientia nobis esset perspectum, atq; exploratum, eam esse utilitatem, atque adeo necessitatem horum elementorum, ut frustrà quisquam se speret sine ipsorum præsidio, acutissimas, subtilissimasq; Archimedis, Apollonii, Theodosii, Menelai, Ptolemæi, cæterorumque illustrium Mathematicorum demonstrationes posse percipere; vehementer dolebamus, tam insignem & illustrem auctorem à plerisq; omnino negligi, à perpaucis verò pro dignitate tractari, ita ut vix hoc nostro seculo reperiantur, qui sedulam operam, ac studium in perdiscendis his elementis ponant; ob eam potissimum, ut arbitror, causam, quod difficultate rerum, quas tractant, atque obscuritate deterreantur, nullumque habeant hac in re ducem, quem sibi citra erroris periculum sequendum proponant. Extant quidem Commentarii Campani, ac Theonis in singulos Euclidis libros

bros sanè eruditi, qui satis esse possint cuivis ad facilè consequendam horum elementorum doctrinam: Sed alter secutus in omnibus est traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinem, ac methodum perverterunt, verbaq; propositionum ejusdem locis non paucis immutarunt, ut verus germanusq; auctoris sensus perdifficile possit intelligi; id quod maximè in 10. lib. perspicitur: Alter (Theonem intelligo) penè innumeris mendis, vitiisque incuria librariorum ita est depravatus, & propter notas Græcas, quæ in ejus demonstrationibus adhibentur, obscuras illas ac malè expressas adeò impeditus, ut magnam difficultatem inexercitatis ingeniis, perplexitatemque gignat. Quod fit, ut Euclidē sine maximo labore ac studio nemo percipiat. Jam si alii ad nostram usque memoriam majus aliquod studium operamque in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerunt, hi vel sex priores tantùm libros exposuerunt: vel si qui in universum Euclidem Commentarios ediderunt, hi persæpe, relictis antiquorum demonstrationibus certissimis, proprias alias, ac novas confinxerunt, quæ plerumque non tam firmæ sunt, neque rem ipsam simpliciter & absolutè conficiunt; præsertim quòd modò è propositionibus voces quasdam perperam detrahunt, modò alias ineptè apponunt, modò denique nonnullas temerè immutant, ut meritò de vero proprioque Euclidis sensu dubitare quis possit. Qua tamen in re Federicum Commandinum Vrbinatem, Geometram non vulgarem excipio, qui nuper Euclidem Latinè redditum in pristinum nitorem restituit, paucis locis exceptis, in quibus non parùm à vero aberravit, ut suo loco monebimus. Quæ cum ita sint, resque ac scientia tam præclara digna sit, quæ ope, studio, industria ab iis adjuvetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre possunt, post diuturni temporis in rebus Mathematicis operam collocatam; faciendum putavimus, ut lucubra-

tubrationes noſtras, ac vigilias ſtudioſis harum rerum nonnihil (niſi fallimur) ſubſidii allaturas in publicum ederemus. Acceſſit editionis cauſa altera: Nam cum Euclides, propter ſingularem utilitatem, inſtar enchiridii, manibus ſemper debeat circumgeſtari, neque unquam deponi ab his, qui fructum aliquem ſerium ex hoc ſuavi Matheſeos ſtudio capere volunt, in eoque progredi; id verò in hunc diem, exemplaribus omnibus majore forma impreſſis, necdum factum videamus; hoc noſtra editio certè, ſi nihil aliud attulerit commodi, atque emolumenti. Sunt enim hi noſtri Commentarii in univerſum Euclidem conſcripti commodiore nunc forma, quam vulgo cæteri, (id quod magnopere à nobis, qui nos audierunt, efflagitabant,) volumineq; editi, ut facilè jam queant, nulloq; negotio, è loco in locum, cum res tulerit, ferri atq; portari. Nunc quo modo, via, ac ratione res tota à nobis pertractetur, quidq; in hac interpretatione præſtitum ſit, paucis accipe. Demonſtrationes aliorum, maximè Theonis, quas quidem ipſius eſſe Euclidis, non levibus argumentis adducti cum pleriſque aſſeveramus, & Proclus etiam teſtatur, breviores, quantum per rei difficultatem licuit, vel certè planiores, quando illud non potuimus, dilucidioreſque reddere conati ſumus. Non enim illas nudè, ac totidem verbis, quot erant ſcriptæ, propoſuimus. Etenim ea eſt interdum illarum brevitas, ut illud accidat, quod ab elegantiſſimo Poeta dictum eſt: *Brevis eſſe laboro, obſcurus fio.* Interdum etiam cum brevius, atq; ſuccinctius efferri poſſint, magna ob longiorem, quàm ſatis eſt, ſermonem, affertur moleſtia legenti. Quare utrumq; vitantes, eas, velut παραφραστικῶς, atq; ad eum ferè modum tradidimus, quem, cum publicè Euclidem interpretaremur, obſervavimus; hac etiam re auditorum deſiderio, & voluntati, quantum eſt in nobis, ſatisfacere cupientes. Ita enim, noſtra ſententia, Euclides faciſius à ſtudioſis, iis præſertim, qui ceu tyrones, hæc Mathematica ſtudia

nunc

nunc primum auſpicantur, ac majore voluptate, utilitateque cognoſcetur. Præter hæc adjunximus multis in locis varia problemata ac theoremata ſcitu non injucunda, neque à ſcopo Geometriæ aliena, quæ partim ex Proclo, Campano, aliiſque auctoribus decerpſimus, partim proprio (ut ajunt) Marte, aſſiduiſq; meditationibus ipſi contecimus. Data inſuper in hoc diligens opera, ut definitiones Euclidis, præſertim obſcuriores, & quæ aliquid viſæ ſunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tanquam in ſcopulos quoſdam incidentes, à recto curſu deflexerunt, & in errores varios atque abſurdos, prorſuſque ab inſtituto diſciplinæ abhorrentes dilapſi ſunt) dilucidè atque perſpicuè, quoad ejus fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium ſtudioſi facilè judicabunt. Quæ res cum in ampliorem magnitudinem excreſcerent, quàm ut unius libri ſpatiis, hac præſertim forma commodè includi poſſent, in duas partes totam tractationem diviſimus. Altera ſex prioribus libris continetur: altera novem reliquos, unà cum decimoſexto ad comparationes quinque corporum regularium pertinente, quem ex Franciſco Fluſſate Candalla, ut Elementa hæc Geometrica evaderent perfectiora, adjicere voluimus, complectitur.

BENI-

BENIGNO LECTORI.

QVONIAM superiorem editionem Elementorum Euclidis non ingratam fuisse Mathematicarum disciplinarum studiosis intelleximus, exhibemus tibi benigne Lector, alteram editionem priore illa multo locupletiorem: in qua scilicet varia tum problemata, tum theoremata, quae rebus Mathematicis magnum adjumentū allatura, longo usu, atq; experientia comprobavimus, & quae in priore editione desunt, adjecimus, plurimaq; loca subobscura clarioribus notis illustravimus. Addidimus praeterea novam demonstrationem undecimi axiomatis Euclidis, (quod in hisce Commentariis est tertium decimum) quo vult, Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duas illas rectas lineas in infinitū productas, coituras tandē ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores: addidimus, inquam, novam demonstrationem à nobis nuper inventam, quam nō injucundam studioso Lectori futurā speramus, quod eo prīcipio tota doctrina de lineis parallelis, quae immensa propemodum est, atque infinita, nitatur. Quanquam enim idem illud principium Arabes quoque olim demonstrasse jam pridem acceperam: quia tamen eorum demonstrationem diu ac diligenter quaesitā videre mihi non licuit, (non dum enim ex Arabica in Latinam linguā conversa est) coactus sum hāc meo, ut ajunt, Marte excogitare,

gitare, ut nullus in eo principio tam necessario jam dubitationi locus esset. Neque enim Procli demonstratio, quam ad propos. 28. lib. 1. Euclidis de re eadem affert, omni ex parte absoluta, ac Geometrica censeri potest; cujus rei causa eodem loco à nobis explicata est. Deinde ex Pappo Alexandrino inscriptiones omnium figurarũ regularium in circulo, beneficio lineæ certæ quadam ratione inflexæ, perfecimus: quod ante à Mathematicis desiderabatur. Ex quæ eadem linea via quædam & ratio ad circulũ quadrandum (res tot seculis à doctissimis viris exagitata) conficitur: quod suo loco docebitur. In definitionibus porrò quinti libri apertè ostendimus, cur Euclides magnitudines proportionales & improportionales per æquemultipliciũ habitudinẽ describere coactus sit. Postremo (ut alia omittã) omnes operationes fractionũ vulgariũ, quæ in Arithmetica practica declarari solent, Geometricè demonstravimus. Hæc ferè præcipua sũt, quæ hac posteriore editione aa Cõmentarios nostros in Euclidẽ accesserunt. Cætera vel theoremata, vel problemata, quibus editio hæc posterior priorẽ superat, quæ sanè plurima sũt, & Euclidis propositionibus sparsim inserta, inter legendũ facilè cõperies, si utramq; editionẽ cum altera conferens attentius paulò consideravis. Nunc quia hæc Euclidis elemẽta ostiũ atq; aditũ ad omnes alias disciplinas Mathematicas referant, ac patefaciunt, operæ pretiũ fore duximus, antequã ad ipsa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, undenã Mathematicæ disciplinæ hoc nomen acceperint: quæ sit earũ divisio: à quibus primũ ortæ, & per quos deinde singulæ fuerint excultæ: quãta sit illarũ præstãtia atq; utilitas; & si qua sunt alia rei nostræ opportuna.

IN DISCIPLINAS MATHEMATICAS PROLEGOMENA.

MATHEMATICÆ DISCIPLINÆ cur sic dictæ.

DISCIPLINÆ Mathematicæ, quæ quidem circa quantitatem versantur omnes, nomen acceperunt à dictione Græca μάθημα sive μάθησις, quæ significat disciplinam, seu doctrinam. Cur autem hæ artes de quantitate agentes nomen disciplinæ, vel doctrinæ inter reliquas omnes solæ sint adeptæ, duas potissimum causas apud probatos scriptores invenio. Pythagorei enim, atque Platonici existimantes, animas rationales certo quodam ac determinato numero contineri, easque de corpore in corpus migrare, (quod tamen Christiana fides falsum esse perspicuè docet) testantur eas nomen doctrinæ, sive disciplinæ obtinere, quod maximè ex ipsis nanciscamur recordationem, reminiscentiamque illius scientiæ, quã anima nostra, (ut eorum est error) antequam corpus informaret, erat prædita. Quod quidem facili ac familiari quodam exemplo cõprobare nititur Plato in dialogo, qui Menõ inscribitur, ubi Socratem introducit pusionem quendã interrogantem Geometrica quædam de quadrati dimensione, ad quæ licet in principio responderit, ut puer, gradatim tamen ascendens, eo deductus est, ut responderit id, quod tandem dicturus fuisset, si diutissimè perdidicisset Geometriam. Aliis autem placet, ideo has artes præ cæteris nomẽ scientiæ, & doctrinæ sibi vendicare, quòd solæ modum rationemque scientiæ retineant. Procedunt enim semper ex præcognitis quibusdam principiis ad conclusiones demonstrandas, quod proprium est munus, atque officium doctrinæ, sive disciplinæ, ut & Aristoteles 1. Posteriorum testatur; neq; unquam aliquid non probatum assumunt Mathematici, sed quandocunque aliquid docere volunt, si quid ad eam rem pertinet eorum, quę ante docuerunt, id sumunt pro concesso, & probato: illud verò modo explicant, de quo ante nihil scriptum est. Quod quidem alias artes, disciplinasve non semper observare videmus, cum plerumq; in confirmationem eorum, quæ ostendere volunt, ea, quæ nondum sunt explicata, demonstratave adducant.

DISCIPLINARVM MATHEMATICARUM divisio.

PYTHAGOREI, *quos deinde secuti sunt omnes propemodum* Mathematici, atque Philosophi non pauci, Mathematicas disciplinas

primas universas in quatuor partes distribuerunt, Arithmeticam, Musicam, Geometriam, atque Astronomiam. Cum enim omnis quantitas, circa quam versantur, sit vel discreta, sub qua omnes numeri, vel continua, sub qua omnes magnitudines comprehenduntur, & utraq; tam secundum se, quàm comparatione alterius possit considerari; visum fuit illis consentaneum quatuor prædictas facultates instituere, quæ utramq; quantitatem pro duplici consideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate discreta secundum se, inquirendo & accuratè explicando omnes numerorum proprietates, ac passiones. Musica tractat eandē quantitatem discretam, sive numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum sonorum concentus respicit, atque harmoniam. Geometria de magnitudine, sive quantitate continua, secundum se quoq;, ut immobilis existit, disputat. Astronomia denique eandem magnitudinem, ut est mobilis, considerat; qualia sunt cœlestia corpora, prout continuo motu cientur. Ad has autem quatuor scientias Mathematicas, quarum Arithmetica & Geometria puræ, Musica verò atque Astronomia mixtæ dicuntur, omnes aliæ quovis modo de quantitate agentes, qualis est Perspectiva, Geographia, & cæteræ hujusmodi, vel facilè, ut ad capita, à quibus dependēt, reduci possunt.

ALIA ratione à Gemino antiquo Geometra, & ab aliis, ut auctor est Proclus in Commentariis, quos in primum Euclidis librum edidit, Mathematicæ disciplinæ dividuntur. Quam quidē divisionem, quoniam eleganter, copioseque docet, ad quænam sese extendant Mathematicæ disciplinę, fermè ad verbum ex Proclo juxta interpretationem Francisci Barocii Patricii Veneti excerptam hic subjicere statui. Volunt itaq; prædicti autores, scientiarum Mathematicarum quasdam in intellectilib. duntaxat ab omni materia separatis, quasdam verò in sensilibus, ita ut attingant materiam sensibus obnoxiam, versari. Prioris generis statuunt duas longè primas, præcipuasque scientias, Arithmeticam & Geometriam: In posteriori verò genere constituunt sex Astrologiam, Perspectivam, Geodæsiam, Canonicam, sive Musicam, Supputatricem, atq; Mechanicam. Astrologiam dicunt esse eam facultatē, quæ de mundanis edisserit motibus, de corporū cęlestium magnitudinibus, figuris & illuminationibus, à terraq; distantiis, ac de aliis hujusmodi rebus. Hujus rursum tres constituuntur partes; Gnomonica, quæ in horarū dimēsione, positu gnomonum exercetur: Meteoroscopica, quę elevationū differētias, siderūq; reperit distantias, nonnō multa alia & varia Astrologica perdocet theoremata: & Dioptrica, quæ planetarū, cæterarumq; stellarum distantias hujusce modi Dioptricis dignoscit instrumentis. Perspectivā ajunt à Geometria gigni, atq; uti radiis visortis, tanquam lineis, & angulis, qui ex hisce constituuntur oculorū radiis. Dividitur autē in eā, quę proprio nomine dicitur Perspectiva, quę quidē reddit

cauſam earum apparentiarum, quæ aliter quàm ſint, ſeſe nobis afferre ſolent, ob eorum, quę ſub viſum cadunt, alios ſitus & diſtantias, ut parallelarum coincidentiæ, vel quadratorum, tanquam circulorum, aſpectionis: Et in univerſam ſpeculariam, quæ circa varias, multiplicesq; verſatur refractiones: Nec non in eam, quæ Sciographicè, hoc eſt, umbrarum deſignatrix appellatur, quæ oſtendit, qua ratione fieri poſſit, ut ea, quę in imaginibus apparent, haud inconcinna, vel deformia ob deſignatorum diſtantias, altitudines q; videantur. Geodęſiam appellant eam ſcientiam, quæ res quantas metitur, ut materialium rerum acervos tanquam conos; & puteos, tanquam cylindros. Quod quidem non aſſequitur intellectilibus rectis lineis, ut Geometria, ſed ſenſilibus tantùm, interdũ quidem certioribus quodam pacto, ut radiis Solaribus; interdum verò craſſioribus, ut ſpartis & perpendiculo. Dividitur hæc, ut Geometria, in eam partem, quæ plana, & in eam, quę ſolida dimetitur. Canonicam, ſive Muſicam, vocant eam ſcientiam, quæ apparentes contentuum conſiderat rationes, ſenſuſq; ubiq; utitur adminiculo; & quę (ut Plato inquit) talis exiſtit, ut menti aures ipſas prępoſuiſſe videatur. Supputatrix eadem apud ipſos eſt, quæ apud nos Arithmetica practica. Hęc enim numeros conſiderat, non ut in intellectilibus, ſed ut ſunt in ſenſilibus ipſis. Mechanica deniq;, quę in cognitione rerũ ſenſibiliũ, materięq; conjunctarum conſiſtit, apud ipſos multiplex eſt. Quędam enim eſt inſtrumentorũ effectrix, quę βελοποιητικὴ vocatur, eorũ, inquam, quæ gerendis ſunt bellis idonea, qualia ſanè Archimedes etiam fertur conſtruxiſſe, Syracuſas terra mariq; obſidẽtibus reſiſtentia. Quędam mirabilium prorſus rerum effectrix, quæ θαυματοποιητικὴ, dicitur; quippe quæ alia quidem ſpiritibus maximo cum artificio conſtruit, quemadmodum etiam Ctęſibius, atq; Heron operantur, alia autem ponderibus, quorum motus quidem inæquilibrium, ſtatus verò æquilibrium eſſe cauſam cenſendum eſt, ut Timæus etiam determinavit; alia verò nervis, ſpartiſq; animatas convolutiones, ac motus imitantibus: Quædam eſt æquilibrantium omninò, & eorũ, quæ centroponderantia vocantur, cognitio: Quędam deniq; ſphęrarum effectrix, quę σφαιροποιΐα appellatur, ad cęleſtium circumvolutionum imitationem, qualem Archimedes etiam fabricatus eſt. Atque, ut uno verbo dicam, omnis, quę materiam movendi vim habet. Hæ igitur ſunt diſciplinæ Mathematicæ apud antiquos. Militarem autem artem, eam, inquam, quæ ad inſtruendas, coordinandaſque pertinet acies, quam Græci τακτικὴν vocant, unam aliquam ex Mathematices partibus dicendam eſſe non cenſent, ut quidam alii voluêre, ſed uti eam volunt modo quidem arte ſupputandi, ut in enumerandis legionibus; modo verò Geodęſia, ut in dividendis, dimetiendiſq; caſtrametationi ſpatiis in campo. Quemadmodũ neq; Hiſtoricam. neq; medendi artẽ Mathematices partẽ ullam eſſe dicunt, licet ſæpe

numero

numero tum Historici, tum etiam Medici Mathematicis utantur theorematibus; Rerum quidem gestarum scriptores, vel climatum situs referendo, vel urbiū magnitudines, & diametros, vel ambitus, circuituſve colligendo: Medici verò quamplurimas res in arte ſua hujuſcemodi viis dilucidando. Nam utilitatem, quæ in Medicinam ab Astrologia pervenit, ipſe etiam Hippocrates oſtendit, ac ferè omnes, quicunq; aliquid de oppportunis temporibus, lociſq; dixére. Eadem ſanè ratione ille etiam, qui aciebus inſtruendis operam accommodat, Mathematicis quidē utetur theorematibus, nec tamen ob hoc erit Mathematicus, quamvis interdum quidem volens eam, quæ numeroſa eſt, pauciſſimam oſtendere multitudinem, caſtra ſuoſq; exercitus ad figurā circuli formet; interdum verò ad figuram quadranguli, vel quinquanguli, vel alterius cujuſdam multanguli, ubi plurimam apparere cupit. Hæc igitur ferè ſunt, quæ nobis antiqui Mathematici de harum ſcientiarum partitione reliqueruat.

INVENTORES MATHEMATIcarum disciplinarum.

OMNES diſciplinas Mathematicas à variis & diverſis auctoribus ortum originemq; duxiſſe, perſpicuè hiſtoriæ teſtantur: Imò verò ſingulas nequaquam ſummam adeptas eſſe perfectionem ſtatim ab initio ſed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora proceſſiſſe, memoriæ quoq; proditum eſt. Arithmetices enim inventores primi creduntur Phænices, propter frequentes mercaturas, atq; commercia, ut auctor eſt Proclus. Quam mirum in modum poſtea Pythagoras, ejuſq; ſucceſſores, nec non Ægyptii Græci denique atq; Arabes amplificarunt, variiſq; problematis, atque theorematis illuſtrarunt. Muſicam deinde à Mercurio primum eſſe inventam, multi ſcriptores tradunt, quam ipſe poſtea Orpheo inſigni Muſico commendavit, atq; concredidit; Hic autē Thamyri & Lino. Linus verò Herculi, & ſic ſucceſſionibus continuis per alios Muſicos præclaros ad noſtra uſque tempora manavit. Geometria verò, auctore Proclo, ab Ægyptiis reperta eſt, ortumque habuit ab agrorum dimenſione. Cum enim anniverſaria Nili inundatio agrorū terminos, ac limites ea confunderet, vaſtaretq; ut nemo agrum dignoſcere poſſet ſuum, cœperunt Ægyptii animos ad rationē menſurandorū agrorum applicare, ut hoc modo cuilibet, quod ſuum erat, redderetur. Quę quidem ratio agros metiendi, quanquā tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipſo tamen officio Geometria eſt appellata. γεωμετρέομαι enim, ſive γεωμετρέω idem ſignificat, quod terrā metior. Cæterū paulatim deinde Geometria cœpta eſt expoliri, & nō cōtenta ſuis finib⁹, ſefe ad corpora etiā cęleſtia dimetienda cōvertit, traditiq; principia univerſę Aſtronomię, Perſpectivę, Coſmographię, & aliis diſciplinis quamplurimis, quę ex ipſa, veluti radice,

dependent. Hanc Thales Milesius ex Ægypto in Græciam primus transtulisse fertur: Deinde eam insignes Philosophi ac Mathematici plurimis acutissimisque demonstrationibus locupletarunt, atq; exornarunt: Inter quos hi sunt præcipui ex veteribus: Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Brito, Antipho, Theodorus, Theætetus, Aristarchus, Eratosthenes, Architas Tarentinus, Euclides, Serenus Hypsicles Alexandrinus, Archimedes Syracusius, Apollonius Pergæus, Theodosius Tripolita, Mileus Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemæus, Eutocius Ascalonita, Pappus, Proclus, & alii penè innumeri, quos omnes longũ esset recensere. Astronomiam deniq; non pauci ab Atlante primum inventam esse autumant: Vnde ob eximiam, qua primus inter mortales præditus erat, Astronomiæ cognitionem, exortam esse volunt fabulam, illũ suis humeris cælum sustinere. Alii putant Chaldæos diuturna observatione (quod etiam Cicero affirmat in libro de Divinatione) siderum scientiam adinvenisse. Alii Ægyptios primos hujus scientiæ faciunt inventores: Alii Assyrios: Alii deniq; gloriam hanc, & laudem Babyloniis esse deferendam, censent. Hac autem in scientia, ut est præstantissima, ita quoq; maximè illustres auctores claruerunt, quod non est hujus loci declarare. Cæterum præcipuis hisce quatuor disciplinis Mathematicis inventis, reliquæ omnes de quantitate quovis modo agentes, facilè ex ipsis tanquam rivuli ex fonte, derivatæ sunt, atque deductæ.

NOBILITAS ATQVE PRÆSTANTIA Scientiarum Mathematicarum.

QVONIAM disciplinæ Mathematicæ de rebus agunt, quæ absq; ulla materia sensibili considerantur, quamvis re ipsa materiæ sint immersæ; perspicuum est, eas medium inter Metaphysicam, & naturalem scientiam obtinere locum, si subjectum earum consideremus, ut rectè à Proclo probatur, Metaphysices enim subjectum ab omni est materia sejunctum, & re, & ratione: Physices verò subjectum & re, & ratione materiæ sensibili est conjunctum: Vnde cum subjectum Mathematicarum disciplinarum extra omnem materiam consideretur, quamvis re ipsa in ea reperiatur, liquido constat, hoc medium esse inter alia duo. Si verò nobilitas, atque præstantia scientiæ ex certitudine demonstrationum, quibus utitur, sit judicanda; haud dubio Mathematicæ disciplinæ inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonstrant enim omnia, de quibus suscipiunt disputationem, firmissimis rationibus, confirmantq;, ita ut verè scientiam in auditoris animo gignant, omnemq; prorsus dubitationem tollant: Id quod aliis scientiis vix tribuere possumus, cum in eis sæpenumero intellectus multitudine opinionum, ac scientiarũ varietate in veritate conclusionum judicanda suspensus hæreat, atq; incertus,

certus. Hujus rei fidem apertè faciunt tot Peripateticorum sectæ, (ut alios interim Philosophos silentio involvam,) quæ ab Aristotele, veluti rami è trunco aliquo, exortæ, adeo & inter se, & nonnunquam à fonte ipso Aristotele dissident, ut prorsus ignores, quidnam sibi velit Aristoteles, num de nominibus, an de rebus potius disputationem instituat. Hinc fit, ut pars interpretes Græcos, pars Latinos, alii Arabes, alii Nominales, alii denique Reales, quos vocant, (qui omnes tamen Peripateticos se esse gloriantur) tanquam ductores sequantur. Quod quam longè à Mathematicis demonstrationibus absit, neminem latere existimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumque Mathematicorum, eandem hodiè, quam ante tot annos, in scholis retinens veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonstrationum robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, seu dialogo, qui de summo bono inscribitur; Eam scientiam esse digniorem, præstantioremque, quæ magis syncéritatis, veritatisque est amans. Cum igitur disciplinæ Mathematicæ veritatem adeo expetant, adament, excolantque, ut non solùm nihil, quod sit falsum, verùm etiam nihil, quod tantum probabile existat, nihil denique admittant, quod certissimis demonstrationibus non confirment, corroborentque, dubium esse non potest, quin eis primus locus inter alias scientias omnes sit concedendus.

VTILITATES VARIÆ MATHEmaticarum disciplinarum.

NON solum utiles, verùm etiam necessariæ admodum censeri debent disciplinæ Mathematicæ cùm ad alias artes perfectè perdiscendas, tum ad rem etiam publicam rectè instituendam, & administrandam. Neq; enim ad Methaphysicam, ut eleganter ostendit Proclus, ulli paret aditus, nisi per Mathematicas disciplinas. Nam si à rebus sensibilibus, quas Physicus considerat, ad res ab omni materia sensibili secretas, sejunctasque, quas contemplatur Metapysicus, vires, aciemque nostri intellectus attollere absque ullo medio tentemus, nosmetipsos excæcabimus, non secus, ac ei contingit, qui è carcere aliquo tenebricoso, in quo diu latuit, in lucē Solis clarissimā emittitur. Quam ob rem, antequam à rebus physicis, quæ materiæ sensibus obnoxiæ sunt conjunctæ, ad res Metaphysicas, quæ sunt ab eadē maximè avulsæ, intellectus ascendat, necesse est ne harū claritate offundatur, primus eum assuefieri rebus minus abstractis, quales à Mathematicis considerātur, ut facilius illas possit cōprehendere. Quocirca rectè Divinus Plato Mathematicas disciplinas erigere animum, & ad divinarum rerum contemplationem exacuere mentis aciem affirmat. Quantum verò emolumenti hæ disciplinæ ad sacras literas rectè percipiendas, interpretandasque conferant, multis pulcherrimè nobis exponit B. Augustinus lib. 2. cap. 16. de Doctrina

Christiana, demonstrans, numerorum inscitia multa non intelligi à multis, quæ translatè, ac mysticè posita sunt in Scripturis. Cujus rei exempla non pauca in medium adducit, eandemq; sententiam longè post pluribus verbis repetit eodem libro, capite 17. Hoc idem docet Hieronym. tomo 1. Epist. 5. asserens magnam inesse numeris vim, ad multa mysteria in Scripturis intelligenda: Quo item loco, Geometriam magnam afferre Theologis utilitatem perhibet. Rursum B. Augustinus locojam citato, capite 16. quem paulò ante retuli, testatur, Musicam perneccssariã esse doctori Christiano, subjungens paulò post cap. 19. Theologos debere etiam Geographia diligenter esse instructos. Quod non ignorans Divus Gregorius Nazianzenus, summis laudibus Divum Basilium Præceptorem suum extollit, quòd in Astrologia, Geometria, numerorum cognitione, cæterisque scientiis Mathematicis, fuerit non Mediocriter versatus. Non parũ etiam conducunt hæ artes ad philosophiam naturalem, moralẽ, Dialecticam, & ad reliquas id genus doctrinas, arteſque perfectè acquirendas, ut perspicuè docet Proclus. His adde, quod omnia volumina antiquorũ philosophorum, maximè Aristotelis, & Platonis, quos meritò duces nobis sequendos ad benè recteq; philosophandũ proponimus, eorumq; ferè omnium interpretum cum Græcorũ, tum Latinorum, exemplis Mathematicis sunt referta, eá potissimum de causa, ut ea, quæ alioquin multis obstructa difficultatibus videbantur esse per exempla hujusmodi clariora, magisque perspicua fierent; quæ procul dubio nulla ratione percipiet is, qui scientiarũ Mathematicarum omninò est expers. Quid? quod olim nemo ausus esset celeberrimũ Divini Platonis gymnasium frequentare, qui prius optimè Mathematicis disciplinis nõ fuisset exornatus? Vnde pro foribus Academiæ hoc symbolum dicitur pinxisse, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσήτω. Imo verò idem Plato in Philebo, omnes disciplinas sine Mathematicis viles esse non dubitavit asserere. Qua de causa in 7. de Rep. præcipit, Mathematicas disciplinas primo omnium esse addiscendas, propter varias, ac multiplices earum utilitates, (ut copiosè scribit) non solum ad reliquas artes rectius percipiendas, verum etiam ad Remp. benè administrandam: Cujus ego rei multa exempla cum præteriti temporis, tum nostræ ætatis, si id necesse foret, in medium possem adducere. Ibidem clarissimis verbis affirmat, præcipuè Arithmeticos natura ad omnes doctrinas aptos esse, idoneosq;, adeo ut etiamsi nullam aliam nobis hæ scientiæ afferrent utilitatem, (cum tamen infinita propemodum alia commoda ex ipsis percipiamus) perdiscendas tamẽ omni studio eas esse statuat, quod ingenium, mentemq; ad reliquas artes omnes capessendas aptiorẽ reddant, & acutiorẽ. Quod quidem experientia ipsa magistra facilè comprobatur. Videmus enim eos, quorum ingenium facilè, & nullo negotio hisce disciplinis accommodatur, fructus non exiguos ex aliis scientiis percipere:

Contra

Contra verò eos, qui ad hasce facultates idonei minimè reperiuntur, prorsus ad cæteras esse ineptos. Quare jure optimo Plato tam frequenter in suis operibus iterum atq; iterū harum disciplinarum utilitatem nobis inculcat, atq; commendat, præsertim in 7. de Rep. in Epinomide, seu Philosopho, in Timæo, ubi Mathematicas disciplinas omnes eruditionis ingenuę viā appellat, & plerisq; aliis in locis, quibus nunc enumerādis brevitatis memor de industria supersedeo. Ad has omnes utilitates accedit maxima jucunditas, atq; voluptas, qua cujusq; animus his artibus colendis, exercendisq; perfunditur. Sunt enim hæ præcipuæ ex septē artibus liberalibus, in quibus non solùm ingenui adolescentes, verùm etiam nobiles viri, Principes, Reges, ac Imperatores ad honestissimā, maximeq; liberalem oblectationem animi, quam summa etiam cum utilitate conjunctā pariunt, diu multumq; versari solebant. Quorum exemplum multos adhuc nostra hac ætate imitari conspicimus. Testatur, magnam animi voluptatem ex his artibus percipi, Divinus Plato in 7. de Rep. ubi audacter dicit, & non temerè confirmat, oculū animæ, qui ab aliis studiis excæcatur, defoditurq;, à Mathematicis tantùm disciplinis recreari, excitarique rursus ad ejus, quod est, contemplationē. Omitto plurima alia testimonia Platonis, aliorumq; gravissimorum Philosophorum, quibus harum disciplinarū utilitas cum necessitate, & delectatione conjuncta, atq; præstantia abundè potest comprobari.

EVCLIDIS ATQVE GEOMETRIÆ commendatio.

QVISNAM fuerit Euclides horum elementorum institutor, (ut aliquid etiam de auctore, quē nobis interpretandum proposuimus, deque Geometria universa, in mediū proferamus) & quo tempore floruerit, non satis convenit inter scriptores. Multi enim, ut testatur vulgata elementorum Euclidis secundum Campanum, & Theonem editio, atque eorundē inscriptio, existimant, eum fuisse Philosophum illū Megaris natum, quod oppidum Isthmo adjacet, Socratisque auditorem, qui sectam instituit à se dictam Megaricam, quæ alio nomine Dialectica appellabatur, eò quòd sectatores illius interrogando, respondendoque (quod propriū est munus Dialecticorū) libros conscriberent. De quo multa sunt in Diogene Laertio de vitis Philosophorū: Scribit & de hoc Cicero Quæst. Acad. l. 2. ubi ait. Post Euclides Socratis discipulus Megareus, à quo idē illi Megarici dicti, qui id bonū solum esse dicebant, quod esset unū & simile, & idē, & semper. Favet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octavo libro scribit, nimirū à Platone, qui Socratis etiam discipulus fuit, conductores aræ sacræ de modo, & forma ejus secū sermonem conferre conatos, ad Euclidē Geometram ire jussos. Verum si Proclo nobili Scriptori, & aliis auctoribus antiquis credendum

eſt, Euclides hic noſter junior fuit illo Megareo, floruitq; tempore Ptolemæi primi, qui Ægypto, poſt Alexandri magni mortē Olympiade 115. & ante Chriſtum natum anno 319. cæpit imperare, ut Ioannes Lucidus refert. Quod quidē verius eſſe crediderim, hoc maximè adductus argumento, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius Megarici diligentiſſimè enumerans, nullā prorſus faciat mentionem hujus celeberrimi voluminis de Geometricis elementis conſcripti, in quo perpetuam, & nunquam morituram famam ſibi comparavit Euclides, & gloriam. Neq; enim putandum eſt, Diogenem in monumentis Philoſophorum exercitatiſſimum, hoc tam inſigne opus vel ſcientē voluiſſe prætexere, vel ab Euclide ſuo eſſe compoſitum ignoraſſe. Itaq; Euclides noſter, Geometra acutiſſimus, ab illo Megareo Philoſopho longè alius eſt, qui cùm in doctrina Academicorū eſſet ſumma cum laude verſatus, animū totum ad Mathematicas diſciplinas tranſtulit; in quibus ita excelluit, ut concordi omnium judicio principem inter Mathematicos ſibi locum jure optimo vendicarit. Scripſit autē volumina ad rem Mathematicā ſpectantia non pauca, in quibus eximia ejus diligentia, admirandaq; doctrina facilè elucet: qualia ſunt ejus Optica, Catoptrica, Elementares inſtitutiones ad Muſicā capeſſendam pertinentes, Phænomena, atque Datorum liber, opus de diviſionibus, quod nonnulli ſuſpicantur eſſe libellum illum acutiſſimum de Superficierum diviſionibus, Machometo Bagdedino aſcriptum, qui nuper Ioannis Dee Londinenſis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem eſt editus. Conſcripſit item Conica elementa, auctore Proclo, quæ tamē ad nos nondū pervenēre, & alia id genus opuſcula. Maximè verò hoc volumen elementorū Geometricorū, nunquā omnium conſenſione ſatis laudatum, tam mirabili ordine, tantaq; eruditione contexuit, ut nullus unquā eorum, qui ſimilia conſcripſerunt elementa, (conſcripſerunt autē, ut ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedū ipſum ſuperarit. In quo quidem, ut ſummum ingenii acumen demonſtravit, ita non omnia, quæ ad rem Geometricam pertinent, in vulgus edenda, ſed ea duntaxat, quæ viſa ſunt eſſe neceſſaria, átq; utilia ad communem omnium utilitatē, argumentis & rationibus firmiſſimis cenſuit eſſe comprobanda. Cæterum, quanta ſit horum Euclidis Elementorum Geometricorum, ac proinde univerſæ Geometriæ præſtantia, atq; utilitas, partim ex iis, quæ ante ſcripſimus, partim ex iis, quæ nunc dicemus, non obſcurè percipi poteſt. Dicuntur enim Geometrica elemēta, eā ob cauſam, quod ſine ipſis nullum opus Mathematicū poſſimus aggredi, ne dicam fructum aliquē inde percipere. Omnes ſiquidem Mathematicarū rerum ſcriptores, ut Archimedes, Apollonius, Theodoſius, &c. in ſuis demonſtrationibus uſurpant hæc Euclidis elementa, tanquā principia ōnibus jam diu perſpecta, atq; demonſtrata. Quamobrē ſicut is, qui legere vult, elementa literarum

rarum discit prius, & illis assiduè repetitis, utitur in vocibus omnibus exprimendis, sic qui alias disciplinas Mathematicas desiderat sibi reddere familiares, elementa hæc Geometrica plenè ac perfectè calleat priùs necesse est. Ex his etenim elementis, veluti fonte uberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, insularum dimensio, atq; divisio, omnis in cælo per instrumenta siderum observatio, omnis horologiorum sciotericorum compositio, omnis machinarum vis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum variarum, qualis cernitur in speculis, in picturis, in aquis, & in aere variè illuminato, diversitas manat. Ex his, inquam, elementis machinæ totius hujus mundanę est inventum medium, atque centrum; inventi cardines, circa quos perpetuò convertitur, orbis deniq; totius explorata figura, ac quantitas. Ostenditur atque demonstratur unius hujus scientiæ vi cæli universi, siderumque perennis conversio, ortus, occasus, abitus, reditus, ascensus, descensus, diei ac noctis, temporumq; toto anno per omnem terrarū situm, & mundi inclinationē, varietas Conjunctiones itē Planetarum, oppositiones, aspectusq; varii tam expeditè cognoscuntur, ut & loca illorum in cælo, & Eclipses, seu Solis ac Lunę defectiones certissimæ, antequam fiant, in omne posterum tempus à Mathematicis prædici queant. Hoc deniq; ingens Dei, & Naturæ opus, mundū, inquā, totum, mentis nostræ oculis, munere ac beneficio Geometriæ subjectum conspicimus. Adde Geometriam hominibus plurima, quę penitus incredibilia esse videntur, omniumq; fidē superant, perspicua facere, credibiliaq; esse ostendere. Quale est illud, quod de Archimede Syracusio testantur historiæ. Cùm enim Hieron. Syracusarum Rex navem, quā Ptolemæo Ægyptiorum Regi mittere statuerat, tantæ esset molis fabricatus, ut eam omnes unà Syracusii à loco dimovere minimè valerent: Archimedes Geometra peritissimus, unius Geometriæ viribus fretus Regi promisit, se effecturum, ut ipsam solus Rex absq; ullo labore subduceret. Quod cùm præstitisset, in conspectu omniū Rex stupefactus exclamasse perhibetur; Ab hac die, quicquid dixerit Archimedes, illi credendum est. Non dissimile huic videtur mihi esse pulcherrimū illud factum, quod idem Archimedes ope Geometriæ gessit Syracusis, quando corona ex auro argentoq; confecta, quā Rex summo studio fabricari jusserat, nō dissoluta, singula auri & argenti pondera, quæ inter se aurificis fraude ac dolo cōmissa erat, subtilissimè offendit. Neq; silētio prę teriri debet, eundē Archimedē roboriac efficaciæ demonstrationum Geometricarū innixū sępenumero jactitasse, si haberet terrā aliam, in qua pedē figeret, hanc nostrā quam incolimus, è loco se cōmovere posse. Pari ratione, datis viribus quibuscunq;, pondus quodcunq; se posse movere. Et alia id genus, nō solùm ab Archimede, verū etiā ab aliis prę clarīs, & illust. Geometris patrata esse, memorię proditū est.

Tantum

Tantum denique nomen una hæc Geometria Archimedi peperit, ut Marcellus Romani exercitus Imperator, contra quem diu Syracusanam urbem defenderat Archimedes, machinis quibusdã per Geometricas demonstrationes adinventis, & constructis, in expugnatę urbis direptione, ac cæde civium unius Archimedis saluti publico edicto caverit: quem ubi contra imperium suum & voluntatẽ à gregario quodam milite interfectũ cognovit, vehementer doluit, eumq; honorem mortuo habuit, quem vivo habere non potuit. Cujus sepulchrum Cicero à se, cum in Sicilia Quæstoris officio fungeretur, repertum esse, mirandũ in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in summo semper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedit quoq; ad præstantiam utilitatemq; Geometriæ, quòd cùm demonstrationes Geometricæ sint maximè illustres, nemo sine ipsis satis perspiciet, quæ sit vis demonstrationum, nemoq; eisdẽ destitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidẽ ingenuè fatetur Galen* insignis Philosophus, ac Medicorũ Princeps, in libro, quẽ de libris propriis inscripsit. Is enĩ instructissimus rebus Dialecticis, cùm scholas Peripateticorũ ac Stoicorum sui temporis percurrisset omnium, & præcepta mira cum animi ardore studioq; arripuisset, nihil ferè ab ipsis audisse se testatur, quod ad demonstrationis cognitionẽ pertineret; quinimo pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controversia posita, nonnulla etiam naturali rationi pugnantia reperisse. Ita ut ad Pyrrhoniorum ferè (erant Pyrrhonii Philosophi, qui nihil decernebant, sed de omnibus dubitabant) hæsitantiam deventurus fuerit, nisi Arithmeticæ, Geometriæ, Dialecticęque (quibus artibus ab avis & patre fuerat institutus) esset cognitione scientiaque revocatus. Vnde suadet, sequendos esse characteres illos Arithmeticos, & linearum demonstrationes. Plato etiam cùm ob alias, tum ob eam etiam causam discendam esse Geometriam dixit, quòd ejus cognitio maximè sit utilis, ut aliæ artes faciliùs & rectiùs percipiantur. Postremò est hæc summa laus Geometriæ, omnibusque modis prædicanda, quod non hæsit in exiguis & inferioribus hisce machinis, à quibus originem traxit, sed evolavit in cælum usque, & humanas mentes humi abjectas in illam rursus cælestem sedem invexit, & admirandam mundi hujus fabricam, ejusque administrationem & gubernationem nostro intellectui subjecit.

DIVISIO GEOMETRIÆ ET ELEmentorum Euclidis.

GEOMETRIA dividitur in Planorum contemplationem, quæ generali vocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprio ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria universè sibi hunc scopum proponit, ut plana, aut solida vel constituat, vel constituta inter se comparet, aut dividat. Neq; verò mirũ alicui videri debet, quòd cùm tria

fiat

ſint genera magnitudinum, linea, ſuperficies, & corpus, ſolùm de duobus poſterioribus extent propriæ contemplationes, ut diximus, non autem de lineis, vel etiam punctis. Non, inquam, debet videri mirum, quoniam, ut ait Proclus, Geometria potiſſimùm circa figuras verſatur, quæ in planis duntaxat, vel etiam ſolidis conſiſtunt omnes. Non enim puncta, vel lineæ figuram ullã conſtituunt ſine planis aut ſolidis, ac proinde neceſſe non erat, propriam de punctis, & lineis ſcientiam inſtituere; Superficiebus verò, ſive planis, & corporibus, ſolidiſve maximè conveniebat, ut proprias nanciſcerentur tractationes. Volens igitur ſummus harum rerum artifex Euclides in hiſce elementis perfectam, & omnibus numeris abſolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus ſex libris agit de planis, in poſterioribus verò quinq; de ſolidis acutiſſimè diſputat, eorumq; proprietates maximè illuſtres perveſtigat. Quoniam verò cùm res omnes *G*eometricæ, tum præſertim ſolida illa quinq; regularia, quæ corpora Platonica dici ſolent, perfectè tractari non poterant, abſq; linearum commenſurabilium, atq; incommenſurabilium notitia; Immò verò quàm plurimæ magnitudines ſub menſurã cadere nulla ratione abſq; earundẽ linearum cognitione poſſunt, cùm earum latera ſæpenumerò ſint talia, ut ea communis & nota menſura data metiri nequeat, ut liquidò conſtat iis, qui aliquando demonſtrationes Geometricas in opus contulerunt, atq; uſum: idcirco ut hiſce elementis Geometricis complecteretur omnia documenta ad magnitudinum intelligentiam, dimenſionumque requiſita, Stereometriæ ſuæ præpoſuit decimũ librũ, in quo ſubtiliter & copiosè de hujuſmodi lineis diſſerit. Intelligens rurſum Euclides, neq; hanc tractationẽ linearũ commenſurabiliũ & incommenſurabilium ſine numerorum cognitione poſſe conſiſtere, ante decimũ librũ agit de numerorũ paſſionibus, eaſq; copiosè & diligenter tribus libris, qui hũc antecedunt, eſt perſecutus. Quamobrẽ totũ hoc volumen elementorum Geometricorũ quindecim libris comprehenſum (quorũ quidẽ priores tredecim ſine ulla controverſia Euclidi aſſcribuntur ab omnibus; poſteriores verò duo à nonnullis Hypſiclis Alexandrini eſſe creduntur) ſecari rectè poterit in quatuor partes, ita ut prima pars cõtenta ſex prioribus libris agat de planis; Secunda tres ſequẽtes complectens, paſſiones numerorũ perſcrutetur; Tertia, quam ſolus decimus conſtituit liber, de lineis cõmenſurabilibus, incommenſurabilibuſq; diſputet; Quarta deniq; reliquis quinq; libris abſoluta ſcientiam ſolidorũ, ſive corporũ complectatur. Prima pars rurſum triplex eſt; Nã in prioribus quatuor libris agitur de planis abſolutè, inveſtigando eorum æqualitatẽ & inæqualitatem: In quinto verò libro de proportionibus magnitudinum in genere diſputatur: In ſexto deniq; proportiones figurarum planarũ diſcutiuntur. Quid verò Euclides in ſingulis aliis libris pertractet, propriis in locis exprimemus.

QVIS

QVID PROBLEMA, QVID THEOREMA, quid Propositio, & quid Lemma apud Mathematicos.

DEMONSTRATIO omnis Mathematicorum dividitur ab antiquis scriptoribus in Problema, & Theorema. Problema vocant eam demonstrationem, quæ jubet, ac docet aliquid constituere. Vt si quis conetur demonstrare, supra lineam rectam finitam posse triangulum æquilaterum constitui, appellabitur hujuscemodi demonstratio problema, quoniam docet, qua ratione triangulum æquilaterum constitui debeat supra rectam lineam finitam. Dictum est autem hoc genus demonstrationum Problema, ad similitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur quæstio illa, cujus utraque pars contradictionis (ut ipsi loquuntur) est probabilis, qualis hæc est quæstio; An totum distinguatur realiter à suis partibus simul acceptis: Sic etiam quæsitum illud apud Mathematicos, quo aliquid jubent construere, & cujus contrarium effici etiam potest, problema appellatur Vt si quis proponat se demonstraturum, supra lineam rectam finitam triangulum æquilaterum posse constitui, efficiet problema, quia & triangulum non æquilaterum, nempe Isosceles, vel Scalenũ, supra eandem lineam constitui potest. Pari ratione, qui instituit angulum rectilineum secare bifariam, problema nobis exhibet, propterea quòd angulus idem dividi potest in partes non æquales. Est tamen discrimen non parvũ inter Dialecticorum & Mathematicorũ problema. Nam in problemate Dialectico utravis pars contradictionis susceptа confirmatur tantùm probabiliter, ita ut intellectus cujusq; ambigat, utranam illius pars vera sit: In Mathematico verò, quamcunque quis partẽ elegerit, eam firma demonstratione, ita ut nihil omnino dubii sit reliquum, comprobabit. Si enim Geometra statuat ex puncto quolibet lineæ rectæ propositæ lineã perpendicularẽ educere, efficiet utique hoc ipsum ratione constanti, & evidenti: Eodẽ modo dicendum est, si ex eodẽ puncto velit educere lineam non perpendiculatẽ. Theorema autẽ appellant eam demonstrationẽ, quæ solam passionẽ aliquam proprietatem ve unius, vel plurium simul quantitatũ perscrutatur. Vt si quis optet demonstrare, in omni triangulo tres angulos esse æquales duobus rectis, vocabunt talẽ demõstrationẽ Theorema; quia non jubet, aut docet triangulũ, aut quippiam aliud construere, sed cõtemplatur tantummodo trianguli cujusliber constituti passionẽ hanc, quod anguli illius duobus sint rectis æquales. Vnde à cõtemplatione, ipsa hæc demonstratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione potest, contradictionis utraque pars vera ut sit. Si enim quis demonstret, ones angulos trianguli cujuslibet duobus esse rectis angulis æquales, nullo poterit modo fieri, ut inæquales quoq; sint duobus rectis. Eadẽ ratio in aliis theorematibus est intelligenda. Itaq; ut uno verbo dicam, quæsitum illud Mathematicum

construere

conſtruere aliquid docens, cujus etiam oppoſitum poteſt effici, Problema: Illud verò, quod nihil docet conſtruere, & cujus pars oppoſita perpetuò falſa exiſtit, Theorema appellatur. Vnde ſi quis proponeret in modum problematis, ſe in ſemicirculo velle angulum rectum conſtituere, irridendus omninò eſſet, & Geometriæ prorſus ignarus judicandus; quoniam omnes anguli in ſemicirculo conſtituti ſunt recti, ut demonſtrabitur l. 3. propoſitione 31. Quamobrem theorema hoc, & non problema dicendum erit. Cæterũ tàm problema, quàm Theorema dici conſuevit apud Mathematicos Propoſitio, propterea quòd utrumque aliquid nobis proponit, ut in exemplis adductis conſtat. Hæc ideo dixerim, ut ſtudioſus lector non miretur, quando reperiet in Euclide, Apollonio, & cæteris Mathematicis, propoſitionum alias dici problemata, alias theoremata. Elementa enim Euclidis Geometrica, & Apollonii Conica, (ut aliorum interim volumina taceam) conſtant partim problematibus, partim theorematibus. Demonſtrationes problematũ ſemper concluduntur his ferè verbis: Quod faciendum erat; Theorematum verò hiſce: Quod oſtendendum, vel demonſtrandum erat; habita nimirum ratione finis utriuſque. In quolibet autem problemate, ac theoremate plures demonſtrationes continentur, & non una tantùm, quamvis ultimus ſyllogiſmus demonſtrativus ſolùm concludat id, quod in initio demonſtrandum proponitur, ut declarabimus in prima Euclidis propoſitione, & in cæteris omnibus manifeſtum erit.

QVONIAM verò ad demonſtrationes problematum atq; theorematum ſæpenumero requiruntur alia quædam theoremata, vel problemata minus principalia, & quæ facilè ex iis, quę prius demonſtrata ſunt, intelligi poſſunt; inſeruntur interdum à Geometris hujuſmodi theoremata, & problemata problematibus, atq; theorematibus, de quibus pręcipuè agitur, ut breviùs demonſtrari poſſint. Vocant autẽ illa Lemmata, propterea quòd ſolùm aſſumuntur ad alias demonſtrationes; non autem de illis præcipua diſputatio inſtituitur, quemadmodũ de aliis. Itaq; Lemma dici poteſt demonſtratio, ſeu cõſtructio illius, quod ad demõſtrationẽ alicujꝰ theorematis vel problematis principalis aſſumitur, ut demonſtratio expeditior fiat, ac brevior.

QVÆNAM SINT PRINCIPIA apud Mathematicos.

CVM omnis doctrina, omniſq; diſciplina ex præexiſtente gignatur cognitione, ut auctor eſt Ariſtoteles, atque ex aſſumptis & conceſſis quibuſdã principiis ſuas demõnſtraret concluſiones; Nulla autem ſcientia ex ejuſdẽ Ariſtotelis, aliorumq; Philoſophorũ ſententia ſua principia demonſtret; habebunt utiq; & Mathematicę diſciplinæ ſua principia, ex quibus poſitis, & conceſſis ſua problemata ac theoremata confirment. Horum autem tria tantummodo genera apud

ra apud Mathematicos reperiuntur. In primo reponuntur omnes definitiones, quas nonnulli cum Aristotele suppositiones, ut vult Proclus, appellant. His autē vocabula artis explicantur, ne in tractatione ipsa, nominum ambiguitate, aut obscuritate circumuenti in paralogismos incidamus. Secundū genus complectitur Petitiones, sive Postulata, quæ quidem adeo clara sunt, & perspicua in illa scientia, quæ in manibus habetur, ut nulla indigeant confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum exposcant, ne ulla sit in demonstrando hæsitatio, aut difficultas. Ad tertium genus referuntur Axiomata, seu communes animi notiones, quę non solum in scientia proposita, sed etiam in omnibus aliis ita manifesta sunt, & evidentia, ut ab eis nulla ratione dissentire queat is, qui ipsa vocabula rectè perceperit. Atque his principiis rectè mihi videtur accommodari posse id, quod in Metaphysicis scribit de primis principiis Aristoteles: A janua quis aberrabit? ut præclarè à Cicerone, Pronunciata, sive Effata appellentur. Euclides igitur hoc in volumine Geometricorum Elementorum prępmittit ante demonstrationes suarum conclusionum omnia hæc principia, ut ex ipsis, quæ quidem facilè à quovis intelliguntur, deducat admiranda theoremata, quibus nemo unquam assensum pręberet, nisi certa ac evidenti ratione confirmarentur. Vnde hoc etiam nomine summis laudibus efferenda est Geometria, omnibusq; seculis prædicanda, quòd ex tam exiguis initiis cuilibet quantumvis rudi & ignaro notissimis, & quidem perfacilibus progrediatur ad theoremata primo aspectu ab omni sensu humano, & intellectu remota, quę tamen omnia miro ordine, ac methodo facili, demonstrationibusq; certissimis ita confirmat, ut nihil omnino dubii in eis relinquatur. Porrò in hujuscemodi principiis tradendis hic ordo ab Euclide servatur, ut in ipso quidem introitu scientiæ proponat principia totī Geometriæ communia, in aliis autem deinde libris, ubi res postulat, ea exponat principia, quæ propriè, & peculiari quadam ratione, ad materiam illorum subjectam videntur spectare. Neq; verò omnia principia Geometrica ab Euclide in his elementis sunt explicata, sed multa reliquit lectori disquirenda; quæ tamen ex iis, quæ tradidit, sine magno labore ac studio percipi possunt, & intelligi. Verùm ne in hac quoque parte defuisse videamur rerum Mathematicarum studiosis, adjunximus variis in locis ad principia ab Euclide posita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maximè cursum demonstrationum arbitrati sumus retardari posse. Sed jam ad expositionem ipsam Principiorum Euclidis accedamus.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

I.

Punctum est, cujus pars nulla est.

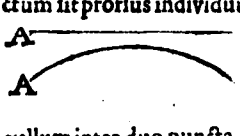
TOTVS hic primus liber in eo positus est, ut nobis tradat ortus proprietatesq; triangulorum, tum quod ad eorum angulos spectat, tum quod ad latera: quæ quidem inter se comparat interdum, interdum verò unumquodque per se inspicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos considerat, aliquandro verò ex angulis latera, secundum æqualitatem atque inæqualitatem rimatur. Idemque variis rationibus inquirit in duobus quandoque triangulis inter se collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumq; contemplationē aggreditur, tum inter se, tum ēt, ut cum triangulis inter easdē parallelas constitutis conferuntur. Vt autē hęc omnia rectius & commodius exequatur Euclides, docet divisionē anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, constitutionem lineę perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia hujusmodi. Itaq; ut uno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli sententia, rectilinearum figurarum maximè primæ, ac præcipuę, triangula inquā, arq; parallelogramma. Ante omnia verò Euclides more Mathematicorum rem propositam exordiur à principiis, initio facto à definitionibus, quarū prima punctū explicat, docens illud dici punctū in quantitate continua, quod nullas habet partes. Quæ quidē definitio planius ac facilius percipietur, si prius intelligamus, quantitatē continuā triplices habere partes, unas secundū longitudinē, alteras secundū latitudinē, & secundū profunditatem altitudinemve alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has

partes habet, ſed quędam unicas tantum ſecundum longitudinem, quędam duplices, ita ut illis adjiciat partes etiã latitudinis; quædã deniq; pręter duplices has partes, tertias quoq; altitudinis, ſive profunditatis continet. Quantitas enim omnis continua aut longa ſolum eſt, aut longa ſimul, & lata, aut longa, lata, atq; profunda. Neq; aliam dimenſionem habere poteſt res ulla quanta, ut rectè demonſtravit Ptolemæus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in priſtinam dignitatẽ reſtituto, nec non, ut ait Simplicius in libello de Dimenſione, qui quidẽ, quod ſciam, adhuc nondũ eſt excuſus. Itaq; quod in quantitate continua, ſive magnitudine exiſtit, intelligiturq; ſine omni parte, ita ut neq; longum, neq; latũ, neq; profundũ eſſe cogitetur (ut nimirum excludamus animam rationalem. Nunc vel inſtans temporis, & unitatem, quæ etiam partes non habent) id appellatur ab Euclide, & à Geometris punctũ. Hujus exemplum in rebus materialibus reperiri nullum poteſt, niſi velis extremitatem alicujus *puncti* acus acutiſſimæ, ſimilitudinem puncti exprimere; quod quidem omni ex parte verum non eſt, quoniam ea extremitas dividi poteſt, & ſecari infinitè, punctum verò individuum prorſus debet exiſtimari. Denique in magnitudine id concipi debet eſſe punctum, quod in numero unitas, quodque in tempore inſtans. Sunt enim & hæc concipienda individua:

II.

Linea vero, longitudo latitudinis expers.

Definit hic lineam, primam ſpeciem magnitudinis, quam dicit eſſe quantitatem longam duntaxat, non autem latam intellige neque profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam neceſſarò, profunditas removetur, non autem contra. Lineam autem hanc, ſive longitudinem abſq; latitudine, non abſurdè concipere, intelligereque poterimus ex termino loci alicujus partim illuminati & partim obumbrati. Finis enim, ſeu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quædam eſt, ad longitudinẽ ipſiuſmet luminis, & umbræ extenſa, carens õni latitudine, cum ſit limes utriuſqe. Mathematici quoque, ut nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctũ jam deſcriptum ſuperiore definitione, è loco in locum moveri. Cum enim punctum ſit prorſus individuũ, relinquetur ex iſto motu imaginario



Veſtigium quoddam longũ omnis expers latitudinis. Vt ſi punctũ A, fluere B intelligatur ex A, in B, veſtigiũ effectum AB, linea appellabitur, cũ verò intervallum inter duo puncta, A & B, comprehenſũ ſit longitudo quædam, carens omni latitudine, propterea quod punctum A, omn

privatum

privatum dimenſione, eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum eſt, ut alii dixerint, lineam nil eſſe aliud, quàm puncti fluxum: Alii verò, magnitudinem uno contentam intervallo. Poteſt enim linea unico tantum modo, utpote ſecundum longitudinem ſecari, atque dividi.

III.

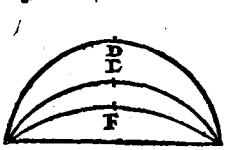
Lineæ autem termini, ſunt puncta.

Docet, quænam ſint extrema lineæ cujuſvis, ſeu termini, dicens lineam terminari, ſive claudi utrinq; punctis; Non quod omnis linea terminos habeat; quomodo enim lineæ infinitæ terminos aſſignare poterimus? qua etiam ratione in linea circulari extremũ aliquod deprehendemus? Sed quod linea quælibet habẽs extrema, in ſuis extremitatibus puncta recipiat. Vt ſuperior linea AB, extrema habet puncta A, & B. Idẽq; in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligẽdũ eſt, ita ut earũ extremitates ſola eſſe pũcta cogitem⁹.

IV.

Recta linea eſt, quæ ex æquo ſua interjacet puncta.

Triplex omninò eſt linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curvam dicunt, & mixta, ſive compoſita ex utraque. Ex his deſcribit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit eſſe eam, quæ æqualiter inter ſua puncta extenditur, hoc eſt, in qua nullum punctum intermedium ab extremis ſurſum, aut deorſum, vel huc, atq; illuc deflectendo ſubſultat; in qua deniq; nihil flexuoſum reperitur. Hanc nobis ad vivum exprimit filum aliquod tenue ſumma vi extentum: In eo enim omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent ſitũ, neq; ulla eſt alia ſublimior, aut humilior, ſed ões æquabiliter inter extremos fines poſitæ progrediuntur. Proclus hanc definitionẽ exponens ait, tunc demũ lineam aliquam ex æquo ſua interjacere puncta, quando æquale occupat ſpatium ei, quod inter ſua ſitũ eſt puncta extrema. Vt linea ACB, dicetur recta, quoniam tantum occupat præciſè ſpatiũ, quanta eſt diſtantia puncti A, à puncto B, lineæ verò ADB, AEB, AFB, nõ dicẽtur rectę, cũ majora obtineant ſpatia, quam ſit diſtantia extremorũ punctorũ A & B Sic etiã vides omnia puncta lineę ACB inter quæ eſt punctũ C, æqualiter inter extrema A, & B, jacere, juxta Euclidis definitionẽ; quod nõ cernitur in aliis lineis, quoniam puncta D, E, F, ſubſultant ab extremis A, & B. Plato rectã lineã perpulchrè ſic definit: Linea recta eſt, cujus media obũbrant extrema. Vt in linea ACB, ſi punctũ C, aut quodvis aliud me-

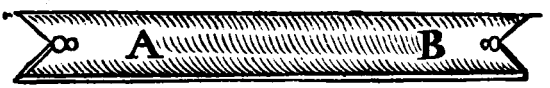


dium, vim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminãdi, impedimento utiq; esset C, punctum interjectum, ne B, extremũ alterũ ab A, illuminaretur: Rursus oculus in A, existẽs extremo, non videret aliud extremum B, ob interjectũ punctũ C; quod quidem nõ cõtingit in lineis nõ rectis, ut perspicuũ est in lineis ADB, AEB, AFB. Archimedes verò ait, lineam rectam esse minimam earum, quæ terminos habent eosdem: qualis est A C B, comparata cum ADB, AEB, AFB. Si enim ACB, non esset minima earũ quæ eosdem terminos A, & B, possident, non ex æquo interjaceret sua puncta, sed ea potiùs linea, quę minor diceretur, quàm A C B. Campanus deniq; describens rectam lineam, vocat eam brevissimam ex uno puncto in aliud extensionẽ. Quemadmodum autẽ Mathematici per fluxũ puncti imaginariũ concipiunt describi lineam, ita per qualitatem fluxus puncti qualitatẽ lineæ descriptæ intelligunt. Si namq; punctũ recta fluere concipiatur per brevissimũ spatium, ita ut neq; in hanc partẽ, neq; in illam deflectat, sed æquabilẽ quendam motũ, atq; incessum teneat, dicetur linea illa descripta, Recta: Si verò punctum fluens cogitetur in motu vacillare, atq; hinc inde titubare, appellabitur linea descripta, mixta: Si denique punctum fluens in suo motu non vacillet, sed in orbẽ feratur uniformi quodam motu, atq; distantia à certo aliquo puncto, circa quod fertur, vocabitur descripta illa linea, circularis. Itaq, si duo puncta moveantur similibus prorsus motibus, ita ut semper æqualiter inter se distent; describentur ab ipsis duæ lineæ similes, hoc est, si una earum fuerit recta, erit & altera recta: si verò una fuerit curva, erit & altera eodem omninò modo curva, &c. Lineas non rectas, quę omnes obliquæ dici possunt, non definit hoc loco Euclides, sed circularem exponet definitione decima quinta, mistã prorsus omittens, quod ea in hisce elementis Geometricis nullum habeat usum. Sunt autem plurima genera linearum mistarũ: quædã enim sunt uniformes, quædam difformes. Vniformium rursus aliæ sunt in plano, aliæ in solido. In plano sunt Hyperbole, Parabole, Ellipsis, de quibus agit copiosissimè Apollonius in conicis elementis: linea Conchoideos, de qua Nicomedes: linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis spiralib. tractationẽ instituit. & aliæ hujusmodi. In solido, seu superficie curva sunt alterius generis lineæ helicæ quam ea ab Archimede descripta, qualis est illa, quæ circa cylindrum aliquem convolvitur: nec non ea, quæ circa conũ existit, vel etiam quæ circa sphæram, cujusmodi sunt spiræ illæ, quas Sol describit ab ortu in occasum, ut in sphæra docuimus. Difformium autem infinitus est numerus, quas non est opus hic recensere. Ex his constat, duas tantum esse lineas simplices, rectã & circularẽ, omnes autẽ alias, quæcunq; sunt, mistas appellari, quod ex illis componantur. Vnde ingeniosè concludit Aristoteles in libro de Cœlo,

juxta

juxta triplicem lineam, tres tantùm esse motus. duos quidem simplices, rectum & circularem, tertium verò mistum, sive ex illis duobus compositum.

Sed quoniam lineas rectas regula ducere solemus, doceamus, qua ratione regulâ propositâ examinare possimus, nũ linea per illã

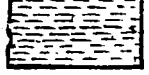


descripta recta sit, necne. Sit ergo regula AB, secundum cujus latus CD, recta CD, describatur ex puncto C, in punctum D. Deinde convertatur regula, ut manente eadem parte superiore, punctum C, statuatur in D, & punctum D, in C: & secundum idem latus regulæ CD, recta ducatur ex eodem puncto C, in punctum D. Nam si posterior hæc linea priori omni ex parte congruet, dubitari non debet, quin regulæ AB, in lineis rectis ducendis fidere possimus: Si verò non congruet omni ex parte, latus illud CD, perfectè rectum non erit, sed corrigendum erit diligentius.

V.

Superficies est, quæ longitudinem, latitudinemque tantum habet.

Post lineam, quæ est prima quantitatis continuæ species, unicamque habet dimensionem, definit superficiem, quæ secundam magnitudinis speciẽ constituit, additq; primę dimensioni secundũ longitudinẽ, alerã secundum latitudinẽ. Nam in superficie reperitur nõ solùm longitudo, ut in linea, verùm etiam latitudo, sine tamẽ omni profunditate. Vt quantitas ABCD, inter lineas AB, BC, CD, DA, comprehensa, consideratq; secundum longitudinem AB, vel



BDC, & secundum latitudinem AD, vel BC, omnis expers profunditatis appellatur superficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cujusq; corporis, si ab ea õnis soliditas intellectu auferatur. Non incongruè etiam, ut ait Proclus, imaginem quasi expressam superficiei nobis exhibent umbræ corporũ. Hæ enim cum interiorẽ terræ partem penetrare non possint, longæ tantum erunt, & latæ. Mathematici verò, ut nobis eam ob oculos ponant, monent, ut intelligamus lineam aliquã in transversum moveri: Vestigium enim relictum ex ipso motu erit quidem longum, propter longitudinem lineæ, latum quoq; propter motum, qui in transversum est factus; nulla verò ratione profundum esse poterit, cum linea ipsum describens omni careat profunditate; quare superficies dicetur. Vt si linea AB, fluat versus DC, efficietur superficies ABCD. Alii describentes superficiem dicunt,

eam esse corporis terminum : Alii verò, magnitudinem duobus constantem intervallis. Potest enim superficies dividi, & secari duobus modis, uno quidem secundum longitudinem, altero verò secundum latitudinem.

VI.

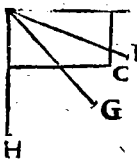
Superficiei autem extrema sunt lineæ.

Non dissimilis est hæc definitio superiori, qua termini lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates superficiei esse lineas, quē admodū lineę fines extitere pūcta. Vt superioris superficiei ABCD, extrema sunt lineę AB, BC, CD, DA. Eodemq; modo in quacunq; altera superficie, quæ extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in superficie infinita, vel etiam sphærica, quæ corpus sphæricum circumdat. Potest etiam superficies aliqua claudi, & terminari unica tantum linea, qualis est circularis superficies, ut dicemus in definitione circuli.

VII.

Plana superficies est, quę ex æquo suas interjacet lineas.

Hæc quoq; definitio similitudinem quandam descriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas suas interjacet, ita ut mediæ partes ab extremis sursum, deorsumve subsultando, non recedant, appellabitur plana: qualis est superficies perpoliti alicujus marmoris, in qua partes omnes inrectū sunt collocatę, ita ut nihil habeat incisū angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosū: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualē adeptæ sunt sitū, nec ulla est alia sublimior, humiliorve, sed omnes æquabiliter protenduntur. Alii superficiem planā definiunt, dicentes eā esse, cujus partes mediæ obumbrant extrema: Vel esse minimā, sive brevissimā omniū, quæ eadem habent extrema: Vel cujus omnibus partibus recta linea accommodari potest, ut placet Heroni antiquo Geometræ. Vt superficies ABCD. tū demū plana



dici debet, quando linea recta AE, circa punctū A, E immobile circumducta, ita ut nunc eadem sit, quæ AB, nunc eadem, quæ AF, nunc eadem, quæ AG, & nunc eadem, quæ AH, nihil in superficie offendit depressum, aut sublatum, sed omnia puncta superficiei à linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quod si minima superficiei particula aliis humilior à linea recta non tangeretur, vel ipsa linea recta liberè non posset circumduci, propter aliquem tumorē, seu eminentiā in superficie occurrentem, jam non posset nuncupari plana. Itaq; ut sit plana, requiritur ut omnibus modis posset recta linea commensurari, hoc est, ut ei applicari possit recta linea secundum AB, & AF, & deniq; secundum

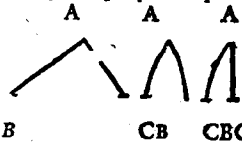
omnes

omnes partes. *Hæc autem ſuperficies ſola erit ea, quam imaginari,* & intelligere poſſumus deſcribi ex motu lineæ rectę in tranſverſũ, qui ſuper duas alias lineas rectas conficitur. Vt ſi linea recta AB, per duas rectas AD, BC, feratur, efficietur ſuperficies perfectè plana, juxta omnes definitiones. Non enim difficile erit huic ſuperficiei traditas deſcriptiones accommodare. Solent Mathematici ſuperficiẽ planã frequenter appellare planũ, ita ut quando loquuntur de plano, intelligenda ſemper ſit ſuperficies plana. Cæteræ omnes ſuperficies quibus non omni ex parte accommodari poteſt linea

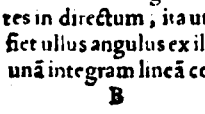
recta, *qualis eſt ſuperficies interior alicuj⁹ fornicis* vel exterior alicujus globi, columnęve rotundæ, vel etiam coni, &c. appellantur curvæ, & non planæ. Quamvis enim ſuperficiei columnę rotundæ, ſeu cylindri ſecundũ longitudinem adaptari poſſit linea recta, tamen ſecundum latitudinem minimè poteſt. Idemq; dicendum eſt de aliis. Superficies autem curva duplex eſt, convexa videlicet, ut exterior ſuperficies ſphæræ, vel cylindri; & concava, ut interior fornicis, ſive arcus alicujus. Quoniam verò omniũ harum contemplatio pertinet ad *Stereometriam, idcirco* Euclides hoc primo libro ſolum planam nobis explicavit, de qua eſt diſputaturus prioribus ſex libris. *VIII.*

Planus verò angulus, eſt duarum linearum in plano ſe mutuò tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

Declarat, quidnã ſit angulus planus dicens; Quandocunq; duæ lineæ in plana aliqua ſuperficie invicem concurrunt, & non in directum conſtituuntur, efficietur ex huiuſmodi concurſu, ſeu inclinatione unius ad alterã, angulus qui dicitur plan⁹, propterea quod in plana conſtituatur ſuperficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ AB, AC, cõcurruut in A, & non jacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem exiſtentem ſuperficie, in qua duæ illę lineę conſtituuntur. Dicentur autem duæ lineæ non in directum jacere, quando altera earum verſus concurſum protenſa non coincidit cum altera, ſed vel eam ſecat, vel certè ſtatim poſt punctum concurſus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus, qui fit, quando duo circuli ſe contingunt, vel etiam, quando linea recta circulũ tangit. Protracta enim recta linea poſt punctũ contactus, quanquam non ſecet circulum, tamen ſtatim poſt illud ab eo ſejungitur. Eodem pacto circularis illa linea ſecundum propriam diſpoſitionem, ac formã extenſa recedit à recta tangente, quamvis eam non ſecet. Vnde verè eſt angu-



lus constitutus in illo contactu: qua de re plura scribemus in propositione 16. tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit eam non esse angulum. Quod si duæ lineæ se mutuò tangant jacentes in directum, ita ut alterutra producta congruat toti alteri, non fiet ullus angulus ex illo concursu, cum nulla sit inclinatio, sed ābæ unā integram lineā constituent. Vt quia recta AB producta cōvenit cum recta BC, non efficietur angulus in B.



Sic etiam non fiet angulus in B, ex lineis curvis AB, BC, quia alterutra secundum suam inflexionem, & obliquum ductum extenta, cum altera coincidit. Quare in directum dicentur jacere lineæ; ut lineæ rectæ efficiant angulum, necesse est, ut post concursum productæ se mutuò secent: Curvæ autem lineæ, vel quarum altera curva, altera verò recta existit, angulū constituere verè possunt, etiamsi nonverè se mutuò intersecent; sufficit enim, quod sese contingant; ita ut statim post contactum altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semotæ cernuntur. Consistit autem anguli cujusvis quantitas in sola inclinatione, nō in longitudine linearū; lineæ etenim longius excurrentes non augent suam inclinationē, igitur neq; anguli magnitudinē. Sunt & alia duo genera angulorum, quorum prius solidos complectitur, de quibus Euclides disserit in Stereometria, quiq; in corporibus existunt; Posterius verò sphærales, qui in superficie sphęrę cōstituuntur ex circulorū maximorū circumferentiis, & de quibus copiosè agitur in sphæricis elementis Menelai. Horum aūt omnium explicatio in alium locum à nobis rejicitur, cum hic de solis planis angulis sit futurus sermo.

IX.

Cum autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

Angulus omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidem rectilineus dicitur, & de quo solum hic agit Euclides: aut ex duabus curvis, quem curvilineum vocare licet; aut ex una curvā & altera recta, qui nō inepte mixtus appellatur. Ex hisce porro lineis possunt curvilinei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, seu habitudine linearū

curvarum, utpote secundum convexum, & concavum, ceu in propositis angulis planè, & apertè perspicitur. Rectilineus verò variari non potest ratione inclinationis, habitudinisve linearum, nisi majorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod est absurdum; cum hoc modo augeatur tantum

angulus

angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & aliis commune est, non autem ita varietur, ut aliud constituat genus.

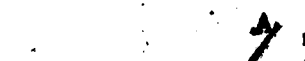
X.

Cum verò recta linea super rectam consistens lineam eos, qui sunt deinceps, angulos æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum: Et quæ insistit recta linea, perpendicularis vocatur ejus, cui insistit.

Vsus frequentissimus reperitur in Geometria anguli recti, & lineæ perpendicularis, nec non anguli, obtusi, & acuti, propterea docet hoc loco Euclides, quisnã angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & quænam linea perpendicularis: In sequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtusum, & acutum. Non enim alius dari potest angulus rectilineus, præter rectũ, obtusum, & acutũ. Igitur si recta linea AB, rectæ CD, insistens efficiat duos angulos propè punctum B, (qui quidẽ ideo dicuntur à Mathematicis esse deinceps, quod eos eadẽ linea CD, protracta, prope idẽ punctũ B, efficiat) inter se æquales, quod tum demũ fiet, quãdo recta AB, non magis in C, quã in D, inclinabit, sed æqualiter rectę CD, insistet, vocabitur uterq; angulus B, rectus, & recta AB, perpendicularis rectæ CD, cui insistit. Eadẽ ratione nominabitur recta CB, perpendicularis rectæ AB: quamvis enim CB, tantum faciat cum AB, unũ angulum, tamen si AB, extenderetur in rectũ & continuum versus punctũ B, efficeretur alter angulus æqualis priori. Qua verò arte linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos æquales, docebit Euclides propositione 11. & 12. hujus primi libri. Itaque ut in Geometria concludamus angulum aliquem esse rectum, aut lineã, quæ ipsum efficit, ad aliam esse perpendicularem, requiritur, & sufficit, ut probemus angulum, qui est ei deinceps, æqualem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quæ ipsum constituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualẽ quoq; esse. Quando enim anguli, qui sunt deinceps, fuerint inter se æquales, nuncupãtur uterq; illorũ rectus, & linea ipsos efficiens, perpendicularis, juxta hanc 10. definitionem: quando autẽ nõ fuerint æquales, non dicitur quisquam illorũ rectus, ut constabit ex sequentibus duabus definitionibus, & propterea neq; linea eos constituens perpẽdicularis appellatur. Hęc dixerim, ut videas, quidnã liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quẽnam usũ habeãt apud Geometras descriptiones vocabulorũ. Non enim magno labore hæc quæ diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.

XI.

Obtusus angulus est, qui recto major est.



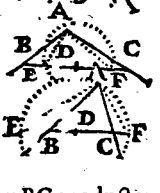
Quando recta AB, rectæ CD, insistens non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob eam causam neutrum rectum, sed unũ quidem recto majorem, alterum verò minorem, dicitur major angulus obtusus, qualis est angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis A B, BC.

XII.

Acutus verò, qui minor est recto.

Vt in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BD, vocatur acutus. Itaq; angulus rectus, ut ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, ut unus altero major, minorve detur, cum linea perpendicularis eum efficiens non debeat magis in unam partem inclinare, quam in alteram: Obtusus verò & Acutus augeri possunt, & minui infinitis modis, cum ab illa inflexibilitate lineæ perpendicularis infinitis etiam modis recta linea possit recedere, ut perspicuum est. Quoniam verò ad quemvis angulum planum constituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in uno puncto plures existunt anguli, solent Mathematici, ut tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo lineę conficiunt angulum, extremæ verò significant initia linearum, quę angulum continent. Exempli gratia in superiore figura angulum obtusum intelligunt per angulum ABB, acutum verò, per angulum ABD, quod diligenter est notandum, ut facilè dignoscamus angulos, quorum mentio fit in demonstrationibus.

Iam verò proposito nobis angulo aliquo rectilineo, si experiri velimus, num rectus sit, an obtusus, acutusve, efficiemus id hoc modo. Contineãt duæ rectæ AB, AC, angulũ A. Ducta recta BC, utcunq;, quæ angulum subtendat, & divisa bifariam in D, describatur ex D, ut centro ad intervallum DA, circumferentia circuli; quæ si per puncta B, C, transeat, *a* erit angulus A, rectus, utpote qui in semicirculo BAC, existat: si verò idem semicirculus rectam BC, secet in E, F, erit angulus BAC, obtusus; propterea quod ductis rectis EA, FA, *b* angulus EAF, in semicirculo EAF, rectus est, qui quidem pars est anguli BAC. Si denique idem semicirculus rectam BC, productam secet in EF, erit angulus BAC, acutus; propterea quod ductis rectis EA, FA, *c* angulus EAF, in semicirculo EAF, rectus est, qui quidem major est angulo BAC.



a 31. tertij.

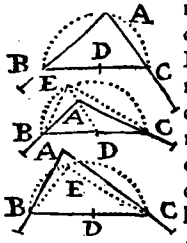
b 31. tertij.

c 31. tertij.

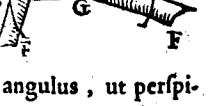
Aliter idem assequemur hoc modo. Describatur ex puncto D, quod rectam BC, dato angulo A, subtensam secat bifariam, semicircu-

circulus ad intervallū DB, vel DC: qui si transeat per punctum A, datus angulus erit rectus, utpote qui in semicirculo existat. Si verò idem semicirculus transeat supra punctum A, datus angulus erit obtusus. Ducta enim recta DA, secante circumferentiam in E, jungantur rectæ EB, EC; b eritq; angulus BEC, in semicirculo rectus. Cum ergò angulus BAC, datus c major sit angulo BEC, erit angulus datus A, recto major, hoc est obtusus. Si denique semicirculus idem secet rectas AB, AC, erit datus angulus acutus, Sumpto namq; puncto E. inter rectas AB, AC, incircumferentia, jungantur rectæ EB, EC; d eritque angulus BEC, rectus in semicirculo: e qui cum major sit angulo dato A, erit datus angulus A, recto minor, id est, acutus. Non videatur autem mirum cuipiam, quod ad demonstrationem assumamus propositiones, quæ posterius demonstrantur ab Euclide; quod alienum esse videtur à puritate demonstrationum Geometricarum: Non videatur inquam mirum, quia cum id, quod hoc loco ostendimus, necessarium non sit ad sequentes demonstrationes, poterit commodè differri, donec propositiones requisitæ sint demonstratæ. Satis est, ut praxis hujusce rei hoc loco intelligatur. Idem observabimus in nonnullis praxibus problematum. Eas enim propriis in locis, quoad ejus fieri poterit, proponemus, ut divisionem anguli rectilinei in quotvis partes æquales eo in loco docebimus, ubi Euclides docet divisionem ejusdem anguli in duas æquales partes, &c. quanquam ad earum praxium demonstrationes necessariè sint propositiones posterius demōstratæ.

a 31. *tertij*.
b 31. *tertij*.
c 21. *primi*.
d 31. *tertij*.
e 21. *primi*.



Facilius idem cognoscemus beneficio normæ alicujus accuratè fabricatæ, qualem refert instrumentum ABC, constans duabus regulis AE, AF, ad angulum rectum in A, conjunctis. Nam si latus AB, hujus normæ, rectæ *AB*, applicetur, cadente puncto *A*, in punctum *A*; si quidem & normæ latus *AC*, rectæ, *AC*, congruat, erit angulus *A*, rectus: si verò citra rectam *AC*, cadat normæ latus *AC*, erit angulus *A*, obtusus; si deniq; latus normæ *AC*, ultra rectam *AC*, cadat, acutus erit angulus, ut perspicuum est.



Ita autem normam examinabimus, num accuratè sit fabricata, nec ne. Descripto semicirculo B*AC*, ex centro G, cujusvis magnitudinis, ductaq; diametro *BC*, ponatur angulus *A*, in aliquo puncto circumferentiæ, ut in *A*, latusque unum normæ, ut *AB*, per B, punctum extremum diametri transeat. Nam si alterum tunc latus *AC* per alterū punctum extremū *C*, transeat, ritè fabricata erit norma *ABC*,

a 31. tertij. ma ABC; a quod tunc angulus BAC, in semicirculo BAC, rectus sit: si verò latus AC, non per C, transeat emendanda erit norma; quia ejus angulus A, tunc rectus non erit. Eadem ratione interiorem partem normæ examinabimus, si angulum D, circumferentiæ applicemus, & latera DE, DF, punctis extremis B, C, &c.

XIII.

Terminus est, quod alicujus extremum est.

Tres sunt termini juxta hanc definitionem. Punctum enim terminus est, seu extremum lineæ: Linea superficiei: & superficies corporis. Corpus autem terminare amplius nihil potest, quod non reperiatur alia quantitas plures habens dimensiones, quam tres. Omne siquidem terminatum superat terminum suum una dimensione, ut perspicuum est ex adductis exemplis.

XIV.

Figura est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

Non omnis quantitas terminos possidens Figura dici potest, ne lineam finitam figuram appellare cogamur: Sed eæ solum magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe superficies terminatæ, & quæ profunditatem adeptæ quoque sunt, ut solida finita Figuræ nomine appellabuntur. Hæ enim propriè terminis comprehendi dicuntur. Nam linea finita non propriè dicitur punctis extremis comprehendi, cum puncta lineam non ambiant, sed potius punctis terminari dicitur. Itaque termini debent quantitatem, quæ figura dicitur, ambire, & non tantum terminare. Superficies quoque infinita, vel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, Figura vocari nulla ratione potest, Figuræ unico comprehensæ termino sunt, Circulus, Ellipsis, sphæra, sphæroides, & aliæ hujusmodi: Pluribus verò terminis inclusæ figuræ sunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminatæ nuncupantur figuræ planæ: solida autem circumscripta, figuræ solidæ, sive corporeæ: Porrò quia formas, seu typos variarum figurarum inspicies quamplurimas in sequentibus, planarum quidem in prioribus 10. libris, solidarum verò in posterioribus quinque, propterea nulla hoc loco figura depingenda esse videtur.

XV.

Circulus, est figura plana sub una linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

Defi-

Definit hic circulum, figuram inter planas perfectissimam, docens figuram illam planam, quæ unica linea circumscribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductę ab uno puncto, quod intra figuram existit, sint ęquales, vocari circulum. Vt si superficies, seu spatium concludatur unica linea ABC, habueritq; hanc conditionẽ, ut ab aliquo puncto intus suscepto, utpote à D, ōnes rectæ lineę cadentes ad terminũ ABC, quales sunt DA, DB, DC, inter se sint æquales, appellabitur talis figura plana, circulus, aliàs non. Quà verò ratione in circulo punctũ illud medium reperiri debeat, docebit Euclides propositione 1. tertii lib. Adjungit quoq; Euclides, lineam extremam circuli, qualis est ABC, appellari Peripheriam, seu, ut latini exponunt, circumferentiam. Potest circulus etiam hac ratione describi. Circulus est figura plana, quæ describitur à linea recta finita circa alterum punctum extremum quiescens circumducta, cum in eundem rursus locum restituta fuerit, unde moveri cœperat. Quæ quidem descripto persimilis est ei, qua ab Euclide sphæra describitur lib. 11. Vt si intelligatur recta AD, circa punctum D, quiescens moveri, donec ad eundem redeat locum, à quo dimoveri cœpit, describet ipsa recta totum spatium circulare; punctum verò alterum extremum A, delineabit peripheriam ABC. Erit quoq; punctum quiescens D, illud, à quo omnes lineæ cadentes in peripheriam sunt inter se æquales, propterea quod recta AD, circumducta, omnes lineas, quæ ex D, possunt educi ad peripheriam, æque metiatur. Igitur Ellipsis, quamvis figura sit plana una linea circumscripta, tamen quia in ea non datur punctum, à quo ad ipsam lineam terminantem omnes rectæ lineæ sint æquales, circulus dici nequit.

XVI.

Hoc verò punctum, centrum circuli appellatur.

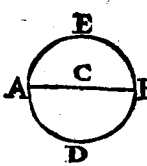
Docet, punctum illud intra circulum, à quo omnes lineæ rectæ ad circumferentiam ductæ sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est præcedentis figuræ punctum D. Vnde perspicuum est, polum alicujus circuli in sphæra, à quo omnes rectæ ad peripheriam circuli cadentes sunt æquales, ut ait Theodosius in sphæricis elementis, non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, existat in superficie sphæræ, non autem in superficie circuli, quæ tamen est necessario requisita conditio, ut punctum aliquod centrum vocetur. Cæterum, ut punctum aliquod circuli dicatur centrum, satis est, ut ab eo tres duntaxat lineæ cadentes in peripheriam sint æquales inter se, ut demonstrat Euclides propositione 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, ut omnes aliæ ab eodem puncto emissæ inter se sint æquales.

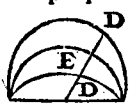
DIAME-

XVII.

DIAMETER autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraq; parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat.

Si in circulo ducatur recta linea *AB*, per centrum C, ita ut extrema ejus *A*, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicetur, sed ea solummodo, quæ per centrum usque ad peripheriam utrinq; extenditur. Vnde plures assignari poterunt in circulo diametri, unum verò centrum duntaxat. Quod autem Euclides addit, circulum bifariam secari à diametro, perspicuum ex eo esse potest, quod diameter per medium circulum, utpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, ut propter directũ diametri per centrũ transitũ, utrinq; æquales circumferentiæ abscindantur. Quod tamen Thalem Milesium hac ratione demonstrasse testatur Proclus. Concipiamus animo, proportionẽ *ADB*, accõmodari, & cooptari proportioni reliquę *AEB*, ita ut diameter *AB*, communis sit utriq; portioni: Si igitur circumferentia *ADB*, congruat penitus circumferentiæ *AEB*, manifestum est duas illas portiones à diametro factas, esse inter se æquales, quandoquidem neutra alteram excedit: Si verò circumferentia *ADB*, non omni ex parte cadere dicatur super circumferentiam *AEB*, sed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta recta à centro C, secante circumferentiam *ADB*, in D, & circumferentiam *AEB*, in E, erunt duæ rectæ CD, CE, ductæ ex centro ad circumferentiam ejusdem circuli æquales, per circuli definitionem cum tamen una sit pars alterius, quod est absurdum. Non ergo cadet una circumferentia extra aliam, vel intra, vel partim extra, partim intra, sed ambæ inter se aptabuntur, ideoque æquales erunt quod demonstrandum proponebatur.





Ex hac demonstratione constat, diametrum non solum circumferentiam, verùm etiam totam aream circuli secare bifariam. Cum enim semicircumferentiæ sibi mutuò congruant, ut ostensum est, congruent etiam superficies ipsæ inter diametrum, & utramque circumferentiam comprehensę, cum neutra alteram excedat. Quare æquales inter se erunt.

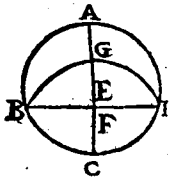
XVIII.

Semicirculus verò est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

Exem-

Exempli gratia, in superiori circulo figura *ADB*, contenta sub diametro *AB*, & peripheria *ADB*, dicitur semicirculus, quia, ut in præcedenti definitione ostendimus, ea est dimidiata pars circuli. Eadem ratione erit figura *AEB*, semicirculus. Idem autem punctum C, diametrum secans bifariam, centrum est in circulo, & in semicirculo.

Quod si recta linea *BD*, non transeat per centrum E, secabitur circulus ab ea non bifariam, sed in duas portiones inæquales *BAD*, *BCD*, quarum ea, in qua centrum circuli existit cujusmodi est portio *BAD*, major est quam alia *BCD*, extra quam centrum *E*, reperitur. Esse autem portiones *BAD*, *BCD*, inæquales, ita probari potest. Concipiatur per centrum E, ducta diameter ad rectam *BD*, perpendicularis. *AG*. Si igitur dictæ portiones dicantur esse æquales, & portio *BCD*, intelligatur moveri circa rectã *BD*, ut super portionem *BAD* cadat, congruet illa portio huic, & recta FC, recta F*A*, congruet, ob angulos rectos ad F, qui omnes inter se æquales sunt ex defin. 10. cum sint sibi mutuò deinceps. Recta ergo FC, quæ nunc eadem est, quæ F*A*, major erit, quam E*A*, pars ipsius F*A*. Cum ergo ipsi E*A*, sit æqualis EC, quod ambæ ducantur è centro ad circumferentiam, erit quoq; FC, major quam EC, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur portiò *BCD*, portioni *BAD*, congruet, sed intra eam cadet, cujusmodi est portio *BGD*, ut recta FG, eadem tunc existens, quæ FC, minor possit esse quam E*A*, vel EC. Si namque diceretur cadere extra, ut si circulus esset BCDG, cujus centrum E, & portiò *BCD*, caderet extra *BGD*, qualis est portio *BAD*, esset rursus F*A*, eadem tunc existens, quæ FC, major quàm EG, hoc est, quam EC, atq; ita pars FC, major rursum foret toto EC, quod absurdum est. Ex quo patet, portionem *BAD*, in qua centrum E, existit, majorem esse reliqua portione *BCD*, cum hæc æqualis sit portioni *BGD*, quæ pars est portionis *BAD*. Cum enim ostensum sit, portionem *BCD*, circa rectam *BD*, circumductam non posse congruere portioni *BAD*, neque cadere extra, cadet omnino intra, qualis est *BGD*.



XIX.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

Post definitionem circuli, traditurus jam Euclides descriptiones variarum figurarum, explicat prius quænam figuræ dicantur rectilineæ. De his enim potissimum sermo futurus est in hisce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ undique rectis clauduntur lineis rectilineæ nuncupantur. Ex quo perspicuũ est, figuras planas curvis

lineis

lineis comprehensas, dici curvilineas. Eas verò, quæ partim curvis, partim rectis circumscribuntur, appellari mixtas. Varia autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclide describentur.

XX.

Trilateræ quidem, quæ sub tribus.

Affirmans Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circumscribuntur, apertè nobis innuit, quonam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot sint anguli, quot latera, seu rectæ lineæ, ex quibus constant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cujus omnes species jam jam adducentur.

XXI.

Quadrilateræ verò, quæ sub quatuor.

Eadem ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cujus variæ species mox subsequentur.

XXII.

Multilateræ autem, quæ sub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

Quoniam species rectilinearum figurarum sunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progressum: Nam tres rectæ lineę claudentes figuram efficiunt primam speciem, sub qua omnia triangula continentur; quatuor constituunt secundam, quę omnia quadrangula complectitur; quinque tertiam componunt speciem; seu quartam, atque ita deinceps infinite: Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur persequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quam quatuor, rectis lineis circumscribuntur, generali vocabulo Multilateras; contentus denominatione trilaterarum figurarum & quadrilaterarum, fortassis eam ob causam, quod præcipue in prioribus his libris de Triangulis, atque Quadrangulis sermo habeatur, & quod facile ad similitudinem harum duarum specierum cæteræ omnes à quolibet definiri possint. Quis enim ex dictis nõ colligat, figurã quinq; lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & sex lineis comprehensam sexilateram, atque reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterunt hujusmodi figuræ quinquangulæ, sexangulæ, septangulæ, &c.

XXIII.

Trilaterarum autem figurarum, Æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

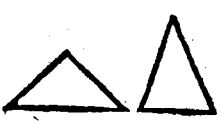
Descendit jam ad singulas species triangulorum. Quia verò

verò triangula dividi possunt vel habita ratione laterum vel angulorum, declarat prius species prioris divisionis, quæ tres sunt duntaxat, quod tria latera tribus tantùm modis sese possint habere. Aut enim omnia æqualia sunt; aut duo tantũ, tertio existente, vel majore, vel minore; aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter se æqualia sunt, dicitur triangulum Æquilaterum. Porrò ex æqualitate omnium trium laterum trianguli æquilateri infertur, omnes tres ejus angulos æquales quoque esse, ceu ad quintam propositionem hujus libri demonstrabimus.

XXIV.

Isosceles autem est, quod duo tantum æqualia habet latera.

Ex hac rursum æqualitate duorum laterum trianguli Isoscelis efficitur, duos angulos super reliquum latus etiam esse æquales, ut demonstrabit Euclides propos. 5. hujus libri. Apposuimus autem duo triangula Isoscelia, quorum prius habet tertiũ latus utrovis æqualium majus, posterius autem idem minus obtinet: ita ut duæ sint species trianguli Isoscelis; alterum, cujus tertium latus sit utrovis æqualium majus, & alterum, cujus tertium latus utrovis æqualium minus sit.



XXV.

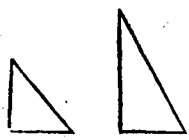
Scalenum verò est, quod tria inæqualia habet latera.

Hîc denique ex inæqualitate omnium laterum trianguli Scaleni colligitur omnium angulorũ inæqualitas, ut ostendetur propos. 18. hujus 1. lib. Porrò ex his constat, eodem modo potuisse dividi triangulum in tres species, si æqualitatis angulorum ratio haberetur. Cum enim aut ōnes tres anguli sint inter se æquales; aut duo tantum tertio majore vel minore existente; aut omnes tres inæquales; erit omne triangulum vel æquiangulum, habens tres omnes angulos æquales, vel duorum tantùm angulorum æqualium: vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum quidem Æquilatero, secundum verò Isosceli, tertium denique Scaleno respondet triangulo. Cæterum quanam arte construenda sint triangula hujus partitionis super quavis data recta linea finita, trademus propos. 2. hujus lib.

XXVI.

Adhæc etiam, trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

Nunc exponit triangulorum ſpecies, juxta poſteriorem diviſionem, habita ratione varietatis angulorum. Quia verò tria tantummodo ſunt angulorum rectilineorum genera diverſa; (Omnis enim angulus rectilineus vel eſt rectus, vel obtuſus, vel acutus, ut ſupra diximus,) fit ut tres quoque ſpecies triangulorum ſub hac conſideratione reperiantur. Nam aut unus angulus trianguli eſt rectus, & ob eam rem reliqui acuti, ut ex 17. propoſ. 1. lib. conſtabit; aut obtuſus, & ob eandem cauſam reliqui acuti, aut denique nullus rectus, nulluſq; obtuſus, ſed omnes acuti. Quando igitur triangulũ aliquod habet angulum unum rectum, vocatur ab Euclide, & aliis Geometris Rectangulum. Poteſt autem triangulum hujuſmodi eſſe Iſoſceles, vel Scalenũ, ut hæ figuræ indicant, ęquilaterũ autem nulla ratione. Propter æqualitatem enim laterum eſſent per ea, quæ propoſ. 5. dicemus, omnes etiam anguli æquales, ideoque, cum unus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat cum propoſ. 17. & 32. hujus libri.



XXVII.

Amblygonium autem, quod obtuſum angulum habet.

Triangulum Amblygonium, ſive obtuſangulum eſſe quoque poteſt vel Iſoſceles, vel ſcalenum, ut in his figuris cernitur, non autem æquilaterum, alias eadem ratione eſſent omnes tres anguli per ea, quę propoſ. 5. oſtendemus, æquales, ideoque cum unus ponatur obtuſus, omnes tres obtuſi, quod multò magis pugnat cum propoſ. 17. & 32. hujus libri.

XXVIII.

Oxygonium verò, quod tres habet acutos angulos.

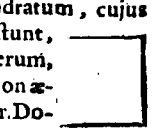
Omne triangulum Oxygonium, ſive acutangulum, poteſt eſſe vel ęquilaterum, vel Iſoſceles, vel ſcalenũ, ut cernere licet in triangulis, quæ in ſpeciebus prioris diviſionis ſpectanda exhibuimus, ne eadem hic fruſtrà repetantur. Ex dictis igitur palam fit, triangulũ quodcunq; ęquilaterum, eſſe neceſſariò Oxygonium: At omne triangulum tam Iſoſceles, quam Scalenum, eſſe vel Rectangulũ, vel Amblygonium, vel Oxygonium; atq; Iſoſceles Oxygonium rurſum duplex, Iſoſceles nimirum Oxygonium habens tertium latus utrovis ęqualium majus, atq; Iſoſceles Oxygonium habens tertium latus utrovis æqualium minus: Vt unica ſit ſpecies trianguli ęquilateri, quatuor verò Iſoſcelis, & tres Scaleni: atq; in univerſum octo triangulorum genera; ęquilaterum, quod perpetuò Oxygonium eſſe

esse diximus, Isosceles rectangulum, Isosceles Amblygonium, Isosceles Oxygonium habens tertium latus utrovis æqualium majus, Isosceles Oxygonium habens tertium latus utrovis æqualium minus. Scalenum rectangulum, Scalenum Amblygonium, & Scalenum Oxygonium. Quæ etiam hisce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum Isosceles, Rectangulum Scalenum, Amblygonium Isosceles, Amblygonium Scalenum, Oxygonium æquilaterum, Oxygonium Isosceles habens tertium latus utrovis æqualium majus, Oxygonium Isosceles habens tertium latus utrovis æqualium minus, & Oxygonium Scalenum. Quare perspicuum est, quamnam connexionem, sive affinitatem habeant inter se triangula utriusque portionis. Posse autem dari triangulum Isosceles Oxygonium, cujus duorum laterum æqualium utrumvis tertio sit minus, ut rectè animadvertit Franciscus Barocius in sua Cosmographia, ostendemus ad propos. 15. lib. 4. In omni porrò triangulo, cujus duo quæcunq; latera expressè nominantur, solet reliquum latus tertium à Mathematicis appellari Basis, sive illud in situ infimum occupet locum, sive supremũ, &c. Hoc te breviter monere volui, ne putares aliquid latere mysterii in base trianguli, intelligere sq; quodlibet latus, omni discrimine remoto, basis nomine posse nũcupari.

XXIX.

Quadrilaterum autem figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

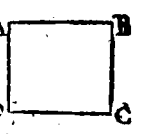
Post figurarum trilaterarum species, exponit jam singulatim quadrilateras figuras, recensendo quinq; tantummodo eorum genera, quorum quatuor priora regularia sunt, posterius autem, & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum, cujus quidem omnia quatuor latera inter se æqualia existunt, omnesq; anguli recti. Itaq; quadrangulum æquilaterum, & non rectangulum, vel contra, rectangulum, & non æquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides propos. 46. hujus lib. quonam modo construendum sit quadratum super recta linea proposita finita.



XXX.

Altera verò parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.

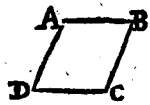
Secunda figura quadrilatera appellatur, altera parte longior, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se æqualia, quamvis bina opposita inter se æqualia existant. Vt in altera parte longiori ABCD, latera *AB*, DC, inter se, & AD, BC, inter se quoque æqualia sunt, cum ABCD, propter an-



gulorum rectitudinem, parallelogrammum sit, ut in hoc lib. ad propos. 34. ostendemus.

XXXI.

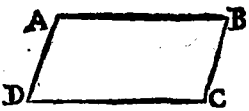
Rhombus autem, quæ æquilatera, sed rectangula non est.



Hæc figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppositas prorsus habet conditiones, & diversas à cõditionibus figuræ altera parte longioris. Habet enim omnia latera æqualia, angulos verò non rectos, & inæquales, quamvis bini oppositi inter se æquales existant. Vt in Rhombo *ABCD*, anguli A, & C, inter se & *B*, & D, quoque inter se æquales sunt, cum *ABCD*, propter æqualitatem laterum, parallelogrammum sit, ceu ad eandem propos. 34. hujus libri demonstrabitur.

XXXII.

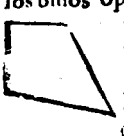
Rhomboides verò, quæ adversa & latera, & angulos habens inter se æquales, neq; æquilatera est, neque rectangula.



Est hæc figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte opposita. Nam neque ejus latera omnia æqualia sunt, neque ullus angulus rectus, sed tamen latera bina opposita, qualia sunt *AB*, DC, & *AD*, *BC*, in Rhomboide *ABCD*, æqualia inter se, item anguli bini oppositi, quales sunt A, *C*, & *B*, *D*, inter se existunt æquales. Hæ igitur quatuor figuræ quadrilateræ dici possunt regulares; cæteræ verò omnes, quæcunque sint irregulares.

XXXIII.

Præter has autem, reliquæ quadrilateræ figuræ, trapezia appellentur.



Reliquas omnes figuras quadrilateras, quæ à prædictis quatuor differunt, ita ut neque latera omnia æqualia, neque omnes angulos æquales, seu rectos, neque latera bina opposita; neque angulos binos oppositos habeant inter se æquales, generali vocabulo trapezia nominat: quæ quidem cum infinitis modis variari queant, rectè irregulares nuncupabuntur. Possunt enim duo anguli esse recti, vel unus obtusus, & alii acuti, vel duo obtusi, & alii acuti, &c. Eademq; fieri poterit quasi divisio penes latera: Nam vel aliqua æqualia inter se sunt, vel nullũ alteri est æquale, &c. Determinatas porrò trapezio-

trapeziorum ſpecies nonnullas afferemus poſt definitionem linearum parallelarum, ſeu æquidiſtantium, & parallelogrammi.

XXXIV.

Parallelæ rectæ lineæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, & ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram ſibi mutuò incidunt.

Vt duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallelæ, ſive æquidiſtantes non ſatis eſt, ut in quamcunque partem, etiam ſpatio infinito, productæ nunquam ad unum punctum coeant; ſed neceſſe quoque eſt, ut in una plana ſuperficie exiſtant. Multæ ſiquidem lineæ rectæ non exiſtentes in eadem ſuperficie plana productæ ad ſpatiũ infinitum, nunquam in unum conveniunt, & tamen non ſunt parallelæ dicendæ; quales ſunt, exempli gratia, duæ rectæ lineæ in transverſum poſitæ in medio aere, & non ſe tangentes; Hæ etenim nunquam coire poſſunt. Dicuntur autem duæ rectæ lineæ in eadem exiſtere plana ſuperficie, quando ſuperficies aliqua plana uni earum accommodata, ita ut omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilem circumvoluta, alteri quoq; accommodari poteſt ſecundum omnia ejus puncta, quamvis re ipſa in duabus ſuperficiebus diverſis reperiantur; ut propoſitis duabus rectis lineis *AB*, *CD*, ſi ſuperficies aliqua plana rectæ *AB*, applicetur, omnia ejus tangens puncta, ita ut circa illã circumducta A ——— *B* tangat quoq; omnia puncta alterius *C* ——— *D* rectæ *CD*; dicentur hujuſmodi rectæ duæ lineæ in eadem ſuperficie plana exiſtere, alias non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eædem non coeant, etiamſi infinitè producantur tam ad partes A, C, quam ad B, D, appellabuntur parallelæ, ſive æquidiſtantes. Cæterum planius, perfectiuſq; intelliges in xi. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eadem dicantur ſuperficie exiſtere: Satis ſit hoc loco breviter admonuiſſe, rectè ab Euclide utramque conditionem eſſe poſitam infinitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem exiſtere plano, & productæ in utramvis partem nunquam in unũ convenire, quanquam hęc productio continuetur ad ſpatium infinitum. Quod ſi duæ rectæ lineæ per immenſum aliquod ſpatium extenſæ non cernantur coire, conſtet tamen, eas tandem ex una parte longius protractas in unũ punctum conventuras, quamvis ex altera ſemper magis ac magis inter ſe diſtent, ac disjungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotieſcunque ergo duæ lineæ rectæ dicuntur à quopiam eſſe parallelæ, is neceſſe eſt concedat, illas in una, eademque ſuperficie jacere, & nunquam poſſe coire. Similiter, ſi quis concludere velit, duas rectas lineas eſſe parallelas, hic demonſtret prius oportet, eas in eodem exiſtere plano, & in neutram partem productas

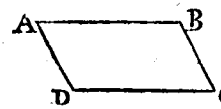
conjungi posse. Qua in re non pauci videntur hallucinari, qui eo duntaxat conantur ostendere aliquas rectas lineas esse parallelas, quod in neutram partem coeant, etiamsi infinitè producantur, nulla facta prorsus mentione alterius conditionis, quæ easdem lineas in eodem requirit existere plano.

Hic finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam verò hoc eodem libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammi; necnon earum, quæ complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duabus definitionibus adjunctis explicare, quod sit Parallelogrammum, & quæ sint parallelogrammi complementa, ut facilius demonstrationes percipiantur.

XXXV.

Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.

Vt figura quadrilatera ABCD, si quidem latus AB, æquidistet lateri DC, & latus AD, lateri BC, nuncupatur Parallelogrammum.

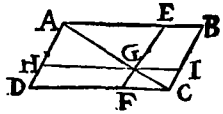


Sunt autem quatuor solum parallelogramma; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorū priora duo rectangula, quod omnes angulos habeant rectos, posteriora verò duo non rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus existat rectus. Cæterum, quatuor has figuras esse parallelogramma, ostendemus ad prop. 34. hujus lib. Itaque possumus quadrilateras figuras, (ut & antiqui Geometræ) dividere in Parallelogrammum & Trapezium. Parallelogrammum rursus in rectangulum, & æquilaterum, quale est Quadratum: in nec rectangulum, nec æquilaterum, quale est Rhomboides; in rectangulum, sed non æquilaterum, qualis est figura altera parte longior: & in æquilaterum, sed non rectangulum, cujusmodi est Rhombus. Trapeziorum quoque aliud quidem habet duo latera opposita parallela, alia verò minimè; aliud autem nulla opposita latera habet parallela. Bræterea illud prius vel habet duo illa latera, quæ non sunt parallela, inter se æqualia, diciturque Trapezium Isosceles; vel inæqualia, Trapeziumque Scalenum appellatur. Itaque ex his omnibus septem genera figurarum quadrilaterarum constitui possunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Isosceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera sunt parallela.

XXXVI.

Cum verò in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæque lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in uno

in uno eodemque puncto, ita ut parallelogrammum ab hiſce parallelis in quatuor diſtribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non tranſit, complementa; duo verò reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum conſiſtere dicuntur.



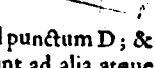
Sit parallelogrammum AB. CD, in quo diameter AC, & linea EF, ſecans diametrum in G, & parallela exiſtens lateribus AD, BC. Item linea HI, ſecans diametrum in eodem puncto G, parallelaq; lateribus AB, DC, exiſtens. Quæ cum ita ſint perſpicuum eſt, parallelogrammum totum diviſum eſſe in quatuor parallelogramma, quorum quidem duo EBIG, GFDH, per quæ diameter AC, non tranſit, vocantur à Geometris complementa, ſive ſupplementa reliquorum duorum *AEGH*, GICF, quæ dicuntur circa diametrum conſiſtere, quippe cum per ea diameter tranſeat, ut videre eſt in præſenti figura.

PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

I.

Poſtuletur, ut à quovis puncto in quodvis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

Primum hoc poſtulatum planum admodum eſt, ſi rectè conſiderentur ea, quæ paulò antè de linea ſcripſimus. Nam cum linea ſit fluxus quidam puncti imaginarius, atque adeò linea recta fluxus directo omninò itinere progrediens, fit ut ſi punctum quodpiam ad aliud directo moveri intellexerimus, ducta ſanè ſit à puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione poſtulat Euclides, quemadmodum hic vides à puncto A, ductam eſſe rectam lineam ad punctũ B;

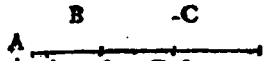


ab eodemque aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & ſic innumeræ aliæ, ab eodem puncto educi poſſunt ad alia atque alia puncta.

II.

Et rectam lineam terminatam in continuum recta producere.

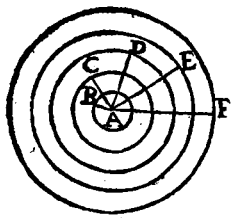
Quod ſi punctum illud ferri adhuc cogitaverimus motu directo, & qui omnis inclinationis ſit expers, producta erit ipſa recta linea terminata, & nunquam erit finis hujus productionis, cum pũctum illud intelligere poſſimus moveri ad infinitã diſtãtiã. Sic linea



recta AB, producta est primo in continuum ad punctum C. Deinde ad punctum D, &c.

III.

Item quovis centro, & intervallo circulum describere.



Iam verò, si terminatam rectam lineam cujuscunq; quantitatis mente concepierimus applicatam esse secundum alterum extremum ad quodvis punctum, ipsamq; circa hoc punctum fixum circumduci, donec ad eum revertatur locum, à quo dimoveri cœpit; descriptus erit circulus, effectumque, quod tertia petitio jubet. Exemplum habes in his quinque lineis AB, AC, AD, AE, AF, quæ singulę citra centrum A, circumvolutæ singulos circulos descripserunt juxta quantitatem, seu intervallum ipsarum.

Præter hæc tria postulata, quibus Euclides contentus fuit, sunt multa alia æquè facilia, è quibus duntaxat in medium proferre decrevi illud, quod frequentius repetendum erit in progressu totius Geometriæ. Reliqua enim prudens lector ex se vel facile intelliget.

IV.

Item quacunque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem vel majorem, vel minorem.

Omnis enim quantitas continua per additionem augeri, per divisionem verò diminui potest infinitè: Vnde nunquam dabitur quantitas continua adeo magna, quin ea major dari possit: neq; tàm parva, quin major ea possit exhiberi. Hoc idem in numeris verum est, quod ad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionem unitatis augeri potest infinitè; quamvis in ejus diminutione ad unitatem individuam deveniatur.

COMMVNES NOTIONES SIVE Axiomata, quæ & Pronunciata dici solent, vel dignitates.

I.

Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia. Et quod uno æqualium majus est, aut minus; majus quoque est, aut minus altero æqualium. Et si unum æqualium majus est, aut minus magnitudine quapiam, alterum quo-

quoque æqualium eadem magnitudine majus eſt, aut minus.

Fieri nulla ratione poteſt, ut duæ quantitates inæquales, æquales ſint alteri quantitati. Si enim minor illarum propoſitæ quantitati æqualis extiterit, excedet eandem neceſſariò major illarum. Et ſi major æqualis fuerit propoſitæ quantitati, ſuperabitur minor ab eadem. Quare rectè colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter ſe æquales quoque eſſe. Reliquæ quoque partes axiomatis à nobis adjectæ, quod frequentem uſum habeant, clariſſimæ ſunt. II.

Et ſi æqualibus æqualia adjecta ſint, tota ſunt æqualia.

Si enim quantitates conflatæ, ſive compoſitæ, inæquales forent, procul dubio majori plus eſſet adjectum, quàm minori, cum antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoque æquales.

III.

Et ſi ab æqualibus æqualia ablata ſint, quæ relinquuntur, ſunt æqualia.

Nam ſi reliquæ quantitates forent inæquales, à minore plus fuiſſet detractum, quàm à majore.

IV.

Et ſi inæqualibus æqualia adjecta ſint, tota ſunt inæqualia. Et, ſi inæqualibus inæqualia adjecta ſint, majori majus, & minori minus, tota ſunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.

Quia & ſi æqualibus inæqualia adjecta ſint, tota erunt inæqualia: quoniam major quantitas addita uni æqualium, majorē conſtituit quantitatem quam minor alteri æqualium adjecta: quemadmodum & ſi inæqualibus æqualia adjiciantur, compoſita quantitas ex majore, major eſt, quam compoſita ex minore. Alteram partem hujus axiomatis nos adjecimus, propter frequentem ejus uſum.

V.

Et ſi ab inæqualibus æqualia ablata ſint, reliqua ſunt inæqualia. Et ſi ab inæqualibus inæqualia ablata ſint, à majori minus, & à minori majus, reliqua ſunt inæqualia, illud nimirum majus, & hoc minus.

Sic etiam, ſi ab æqualibus inæqualia ablata ſint, reliqua erunt inæqualia: quia major quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quàm minor, quemadmodum reſiduum majoris majus eſt

reſiduo minoris, ſi æqualia auferantur ab inæqualibus. Cæterum Euclides non docet, quidnam ſimpliciter, & abſolutè ſignatur ex additione quantitatum inæqualium ad quantitates inæquales, vel quid relinquatur poſt ſubtractionem inæqualium quantitatum ab inæqualibus quantitatibus; propterea quod nihil certo colligi inde poteſt, niſi quando majori majus additur, & à majori minus detrahitur, ut in ſecunda parte axiomatis dictum eſt, quam nos ob inſignem ejus utilitatē adjecimus. Poſſunt enim compoſitæ quantitates, vel reſiduę eſſe & inęquales & ęquales. Si enim ad 7. & 5. addantur 4. & 3. efficientur 11. & 8. quæ ſunt inæqualia. Sic etiam ſi ex 7. & 5. detrahantur 2. & 1. relinquentur 5. & 4. quæ ſunt inæqualia. At verò, ſi ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. & 11. quæ æqualia ſunt. Item ſi detrahantur 3. & 1. ex 7. & 3. remanebunt 4. & 4. quæ æqualia quoque exiſtunt.

Porrò in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum intelligenda eſt etiam una & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adjiciatur, tota fient æqualia: Et ſi ab æqualibus idem commune detrahatur, reſidua æqualia erunt. Et ſi inæqualibus idem commune adjiciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & ſi ab inęqualibus idem commune detrahatur, vel ab eodem communi inæqualia auferantur, reſidua exiſtent inæqualia.

VI.

Et quæ ejuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt æqualia. Et quod unius æqualium duplum eſt, duplum eſt & alterius æqualium.

Similiter quæ ejuſdem ſunt triplicia, vel quadruplicia, vel quintuplicia, &c. inter ſe ſunt æqualia. Si enim inæqualia forent, & majus eorum eſſet duplex, vel triplex, &c. alicujus quantitatis, deficeret utique minus à duplici vel triplici, &c. Quod ſi contrà, minus eſſet duplex, vel triplex, &c. quantitatis cujuſpiam, excederet ſanè majus duplex ipſum; vel triplex, &c. Hoc autem & ex ſecundo axiomate comprobari poteſt ad hunc modum. Si enim duę quantitates ęquales fuerint alicui tertię, & utrique tertia illa addatur, erunt compoſitę duplices illius tertię, *a* ſed & inter ſe ęquales, ob idem additamentum. Quod ſi rurſum compoſitis eadem tertia adjiciatur, erunt conflatę triplices ejuſdem tertię. Cum igitur *b* & ęquales inter ſe, propter idem additamentum exiſtant; eademque ſit ratio in cęteris multiplicibus, perſpicuum erit axioma propoſitum. Secundam porrò partem hujus axiomatis nos appoſuimus, quod non raro ejus uſus in rebus Geometricis requiratur.

a 2. pronun.

b 2. pronun.

Et

VII.

Et quæ ejuſdem ſunt dimidia. inter ſe æqualia ſunt. Et contrà, Quæ æqualia ſunt, ejuſdem ſunt dimidia.

Pari ratione, quæ ejuſdem ſunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter ſe æqualia ſunt.

In his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia ſunt, vel triplicia, &c. inter ſe æqualia quoque ſunt: Item, quæ æqualium ſunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter ſe æqualia neceſſariò exiſtunt. Partem quoque ſecundam hujuſce axiomatis nos adjunximus, propterea quod non minus frequenter, quam prima, à Geometris uſurpatur.

VIII.

Et quæ ſibi mutuò congruunt, ea inter ſe ſunt æqualia.

Hoc eſt, duæ quantitates, quarum una ſuperpoſita alteri, neutra alteram excedit, ſed ambæ inter ſe congruunt, æquales erunt. Vt duæ lineæ rectæ dicentur eſſe æquales, quando una alteri ſuperpoſita, ea quæ ſuperponitur, alteri tota congruit, ita ut eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando uno alteri ſuperpoſito, is qui ſuperponitur, alterũ nec excedit, nec ab eo exceditur, ſed lineæ illius cum lineis hujus prorſus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamvis lineæ interdum inter ſe inæquales exiſtant.

E contrario, Quæ inter ſe ſunt æqualia, ſibi mutuò congruent, ſi alterum alteri ſuperponatur. Intelligendum eſt autem, quantitates ſibi mutuò congruentes, eſſe æquales, ſecundum id duntaxat, in quo ſibi congruunt. Congruit autem longitudini tantum, ſuperficies ſuperficiei, ſolidum ſolido, linearum inclinatio inclinationi linearum, &c.

IX.

Et totum ſua parte majus eſt.

Cum pars à toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipſum auferatur; perſpicuum eſt, omne totum ſua eſſe parte majus.

In ſequentibus porrò pronunciatis interrumpitur ordo Euclidis, propterea quod duo alia axiomata hoc loco inferenda eſſe cenſuimus valdè neceſſaria, cum ex iis axioma 12. quod Euclidi eſt demum, demonſtrari poſſit, ut ibi dicemus. In margine tamen numeros appoſuimus ordini Euclidis reſpondentes.

X.

Duæ lineæ rectæ non habent unum & idem ſegmentum commune.

Non

Non est difficile istud axioma, si perfectè intelligatur natura rectæ lineæ. Cum enim linea recta directo semper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione potest, ut duę lineæ rectæ habeant unâ partem, quamvis minimam, communem, præter unicum punctum, in quo se mutuò intersecant. Quod tamen breviter Proclus ita demonstrat. Habeant, si fieri potest, duæ rectæ AB, AC, partem communem AD. Ex centro autem D, & intervallo DA, *a* describatur circulus secans duas rectas propositas in punctis B, & C. *b* Erunt igitur duæ circumferentiæ AB, ABC, inter se æquales. (Sunt enim circumferentiæ semicirculorum æqualium, cum ADB, ADC, ponantur esse diametri) pars & totum, quod est absurdum. Non ergò duę rectę habent unum & idem segmentum commune. Quod est propositum.

a 3. *post.*
b 17. *def.*

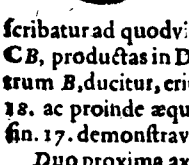
Possunt tamen duæ lineæ rectæ commune habere segmentum, quando unam & eandem rectam lineam constituunt, ut in hac figura, CD rectæ AD, BC, commune habent segmentum CD, quia ambæ unam rectam constituunt lineam AB. At verò quando duæ rectæ sunt diversæ, quales fuere AB, AC, in superiori exemplo, non possunt possidere segmentum aliquod commune, ut rectè à Proclo fuit demonstratum.

A ——— B

XI.

Duę rectæ in uno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessariò se mutuò in eo puncto intersecabunt.

Hoc etiam axioma ex natura lineæ rectæ pendet. Quod tamen ita demonstrabimus. Coeant duæ rectæ AB, CB, in B, Dico illas productas se mutuò secare in B, nempe CB, productam cadere in E, supra rectam AB, productam. Nam si CB, producta non cadit supra AB, productam, congruet cum AB, producta, ita ut transeat per D, atque ita duæ rectæ ABD, CBD, habebunt idem segmentum commune BD, quod in antecedenti axiomate ostensum est fieri non posse; vel certè infrà AB, productam cadet, ita ut CB, producta cadat in F. sitque una recta linea CBF. Centro igitur B, describatur ad quodvis intervallum circulus ACFD, secans rectas AB, CB, productas in D, F. Quia ergo utraq; recta ABD, CBF, per centrum B, ducitur, erit tàm ACD, quam CF, semicirculus, per defin. 18. ac proinde æquales erunt circumferentiæ ACD, CF. ut ad defin. 17. demonstravimus, totum & pars. Quod est absurdum.



Duo proxima axiomata ab Euclide non ponuntur, quia tamen necessa-

neceſſaria ſunt ad aliorum axiomatum probationes, ea hic inſeruimus. Tria autem ſequentia Euclidis ſunt.

XII. x.

Item, omnes anguli recti ſunt inter ſe æquales.

Hoc axioma apertiſſimum eſſe cuilibet poteſt ex 10. definitione, qua angulus rectus deſcribitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum conſtituentium augeri, minuive nequit, ſed prorſus eſt immutabilis. Efficitur enim rectus angulus à linea perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ rectæ ita ſuperſtat, ut faciat utrobiq; angulos æquales, neq; magis in unam partem, quam in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter ſe eſſe, cum ſemper ſit eadem inclinatio, quamvis lineæ ſint inæquales interdum. Conatur tamen Proclus ex 10. definitione id demõſtrare hac ratione. Sint duo anguli recti ABC, DEF, quos dico eſſe inter ſe æquales. Si enim fieri poteſt, ſint inæquales, ſitque ABC, major. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectam DE, rectæ AB, cadet recta EF, inter rectas AB, BC, qualis eſt BG, propterea quod angulus DEF, minor ponitur angulo ABC, *a* Producatur CB, in rectum & continuum uſque ad H. Cum igitur angulus ABC, ſit rectus *b* erit angulus ABH, illi deinceps æqualis, & rectus quoque: quare major etiam angulo ABC. *c* Producta autem GB, in rectum & continuum uſque ad I, cadet portio producta BI, infra CB, productam, ut in præcedenti axiomate eſt demonſtratum. Quare cum angulus ABG, ponatur rectus, *d* fiet angulus ABI, illi deinceps æqualis. Quapropter angulus ABH, major quoque erit angulo ABI, pars toto, quod eſt abſurdum. Non ergò inæquales ſunt duo anguli recti propoſiti, ſed æquales. Quod eſt propoſitum: eademque eſt ratio in cæteris.

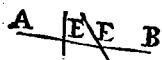
a 2. *pet.*
b 10. *defin.*
c 2. *pet.*
d 10. *defin.*

Rectè autem hoc loco monet Pappus, axioma iſtud non poſſe converti; non enim omnis angulus recto angulo æqualis rectus eſt, cum & curvilineus recto æqualis eſſe queat, ut in 5. lib. demonſtrabimus, qui tamen non dicitur rectus, cum non ſit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus æqualis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et õnes anguli recti inter ſe æquales erunt, ſine ulla exceptione.

XIII. xi.

Et ſi in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad eaſdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuò incident ad eas partes, ubi ſunt anguli duobus rectis minores.

Vt ſi



Vt si in duas lineas rectas AB, CD, incidens alia recta EF, faciat duos angulos internos, & ex eadem parte BEF, DFE, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandem conventuras esse ad aliquod punctum unum, versus eam partem, in quâ duo anguli minores existunt duobus rectis, ut appositum exemplum commonstrat. Ratio hujus perspicua est, quoniam quando duo anguli interni, & ex eadem parte æquales sunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partem coire possunt, sed æquali semper spatio protenduntur, ut prop. 28. hujus lib. demonstrabitur. Quare si duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, necesse est ex ea parte dictarum linearum spatium coarctari, ex altera verò magis ac magis dilatari; ideoq, eas conventuras tandem esse aliquando in unum punctum. Verum quia axioma hoc subobscurum videri solet tyronibus, imo à numero principiorum rejicitur à Gemino Geometra, Proclo, & aliis, quod non facilè quivis ei assensum præbeat; præsertim cum reperiantur aliæ quædam lineæ, quarum spatium, licet semper magis ac magis coangustetur, (quemadmodum & in duabus rectis AB, CD, accidit, ut ad propos. 28. hujus lib. demonstrabimus) nunquam tamen in unum punctum coeunt, etiamsi infinitè producantur, ut constat ex elementis conicis Apollonii Pergæi, & ex linea conchili Nicomedis. Idcirco plenioremillius explicationem in scholium propos. 28. hujus lib. differimus, ubi illud ex Procli sententia Geometricè demõstrabimus, ut firmè, ac sine ulla dubitatione, tanquam verissimum, ad propositionis 29. hujus lib. (ubi primum ejus usus incipit apparere) & ad aliarum propositionum demonstrationes possit assumi. Quod tamen nos aliter quàm Proclus, & quidem magis geometricè demõstrabim⁹, ita ut nullus dubitationi locus relinquatur.

XII.

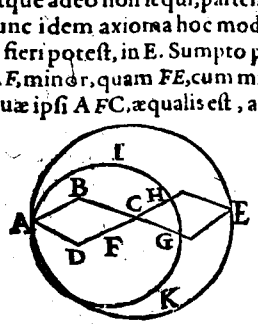
XIV.

Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

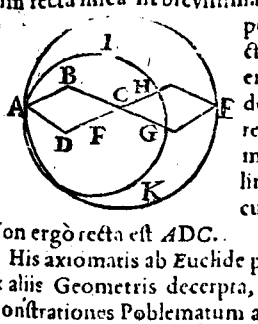
Nullam prorsus habet difficultatem hoc principium. Si enim duæ rectæ lineæ ex una parte coeant ad efficiendum angulum, necessariò ex altera parte semper magis ac magis disjungentur, si producantur, ut in exemplo propositio perspicuum est. Quare ut superficies, spatiumve quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quædam adjungenda est. Ita enim conficietur spatium triangulare, seu figurarum rectilinearum prima. Proclus tamen demonstrat hoc principium, hoc modo. Si fieri potest, ut duæ lineæ rectæ claudant superficiem, comprehendant duæ rectæ ABC, ADC, superficiẽ, ABCD, ita ut duæ illæ rectæ coeant in duobus

bus punctis, A, & C. Facto deinde centro C, & describatur circulus a 3. pet.
intervallo CA, b, & producantur rectæ ABC, ADC, in rectũ, & con- b 2. pet.
tinuum usq; ad circumferentiam, nempe ad puncta, E, & F. Itaque
quia rectæ ACE. ACF, transeunt per centrum C, & erunt semicircu- c 17 pet.
li AE, AEF, inter se æquales, & idcirco circumferentia quoq; AE,
circumferentiæ AEF, æqualis erit, pars toti, quod fieri non potest.
Nõ ergò rectæ duę lineę spatiũ cõprehendunt Quod est propositũ.

Sed quia fortassis adversarius dicet, rectas ABC, ADC, productas coire iterum in aliquo puncto circumferentiæ, ut in E, vel F. atque adeo non sequi, partem æqualem esse toti, demonstrabimus tunc idem axioma hoc modo. Coeant ergò duæ illę lineæ iterum, si fieri potest, in E. Sumpto puncto F, in recta ADC, quocunq; erit AF, minor, quam FE, cum minor sit, quam AFC, hoc est, quam CHE, quæ ipsi AFC, æqualis est, atq; adeò multò minor, quàm FE. Circulus igitur ex F, ad intervallum FA, descriptus secabit rectam FE, in H, atq; adeo CGE, in G. Quoniã igitur AFH, diameter circuli est, erit AIH, semicirculus, ut ad defin. 17. ostendimus: Portio autem AIG, quam aufert recta ABG, & in qua centrum non est, semicirculo minor, ut ad defin. 18. demonstravimus Est ergo circumferentia AIG, minor quàm AIH, totum quam pars, quod est absurdum. Quod autem minor sit portio AIG, semicirculo, ostendemus, ut suprà. Nam ducta ex centro F, ad rectam ABG, perpendiculari, & circumvoluta portione AIG, circa rectã ABG, cadet circumferentia AIG, intra circumferentiam AKG, ne pars major sit quam totum, ut supra demonstravimus.

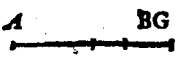


Constat hoc etiam axioma ex definitione lineæ rectæ. Cum enim recta linea sit brevissima extensio ab uno puncto ad aliud, duci poterit unica tantum linea ab uno puncto ad aliud. Quare si ABC, recta est, nõ erit ADC, recta. Quod etiam patet ex definitione Platonis. Nam si ABC, est recta, obumbrabunt media illius extremitates ejusdem. Igitur media puncta lineæ ADC, non obumbrant extrema, cum visus, per rectam ABC, feratur. Non ergò recta est ADC.



His axiomatis ab Euclide positis adjungemus nos nonnulla alia ex aliis Geometris decerpta, non minus necessaria ad futuras demonstrationes Problematum atq; Theorematũ, cum Euclidis, tum cæterorum Mathematicorũ, quam ea, quæ nobis tradidit Euclides.

XV. Si æqualibus inæqualia adjiciantur, erit totorum excessus, adjunctorum excessui æqualis. *Hoc*



Hoc,& sequens pronunciatum desumpsit Proclus ex Pappo. Æqualibus itaque quantitatibus *AB*, *CD*, addantur inæquales *BE*, *DF*, sitq; *BE*, major quàm *DF*. Et ex *BE*, auferatur *BG*, æqualis ipsi *DF*, ut sit *GE*, excessus, quo quantitas addita *BE*, superat quantitatem additam *DF*. Quoniam igitur æqualibus *AB*, *CD*, addita sunt æqualia *BG*, *DF*, *a* erunt tota *AG*, *CF*, æqualia. Quare constat, totam quantitatem *AE*, superare totam *CF*, eodem excessu *GE*, quo magnitudo *DF*, adjuncta à magnitudine adjuncta *BE*, superatur. Quod est propositum.

a 2. prænun.

XVI.

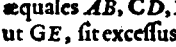
Si inæqualibus æqualia adjungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ à principio erant, æqualis.

In eadem figura, inæqualibus quantitatibus *BE*, *DF*, addantur æquales *AB*, *CD*, Et ex majore *BE*, auferatur *BG*, æqualis ipsi *DF*, ut *GE*, sit excessus; quo quantitas *BE*, quantitatem *DF*, superat. Quoniam igitur æqualibus *BG*, *DF*, addita sunt æqualia *AB*, *CD*, *b* erunt tota *AC*, *CF*, æqualia. Quamobrem tota quantitas *AE*, superabit totam *CF*, eodem excessu *GE*, quo major quantitas proposita *BE*, minorem *DF*, superat. Quod est propositum.

b 2. prænun.

XVII.

Si ab æqualibus inæqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui ablatorum æqualis.

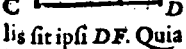


Ab æqualibus *AB*, *CD*, auferantur inæqualia *BE*, *DF*. Sitque *EG*, excessus, quo quantitas *BE*, superat quantitatem *DF*, ita ut *BG*, æqualis sit ipsi *DF*. Quia igitur ab æqualibus *AB*, *CD*, ablata sunt æqualia *BG*, *DF*, *c* remanebunt *AG*, *CF*, æqualia. Perspicuum ergò est, residuum *AE*, superari à residuo *CF*, eodem excessu *EG*, quo magnitudo ablata *BE*, ablatam magnitudinem *DF*, superat. Quod est propositum.

c 3. prænun.

XVIII.

Si ab inæqualibus æqualia demantur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis.



Ab inæqualibus *AB*, *CD*, auferantur æqualia *AE*, *CF*. Sitque *BG*, excessus, quo tota quantitas *AB*, superat totam quantitatem *CD*, ita ut *AG*, æqualis sit ipsi *CD*. Quoniam igitur ab æqualibus *AG*, *CD*, ablata sunt æqualia *AE*, *CF*, remanebunt *EG*, *FD*, æqualia,

lia. Quare reſiduum EB, ſuperabit reſiduum FD, eodem exceſſu BG, quo tota quantitas AB, ſuperat totam quantitatem CD. Quod eſt propoſitum.

In his quoque quatuor proximè poſitis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda eſt una etiam ſola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia adjiciantur, erit totorum exceſſus adjunctorum exceſſui æqualis. Et ſi inæqualibus idem commune adjungatur, erit totorum exceſſus, exceſſui eorum, quæ à principio erant, æqualis. Et ſi ab eodem communi inæqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui ablatorum æqualis. Et ſi ab inæqualibus idem commune demantur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui totorum æqualis. Nam in numeris, ſi ad 6. addas 5. & 3. fiunt 11. & 9. quorum exceſſus eſt 2. idem qui ipſorum 5. & 3. Rurſus, ſi ad 5. & 3. addas 6. fiunt 11. & 9. quorum exceſſus 2. idem eſt, qui ipſorũ 5. & 3. Item ſi ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum exceſſus 3. idem eſt, qui ipſorum 5. & 2. Denique; ſi ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum exceſſus 3. idem eſt, qui ipſorum 10. & 7.

XIX.

Omne totum æquale eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

Quoniam omnes partes ſimul ſumptæ conſtituunt totum, cujus ſunt partes, manifeſta eſt veritas hujus axiomatis.

XX.

Si totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

Vt quia totus numerus 20. duplus eſt totius numeri 10; Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus etiam eſt reliqui hujus 7. In univerſum autem hoc demonſtrabitur propoſ. 5. lib. 5. nimirum. Si magnitudo magnitudinis æquè multiplex ſit, atque ablata ablatæ, vel decupla, vel centupla, &c. & reliqua reliquæ æquè multiplex erit atque tota totius.

Colligi poteſt ex dictis cum Proclo & Gemino hoc diſcrimen inter poſtulata, & axiomata, quod cum utraq; ſint per ſe nota, & indemonſtrabilia, illa naturam ſapiunt Problematum, propterea quod aliquid fieri expoſtant; hæc verò Theoremata imitantur, cum nihil fieri petant, ſed ſolum ſententiam aliquam notiſſimam proponant. Differt autem poſtulatum à problemate, quod conſtructio poſtulati nõ indigeat ulla demonſtratione, problematis autem conſtructionem concedat nemo ſine demonſtratione, eo quod difficile aliquod nobis exhibeat conſtruendum. Idem diſcrimen inter Axioma, & Theorema reperitur; Illud enim demonſtrari non de-

bet, hoc verò concedendum nulla est ratione, nisi demonstretur. Nam nemo hujus propositionis demonstrationem, vel etiam probationem requiret. Quæ eidem æqualia, inter se quoque æqualia sunt. Hujus autem statim demonstrationē desiderabit quis. Omnis trianguli tres anguli interni æquales sunt duobus rectis. Idem judicium habeto de reliquis axiomatis, atque Theorematis, nec non de postulatis, problematisque.

Constat quoque, Postulatorum alia propria esse Geometriæ, qualia sunt illa tria, quæ Euclides nobis proposuit; quædam verò communia & Geometriæ, & Arithmeticæ, cujusmodi est hoc, Quantitatem posse infinitè augeri. Tàm enim numerus, quàm magnitudo, per additionem augeri potest, ità ut nunquam hujus incrementi finis reperiatur. Idem dices de axiomatis, sive pronunciatis. Nam octavum, decimum, undecimum, duodecimum, tertium decimum, & quartum decimum soli Geometriæ conveniunt; Reliqua verò omnia adhibentur & ad demonstrationes Geometricas & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablatæ à magnitudinibus æqualibus, relinquunt magnitudines æquales, sive hæ magnitudines lineæ sint, sive superficies, sive corpora; ita quoque numeri æquales detracti è numeris æqualibus relinquunt numeros æquales, &c.

Hæc dicta à nobis sint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonstrationes accedamus, ex quibus plenius perfectiusque principiorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima principia Mathematicorum ejusmodi, ut planè non intelligantur, nisi prius eorum usus appareat in demonstrationibus; id quod satis te experientia docebit.

Antequam porrò ad propositiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandum est, quemnam ordinem, ac modum in ipsis demonstrationibus simus secuti. Primum cuilibet propositioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum est secutus in Euclidis propositionibus, alter verò in ipsa propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis, & quam adhuc observari cernimus in codicibus Græcis. Id verò eo consilio à nobis est factum: quoniam cum à quibusdam Geometris propositiones Euclidis juxta ordinem Campani, ab aliis verò juxta Theonis seriem citentur, maximeque interdum duo hi interpretes inter se discrepent, in serie, atque ordine propositionum, id quod maximè in σ 7. & 10. lib. perspicitur; necessarium esse duximus, ut utriusque interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, ut si quando numerus propositionum à Geometra quopiam citatus non respondet alteri interpreti, alteri saltem conveniat. Deinde ne cursus demonstrationum interrumperetur, citavimus principia. &

propositi-

propositiones Euclidis in margine, præfixa cuilibet citationi semper literula aliqua alphabeti, vel alio quovis signo, cui sim lis literula, seu signum respondet in demonstratione, ut facilius cognoscatur, ad quem locum quælibet citatio sit referenda. Porro citationes intelligendæ sunt hoc modo.

1. def.	Prima definitio, & sic de aliis numeris, ut 4. def. 13. def. &c.
1. pet.	Prima petitio, vel primum Postulatum.
1. pron.	Primum pronunciatum, seu axioma, & ita de reliquis numeris, ut prius.
1. primi	Prima propositio primi libri.
23. Vndec.	Vigesima tertia propositio undecimi libri.
6. tertijd.	Sexta tertii decimi libri.
9. sextid.	Nona sextidecimi libri.
13. duod.	Decimatertia libri duodecimi.
7. quind.	Septima libri quindecimi.
5. quartid.	Quinta libri quarti decimi, &c.

Ex his aliæ citationes à quolibet facilè poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus est ratio.

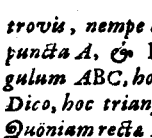
PROBLEMA I.

PROPOSITIO I.

SVPER data recta linea terminata triangulum æquilaterum constituere.

IN omni problemate duo potissimum sunt consideranda, constructio illius, quod proponitur, & demonstratio, qua ostenditur, constructionem rectè esse institutam. Vt quoniam primum hoc problema jubet constituere triangulum æquilaterum super data recta linea terminata quacunque, ita ut linea recta proposita sit unum latus trianguli (Tunc enim figura dicitur constitui super recta linea, quando ipsa linea efficitur unum figura latus) idcirco primum oportet construere ex principiis concessis triangulum aliquod, deinde demonstrare, ipsum ea ratione constructum, esse æquilaterum, hoc est, habere omnia tria latera inter se æqualia. Quod idem in aliis problematibus perspici potest. Hæc etiam duo reperiuntur ferè in omni Theoremate. Sæpenumero enim ut demonstretur id, quod proponitur, construendum est, atque efficiendum prius aliquid, ceu manifestum erit in sequentibus. Pauca verò admodum sunt theoremata, quæ nullam requirant constructionem.

Sit igitur proposita recta linea terminata AB, super quam constituere jubemur triangulum æquilaterum. Centro A, & intervallo rectæ AB, a describatur circulus CBD: Item centro B, & intervallo ejusdem rectæ BA, alius circulus describatur CAD, secans priorem in punctis C, & D. Ex quorum utrovis, nempe ex C, b ducantur duæ rectæ lineæ CA, CB, ad puncta A, & B; Eritque super rectam AB, constitutum triangulum ABC, hoc est, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita constructum necessario esse æquilaterum. Quoniam recta AB, AC, ducuntur ex centro A, ad circumferentiam circuli CBD, c erit recta AC, rectæ AB, æqualis: Rursus quia rectæ BC, BA, ducuntur ex centro B, ad circumferentiam circuli CAD, erit recta BC, rectæ BA, æqualis. Tam igitur AC, quam BC, æqualis est rectæ AB. d Quare & AC, BC; inter se æquales erunt, atque ideirco triangulum ABC, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata &c. Quod faciendum erat.



a 3. pet.

b 1. pet.

c 15. def.

d 1. pron.

SCHOLIVM.

Vt autem videas, plures demonstrationes in una propositione conti-

contineri, placuit primam hanc propositionem resolvere in prima sua principia, initio facto ab ultimo syllogismo demonstrativo. Si quis igitur probare velit, triangulum ABC, constructum methodo prædicta, esse æquilaterum, utetur hoc syllogismo demonstrante.

Omne triangulū habens tria latera æqualia, *a* est æquilaterum. a 23. *def.*

Triangulum ABC, tria habet æqualia latera.

Triangulum igitur ABC, est æquilaterum.

Minorem confirmabit hoc alio syllogismo.

Quæ eidem æqualia sunt, *b* inter se quoque sunt æqualia. b 1. *pron.*

Duo latera AC, BC, æqualia sunt eidem lateri AB.

Igitur & duo latera AC, BC, inter se æqualia sunt.

Ac propterea omnia tria latera AB, BC, AC, æqualia existunt.

Minorem verò hujus syllogismi hac ratione colliget.

Lineæ rectæ à centro ductæ ad circumferentiam circuli, *c* inter se sunt æquales. c 15. *def.*

Lineæ AB, AC, sunt ductæ à centro A, ad circumferentiam CBD.

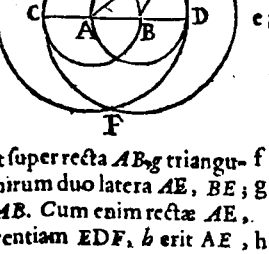
Sunt igitur lineæ AB, AC, æquales inter se.

Eademque ratione erunt lineæ AB, BC, æquales, cum ducantur à centro B, ad circumferentiam CAD. Quamobrem minor præcedentis syllogismi tota confirmata erit.

Non aliter resolvi poterunt omnes aliæ propositiones non solum Euclidis, verum etiam cæterorum Mathematicorum.

Negligunt tamen Mathematici resolutionem istam in suis demonstrationibus, eo quod brevius ac facilius sine ea demonstrent id, quod proponitur, ut perspicuum esse potest ex superiori demonstratione.

Si quis autem super data recta desideret constituere triangulum quoque Isosceles, & scalenum, id cum Proclo in hunc modum efficiet. Sit recta linea AB, circa quam ex centris A, & B, describantur duo circuli, uti prius. *d* Deinde producatur AB, in utramq; partem ad circumferentias usq; ad puncta C, & D. Atque centro A, intervallo verò AD, *e* describatur circulus EDF. Item centro B, intervallo verò BC, circulus ECF, secans priorem in punctis E, & F. Ex quorum utrolibet, nempe ex E, *f* ducantur ad puncta A, & B, duæ rectæ EA, EB. Factumque erit super recta AB, *g* triangulum ABE; quod dico esse Isosceles, nimirum duo latera AE, BE, esse & æqualia inter se, & majora latere AB. Cum enim rectæ AE, AD, ducantur è centro A, ad circumferentiam EDF, *b* erit AE,



d 2. *pet.*

e 3. *pet.*

f 1. *pet.*

g 20. *def.*

h 15. *def.*

æqualis rectæ AD. Item eum rectæ BE, BC, ducantur è centro B, ad
a 15.def. circumferentiam ECF, *a* erit BE, æqualis rectæ BC. Sunt autem rectæ AD, BC, æquales inter se; utraque enim AC, & BD, æqualis est rectæ AB; cum AB, AC, ex eodem centro A, ad circumferentiam ducantur; Item BA, BD, ex eodē centro B, ad circumferentiā quoq;
b 1.pron. egrediantur. *b* Quare AC, BD, æquales inter se erunt. Addito igi-
c 2.pron. tur communi recta AB, *c* erit tota AD, toti BC, æqualis) *d* igitur
d 1.pron. AE, BE, æquales quoque inter se erunt. Quod verò utraq; AE, BE,
e 9.pron. major sit quàm AB, perspicuum est, cum AD, æqualis ostensa ipsi
f 9.pron. AE, *e* major sit quam AB; Item BC, æqualis demonstrata ipsi BE, *f* major quoque sit, quàm AB. Constitutum igitur est super recta AB, Isosceles ABE, habens duo latera AE, BE, æqualia inter se, & majora latere AB, quod faciendum erat. Atque hæc est demonstratio Procli, aliorumque interpretum Euclidis.

Brevius tamen videtur mihi posse demonstrari, triangulum ABE,
g 15. def. esse Isosceles, hac ratione. *g* Quoniam AE, æqualis est rectæ AD, & recta AD, est dupla rectæ AB, propterea quod BA, BD, æqua-
h 15.def. les inter se sunt; erit & AE, dupla rectæ AB. Rursus *h* quia BE, æqualis est rectæ BC. & BC, dupla est ipsius AB, propterea quod
i 15.def, AB. *i* AC, æquales sunt inter se, erit & BE, dupla ipsius AB. Cum
k 6.pron. igitur utraque AE, BE, dupla sit ejusdem AB, erunt *k* AE, BE, inter se æquales, majoresque, propterea recta AB. Isosceles ergò est triangulum ABE.

l 1.petit. Jam verò, si ex puncto *A*, *l* ducatur linea recta AG, ad circum-
m 1. pet. ferentiam EGF, quæ non sit eadem quæ AE, vel AD, secans cir-
n 20.def. cumferentiam EHD, in puncto H, & ex G, ad B *m* ducatur alia re-
o 9.pron. cta GB, *n* constitutum erit triangulum ABG, super recta AB, quod
p 15.def. dico esse scalenum. Quoniam *o* AG, major est quàm AH: *p* Sunt autem AH, AE, ex centro A, ductæ, inter se æquales; erit & AG,
q 15. def. major quàm AE, hoc est, quàm BE, quæ ostensa est æqualis ipsi AE, igitur & major erit AG, quàm BG, *q* cum BG, sit æqualis ipsi BE. Est autem & BG, major quàm AB, propterea quod tota BC,
r 9.pron. æqualis ipsi BG, *r* major est quàm AB, pars. Omnia ergò tria latera trianguli ABG, inæqualia sunt, ideoque scalenum est ex definitione; quod erat faciendum.

Brevius quoque ostendemus, triangulum AGB, esse scalenū, hac
s 15. def. ratione. Quoniam tam *s* AH, AD, ex centro A, ductæ, sunt æqua-
les, quàm BG, BC, ex centro B, ductæ: Sunt autem AD, BC, ipsius AB, duplæ, quod AB, utrique BD, AC, æqualis sit; erunt quoque
t 9.pron. AH, BG. ipsius AB. duplæ, ac propterea majores, quàm AB. Cum ergò *t* AG, major sit, quàm AH, sive quàm BG, scalenum erit triangulum AGB, habens latus AG, maximum, BG, medium, & AB, minimum.

PRA-

PRAXIS.

Conabimur in ſingulis ferè problematibus Euclidis tradere praxin quandam facilem, & brevem, qua effici poſſit id, quod Euclides pluribus verbis, atque lineis contendit conſtruere; Idque in iis præſertim obſervabimus, quæ frequentiorem uſum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium aliquod ſecum videtur afferre.

Itaque triangulum æquilaterum ita facilè conſtruetur ſuper data recta AB. Ex centris A, & B, intervallo verò datæ rectæ AB, deſcribantur duo arcus circulorum ſe interſecantes in puncto C, ſive hoc infra lineam contingat, ſive ſuprà. Poſt hæc ducantur duæ rectæ AC, BC, ex puncto C, ad puncta A, & B, factumque erit, quod proponitur. Cujus rei eadem eſt demonſtratio cum ſuperiori, ſi modo circuli eſſent integri ac perfecti. Tranſirent enim neceſſariò per puncta A, & B.

Iſoſceles ita conficietur. Ex centris A, & B, intervallo verò majore quam AB, ſi datam rectam eſſe velimus minus latus; vel minore ſi eandem in latus majus eligamus, deſcribantur duo arcus ſecantes ſe in C. Poſtea ducantur rectæ AC, & BC, conſtructumque erit Iſoſceles; quoniam AC, BC, æquales erunt, propter æquale intervallum aſſumptum, majus ſcilicet, aut minus quàm recta AB.

Scalenum denique hoc modo fabricabitur ſuper data recta AB. Ex centro B, intervallo verò majore, quàm BA, deſcribatur arcus aliquis. Item ex centro A, intervallo verò adhuc majore, quàm prius aſſumptum, deſcribatur alter arcus priorem ſecans in C. Deinde ducantur rectæ AC, BC; conſtitutumq; erit Scalenum, ut conſtat ex inæqualitate intervallorum, quæ aſſumpta fuerunt in conſtructione.

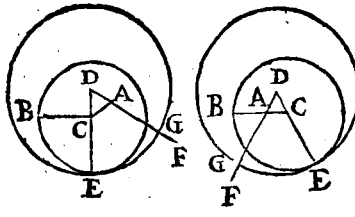
Cæterum quo pacto triangulum conſtitui debeat habens tria latera æqualia tribus datis lineis quibuſcunque, ſingula ſingulis, latius explicabimus propoſ. 22. hujus libri.

PROBL. 2. PROPOS. 2. ij.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

Sit punctum datum A, *& data recta linea* BC, *cui aliam rectam æqualem ponere oporteat ad punctum* A. *Facto alterutro extremo linea* BC, *nempe* C, *centro a deſcribatur circulus* BE, *intervallo recta* BC. *Et ex* A, *ad centrum* C, *3. poſt.*

a 1. *petit.*



b 1. *primi.*

C, a recta ducatur AC; (nisi punctum A, intra rectam BC, fuerit: Tunc enim pro linea ducta sumetur AC, ut secunda figura indicat.) Super recta verò AC, b constituatur triangulum aquilaterum ACD, sursum, aut deorsum versus, ut libuerit; cujus duo latera modo constituta

c 2. *pet.* *DA, DC, versus rectam AC, c extendantur; DC, quidem oppo-*

d 3. *pet.* *situm puncto dato A, usque ad circumferentiam in E; DA, verò oppositum centro C, quantumlibet in F. Deinde centro D, intervallo verò recta DE, per C, centrum transeuntis, d alter circulus describatur EG, secans rectam DF, in G. Dico rectam AG, quæ posita est ad punctum datum A, æqualem esse datæ rectæ BC. Quoniam DE, DG, ductæ sunt ex centro D, ad circumferentiam*

e 15. *def.* *EG, e ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur DA, DC, æ-*

f 3. *pron.* *qualibus lateribus trianguli æquilateri ACD, f remanebit AG,*

g 15. *def.* *æqualis recta CE. Sed eidem CE, g æqualis est recta BC. (cum amba rectæ CB, CE, cadant ex centro C, ad circumferentiam BE.)*

h 1. *pron.* *Igitur recta AG, BC, quandoquidem utraque æqualis est ostensæ rectæ CE, inter se h æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum.*

Quod si punctum datum fuerit in extremo datæ linea, quale est C, facilè absolvetur problema. Si enim centro C, & intervallo CB,

i 3. *petit.* *i describatur circulus, ad cujus circumferentiam recta k ducatur*

k 1. *pet.* *utcunque CE, erit hac posita ad punctum datum C, l æqualis data*

l 15. *def.* *recta BC, cum utraque & BC, & CE, ex eodem centro egrediatur ad circumferentiam BE.*

SCHOLIVM.

Hujus problematis varii esse possunt casus, ut ait Proclus. Aut enim datum punctum in ipsa data recta est positũ, aut extra ipsam: Si in ipsa, erit vel alterum extremorum ejus, vel inter utrumque jacebit extremum. Si verò extra ipsam, erit vel è directo datæ lineæ, ita ut producta in rectum, & continuum per ipsum punctum transeat, vel non è directo, ita ut ab ipso ad datæ lineæ extremorum quodvis recta linea ducta cum data recta angulum efficiat; quo modo vel supra datam lineam erit constitutum, vel infra, ut manifestum est. In omnibus autem istis casibus semper eadem est constructio, & demonstratio. Quod si in constructione fiat triangulum *ACD*, super recta *AC*, Isosceles, eodem modo ostendemus, rectam *AG*, rectæ *BC*, æqualem esse.

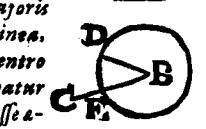
PROBL.

PROBL. 3. PROPOS. 3. III.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, de majore æqualem minori rectam lineam detrahere.

Sint duæ rectæ inæquales A, minor, & BC, major, oporteatque ex majore BC, detrahere lineam æqualem minori A. Ad alterutrum extremorum lineæ majoris BC, nempe ad punctum B, aponatur aliqua linea, quæ sit BD, æqualis minori A. Deinde centro B, intervallo autem BD, circulus b *describatur secans BC, in E. Dico BE, detractam esse æqualem ipsi A. Quoniam* BE, c *æqualis est rectæ* BD, *& eidem* BD, *æqualis est recta A, per constructionem;* d *erunt A, & BE, inter se æquales. Duabus igitur datis rectis, &c. Quod erat faciendum.*

A



a 2. primi.

b 3. petit.

c. 15. defin.

d 1. pronun.

Quod si duæ rectæ datæ conjungantur in uno extremo, quales sunt BD, *&* BC, *conjunctæ in extremo utriusque B; describendus erit circulus ex B, ad intervallum minoris* BD. *Hic enim auferet* BE, *æqualem ipsi* BD, *ut constat ex definitione circuli.*

SCHOLIVM.

Varios etiam posse casus esse in hoc problemate, nemo ignorat, cum duæ lineæ inæquales datæ vel inter se distent, ita ut neutra alteram contingat, vel non; sed vel conjungantur ad unum extremum, vel se mutuò secent, vel certe altera alteram suo extremo tangat duntaxat, &c. de qua re lege Proclum hoc in loco.

THEOREMA 1. PROPOS. 4. IV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, utrumque utrique; habeant verò & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt: eritque triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, uterque utrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

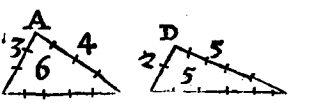
Sint duo triangula ABC, DEF, & unius utrumque latus AB, AC, æquale sit alterius utrique lateri DE, DF, *hoc est, AB, ipsi* DE, *&* AC, *ipsi* DF; *angulusque* A, *contentus lateribus* AB, AC, *æqualis angulo* D, *contento lateribus DE, DF. Dico basim BC, æqualem quoque esse basi* EF;

& triangulum ABC, *triangulo* DEF; *& utrumque angulum* B, *& C, utrique angulo* E, *& F, id est, angulos* B, *& E, qui opponuntur lateribus aequalibus* AC, DF, *inter se; & angulos* C, *& F, qui opponuntur aequalibus lateribus* AB, DE, *inter se quoque esse aequales. Quoniam enim recta* AB, *recta* DE, *ponitur aequalis, fit, ut si altera alteri superponi intelligatur, collocato puncto* A,
a 8. pronun. *in punctum* D, a *ipsa si sibi mutuò congruant, punctumque* B, *in punctum* E, *cadat. Neque enim dicere quis poterit, partem rectæ* AB, *rectæ* DE, *congruere & partem non, quia tunc dua recta haberent*
b 10. pronun. *idem segmentum commune,* b *quod est impossibile. Quod si quis dicat, posito puncto* A, *in* D, *cadere quidem punctum* B, *in* E, *sed rectam* AB, *cadere vel ad dextram, vel ad sinistram* DE, *claudent dua recta lineam superficiem.* c *quod fieri non potest. Quare recta*
c 14. pronun. AB, *recta* DE, *congruet, ut dictum est. Cum ergò angulus* A, *angulo* D, *ponatur aequalis,* d *congruet quoque alter alteri, hoc est, recta* AC, *recta* DF, *congruet, punctumque* C, *in punctum*
d 18. pronun. F, *cadet, ob aequalitatem rectarum* AC, DF. *Basis igitur* BC, *basi* EF, *congruet quoque: aliàs si supra caderet, aut infra, ut efficeretur recta* EGF, *vel* EHF, *clauderent dua recta* EF, EGF, *vel* EF, EHF, *superficiem, (negare enim nemo poterit, tam* EGF, *quam* EHF, *rectam esse, cum utraque ponatur esse eadem, qua*
e 14. pronun. *recta* BC) *quod est absurdum. Dua enim rectæ superficiem* e *claudere non possunt. Quocirca* f *basis* BC, *basi* EF, *aequalis erit, cum*
f 8. pronun. *neutra alteram excedat; & triangulum* ABC, *triangulo* DEF; *& angulus* B, *angulo* E; *& angulus* C, *angulo* F, *aequalis, ob eandem causam, existet. Quare si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, &c. Quod demonstrandum erat.*

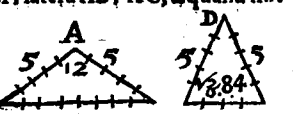
SCHOLIVM.

Rectè Euclides duas conditiones posuit in antecedente hujus theorematis, quarum prima est, ut duo latera unius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, utrumque utrique; Secunda, ut angulus etiam unius contentus illis lateribus æqualis sit angulo alterius contento lateribus, quæ istis sunt æqualia. Deficiente enim alterutra harum conditionum, neq; bases, neque reliqui anguli poterunt unquã esse æquales, utq; probè hoc loco à Proclo demonstratur: Triangula verò ipsa licet possint esse æqualia, posteriore duntaxat conditione deficiente, ut ex Scholio prop. 37. hujus lib. constabit, tamen rarò admodum illud continget. Sint enim triangulorum ABC, DEF, anguli A. & D, æquales, nempe recti, & latera AB, AC, æqualia lateribus DE, DF, non quidem utrumq; utrique, sed illa simul sumpta hisce simul sumptis, sitq; AB, 3 AC, 4- ut ambo simul efficiant 7. At verò DE, sit 2. & DF, 5, ut ambo quoq; simul

simul 7. constituant. Quibus positis, erit basis BC, 5. & basis EF, radix quadrata hujus numeri 29. quæ maior quidem est quàm 5. minor autem, quàm 6. Item area trianguli ABC, erit 6. area verò trianguli DEF, 5. Anguli denique super basim BC, inæquales erunt angulis super basim EF. Quæ quidem omnia ita esse, hic ostenderemus, nisi ad eorum demonstrationem requirerentur multa, quæ nondum sunt confirmata. Vides igitur omnia inæqualia esse, propterea quod non utrumq; latus utrique lateri æquale existit in dictis triangulis ABC, DEF



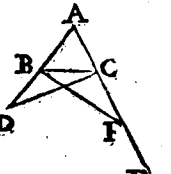
Rursus triangulorum ABC, DEF, latera AB, AC, æqualia sint lateribus DE, DF, utrumque utrique, sitque unumquodque 5. anglus verò A, & D, contenti dictis lateribus inæquales, sitq; A, major quàm D. Quibus concessis, erit basis BC major basE EF, ut propos. 24. hujus libri ostendetur. Quod si basim BC. ponamus esse 8 basim autem EF, erit area trianguli ABC. 12. area verò trianguli DEF, radix quadrata hujus numeri 84. quæ major quidem est quàm 9. minor verò, quàm 10. id quod notissimum est Geometris. Vt igitur duorum triangulorum & bases, & anguli, nec non triangula ipsa æqualia inter se sint, necesse est, ut utrumque latus unius æquale sit utrique lateri alterius, & anguli quoque dictis lateribus contenti æquales existant, ut optimè dixit Euclides.



THEOR. 2. PROPOS. 5. V.

Isosceles triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se æquales erunt.

Sit triangulum isosceles ABC, *in quo latera* AB, AC, *inter se sint æqualia. Dico angulos* ABC, ACB, *super basim* BC, *æquales inter se esse: Item si latera æqualia* AB, AC, *producantur quantum libuerit, usque ad puncta* D, & E, *angulos quoque* DBC, ECB, *infra basim eandem* BC, *esse æquales. Ex linea enim* AE, *producta infinitè* a *abscindatur* AF, *æqualis ipsi* AD, b *& ducantur rectæ* BF, CD. *Considerentur deinde duo triangula* ABF, ACD. *Quia ergò duo latera* AB, AF, *trianguli* ABF, *æqualia sunt duobus lateribus* AC, AD, *trianguli* ACD, *utrumque utrique, nempe* AB, *ipsi* AC, *ex hypothesi, &*



a 3. primi.
b 1. petit.

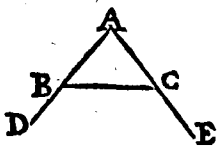
theſi, & AE, ipſi AD, ex conſtructione; anguluſque A, contentus lateribus AB, AF, æqualis eſt angulo A, *contento lateribus* AC,
a 4. primi. AD, *imo angulus A, communis eſt utrique triangulo*: a *Erit baſis* BF, *æqualis baſi CD; & angulus F, angulo D; & angulus ABF, angulo* ACD; *cum & priores duo, & poſteriores opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis, ut patet. Rurſus conſiderentur duo triangula BDC, CFB. Quoniam verò recta* AD, AF, *æquales ſunt, per conſtructionem, ſit ut, ſi auferantur ex ipſis æ-*
b 3. pro- *quales* AB, AC, b *& reliqua* BD, *& CF, ſint æquales. Quare*
num. *duo latera* BD, DC, *trianguli* BDC, *æqualia ſunt duobus lateribus* CF, FB, *trianguli* CFB, *utrumque utrique, videlicet* BD, *ipſi* CF, *& DC, ipſi* FB, *ut probatum eſt. Sunt autem & anguli D, & F, contenti dictis lateribus æqualibus æquales, ut oſtenſum etiam*
c 4. primi. *fuit. Igitur erit angulus* c DBC, *angulo* FCB, *æqualis; & angulus BCD, angulo* CBF. *Tam enim priores duo, quam poſteriores, æqualibus opponuntur lateribus, exiſtuntque ſupra communem baſim* BC, *utriuſque trianguli* BDC, CFB. *Quod ſi ex totis angulis æqualibus ABF,* ACD, *(quos æquales eſſe jam demonſtravimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æquales* CBF, BCD, *(quos itidem in poſterioribus triangulis modo probavimus*
d 3. pro- *eſſe æquales)* d *remanebunt anguli* ABC, ACB, *ſupra baſim* BC,
num. *æquales. Oſtenſum eſt autem in poſterioribus triangulis, & angulos* DBC, FCB, *qui quidem ſunt infra eandem baſim* BC, *eſſe æquales. Igitur & anguli ſupra baſim inter ſe, & anguli infra eandem inter ſe ſunt æquales; Ac propterea Iſoſcelium triangulorum, qui ad baſim ſunt anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.*

SCHOLIVM.

Hæc propoſitio vera etiam eſt in triangulis æquilateris, cum in quolibet reperiantur duo latera inter ſe æqualia, licet eam Euclides ſolis Iſoſcelibus triangulis videatur accommodaſſe. Exiſtentibus enim duobus lateribus AB, AC, trianguli ABC, æqualibus; ſive reliquum latus BC, ipſis quoq; ſit æquale, ut contingit in triangulo æquilatero, ſive inæquale, ut in Iſoſcele accidit, neceſſariò conſequitur, & angulos ſupra baſim inter ſe, & angulos infra eandem inter ſe quoq; eſſe æquales, ut conſtat ex demonſtratione prædicta. Solet autē theorema hoc tyronibus ſubdifficile, & obſcuriuſculū videri, propter multitudinem linearū, & angulorū, quibus nondum ſunt aſſueti. Verum tamē, ſi diligenter theorematis præcedentis vis, ac demonſtratio ponderetur, non multo labore hoc, quod prę manibus habem⁹, à quolibet percipietur, ſi modò memor ſit, illos ānguloſ triangulorū probari æquales eſſe in antecedenti theoremate, qui æqualib⁹ lateribus opponuntur. Quod quidē, quoniā Campanus nō

apposuit

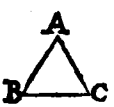
apposuit, causa fuit, ut confusa esse videatur, & subobscura ejus demonstratio.



VERITAS porrò hujus theorematis, quoad utramq; partem, facilè quoque demonstrari potest per superpositionem, ut demonstrata fuit propositio 4. Sint enim rursum in triangulo ABC, duo latera æqualia AB, AC, quę producantur quantumlibet usque ad D, & E. Dico tam angulos ABC, ACB, supra basim BC, inter se æquales esse, quam angulos DBC, ECB, infra eandem basim. Si enim concipiamus mente triangulum ABC, triangulo ACB, (ita ut idem triangulum sit instar duorum) superponi, ita ut recta AB, rectæ AC, superponatur, cadet punctum B, in C, ob æqualitatem laterum AB, AC. Quo posito, cadet recta AC, super rectam AB, ob æqualitatem, sive identitatem anguli A; atque punctum C, in punctum B, incidet, propter æqualitatem laterum AC, AB. Quapropter angulus ABC, angulo ACB, & angulus DBC, angulo ECB, a congruet, ac proinde tam illi, quam hi, inter se æquales erunt. a 8. pro. nun.

COROLLARIVM.

Ex hac propositione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum esse æquiangulum quoque; Hoc est, tres angulos cujuslibet trianguli æquilateri esse inter se æquales. Sit enim triangulum æquilaterum ABC. Quoniam igitur duo latera AB, AC, sunt æqualia, b erunt duo anguli B, & C, æquales. Item quia duo latera AB, BC, sunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod ostendendum erat.



b 5. primi.

THEOR. 3. PROPOS. 6.

Si trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

In triangulo ABC, sint duo anguli ABC, ACB, super latus BC, æquales. Dico duo latera illis opposita AB, AC, esse quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, existentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum majus altero; fit igitur AB, majus quam AC, si fieri potest: Et ex AB, c abscindatur in D, recta BD, æqualis rectæ AC, quæ minor dicitur esse quam AB, ducaturque recta CD. Considerentur jam duo triangula ACB, DBC. In quibus cum duo latera AC, CB, trianguli ACB, æqualia sint duobus lateribus DB, BC, trianguli DBC, utrumque utrique, nempe AC, ipsi DB, (abscidimus enim ex AB, ipsi

c 3. primi.

AB, ipſi AC, conceſſu adverſarii, æqualem DB,) & CB, ipſi BC, cum ſit unum & idem; Sint autem & anguli ACB, DBC, contenti dictis lateribus æquales, per hypotheſin: a Erunt trianguli 24. primi
ACB, DBC, *æqualia, totum, & pars; quod fieri non poteſt. Non igitur erunt latera AB, AC, inæqualia, ſi anguli B, & C, ſuperlatus BC, æquales ſunt, ne totum parti æquale eſſe concedamus: ſed æqualia exiſtent. Quare ſi trianguli duo anguli, &c. Quod demonſtrandum erat.*

ſCHOLIVM.

Convertit hoc theorema primam partem præcedentis. Nam ibi demonſtratum eſt, ſi duo latera trianguli inter ſe æqualia fuerint, angulos, qui ad baſim ſunt, eſſe quoque æquales: Hic verò, ſi anguli ad baſim ſint æquales, latera quoque angulis illis oppoſita eſſe æqualia. Non autem mirum alicui debet videri, ſi Mathematici interdum convertunt propoſitiones, ità ut nunc ex antecedente quopiam conceſſo colligant per demonſtrationem conſequens aliquod, nunc verò rurſus ex conſequente hoc conceſſo inferant per aliam demonſtrationem antecedens illud, ut ab Euclide in hiſce duabus proximis propoſitionibus factum eſſe conſpicimus: Non debet, inquam, videri mirum, quoniam non ſemper in rebus Mathematicis reciprocantur antecedens & conſequens. Nam in propoſitionibus neceſſariis, quales ſunt propoſitiones Geometricæ, poteſt interdum prædicatum eſſe univerſalius ſubjecto, ut cum Dialecticis loquamur. Quare tunc non poterit converti propoſitio. Nam neceſſaria eſt hæc propoſitio, (Omnis homo eſt animal.) non tamen converti poteſt univerſaliter, cum non omne animal ſit homo. Ita quoque fieri poteſt in propoſitionibus Geometricis neceſſariis: Cujus ego rei unum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonſtrat Euclides propoſ. 16. hujus lib. Si trianguli cujuſvis unum latus producatur, angulum externum majorem eſſe duobus internis ſibi oppoſitis; In qua quidem propoſitione nullo modo antecedens, & conſequens reciprocantur. Non enim ſequitur, ſi figuræ cujuſvis rectilineæ uno latere producto, angulus externus major ſit ſingulis internis oppoſitis, figuram illam eſſe triangulum, cum poſſit etiam eſſe quadrilatera figura, ut ad propoſ. 16. hujus lib. oſtendemus. Eodemque modo multæ aliæ propoſitiones, converti nequeunt. Quamob rem neceſſe eſt, ut prius demonſtret Geometra propoſitionem aliquam converti, hoc eſt, antecedens, & conſequens illius reciprocari, antequam ex conſequente conceſſo colligat antecedens. Non convertit autem Euclides omnes propoſitiones quę converti poſſunt, ſed eas duntaxat, quarum converſione maximè indiget. Nos tamen dabimus operam, ut ferè omnes illas convertamus, quæ aliquam videbuntur afferre utilitatem.

COROL-

COROLLARIVM.

Sequitur ex hac propositione, omne triangulum æquiangulum, id est, cujus omnes anguli sunt æquales, esse æquilaterum. Quod quidem conversum est corollarii quintæ propositionis, ut liquet. Sint enim trianguli ABC, tres anguli æquales. Dico ipsum esse æquilaterum. Cum enim duo anguli B, &C, sint æquales, *a* erunt latera AB, AC, æqualia. Rursus cum duo anguli A, & B. sint æquales, erunt quoque latera AC, BC, æqualia, & ideirco omnia tria latera AB, BC, AC, æqualia. Quod ostendendum erat.

a 6 primi.

EX PROCLO.

Licebit nobis etiam convertere secundam partem quintæ propositionis hoc modo.

Si trianguli cujuslibet productis duobus lateribus, anguli infrà basim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter se erunt.

Trianguli enim ABC, productis lateribus AB. AC, ad D, & E, fiant anguli DBC, ECB, infra basim BC, æquales. Dico latera AB, AC, esse quoque inter se æqualia. Ex CE, quantumlibet producta *b* abscindatur CF, æqualis ipsi BD, & ducantur rectæ BF, FD, DC. Considerentur deinde triangula DBC, FCB. In quibus cum latera DB, BC, æqualia sint lateribus FC, CB, utrumque utrique, nempe DB, ipsi FC, per constructionem, & BC, ipsi CB, quod sit unum & idem: sint autem & anguli DBC, FCB, dictis lateribus contenti æquales, per hypothesin: *c* erunt & bases CD, BF, & anguli BCD, CBF, super has bases, cum opponantur æqualibus lateribus BD, CF, æquales. Ablatis igitur hisce angulis æqualibus BCD, CBF, ex angulis FCB, DBC, per hypothesin, æqualibus; *d* remanebunt anguli FCD, DBF, æquales. Considerantur rursus triangula DBF, FCD. In quibus quoniam latera DB, BF, æqualia sunt lateribus FC, CD, utrumque utrique, nempe DB, ipsi FC, per constructionem, & BF, ipsi CD, ut modo ostensum est; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus DBF, FCD, æquales, ut etiam fuit nuper demonstratum: *e* Erit angulus BDF, super basim DF, trianguli DBF, æqualis angulo CFD, super eandem basim FD, trianguli FCD. Hi enim æqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo ADF, duo anguli ADF, AFD, sint æquales, ut nunc ostendimus, *f* erunt latera AD, AF, æqualia. A quibus si rectæ BD, CF, per constructionem, æquales demantur, *g* remanebunt AB, AC, latera trianguli ABC, æqualia. Quod erat ostendendum.

b 3. primi.

c 4. primi.

d 3. primi.

e 4. primi.

f 6. primi.

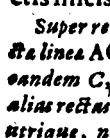
g 3. primi.

THEOR.

THEOR. 4. PROPOS 7.

Super eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineę æquales, utraque utrique, non conſtituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

Super recta AB, *conſtituantur ad punctum quodvis* C, *duæ rectæ lineæ* AC, BC. *Dico ſuper eandem rectam* AB, *verſus partem eandem* C, *non poſſe ad aliud punctum, ut ad* D, *conſtitui duas alias rectas lineas, quæ ſint æquales lineis* AC, BC, *utraque utrique, nempe* AC, *ipſi* AD, *quæ eundem habent terminum* A, *&* BC, *ipſi* BD, *quæ eundem etiam terminum poſſident* B. *Sint enim, ſi fieri poteſt, rectæ* AC, AD, *interſe, & rectæ* BC, BD, *interſe etiam æquales. Aut igitur punctum* D, *erit in alterutra rectarum* AC, BC, *ita ut recta* AD, *in ipſam rectam* AC, *vel* BD, *in ipſam* BC, *cadat; aut intra triangulum* ABC; *aut extra. Sit primo punctum* D, *in altera rectarum* AC, BC, *nempe in* AC, *ut* AD, *ſit pars ipſius* AC. *Quoniam igitur rectæ* AC, AD, *eundem terminum* A, *habentes dicuntur æquales, erit pars* AD, *toti* AC, *æqualis. Quod fieri non poteſt. Sit deinde punctum* D, *intra triangulum* ABC, *& ductæ rectæ* CD, *producantur rectæ* BC, BD, *uſque ad* E, *&* F. *Quoniam igitur in triangulo* ACD, *ponuntur latera* AC, AD, *æqualia, a erunt anguli* ACD, ADC, *ſuper baſim* CD, *æquales;*

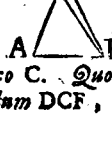


a 5. primi

b *Eſt autem angulus* ACD, *minor angulo* DCE; *nempe pars toto: Igitur & angulus* ADC, *minor erit eodē angulo* DCE. *Quare angulus* CDF, *pars ipſius* ADC, *multo minor erit eodem angulo* DCE. *Rurſus, quia in triangulo* BCD, *latera* BC, BD, *ponuntur æqualia, c erunt anguli* CDF, DCE, *ſub baſi* CD, *æquales. Oſtenſum autem fuit, quod idem angulus* CDF, *multo ſit minor angulo* DCE. *Idem ergo angulus* CDF, *& minor eſt angulo* DCE, *& eidem æqualis, quod eſt abſurdum. Sit poſtremo punctum* D, *extra triangulum* ABC. *Aut igitur in tali erit loco, ut una linea ſuper alteram cadat, ut in priori figura, dummodo loco* D, *intelligas* C, *& loco* C, *ipſum* D; *ex quo rurſus colligetur pars æqualis toti, quod eſt abſurdum. Aut in tali erit loco, ut poſteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in poſteriori figura, ſi modo loco* D, *iterum intelligas* C, *&* D, *loco* C. *Quo poſito, in idem abſurdum incidemus, nempe angulum* DCF, *& minorem eſſe angulo* CDE, *& eidem æqualem. ut per*

b 9. primi

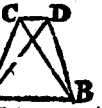
c 5. primi.



ut perſpicuum eſt. Aut denique punctum D, *ita erit extra triangulum* ABC, *ut altera linearum poſteriorum, nempe AD, ſecet alteram priorum, ut ipſam* BC. *Ducta igitur recta* CD, *cum in triangulo* ACD, *latera* AC, AD, *ponantur aqualia,* a *erunt anguli* ACD, ADC, *ſupra baſim* CD, *aquales*: Ac *pro-A inde* b *cum angulus* ADC, *minor ſit angulo* BDC, *pars toto, erit & angulus* ACD, *minor eodem angulo* BDC. *Quare multo minor erit angulus* BCD; *pars anguli* ACD, *angulo eidem* BDC. *Rurſus, cum in triangulo* BDC, *latera* BC, BD *ponantur aqualia,* c *erunt anguli* BCD, BDC, *ſuper baſim* CD, *aquales*: *Eſt autem ipſi oſtenſum, angulum* BCD, *multo eſſe minorem angulo* BDC. *Idem igitur angulus* BCD, *& minor eſt angulo* BCD, *& eidem aqualis, quod eſt abſurdum. Non ergò aquales ſunt inter ſe* AC, AD, *& inter ſe quoque* BC, BD. *Quare ſuper eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandum.*

a 5. primi.

b 9. pronun.

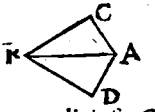


c 5. primi.

SCHOLIVM.

Fieri poteſt, ut duæ lineæ AD, BD, æquales ſint duabus AC, BC, utraque utrique, ut AD, ipſi BC, & BD, ipſi AC, ut ultima figura indicat. Verum hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto lineæ illæ, quæ ſunt æquales inter ſe, ut conſtat. Solæ enim AC, AD, eundem limitem poſſident A; Item BC, BD, eundem B; optimeq; demonſtratum fuit ab Euclide, fieri non poſſe, ut AC, AD, inter ſe ſint æquales, ita ut BC, BD, quoque inter ſe æquales exiſtant. Rectè igitur in propoſitione appoſita ſunt hæc verba: eoſdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rurſus poſſunt eſſe duæ lineæ ſimul ſumptæ AD, BD, æquales duabus lineis AC, BC, ſimul ſumptis, ut in eadem figura perſpici poteſt: Sed hoc non oſtendit Euclides fieri non poſſe. Dixit enim non poſſe utramque utriqueeſſe æqualem, &c.

Eadem ratione poſſunt ex A, & B, infra AB, baſim trianguli ABC, hoc eſt, ad contrarias partes, duci duæ lineæ rectæ AD, BD, convenientes ad aliquod punctum, ita ut AD, exiens è puncto A, æqualis ſit ipſi AC, & BD, egrediens ex B, æqualis ipſi BC, ut perſpicuum eſt in appoſita figura. Non igitur ſine cauſa adjecit Euclides: ad eaſdem partes. Deniq; eſſe poterunt duę lineæ AC, AD, æquales inter ſe eundem terminum A, poſſidentes; Sed hoc poſito, fieri nulla ratione poterit, ut reliquę duę BC, BD, terminũ habentes eundem B, inter ſe quoq; ſint æquales, ut in hac figura apparet, & ab Euclide eſt demõſtratum. Appoſite igitur dictũ eſt in propoſitione



duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, utraque utrique, &c. Quare ut planè scopus Euclidi, in hac propositione propositus intelligatur, diligenter singula verba propositionis sunt ponderanda.

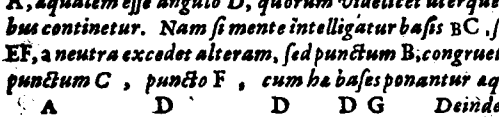
VIII

THEOR. 5. PROPOS. 8.

Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus; utrumque utrique æqualia, habuerint verò & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

Sint duo latera AB, AC, *trianguli* ABC, *duobus lateribus* DE, DF, *trianguli* DEF, *æqualia, utrumque utrique, nempe* AB, *ipsi* DE, & AC, *ipsi* DF; *sit autem & basis* BC, *basi* EF, *æqualis. Dico angulum* A, *æqualem esse angulo* D, *quorum videlicet uterque dictis lateribus continetur. Nam si mente intelligatur basis* BC, *superponi basi* EF, a *neutra excedet alteram, sed punctum* B, *congruet puncto* E, & *punctum* C, *puncto* F, *cum hæ bases ponantur æquales inter se.*

a 8. pron.



Deinde si triangulum ABC, *cogitetur cadere super triangulum* DEF, *cadet punctum* A, *aut in ipsum punctum* D, *aut alio. Si punctum* A, *in ipsum punctum* D, *cadat, congruent sibi mutuò triangulorum latera, cum ponantur æqualia; Ac propterea* b *angulus* A, *æqualis erit angulo* D, *cum neuter alterum excedat. Quod si punctum A, alio dicatur cadere, ut ad* G, *quomodocunque id contingat, hoc est, sive in latus* ED, *sive intra triangulum* EDF, *sive extra, ut in figuris apparet; erit perpetuò* EG, (*quæ eadem est, quæ* BA,) *æqualis ipsi* ED; & FG, (*quæ eadem est, quæ* CA) *æqualis ipsi* FD, *propterea quod latera unius trianguli æqualia ponuntur lateribus alterius. Hoc autem fieri non posse, jam dudum* c *demonstratum est, cum tam rectæ* EG, ED, *terminum eundem* E, *quàm rectæ* FG, FD, *eundè limitem* F, *possideant. Non igitur punctum* A, *cadet alio quam in punctum* D: *ac propterea angulus* A, *angulo* D, *æqualis erit. Quare si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum.*

b 8. pron.

c 7. primi.

SCHOLIVM.

Vt vides, hæc propositio convertit primam partem propositionis quartæ. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, collecta fuit basium æqualitas; ita hic ex æqualitate basium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateri-

lateribus æqualibus comprehenduntur. Possumus eodem modo ex prima & tertia parte conclusionis quartæ propositionis inferre totum antecedens ejusdem, ita ut theorema proponatur in hanc formam.

Si duo triangula bases habuerint æquales, & angulos super bases constitutos æquales, utrumque utrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, utrumq; utrique, quæ videlicet æqualibus angulis subtenduntur, angulosque reliquos hisce lateribus inclusos æquales.

Sit enim basis BC, æqualis basi EF, & angulus C, angulo E, angulusque C, angulo DFE. Dico latus quoque AB, lateri DE, & latus AC, lateri DF; æquale esse, angulumque A, angulo D. Nam si basis basi superponatur, a congruent sibi mutuò extrema earum, nec non & linea angulorum æqualium. Quare omnia sibi congruent, propterea; omnia inter se æqualia erunt. Verum hoc idem theorema à nobis propositum, quod quidem magis propriè convertere videtur quartam propositionem, quam illud Euclidis, aliter demonstrabit Euclides in prima parte propositionis 26. ut eo loco monebimus.

a 8. *pron.*

COROLLARIVM.

Porrò ex antecedente hujus octavæ propositionis non solùm colligi potest, angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, verum etiam reliquos angulos, qui ad bases constituuntur, utrumque utriq;, ut angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F: imo totum triangulum toti triangulo, ut constat ex eadem superpositione unius trianguli super alterum. Nam sibi mutuò congruent & dicti anguli, & tota triangula, ut; erspicuum est. Quod etiam ex quarta propos. colligi potest, postquam demonstratum fuerit, angulos æqualibus comprehensos lateribus æquales esse. Inde enim fiet, cum latera quoque sint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula esse æqualia, ut in propos. 4. demonstratum est.

EX PROCLO.

Philonis familiares hoc idem theorema octavum ostendunt demonstratione affirmativa, hac ratione. Posito enim eodem antecedente, superponi intelligatur basis BC, basi EF, ita ut triangulum ABC, cadat in diversas partes, & non super triangulum DEF, quale est triangulum AEF. Aut igitur duo latera, nempe DF, FA, constituunt unam lineam rectã, quod quidem continget, si duo anguli C, & F, recti extiterint, aut nõ. Si constituant unam lineam rectã, veluti DA, ita propositũ cõcludetur. Quoniã in triangulo AED, duo latera AE, DE, ponuntur æqualia (est, enim nunc AE recta eadẽ, quæ AB,

a 5. primi. quæ per hypotheſin rectæ DE, æqualis eſt) a erunt anguli A, & D, ſuper baſin AD, æquales, quod erat oſtendendum. Si verò neque DE, FA, neque DE, EA, lineam rectam conficiat, ducatur ex D, ad A, linea recta DA, quæ vel cadet intra triangula, vel extra. Cadat primum intra, quod quidem accidet, quando anguli ad E, & F, ſunt acuti. Quoniam igitur in triangulo AED, duo latera AE, DE, æqua-

b 5. primi. lia ponuntur, b erunt duo anguli EAD, DDA, æquales ad baſin DA. Eadem ratione, cum duo latera AF, DF, æ-

c 2. pron. qualia ſint per hypotheſin, erunt duo anguli EAD, FDA, ſuper baſin DA, æquales. Si igitur hi æquales illis æqualibus addantur, c fient toti anguli EAF, EDF, æquales. Quod erat oſtendendum. Cadat deinde recta DA, extra triangula, quod demum fiet, quando anguli ad F, fuerint obtuſi. Quoniam igitur in

d 5. primi. triangulo AED, duo latera AE, DE, ponuntur æqualia, d erunt anguli EAD, EDA, æquales ſuper baſin DA. Eadem ratione, cum duo latera AF, DF, in triangulo AFD, ſint

e 3. pron. per hypotheſin æqualia, erunt anguli FAD, FDA, ſuper baſin DA, æquales. His ergo à prioribus ablatis, e remanebunt anguli EAF, EDF, æquales; Quod demonſtrandum ponebatur.

PROBL. 4. PROPOS. 9.

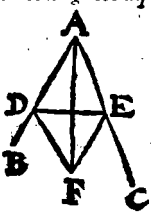
IX.

Datum angulum rectilineum bifariam ſecare.

Sit dividendus rectilineus angulus BAC, *bifariam, hoc eſt, in duos angulos æquales. In recta* AB, *ſumatur quodcunque punctum*

f 3. primi. D, & *recta* AD, f *ſecetur ex* AC, *recta* AE, *æqualis, ducaturque recta* DE. *Deinde ſuper* DE,

g 1. primi. g *conſtituatur triangulum æquilaterum* DFE, & *ducatur recta* AF, *dividens angulum* BAC, *in angulos* BAF, CAF. *Dico hos angulos inter ſe eſſe æquales. Cum enim latera* DA, AF, *trianguli* DAF, *æqualia ſint lateribus* EA, AF, *trianguli* EAF, *utrumque utrique, quod* DA, *ipſi* EA, *per conſtructionem, ſit æquale,* & AF, *commune: Sit autem & baſis* DF, *baſi* EF, *æqualis, propterea quod triangulum* DFE, *conſtructum eſt æquilaterum:* h *Erit angulus* DAE, *angulo*



h 8. primi. EAF, *æqualis, ideoque angulus* BAC, *diviſum bifariam; quod erat faciendum.*

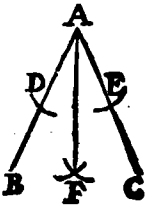
SCHOLIVM.

Quod ſi loco trianguli æquilateri conſtruamus triangulum Iſoſce-

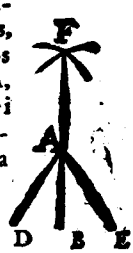
ſceles, nihilominus idem demonſtrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propoſitionibus, quæ ſequuntur, fieri poteſt.

PRAXIS.

Dicto citius angulus quilibet rectilineus, ut BAC, bifariam ſecabitur, hoc modo. Ex centro A, circino aliquo abſcindantur rectæ æquales AD, AE, cujuſcunque magnitudinis. Et circino non variato (poſſes tamē ipſum variare, ſi velles) ex centris D, & E, deſcribantur duo arcus ſecantes ſeſe in F. Recta igitur ducta AF, ſecabit angulum BAC, bifariam. Si enim ducerentur rectæ DF, EF, eſſent hæ æquales, nempe ſemidiametri circulorum æqualium. Vnde ut prius demonſtrabitur, angulum DAF, æqualem eſſe angulo EAF. Non deſcripſimus autem dictas lineas, ut nuda praxis haberetur. Id quod in aliis quoque praxibus, quoad ejus fieri poterit, obſervabimus, ne linearum multitudo tenebras nobis offundat, pariatque confuſionem.

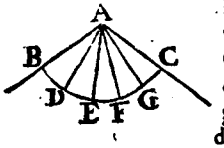


Quod ſi quando angulus rectilineus breviſſimis lineis contentis, & in extremo alicujus plani poſitus, dividendus ſit bifariam, deſcribemus ex D, & E, duos arcus ſeſe mutuò interſecantes in F, ſupra angulum A, quia infrà puncta D, & E, ſpatium deeſt, in quo deſcribi poſſint. Recta enim ex F, per A, uſque ad B, ejecta ſecabit angulum A, bifariam, ut prius, ut in appoſita figura apparet.



SCHOLIVM.

Hinc apertè colligitur, angulum rectilineum quemvis dividi poſſe etiam in 4. angulos æquales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, ſemper procedendo per augmentum duplex. Nam poſtquam angulus quilibet rectilineus in duos æquales angulos fuerit diviſus, ſi horum uterq; iterū bifariam ſecetur, habebimus 4. angulos æquales: Quod ſi ſinguli rurſus dividantur bifariā, obtinebimus 8 angulos æquales, & ſic deinceps; Non docuit autem Euclides uſquam, quanam ratione angulus rectilineus in quotvis partes æquales poſſit dividi, quia id à nemine uſq; ad illum diem fuerat demonſtratum. Ex Pappo tamē Alexandrino nos id docebimus, beneficio cujuſdam lineæ curvę, vel inflexæ, ad finem lib. 6. Interim verò, ſi quis angulū rectilineum quemcunq; propoſitum in quotvis partes æquales dividere deſideret, rudi, ut dicitur, Minerva, uti eum neceſſe erit circino, ut quaſi attentando, & ſępius repetendo praxim ipſam ad finē deſideratū perveniat: hac nimirū ratione. Sit angulus rectilineus BAC, dividendus in 5. angulos æquales. Ex A, centro deſcri-



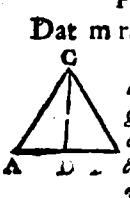
batur arcus circuli BC, ad quodcunque intervallum, secans rectas AB, AC, in B, & C. Deinde hic arcus beneficio circini ejus crura modo dilatãdo magis, modo restringendo, donec debitã habeant distantiam) dividatur in tot partes æquales, in quot angulus propositus est dividendus, ut in exemplo proposito in quinq; partes in punctis D, E, F, G. Si numq; ad hæc puncta ex A, rectę ducãtur lineæ, divisus erit angulus BAC, in quinq; æquales angulos. Cum enim circino sumpta sint æqualia intervalla BD, DE, &c. si ducantur rectæ BD, DE, &c. erunt hæ omnes inter se æquales. Quare erunt duo latera AB, AD, trianguli BAD, *a* æqualia duobus lateribus EA, AD, trianguli EAD, utrumq; utrique, cum omnia ex centro egrediantur ad circumferentiam usq;. Basis autem BD, basi quoq; DE, ut dictum fuit æqualis est: *b* Angulus igitur BAD, angulo EAD, æqualis existet: Eademq; ratione demonstrabitur, angulum EAD, angulo EAF, æqualem esse, & sic de cæteris. Brevius autem colligetur, omnes angulos ad A, esse inter se æquales, ex 27 propos. tertii lib propterea quod circumferentiæ BD, DE, &c. acceptæ sunt omnes æquales inter sese. Nemo verò miretur, quod praxes exhibeamus interdum, quarum demonstrationes ex sequentibus propositionibus pendent. Hoc enim, ut supra ad defin. 10. diximus, eo consilio facimus, ut quoad ejus fieri potest, singula propriis in locis tractentur, divisio nimirum anguli rectilinei cujusvis in quotlibet partes æquales eo in loco, in quo Euclides docet divisionem ejusdem anguli in duas partes æquales. Et divisio lineæ rectæ in quotvis partes æquales, ubi eandem dividit Euclides bifariam, & ita de singulis. Neque enim ad praxes hujusmodi requiruntur semper sequentes demonstrationes, sed solum, ut probetur rectè esse per ipsas effectum, quod imperabatur. Quamobrem is, qui non contentus nuda praxi demonstrationẽ requirit, poterit regredi ad praxin quamlibet, postquam demonstrationes ad eam necessarias diligenter perceperit. Nam semper propositiones illas, quę ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonstrationibus nostrarũ praxiũ: quemadmodum & in proxima praxi citavimus propositionem 27. tertii lib.

a 15. *def.*

b 8. *primi.*

PROBL. 5. PROPOS. 10.

x. Datam rectam lineam finitam bifariam secare.



c 1. *primi.*

d 9. *primi.*

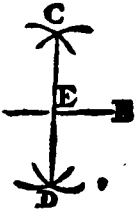
Sit recta finita AB, *dividenda bifariam, id est, in duas partes æquales.* c *Describatur super* AB, *triangulum æquilaterum* ABC, *cujus angulus* C, *per rectam* CD, d *dividatur bifariam, rectaque* CD, *recta* AB *secet in* D. *Dico rectam* AB, *bifariam esse sectam in* D. *Quoniam duo latera* AC, CD, *trianguli*

ACD,

*AC*D, *æqualia sunt duobus lateribus* BC, CD, *trianguli* BCD, *utrumque utrique, nempe AC, ipsi* BC, *cum sint ambo latera trianguli æquilateri, &* CD, *est commune; Est autem & angulus* ACD, *angulo* BCD, *æqualis per constructionem*: a *Erit basis AD, basi* BD, *æqualis.* D*atam ergò rectam* AB, *bifariam secuimus in* D, *quod facere oportebat.* a 4. primi.

PRAXIS.

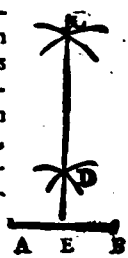
Ex centro A, ad quodvis intervallum, quod tamen dimidium lineæ *AB*, excedat, describantur duo arcus, unius supernè, alter infernè; Et ex centro B, ad idem intervallum omninò alii duo arcus delineentur, qui priores secent in *C*, & D. Recta enim ducta *CD*, secabit rectam *AB*, in E, bifariam. Si enim ex *A*, & B, ad C, & *D*, ducantur quatuor rectæ, erunt hæ omnes inter se æquales, cum ex centris ad circumferentias æqualiū circulorum cadant; Nam arcus circulorum descripti sunt eodem intervallo Quoniam igitur latera *AB*, CD, æqualia sunt lateribus BC, *CD*, utrumq; utriq;, & basis *AD*, basi BD, *b* erit angulus *ACD*, angulo BCD, æqualis. Rursus quia latera *AC*, CE, æqualia sunt lateribus BC, CE, utrumque utrique, & angulus *ACE*, angulo BCE, ut ostensum fuit; *c* erit basis *AE*, basi BE, æqualis.



b 8. primi.

Iam verò si linea bifariam dividenda posita sit in extremo plani cujuspiam, ita ut infra ipsam locus non sit, in quo commodè duo arcus sese intersecantes possint describi; descriptis supra eam duobus arcubus sese intersecantibus in C, describemus ad easdem partes alios duos arcus sese intersecantes mutuò in D, sive hoc fiat infra punctum C, ut in apposita figura, sive supra C. Nam recta per *C*, D, educta secabit rectam *AB*. bifariam in E.

c 4. primi



SCHOLIVM.

Perspicuum est, eodem modo dividi posse eandem lineam rectam, *AB*, in 4. partes æquales, & in 8. in 16. in 32. &c. sicuti in propositione præcedenti diximus de divisione trianguli rectilinei. Qua verò ratione quævis recta linea proposita dividenda sit in quotcunq; partes æquales, uberrimè trademus ad propos. 40. hujus lib. Idemq; longè facilius postea efficiemus ad propos. 10. lib. 6. ubi varias, & nō injucundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur esse Proprius huic rei locus, cum hujusmodi praxes ferè omnes per linearū proportiones facilius demōstrentur. Neq; verò unquam divi-

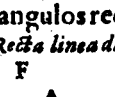
sione lineæ in plures, quam in duas partes æquales, ad eum locum usque indigebimus.

XI. PROBL. 6. PROPOS. 11.

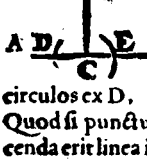
Data recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

Recta linea data sit AB; *& in ea punctum* C, *à quo jubemur erigere super* AB, *lineam ad angulos rectos, seu perpendicularem. A puncto* C, *sumatur recta* CD, *a cui æqualis auferatur* CE. *Deinde super* DE, *b constituatur triangulum æquilaterum* DEF, *atque ex* F, *ad* C, *ducatur recta* FC, *quam dico esse perpendicularem ad* AB. *Quoniam latera* DC, CE, *trianguli* DCF, *æqualia sunt lateribus* EC, CF, *trianguli* ECF, *utrumque utrique, nempe* DC, *ipsi* EC, *per constructionem, &* CF, *commune; Est verò & basis* DF, *basi* EF, *æqualis, ob triangulum æquilaterum:* c *Erunt anguli ad* C, *contenti dictis lateribus, æquales.* d *Quare dicetur uterque rectus, atque adeò* FC, *recta, ad* AB, *perpendicularis. Data igitur recta linea à puncto in ea dato, &c. Quod faciendum erat.*

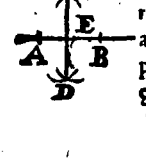
a 3. *primi.* b 1. *primi.* c. 8. *primi.* d 10. *defin.*



PRAXIS.



Ex puncto C, abscindantur utrinque lineæ æquales CD, CE, & ex D, & E; describantur duo arcus secantes sese in F. Recta namque ducta FC, erit perpendicularis. Demonstratio eadem est, quæ Euclidis, si modo ducantur rectæ DF, EF, quæ æquales erunt, propter æquales circulos ex D, & E, descriptos, qui se intersecant in puncto F. Quod si punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum continuum, ad partes puncti dati, ut ex illo erigatur secundum praxim datam linea perpendicularis. Vt si linea data fuerit AC, & punctum datum C, extremum; protrahenda erit AC, in B, & sumendæ æquales CD, CE, &c. Si verò ad aliquam lineam constituenda sit linea perpendicularis, nõ quidem in puncto assignato, sed utcunque, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis A, & B, quibuscunque lineæ propositæ describantur tàm supernè, quàm infernè duo arcus sese intersecantes in C, & D. Nam recta ducta CD, erit perpendicularis ad AB, hoc est, faciet duos angulos ad E, rectos, seu æquales. Quod non aliter probabis, quam suprà praxim, quod lineam in duas æquales divisimus partes, demonstravimus. Nam per

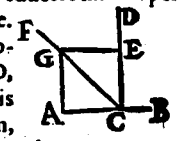


4. pro-

4. propos. erunt anguli ad E, æquales, quippe qui super æquales bases AE, BE, consistant, opponanturq; æqualibus lateribus AC, BC, quæ ex C, ad puncta A, & B, ducerentur.

EX PROCLO.

Si punctum in linea datum fuerit extremum, & linea commodè produci nequiverit, poterimus ex puncto dato educere lineam perpendicularem, linea non producta, hac ratione. Sit recta AB, & punctum A. Ex C, puncto quolibet intra lineam educatur perpendicularis CD, ut docuit Euclides; *a* & abscindatur *CE*, æqualis ipsi AC: Deinde *b* dividatur angulus C, bifariam, ducta recta CF. Et ex E, rursus ut docuit Euclides, educatur EG, perpendicularis ad *CD*, secans rectam CF, in *G*. Ducta enim recta GA, perpendicularis erit ad AB. Quoniam cum latera AC, CG, triangula ACG, æqualia sint lateribus EC, CG, trianguli ECG, utrumque utrique, & anguli hisce lateribus contenti æquales quoque, per constructionem: *c* Erunt anguli A, & E, oppositi communi lateri CG, æquales; Sed E, est rectus per constructionem; igitur & A, rectus erit, *d* ideoque AC, & AB, perpendicularis.



a 3. *primi.*
b 9. *primi.*
c 4. *primi.*
d 10. *def.*

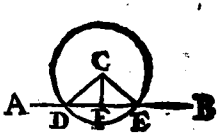
SCHOLIVM.

Brevius lineam perpendicularem erigemus ex puncto dato, sive extremum illud sit, sive non, hoc modo. Sit data linea AB, punctumque in ea A. Ex centro C, extra lineam assumpto, ubi libuerit (dummodo recta AB, producta cum ipso non conveniat) intervallo verò accepto usque ad A, describatur arcus circuli secans AB, in *D*. Et ex *D*, per C, recta ducatur secans arcum in E. Rectæ enim ducta EA, erit perpendicularis ad AB, Nam angulus A, est rectus, cum sit in semicirculo *DAE*, ut ostendemus propositione 31. libri 3.

PROBL. 7. PROPOS. 12. XII.

Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

Sit recta AB, *interminata quantitatis, & extra ipsam punctum* C, *à quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectam* AB. *Centro* C, *intervallo verò quolibet circulus describatur secans* AB, *in* D, *&* E. (*quoniam intervallum assumptum tantum esse*



a10. primi. *debet, ut transcendat rectam* AB; *aliàs enim non secaret*)a *Divisa autem recta* DE, *bifariam in* F, *ducatur recta* CF, *quam dico perpendicularem esse ad* AB. *Si enim ducantur* CD, CE, *erunt duo latera* DF, FC, *trianguli* DFC, *aqualia duobus lateribus* EF, FC, *trianguli* EFC, *utrumque utrique per constructionem; est autem & basis* CD, *basi* CE, *aqualis, cum hæ sint ex centro* C, *ad circumferentiam.*

b8. primi. *Quare* b *erit angulus* DFC, *angulo* EFC, *æqualis, & propterea uterque rectus. Ducta est igitur* CF, *perpendicularis, quod faciendum erat.*

SCHOLIVM.

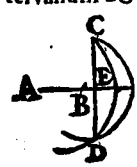
Probè appositi Euclides hanc particulam, *infinitam*. Si enim linea esset infinita, non posset semper à puncto dato extra ipsam perpendicularis ad eam deduci. Vt si linea finita esset BE, & punctum C, non posset ex C, describi circulus secans BE, in duobus punctis, quare neque ex C, perpendicularis duci ad BE. Hac igitur de causa vult Euclides, rectam datam esse infinitam, hoc est, non habere magnitudinem determinatam, ut saltem ad ipsam productam perpendicularis possit deduci. Ita enim fiet hic, si BE, producatur, donec circulus ex C, descriptus secet totam BA, productam in D, & E, &c.

PRAXIS.

Centro facto C, & intervallo quovis eodem, describantur duo arcus secantes rectam datam in *A*, & *B*. Deinde ex A, & B, eodemq; intervallo, vel alio, si placuerit, alii duo arcus describantur secantes se in D. Nam ducta recta CD, secans AB, in E, erit perpendicularis ad AB. Demonstratio hujus operationis non differt à demonstratione tradita in praxi propositionis.

c4. primi. 10. Nam anguli ad E, erunt recti, *c* nempe inter se æquales.

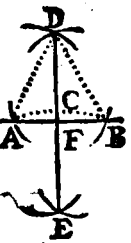
Idem efficiemus hoc modo. Ex quovis puncto A, in linea data, & intervallo quolibet usque ad C, assumpto, arcus circuli describatur: Deinde ex quolibet alio puncto B, intervalloq; usque ad idem C, alius arcus describatur priorem secans in C, & D; Eritque recta CD, secans AE, in E, perpendicularis ad AB. Demonstratio eadem est, quæ prior. Non est autem necesse, ut intervallum BC, æquale sit intervallo AC, ut in hac figura apparet.



Facilior tamen erit, & brevior operatio, si idem semper intervallum accipiatur.

Quod si punctum C, fuerit minus vicinum rectæ AB, ita agendum erit. Centro C, ad quodvis intervallum secetur recta AB, in duobus punctis A, B, ex quibus ad majus intervallum quodcunque, quam AG, vel AC, bini arcus tam

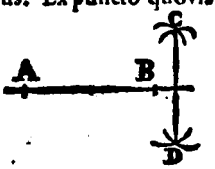
tam ſupra, quam infra deſcribantur, ſe interſecantes in D, E. Nam ducta recta DCF, quæ producta neceſſariò per punctum E, tranſibit, perpendicularis erit ad rectam AB, in F. Quod ita demonſtrabimus, ductis rectis AD, BD, AC, BC. Quoniam duo latera DA, DC, trianguli ACD, duobus lateribus DB, DC, trianguli BCD, æqualia ſunt, nec non & baſes AC, BC, æquales ſunt, *a* erunt anguli ad D, æquales. Quare cùm duo latera DA, DF, trianguli ADF, duobus lateribus DB, DF, trianguli DBF, æqualia ſint, continentque angulos ad D, æquales, ut oſtendimus: *b* erunt anguli ad F, æquales ac proinde recti, &c.



a 8. *primi.*

b 4. *primi.*

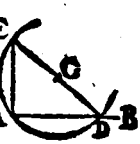
Iam verò ſi punctum datum ſit juxta extremum plani cujuſpiam, ita ut linea data non poſſit produci, ita agemus. Ex puncto quovis B, quod è regione dati puncti C, videatur quaſi eſſe poſitum, hoc eſt, ferè in extremitate lineæ datæ AB, deſcribantur duo arcus ſupra, & infra lineam AB, ad intervallum BC. Deinde ex puncto A, aliquantum remoto à puncto accepto B. (Quo autem magis diſtabunt inter ſe puncta A, & E, eo commodius puncta interſectionum arcuum cognoſcentur) alii duo arcus ad intervallum AC, deſcribantur, ſecantes priores in C, & D. Nam recta CD, perpendicularis erit ad datam rectam AB.



Si autem puncto non propè extremũ plani, in quo linea eſt, dato, linea ſit in extremo plani, ut duo arcus infra lineam commodè ſe interſecare non poſſint, ſive punctum datũ C, ſit propinquum lineæ AB, ſive non, abſolvemus problema hoc modo. Ad intervallũ AC, ubicunq; punctũ A, ſumatur, deſcribatur ex C, arcus ſecans rectam AB, in D. Atq; ex A, D, duo arcus deſcribantur verſus punctũ C, ſeſe interſecantes in E. Recta namq; ex E, per C, ducta ſecans AB, in F, perpendicularis erit ad AB, ut ſupra demonſtratũ eſt, quando punctũ C, erat propè lineam AB.

Quo verò modo nos gerere debeamus, quando & punctum datum eſt juxta unum extremum plani, & linea data propè alterum extremum, ita ut neque lineam producere liceat, neque duo arcus commodè ſe interſecare poſſint in D, infra datam rectam AB, docebimus in ſcholio propoſitionis 31. hujus lib.

Verum hoc etiam efficiemus hoc modo. In figura ſcholii prop. 11. ſit ad rectam AB, ex puncto E, deducenda perpendicularis ad extremũ quodlibet lineæ. Ducta utcunque recta ED, *c* ſecetur bifariam in C: & Centro C, per E, arcus circuli



c 11. *primi.*

deſcri-

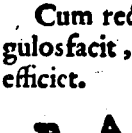
describatur secans rectam datam in *A*. Quod si non secet, producenda erit donec ab arcu secetur. Recta enim *EA*, erit ad *AB*, perpendicularis: *a* cum angulus *A*, sit in semicirculo rectus.

a 31. tertij.

xiii.

THEOR. 6. PROPOS. 13.

Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



Recta linea AB, *consistens super rectam* CD, *faciat duos angulos* ABC, ABD. *Si igitur* AB, *fuerit perpendicularis ad* CD, b *erunt dicti anguli duo recti. Si verò* AB, *non fuerit perpendicularis, faciet unum quidem angulum obtusum, alterum verò acutum. Dico igitur ipsos duobus esse rectis æquales.* c *Educatur enim* BE, *ex* B, *perpendicularis ad* CD, *ut sint duo anguli* EBC, EBD, *recti. Quoniam verò angulus rectus* EBD, d *æqualis est duobus angulis* DB*A*, ABE: e *erunt appositio communi angulo recto* EBC, *duo recti* EBD, EBC, *tribus angulis* DBA, ABE, EBC, *æquales. Rursus quia* f *angulus* ABC, *duobus angulis* ABE, EBC, *æqualis est:* g *erunt appositio communi angulo* ABD, *duo anguli* ABC, ABD, *tribus angulis* DBA, ABE, EBC, *æquales. Sed eisdem his tribus ostendimus, æquales etiam esse duos rectos* EBD, EBC: *quæ autem eidem æqualia,* h *inter se sunt æqualia. Duo igitur anguli* ABC, ABD, *æquales sunt duobus rectis* EBD, EBC. *Cum ergò recta linea super rectam consistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.*

b 10. def.

c 11. primi.

d 19. pronun.

e 2. pron.

f 19. pronun.

g 2. pron.

h 1. pron.

SCHOLIVM.

Videtur hæc propositio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus *ABC*, superat rectum angulum EBC, eo reliquus angulus ABD, superatur ab angulo recto EBD. Nam sicut ibi excessus est anguli *ABE*, ita hic defectus est idem angulus ABE. Quocirca anguli ABC, *ABD*, duobus rectis æquales esse convincuntur: siquidem tantum unus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

THEOR. 7. PROPOS. 14.

xiv.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad ejus punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

Ad punctum C, *lineæ rectæ* AB, *in diversas partes ductæ sint duæ rectæ* CD, CE, *faciantes cum* AB, *duos angulos* ACD, ACE,

ACE, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipsas CD, CE, *inter se esse constitutas in directũ, ita ut* DCE, *sit una linea recta. Si enim non est recta* DCE, *producta* DC, *ad partes* C, *in directum, & continuum cadet, aut supra* CE, *ut sit recta* DCF, *aut infrà* CE, *ut sit recta* DCG. *Si cadit suprà, cum* AC, *consistat super rectam* DCF, *a fient duo anguli* ACD, ACF, *duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo anguli* ACD, ACE, *æquales duobus rectis;* a 13. *primi.* b *& omnes recti sunt inter se æquales. Quare duo anguli* ACD, ACF, *duobus angulis* ACD, ACE, *erunt æquales. Ablato igitur communi angulo* ACD, *c remanebunt anguli* ACF, ACE, *inter se æquales, pars & totum, quod est absurdum. Non igitur recta* DC. c 3. *pron.* *producta cadet suprà* CE: *Sed neque infrà cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli* ACE ACG, *æquales. Igitur* DC, *producta, eadem efficietur, quæ* CE: *propterea, si ad aliquam rectam lineam, atque ad ejus punctum, &c. Quod demonstrandum erat.*

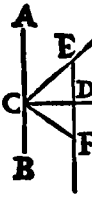
b 12. *pron.*

SCHOLIVM.

Est hæc propositio præcedentis conversa. In ea enim probatum fuit, si DCE, sit recta, angulos ACD, ACE, duobus esse rectis æquales. In hac verò demonstratum est, si dicti anguli sint duobus rectis æquales, rectas DC, EC, esse unam lineam rectam.

EX PROCLO.

Rectè Euclides addidit in propositione hac (& non ad easdem partes.) Quoniam, ut ait Porphyrius, fieri potest, ut ad punctum aliquod lineæ datæ ad easdem partes duæ lineæ ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis æquales, quæ tamen non constituant unam lineam, eo quod non ad diversas sint ductæ partes. Sit enim punctum C, in linea AB, datum. Ducatur CD, *d* perpendicularis ad AB, *e* dividaturq; rectus angulus ACD, bifariam per rectam CE. Deinde ex D, quolibet puncto rectæ CD, *f* ducatur DE, perpendicularis ad CD, secans rectam CD, in E. Producta autem ED ad partes D, *g* sumatur DF, æqualis rectæ DE, & ducatur recta FC. Quoniam igitur latera ED, DC, trianguli EDC, æqualia sunt lateribus FD, DC, trianguli EDC, utrumque utrique & anguli D, ipsis contenti æquales, nempe recti: *h* erit basis EC, basi CF, æqualis. & angulus ECD, angulo FCD. Sed angulus ECD, dimidium est recti. (Est enim rectus ACD, divisus bifariam. Igitur & FCD, dimidium erit recti. Quare CF, cum AC, faciet angulum ACF, constantem ex recto, & dimidio recti: Facit autem CE, cum eadem AC, angulum ACE, dimidium etiam recti. Duo igitur anguli ACF, ACE, quos ad easdem partes faciunt rectæ CF, CE, cum AB: æquales sunt duobus rectis: Et tamen



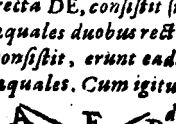
d 11. *primi.*
e 9. *primi.*
f 11. *primi.*
g 3. *primi.*
h 4. *primi.*

men CF, CE, non sunt una linea recta, propterea quod non sunt ductæ ad diversas partes, sed ad eadem.

THEOR. 8. PROPOS. 15.

xv. Si duæ rectæ lineæ se mutuò secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficient.

Secent se duæ rectæ AB, CD, *in punctο* E, *utcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem* E, *inter se esse æquales, angulum videlicet* AED, *angulo* BEC, *& angulum* AEC, *angulo* BED. *Quoniam recta* DE, *consistit super rectam* AB, a *erunt duo anguli* AED, DEB, a 13. *primi.* *æquales duobus rectis. Rursus quia recta* BE, *super rectam* CD, *consistit, erunt eadem ratione duo anguli* CEB, BED, *duobus rectis* b 12. *pron.* *æquales. Cum igitur* b *omnes recti anguli inter se sint æquales; erunt*



duo anguli AED, DEB, *duobus angulis* DEB, BEC, *æquales. Dempto igitur communi angulo* c 3. *pron.* DEB, c *remanebit angulus* AED, *angulo* BEC, *æqualis. Eadem ratione confirmabitur, angulos* AEC, BED, *inter se æquales esse. Nam duo anguli* AEC, CEB, d *qui duobus sunt rectis æquales, æquales erunt duobus quoque angu-* d 13. *primi.* *lis* DEB, BEC, *qui duobus rectis sunt æquales. Ablato igitur angulo communi* BEC, e *remanebunt anguli* AEC, BED, *æquales inter* e 3. *pron.* *se. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuò secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.*

COROLLARIVM I.

Euclides colligit ex demonstratione huius theorematis (ex sententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium non habent) duas lineas rectas se mutuò secantes efficere ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos AED, DEB, quam duos AEC, CEB, duobus esse rectis æquales, per 13. propos. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales existunt.

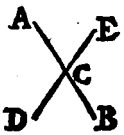
COROLLARIVM II.

Eadem ratione colligemus, omnes angulos circa unum & idem punctum constitutos quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. Si enim ex E, aliæ lineæ quotlibet educantur, dividentur solummodo illi quatuor anguli ad E, constituti in plurimas partes, f quæ f 15. *pron.* omnes simul sumptæ totis suis adæquantur, Cum ergò illi quatuor anguli æquales sint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoque omnes alii simul sumpti quatuor tantùm rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctũ aliquod in plano circumstans, æquivalere quatuor rectis angulis, ut multi auctores asserunt: quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales: Simili modo comitat, quotlibet lineas rectas se invicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales quatuor rectis.

EX

EX PROCLO.

Si ad aliquam rectam lineam, ad ejuſque ſignum, duę rectę lineę non ad eaſdem partes ſumptę, angulos ad verticem æquales fecerint: ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi invicem erunt.



Ex puncto C, rectæ AB, in diverſas partes egrediantur duæ rectæ CD, CE, facientes angulos ACE, BCD, inter ſe æquales: Vel etiam duos ACD, BCE. Dico duas CD, CE, efficere unam lineam rectam. Quoniam enim angulus ACE, æqualis eſt angulo BCD: addito communi angulo BCE, *a* erunt duo anguli ACE, ECB, duobus angulis DCB, BCE, æquales: Sed *b* anguli ACE, ECB, ſunt æquales duobus rectis. Igitur & duo DCB, BCE, duobus erunt rectis æquales. Quamobrem CD, CE, *c* erunt linea una recta. Hoc autem, ut vides, converſum eſt propoſitionis decimæ quintæ.

a 3. *pron.*
b 13. *primi.*
c 14. *primi.*

EX PELETARIO.

Si quatuor rectæ lineæ ab uno puncto exeuntes binos angulos oppoſitos inter ſe æquales fecerint, erunt quęlibet duę lineę adverſæ in rectum ſibi, & continuum conjunctæ.

Ex puncto A, quatuor lineæ eductæ AB, AC, AD, AE, faciant duos angulos oppoſitos BAE, CAD, inter ſe æquales: Item duos BAC, DAE, inter ſe æquales. Dico tam BA, AD, facere unam lineam rectam, quam CA, AE. Quoniam æquales ſunt anguli BAE, CAD, ſi æqualibus illis addantur anguli BAC, DAE, *d* erunt duo anguli BAE, BAC, æquales duobus angulis CAD, DAE. Tàm ergò illi, quàm hi, dimidium ſunt quatuor angulorum circa punctum A, conſiſtentium: At hi quatuor æquales ſunt quatuor rectis, per 2. coroll. præcedentis propoſ. Igitur duo anguli BAE, BAC, æquales ſunt duobus rectis: *e* atque adeo CA, AE, unam efficient lineam rectam. Eodem pacto oſtendetur, duas BA, AD, unam rectam efficere lineam. Nam eadem ratione erunt duo anguli BAE, EAD, æquales duobus angulis DAC, CAB. Quare, ut prius, concludetur propoſitum. Peletarius autem demonſtrat hoc idem ratione ducente ad id, quod fieri nequit. Nos tamen demonſtrationem noſtram oſtenſivam ejus demonſtrationi jure optimo præpoſuimus.

d 2. *pron.*
e 14. *primi.*

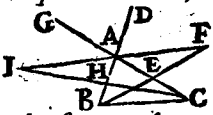
THEOR. 9. PROPOS. 16. XVI

Cujuſcunque trianguli uno latere producto, externus angulus utrolibet interno, & oppoſito, major eſt.

Trian-

Trianguli ABC, *latus* BA, *producatur ad* D. *Dico angulum externum* DAC, *majorem esse interno, & opposito* ACB, *itemque majorem interno, & opposito* ABC. *Dividatur* a *enim* AC, *bifariam* b *in* E; *& ex* B, *per* E, *extendatur recta* BEF, *ita ut* EF, b *abscissa sit aequalis rectae* EB; *ducaturque recta* FA. *Quoniam igitur latera* CE, EB, *trianguli* CEB, *aequalia sunt lateribus* AE, EF, *trianguli* AEF, *utrumque utrique, per constructionem; Sunt autem & anguli ad* E, *dictis lateribus comprehensi,* c *inter se aequales, cum sint circa verticem* E, *& oppositi:* d *Erit basis* CB, *aequalis basi* AF, *& angulus* ECB, *angulo* EAF; *Est autem angulus* DAC, *externus major angulo* EAF, *totum videlicet parte. Igitur & externus angulus* DAC, *major erit interno, & opposito angulo* ACB. *Quod si latus* CA, *producatur ad* G; *&* AB, *dividatur bifariam in* H; *extendaturque recta* CHI, *ut* HI, *aequalis sit rectae* HC, *& ducatur recta* IA: *demonstrabitur eadem prorsus ratione, angulum externum* GAB, *majorem esse interno angulo, & opposito* ABC; *Est autem* e *angulus* DAC, *angulo* GAB, *aequalis, cum lineae* BD, CG, *se mutuò secent in* A. *Igitur & angulus* DAC, *major erit interno & opposito angulo* ABC. *Est autem idem angulus* DAC, *major quoque ostensus angulo interno & opposito* ACB. *Cujuscunque ergò trianguli uno latere producto, &c. Quod demonstrandum erat.*

a 10. primi. b 3. primi.



c 15. primi. d 4. primi.

e 15. primi.

SCHOLIVM.

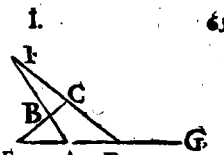
Non dixit Euclides, angulum externum DAC, majorem esse angulo BAC, interno, qui sibi est deinceps; sed solum magnitudine superare utrumlibet ACB, ABC, internorũ, sibiq; oppositorum: quoniam externus angulus æqualis potest esse angulo interno sibi deinceps, quando scilicet externus rectus est. Tunc enim necessario is, qui sibi est deinceps, rectus quoq; erit: Potest & esse minor, quando nimirum est acutus. Hoc enim posito, angulus illi deinceps obtusus erit. Solum ergo, quando obtusus erit externus, superabit internum sibi deinceps; Hic enim necessario acutus existet. Quæ omnia facilè colliguntur ex prop. 13. per quam angulus externus, & internus illi deinceps, æquales sunt duobus rectis.

Id verò, quod in scholio propos. 6. hujus libri nos demonstraturos recepimus, nimirum hanc propositionem non posse converti; cum & uno latere figuræ quadrilateræ producto, externus angulus quolibet interno, & opposito possit esse major; hac ratione absolvemus.

Sit figura quadrilatera ABCD, cujus angulus BAD, obtusus, & ABC, rectus constituatur, hac tamen lege, ut rectæ *AB*, *DC*, productæ ad partes B, & C, in puncto E, nec non & rectæ *DA*, CB, ad

partes

partes A & B, in puncto F, coeant. Quod quidem fiet, si constituatur triangulum *ADE*, obtusangulum, & producta *DA*, versus A, ducatur ex quovis puncto F, ad *AE*, perpendicularis *FB*, secans latus *DE*, in C. Dico, si F *AD*, produceatur ad G, angulum externum *CDG*, majorem esse quolibet trium internorum *BAD*, *ABC*, *BCD*, sibi oppositorum. Cum enim *ADE*, triangulum sit, *a* erit angulus externus *EDG*, major interno opposito *DAE*. Rursus cum DAB, obtusus major sit recto ABC, major quoq; multò erit EDG, ipso *ABC*. Postremò, quia & in triangulo CDF, *b* angulus externus CDG, major est interno, & opposito FCD; manifestum est, in quadrilatero *ABCD*, externũ angulum CDG, majorem esse internis, & oppositis BAD, ABC, BCD. Quamobrem propositio hæc 16. converti nequit, quippe cum ejus antecedens, & consequens non reciprocentur, ut demonstratũ est.

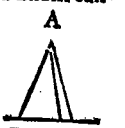


a 16. primi.

b 16. primi.

EX PROCLO.

Sequitur ex hac propositione, ab eodem puncto ad unam eandemq; lineam rectam non posse duci plures lineas rectas, quam duas inter se æquales. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad lineam BC, tres lineæ rectæ æquales *AB*, *AC*, AD. Quoniam igitur latera *AB*, *AC*, sunt æqualia, *c* erunt anguli *ACB*, & ABC, æquales super basin *BC*. Rursus quia latera *AB*, *AD*, sunt æqualia, *d* erunt anguli *ADB*, & *ABD*, super basin *BD*, æquales. Quare cum uterque angulus *ACD*, & *ADB*, æqualis sit angulo *ABC*, *e* erit angulus ADB, æqualis angulo *ACD*, externus interno opposito, quod est absurdum, cum per hanc 16. propos. externus interno major sit. Non ergò plures lineæ rectæ, quam duæ, inter se æquales, ex *A*, ad *BC*, possunt duci. Quod est propositum.



c 5. primi.

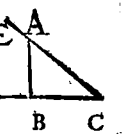
d 5. primi.

e 1. prop. nun.

PROBL. 10. PROPOS. 17.

Cujuscunque trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti. XVII.

Sit triangulum ABC; *Dico duos angulos* ABC, & ACB, *minores esse duobus rectis*; *Item duos* CBA, & CAB; *Itemque duos* BAC, & BCA. *Producantur enim duo quævis latera, nempe* CB, CA, *ad* D, & E. *Quoniam igitur f angulus* ABD, *externus major est interno & opposito angulo* ACB; *si addatur communis angulus* ABC, *g erunt duo anguli* ABD, ABC, *majores duobus Angulis* ABC, ACB: *h Sed* ABD, ABC, *æquales sunt duobus rectis. Igitur* ABC, ACB; *minores sunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli* CBA, & CAB, *minores duobus rectis. i Nam cum angulus externus* ABD, *major sit angulo* CAB, *i*



f 16. primi.

g 4. prop. nun.

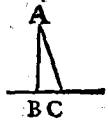
h 3. primi.

i 16. prim.

a 4. pra-nun. *interno, & oppoſito; a erunt, appoſito communi angulo ABC, duo anguli ABD, ABC, majores duobus angulis CAB, CBA. Cùm ergò*
b 13. primi. *b duo illi duobus rectis ſint æquales; erunt hi alii duo duobus rectis minores. Non ſecus oſtendemus, duos BAC, BCA, duobus eſſe*
c 16. primi. *rectis minores. Cùm enim angulus externus BAE, c major ſit interno & oppoſito angulo BCA; ſi apponatur communis angulus BAC,*
d 4. pron. *d erunt duo anguli BAE, BAC, duobus angulis BCA, BAC, majores: ac proinde cum illi duo e ſint duobus rectis æquales, erunt duo hi*
e 13. primi. *minores duobus rectis. Cujuſcunque igitur trianguli, &c. Quod erat demonſtrandum.*

EX PROCLO.

Hinc perſpicuum eſt, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non poſſe deduci plures lineas perpendiculares, quam unam. Si enim fieri poteſt, ducantur ex *A*, ad rectam *BC*, duæ perpendiculares *AB*, *AC*. Erunt igitur in triangulo ABC, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cum ſint duo recti, quod eſt abſurdum. *f* Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunq; oſtenſi minores duobus rectis. Non ergò plures perpendiculares, quam una ex A, ad BC, deduci poſſunt. Quod eſt propoſitum.



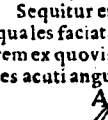
f 17. primi.

COROLLARIVM I.

Conſtat etiam ex his, In omni triangulo, cujus unus angulus fuerit rectus, vel obtuſus, reliquos eſſe acutos, ceu monuimus defin. 26. huius lib. Cum enim per hanc propoſ. duo quilibet anguli ſint duobus rectis minores, neceſſe eſt, ſi unus fuerit rectus, vel obtuſus, quemcunque reliquorum eſſe acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis majores eſſe fateamur.

COROLLARIVM II.

Sequitur etiam ex hac propoſ. ſi linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, unum acutum, & obtuſum alterum, lineam perpendicularem ex quovis eius puncto ad aliam illam rectã demiſſam cadere ad partes acuti anguli: Faciat enim recta AB, cum recta CD, angulos inæquales, nempe ABD. acutum, & ABC, obtuſum, demittaturque ex puncto A, quocunque ad CD, perpendicularis AD. Dico AD, cadere ad partes anguli acuti ABD. Nam ſi non cadit ad partes acuti anguli ABD, cadat ſi fieri poteſt, ad partes anguli obtuſi ABC. Igitur duo anguli ABC, ACB, obtuſus & rectus, in triangulo ABC, g maiores ſunt duobus rectis: g ſed & duobus rectis ſunt minores quod eſt abſurdum. Non ergò ex A, perpendicularis ad CD, deducta cadit ad partes anguli obtuſi. Quare ad partes acuti anguli cadet.



g 17. primi.

COROLLARIVM III.

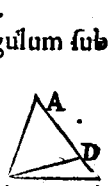
Pari ratione ſit ex hac propoſ. manifeſtum omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli Iſoſcelis ſupra baſin, eſſe acutos. Nam h cum & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in Iſoſcele ſupra baſim ſint inter ſe æquales; i ſintque ſimul tàm illi duo, quàm hi duobus

h 5. primi.
i 17. primi.

bus rectis minores erit quilibet illorum recto minor, hoc est, acutus. Si enim rectus foret, aut obtusus, essent ambo vel duobus rectis æquales, aut maiores.

THEOR. 11. PROPOS. 18. XVIII.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.



In triangulo ABC, sit latus AC, majus latere AB. Dico angulum ABC, subtensum à majori latere AC, majorem esse angulo ACB, qui à minori latere AB, subtenditur. Nam ex AC, a auferatur AD, æqualis ipsi AB, & ducatur recta BD. Quoniam igitur duo latera AB, AD, æqualia sunt per constructionem, b erunt anguli ABD, ADB, æquales: Est autem c angulus ADB, major angulo ACB. Igitur & angulus ABD, major erit angulo ACB. Quamobrem cum d angulus totus ABC, major adhuc sit angulo ABD; erit angulus ABC, multò major angulo ACB. Eadem ratione, si latus AC, majus ponatur latere BC, ostendens angulum ABC, majorem esse angulo BAC, si nimirum ex CA, abscindatur linea æqualis ipsi CB, &c. Quare omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit; Quod demonstrandum erat.

a 3. primi.
b 5. primi.
c 16. primi.
d 9. post.

COROLLARIVM.

Ex hoc sequitur, omnes tres angulos trianguli scaleni esse inæquales, ut monuimus defin. 15 huius lib. Sit enim triangulum scalenum ABC, cuius maximum quidem latus AC, minimum autem BC, & medium locum habens AB. Dico eiusdem omnes angulos inæquales esse. Cum enim latus AC, ponatur maius latere AB, erit per hanc propos. angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus AB, latere BC, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus verò A, & C, medium locum inter utrumque tenens.

THEOREMA 21. PROPOS. 19. XIX.

Omnis trianguli major angulus majori lateri subtenditur.

In triangulo ABC, angulus B, major sit angulo C. Dico latus AC, subtendens majorem angulum B, majus esse latere AB, quod angulum minorem C, subtendit. Si enim latus AC, majus non est latere AB, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur AC, æquale esse ipsi AB, c erit angulus B, æqualis angulo C; Est autem & major per hypothesin, quod est absurdum. Si verò AC, minus esse dicatur latere AB, erit angulus B, subtensus à minore latere AC, minor angulo C, subtenso à majore latere AB: Ponitur autem major, quod magis est absurdum. Cum igitur AC, latus

c 5. primi.

neque æquale sit lateri AB, *neque minus eo, erit majus. Eadem ratione probabitur, latus* AC, *majus esse latere* BC, *si angulus* B, *major esse concedatur angulo* A. *Omnis ergò trianguli major angulus majori lateri subtenditur; Quod demonstrandum proponebatur.*

COROLLARIVM.

Sequitur ex hac propos. omnium rectarum ex quovis puncto ad rectam quamcunq; ductarum, eam, quæ perpendicularis est, esse minimam. Ducantur enim ex puncto A, ad rectam BC, quotcunque lineæ AD, AE, AF, & aliæ, quarum AD, sola sit perpendicularis ad BC, & nulla alia, cum ex eodem puncto ad eandem rectam sola una perpendicularis duci possit, ut ex Proclo ad propos. 16. demonstravimus. Dico omnium minimam esse AD. Nam in triangulo AED, cum duo anguli ADE, AED.

a 17. *primi.* sint duobus rectis minores, ponaturque ADE, rectus: erit AED, acutus. Quare *b* major erit latus AE, latere AD. Eodem modo ostendemus, omnes alias rectas majores esse recta AD: ac proinde perpendicularis AD, omnium erit minima.

b 19. *primi.*

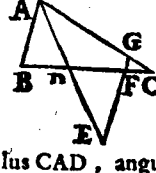
EX PROCLO.

Possumus hoc idem theorema ostendere affirmativa demonstratione, sine adminiculo præcedentis, si tamen prius demonstretur hoc sequens theorema.

Si trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansque angulum recta linea ad basin ducta in partes inæquales ipsam dividat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & majus quidem illud, quod cum majori basis segmento coincidit, minus verò quod cum minori.

Trianguli *ABC*, angulus *BAC*, dividatur bifariam per rectam AD, quæ secet basin *BC*, in partes inæquales, majusque segmentum sit *DC*. Dico latus *AC*, majus esse latere *AB*. Producatur enim *AD*, ad E, *c* ut sit *DE*, æqualis ipsi *AD*. Deinde ex majori

c 3. *primi.* segmento DC, auferatur recta DF, æqualis minori segmento *DB*, & per F, ex E, extendatur rectæ *EFG*. Quoniam igitur latera *AD*, *DB*, trianguli *ADB*, æqualia sunt lateribus CD, DF, trianguli EDF, utrumque utrique, per constructionem; sunt autem & *d* anguli



d 15. *primi.* ADB, EDF, dictis lateribus contenti æquales: *e* Erunt bases *AB*, & EF, æquales, & angulo *BAD*, angulus *EFD*, æqualis: Est verò & angulus CAD, angulo *BAD*, æqualis, per hypothesin: Igitur *f* anguli *CAD*, GEA, trianguli AGE, æquales erunt, *g* ideoque latera AG, EG, æqualia erunt. Est autem recta *AC*, major quàm *AG*: quare & AC, major erit, quàm EG. Et quia EG, major est, quàm

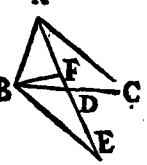
e 4. *primi.*

f 1. *pron.*

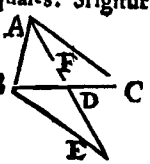
g 6. *primi.*

quàm EF, erit & AC, multò major, quàm EF. Cùm igitur demonstratum sit rectam EF, æqualem esse rectæ AB, erit AC, latus majus latere AB, quod erat ostendendum.

Hoc ostenso theoremate, ita propositio 19. demonstrabitur. In triangulo ABC, angulus ABC, major sit angulo C. Dico latus AC, majus esse latere AB. Divisa enim recta BC, (super quam constituti sunt dicti anguli inæquales) bifariam in D, ex A. per D, extendatur recta ADF, a ut sit DE, æqualis ipsi AD: ducaturque recta BE. Quoniam igitur latera AD, DC, trianguli ADC, æqualia sunt lateribus ED, DB, trianguli EDB, utrumque utrique, per constructionem, b sunt autem & anguli ADC, EDB, dictis comprehensi lateribus æquales: c Erunt bases AC, & BE, æquales: angulusque ACD, angulo EBD, æqualis: Et quia angulus ACD, ponitur esse minor angulo ABC, erit & angulus EBD, minor eodem angulo ABC. Ideoque angulus ABE, per rectam BD, dividetur in partes inæquales. Si igitur bifariam secetur per rectam BF, cadet BF, supra ED, eo quod angulus ABD, major sit angulo EBD. Quia verò EF, d major est, quàm ED, & ED, posita est æqualis ipsi AD, erit EF, major quàm AD. e Sed adhuc AD, major est quàm AF. Multo igitur major erit EF, quàm AF. Itaque quia recta BF, dividens angulum ABE, bifariam, secat basin AE, inæqualiter in F, estque majus segmentum EF, minus autem AF. erit per theorema à Proclo proximè demonstratum, latus BE, majus latere AB. Ostensum est autem BE, æquale esse lateri AC. Igitur & AC, latus latere AB, majus erit. Quod erat demonstrandum.



a 23. primi.
b 15. primi.
c 4. primi.



d 9. pron.
e 9. pron.

SCHOLIVM.

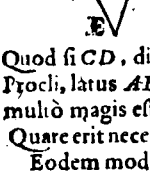
Hæc propositio 19. conversa est propositionis 18. ut perspicuum est. Campanus autem duarum istarum propositionum ordinem prorsus invertit, ita ut ea, quæ apud nos est 18. apud ipsum sit 19. & contra. Quarum utramque ostendit ducendo ad id, quod fieri nequit, cum tamen Euclides propositionem 18. directè & ostensivè confirmaverit, ut ex dictis liquidò constat.

Poterimus quoque theorema à Proclo demonstratum convertere, hoc modo.

Si trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam dividens angulum ipsis contentum, secabit basin in partes inæquales, majusque segmentum erit propè majus latus.

Duo latera AB, AC, trianguli ABC, sint inæqualia: AC, majus, & AB, minus. Recta autem AD, dividens angulum BAC,

bifariam, secet basin BC, in D. Dico segmentum DC, majus esse segmento DB. Si enim non est majus, erit vel æquale, vel minus. Si
a 3. primi. dicatur esse æquale: producatur AD, ad E, a ut DE, æqualis sit ipsi DA, ducaturq; recta EC. Quoniam igitur latera AD, DB, æqualia sunt lateribus ED, DC, utrumque utrique: AD, videlicet ipsi ED, per constructionem, & DB, ipsi DC, per hypothesin adversarii.
b 15. primi. Sunt autem & b anguli ad D, dictis lateribus contenti æquales: c erit basis AB, basi EC, æqualis & angulo BAD, angulus CED.
c 4. primi. Positus autem est & angulo BAD, angulus CAD, æqualis. Igitur

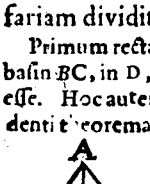


d 6. primi. & anguli CED, CAD, æquales erunt. d Ideoq; latus AC, lateri EC, æquale. Cùm igitur ostensum sit, latus EC, æquale esse quoque latus AB,
e 1. pran. e erunt latera AC, AB, æqualia: quod est absurdũ, quia AC, majus ponebatur, quàm AB. Non erit igitur segmentum DC, segmento DB, æquale. Quod si CD, dicatur esse minus, & DB, majus: erit per theorema Procli, latus AB, majus latere AC. Ponebatur autem minus, quod multò magis est absurdum. Non igitur minus erit DC, quàm DB. Quare erit necessariò majus.

Eodem modo demonstrari poterit hoc theorema.

Si trianguli angulum recta linea bifariam dividens, basin bifariam quoq; secet, erunt duo latera angulum continentia inter se æqualia: Quod si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam dividit.

Primum recta AD, secant angulum BAC, bifariam dividat quoq; basin BC, in D, bifariam. Dico latera AB, AC, inter se æqualia esse. Hoc autem demonstrabimus eadem ratione, qua in præcedenti theoremate ostensum fuit, latus AC, æquale esse lateri AB, si



f 15. primi. DC, segmentum segmento DB, æquale ponatur, dummodo figuram eodem modo construas. Cùm enim latera AD, DB, æqualia sint lateribus ED, DC, f & anguli ad D, dictis lateribus contenti
g 4. primi. æquales; g erunt bases AB, EC, æquales, & angulus CED, angulo BAD, hoc est, angulo CAD, æqualis. Quare h AC, æquale erit ipsi EC, hoc est, ipsi AB.
h 6. primi. Deinde sint lateta AB, AC, æqualia & recta AD, secans basin BC, in D, dividat angulum BAC, bifariam. Dico segmentum DC, æquale esse segmento DB. Cùm enim latera AD, AB, æqualia sint lateribus, AD, AC, utrumque utrique, & anguli quo-
i 4. primi. que ad A, contenti dictis lateribus æquales per hypothesin, i erunt bases BD, DC, æquales.

THEOR.

THEOR. 13. PROPOS. 20.

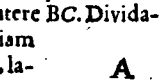
Omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora, quomodocunque assumpta.

Sit triangulum ABC. *Dico qualibet ejus duo latera, nempe* AB, AC, *simul majora esse reliquo latere* BC. *Producatur unum ex illis, ut* CA, *usque ad* D, [a] *sit que recta* AD, *aqualis alteri lateri non producto* AB, *& ducatur recta* DB. *Quoniam igitur duo latera* AB, AD, *aqualia inter se sunt, per constructionem,* [b] *erunt anguli* ABD, ADB, *aquales inter se:* [b] *Est autem angulo* ABD, [c] *major angulus* CBD. *Igitur & angulus* CBD, *major erit angulo* ADB. *In triangulo ergò* CBD, *latus* CD, *oppositum majori angulo* CDB, [d] *majus erit latere* BC, *quod minori angulo* CDB, *opponitur. Cùm igitur duo latera* AB, AC, *simul aqualia sint ipsi* CD, (*si enim aqualibus* AB, AD, *commune addatur* AC, *efient tota aqualia; nimirum linea composita ex* AB, AC, *& linea composita ex* AD, AC,) *erunt quoq; latera* AB, AC, *simul majora latere* BC. *Eodem modo demonstrabitur, qualibet alia duo latera majora esse reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora. Quod demonstrandum erat.*

a 3. *primi*
b 5. *primi.*
c. 9. *pron*
d 19. *primi.*
c 2. *pron.*

EX PROCLO.

Aliter hoc theorema à familiaribus Heronis, & Porphyrii demonstratur, nullo latere producto, hac ratione. Sit probandum duo latera *AB*, *AC*, trianguli ABC, majora esse latere BC. Dividatur angulus *BAC*, illis lateribus contentus *f* bifariam per rectam *AD*. Quoniam igitur trianguli CDA, latus CD, protractum est ad *B*, *g* erit angulus externus BD*A*, major interno & opposito CAD. Igitur & major angulo B*AD*. Quare in triangulo A*BD*, latus *AB*, majori angulo *ADB*, oppositum *b* majus erit latere BD, quod minori angulo *BAD*, opponitur. Eadem ratione ostendetur, latus *AC*, majus esse quàm CD, quia angulus *CDA*, *i* major est angulo BAD, hoc est, angulo C*AD*, &c. Quamobrem duo latera *AB*, AC, majora erunt latere BC, eademque est ratio quorumcunq; duorum laterum, si angulus ipsis comprehensus bifariam secetur.



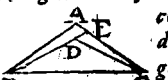
f 9. *primi.*
g 16. *primi.*
h 19. *primi.*
i 16. *primi.*

THEOR. 14. PROPOS. 21.

XXI.

Si super trianguli uno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, majorem verò angulum continebunt.

In triangulo ABC, *ſuper extremitates* B, *&* C, *lateris* BC, *intra triangulum conſtituantur duæ rectæ lineæ* BD, CD, *in puncto* D *concurrentes. Dico* BD, CD, *ſimul minores eſſe duobus lateribus* BA, CA, *ſimul; At verò angulum* BDC, *majorem angulo* BAC. *Producatur enim altera linearum interiorum, nempe* BD, *ad punctum* E, *lateris* CA. *Quoniam igitur in triangulo* BAE, *duo latera* BA, AE, *a majora ſunt latere* BE, *ſi addatur commune* EC, *b erunt* BA, AC, *majora quàm* BE, EC. *Rurſus quia in triangulo* CED, *duo latera* CE, ED, *c majora ſunt latere* CD; *ſi commune apponatur* DB, *d erunt* CE, EB, *majora quàm* CD, DB. *Oſtenſum jam verò fuit,* AB, CA, *majora eſſe quàm* BE, EC. *Multò igitur majora erunt* BA, CA, *quàm* BD, CD, *quod primò proponebatur. Præterea, quoniam angulus* BDC, *e major eſt angulo* DEC, *externus interno; & angulus* DEC, *angulo* BAC, *major quoque eſt, eandem ob cauſam; Erit angulus* BDC, *multò major angulo* BAC; *quod ſecundò proponebatur. Si igitur ſuper trianguli uno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat oſtendendum.*



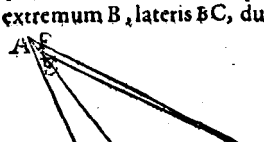
a 20. primi.
b 4. pronun.
c 20. primi.
d 4 pron.
e 16. primi.

SCHOLIVM.

Quàm rectè Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum conſtitutas, duci debere ab extremitatibus unius lateris, apertè intelligi poteſt ex eo, quod mox ex Proclo demonſtrabimus, in triangulis videlicet rectangulis, vel etiam amblygoniis, intra triangulum conſtitui poſſe duas lineas ſuper unũ latus circa angulum rectum, vel obtuſum, quarum quidem una ab extremitate dicti lateris, altera verò à quovis puncto propè aliud extremum lateris ejuſdẽ educitur, quæ majores ſint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulis ſcalenis eodem modo ſuper maximum latus duas rectas intra triangulum conſtitui poſſe, quæ minorem comprehendant angulum, &c.

EX PROCLO.

Sit triangulum habens exempli gratia angulum ABC, obtuſum. Dico ab extremo C, & à quovis puncto, nempe à D, propè aliud extremum B, lateris BC, duci poſſe duas lineas intra triangulum ad aliquod punctum, quæ majores ſint duobus lateribus BA, AC. Ducatur enim recta DA: Et quoniam in triangulo ABD, duo anguli ABD, ADB, *f* minores ſunt duobus rectis. Ponitur autem ABD, major recto, nempe obtuſus; erit ADB, minor recto, ideoque minor angulo ABD. Quare latus AD, *g* majus erit latere AB. Ex DA, *h* abſcindatur recta DE, æqualis rectæ AB. Et reliqua linea AE, *i* bifariam dividatur in F. Si igitur ab extremo C, ad F, re-



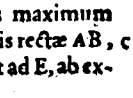
f 16. primi.
g 19. primi.
h 3. primi.
i 10. primi.

F, recta ducatur CF, erunt duæ lineæ rectæ constitutæ CF, DF, intra triangulum majores duobus lateribus BA, AC. Quoniam enim in triangulo AFC, duo latera AF, FC, a majora sunt latere AC. Est autem recta AF, ipsi FE, æqualis, per constructionem; erunt CF, FE, majores quoq; latere CA. Si igitur æqualia addantur ED, & AB, fient rectæ CF, FD, b majores lateribus CA, AB. Quod est propositum. Quod si ad F, ex B, extremo recta duceretur, essent duæ rectæ constitutæ CF, BF, minores duobus lateribus CA, AB, ut Euclides demonstravit.

a 20 primi.

b 4. pron.

Rursus sit triangulum scalenum ABC, cujus latus maximum BC, minimum AB. Ex BC, c auferatur BD, æqualis rectæ AB, & ducatur AD, recta, ad cujus punctum quodlibet, ut ad E, ab extremo C, recta ducatur CE. Constitutæ igitur erunt intra triangulum duæ lineæ CE, DE, quæ minorem angulum comprehendunt eo, quem efficiunt duo latera AB, AC. Cum enim duo latera BA, BD, æqualia sint, d erunt duo anguli BAD, BDA, æquales: Sed BDA, angulus e major est angulo CED. Major igitur erit & angulus BAD, angulo CED. Quare multò major erit totus angulus BAC, angulo CED. Quod est propositum. Rectè igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum constitutas educi debere, ab extremis punctis unius lateris, ut minores quidem sint duobus reliquis trianguli lateribus, majorem verò complectantur angulum. Alias enim propositio vera nō esset, ut jam est demonstratum.



c 3. primi.

d 5. primi.

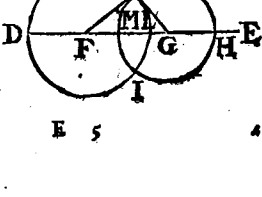
e 16. primi.

Verum de constitutione duarum linearum intra triangulum, quæ majores sint, vel æquales duobus lateribus, plura ostendemus ex Pappo ad propos. 34. hujus lib.

PROBL. 8. PROPOS. 22. XXII.

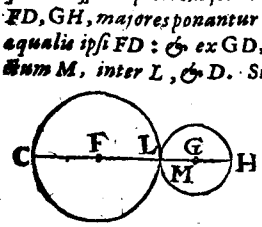
Ex tribus rectis lineis, quæ sint tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua esse majores omnifariam sumptas: quoniam Vniuscuiusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt majora.

Tres linea recta date sint A, B, & C, quarum qualibet dua reliqua sint majores, (Alias ex ipsis non posset constitui triangulum, ut constat ex propositione 20. in qua ostensum fuit, duo quævis latera trianguli reliquo esse majora.) oporteatque construere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex assumpta recta quavis DE, infinita, magnitudini f abscindatur recta DF, æqualis rectæ A. Et ex reliqua FE, recta FG,

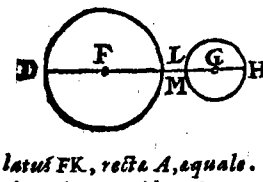


f 3. primi.

æqualis rectæ B; & ex reliqua GE, *rectæ* GH, *æqualis rectæ* C. *Deinde centro F. intervallo verò* FD, *circulus describatur* DIK. *Item centro* G, *intervallo autem* GH, *alius circulus describatur HIK, qui necessariò priorem secabit in punctis I, & K, (cum enim duæ* FD, GH, *majores ponantur rectæ* FG; *si ex* FE, *sumatur rectæ FL, æqualis ipsi* FD: *& ex* GD, *rectæ* GM, *æqualis ipsi* GH, *cadet punctum M, inter L, & D. Si namque M, caderet in L, punctum,*



essent GL, FL, *hoc est*, GH, *&* FD, *æquales rectæ FG. Si verò M, caderet inter G, & L, essent eadem duæ FL, GM, hoc est*, DF, GH, *minores rectæ FG, quorum utrumque est contra hypothesin. Id quod ex appositis figuris apparet*) *ex quorum quolibet, nimirum ex K, ducantur ad puncta*, F, G, *rectæ KF, KG, factumque erit triangulum FGK, cujus latera dico æqualia esse datis rectis AB, & C. Cum enim recta* FK. a *æqualis sit rectæ* FD, *& rectæ* A, *per constructionem eidem* FD, *æqualis*; b *erit*



a 15. *defin.*

b 1. *pron.*

latus FK, *rectæ A, æquale. Rursus quia* GK, *æqualis est ipsi* GH, *& rectæ C, eidem* GH; *erit quoque latus* GK, *rectæ C, æquale. Positum autem fuit per constructionem reliquum latus* FG, *reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera* FK, FG, GK, *tribus datis rectis*, A, B, C, *æqualia sunt. Constituimus ergò ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.*

PRAXIS.

Sumatur recta DE, æqualis cuicunq; rectarum datarum, nempe ipsi B, quam nunc volumus esse basin. Deinde ex D, ad intervallum rectæ *A*, arcus describatur: Item ex E, ad intervallum rectæ *C*, alter

arcus secans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ DF, EF, factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis. Erit enim latus DF, æquale rectæ *A*, propter intervallum ipsius A, assumptum: & latus EF, ipsi C, propter assumptum intervallum *C*: DE, verò latus, acceptum est rectæ *B*, æquale ab initio.

SCHOLIVM.

Hac arte cuicunque triangulo proposito alterum prorsus æquale & quoad latera, angulosque & quod aream ipsius, constituemus. Sit namque triangulum quodcunque *ABC*, cui, æquale omni ex

parte

parte est construendum. Intelligo ejus latera, tanquam tres lineas rectas datas AB, BC, CA, quarum quælibet duæ *a* majores sunt reliqua. Deinde sumo rectam DE, æqualem uni lateri, nempe BC: & ex D, intervallo lateris AB, arcum describo, item alium ex E, intervallo reliqui lateris CA, qui priorem secet in F, &c.

a 20. primi.

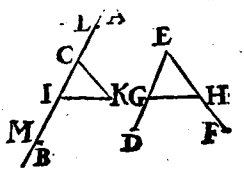
PROBL. 9. PROPOS. 23.

XXIII.

Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

Data recta sit AB, datumque in ea punctum C, & datus angulus DEF. Oportet igitur ad rectam AB, in puncto C, angulum constituere æqualem angulo E. *Sumantur in rectis* ED, EF, *duo puncta utcunque G, H, quæ recta* GH, *connectantur: Deinde* b *constituatur triangulum* CIK, *habens tria latera æqualia tribus rectis* EG, GH, HE, *ita ut* CI, *æquale sit ipsi* EG: & CK, *ipsi* EH: & IK, *ipsi* GH. (*Quod facile fiet, si* CI, *sumatur æqualis ipsi* EG, & CL, *ipsi* EH, & IM, *ipsi* GH. *Deinde ex centris* C, & I, *intervallis verò* CL, & IM, *circuli describantur secans sese in* K, &c.)

b 22. primi.



Dico angulum C, *æqualem esse angulo* E. *Quoniam enim duo latera* CI, CK, *æqualia sunt duobus lateribus* EG, EH, *utrumque utrique, & basis* IK, *basi* GH, *per constructionem:* c *erit angulus* C, *angulo* E, *æqualis: Effecimus igitur angulum ad* C, *æqualem angulo* F, &c. *Quod facere oportebat.*

c 8. primi.

PRAXIS.

Non differt hujus problematis praxis ab illa, quam in præcedente problemate tradidimus: propterea quod triangulū cōstituere oportet æquale alteri triangulo, ut angulus dato angulo æqualis exhibeatur, ut perspicuum est. Facilius tamen hac arte problema efficies. Sit linea data AB, punctumq; in ea C, & angulus datus E. Centro igitur E, & intervallo quovis arcus describatur GH: Eodemque intervallo ex centro C, arcus describatur IK, sumaturque beneficio circini arcus IK, arcui GH, æqualis. Recta enim ducta CK, faciet angulum ad C,

æqua-

æqualem angulo E. Nam si ducerentur rectæ IK, GH, essent ipsæ æquales, propterea, quod circino non variato utramque distantiam IK, GH, accepimus. Cùm ergò & duo latera IC, CK, æqualia sint duobus GE, EH, ob æqualia intervalla, quibus arcus sunt descripti; *a* erunt anguli ICK, GEH, æquales.

a 8. *primi.*

Cæterum qua ratione ex puncto extra datam rectam proposito recta duci possit, quæ cum data recta angulum constituat dato angulo rectilineo æqualem docebimus ad propos. 31. hujus lib.

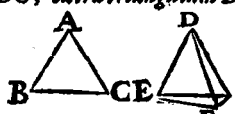
THEOR. 15. PROPOS. 24.

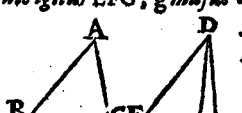
XXIV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrumqua utrique, angulum verò angulo majorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basin majorem habebunt.

Duo latera AB, AC, *trianguli* ABC, *æqualia sint duobus lateribus* DE, DF, *utrumque utrique, nempe* AB, *ipsi* DE, *&* AC, *ipsi* DF; *Angulus verò* A, *major sit angulo* EDF. *Dico basin* BC, *majorem esse basi* EF. *Ad lineam enim* DE, *ad ejusque punctum* D, b *constituatur angulus* EDG, *æqualis angulo* A: (*cadetque recta* DG, *extra triangulum* DEF, *cum angulus* EDF, *minor ponatur angulo* A) c *ponaturque* DG, *æqualis ipsi* DF, *hoc est, ipsi* AC. *Ducta deinde recta* EG, *cadet ea aut supra rectam* EF; *aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primum supra* EF, *ducaturque recta* FG. *Quia ergò latera* AB, AC, *æqualia sunt lateribus* DE, DG, *utrumque utrique, & angulus* A, *æqualis angulo* EDG, *per constructionem*: d *Erit basis* BC, *basi* EG, *æqualis. Rursus quia duo latera* DF, DG, *inter se sunt æqualia*; e *erunt anguli* DFG, DGF, *æquales*: *Est autem angulus* DGF, f *major angulo* EGF *igitur & angulus* DFG, *eodem angulo* EGF, *major erit. Quare multò major erit totus angulus* EFG, *eodem angulo* EGF. *In triangulo igitur* EFG, g *majus erit latus* EG, *latere* EF. *Est autem ostensum* EG, *æquale esse ipsi* BC. *Major igitur erit quoque* BC, *quàm* EF. *Quod est propositum.*

b 23. *primi.*
c 3. *primi.*
d 4. *primi.*
e 5. *primi.*
f 9. *pron.*
g 19. *primi.*
h 4. *primi.*
i 9. *pron.*

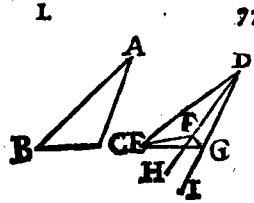




Cadat deinde EG, *in ipsam* EF. *Et quia rursus, ut prius basis* EG, h *æqualis est basi* BC: *&* EG, i *major quàm* EF, *quod est propositum.*

Cadat tertiò EG, *infra* EF, *producanturque rectæ* DF, DG, *usque ad* H, *&* I, *& ducatur recta* FG. *Erit autem rursus, ut prius* k *basis* EG, *basi* BC, *æqualis. Deinde quia duo latera* DF, DG, *æqua-*

k 4 *primi.*



DG, *æqualia sunt inter se, per constructionem*, a *erunt anguli* GFH, FGI, *infra basin* FG, *æquales*: *Est autem angulus* FGI, b *major angulo* FGE. *Igitur & angulus* GFH, *eodem angulo* FGE, *major erit. Quare multò major erit totus angulus* EFG, *eodem angulo* FGE. *In triangulo ergò* EFG, c *majus erit latus* EG, *latere* EF. *Est autem ostensum* EG, *æquale esse ipsi* BC. *Major igitur erit quoque* BC, *basis basi* EF. *Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus. &c. Quod erat ostendendum.*

a 5. primi.

b 9. pron.

c 19. primi.

SCHOLIVM.

Si quis fortè roget, cur in 4. propositione Euclides ex eo, quod duo latera unius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, utrumq; utrique, & anguli contenti dictis lateribus æquales, concluserit non solum æqualitatem basium, verum etiam triangulorum, & reliquorum angulorum; hic autem ex eo, quod duo latera unius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, utrumque utriq;, anguli verò lateribus illis comprehensi inæquales, colligat tantùm inæqualitatem basium, non autem triangulorum, & reliquorum angulorum: Huic respondendum est, necessariò id ab Euclide peritissimo Geometra esse factũ. Nam ex antecedente hujus theorematis semper consequitur basium inæqualitas, ita ut basis illius trianguli, cujus angulus contentus lateribus assumptis est major, superet basin alterius, cujus angulus minor existit, ut demonstratũ est: non autem necesse est, triangulũ illud majus hoc esse. Vt enim clarissimè ex Proclo demonstrabimus ad propos. 37. hujus primi libri, Triangulum majorem habens angulum aliquando æquale est triangulo minorem habenti angulum, aliquando verò minus eodem, & aliquando majus. Non igitur potuit in universum inferri, ex eo, quod angulus unius trianguli major est angulo alterius, triangulũ etiam majus esse, cùm modo æquale sit, modo minus, & modo majus. Idem dici potest de angulis reliquis. Nam in prima figura hujus theorematis angulus ABC, minor est semper angulo DEF: cum angulus DEG, (qui æqualis est per 4. prop. angulo ABC) *d* minor sit eodem angulo DEF, pars toto. In secunda autem figura, existit quidem angulus ABC, angulo *DEF*, æqualis, per 4. prop. At verò angulus ACB, minor est angulo *DFE*, cum angulus *DFE*, *e* major sit angulo *DGF*, externus interno, & opposito; & angulus DGF, æqualis sit angulo ACB. In tertia denique figura angulus ABC, major quidem est angulo *DEF*, propterea quod angulus DEG, (æqualis existens per. 4 propos. angulo ABC,) *f* major est eodem angulo DEF, totum parte. Sed angulus ACB, major est angulo FE. *f* 9. pron.

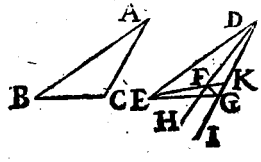
d 9. pron.

e 16. primi.

Nam

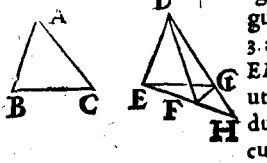
Nam si recta EF, producatur secans rectam DG, in K, fiet angulus DFE, *a* major angulo DKE, externus interno : Est autem & angulus DKE, major adhuc angulo DGE, externus quoque interno & opposito. Multò igitur mojor erit angulus DFE, angulo DGE, qui per 4. propos. æqualis est angulo ACB. Quod etiam constat ex 2. parte propos. 21. Nam interiores lineæ DF, EF, continent angulum majorem angulo DGE, quem exteriores lineæ DG, EG, continent. Quare neq; certi quicquam colligi potuit de inæqualitate reliquorum angulorum, cum modo unus altero sit major, modo minor, & modo æqualis.

a 16. *primi.*



Quoniam verò in triangulo DEF, duo anguli E, F, *b* semper minores sunt duobus rectis, erit necessario saltem alter eorum acutus. Si igitur ad partes acuti anguli (ut in 1. figura ad partes anguli DFE, in 2. verò & 3. ad partes anguli DEF,) fiat angulus EDG, æqualis angulo A, & reliqua fiant, ut in propos. dictum est, cadet semper ducta recta EG, supra punctum F. Nam cum angulus DFE, acutus sit, *c* erit ei deinceps, producto latere EF, obtusus. Producta ergò recta DG, secante latus EF, productum in H, *d* major erit recta DH, latere DF, cum opponatur angulo obtuso in triangulo DFG; ac proinde recta EG, auferens DG, æqualem ipsi DF, cadet necessario supra F. Si namque vel per F, transiret, vel infra caderet, abscinderet ex DG, majorem lineam latere DF: nimirum vel DH, vel majorem, quam DH. Hoc si observetur, satis erit primus casus propositionis, quę fortassis causa fuit, ut Euclides apud Theonem primo casu contentus fuerit.

b 17. *primi.*



c 13. *primi.*

d 19. *primi.*

THEOR. 16. PROPOS. 25.

xxv.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrumque utrique basi verò basim majore. Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo majorem habebunt.

Duo latera AB, *AC, trianguli* ABC, *æqualia sint duobus lateribus* DE, DF, *trianguli* DEF, *utrumque utrique, hoc est,* AB, *ipsi* DE, & AC, *ipsi* DF : *Basis autem* BC, *major sit basi* EF.

Dico

Dico angulum A, *majorem esse angulo* D. *Si enim non est angulus* A, *major angulo* D, *erit vel aequalis, vel minor. Si dicatur esse aequalis, cum etiam duo latera circa* A, *aequalia sint duobus circa* D, *utrumque utrique, per hypothesin;* a *erit &* *basis* BC, *aequalis basi* BF; b *quod est absurdum; Ponitur enim basis* BC, *basi* EF, *major: Si verò angulus* A, *dicatur esse minor angulo* D; *erit, propter aequalitatem laterum circa istos angulos, basis* EF, b *major basi* BC; *quod magis est absurdum, cum* EF, *ponatur esse minor quam* BC. *Quare angulus* A, *cum neque possit aequalis esse angulo* D, *neque minor, erit major. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habuerint, &c. Quod erat ostendendum.*

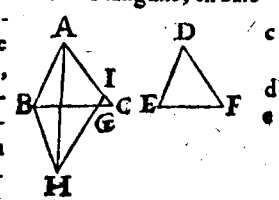
a 4. *primi.*

b 24. *primi.*

SCHOLIVM.

Theorema hoc conversum est præcedentis. In eo enim ex majori angulo demonstratum est, basin illi respondentem esse majorem: In hoc autem ex majori basi ostensum fuit, angulum illi respondentem majorem esse. Differunt autem plurimum hæc duo theoremata, nempe vigesimum quartum, & vigesimum quintum, ab illis, quæ explicata sunt propositione decima octava, & decima nona. Nam in decima nona demonstratum est, in uno eodemque triangulo majori angulo majus latus respondere: At in vigesima quarta, idem ostensum fuit in duobus diversis triangulis, quorum duo latera unius æqualia sunt duobus lateribus alterius &c. Idemque discrimen reperies inter propositiones decimam octavam, & vigesimam quintam.

Menelaus Alexandrinus, ut ait Proclus, demonstrat hoc idem theorema ostensive, hac ratione. Positis eisdem triangulis, ex basi majore BC, *c* abscindatur recta BG, æqualis basi minori EF. Fiat quoque angulus GBH, *d* æqualis angulo DEF, *e* & sit BH, æqualis ipsi B*A*, atque adeo ipsi DE. Ducta autem recta linea *A*H, ducatur quoque recta per *G*; ex H, secans AC, in I. Quoniam igitur duo latera BA, BH, æqualia sunt, *f* erunt anguli BAH, BH*A*, æquales. Rursus quia latera BG, BH, æqualia sunt lateribus EF, ED, utrumque utrique, & angulus GBH, æqualis, angulo



c 3. *primi.*

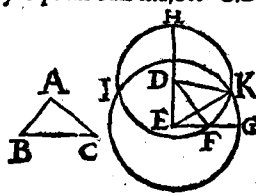
d 23. *primi.*

e 3. *primi.*

f 3. *primi.*

angulo DEF, per constructionem, *a* erit basis HG, basi DF, atque a-
a 4. primi. deo ipsi AC, æqualis, angulusq; GHB, angulo EDF. Et quoniam
b 9. pron. recta HI, *b* major est quàm HG, quæ est ostensa æqualis ipsi AC, erit
c 9. pron. quoq, major HI, quàm AC: Sed AC, *c* major est adhuc, quàm AI.
d 18. primi. Multo ergò major erit HI, quàm AI. Quare angulus IAH, *d* major
e. 4. pron. erit angulo IHA. Additis igitur duobus angulis BAH, BHA, qui ostensi sunt æquales, fiet *e* totus angulus BAC, toto angulo BHG, major: Sed angulus BHG, demonstratus fuit æqualis angulo D. Major igitur etiam erit angulus BAC, angulo D, quod est propositũ. Quod si quando contingat, rectam AH, cadere extra triangulum, auferendi erunt anguli æquales BAH, BHA, &c. ut reliquus fiat angulus BAC, major reliquo angulo BHG. Quando autem recta AH, per punctum B, transit, nihil addendum erit, aut demendum, ut perspicuum est.

Heron autem idem ex eodem Proclo hoc modo demonstrat Po-
f 3. primi. sitis eisdem triangulis, producatur basis minor EF, ad G, ut sit EG, *f* æqualis basi majori BC. Deinde centro D, intervallo autem DF, de-



scribatur circulus, producaturq; ED, ad H, in circumferentiam. Quoniam igitur
g 15. defin. DH, *g* est æqualis ipsi DF, erit quoque
h 2. pron. DH, æqualis ipsi AC. Additis igitur æ-qualibus DE, AB, *h* fient AC, AB, simul æquales toti HE: Sed AC, AB,
i 20. primi. *i* simul majores sunt, quàm BC, atque adeò quàm EG. Igitur & HE, major erit, quàm EG. Quare circulus descriptus ex centro E, & intervallo EG, intersecabit rectam EH, atque adeò circumferentiam prioris circuli in I, & K, punctis: ad K, autem ducantur rectæ DK, EK. Et quoniam duo latera AB, AC, æqualia sunt duobus lateribus DE, DK, utrumque utrique, (est enim DK, æquale ipsi DF, per definitionem circuli: DF, autem positum est æquale lateri AC,) & basis BC, basi EK, æqualis: (cum EK, æqualis sit ipsi EG, per definitionem circuli: EG, verò recta per constructionem facta sit æqua-
k 8. primi. lis basi BC.) *k* Erit angulus BAC, angulo EDK, æqualis: Sed angulus EDK, maior est *l* angulo EDF. Quare & angulus A, angulo
l. 9. pron. EDF, major existet. Quod est propositum. Atque hæc demonstratio generalior est priore, cum omnibus casibus conveniat.

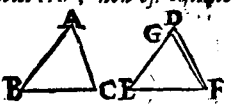
xxvi. ## THEOR. 17. PROPOS. 26.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, utrumque utrique, unumque latus uni lateri æquale, sive quod æqualibus adjacet angulis, seu quod uni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua

latera

latera reliquis lateribus æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo anguli B, & C, *trianguli* ABC, *æquales duobus angulis* E, & EFD, *trianguli* DEF, *uterque utrique, hoc est*, B, *ipsi* E, & C, *ipsi* EFD; *Sitque primo latus* BC, *quod angulis* B, & C, *adjacet, lateri* EF, *quod angulis* E, & EFD, *adjacet æquale. Dico, reliqua quoque latera* AB, AC, *reliquis lateribus* DE, DF, *æqualia esse, utrumque utrique, hoc est*, AB, *ipsi* DE, & AC, *ipsi* DF; *ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur; reliquumque angulum* A, *reliquo angulo* D. *Si enim latus* AB, *non est æquale lateri* DE, *sit* DE, *major, à quo* a *abscindatur recta linea* EG, *æqualis rectæ lineæ* AB, *ducaturque recta* GF. *Quoniam igitur latera* AB, BC, *æqualia sunt lateribus* GE, EF, *utrumque utrique, & anguli* B, & E, *æquales per hypothesin*: b *Erit angulus* C, *æqualis angulo* EFG. *Ponitur autem angulus* C, *æqualis angulo* EFD. *Quare & angulus* EFG, *eidem angulo* EFD, *æqualis erit, pars toti; Quod est absurdum. Non est igitur latus* AB, *inæquale lateri* DE, *sed æquale. Quamobrem, cum latera* AB, BC, *æqualia sint lateribus* DE, EF, *utrumque utrique, & anguli contenti* B, & E, *æquales*; c *erunt & bases* AC, DF, & *anguli reliqui* A, & D, *æquales. Quod est propositum.*



a 3 primi.

b 4. primi.

c 4. primi.

Sint deinde latera AB, DE, *subtendentia æquales angulos* C, & EFD, *inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera* BC, CA, *reliquis lateribus* EF, FD, *esse æqualia, utrumque utrique, hoc est*, BC, *ipsi* EF, & CA, *ipsi* FD; *reliquumque angulum* A, *reliquo angulo* D, *æqualem. Si enim latus* BC, *non est æquale lateri* EF, *sit* EF, *major*; d *ex quo sumatur recta* EG, *æqualis ipsi* BC, *ducaturque recta* DG. *Quoniam igitur latera* AB, BC, *æqualia sunt lateribus* DE, EG, *utrumque utrique, & anguli contenti* B, & E, *æquales per hypothesin*; e *Erit angulus* C, *angulo* EGD, *æqualis*: *Ponitur autem angulus* C, *angulo* EFD, *æqualis*; *Igitur & angulus* EGD, *angulo eidem* EFD, *æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum.* f *Est enim major. Non ergo est latus* BC, *lateri* EF, *inæquale. Quocirca, ut prius, colligetur institutum ex* 4. *prop. hujus libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat.*

d 3. primi.

e 4. primi.

f 16. primi

COROLLARIUM.

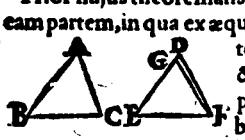
Sequitur ex demonstratione huius theorematis, tota etiam triangula,

quoad areas, esse æqualia. Nam si latera AB, BC, lateribus DE, EF, æqualia sint, ut ostensum fuit, contineantque ex hypothesi angulos æquales B, E, a erunt tota quoque triangula æqualia inter se.

a 4. primi.

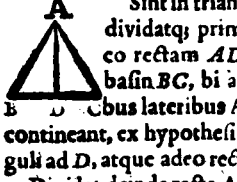
SCHOLIVM.

Prior hujus theorematis pars conversa est 4. propositionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulorum ipsis contentorum, collecta fuit æqualitas basium, & angulorum super bases. Nam in priori parte hujus theorematis ex æqualitate basium BC, EF, & angulorum super has bases demonstratum est, reliqua latera unius trianguli reliquis lateribus æqualia esse, reliquumque angulum reliquo angulo &c. Quod quidem alia nos ratione tam demonstravimus ad propositionem octavam hujus lib. quem modum eo loco monuimus.



Hoc loco demonstrandum est theorema quoddam admodum necessarium, & perutile rebus Geometricis, videlicet

In triangulo æquilatero, sive Isoscele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenso ducta, dividensque vel angulum, vel basin bifariam, perpendicularis est ad basim, & siquidem angulū bifariam dividat, secabit quoque basin bifariam. Si verò basim secet bifariam, dividet quoque angulum bifariam. Et contra; linea perpendicularis ad basin ducta dividit & basin, & angulum bifariam.



Sint in triangulo ABC, duo latera æqualia *AB*, AC, dividatq; primum recta AD, angulum A, bifariam. Dico rectam *AD*, esse ad *BC*, perpendicularem, secareque basin *BC*, bifariam. Cùm enim duo latera AB, AD, duobus lateribus AC, AD, sint æqualia angulosque æquales contineant, ex hypothesi, *b* erunt & bases *BD*, CD, æquales & anguli ad *D*, atque adeo recti.

b 4. primi.

Dividat deinde recta AD, basim BC, bifariam. Dico rectam AD, ad *BC*, perpendicularem esse, & angulum A, secare bifariam. Cùm enim duo latera BD, DA, duobus lateribus CD, DA, æqualia sint, & basis *AB*, basi *AC*, ex hypothesi, *c* erunt quoque anguli ad D, æquales, atque adeo recti, ac proinde ex coroll. propos. 8. hujus lib. & anguli ad A, æquales erunt.

c 8. primi.

Sed jam recta *AD*, sit ad *BC*, perpendicularis. Dico & basim BC, & angulum A, secari bifariam. *d* Erunt enim anguli B, C, supra basin *BC*, æquales. Itaque quoniam duo anguli *D*, *B*, trianguli *ABD*, duobus angulis D, C, trianguli ACD, æquales sunt, uterque utrique,

d 5. primi.

utrique, latusq; AD, æqualibus oppositum angulis F, C, commune: erunt & reliqua latera BD, CD, æqualia, & reliqui anguli ad A, æquales. Quod erat demonstrandum. a 26. primi.

Sed & hoc theorema verum est.

Triangulum, in quo linea recta ab uno angulorum ducta ad basim perpendicularis dividit vel basim, vel angulum bifariam, habet duo latera dictum angulum comprehendentia æqualia: Et si quidem basis dividatur bifariam, angulus quoq; bifariam secabitur: si verò angulus bifariam secetur, basis quoque dividetur bifariam.

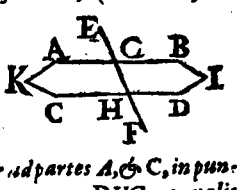
In eodem triangulo ABC, sit AD, ad BC, perpendicularis, dividatque primum basin BC, bifariam. Dico & latera AB, AC, esse æqualia, & angulos ad A, æquales. Quoniam enim duo latera BD, DA, duobus lateribus CD, DA, æqualia sunt, angulosque comprehendunt æquales nempe rectos: b erunt quoque & bases AB, AC, & anguli ad A, æquales. Quod est primum. b 4. primi.

Secet deinde perpendicularis AD, angulum A, bifariam. Dico & latera AB, AC, æqualia esse, & rectas BD, CD. Quoniam enim duo anguli D, A, trianguli ABD, duobus angulis D, A, trianguli ACD, æquales sunt, latusque AD, illis adjacens, commune: c erunt quoq; & latera AB, AC, & latera BD, CD, æqualia. Quod est secundum. c 26. primi.

THEOR. 18. PROPOS. 27. XXVII.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ lineæ.

In duas rectas AB, CD, *incidens recta* EF, *faciat angulos alternatim* AGH, DHG, *inter se æquales. Dico lineas* AB, CD, *esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, coibunt tandem, si producantur infinitè. Si namque non coirent unquam, parallelæ essent ex parallelarum definitione. Conveniant ergò ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum est GIH, (cum* AB, *recta continuata sit, item recta* CD, *usque ad punctum I;) & angulus AGH, positus est æqualis angulo* DGH; *erit externus angulus* AGH, *æqualis interno, & opposito* DHG, *quod est absurdum*: d *quoniam externus interno major est. Quod si* AB, CD, *coire dicantur ad partes A, & C, in punctio* K: *erit rursus eadem ratione angulus externus* DHG, *æqualis inter-*

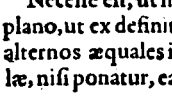


d 16. primi.

interno, & oppoſito AGH, quod eſt abſurdum. Non igitur coibunt lineæ AB, CD. *Quare parallelæ erunt. Eodem modo, ſi ponantur anguli alterni* BGH, CHG, *æquales, demonſtrabitur, lineas* AB, CD, *eſſe parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat oſtendendum.*

SCHOLIVM.

Neceſſe eſt, ut lineæ, quæ dicuntur parallelæ, in eodem exiſtant plano, ut ex definitione conſtat: Quare non ſatis eſt, duos angulos alternos æquales inter ſe eſſe, ut duæ lineæ probentur eſſe parallelæ, niſi ponatur, eas in uno, eodemq; exiſtere plano. Fieri enim poteſt, ut linea recta incidens in duas rectas non in eodem plano exiſtentes, faciat alternos angulos æquales. Sit enim CD perpendicularis ad *AB*. rectam, quæ in ſubjecto plano exiſtit: & ex *C*, in alio plano, ad *CD*, ducatur alia perpendicularis *CE*, ita ut punctum E, intelligatur in ſublimi. Quo poſito, perſpicuum eſt, rectam CD, incidentem in rectas *CE*, *AB*, facere duos angulos *ECD*, *ADC*, alternos æquales, cum ſint recti: & tamen *CE*, *AB*, non ſunt parallelæ, quod non in eodem exiſtant plano. Non appoſuit autem Euclides in propoſitione hanc conditionem: in eodem plano exiſtentes; ſicut neque in ſubſequentibus: quoniam cum in prioribus ſex libris agatur de planis duntaxat, ut ſuprà diximus, omnia intelligenda ſunt neceſſariò in eodem plano exiſtere. In undecimo verò libro, & aliis, qui ipſum ſequuntur, monebit ſemper, lineas aliquas in eodem eſſe plano, vel in diverſis planis, quia in illis libris differitur de ſolidis, in quibus diverſa plana conſiderari poſſunt. Quod idem dicendum eſt de punctis extra lineas, & ſuperficies, &c.

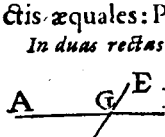


XXVIII

THEOR. 19. PROPOS. 28.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulũ interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes, æqualem fecerit: Aut internos, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

In duas rectas AB, CD, *recta incidens* EF. *faciat primo externum angulum* EGA, *æqualem angulo interno, & oppoſito ad eaſdem partes* GHC. *Dico rectas AB, CD, eſſe parallelas. Quoniam enim angulo* EGA. *æqualis* [a] *ponitur angulus* GHC: *& eidem angulo* EGA, [a] *æqualis eſt angulus* HGB: [b] *erunt anguli alterni* GHC, HGB, *æquales. Quare linea* AB, CD, [c] *parallela erunt. Idem oſtenditur, ſi angulus externus* EGB, *æqualis ponatur interno* GHD.



a 1. primi.
b 29. prop.
c 27. primi.

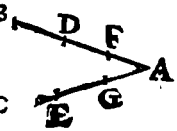
Deinde

Deinde faciat rectæ EF: *angulos internos ex eadem parte, nempe* AGH, CHG, *duobus rectis æquales. Dico rursus rectas* AB, CD, *esse parallelas. Quoniam enim anguli* AGH, CHG, *duobus rectis æquales ponuntur: Sunt autem & anguli* AGE, AGH *a duobus rectis æquales: Erunt duo anguli* AGH, CHG, *duobus angulis* AGE, AGH, *æquales. Ablato igitur communi angulo* AGH, *remanebit angulus* AGE, *externus angulo* CHG, *interno, & opposito ad easdem partes æqualis. Quare ut jam ostensum est, erunt rectæ* AB, CD. *parallelæ. Idem ostendetur, si duo anguli* BGH, DHG, *duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum, &c. Quod erat demonstrandum.* a 13. primi.

SCHOLIVM.

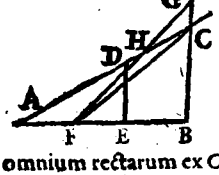
Iam dudum pronunciatum tertium decimum à Principiorum numero rejecimus. Cùm igitur sequens propos. 29. cum multis aliis illi ita innitatur, ut sine ejus auxilio demonstrari nequeat, operæ pretium erit illud hoc loco, ex hactenus demonstratis theorematibus, atque problematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, Geometrica demonstratione confirmare, ut in expositione dicti Axiomatis polliciti sumus. Primo autem loco demonstrationem Procli afferemus. Deinde idem nos pronunciatum magis accuratè, atque evidentius demonstrabimus. Proclus igitur, antequam illud demonstret, duo præmittit. Primum est.

Si ab uno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinitè producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.



Exeant à puncto *A*, duæ rectæ AB, AC, faciens angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quàm F, & G. Item puncta B, & C, plus quàm D, & E, & ita deinceps, si producantur, ultra rectæ lineæ *AB*, *AC*, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinitè ipsæ producantur. Si enim non infinito spatio distarent, augeri posset eorum distantia, igitur & lineæ ipsæ ultra produci, quod est absurdum, cum ponantur infinitè jam esse productæ. Quare si dictæ lineæ AB, AC, producantur infinitè, ipsarum distantia excedet omnium finitam distantiam. Hoc pronunciato usus est & Aristoteles lib. 1. de cœlo, ubi demonstravit, mundum non esse infinitum.

Quod autem rectæ *AB*, *AC*, quo longius protrahantur, eo magis inter se distent, (Hoc enim Proclus sine demonstratione assumpsit, cum dixit puncta D, & E, in proxima figura plus inter se distare



quàm F, & G. Item B, & C, plus quàm D, & E, &c.) hac ratione demonstrabimus. C Demittantur ex punctis C, D, utcunque in rectâ AC, acceptis, ad AB, perpendiculares CB, DE, quæ distantias punctorum C, D, à rectâ AB, metientur, cùm sint minimæ omnium rectarum ex C, D, ad AB, ductarum, ut in coroll. prop. 19. ostendimus. Dico CB, majorem esse quàm DE: ac proinde plus distare rectam AC, à recto AB, in puncto C, remotiore, quàm in puncto propinquiore D. Si enim CB, non est major, quàm DE, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis & rectæ AE, abscindatur æqualis BF, ita ut punctum F, cadat vel inter A, & E, vel in E, vel denique inter E, & B, ducaturque recta FC. Quoniam igitur duo latera AE, BD, trianguli AED, duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, æqualia sunt, utrumque utrique, angulosque continent æquales, utpotè rectos: a erunt & bases AD, FG, & anguli DAE, CFB, inter se æquales. Igitur externus angulus GFB, interno DAE, æqualis erit; b quod est absurdum. Vel cum externus angulus CFB, interno DAE, æqualis sit c parallelæ erunt AC, FC, quod etiam absurdum est, cùm in C, concurrant.

a 4. primi.

b 16 primi

c 27 primi.

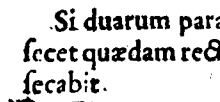
Sit deinde CB, *minor quàm* DE, *si fieri potest & producta* BC, *fiat* BG, *ipsi* DE, *æqualis, jungaturque rectâ* FG. *Quia igitur duo latera* AE, ED, *trianguli* AED, *duobus lateribus* FB, BG, *æqualia sunt, utrumque utrique, angulosque continent æquales, puta rectos: d erunt & bases* AD, FG, *& anguli* EAD, BFG, *inter se æquales. Igitur externus angulus* BFG, *interno* EAD, *æqualis erit, quod est absurdum. Vel cum externus angulus* BFG, *interno* EAD, *æqualis sit, e erunt* AC, FG, *inter se parallelæ, quod absurdum est, cum se mutuò secent in* H. *Quocirca* BC, *ipsa* ED, *major erit, cum neque æqualis, neque minor esse possit, ut demonstratum est.*

d 4. primi.

e 27. primi.

Secundum, quod Proclus præmittit, hujusmodi est.

Si duarum parallelarum rectarum linearum alteram secet quædam recta linea, reliquam quoque productam secabit.

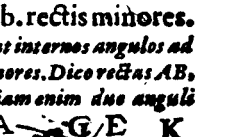


B D *Sint duæ parallelæ* AB, CD, *& rectæ* EF, *secet ipsam* AB, *in* G. *Dico rectam* EF, *si producatur, secturam esse quoque ipsam* CD. *Quoniam duæ rectæ* GB, GF, *in puncto* G, *angulum faciunt, si producantur infinitè, excedent omnem finitam distantiam; igitur & distantiam, quæ parallelæ* AB, *à parallelæ* CD, *distat, cum hæc distantia sit finita, aliàs enim non essent lineæ parallelæ. Quare quando distantia* GB, *à* GF, *major jam fuerit ea, quæ inter parallelas est, necesse est rectam* GF,

produ-

productam secuisse rectam CD. *Nam quamdiu* GF, *continebitur inter duas parallelas, minori distantia à* GB, *removebitur, quàm* CD, *ab eadē* GB, *ut cōstat. His igitur ita expositis, facilè demonstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidē, tertium decimū pronunciatū.*

Si in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq; partes, angulos duob. rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinitè productæ sibi mutuò incident ad eas partes, ubi sunt anguli duob. rectis minores.



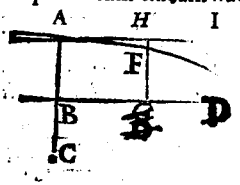
In rectas AB, CD, *incidens recta* EF, *faciat internos angulos ad partes* B, & D, *ut* BGH, DHG, *duobus rectis minores. Dico rectas* AB, CD, *coire ad easdem partes* B, & D. *Quoniam enim duo anguli* BGH, DHG, *minores ponuntur esse duobus rectis: Sunt autem duo anguli* DHG, DHF, *a duob. rectis æquales: Erunt duo anguli* DHG, DHF, *majores duobus angulis* DHG, BGH. a 13. primi.

Ablato ergò communi angulo DHG, *remanebit angulus* DHF, *b major angulo* BGH. *Si igitur ad rectam* FG, & *ad punctum* G, *c constituatur angulus* KGH, *æqualis angulo* DHF, *cadet* GK, *supra* GB, *d secabit q; producta rectam* AB. *Quoniam igitur in duas rectas* IK, CD, *recta incidens* EF, *facit angulum externum* DHF, *æqualem interno & opposito* KGH, *e Erunt rectæ* IK, CD, *parallelæ. Secat autem recta* AB, *ipsam* IK, *in* G. *Producta igitur secabit quoque ipsam* CD, *ut demonstratum est. Quare* AB, *cum* CD, *conveniet ad partes* B, & D. *nimirum in puncto* L, *quod est propositum.*

b 5. prop.
c 23. primi.
d 11. prop.
e 28. primi.

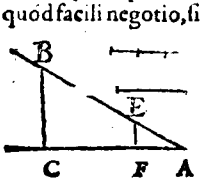
Hac ergò ratione conatur Proclus Axiomatertium decimum demonstrare. Sed quoniam principium, quod primo loco præmisit, eque dubium & obscurum esse videtur, atq; illud Axioma, afferemus nos demonstrationē magis accuratā, si prius doceamus, in quo difficultas, sive obscuritas principii illius à Proclo assumpti consistat. Quemadmodum igitur ex Procli & aliorum Geometrarum sententia, sine demonstratione concedendum non est, duas rectas, quæ semper sibi mutuò fiunt propinquiores, tandē aliquando concurrere, licet sit verissimum, cujusmodi sunt duæ rectæ, in quas recta incidens facit internos duos angulos ex eadem parte duobus rectis minores, quorū unus rectus sit, & alter acutus. Hæ enim sibi mutuò appropinquant ad eas partes, ubi duo illi anguli duobus rectis minores existunt, ut mox demonstrabimus. Quemadmodū inquam, concedendū hoc sine probatione non est, propterea quod dari possunt in eodē plano duæ lineæ, una recta, & altera inflexa, nimirū vel Hyperbole, vel lineā chōchoideos, sibi sēper mutuò magis ac magis appropinquātes, quæ tamē nunquam coeant, licet in infinitū ambę producātur, quorū illud ab Apollonio Pergęo, hoc verò à Nicomede demonstratū est: Ita quoque non videtur sine demonstratione admitten-

mittendum esse, (quamquam verissimum sit) duas rectas lineas angulum efficientes omnem finitam magnitudinē excedere, si in infinitum producantur ambæ, licet semper magis ac magis inter se distent, ut nos supra demonstravimus. Nam exhiberi possunt duę lineæ in eodem plano angulum comprehendentes, recta una, & altera inflexa, quæ conchoideos appellatur à Nicomede, semper magis ac magis inter se distantes, quarum tamen distantia datam quamcunque rectam lineam nunquam superet, aut exęquet, licet ambæ extendantur in infinitum. Data namq; sit recta *AB*. Dico describi posse lineam rectam, & inflexam, quarum una ab altera semper magis recedat, distantiam tamen earum nunquam æqualem esse rectæ AB, aut majorem, quantumvis producantur ambę. Producta enim recta *AB*, quantumliber usque ad C, ducatur per *B*, ad AC, perpendicularis *BD*; & polo C, intervallo autem AB, describatur linea conchoideos AE, inflexa nimirum linea, quæ rectæ BD, fiat quidem semper propinquior, nunquam tamen cum ea conveniat, ut à Nicomede traditur. Deinde per A, excitetur recta AI, ad *AC*, perpendicularis, *a* quæ ipsi BD, parallela erit. Postremò ex duobus punctis *HI*, utcunque in recta AI, acceptis demittantur ad BD, perpendiculares *HG*, ID, *b* qua parallelæ, *c* atque adeò æquales inter se erunt, anguloſq; *d* constituent ad *H*, I, rectos. Admittantur enim nunc, ut propositum ostendamus, omnes demonstrationes Euclidis, ac si ex axiomate 13. non penderent, aut etiamsi pendeant ex eo, concedantur tamen, perinde ac si axioma illud jam sit demonstratum ante propos. 29. hujus lib. ubi primum usus illius apparere incipit, uti verè à nobis mox ante propos. 29. demonstrabitur. Itaq; quoniam *FG*, major est, quàm ED, ut Nicomedes demonstravit, erit *FH*, reliqua minor, quàm reliqua *EI*. Magis ergò inter se distant lineæ *AI*, *AE*, in punctis I, E, quàm in punctis *H*, F; atq; ita semper eas probabimus magis ac magis distare, si longius protendantur. Distantia nihilominus semper minor erit, quàm recta AB, h.e. quàm perpendicularis ex recta AI, ad rectā BD, demissa, cū inflexa linea *AE*, ad rectā *BD*, numquam perveniat, ut demonstratum est à Nicomede.



a 28. primi.
b 28. primi.
c 34. primi.
d 29. primi.

Scio principium illud Procli in lineis rectis esse verissimum, & quod facili negotio, si omnes demonstrationes Euclidis, quæ ex axiomate 13. pendent, concedantur, demonstrari possit hoc modo. Contineant duæ rectę AB, AC, angulum *A*, & data sit recta D, cujusvis magnitudinis. Dico distantiam rectarum *AB*, *AC*, in infinitum productarum excedere magnitudinem D. Nam ex



quovis

quovis puncto E, in recta *AB*, sumpto demittatur ad AC, perpendicularis *EF*, quæ si major fuerit, quàm *D*, constat propositum: si verò non est major, sumatur ejus multiplex proximè major, quàm D, nempe G. Sumpta autem AB, ipsius AE, ita multiplici, ut multiplex est G, ipsius *EF*, demittatur ex B, ad *AC*, perpendicularis BC, quam dico majorem esse data recta *D*. Quoniam enim *a* est, ut *AB*, ad *BC*, ita *AE*, ad *EF*. (quod ex coroll. propos. 4. lib 6. Euclid. triangula ABC, AEF, similia sint, ob rectas *BC*, *EF*, quæ *b* parallelæ sunt.) Et permutando, ut AB, ad AE, ita BC, ad EF: erit ita multiplex *BC*, ipsius EF, ut multiplex est *AB*, ipsius AE, hoc est, ut multiplex est G, ipsius *EF*. Cùm ergò BC, & G, æquè multiplices sint ipsius EF, ipsæ erunt inter se æquales. Est autem ex constructione, major G, quàm *D*. Igitur & BC, distantia puncti B, à puncto C, major erit, quàm recta D, data. Quod est propositum.

a 4. *sexti.*
b 28. *primi.*

Verùm demonstratio hæc sine proprietatibus linearum parallelarum, quæ axiomate illo 13. nituntur, vim nullam habet, ac proinde principium illud Procli assumi non potest ad illud axioma 13. demonstrandum, ne principium in eo demonstrando petatur. Quæ cùm ita sint, sedulo dedimus operam, ut illud ipsum Euclidis axioma demonstraremus ex iis solùm, quæ ante propos. 29. primi libri demonstrata sunt. Ante enim propos. 29. usus illius axiomatis apud Euclidem nullus est. Id quod in Euclide quodam *A*rabico factum etiam esse accepi, sed nunquam facta mihi est copia demonstrationem illam legendi, etsi obnixè illud iterum atque iterum ab eo, qui eum Euclidem *A*rabicum possidet, flagitavi. Quare hanc, quæ sequitur, excogitavimus. Primum autem præmittenda quoq; sunt nonnulla, quæ licèt ad id, quod proponimus, demonstrandum requirantur necessariò, multò tamen evidentiora sunt ac faciliora axiomate illo Euclidis, ita ut omni dubitatione excluſa, firmum eis assensum præbere possimus. Primum sit hujusmodi.

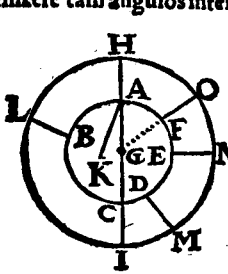
I.

Linea, cujus omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est.

Vt si omnia puncta lineæ AB, à recta *DC*, æqualiter distent, hoc est, omnes perpendiculares, quales sunt *AD*, EH, FG, BC, ad *DC*, demissæ æquales sint (perpendicularis enim quælibet, cùm sit omnium ex eodem puncto ad rectam *DC*, ductarum minima ex coroll. prop. 19. hujus lib distantiã puncti, à quo ducta est metitur) erit *AB*, linea recta. Hoc autem ex defin. lineæ rectæ liquido constare potest Nam si omnia puncta lineæ *AB*, æqualiter distant à recta DC, ex æquo sua interjacebit puncta, h. e. nullũ in ea punctum

intermedium ab extremis ſurſum, aut deorſum, vel huc aeq; illuc deflectendo ſubſultabit, nihilq; in ea flexuoſum reperietur, ſed æquabiliter ſemper inter ſua puncta extendetur, quemadmodum recta DC. Alioquin non omnia ejus puncta æqualem à recta DC, diſtantiam haberent, quod eſt contra hypotheſin. Neq; verò cogitatione apprehendi poteſt, aliam lineam præter rectam poſſe habere omnia ſua puncta à recta linea, quę in eodem cū illa plano exiſtat, æqualiter diſtantia. Eſt ſane principiū hoc, ex quo ſolo cōceſſo, una cū iis, quę uſq; ad prop. 29. hujꝰ lib oſtenſa ſunt, axiomata 13. demōſtrabimus, adeò clarū, ut lumine naturali cognitū ſit, nemoq; ſanę mētis illud negare poſſit. Aut certè citra omnē cōtroverſiā eſt ejuſmodi, ut longè facilius ei quilibet aſſentiatur, quam illi axiomati 13. Euclidis.

Idem prorſus in linea circulari contingit. Nam etiam linea inflexa circularem lineam ambiens, cujus omnia puncta æqualiter à circulari diſtant, id eſt, à qua omnes rectæ in circularem lineam ad æquales angulos incidentes æquales ſunt, circularis quoq; eſt; ita ut naturam circularis lineæ, à qua æquali ſemper diſtantia abeſt, induat: quemadmodum linea æqualiter ſemper à recta linea diſtans, naturam lineæ rectę, cui ſemper æquidiſtat, induit, propterea q; recta eſt, ut diximus. Quod autem inflexa illa linea circa lineam circularem ſit quoq; perfectè circularis, facilè oſtendemus, ſi prius demonſtremus rectam ex centro circuli ductam efficere cum circumferentia angulos binos æquales; & contra, rectam, quæ æquales cum circumferentia angulos conſtituat, per centrum tranſire. Sit igitur circulus ABCDEF, cujus centrum G. Dico rectam GC, ex centro ductam efficere tàm angulos internos GCB, GCD, quàm externos ICB, ICD, inter ſe æquales. Producta enim IG, uſq; ad A, ſi ſemicirculus ABC, circa diametrum AC, intelligatur circumverti congruet is ſemicirculo AEC, cum ſemicirculi ejuſdem circuli ſint inter ſe æquales. Quod ſi quis dicat, unū ſemicirculū, alterū interſecare, ducenda erit recta linea ex centro G, ſecans utramque circumferentiam, colligendumq; partē toti eſſe æqualem, nimirū ſemidiametrū uſque ad interiorem circumferentiam, ſemidiametro ad exteriorem uſq; circumferentiam ductæ, quod abſurdū eſt. Anguli igitur ad C, tam interni, quàm externi inter ſe congruent, ac proinde æquales erunt. Efficiat jam recta HAK, æquales angulos ad A. Dico eam per centrū tranſire. Si enim nō tranſeat, ducatur ex centro G, ad A, recta GA, quę ex proximè demōſtratis āgulos GAB, GAF, cōſtituet æquales. Non ergò æquales ſunt KAB, KAE. Quod eſt contra hypotheſin.



Hoc oſtenſo, ambiat inflexa linea HLIMNO, circularem lineam ABCDEF,

ABCDEF, omniaque eius puncta ab hac æqualiter absint, id est, omnes rectæ ab ea linea in circularem lineam cadentes, efficientesque angulos æquales, sint inter se æquales, cujusmodi sunt HA, LB, IC, MD, NE, OF. Hæ enim cum, ut demonstratum est, per centrum transeunt, erunt omnium ex punctis H, L, I, M, N, O, in convexam peripheriam cadentium, minimę: (Hoc enim demonstratum est ab Euclide propos. 8. lib. 3. quæ solum ex propositionibus, quæ 20. hujus lib. antecedunt, pendet, ut jure optimo huc transferri possit) atque adeò eorum distantias à subjecta linea circulari metientur. Dico lineam HLIMNO, esse circularem. Cùm enim omnes illę ut proximè ostendimus, per centrum G, transeant: si æqualibus HA, OF, addantur æquales AG, FG, erunt totæ HG, OG, æquales: eadem que ratione omnes aliæ ex linea inflexa HLIMNO, ad G, ductæ æquales erunt & rectis HG, OG, & inter se. Ex defin. circuli igitur linea inflexa circularis est. Quod erat demonstrandum. Ex hoc primo, quod præmisimus, sequitur secundum: videlicet.

2. Si recta lineam super aliam rectam in transversum moveatur, constituens in suo extremo cum ea angulos semper rectos, describet alterum illius extremum lineam quoque rectam.

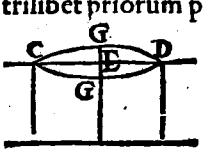
Vt si in priore figura recta AD, ad DC, perpendicularis moveatur in transversum super rectam DC, constituens cum ea in D, semper rectos angulos, hoc est, non titubans, aut vacillans, sed æquabiliter semper incedens, describet extremum A, rectam quoque lineam, nempe AB. Constat hoc ex eo, quod primo loco præmisimus: propterea quod omnia puncta lineæ AB, descriptæ æqualiter à recta DC, distant, nimirum per rectam AD Ex quo fit, ipsam lineam rectam esse, cum, ut ibi dictum est, ejus media ab extremis non subsultent, sed æqualiter inter ipsa jaceant, quippe cum nullum eorum magis aut minus à recta CD, abscedat sursum aut deorsum vergendo, quam aliud. Patet hoc etiam ex iis, quæ ad definitionem lineæ rectæ scripsimus. Cùm enim duo puncta D, A, similibus prorsus motibus ferantur (quod recta AD, in suo motu non titubet, aut vacillet, sed puncta D, A, æquè velociter incedant, æqualiterq; semper inter se distent) describent utiq; lineas similes, ut in eadem definitione docuimus. Cùm ergò punctum D, rectam DC, describat, erit quoque linea AB, quam punctum A, describit, recta. Neq; verò imaginari quis poterit, si linea recta in transversum moveatur uniformiter sine ulla titubatione huc atq; illuc, duo puncta ejus extrema describere duas differentes inter se lineas: sed qualem unum extremum describit, talem quoq; ab altero extremo describi necesse est, propter uniformem illũ æquabilemq; motũ utriusq; puncti extremi. Est principium hoc æque clarũ & evidens, atq; antecedens.

Con-

Contingit autem idem omninò in circulari linea. Nam eodem pacto recta linea ſuper lineam circularem in tranſverſum fluens æquabiliter, conſtituens nimirum in ſuo extremo cum circuli æquales ſemper angulos non vacillando, aut deflectendo huc atque illuc, circularem lineam altero ſuo extremo deſcribit, ita ut naturam circularis lineæ ſubjectæ à qua æqualiter ſemper diſtat, linea illa deſcripta induat: quemadmodum linea recta *AD*, ſuper rectam *DC*, in tranſverſum fluens æquabiliter, conſtituens nimirum cum ea in ſuo extremo *D*, angulos ſemper rectos, ita ut nuſquam declinet, huc atq; illuc deflectendo, aut titubando, lineam rectam *AB*, altero extremo A, delineat: adeo ut linea deſcripta *AB*, naturam induat rectæ lineæ ſubjectæ *DC*, à qua æqualiter ſemper recedit. Rectam autem, quæ ſuper lineam circularem in tranſverſum fluit æquabiliter, deſcribere altero ſuo extremo lineam quoq; circularem, facilè demonſtrabimus. Moveatur enim in figura poſteriore recta *HA*, in tranſverſum ſuper peripheriam *ABCDEF*, æquabiliter, faciens ſemper in extremo A, cum ea angulos æquales. Dico lineam HLIMNO, ab altero extremo H, deſcriptam eſſe quoq; circularem. Cùm enim recta *HA*, in omni ſitu motus illius imaginarii faciat æquales angulos cum peripheria *ABCDEF*, fit ut ea producta in centrum G, cadat, ut ſuprà oſtendimus. Quare additis rectis æqualibus *HA*, OF, ad rectas æquales *AG*, FG fient totæ rectæ HG, OG, & omnes aliæ, inter ſe æquales: ac propterea ex defin. circuli HLIMNO, circumferentia circuli erit. Quod oſtendendum erat. Hinc ſequitur tertium.

III.

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam conjungantur, erit perpendicularis ex quovis puncto hujus rectæ ad priorem rectam demiſſa, utrilibet priorum perpendicularium æqualis.



Sint ad rectam AB, erectæ duæ perpendiculares *AC*, *BD*, inter ſe æquales: Et ducta recta *CD*, demittatur ex quolibet ejus puncto E, ad *AB* perpendicularis *EF*. Dico *EF*, utriq; *AC*, *BD* eſſe æqualem. Si namq; æqualis non eſt, erit vel major, vel minor. Abſciſſa ergò æquali FG, ſi intelligatur recta *AC*, moveri in tranſverſum per rectam *AB*, faciens cum ea angulos ſemper rectos, deſcribet punctum *C*, lineam rectam per G, tranſeuntem, ut ſuprà oſtenſum eſt, qualis eſt CGD Duæ ergò rectæ *CED*, CGD, ſuperficiem claudent. Quod eſt abſurdum. Æqualis igitur eſt *EF*, utrique *AC*, *BD*. Quod erat oſtendendum, Ex hoc quartum, quod ſequitur demonſtrabimus.

Si ad

IV.

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam conjungantur, efficiet hęc recta cum utraque perpendiculari angulum rectum.

Sint ad rectam AB, erectæ duæ perpendiculares AC, BD, æquales inter se, ducaturq; recta CD. Dico utrumq; angulum C, D, rectum esse. Secta namq; recta AB, bifariam in E, excitetur in E, ad AB, perpendicularis EF, jungāturq; rectæ AF, BF. Quoniam igitur duo latera AE, EF, trianguli AEF, duobus lateribus BE, EF, trianguli BEF, æqualia sunt, utrumq; utriq;, angulosque continent æquales, puta rectos, erunt quoq; & bases AF, BF, & tàm anguli FAE FBE, quàm AEE, BFE, inter se æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis FAE, FBE, ex rectis æqualibus CAE, DBE, reliqui erunt æquales anguli CAF, DBF, Itaq; cum duo latera CA, AF, trianguli CAF, duobus lateribus DB, BF, trianguli DBF, æqualia sint, angulosq; complectantur æquales, ut ostendimus, *b* erunt quoque & bases CF, DF, & tam anguli CD, quam CFA, DFB, inter se æquales. Si ergò æqualibus angulis CFA, DFB. addantur anguli AFE, BFE, ostensi æquales, fient toti anguli CFE, DFE, æquales, ac proinde recti. Quia verò perpendicularis EF, utrique AC, BD, æqualis est, ut proximo theoremate ostendimus, erunt duæ rectæ AC, EF, ad AE, perpendiculares, inter se æquales. Quare, ut de angulis C, D, proximè probatum est, anguli C, & EFC, æquales inter se erunt. Est autem EFC, ostensus rectus. Igitur & C, rectus erit, ac proinde & angulus D, qui ostensus est ipsi C, æqualis.

a 4. *primi.*

b 4. *primi.*

Cæterum angulos C, D, rectos esse, demonstrabimus alio modo, hoc prius theoremate præmisso.

Si in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum una earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum, duæ illæ rectæ minus semper inter se distabunt ad eas partes, ubi est angulus acutus, ex altera verò parte semper inter se magis distabunt.

Recta linea AB, in rectas AC, BD, incidens faciat angulum ABD, rectum, & BAC, acutum. Dico rectas AC, BD, minus semper inter se distare versus C, D, productas, magis verò, si versus E, F, producantur, *c* Ducatur

c 12. *primi.*

tur enim ex B, ad AC, perpendicularis BG, quæ ex coroll. 2. prop. 17. hujus lib. ad partes acuti anguli BAC, cadet: ac propterea angulus GBD, pars recti anguli ABD, acutus erit. Demissa ergò ex G, ad BD, perpendicularis GH, cadet quoque ad partes anguli acuti GBD, ex eodem coroll. anguluſq; propterea HGC, pars recti anguli BGC, acutus erit. Rursus ergò ducta perpendicularis HI, ad AC, per idem coroll. ad partes acuti anguli HGC, cadet, ideoque angulus IHD, pars recti anguli GHD, acutus erit. Atque ita deinceps infinitum, ſi ex I, ad BD, perpendicularis IK, ducatur, & ex K, perpendicularis KC, ad AC, & ex C, ad BD, perpendicularis CD, &c. Cadent omnes ad partes angulorum acutorum, una poſt aliam. Quoniam igitur in triangulo ABG, angulus BAG, acutus eſt, & AGB, rectus, *a* erit recta AB, major quàm GB: & in triangulo BGH, recta BG, angulo recto GHB, oppoſita, major quàm GH: & in triangulo GHI, recta GH, major quàm HI: Atque ita deinceps erunt ſemper rectæ, quæ ipſi AB, propiores ſunt, majores iis, quæ remotiores ſunt, & nunquam finis erit hujus decrementi perpendicularium. Quapropter recta AC, in G, minus diſtabit à recta BD, quàm in A, & in I, minus quàm in G, & in C, minus quàm in I, &c. quandoquidem perpendiculares AB, GH, IK, CD, &c. quæ ordinatim decreſcunt, ut oſtendimus, minimæ ſunt omnium à punctis A, G, I, C, in rectam BD, cadentium, ut ex coroll. propoſ. 19. hujus lib. liquet: ac proinde eorundem punctorum diſtantias ab eadem recta BD, metiuntur. Conſtat ergo, rectas AC, BD, ad partes C, D, productas continenter fieri minus inter ſe diſtantes, quod eſt primum.

a 19. primi.

Ducatur rursus *b* ex A, ad AC, perpendicularis AL, quæ angulum obtuſum BAE, partietur in rectum EAL, & acutum LAB, hoc eſt, cadet inter AB, & AE: eritque angulus ALB, acutus, cùm ambo ABL, ALB, *c* ſint duobus rectis minores, atque ABL, rectus ſit: ac proinde angulus ALF, obtuſus erit. Eadem ratione perpendicularis LM, ex L, ad BF, ducta cadet inter LA, LF, facietque angulum LMA, acutum, & LME, obtuſum. Item perpendicularis MN, ex M, ad AE, erecta cadet inter ML, ME, angulumque MNB, acutum, & MNF, obtuſum conſtituet. Atq; ita deinceps in infinitum, ſi ex N, ad BF, perpendicularis erigatur MO, & ex O, ad AE, perpendicularis OP, & ex P, ad BF, perpendicularis PE, & ex E, ad AE, perpendicularis EF, &c. dividentomnes ſigillatim angulos obtuſos, una poſt aliam. Quoniam igitur in triangulo ABL, angulus ABL, rectus eſt, & ALB, acutus *d* erit AL, recta major, quàm AB, & in triangulo ALM, recta LM, angulo recto LAM, oppoſita, major quàm AL; atq; in triangulo LMN, recto MN, recto angulo MLN, oppoſita, major quàm ML, atq; ita deinceps erunt ſemper rectæ quæ ab AB, longius abſunt, majores iis, quæ propinquiores ſunt, in infinitū. Quamobrem recta AE, in M, magis à recta BF, diſtabit, quàm in A, & in O, ma-

b 11. primi.

c 17. primi.

d 19. primi.

O, magis quam in M, & in E, magis quàm in O, &c. quandoquidem perpendicularis AB. ML, ON, EP, &c. quas ordinatim augeri oſtenſum fuit, minimæ ſunt omnium ex punctis A, M, O, E, in rectam BF, cadentium, &c. Liquido ergò conſtat, rectas AC, BD, ad partes E, F, productas continenter fieri magis inter ſe diſtantes, quod eſt ſecundum. Quod ſi protervus quiſpiam vellet contendere, rectam AL, quæ ad AC, perpendicularis eſt, non concurrere cum DB, producta, conſtabit multò magis id, quod demonſtrandũ proponitur. Nam linea DB, ultra punctũ B, multò magis à recta CA, diſtabit, quàm in puncto B, quandoquidẽ AL, ad AC, perpendicularis in infinitũ producta nõ concurrit cum DB, cum tamen GB, ad eandẽ AC, perpendicularis cum DB, concurrat in B, &c.

Hæc cum ita ſint, nullo negotio demonſtrabimus, in ſupersori figura angulos C, D, *eſſe rectos. Nam ſi angulus* C, *verbi gratia, non dicatur eſſe rectus, erit vel acutus, vel obtuſus. Sit primum acutus. Quoniam ergò recta* CA, *in rectas* AB, CD, *incidens efficit angulum* CAB, *rectum, &* C, *acutum, minus ſemper inter ſe diſtabunt rectæ* CD, AB, *ad partes* D, B, *productæ, hoc eſt, perpendiculares ex* CD, *in* AB, *demiſſæ ordinatim minores fient, quàm* CA, *ut proximè demonſtratum eſt. Minor ergò eſt perpendicularis* DB, *quàm* CA, *quod eſt abſurdum, cum ponatur æqualis. Non igitur acutus eſt angulus* C. *Eademque ratione neq; angulus* D, *acutus erit. Sit deinde angulus* C *obtuſus. Quia igitur recta* CA, *in rectas* CD, AB, *incidens facit angulum* CAB, *rectum, &* B, *obtuſum, magis ſemper inter ſe diſtabunt rectæ* CD, AB, *ad partes* D, B, *productæ, hoc eſt, perpendiculares ex* CD, *in* AB, *demiſſæ continenter augebuntur, ut proximè oſtendimus. Major ergò eſt perpendicularis* DB, *quàm* CA, *quod eſt abſurdum, cum æqualis ponatur. Non igitur obtuſus eſt angulus* C. *Eademq; ratione neq; angulus* D, *obtuſus erit. Sed neq; acutus eſt oſtenſus. Rectus igitur uterq; eſt, quod erat oſtendendum.*

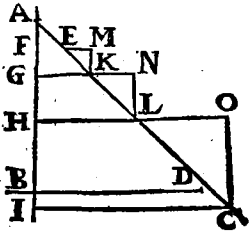
Ex his demonſtratis facilè jam axioma 13. *demonſtrabimus hoc modo.*

V.

Si in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad eaſdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuò incident ad eas partes, ubi ſunt anguli duobus rectis minores.

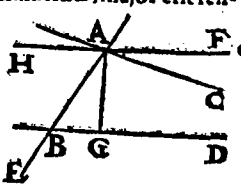
Hoc eſt axioma 15. apud Euclidem in noſtris commentariis; apud alios eſt undecimum, quod demonſtrandum ſuſcepimus. Incidens ergò recta AB, in rectas AC, BD, faciat internos, ad eaſdemq; partes angulos ABD, BAC, duobus rectis minores. Dico rectas AC, BD,

BD, ad partes C, *D*, productas coire. Sit enim primum alter angulorum, nempe *A*BD, rectus, & alter B*AC*, acutus. Sumpto in recta
a 12. *primi.* AC, puncto quolibet E, *a* ducatur ex eo ad rectam AB, perpendicularis *EF*, & rectæ AF, æqualis accipiatur *FG*, & GH, æqualis ipsi AG, & HI, ipsi AH, ita ut AG, ipsius AF, & *AH*, ipsius AG, & AI, ipsius *AH*, dupla sit. Et quoniam si rectæ AF, abscindantur continuè æquales rectæ ex AB, aliqua tandem pars ultra B, punctum cadet, quod finita recta AB, per continuam abscissionem unius ejusdemq; quantitatis absumatur tandem, quandoquidem linea *AF*, ita multiplicari potest (quod fit, sumendo ipsi in AB, continenter partes æquales) ut tandem aliquando finitam lineam AB, superet. Id quod Euclides frequenter assumit in lib 5. & aliis sequentibus, ubi datis duabus magnitudinibus inæqualibus proportionem inter se habentibus, jubet plerunq, minorem ita multiplicari, donec majorem superet. Fit, ut multò magis, si ipsi AF, æqualis abscindatur FG, & toti deinde AG, non autem soli AF, æqualis auferatur GH: Item toti AH, non autem soli *AF*, vel AG, æqualis dematur HI, & sic deinceps, cadat tandem pars aliqua ultra punctum *B*. Statuatur ergò punctum I, terminans tertiam duplam in dato exemplo existere ultra punctum B. Accipiatur quoq; in recta AC, recta *EK*, ipsi *AE*, & KL, ipsi AK, & LC, ipsi *AL*, æqualis, ita ut tot fiat partes in recta AC, quot in recta AI; ducanturq; rectæ KG, LH, CI, producanturque una cum EF, ut *EM*, KN, LO, ipsis *EF*, KG, LH, fiant æquales, ac tandem rectæ jungantur MK NL, OC. Itaq; quoniam *duo latera* KE, *EM*, *trianguli* KEM, *duobus lateribus* AE, *EF*, trianguli AEF, per constructionem æqualia sunt, utrumq; utrique; *b* angulosque ad verticem E, continent æquales, *c* erit & basis
b 15. *primi.* MK, basi AF, & angulus M, angulo F, æqualis. Est autem & FG, eidem
c 4. *primi.* *AF*, æqualis, & angulus *F*, rectus, ex constructione. Igitur & MK, *FG*, *d* æquales inter se erunt & angulus M, quoque rectus. Quare
d 1. *primi.* cum ad FM, excitatæ sint duæ perpendiculares æquales *FG*, MK, erit per antecedens theorema, angulus G, rectus. Rursus ergò, quia
e 15. *primi.* duo latera LK, KN, trianguli LKN, duobus lateribus AK, KG,
f 4. *primi.* trianguli AKG, æqualia sunt, ex constructione, *e* anguloque, comprehendunt æquales ad K, verticem, *f* erit & basis NL, basi *AG*, & angulus N, angulo G, æqualis. Est autem & GH, ex con-
g. 1. *pron.* structione, eidem AG, æqualis, & angulus G, rectus, ut proximè demonstratum est. Igitur & NL, GH, inter se *g* erunt æquales & angulus N, quoque rectus. Quocirca per præcedens theorema, erit etiam angulus H, rectus. Eadem ratione ostendemus angulũ I, rectum



ctum esse: atque ita deinceps, si plures essent partes rectæ AB. Est autem & angulus B, per hypothesin rectus. Igitur rectæ IC, BD, a parallelæ sunt: ac propterea BD, producta rectam AC, secabit supra punctum C; atque adeo in puncto illo sectionis rectæ AC, BD, coibunt. Quod erat demonstrandum. a 8. primi.

Sit deinde neuter angulorum ABD, BAC, rectus; sed ABD quidem acutus, & BAC, vel acutus etiam, vel obtusus. Quia igitur duo anguli ABD, BAC, duobus rectis ponuntur minores; b sunt autem duo anguli ABD, DBE, duobus rectis æquales: erunt hi duo illis duobus majores. Ablato ergò communi ABD, major erit reliquus DBE, reliquo BAC. c Constituatur F in A, ad rectam AB, angulus BAF, angulo DBE, æqualis: Cadetq; recta AF, supra rectam AC, cum AF, majorem angulum cum AB, constituat, quàm AC. Quia igitur externus angulus DBE, interno BAF, ex eadem parte oppositus æqualis est, d erunt rectæ AF, BD, inter se parallelæ. Demittatur quoque ex A, ad BD, e perpendicularis AG, quæ ex Coroll. 2. prop. 17. hujus lib. ad partes acuti anguli ABD, cadet. Eritque angulus quoque GAF, rectus. Nam si acutus esse dicatur, efficiet recta AG, in rectas AF, BD, incidens angulum AGD, rectum, & GAF, acutum, ac proinde, ut proximè demonstravimus, rectæ AF, BD, ad partes F, D, productæ coibunt tandem: Quod est absurdum. Ostensæ enim sunt parallelæ. Si autem angulus GAF, dicatur esse obtusus, erit GAH, acutus. Quare ex proximè demonstratis, coibunt rectæ AF, BD, ad partes HB, productæ, quod est absurdum, cum parallelæ sint ostensæ. Non est ergò angulus GAF acutus, aut obtusus. Igitur rectus, ac proinde ejus pars GAC, acutus. Quoniam igitur recta AG, in rectas AC, BD, incidens facit angulum G, rectum, & GAC, acutum, concurrent rectæ AC, BD, ad partes C, D, productæ, ut proximè demonstravimus. Si igitur recta AB, in rectas AC, BD, incidens faciat duos angulos minores duobus rectis, neutrum tamen angulorum ABD, BAC, rectum, ipsæ rectæ AC, BD, ad partes C, D, productæ convenient. Quod erat ostendendum. Quod si quando accidat, rectam AC, existere inter AB, & perpendicularem AG, liquido constat, rectas AC, BD, coire, quod tunc AC, basin BG, trianguli ABG, secaret. Quod ut facilius capias, ducere poteris rectam AC, inter AB, AG.



b 13. primi.
c 23. primi.
d 28. primi.
e 12. primi.

Quamvis autem, concesso principio nostro, optimè à nobis demonstratum sit tertiumdecimum hoc axioma, & à Proclo etiam, si ejus principium difficilius quidem, quam nostrum, admittatur, ut jure optimo inter theoremata, & non inter principia possit connumerari; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, utemur eo

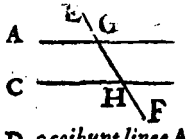
mur eo in omnibus propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendent, tanquam pronunciato. Sed jam ad seriem propositionum Euclidis revertamur.

THEOR. 20. PROPOS. 29.

XXIX.

In parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

In parallelas AB, *CD, recta incidat* EF. *Dico primum, angulos alternos* AGH, DHG, *inter se esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit alter, nempe* AGH, *major. Quoniam igitur angulus* AGH, *major est angulo* DHG, *si addatur communis angulus* BGH; *erunt duo* AGH, BGH, *majores duobus* DHG, BGH: *At duo* AGH, BGH, *æquales sunt duobus rectis. Igitur duo* DHG, BGH, *minores sunt duobus rectis. Quare cum sint interni, & ad easdem partes,* B, & D, *coibunt linea* AB, CD, *ad eas partes, quod est absurdum, cùm ponantur esse parallelæ. Non est igitur angulus* AGH, *major angulo* DHG: *Sed neque minor. Eadem enim ratione ostenderetur, rectas coire ad partes* A, & C. *Igitur æquales erunt anguli alterni* AGH, DHG. *Eademque est ratio de angulis alternis* BGH, CHG.



a 4. *pron.*
b 13. *primi.*
c 13. *pron.*

Dico secundo, angulum externum AGE, *æqualem esse interno, & ad easdem partes opposito* CHG. *Quoniam enim angulo* BGH, *æqualis est alternus* CHG, *ut ostensum est; & eidem* BGH, *æqualis est angulus* AGE. *Erunt anguli* AGE, CHG, *inter se quoque æquales. Eodem modo demonstrabitur, angulum* BGE, *æqualem esse angulo* DHG.

d 15. *primi.*
e 1. *pron.*

Dico tertio, angulos internos ad easdem partes AGH, CHG, *æquales esse duobus rectis. Quoniam enim ostensum fuit, angulum externum* AGE, *æqualem esse angulo* CHE, *interno; si addatur communis* AGH, *erunt duo* AGE, AGH, *duobus* CHG, AGH, *æquales: Sed duo* AGE, AGH, *æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo anguli* CHG, AGH, *æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli* BGH, DHG, *duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergò rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos, &c. Quod erat demonstrandum.*

f 2. *pron.*
g 13 *primi.*

SCHOLIVM.

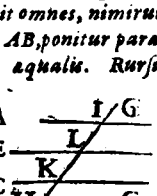
Convertit autem hoc præsens theorema duo præcedentia theoremata, ut perspicuum est.

THEOR.

THEOR. 21. PROPOS. 30. xxx.

Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

Sint rectæ AB, CD, *eidem rectæ* EF *parallelæ. Dico & ipsas* AB, CD, *esse inter se parallelas. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse plano. (Nam propos. 9. undecimi libri agetur de lineis in diversis planis) ducta recta* GH, *secabit omnes, nimirum* AB, *in* I: CD, *in* K, & EF, *in* L. *Quia igitur* AB, *ponitur parallela ipsi* EF, a *erit angulus* AIL, *alterno* FLI, *æqualis. Rursus quia* CD, *ponitur etiam parallela ipsi* EF, b *erit angulus* DKI, *eidem angulo* FLI, *nempe internus existens, vel externus interno, æqualis. Quare anguli* AIL, DKI, c *æquales inter se quoque erunt. Cum igitur sint alterni,* d *erunt rectæ* AB, CD, *parallelæ inter se. Quæ igitur eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat.*



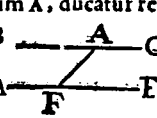
a 29. primi.
b 29. primi.
c 1. pron.
d 27. primi.

SCHOLIVM.

Quod si quis dicat, duas rectas AI, BI, parallelas esse rectæ CD, & tamen ipsas non esse parallelas: Occurrendum est, duas AI, BI, non esse duas lineas, sed partes tantùm unius lineæ. Concipiendum est animo, quaslibet parallelas infinitè esse productas: Constat autem AI, productam concidere cum BI. Quamobrem propositio hæc generalius ita poterat proponi.

Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ: vel certè, quando inter se coeunt, unam eandemque lineam constituunt.

Sint enim duæ rectæ *AB*, *AC*, coeuntes in *A*, parallelæ ipsi DE. Dico illas in rectum constitutas. Ex puncto enim A, ducatur recta AF, secans DG, in F, utcunque. Quoniam igitur *AB*, DE, sunt parallelæ, e erunt anguli alteri *BAF*, AFE, æquales. Addito ergò communi angulo *CAF* f erunt duo anguli ad *A*, æquales duobus angulis *CAF*, AFE. Sed hi duo g æquales sunt duobus rectis, cum sint interni inter duas parallelas *AC*, DE. Igitur & duo anguli ad A, duobus erunt rectis æquales: ac propterea *h* in rectum erunt constitutæ ipsæ *AB*, *AC*. Quod est propositum.



e 29. primi.
f 2. pron.
g 29. primi.
h 14. primi.

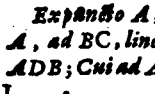
PROBL. 10. PROPOS. 31. xxxi.

A dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Expuncto A, ducenda sit linea parallela lineæ BC. *Ducatur ex A, ad* BC, *linea* AD, *utcunque, faciens angulum quemcunque,* ADB; *Cui ad A, æqualis constituatur* EAD. *Dico rectam* EA, *extensam ad* F, *quantumlibet, parallelam esse ipsi* BC. *Cum enim anguli alterni* ABD, DAE, *æquales sint, per constructionem,* b *erunt rectæ* BC EF, *parallelæ.* A *dato igitur puncto, data rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.*

a 23. primi.

b 27. primi.



SCHOLIVM.

Debet autem punctum datum in tali esse loco situm extra lineam datam, ut hæc producta cum illo non conveniat. Quod quidem apertè colligitur ex ipsa constructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda est linea faciens angulum aliquem cum linea data, qui fieri non posset, si punctum in directum jaceret cum ipsa linea data. Quemadmodum autem ab uno, eodemque puncto ad eandem rectam non plures perpendiculares, quam una, ducuntur, ut ostendimus propos. 17. ex Proclo: ita etiam per idem punctum, datæ rectæ plures parallelæ, quàm una, duci nequeunt. Si enim ducerentur, convenirent ipsæ in puncto illo eodem, quod est absurdum, c cum sint parallelæ inter se, propterea quod uni & eidem, cui parallelæ dicuntur duci, sunt parallelæ.

c 30. primi.

Ex hoc porrò problemate, & illo, quod propos. 23. continetur, facili negotio constituemus parallelogrammum, cujus unus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraque angulum illum comprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia.

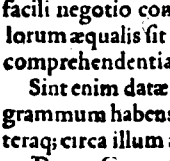
Sint enim datæ rectæ AB, oporteatque constituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C, lateraq; circa illum angulum rectis AB, æqualia. Sumpta recta DE, quæ rectæ A, sit æqualis, d fiat angulus EDF, angulo C, e & recta DF, rectæ B, æqualis. Deinde per E, f agatur recta EG, ipsi DF. parallela, & per F, recta FG, ipsi DE, parallela secans EG, in G. Quoniam ergò & latera DF, EG, & DE, FG, parallela sunt, ex constructione; g parallelogrammum erit DEGF. Quod cum ex constructione, habeat angulum D, angulo dato C, æqualem, & latera DE, DF, circa dictum angulum D, datis rectis A, B, æqualia; factum erit, quod proponitur,

d 23. primi.

e 3. primi.

f 31. primi.

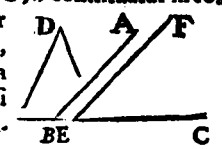
g 33. defin.



Pari ratione ex hoc problemate, & propos. 23. ducemus à puncto extra datam rectam lineam proposito lineæ rectam, quæ cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem, ut ad propos. 23, polliciti sumus.

Sit enim datum punctum A, extra rectam BC. & datus angulus rectilineus D, oporteatque ex A, ad rectam BC, ducere lineam rectam

tam, quæ cum ea angulum dato angulo D, æqualem comprehendat. Sumpto quolibet puncto E, linea BC, *a* constituatur in eo ad



b 31. primi.

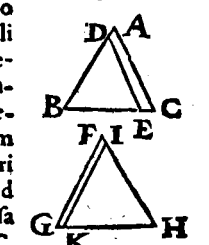
angulus CEF, angulo D, æqualis. Si igitur recta EF, per datum punctum A, transeat, factum erit, quod jubetur. Si verò non transeat per A, *b* ducatur per A, recta AB, ipsi EF, parallela secans BC, in B. Dico angulum ABC, angulo D, æqualem esse. Cùm enim parallelæ sint AB, EF, *c* erit angulus CEF, externus interno ABC, ex eadem parte oppositio æqualis. Cùm ergò & angulus D, angulo E, per constructionem sit æqualis, *d* æquales inter se erunt anguli ABC, & D, quod est propositum.

c 29. primi.

d 1. pron.

Non videtur autem alienum ostendere hoc loco, rectè Euclidem propos. 26. ut demonstraret æqualitatem laterum in duobus triangulis, ex æqualitate duorum angulorum, & unius lateris, præcepisse, latus illud vel adjacere debere angulis æqualibus, vel certè subtendere angulum æqualem. Nam nisi altera harum conditionum adsit, *nihil colligetur.*

Sit enim triangulum ABC, sintque latera AB, AC, latere BC, majora. Abscindatur BD, æqualis ipsi BC, *e* ducaturque DE, ipsi AC, parallela, *f* eritque angulus BED, angulo C, æqualis. Quare duo anguli B, C, trianguli ABC, duobus angulis B, E, trianguli DBE, æquales sunt, uterque utrique, latusque BC, lateri DB, æquale; cum tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim BE, minus quàm BC, atque adeò neque lateri AC, neque lateri AB, æquale esse potest; quod hæc latera majora ponantur latere BC. Causa hujus rei est, quod latus BC, in triangulo ABC, adjacet angulis dictis, at latus DB, in triangulo DBE, opponitur uni angulorum dictorum, nimirum angulo DEB, qui angulo C, æqualis est.



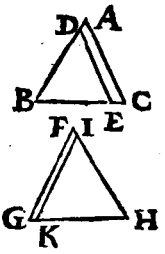
e 31. primi.

f 29. primi.

Sit rursus triangulum FGH, sintq; iterum latera FG, FH, latere GH, majora, & FH, majus quàm FG. Abscindatur HI, ipsi FG, æqualis, *g* ducaturque IK, ipsi FG, parallela: *h* eritque angulus HKI, angulo G, æqualis. Sunt ergò duo anguli H, G, trianguli FGH, duobus angulis H, K, trianguli IKH, æquales, uterque utriq; latusq; FG, lateri IH, æquale; cum tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim HK, minus, quam HG, atque adeò neque lateri HG, neque lateri FH, æquale esse potest; quod latus FH, majus etiam ponitur, quàm GH. Ratio hujus rei est, quod latus FG, in triangulo FGH, opponitur angulo H, ad latus IH, opponi-

g 31. primi.

h 29. primi.

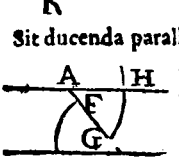


tur angulo K, in triangulo IKH, qui non ponitur æqualis angulo *H*, sed angulo G, est æqualis, *a* qui major est angulo H, propterea quod latus FH, majus posuimus latere FG. Distulimus hanc demonstrationem hunc in locum, propter linearum parallelarum proprietates, ex quibus pendet.

a 18. primi.

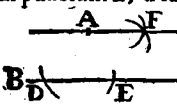
PRAXIS.

Sit ducenda parallela ipsi BC, per punctum A. Ducatur recta *AD*, utcunque ad *BG*, & ex D, & *A*, adidem intervallum quodlibet describantur duo arcus ad diversas partes, unus ad partes B, alter ad partes C. Deinde beneficio circini arcui *EF*, abscindatur ex arcu altero arcus GH, æqualis. Si igitur ex *A*, per *H*, recta ducatur, *b* erit hæc parallela ipsi *CB*. Nam alterni anguli *EDF*, *HAG*, sunt æquales, ut constat ex praxi prop. 23. &c.

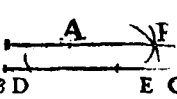


b 27. primi.

Alio modo ducetur per idem punctum A, datum linea parallela lineæ datæ *BC*, hac arte. Ex centro *A*, ad quodvis intervallum describatur arcus BC, in puncto D; & eodem intervallo ex *D*, sumatur punctum *E*, in eadem recta BC. Deinde eodem intervallo ex *A*, & E, describantur duo arcus secantes sese in *F*. Nam ducta recta A*F*, erit parallela rectæ *BC*. Quoniam enim propter idem intervallum assumptum recta *AF*, æqualis est rectæ *DB*; & recta *AD*, rectæ EF, si ducerentur hæ lineæ; erit *AF*, oppositæ *DE*, parallela, ut postea demonstrabimus prop. 34.



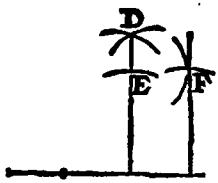
Quod si punctum *A*, vicinum fuerit rectæ *BC*, commodius hac lege parallela optata ducetur. Ex *A*, sumatur punctum D, in BC, ad quodvis intervallum; Et ex quovis puncto ejusdem rectæ *BC*, nempe E, quod tamen aliquantulum distet à puncto D (Quo enim major fuerit distantia inter *D*, & E, eo facilius & accuratius parallela ducetur) eodem intervallo arcus describatur ad partes A. Deinde ex A, intervallo *DE*, alter arcus descriptus secet priorem arcum in *F*. Recta namq; ducta *AF*, erit parallela rectæ *BC*, ut prius; quia recta AF, æqualis est rectæ *DE*, ob idem intervallum; & recta *AD*, rectæ EF, si hæ rectæ essent, &c.



Sed longè facilimam rationem ducendi parallelam alicui lineæ per datum punctū tradidimus in nostro *Astrolabio* lib. 1. lemmate 4.

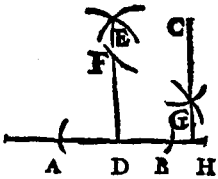
Ex his facilè ducemus ex puncto extremo alicujus lineæ perpendicularem lineam ad ipsam datam lineam, etiamsi linea produci possit, quod in scholio propos. 11 promisimus. Sit enim recta *AB*, ex cujus extremo puncto B, educenda sit ad eam perpendicula-

dicularis. Sumpto puncto quovis C, abscindatur rectæ *CB*, æqualis CA, & ex A, & *B*, ad quodvis intervallum duo arcus describantur secantes sese in D, ducaturque recta DC, quæ ad *AB*, perpendicularis erit, ut ad propos. 11. scripsimus. Deinde per B, ducatur *ipsi CD*, parallela, *hoc modo, secundum praxin hujus 31. propositionis proximè explicatam.* Ex *CD*, abscissa *recta quantacunque* CE, describatur ex *B*, ad intervallum *CE*, arcus, quem in *F*, secet alius arcus ex E, ad intervallum *CB*, descriptus, ducaturque recta *BF* Hæc namque ipsi CD, parallela erit, ut ex praxi hujus propos. *31*. liquet. Igitur cum angulus ACD, *a* æqualis sit interno CBF; sit autem ACD, rectus, erit & CBF, rectus, ac proinde BF, ad AB, perpendicularis erit.



a 29. *primi.*

Similiter si data sit recta AB, & punctum extra ipsam C, in extremo ferè plani, in quo recta illa jacet, ducemus ex C, ad AB, perpendicularem, neque producta linea, neque extenso plano infra rectam *AB*, ut polliciti sumus ad propos. 12. hoc modo. Sumpto puncto *D*, utcunque in linea *AB*, abscindantur utrinq; inter se æquales DA, DB, & ex *A*, & B, ad quodvis intervallum duo arcus describantur secantes sese in E, ducaturque recta *ED*, quæ ex praxi propos. 11. ad AB, perpendicularis erit. Deinde per *C*, ducatur ipsi DE, parallela, hoc modo, secundum praxin hujus prop. 31. Ex dato puncto *C*, ad quodvis intervallum describatur arcus secans rectam *DE*, in F: eodemq; intervallo ex D, versus C, alius arcus describatur, qui in G, intersecet alius arcus ex *C*, ad intervallum DF, delineatus. Recta nanq; ducta ex *C*, per G, secans *AB*, in H, parallela erit rectæ *DE*, ex praxi hujus prop. 31 Quare, ut proximè scripsimus, CH, ad AB, perpendicularis erit, sicuti & ED, ad eandem perpendicularis erit.



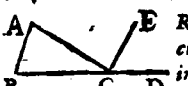
THEOR. 22. PROPOS. 32. XXXII.

Cujuscunq; trianguli uno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

Producatur in triangulo ABC, *latus* BC, *ad* D. *Dico primo, angulum externum* ACD, *æqualem esse duobus internis, & oppositis simul* A, *&* B. b *Ducatur enim ex* C, *linea* CE, *parallela rectæ AB. Quoniam igitur recta AC, incidit in parallelas AB, CE,* c *erunt anguli interni* A, *&* ACE, *æquales.*

b 31. *primi.*

c 29. *primi.*



a 29. primi. *Rursus, quia recta* BD, *in easdem parallelas incidit*, a *erit angulus externus* DCE, *aqualis interno* B. *Additis igitur aqualibus* ACE, & A, b *fiet totus* ACD, (*qui ex duobus* DCE, ACE, b 2. pron. *componitur*) *duobus* A, & B, *simul aqualis. Quod est propositum.*

Dico secundò, tres angulos internos eiusdem trianguli A, B, & ACB, *duobus esse rectis aquales.* Cùm enim externus angulus ACD, *ut ostensum fuit, aqualis sit duobus internis* A, & B; *si addatur communis* ACB, c *erunt duo anguli* ACD, ACB, *aquales tribus* A, B, & ACB; c 2. pron. *Sed duo* ACD, ACB, d *aquales sunt duobus rectis. Igitur & tres interni*, A, B, ACB, *duobus sunt rectis aquales.* d 13. primi. *Quare cujusounque trianguli uno latere producto, &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

Cùm demonstratum sit propos. 16. angulum externum cuiusvis trianguli majorem esse utrolibet interno, & opposito, hic autem, eundem externum eisdem internis simul esse æqualem, perspicuum est, alterutrum internorum, & oppositorum superari ab externo, reliquo interno angulo opposito. Vt in triangulo proposito angulus A, internus superatur ab angulo externo ACD, angulo B, interno: Et angulus B, internus superatur ab eodem externo angulo ACD, angulo A, interno, quandoquidem angulus ACD, duobus angulis A, & B, est ostensus hoc loco æqualis. Rursum, quia demonstratum est propos. 17. duos angulos cujuslibet trianguli quomodocunq; sumptos, duobus esse rectis minores, hic verò omnes tres duobus rectis æquales esse; manifestum est, duos à duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eodem triangulo, duo anguli A, & B, à duobus rectis deficiunt angulo ACB, &c.

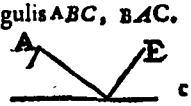
Omne porrò triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, ut refert Eudemus, Pythagorei demonstrarunt hac ratione. Sit triangulum ABC, & per punctum A e ducatur rectæ BC, parallela DE. Quoniam igitur anguli alterni DAB, & ABC, æquales sunt; si addantur æquales EAC, & ACB (sunt enim & hi alterni) g erunt duo anguli DAB, EAC, duobus ABC, ACB, æquales. Addito ergò communi angulo BAC, h erunt tres anguli DAB, BAC, CAE, æquales tribus angulis ABC, BAC, ACB,

e 31. primi. f 29. primi. g 2. pron. h 2. primi.

Sed anguli DAB, BAC, CAE, æquales sunt duobus rectis, ut constat ex propositione decimatertia. Igitur & in triangulo ABC, anguli ABC, BAC, ACB, duobus sunt rectis æquales, quod est propositum. Ex hoc autem facilè concludemus, angulum externum ACF, si latus BC, sit protractum

ctum, æqualem esse duobus internis, & oppositis ABC, BAC. Quoniam enim anguli ABC, BAC, ACB, æquales sunt duobus rectis, ut ostensum fuit. a Sunt autem & anguli ACF, ACB, duobus rectis æquales; Erunt anguli ABC, BAC, ACB, angulis ACF, ACB, æquales. Dempto igitur communi angulo ACB, b remanebit angulus ACF, duobus angulis ABC, BAC, æqualis. a 13. primi. b 3. pron.

Facilè etiam converti poterit prima pars propositionis Euclidis: Hoc est, si ab uno angulo trianguli linea recta ducatur, ut angulus externus æqualis sit duobus internis, & oppositis, illam lineam esse in directum ipsi lateri constitutam. Ex C, enim ducatur CD, recta, sitque angulus ACD, æqualis duobus angulis ABC, BAC. Dico rectas BC, CD, in directum iacere. Cum enim angulus ACD, æqualis sit angulis ABC, BAC, si addatur communis angulus ACB, c erunt anguli ACD, ACB, æquales angulis ABC, BAC, ACB: Sed ABC, BAC, ACB, d æquales sunt duobus rectis. Igitur & anguli ACD, ACB, duobus erunt rectis æquales. e Quare mi. BC, CD, unam lineam rectam constituunt.



c 2. pron. d 32. primi. e 14. primi.

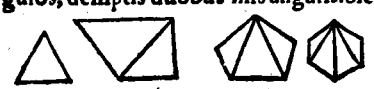
QVOT ANGVLIS RECTIS ÆQVIVALEANT anguli omnes interni cujuscunque figuræ rectilineæ.

Duobus modis ex hac propositione 32. colligemus, quotnam rectis angulis æquivaleant interni anguli figuræ cujuslibet rectilineæ, quorum primus hic est.

Omnes anguli figuræ rectilineæ cujusvis sunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipsa est inter figuras rectilineas.

Hoc est, omnes anguli primæ figuræ rectilineæ æquales sint bis uni recto, id est, duobus rectis; Anguli verò secundæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autem tertiæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis tribus rectis, sex videlicet rectis. Et sic reliquis. Eum autem locum quælibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, seu angulorum, dempto binario; quoniam duæ lineæ rectę superficiem non concludunt, unde nec figuram constituunt, sed cum minimum tres rectæ lineæ ad figurę constitutionem requiruntur. Ex quo fit triangulū, quia habet tria latera, totidemq; angulos, esse primam inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus, relinquitur unum. Sic erit figura habens 20. latera seu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctava, cum binarius subtractus ex

20. relinquat 18. Idem judicium de aliis figuris eſt habendum. Itaque figura contenta 20. lateribus, cùm ſit decimaoctava, habebit 20. angulos æquivalentes 36. rectis angulis nempe bis 18. angulis rectis, ut dictum eſt. Ita quoque omnes 10. anguli figuræ 10. lateribus contentæ, æquivalebunt 16. angulis rectis, cum talis figura ſit octava inter rectilineas figuras. Hoc autem hac ratione demonſtrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula dividitur, quota ipſa eſt inter figuras, ſeu quot ipſa habet angulos laterave, binario dempto. Nam à quovis angulo ipſius ad omnes angulos oppoſitos duci poſſunt lineæ rectæ, ſolùm ad duos propinquos angulos non poſſunt duci. Quare in tot triangula diſtribuetur, quot ipſa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic vides, triangulum non poſſe dividi in alia triangula; quadrangulũ verò in duo ſecari; quinquangulum in tria; ſexangulũ in quatuor &c.

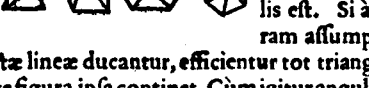


Cùm igitur anguli horum triangulorum conſtituant omnes angulos rectilineæ figuræ oppoſitæ, & omnes anguli cujuslibet trianguli æquales ſint duobus rectis; perſpicuum eſt, omnes angulos figuræ cujuſvis rectilineæ æquales eſſe bis tot rectis, in quot triangula dividitur, hoc eſt quota ipſa eſt inter rectilineas figuras. Quod quidem manifeſtè perſpicitur in propoſitis figuris.

Secundus modus, quo ſcitur valor angulorum cujuslibet figuræ rectilineæ, hic eſt.

Omnes anguli figuræ rectilineæ cujuſvis, æquales ſunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot ipſa continet latera, ſeu angulos.

Hoc eſt, anguli cujuslibet trianguli æquales ſunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis. Ita etiam anguli figuræ continentis 20. latera æquivalebunt bis 20. angulis rectis, minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c. Demonſtratio autem hujus rei talis eſt. Si à quovis puncto intra figuram aſſumpto ad omnes angulos rectæ lineæ ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, angulo-



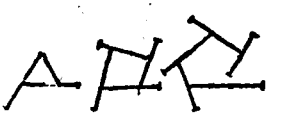
ve figura ipſa continet. Cùm igitur anguli cujuſcunq; trianguli *a* æquales ſint duobus rectis, erunt omnes anguli illorũ triangulorum æquales bis tot rectis quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundem triangulorũ circa punctum intra figuram aſſumptum conſiſtentes non pertinent ad angulos figuræ rectilineæ propoſitæ, ut conſtat. Quare ſi hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli conſtituentes angulos figuræ propoſitæ, bis quoq; tot rectis æquales, demptis illis circa punctum aſſumptum conſtitutis, quot

a 23. primi.

latera,

latera, vel angulos continet figura. Sunt autem omnes illi anguli quotquot sint, circa dictum punctum existentes æquales 4. rectis tantummodo, ut collegimus ex prop. 15. Quamobrem anguli cujusque figuræ bis tot rectis sunt æquales ablatis quatuor, quot ipsa figura continet angulos, seu latera, quod est propositum.

Ex hoc porrò secundo modo liquet, si singula latera figuræ cujusvis rectilineæ producantur ordinatim versus eandē partē, omnes angulos externos æquales esse quatuor rectis. Nam quilibet externus, & illi deinceps internus, æquantur duobus rectis; atq; adeò omnes externi una cum omnibus internis æquales erunt bis tot rectis, quot latera angulosve figura continet. Sunt autem & soli interni bis tot rectis æquales, minus quatuor, ut demonstravimus. Si igitur interni auferantur remanebunt externi quatuor tantùm rectis æquales, qui nimirum desunt internis angulis, ut interni & externi simul bis tot rectos conficiāt, quot latera figurā proposita ambiūt. Exemplum. In triangulo quovis anguli interni & externi simul æquales sunt sex rectis. Cùm igitur interni *b* duobus sint rectis æquales, erunt soli externi æquales quatuor duntaxat rectis In quadrilatero, anguli externi & interni simul æquales sunt octo rectis. Cùm igitur interni soli æquales sint quatuor rectis, ut ostendimus, erunt & soli externi quatuor etiam rectis æquales. In pentagono, seu quinquangulo, anguli interni & externi sunt æquales 10. rectis. Quoniam verò interni adæquantur sex rectis, ut demonstravimus, remanebunt externi æquales quatuor tantùm rectis. Quæ omnia in appositis figuris conspiciuntur. Eademque est ratio in aliis omnibus figuris.



b 32. *primi.*

13. *def.*

EX CAMPANO.

Si pentagoni singula latera producantur in partem utramque, ita ut quælibet duo extra pentagonum coeant, efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus solùm rectis.

In pentagono *A B C D E*, latera in utramque partem producta coeant in punctis F, G, *H*, I, K. Dico quinque angulos F, G, *H*, I, K, æquales tantùm esse duobus rectis. In triangulo enim *B H K*, cum latus *H B*, sit protractum ad F, *c* erit externus angulus F*B*K, duobus internis, & oppositis H, K, æqualis. Eadem ratione in triangulo AIG, erit externus angulus F*A* G, æqualis duobus internis, & oppositis IG. Quare duo anguli F*B A*, F*A B*, æquales sunt quatuor angulis G, *H*, I, *K*. Addito igitur communi angulo

c 32. *primi.*

angulo F, *a* erunt tres anguli AB, F, trianguli ABF, æquales quinque angulis F, GHIK. Sed anguli *A*, B, F, trianguli ABF, *b* æquales sunt duobus rectis. Igitur & quinque anguli F, G, H, I, K, duobus sunt rectis æquales. Quod est propositum.

a 2. *prop.*
b 32. *primi.*

COROLLARIVM I.

Ex hac propos. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli simul sumptos æquales esse tribus angulis cuiusq; alterius trianguli simul sumptis: Quoniam tàm illi tres, quàm hi, *c* æquales sunt duobus angulis rectis. Vnde si duo anguli unius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo hujus æqualis, æquiangulaque erunt ipsa triangula.

c 32. *primi.*

COROLLARIVM II.

Constat etiam, in omni triangulo Isoscele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum. Nam reliqui duo simul conficiunt unum rectum, *d* cum omnes tres sint æquales duobus rectis & tertius ille ponatur rectus. Quare *e* cum duo reliqui inter se sint æquales, erit quilibet eorum semirectus. At verò si angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet aliorum esse semirecto minorem. Reliqui enim duo simul minores erunt uno recto, &c. Si denique dictus angulus extiterit acutus, utrumque reliquorum maiorem esse semirecto. Quoniam reliqui duo simul maiores erunt uno recto, &c.

d 32. *primi.*
e 5. *primi.*

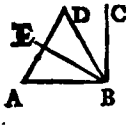
Perspicuum quoq; est, quemvis angulum trianguli æquilateri esse duas tertias partes unius recti, vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, *f* quibus æquales sunt tres anguli triangli æquilateri, divisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes unius recti.

f 32. *primi.*

COROLLARIVM IV.

Liquet etiam, si ab uno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangula scalena, quorum unumquodque habet unum angulum rectum propè perpendicularem; alium duas tertias partes unius recti, illum scilicet, qui est, & angulus trianguli æquilateri; reliquum denique tertiam partem unius recti.

SCHOLIVM.



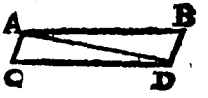
Porrò ex tertio corollario depromi potest methodus, qua angulus rectus in tres angulos æquales dividatur. Sit enim angulus rectus ABC. Super rectam AB, *g* constituatur triangulum æquilaterum ABD. Et quia per corollarium 3. angulus ABD, facit duas tertias partes anguli recti ABC; erit angulus CBD, pars tertia ejusdem recti. Diviso igitur angulo ABD, *h* bifariam, per rectam BE, erit uterque angulus ABE, EBD, tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus ABC, divisus est in tres angulos æquales. Quod est propositum.

g 1. *primi.*
h 9. *primi.*

THEOR.

THEOR. 23. PROPOS. 33.

Rectæ lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes eaſdem conjungunt; Et ipſæ æquales, & parallelæ ſunt. xxxiii.



Sint rectæ lineæ AB, CD, æquales, & parallelæ; Ipſas autem conjungant, ad eaſdem partes rectæ AC, BD. *Dico* AC, BD, *æquales quoque eſſe, & parallelas. Ducatur enim recta AD. Quoniam igitur* AD, *incidit in parallelas* AB, CD, a *erunt anguli alterni* BAD, CDA, *æquales. Quare cùm duo latera* BA, AD, *trianguli* BAD, *æqualia ſint duobus lateribus* CD, DA, *trianguli* CDA, *utrumque utrique, & anguli quoque dictis lateribus incluſi æquales;* b *erunt baſes BD, AC, æquales, & angulus* ADB, *angulo* DAC, *æqualis. Cùm igitur hi anguli ſint alterni inter rectas* AC, BD, c *erunt* AC, BD, *parallelæ: Probatum autem jam fuit, eaſdem eſſe æquales. Rectæ ergò lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonſtrandum.*

a 29. primi.

b 4. primi.

c 27. primi.

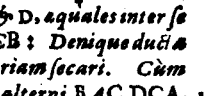
SCHOLIVM.

Dixit Euclides, lineas æquales, & parallelas ad eaſdem partes debere conjungi, ut ipſæ conjungentes ſint & æquales & parallelæ. Nam ſi ad partes diverſas conjungerentur, ut ad *A*, & D. Item ad *B*, & C, neque conjungentes lineæ eſſent parallelæ unquam, ſed perpetuò ſe mutuo ſecarent, neque eſſent æquales, niſi rarò admodum, ut ex ſequenti propoſitione conſtabit.

THEOR. 24. PROPOS. 34.

Parallelogrammorum ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex adverſo & latera, & anguli; atq; illa bifariam ſecat diameter. xxxiv.

Sit parallelogrammum ABCD, *quale definivimus definitione* 35. *Dico latera oppoſita* AB, DC, *inter ſe eſſe æqualia, nec non latera oppoſita* AD, BC. *Item angulos oppoſitos* B, & D, *æquales inter ſe eſſe, nec non & angulos oppoſitos* DAB, & DCB: *Denique ductâ diametro AC, parallelogrammum ipſum bifariam ſecari. Cùm enim* AB, DC, *ſint parallelæ,* d *erunt anguli alterni* BAC, DCA, *æquales. Rurſus quia* AD, BC, *ſunt parallelæ* e *erunt & anguli alterni* BCA, DAC, *æquales. Itaque cum anguli* BAC, BCA, *trianguli,* ABC, *æquales ſint duobus angulis* DCA, DAC, *trianguli* ADC, *uterque utrique, & latus AC, dictis angulis adjacens,*



d 29. primi.

e 29. primi.

a 26. primi. *jacens, commune utrique triangulo; a erit recta* AB, *æqualis oppositæ rectæ* DC; *& recta* BC, *oppositæ rectæ* AD, *quod est primum. Erit rursus eadem de causa angulus* B, *angulo* D, *æqualis. Et quia si æqualibus angulis* BAC, DCA, *addantur æquales anguli* DAC, BCA, *toti quoque anguli* BAD, BCD, b *fiunt æquales; constat secundum, angulos nimirum oppositos esse æquales. Quoniam verò duo latera* AB, BC, *trianguli* ABC, *æqualia sunt duobus lateribus* CD, DA, *trianguli* CDA, *utrumque utrique, & angulus* B, *angulo* D, *æqualis, ut jam ostendimus;* c *erunt triangula* ABC, CDA, *æqualia, ideoque parallelogrammum* ABCD, *divisum erit bifariam à diametro* AC, *quod tertio loco proponebatur. Parallelogrammorum igitur spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex adverso, &c. Quod ostendendum erat.*

b 1. pron.

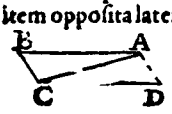
c 4. primi.

SCHOLIVM.

Appositè dixit Euclides, solummodo parallelogramma à diametro dividi bifariam, non autem & angulos. In Quadrato enim, & Rhombo duntaxat anguli etiam bifariam dividuntur à diametro; At in figura altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perspicua erunt, si prius ostenderimus, quatuor hasce figuras, Quadratum, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma. Hoc autem demonstrabimus tribus sequentibus theorematibus, quorum primum est.

Omne quadrilaterum habens latera opposita æqualia est parallelogrammum.

Sint in quadrilatero ABCD, latera opposita AB, DC, æqualia; item opposita latera AD, BC. Dico ABCD, esse parallelogrammum; hoc est, lineas AB, DC, esse parallelas; Itemque lineas AD, BC. Ducta enim diametro AC, erunt duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, utrumq; utrique, & basis AC, communis. Igitur d erit angulus B, angulo D, æqualis. Rursus quia latera AB, BC, æqualia sunt lateribus CD, DA, utrumque utrique, & anguli B, D, ostensi æquales; e erit angulus BAC, angulo DCA, alterno æqualis, & angulus BCA, alterno angulo DAC. Quare f erunt AB, & DC, parallelæ; f a 4. primi. Item AD, & BG, quod est propositum.



d 8. primi.

e 4. primi.

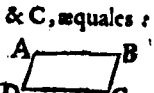
Hinc constat, Rhombum, & Rhomboidem esse parallelogramma; quoniam opposita eorum latera sunt inter se æqualia, ut manifestum est ex eorum definitionibus. Pari ratione quadratum, parallelogrammum erit, quod latera opposita habeat æqualia. Sunt enim omnia quatuor ejus latera inter se æqualia, per ejus definitionem.

nem. Convertit autem hoc theorema primam partem propoſitionis 34. ut patet.

Secundum theorema tale eſt.

Omne quadrilaterum habens angulos oppoſitos æquales, eſt parallelogrammum.

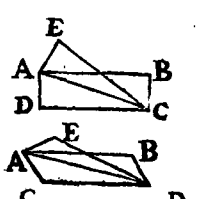
Sint in quadrilatero ABCD, anguli oppoſiti A, & C, æquales: Item oppoſiti anguli B, & D. Dico ABCD, eſſe parallelogrammum: hoc eſt, lineas AB, DC, eſſe parallelas: Itemque lineas AD, BC Nam ſi æqualibus angulis A, & C, addantur æquales anguli B, & D: *a* erunt duo anguli A, & B, duobus angulis, D, & C, æquales & idcirco anguli A, & B, dimidiũ facient quatuor angulorũ A, B, C, & D. Cùm igitur hi quatuor æquales ſint quatuor rectis, ut ad propoſ. 32. demonſtravimus, erunt duo A, & B, duobus rectis æquales. Quare AD, BC, *b* parallelæ ſunt. Eadem ratione erunt AB, DC, parallelæ. Erunt enim duo quoque anguli A, & D, duobus angulis B, & C, æquales, &c. Quod eſt propoſitum. Ex hoc etiam manifeſtum eſt Rhomboidem eſſe parallelogrammum, cum ejus anguli oppoſiti æquales ſint, per definitionem. Similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppoſiti æquales, cum ſint recti, ex eorum definitionibus.



a 2. *prom.*

b 28. *primi.*

Hoc theorema convertit ſecundam partem propoſitionis 34. ut conſtat. Tertia autem pars non poteſt converti. Nam & trapezium aliquod bifariam ſecari poteſt à diametro, & tamen non eſt parallelogrammum. Sit enim altera parte longius, vel Rhomboides ABCD, quod parallelogrammum eſſe oſtenſum eſt: in quo, ducta diametro AC, conſtituatur ſuper AC, triangulo ABC, æquale triangulum AEC, inverſo ordine, ita ut latus CE, ſit æquale lateri AB, & AE, ipſi CB, ut in ſcholio propoſ. 22. docuimus: fiatque trapezium AECD. Quoniam verò triangulum ABC, triangulo ADC, æquale eſt, *c* quod diameter AC, bifariam ſecet parallelogrammum DB: Erit & triangulum AEC, triangulo ADC, æquale: Ac proinde trapezium AECD, bifariam dividetur à diametro AC.



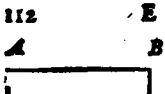
c 34. *primi.*

Quod ſi quadrilaterum aliquod dividatur bifariam ab utraque diametro, illud parallelogrammum erit, ut oſtendemus ad prop. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri poteſt.

Tertium Theorema hujuſmodi eſt.

Omne quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum.

Sint

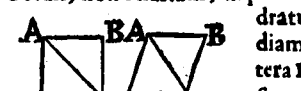


Sint in quadrilatero ABCD, omnes quatuor anguli recti. Dico ipsum esse parallelogrammum: hoc est, lineas AB, DC, esse parallelas: Itemque AD, BC. Quoniam enim duo anguli A, & B, æquales sunt duobus rectis, cum sint duo recti: a erunt AD, BC, parallelæ. Eodem modo erunt AB, DC, parallelæ; atque adeò ABCD, parallelogrammum, quod est propositum.

a 28. primi.

Hinc rursum constat, Quadratum, & altera parte longius, esse parallelogramma, cum eorum anguli omnes existant recti, ut liquet ex eorum definitionibus.

His in hunc modum demonstratis, Quadratum scilicet, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma, facilè ostendemus, angulos Quadrati, & Rhombi, bifariam secari à diametro: Angulos verò figuræ, Altera parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, ut paulò ante monuimus. Sit enim Quadratum, vel Rhombus ABCD, in quo diameter AC. Quoniam igitur duo latera BA, AC, trianguli BAC, æqualia sunt duobus lateribus DA, AC, trianguli DAC, utrumq; utrique, & basis BC, basi DC, (sunt enim hę figurę æquilateræ) b erunt anguli BAC, DAC, æquales. Quare angulus BAD, dividitur bifariam. Eodem modo demonstrabimus, reliquos angulos bifariam secari à diametro.

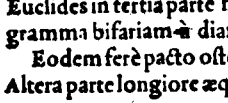


b 8. primi.

Sit rursus Altera parte longius, vel Rhomboides AB D, in quo diameter AC, sitque latus AB. Quoniam igitur in triangulo ABC, latus AB, majus est latere BC, c erit angulus BCA, major angulo BAC. Est autem angulus BCA, d æqualis angulo DAC: quod BC, AD, parallelæ sint. (Est enim ABCD, ostensum parallelogrammum.) Igitur & angulus DAC, major erit angulo BAC. Atque propterea angulus BAD, inæqualiter dividitur à recta AC. Eadem est ratio aliorum angulorum. Quamobrem appositè Euclides in tertia parte hujus propositionis dixit, solum parallelogramma bifariam à diametro secari, non autem & angulos.

c 18. primi.
d 29. primi.

Eodem ferè pacto ostendemus, duas diametros in Quadrato, & Altera parte longiore æquales esse; At verò in Rhombo, & Rhomboide inæquales, majorem quidem eam, quæ angulos acutos, minorē verò eam, quæ obtusos angulos dispertit. Sit enim quadratū, vel altera parte longi ABCD, in quo diametri AC, BD, quas dico esse æquales. Cùm enim duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqua-



lia

lia sint duobus lateribus AB, AD, trianguli BAD: utrumque utrique, & angulus ABC, angulo BAD, quia uterque rectus: *a* erit basis AC, basi BD, æqualis: Ac proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore æquales sunt. a 4. primi.

Sit rursus Rhombus, vel Rhomboides, ABCD, in quo diametri AC, BD; sitque angulus BAD, major; ABC, minor. Non enim æquales sunt, quia alias uterque esset rectus, cum ambo *b* æquales sint duobus rectis; quod est absurdum, & contra definitiones Rhombi, & Rhomboidis. Dico diametrum BD, majorem esse diametro AC. Quoniam enim duo latera AB, AD, trianguli BAD, æqualia sunt duobus lateribus AB, BC, trianguli ABC, utrumque utrique, & angulus BAD, angulo ABC, major existit; *c* erit basis BD, major basi AC, quod est propositum. Ex quo manifestum est, cur in propositione 33. Euclides asseruerit, eas tantùm lineas, quæ conjungunt parallelas æquales ad easdem partes, æquales esse, ut ibidem annotavimus. Nam in Rhombo & Rhomboide rectæ AC, BD, inæquales sunt, licet conjungant parallelas æquales AB, DC: quia non ad easdem partes ipsas conjungunt, ut perspicuum est.

b 29. primi.

c 24. primi.

In omni tamen parallelogrammo diametri se mutuò bifariam dividunt. Cùm enim duo anguli EAD, EDA, triangulo AED, *d* æquales sint alternis angulis ECB, EBC, trianguli BEC, uterque utrique; & *e* latus AD, æquale lateri BC, opposito in parallelogrammo ABCD, quorum utrumque æqualibus adjacet angulis; *f* Erit & AE, recta rectæ CE, & recta DE, rectæ BE, æqualis. Quare utraque diameter bifariam dividitur in puncto E.

d 29. primi.

e 34. primi.

f 26. primi.

Hujus autem, quod modo diximus, conversum etiam demonstrabimus, nimirum:

Omne quadrilaterum, in quo diametri se mutuò bifariam dividunt, parallelogrammum est.

In quadrilatero enim ABCD, diametri AC, BD, se mutuo bifariam dividant in E. Dico ABCD, parallelogrammum esse. Cùm enim latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sint lateribus CE, ED, trianguli CED, & anguli contenti ad verticem E, *g* æquales quoque; *h* erunt & bases AB, CD, æquales & angulus ABE, angulo alterno CDE, æqualis. *i* Quare rectæ AB, CD, parallelæ sunt. Eadem ratione parallelæ ostendentur AD, CB. Parallelogrammum ergò est ABCD.

g 15. primi.

h 4. primi.

i 27. primi.

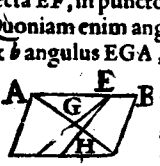
Itaque, si quis expeditè parallelogrammum describere velit, ducat duas lineas AC, BD, utcunq; se in E, intersecantes. Si namque tam EA, EC, inter se, quàm EB, ED, inter se æquales abscindet,

constituent ductæ *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, parallelogrammum, ut hic demonstratum est. Quod si anguli ad *E*, sint recti, & omnes quatuor rectæ *EA*, *EC*, *EB*, *ED*, inter se æquales, constitutum parallelogrammum erit quadratum, propterea quod octo anguli ad *A*, *B*, *C*, *D*, sunt semirecti, ut facilè demõstrabitur per 5. & 32. hujus.

Huc quoque referri potest hoc theorema.

Recta linea secans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, dividit parallelogrammum bifariam quoque: & recta linea dividens parallelogrammum bifariam quovis modo, secat quoque diametrum bifariam.

In parallelogrammo *ABCD*, diametrum *AC*, bifariam secet recta *EF*, in puncto *G*. Dico parallelogrammum dividi bifariam. Quoniam enim angulus *EAG*, *a* æqualis est angulo alterno *BCG*, & *b* angulus *EGA*, angulo *FGC*. Est autem & latus *AG*, lateri *CG*, æquale, per hypothesin, quæ ambo æqualibus angulis adjacent; *c* erunt & latera *EG*, *FG*, æqualia. Quare cum latera *AG*, *GE*, æqualia sint lateribus *CG*, *GF*, & anguli quoqe contenti æquales; *d* erunt triangula *AGE*, *CGF*, æqualia. Addita igitur communi quantitate *BCGE*, *e* erit triangulum *ABC*, trapezio *BCFE*, æquale: Sed triangulum *ABC*, *f* dimidium est parallelogrammi *ABCD*. Igitur & trapezium dimidium erit ejusdem parallelogrammi, ideoque recta *EF*, parallelogrammum bifariam secat.



a 29. primi.
b 15. primi.
c 26. primi.
d 4. primi.
e 2. pron.
f 34. primi.

Secet jam *EF*, parallelogrammum bifariam; Dico & diametrum *AC*, bifariam secari in *G*. Si enim diameter *AC*, non bifariam dividitur in *G*, *g* dividatur bifariam in alio puncto, ut in *H*, per quod ducatur recta *EHI*. Erit ergò, ut jam demonstravimus, *EICB*, trapezium dimidium parallelogrammi *ABCD*, atque adeò æquale trapezio *EFCB*, quod etiam dimidium ponitur ejusdem parallelogrammi, pars toti, quod est absurdum. Dividitur igitur *AC*, bifariam in *G*, & non in alio puncto, quod erat propositum.

g 10. primi.

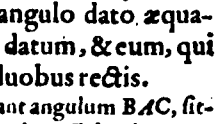
Hinc facilè colligitur, si in latere aliquo parallelogrammi cujusq; punctũ signetur, vel etiam intra parallelogrammum, vel extra, quod tamen non sit in diametro, nisi ipsum secet diametrum bifariam; qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, quæ parallelogrammum bifariam secet. Si enim diameter ducatur, & à puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt si punctum sit *E*, in latere *AB*, ducenda est recta *EF*, per *G*, punctum, in quo diameter *AC*, bifariam dividitur; & sic de aliis punctis.

Demonstrat quoque hic Peletarius problema non injucundum, videlicet.

Inter

Inter duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum cuivis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum, & eum, qui lineis datis continetur, minores esse duobus rectis.

Duæ rectæ infinitæ AB, AC, contineant angulum BAC, sitque data recta finita quæcunq; D, & angulus datus E, hac lege, ut duo anguli E, & BAC, minores sint duobus rectis. Oportet igitur inter rectas AB, AC, collocare rectam æqualem quidem rectæ D, cum alterutra verò illarum, nimirum cum AC, facientem angulum æqualem angulo dato E. *a* Fiat angulus CAF, æqualis angulo E, & producta FA, ad G, *b* sit AG, æqualis rectæ D; & per G, *c* ducatur GB, parallela ipsi AC, secans AB, in B.



a 23. primi.
b 3. primi.
c 31. primi.

Deinde per B, ducatur BC. parallela ipsi AG, *b* secans AC, in C. Dico rectam BC, collocatam inter rectas AB, AC, æqualem esse rectæ D, angulumq; BCA, angulo E. Cùm enim parallelogrammum sit per constructionem, ACBG, *d* erit recta BC, rectæ GA, æqualis: At GA, æqualis est, per constructionem, rectæ D. Igitur & BC, rectæ D, æqualis erit. Rursus *e* quia angulus BGA, angulo alterno CAF, æqualis est: & eidem angulo CAF, æqualis est, per constructionem, angulus E: erunt anguli E, & BCA, æquales. Quod est propositum. Cæterum ex constructione manifestum esse cuilibet potest, cur duo anguli dati minores esse debeant duobus rectis. Nam alias non fieret triangulum ABC, si anguli BAC, & BCA, æquales essent duobus rectis, vel majores, ut constat ex propos. 17. vel 32.

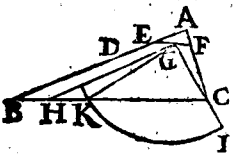
d 34 primi.
e 29. primi.

SCHOLIVM.

Non alienum erit à nostro instituto, adjicere quædam hoc loco ad lineas intra triangulum constitutas pertinentia, quæ à Pappo Alexandrino lib 3. Mathematicarum collectionum demonstrantur: quemadmodum facturos nos recepimus ad propos. 21. Primùm igitur in omni triangulo, quod non sit æquilaterũ, vel Isosceles habens basim utrovis latere minorẽ, non solùm à duobus punctis basis constitui possunt duæ rectæ intra triangulũ, quæ simul sumptæ majores sint duobus lateribus simul sũptis, ut à Proclo in triangulis, rectangulis, vel obtusangulis ostensũ est ad pr. 21. sed etiã æquales.

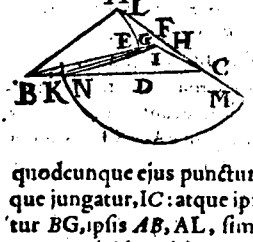
Sit enim primum triangulum ABC, habens latus AB, latere AC, majus, sitque BD, dimidium utriusque lateris AB, AC, simul: Sumpto autem inter A, D, puncto E, utcunq; agatur EF. ipsi BC, parallela: & ex quovis puncto G, lateri AB, parallela ducatur GH, rectaq; jungatur GC. Et quoniam EA, AF, *f* majores sunt, quàm EF: Item CF, FG, majores, quàm GC: erunt EA, AC, FG, simul majores, quàm EF, GC, simul: ablataq; communi FG, erunt EA, AC,

f 20. primi.



simul majores, quàm BG, GC, simul: ac proinde multò majores, quàm GC, sola. Producatur ergò GC, fiatque GI, ipsis EA, AC, simul æqualis. Quia verò BE, major est, quàm utraque EA, AC, simul, quod BE, superet BD, dimidium utriusque BA, AC, simul, at EA, AC, simul deficiant à dimidio earundem, nimirum ab utraq; DA, AC, simul: erit quoque BE, major, quàm GI, quæ ipsis EA, AC, simul est æqualis. Cùm igitur *a* ipsi BF, æqualis sit GH, in parallelogrammo BEGH: erit quoque GH, major, quàm GI. Si igitur centro G, & intervallo GI, circulus describatur, secabit is rectam GH, ac propterea & ipsam CH, prius secabit in K. Connectatur GK. Dico utramque GH, GK, simul æqualem esse utrique AB, AC, simul. Id quod ex constructione perspicuum est. Nam GH, ipsi BE, æqualis est: & GI, hoc est, GK, ipsis EA, AC, simul. Atque hoc infinitis modis fieri potest, prout punctum E, remotius à D, sumptum fuerit, & punctum G, à puncto E: hoc est, prout tàm AD, quam EF, infinitis in punctis secari potest

a 34. primi.



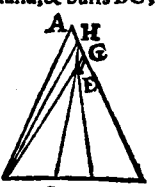
Sit deinde Isosceles ABC, habens basim BC, utrovis latere majorem. Descripto ex centro B, per A, arcu AD, secante rectam BC, in D, ducatur utcunque recta BF, secans arcum in E, & latus AC, in F: & in EF, per quodvis punctum G, ipsi BC, parallela agatur GH, & per quodcunque ejus punctum I, ipsi BF, parallela ducatur IK, rectaque jungatur, IC: atque ipsi EG: æqualis abscindatur AL. Erit igitur BG, ipsis AB, AL, simul æqualis, at LC, minor quàm BE, sive AB, & ob id multò minor quam BG. Et quia ipsi BG, *b* æqualis est IK, in parallelogrammo BGIK: erit quoque IK, ipsis AB, AL, simul æqualis, major autem, quàm LC. Itaque *c* quia GF, FH, majores sunt, quàm GH: & HC, HI, majores, quàm IC: erunt GF, FC, HI, simul majores, quàm GH, IC: & ablata communi HI erunt reliquæ GF, FC, simul majores quàm GI, IC, simul: ac proinde apposita communi BC, fient BF, FC, simul majores, quàm BG, GI, IC, simul. Sed ipsis BF, FC, *d* majores sunt BA, AC, simul. Ergò multò majores erunt BA, AC, simul, quàm BG, GI, IC, simul. Cùm ergò BG, ipsis BA, AL, simul æqualis sit, erit reliqua LC, major, quàm reliquæ GI, IC, simul, ac proinde multò major, quàm IC. sola. Ponatur IM, (producta IC) ipsi LC, æqualis. Et quia IK, ostensa est major, quàm LC, hoc est, quàm IM: si ex centro I, per M, arcus circuli describatur, secabit is rectam IK, ac proinde prius ipsam CK, secabit in N. Connectatur IN. Dico utramque IK, IN simul æqualem esse

b 34. primi.
c 20. primi.
d 20. primi.

lem esse utrique AB, AC, simul. Id quod ex constructione patet. Est namque IK, ipsis AB, AL, simul æqualis, & IN, hoc est, IM, ipsi LC, æqualis. Atq; hoc infinitis modis fieri potest: cum BF, infinitis modis duci possit: & tàm EF, quàm GH, infinitis modis secari.

Constat autem, si intra idem triangulum ABC, ducantur duæ rectæ, quæ rectas HG, GK, in priori triangulo, vel rectas KI, IN, in posteriori includant, eas majores fore simul sumptas lateribus AB, AC, simul sumptis: quippe quæ *a* majores forent rectis HG, GK, in priori triangulo, vel rectis KI, IN, in posteriori. *a* 21. *primi.*

At verò in triangulo æquilatero, vel Isoscele habente basim utrovis latere minorem, non posse intus constitui duas lineas majores, vel æquales simul sumptas duobus lateribus simul sumptis, sed quascunque interiores esse minores, ita ostendi potest. In triangulo enim ABC. Cujus duo latera AB, AC, æqualia, & basis BC, non major, sed vel æqualis, vel minor; ita ut angulus A, major non sit, quàm angulus B, vel C, *b* sed vel æqualis, vel minor: constituantur duæ rectæ DE, EF, utcunque, quas dico minores esse simul sumptas duobus lateribus AB, AC, simul sumptis. Producatur enim DE, secans latus AC, in G, jungatur q; recta GB. Quoniam igitur *c* duo anguli ABC, & C, æquales sunt, estque ABC, major angulo GBC, erit quoque C, major angulo GBC. Est *d* autem & angulus GDB, angulo C, major, externus interno. Igitur multò major erit angulus GDB, angulo GBC; *e* ac proinde latus GB, latere GD, majus erit. Quia verò *f* angulus BGA, major est angulo C, externus interno; angulusque C, vel æqualis est angulo A, vel major, ut ostendimus: erit quoque angulus BGA, angulo A, major. Quare *g* latus AB, latere GB, majus erit: Sed recta GB, ostensa est major, quàm GD, ac proinde multò major, quàm DE. Igitur latus AB, multò etiam majus erit quàm DE. Eadem ratione, si FE, producatur secans AC, in H, jungaturque rectæ HB, ostendemus latus AB, ac proinde & AC, majus esse, quàm FE. Quocirca latera AB, AC, simul majora sunt duabus rectis DE, EF, simul sumptis. Quod si FE, producta secaret latus AB, demonstraremus eodem modo, latus AC, majus esse recta EF.



b 5. *vel* 18. *primi.*

c 5. *primi.*

d 16. *primi.*

e 19. *primi.*

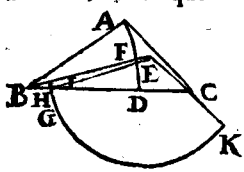
f 16. *primi.*

g 19. *primi.*

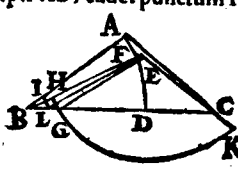
Jam verò, si admirabile videatur iis, qui Geometriæ ignari sunt, in illis quæ diximus, triangulis duci posse lineas interiores, quæ simul sumptæ majores sint, vel æquales duobus lateribus simul sumptis; admirabilius sanè erit, intra eadem illa triangula constitui posse duas lineas, quarum singulæ singulis lateribus majores sint, vel æquales. Sint ergò primum constituendæ singulæ lineæ singulis lateribus majores in triangulo ABC, cujus latus AB, minus non sit latere AC, at latus BC, utrovis latere AB, AC, majus. Descripto ex centro B,

tro *B*, arcu circuli AD, ſumatur quodvis punctũ *E*, inter arcũ AD, & latus *AC*, ducaturque recta BE, ſecans arcum in F, ita ut *BE*, major ſit, quàm *BF*, hoc eſt, quàm *BA*, jungaturq; EC. Quia verò a BE, EC, ſimul minores ſunt quàm *AB*, *AC*, ſimul, eſtq; *BE*, major, quàm *AB*, erit *EC*, multò minor, quàm AC. Producta igitur EC, fiat EK, ipſi *AC*, æqualis, ac propterea minor, quàm EB; deſcribaturque ex E, per K, arcus circuli, qui rectam *EB*, ſecabit, ac proinde & ipſam C*B*, priùs ſecabit in G. Sumpto denique inter *B*, & G, quovis puncto *H*, jungatur recta *EH*, ſecans arcum in I: factumque erit, quod proponitur. Nam B*F*, major eſt, quàm *BA*, & *EH*, major, quàm EI, hoc eſt, quàm EK, vel AC.

a 21. *primi*.



Deinde ſint ſingulæ lineæ ſingulis lateribus æquales conſtituendæ intra idem triangulum: fiatque eadem conſtructio, dempta linea EH, ſed arcus K*G*, ſecet rectam *EB*, in H. Et latus *BA*, latere *AC*, ponatur majus, eritq; BE, recta major, quàm AB, cùm major ſit, quàm B*F*, quæ æqualis eſt ipſi AB. Sumpta igitur *EI*, æqualis ipſi AB, cadet punctum I, inter B, & *H*; quandoquidem *EB*, major eſt, quàm *AB*, & EH, minor, quàm *AB*. Ex E, per I, deſcribatur arcus circuli ſecans BC, in L, jungantur; rectæ EL, *EG*: factumque erit, quod proponitur. Nam *EL*, ipſi EI, hoc eſt, ipſi *AB*, æqualis eſt & *EG*, ipſi EK, hoc eſt, ipſi *AC*.



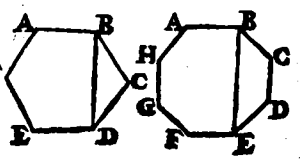
Præterhæc demonſtrat Pappus, intra eadem, quæ diximus, triangula conſtitui poſſe duas rectas duobus lateribus majores, & quę habeant ad eadem latera proportionem datam, quæ tamen dupla proportione minor ſit: quod incredibile cuipiam videri poſſit. Quæ res hoc loco demonſtrari non poteſt, cùm ex proportionib⁹ pẽdeat.

EX PROCLO.

In omni figura rectilinea latera habente numero paria, ſi quidem fuerit æquilatera, & æquiangula: erunt duo quælibet latera oppoſita, parallela inter ſeſe.

Latera oppoſita dicuntur illa duo, quæ ex utraque parte latera habent æqualia numero: ut in hexagono *ABCDEF* latera oppoſita erunt AB, ED; quoniam tàm ad partes A, & E, duo ſunt latera, quàm ad partes B, & D. In octogono verò *ABCDEFGH*, latera oppoſita erunt *AB*, *FE*, quia tàm ad partes *A*, & *F*, tria ſunt latera, quàm ad partes *B*, & E. Et ſic in aliis figuris æquilateris parium laterum

laterum, ex utraque parte oppoſitorum laterum erunt tot latera, quot ſunt in dimidio numero laterum, minus uno. Vt in quadrangulo erit vnum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor, in figura 12. laterum quinq; &c. Dico igitur quælibet latera oppoſita eſſe parallela; *AB*, nimirum ipſi *ED*, in hexagono; & *AB*, ipſi *FE*, in octogono, & ſic deceæteris. Connectantur enim duo extrema oppoſitorũ laterum ad eaſdem partes linea recta, qualis eſt in hexagono BD, & in octogono BE. Et quoniam, ut ad 32. propoſ. demonſtravimus, ſex anguli hexagoni æquales ſunt octo rectis, erunt tres anguli *B*, C, D, ejuſdem hexagoni æquales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur æquales; Sunt autem anguli BCD, CBD, CDB, trianguli BCD, *a* duobus rectis æquales. Reliqui igitur anguli *ABD*, *EDB*, duobus rectis æquales erunt; Quare *b* parallelæ erunt *AB*, & *ED*. Rurſus quia octo anguli octogoni æquales ſunt duodecim rectis, erunt quatuor ejus anguli B, C, *D*, E, ſex rectis, æquales: Sunt autem quatuor anguli quadrilateri BCDE, æquales quatuor rectis. Igitur duo reliqui anguli ABE, FE*B*, duobus erunt rectis æquales, *c* atque adeò *AB*, *FE*, parallelæ erunt. Eodem modo demonſtrabitur, in omnibus aliis figuris hujuſmodi, angulos duos ad lineam rectam extrema oppoſitorum laterum conjungentem exiſtentes, duobus eſſe rectis æquales. Nam in decagono aufert ea linea pentagonum, cujus anguli æquales ſunt ſex rectis: At quinq; anguli decagoni æquales ſunt octo rectis. Ablatis igitur ſex, relinquuntur duo recti. In figura æquilatera, & æquiangula duodecim laterum eadem linea abſcindet hexagonum, cujus anguli ſunt octo rectis æquales: At ſex anguli totius figuræ æquales ſunt decem rectis. Demptis igitur octo, remanent duo recti, &c.



a 32. *primi.*

b 28. *primi.*

c 28. *primi.*

Quamvis autem omnis figura æquiangula parium laterum habeat latera oppoſita parallela, ut oſtendimus; tamen ſola quadrilatera figura latera oppoſita habens parallela, ab Euclide, & aliis Geometris parallelogrammum dici conſuevit, propterea que in definitionibus, Parallelogrammum diximus eſſe figuram quadrilateram, &c.

THEOR. 25. PROPOS. 35. xxxv

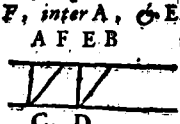
Parallelogrammum ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

Inter duas parallelas AB, CD, *ſuper baſi* CD, *exiſtant duo parallelogramma* CDEA, CDBF. (*dicuntur autem paral-*

lelogramma in eisdem esse parallelis, quando duo latera oppositarum partes sunt parallelarum, ut in exemplo proposito cernitur.) Dico ipsa parallelogramma inter se esse aqualia, non quoad angulos & latera, sed quoad aream, seu capacitatem. Cadat enim primò punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in parallelogramma CDEA, recta AE. a aqualis est rectæ CD, oppositæ; & eidem CD, aqualis est FB, in parallelogrammo CDBF, oppositæ; Erunt AE, b FB, inter se aquales. Dempta igitur communi FE, c remanebit AF, ipsi EB, aqualis: d Est autem & AC, ipsi ED, oppositæ aqualis in parallelogrammo CDEA; e & angulus BED, angulo FAC, externus interno. f Quare triangulum FAC, triangulo BED, aquale erit. Addito igitur communi trapezio CDEF, g fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, aquale. Quod est propositum.

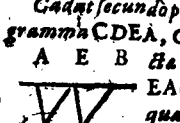
34. primi.

b 1. pron.
c 3. pron.
d 34. primi.
e 29. primi.
f 4. primi.
g 2. pron.



Cadat secundò punctum F, in punctum E. Dico rursus, parallelogramma CDEA, CDBE, aqualia esse. Erunt enim, ut prius rectæ AE, EB, aquales, nec non & anguli BED, EAC; atque adeò h triangula, EAC, BED, aqualia. Addito igitur communi triangulo CDE, i fient parallelogramma CDEA, CDBE, aqualia.

h 4. primi,
i 2. pron.



Cadat tertiò punctum F, ultra E, ita ut recta CF, secet rectam DE, in G. Quoniam igitur, ut prius, recta AE, FB, sunt aquales; si communis addatur EF, k erit tota AF, toti EB, aqualis nec non & anguli BED, FAC, aquales erunt; atque adeò l triangulum FAC, triangulo BED, aquale. Ablato ergò communi triangulo EGF, m remanebit trapezium AEGC, trapezio FGDB, aquale. Quocirca addita communi triangulo CDG, fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, aquale. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt aqualia. Quod erat demonstrandum.

k 2. pron,
l 4. primi,
m 3. pron.

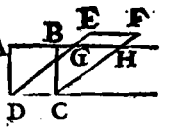
SCHOLIVM.

Convertemus facilè hanc propositionem, hoc modo.

Parallelogramma æqualia super eandem basin, ad easdemq; partes constituta, erunt inter easdem parallelas.

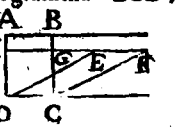
Sint duo parallelogramma aqualia ABCD, CDEF, super eandem basin CD, & ad easdem partes. Dico rectam AB, productam in directum jacere ipsa EF, & propterea ipsa parallelogramma inter

eaſdem eſſe parallelas. Alias enim *AB*, producta vel cadet infra EF, vel ſupra. Cadat primò infra, qualis eſt *AH*. Erit igitur parallelogrammum CDG*H*, *a* æquale parallelogrammo *ABCD*; Ponitur autem eidem parallelogrammo ABCD, æquale parallelogrammum *CDEF*. Quare parallelogramma *CDEF*, CDGH, æqualia erunt, totum & pars, quod eſt abſurdum. Non ergò cadet AB, infra EF,



a 35. *primi*

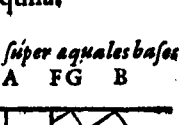
Cadat ſecundò *AB*, producta ſupra EF. Cadet igitur FE, protracta infra AB. Quare ut prius, erunt parallelogramma *ABCD*, CD*HG*, æqualia, totum & pars, quod eſt abſurdum. Idem abſurdum conſequeretur, ſi *CF*, DE, producerentur uſque ad AB, protractam. Eademque demonſtratio conveniet omnibus caſibus, qui occurrere poſſunt, hoc eſt, ſive punctum E, ſit ultra B, ſive non, ut perſpicuum eſt. Non ergò cadet AB, ſupra EF, ſed nec infra, ut demonſtratum eſt; ergò producta in directum jacet ipſi EF; ac proinde parallelogramma *ABCD*, CD*EF*, in eiſdem ſunt parallelis.



THEOR. 26. PROPOS. 36. XXXVI

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqulia.

Sint duo parallelogramma ACEF, GHDB, ſuper æquales baſes CE, HD, *inter eaſdem parallelas* AB, CD. *Dico eſſe æqualia. Connectantur enim extrema rectarum* CE, GB, *ad eaſdem partes lineis rectis* CG, EB. *Quoniam igitur recta* CE, *æqualis ponitur rectæ* HD, *& eidem* HD, *æqualis eſt* GB, *in parallelogrammo* GHDB, *oppoſitæ; erunt* CE, GB, *æquales inter ſe: Sunt autem & parallelæ, per hypotheſim. Quare &* CG, EB, *ipſas conjungentes, parallelæ erunt, & æquales, ideoque* CEBG, *parallelogrammum erit. Itaque cum parallelogramma ACEF, GCEB, ſint inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin* CE, *erit parallelogrammum* ACEF, *parallelogrammo* GCEB, *æquale. Rurſus quia parallelogramma* GCEB, GHDB, *ſunt inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin* GB, *erit quoque parallelogrammum* GHDB, *eidem parallelogrammo* GCEB, *æquale. Quare & parallelogramma ACEF, GHDB, inter ſe æqualia erunt. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, &c. Quod oſtendendum erat.*



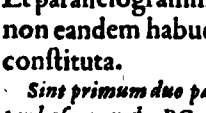
b 34. *primi*.
c 1. *pron.*
d 33. *primi*.
e 35. *primi*.
f 35. *primi*.
g 1. *pron.*

SCHOLIVM.

Conversum hujus theorematis duplex est, ad hunc modum.

Parallelogramma æqualia super bases æquales, & ad easdem partes constituta, inter easdem sunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basin, super æquales bases sunt constituta.

Sint primum duo parallelogramma æqualia ABCD, EFGH, *super bases æquales* BC, FG, *& ad easdem partes constituta. Dico ea esse inter easdem parallelas, hoc est,* AD, *protractam coire in directum cum* EH. *Nam alias cadet aut infra* EH, *aut supra. Quo posito sequitur, totum & partem esse æqualia, quemadmodum in conversa præcedentis propositionis est dictum, & figura facilè commonstrat. Intelligenda sunt autem bases æquales data in eadem linea recta* BG.



Sint secundò eadem parallelogramma æqualia inter easdem parallelas AH, BG. *Dico bases* BC, FG, *esse æquales. Si enim altera, nempe* BC, *dicatur major, a abscindatur* BI, *æqualis rectæ* FG, *&* b *ducatur* IK, *parallela ipsi* CD. *Erit ergò parallelogrammum* ABIK, c *æquale parallelogrammo* EFGH; *& ideò parallelogrammo* ABCD, *pars toti, quod est absurdum. Non ergò* BC, *major est, quàm* FG. *Eadem ratione neque minor erit. Quare bases* BC, FG, *æquales sunt.*

a 3. primi.
b 31. primi.
c 36. primi.

Sequens quoque theorema facilè hinc demonstrabitur.

Si duo parallelogramma inter easdem parallelas habeant bases inæquales, illud, cujus basis major est, majus erit. Et contra, si duo parallelogramma sint inæqualia inter easdem parallelas, basis majoris major erit.

Sint enim in posteriori figura parallelogramma BD, FH, *inter parallelas* AH, BG, *sitque basis* BC, *major base* FG. *Dico parallelogrammum* BD, *parallelogrammo* FH, *majus esse.* d *Auferatur enim recta* BI, *ipsi* FG, *æqualis,* e *ducatur* IK, *ipsi* AB, *parallela. Erunt ergò* f *parallelogramma* BK, FH, *supra æquales bases* BI, FG, *æqualia. Cùm igitur* BD, g *majus sit, quàm* BK, *erit idem* BD, *majus, quàm* FH.

d 3. primi.
e 31. primi.
f 36. primi.
g 9. prop.

Sint rursum parallelogramma BD, FH, *inæqualia, &* BD, *majus. Dico basin* BC, *majorem esse base* FG. *Nam si foret æqualis,* h *essent parallelogramma æqualia, quod est absurdum, cum* BD, *ponatur*

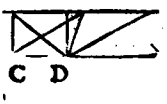
h 36. primi.

natur majus. Si autem esset minor, foret parallelogrammum FH, *majus, quàm* BD, *ut proximè ostendimus, quod multò magis est absurdum, cum* BD, *majus ponatur, quàm* FH. *Basis ergò* BC, *cùm neque aqualis sit ipsi* FG, *neque minor, erit major, quàm* FG, *quod est propositum.*

THEOR. 27. PROPOS. 37. XXXVII

Triangula super eadem basi constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

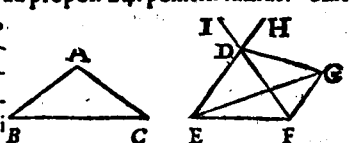
Inter parallelas, AB, CD, *& super basin* CD, *sint constituta duo triangula* ACD, BCD. (*Dicitur autem triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quando basis est pars unius, & angulus oppositus alteram attingit.*) *Dico ea triangula esse æqualia.* Per D, *enim* a *ducatur* DE, *parallela rectæ* AC, *&* DF, *parallela rectæ* BC. b *Erunt igitur parallelogramma* ACDE, BCDF, *æqualia. Sunt enim super eandem basin* CD, *& inter easdem parallelas. Sed horum dimidia sunt triangula* ACD, BCD: c *quod* AD, BD, *diametri bifariam secent parallelogramma* ACDE, BCDF. *Igitur & triangula* ACD, BCD, d *æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.*



a 31. primi.
b 35. primi.
c 34. primi.
d 7. prop.

SCHOLIVM.

Conversa hujus propositionis demonstrabitur ab Euclide propos. 39. Porrò ex hac propositione facilè cum Proclo demonstrabimus: Triangula, quorum duo latera unius æqualia sint duobus lateribus alterius, utrumque utriq;, & angulus unius illis lateribus contentus major angulo alterius, aliquando esse æqualia, & aliquando inæqualia; Id quod ad propos. 24. polliciti sumus. Sint enim duo triangula ABC, DEF, & latera *AB*, *AC*, æqualia lateribus *DE*, *DF*, & angulus A, major angulo *EDF*, sintque primum hi duo anguli duobus rectis æquales. Dico triangula esse æqualia. *e* Producantur enim ED, ad H, & FD, ad I; fiatq; angulus EDG, æqualis angulo A, versus angulum acutum DFE. Nam semper alter angulorum DEF, DFE, acutus erit, *f* cum ambo minores sint duobus rectis, *g* & recta DG, rectæ DF, seu AC; ducanturq; rectæ EG, GF, cadetq; semper EG, supra F, ob angulũ acutum DFE, ut ad finem scholii propos. 24 ostendimus. Quoniam igitur duo anguli *A*, & *EDF*, ponuntur æquales duobus rectis, & angulus EDG, æqualis factus est angulo A; erunt & anguli *EDG*, *EDF*, duobus rectis æquales: Sunt autem & anguli *EDG*, GDH, duobus



e 23. primi.
f 17. primi.
g 3. primi.

a 13 *primi.* duobus *a* rectis æquales. Igitur anguli EDG, EDF, angulis EDG,
b 3. *pron.* GDH, æquales erunt. Quare ablato communi angulo *EDG*, *b* remanebit angulo EDF, æqualis angulus GDH: Est autem eidem
c 15. *primi.* angulo EDF, *c* æqualis angulus HDI. Igitur & anguli GDH, HDI, æquales erunt; atque adeo angulus GDH, dimidium erit totius an-
d 5. *primi.* guli GDI. Rursus quia latera DF, DG, sunt æqualia in triangulo
e 32. *primi.* DFG: *d* erunt anguli DFG, DGF, æquales qui cum æquales *e* sint externo angulo *GDI*, erit uterlibet eorum, nempe DEF, dimidium anguli GDI: Ostensum est autem, angulum GDH, dimidium quo-
f 7. *pron.* que esse ejusdem anguli *GDI*. *f* Quare anguli *GDH*, DGF, æquales
g 27. *primi.* erunt. Et quia sunt alterni inter *EH*, *FG*: *g* erunt EH, FG, parallelæ.
h 37. *primi.* Quamobrem *h* triangula DEG, DEF; æqualia erunt cum habeant eandem basin DE, sintque inter easdem parallelas DE, FG. Quo-
i 4. *primi.* niam verò triangulum *DEG*, *i* æquale est triangulo ABC, propterea quod latera DE, DG, æqualia sunt lateribus *AB*, *AC*, & angulo *A*, æqualis angulus *EDG*: erit & triangulum ABC, triangulo DEF, æquale, quod est propositum.

Sint deinde anguli A, & EDF, duobus rectis majores. Dico triangulum ABC, quod majorem habet angulum, minùs esse trian-
k 23. *primi.* gulo *DEF*. Producatur enim *ED*, ad H, & FD, ad I: *k* fiatque
l 3. *primi.* angulus *EDG*, æqualis angulo *A*, & recta DG, rectæ DF, seu AC, æqualis, ducanturque rectæ EG, GF. Quoniam igitur anguli A, & EDF, ponuntur majores duobus rectis, erunt & anguli EDG, EDF,

m 13. *primi.* duobus rectis majores: Sunt autem anguli EDG, GDH, *m* æquales duobus rectis. Igitur anguli *EDG*, EDF, majores sunt angulis EDG, GDH.
n 15. *primi.* Quare ablato communi EDG, remanebit angulus EDF, major angulo GDH. Quoniam verò *n* angulus EDF, angulo HDI, æqualis est, erit quoque HDI, major quàm GDH: atque adeo GDH, minor, quàm dimidium anguli GDI. Rursus quia latera DG, DF,
o 5. *primi.* æqualia sunt: *o* erunt anguli DFG DGF, æquales: qui cum sint *p* æ-
p 32. *primi.* quales externo GDI, erit utervis eorum, nempe DGF, dimidium anguli GDI: Ostensum est autem, angulum *GDH*, minorem esse di-
q 23. *primi.* midio ejusdem GDI. Quare DGF, major erit, quàm GDH. Abscindatur ex angulo DGF, angulus DGK, *q* æqualis angulo alterno
r 27. *primi.* GDH. Erit ergò GK, *r* parallela ipsi DE, secabitque GK, rectam, EF. Ducatur ex D, ad K, ubi GK, secat rectam *EF*, recta DK. Erit igitur
s 37. *primi.* triangulum DEG, *s* æquale triangulo DEK. Quoniam autem tri-
t 4. *primi.* angulum DEG, *t* æquale est triangulo *ABC*, propterea quod latera
u 9. *pron.* *DE*, DG, æqualia sunt lateribus AB, *AC*, & angulo *A*, angulus *EDG*, æqualis; erit & triangulum *ABC*, triangulo DEK, æquale. Cùm igitur DEK, *u* minùs sit triangulo DEF, erit quo-

que

que ABC, triangulum triangulo DEF, minus. Quod est propositum.

Sint tertio anguli A, & EDF, *duobus rectis minores. Dico triangulum* ABC, *quod majorem habet angulum, majus esse triangulo* DEF. *Producatur* ED, *ad* H, & FD, *ad* I, a *fiatque angulus* EDG, *aqualis angulo* A, *b & recta* DG, *recta* DE, *seu* AC: *ducantur* q *recta* EG, FG. *Quoniam igitur anguli* A, & EDF, *ponuntur minores duobus rectis, erunt quoque anguli* EDG, EDF, *duabus rectis minores. Sunt autem anguli* c EDG, GDH, *duobus rectis aquales. Igitur* EDG, EDF, *minores sunt, quàm* EDG, GDH: *demptoq; communi* EDG, *remanebit* EDF, *minor, quàm* GDH. *Est autem* EDF, d *aqualis ipsi* HDI, *Quare &* HDI, *minor erit, quàm* GDH: *atque adeo* GDH, *major est dimidio anguli* GDI. *Quoniam autem* DGF, *dimidium est ejusdem anguli* GDI, *ut jam supra ostensum fuit: erit* GDH, *major, quàm* DGF. *Fiat igitur angulus* DGK, e *aqualis angulo* GDH, *ducta recta* GK, *quæ secabit rectam* EF, *protractam in* K: *& ducatur recta* DK. *Erit ergò, ut prius,* GK, f *parallela ipsi* DE: g *triangulumque* DEG, *triangulo* DEK, *aquale: Est autem iterum* DEG, h *aquale ipsi* ABC. *Igitur &* ABC, *aquale est ipsi* DEK. *Quocirca cum* DEK, i *majus sit quàm* DEF; *erit &* ABC, *majus, quàm* DEF. *Quod demonstrandum erat.*

a 23. *primi.*
b 3. *primi.*
c 13. *primi.*
d 15. *primi.*
e 23. *primi.*
f 27. *primi.*
g 37. *primi.*
h 4. *primi.*
i 9. *pron.*

Ex his perspicuum est, cur Euclides in propos. 24. solùm collegerit inæqualitatem basium, non autem triangulorum, ut ibidem admonuimus.

THEOR. 28. PROPOS. 38. XXXIIX

Triangula super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

Inter parallelas AB, CD, *& super aquales bases* CE, FD, *sint constituta triangula* ACE, BFD. *Dico ipsa esse aqualia.* k *Ducatur enim* EG, *parallela ipsi* AC, *&* DH, *ipsi* BF: *Eruntque* l *parallelogramma* ACEG, BFDH, *aqualia. Cùm igitur horum* m *dimidia sint triangula* ACE, BED; n *erunt hac inter se aqualia. Triangula ergò super aqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum.*

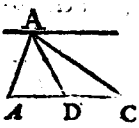
k 31. *primi.*
l 36. *primi.*
m 34. *primi.*
n 7. *pron.*

SCHOLIVM.

Conversa hujus ostendetur ab Euclide propos. 40.

Colligitur autem ex hac propositione, si à quovis angulo trianguli dati linea recta ducatur dividens latus oppositum bifariam,

trian-



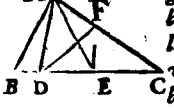
riam, triangulum quoque bifariam secari. Ducatur enim in triangulo *ABC*, ex angulo, A, recta AD, dividens bifariam latus BC, in D. Dico triangulum ABC, bifariam quoq; secari. Si enim per A, ducatur parallela ipsi BC, erunt duo triangula *AB*D, A*DC*, inter easdem parallelas: & super æquales bases. [a] Quare æqualia erunt.

a 38. primi.

EX PELETARIO.

A puncto quovis dato in uno latere trianguli proposiți lineam rectam ducere, quæ bifariam secet triangulum datum.

Sit triangulum ABC. *& punctum datum* D, *in latere* BC. *Oportet igitur ex* D, *rectam lineam ducere, qua bifariam dividat triangulum.* *Quod si punctum* D, *dividat latus* BC, *bifariam, recta* DA, *ducta ad* A, *dividet triangulum bifariam, ut in hoc scholio est ostensum: Si verò* D, *non dividit* BC, *bifariam,* [b] *secetur* BC,



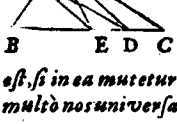
b 10. primi.

bifariam in E. *Deinde ex* D, *ad angulum oppositum A, ducatur recta* DA, *&* [c] *per* E, *parallela* EF, *ipsi* DA, *secans* AC, *in* F. *Si igitur ducatur recta* DF, *erit triangulum divisum bifariam à linea* DF. *Nam ductæ rectæ* EA, [d] *erunt triangula* EFA, EFD, *æqualia, cùm sint super eandem basin* EF, *& inter easdem parallelas* EF, AD. *Addito igitur communi* CFE, [e] *erunt tota triangula* AEG, CDF, *æqualia: Est autem* AEC, *dimidium totius* ABC, *ut jam fuit ostensum. Igitur &* CDF, *dimidium est ejusdem trianguli* ABC, *quod erat probandum.*

c 31. primi.

d 38. primi.

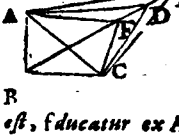
e 2. prop.



Quod si punctum D, *fuerit in altera mediatate* EC, *eodem modo problema confici emus: sed tunc triangulum abscinduntur ad partes* B, *trapezium verò ad partes* C, *ut figura præsens satis indicat. Demonstratio autem eadem est, si in ea mutetur litera* B, *in* C, *&* C, *in* B. *Hoc tamen problema multò nos universalius proponemus ad finem sexti libri.*

XXXIX THEOR. 29. PROPOS. 39.

Triangula æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.



Sint duo triangula æqualia ABC, DBC, *super eandem basin* BC, *& ad easdem partes. Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta, hoc est, rectam ductam* AD, *parallelam esse ipsi* BC. *Si enim non est,* [f] *ducatur ex* A, *parallela ipsi* BC, *qua vel cadet supra* AD,

f 31. primi

vel

vel infra. Cadat primum supra, qualis est AE, *occatque cum* BD, *protracta in* E, *& ducatur recta* EC. *Quoniam igitur parallelæ* a *sunt* AE, BC; a *erit triangulum* ABC, *triangulo* EBC, *æquale* : *Est autem per hypothesin, triangulum quoque* DBC, *æquale eidem* b *triangulo* ABC. *Igitur* b *erunt triangula* DBC, EBC, *æqualia, pars & totum, quod est absurdū. Quod si parallela ducta per* A, *cadat infra* AD, *qualis est* AF; *ducta recta* FC, *erunt eadem ratiocinatione triangula* BFC, BDC, *æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Erit igitur* AD, *parallela ipsi* BC. *Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat.*

a 37. primi.

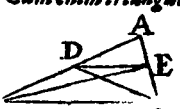
b 1. pron.

SCHOLIVM.

Ex his infert Campanus sequens hoc theorema.

Linea recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.

Secet linea DE, *latera* AB, AC, *trianguli* ABC, *bifariam in* D, *& E. Dico* DE, *parallelam esse lateri* BC. *Cùm enim triangula* ADE, BDE, *sint super æquales bases* AD, DB, *& inter easdem parallelas; (si per* E, *ducetur parallela ipsi* AB) c *erit triangulum* BDE, *triangulo* ADE, *æquale: Eadem ratione erit triangulum* CED, *eidem triangulo* ADE, *æquale. Quod etiam constat ex scholio præcedentis propos. Recta enim* ED, *secabit triangulum* AEB, *bifariam, & recta eadem* DE, *triangulum* ADC, *bifariam etiam, quod bases* AB, AC, *sectæ sint bifariam à recta* DE, *ex hypothesi. Igitur triangula* DBE, ECD, d *æqualia erunt: Habent autem eandem basin* DE, *& sunt ad easdem partes constituta. Quare* e *inter easdem erunt parallelas, & idcirco* DE, BC, *parallela erunt. Quod est propositum.*



c 38. primi.

d 1. pron.

e 39. primi.

Id autem, quod ad finem secundi theorematis in scholio propos. 34. polliciti sumus, facilè ex hac prop. demonstrabimus. Videlicet.

Omne quadrilaterum, quod ab utraque diametro bifariam dividitur, parallelogrammum est.

Nam quadrilaterum ABCD, dividatur bifariam ab utraq; diametro AC, BD. Dico ipsum esse parallelogrammum. Cùm enim triangula ADC, BDC, dimidia sint ejusdem quadrilateri ABCD, *f* ipsa inter se æqualia erunt. Quare cum eandem habeant basin DC, ad eas-demq; partes sint, *g* ipsa in eisdem parallelis erunt; Atq, idcirco rectæ AB, DC, parallelæ sunt. Non aliter ostendemus, parallelas esse AD, BC. Parallelogrammū igitur est ABCD. Quod est propositum.

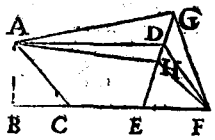
f 7. pron.

g 29. primi.

THEOR.

THEOR. 30. PROPOS. 40.

xl. Triangula æqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta, & in eisdem sunt parallelis.



Sint duo triangula æqualia ABC, DEF, *super bases æquales* BC, EF, (*quæ in eadem recta linea collocentur*) *& ad easdem partes constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis, hoc est, rectam ex A, ad* D, *ductam parallelam esse rectæ* BF. *Si enim non est, cadet parallela ipsi* BF, *per* A, *ducta, vel supra* AD, *vel infra. Cadat primùm supra, coeatque cum* ED, *producta in* G, *& ducatur recta* GF. *Quoniam igitur parallelæ sunt* AG, BF, *a* *a 38. primi.* *erit triangulum* EFG, *triangulo* ABC, *æquale: Ponitur autem & triangulum* DEF *eidem triangulo* ABC, *æquale.* *b 1. pron.* *Igitur* *b triangula* DEF, GEF, *æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Quod si parallela ducta per* A, *cadat infra* AD, *qualis est* AH; *ducta recta* HF, *erunt eadem argumentatione triangula* HEF, DEF, *æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Est igitur* AD, *parallela ipsi* BF. *Quare triangula æqualia super æqualibus basibus, &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

Hæc propositio convertit uno modo propos. 38. Alio autem modo converti potest, quemadmodum propos. 36. convertimus in ejus scholio nimirum.

Triangula æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basin, super æquales bases erunt constituta.

Sint triangula æqualia ABC, DEF, *inter parallelas* AD, BF, *& super bases* BC, EF, *quas dico esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit* BC, *major.* *c 3. primi.* *c Abscissa ergo recta* CG, *æquali ipsi* EF, *& ducta recta* GA; *d 38. primi.* *d erit triangulum* AGC, *triangulo* DEF, *æquale: Ponitur autem & triangulum* ABC, *eidem triangulo* *e 1. pron.* DEF, *æquale: Igitur triangula* AGC, ABC, *æqualia erunt, pars & totum, quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases* BG, EF, *sed æquales. Quod est propositum.*

Sequens etiam theorema facili negotio demonstrabitur.

Si duo triangula inter easdem parallelas habeant bases

baſes inæquales, illud, cujus baſis major eſt, majus erit. Et contrà, ſi duo triangula ſint inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis majoris major erit.

Sint enim in proxima figura inter parallelas AD, BF, triangula *ABC*, *DEF*, ſitq; baſis BC, baſe *EF*, major. Dico triangulum *ABC*, majus eſſe triangulo DEF. Ablata enim recta *CG*, *a* æqualis ipſi EF, ductaque recta *AG*; *b* erunt triangula *AGC*, DEF, ſupra æquales baſes GC, *EF*, æqualia. Cùm ergò *c* triangulum *ABC*, triangulo *AGC*, majus ſit; erit idem triangulum *ABC*, majus quàm DEF.

a 3. *primi*. b 38. *primi*. c 9 *pron*.

Sint rurſus triangula ABC, DEF, inæqualia, & *ABC*, majus. Dico baſin BC, baſe *EF*, majorem eſſe. Si enim dicatur æqualis, *d* erit triangulum *ABC*, triangulo DEF, æquale, quod eſt abſurdum, cum majus ponatur. Si verò credatur eſſe minor, erit triangulum *DEF*, majus triangulo *ABC*, ut proximè oſtendimus, quod multò magis eſt abſurdum, cùm *ABC*, ponatur majus, quàm DEF. Recta igitur BC, major erit, quàm EF, cum neque æqualis ſit oſtenſa, neque minor. Quod eſt propoſitum.

d 38. *primi*.

Quæ porrò hactenus de parallelogrammis, triangulisque inter eaſdem parallelas conſtitutis demonſtrata ſunt, facile quoq; demonſtrari poſſunt de trapeziis inter eaſdem parallelas deſcriptis, eodem fermè ordine, hoc modo.

I.

Trapezia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes inter ſe æquales ſint, ſunt inter ſe æqualia: Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas æquales.

Dicuntur trapezia in eiſdem eſſe parallelis, quando latera duo oppoſita parallela ſunt parteſq; ſunt earundem parallelarum.

Inter parallelas igitur *AB*, CD, ſuper eadem baſi CD, conſtituta ſint duo trapezia, *ACDE*, FCDB, quorum baſes oppoſitæ *AE*, *FB*, æquales ſint. Dico ipſa inter ſe eſſe æqualia. Ductis enim rectis *EC*, *FD*, *e* erunt tàm triangula *ECD*, *FCD*, ſuper eadem baſi CD, & in eiſdem parallelis, inter ſe æqualia, *f* quàm triangula *ACE*, *FDB*, ſuper æqualibus baſibus AE, *FB*, & in eiſdem parallelis. Si igitur æqualibus ECD, FCD, addantur æqualia ACE, *FDB*, *g* erunt tota trapezia ACDE, *FCDB*, inter ſe æqualia.

e 37. *primi*. f 38. *primi*. g 2. *pron*.

Sint jam trapezia ACDE, FCDB, æqualia. Dico baſes oppo-

sitas AE, FB, æquales quoque esse. Erunt enim rursus *a* triangula ECD, FCD, æqualia. Si igitur ex trapeziis æqualibus auferantur, *b* æqualia erunt reliqua triangula ACE, FDB. Quare, ut in hoc scholio ostendimus, bases AE, FB, æquales erunt.

a 37. primi.

b 3. pron.

II.

Trapezia in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum oppositæ bases sint inæquales, inæqualia sunt, majusque est illud, cujus basis major est; Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas inæquales, majorque est illa, cujus trapezium majus est.

Vt in eadem figura, si basis *AE*, dicatur esse major base FB; Dico trapezium ACDE, majus esse trapezio FCDB. *c* Erunt enim rursus triangula ECD, FCD, æqualia: At triangulum ACE, triangulo FDB, majus, ut in hoc scholio demonstravimus. *d* Totum ergò trapezium ACDE, toto trapezio FCDB, majus erit.

c 37. primi.

d 4. pron.

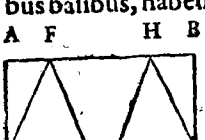
Rursus si trapezium ACDE, dicatur esse majus trapezio FCDB; Dico basin AE, basi FB, majorem esse. *e* Erunt enim rursus triangula ECD, FCD, æqualia. Quare reliquum triangulum *ACE*, reliquo triangulo FDB, *f* majus erit: ac proinde, ut in hoc scholio ostensum est, basis AE, major erit base FB. Quod ostendendum erat.

e 37. primi.

f 5. pron.

III.

Trapezia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorum oppositæ bases sint æquales, æqualia sunt: Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent bases oppositas æquales.



Inter parallelas *AB*, CD, super æquales bases *CE*, GD, constituta sint duo trapezia *ACEF*, HGDB, quorum bases oppositæ AF, HB, æquales quoque sint: Dico ipsa trapezia æqualia esse. Ductis enim rectis FC, HD, *g* erunt tàm triangula FCE, HGD, super æquales bases CE, GD, quàm *ACF*, BDH super æquales bases AF, BH, inter se æqualia. *h* Tota ergò trapezia æqualia erunt.

g 38. primi.

h 2. pron.

Sint jam trapezia *ACEF*, HGDB, æqualia super bases æquales *CE*, GD. Dico bases oppositas AF, BH, æquales quoque esse. *i* Erunt namque rursus triangula FCE, HGD, super æquales bases CF,

i 38. primi.

CF, GD, æqualia: quibus ablatis ex trapeziis æqualibus, reliqua triangula ACF, BDH, *a* æqualia erunt; ac proinde, ut paulò ante in hoc scholio ostendimus, bases AF, BH. æquales erunt. *a* 3. *pron.*

IV.

Trapezia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorum oppositæ bases sint inæquales, inæqualia sunt, majusq; est illud, cujus basis major est: Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent oppositas bases inæquales, majorque est illa, cujus trapezium majus est.

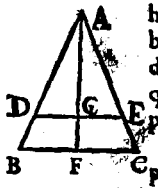
Vt in eadem figura, si basis AF, dicatur esse major base HB, erit trapezium ACEF, trapezio HGDB, majus. *b* Erunt enim rursum triangula FCE, HGD, super æquales bases CE, GD, æqualia. At triangulum ACF, majus triangulo BDH, ut supra ostensum est, quod basis AF, major ponatur base BH. *c* Totum ergò trapezium ACEF, toto trapezio HGDB, majus erit. *b* 38. *primi.* *c* 4. *pron.*

Rursus si trapezium ACEF, majus ponatur trapezio HGDB, erit basis AF, base BH, major. *d* Erunt enim rursus triangula FCE, HGD, super æquales bases CE, GD, æqualia: quibus ablatis ex trapeziis inæqualibus, reliquum triangulum ACF, reliquo triangulo BDH, *e* majus erit; ac proinde, ut in hoc scholio ostensum fuit, basis AF, base BH, major erit. Quod erat ostendendum. *d* 38. *primi.* *e* 5. *pron.*

Porrò non videtur hic omittendum theorema sequens, per quod facili negotio lineam rectam quamcunque in quotvis partes æquales dividemus: quod nos in scholio propos. 10. hujus lib. facturos hoc loco recepimus. Quamvis enim idem demonstrari possit, & quidem facilius, per proportiones linearum, ut lib 6 ostendemus; jucundum tamen est intelligere, nullo labore idem absolvi posse per propositiones hactenus demonstratas; sine proportionum adjumento. Theorema ergò est hujusmodi.

Si in triangulo linea recta uni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo opposito ducta, dividensque alterutram parallelarum bifariam, dividit quoque alteram bifariam.

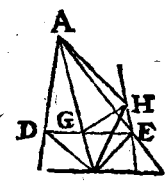
In triangulo ABC, æquidistet DE, ipsi BC, recta AF, secet alterutram BC; DE, bifariam in F, vel G. Dico alteram quoque bifariam secari. Sint enim primum anguli ad F, recti. Quod posito, *f* & anguli ad G, recti erunt. Si igitur BC, dividitur bifariam; dividetur bifariam quoq; angulus A, per ea, quę in scholio prop. 26. *f* 29. *primi.*



huius lib. demonstravimus; ac proinde recta AG, ad basin DE, trianguli ADE, perpendicularis, dividensque angulum A. bifariam, dividet bifariam quoque basin DE, ut ibidem ostendimus, quod est propositum.

Si verò DE, ponatur dividi bifariam, dividetur per idem scholium propos. 26. huius lib. angulus quoque A, bifariam; ac proinde recta AF, ad basin BC, perpendicularis, dividensque angulum A, bifariam, basin quoq; BC, bifariam secabit, quod est propositum.

Sint deinde anguli ad F, non recti, sed AFC, obtusus, & AFB, acutus. Quo posito, erit & AGE, obtusus, & AGD, acutus, a cum hi illis sint æquales, externi internis. Si igitur BC, dividitur bifariam, b constituatur acuto angulo AGD, æqualis angulus AGH, c & rectæ GH, rectæ GD, æqualis, ducanturq; rectæ AH, HF, FD, FE. Quia igitur tàm triangula tota ABF, ACF, ex scholio propos. 38. huius libri æqualia sunt, quàm d triangula ablata DBF, ECF, ob æquales bases BF, CF, e erunt quoque reliqua triangula ADF, AEF, æqualia. Rursus quoniam duo latera AG, GD, trianguli AGD, duobus lateribus AG, GH, æqualia sunt, angulosque comprehendunt æquales AGD, AGH, ex constructione f erunt quoque triangula AGD, AGH, æqualia. Pari ratione, quia duo latera DG, GF, duobus lateribus HG, GF, æqualia sunt, ex constructione, angulosque continent æquales DGF, HGF, (cum enim per constructionem anguli AGD, AGH, æquales sint, erunt quoque reliqui duorum rectorum DGF, HGF, æquales, g sunt enim tàm AGD, DGF, quàm AGH, HGF, duobus rectis æquales) erunt h quoque triangulo DGF, HGF, æqualia: i ac proinde & tota triangulo ADF, AHE, æqualia erunt. Est autem eidem triangulo ADF, æquale ostensum triangulum AEF. Igitur & inter se k æqualia erunt triangula AHF, AFF: l ac propterea inter duas easdem erunt parallelas, hoc est, ducta recta EH, erit basi AF, communi parallela. Igitur m & triangula HGF, EFG, inter easdem parallelas, & super eadem basi FG, æqualia inter se erunt. Est autem triangulum HGF, triangulo DGF, ostensum æquale. Igitur triangula quoque DGF, EGF, æqualia inter se erunt; propterea quæ basis quoq; DG, basi GE, æqualis erit, ut in hoc scholio demonstratum est, quod est propositum.

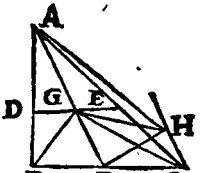


a 29. primi.
b 23. primi.
c 23 primi.
d 38. primi.
e 38. pron.
f 4. primi.
g 13. primi.
h 4. primi.
i 2. pronun.
k 1 pron.
l 39. primi.
m 37. primi.

Si verò DE, ponatur bifariam dividi n constituatur angulo acuto AFB, æqualis angulus AFH, o & recta FH, rectæ FB, ducanturque rectæ AH, HG, GB, GC. Quoniam igitur tàm triangula AGD, AGE,

n 23. primi.
o 3. primi.

AGE, ex scholio propos. 38. hujus lib. æqualia sunt, *a* quam triangula DGB, EGC, ob æquales bases DG, EG: *b* erunt tota etiam triangula AGB, AGC, æqualia. Rursus quia duo latera AF, FB, duobus lateribus AF, FH, æqualia sunt, continentque angulos æquales AFB, AFH, ex constructione; *c* erunt triangula quoq; AFB, AFH, æqualia. Pari ratione, quia duo latera GF, FB, duobus lateribus GF, FH, æqualia sunt, æqualesque continent angulos GFB, GFH, ex constructione: *d* erunt quoque æqualia triangula GFB, GFH, quibus demptis ex æqualibus AFB, AFH, *e* æqualia erunt reliqua triangula AGB, AGH: Est autem eidem triangulo AGB, ostensum æquale triangulum AGC. *f* Igitur & triangula AGC, AGH, inter se erunt æqualia *g* Quare & inter easdem parallelas erunt, hoc est, ducta recta CH, ipsi AF, parallela erit: ac proinde *h* æqualia inter se erunt triangula GHF, GFC. Fuit autem ostensum triangulum GHF, triangulo GBF, æquale. *i* Igitur & æqualia inter se erunt triangula GFC, GFB: ideoq; ut in hoc scholio demonstravimus, & bases FC, FB, æquales erunt. Quod est propositum.



a 38. primi
b 32. prun.
c 4. prim.
d 4. primi.
e 3. pron.
f 1. pron.
g 39. primi,
h 37. primi
i 1. pronun.

Aliter. Divisa sit primum BC, bifariam in F. Dico & DE, bifariam esse divisam in G. Si enim DG, GE, non sunt æquales, sit major DG, ducanturque rectæ FD, FE. Erit igitur per ea, quæ in hoc scholio demonstravimus, tàm triangulũ ADG, triangulo AEG, quàm triangulum FDG, triangulo FEG, majus. *k* Totum ergò triangulum ADF, toto triangulo AEF, majus erit: quibus si addantur triangula DBF, ECF, *l* quæ propter bases æquales BF, CF, æqualia sunt, *m* fiet totum triangulum ABF, toto triangulo ACF, majus: ac proinde, ut in hoc scholio monstravimus, basis AF, basi EC, major erit: Sed & æqualis ponitur. Quod est absurdum. Bifariam ergò secta est DE, in G. Quod est propositum.

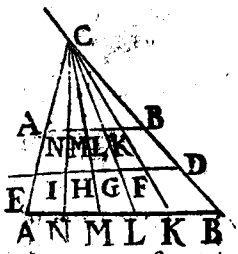
k 4. pron.
l 38. primi.
m 4. pron.

Sit jam DE, secta bifariam in G. Dico & BC, dividi bifariam in F. Sin minus, *n* dividatur BC, in H, bifariam, ducaturque recta AH, *mi*, secans DE, in I. Quoniam igitur AH, secat BC, bifariam in H, secabit eadem ipsam DE, quoque bifariam in I, ut proximè ostendimus. Quod est absurdũ, cùm bifariã secta esse ponatur in G. Sequeretur enim partem toto esse majorẽ. Nam si DI, æqualis est ipsi IE, cum IE, major sit, quàm GE, erit quoq; DI, major, quam GE, hoc est, quam DG, quæ ipsi GE, æqualis ponitur. Dividitur ergò BC, bifariam in F, Quod erat demonstrandum.

n 10. pri. mi.

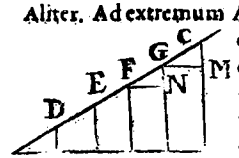
Hoc ostenso theoremate, ad divisionem lineæ rectæ in quotvis æquales partes jam veniamus.

Datam rectam lineam finitam in quotlibet partes æquales secare.



a 31. primi. b 3. primi.

Sit data recta AB, secanda in quinque partes æquales. Per extremum punctum *B*, ducta recta BC, utcunque & assumpto in BC, puncto quocunq; D, sive infra *B*, sive supra, *a* ducatur per D, ipsi AB, parallela DE, in qua *b* abscindantur quinque partes inter se æquales *DF*, FG, GH, HI, IE, hac tamen lege, ut existente puncto *D*, infra *B*, recta *DE*, ex quinque partibus æqualibus composita major sit, quàm data AB, minor verò, existente puncto D, supra *B*, ut nimirum recta AC, per alterum extremum *A*, & per *E*, ducta cum *BD*, concurrere possit in puncto aliquo, ut in C. Aquo si per puncta *F*, *G*, *H*, *I*, rectæ ducantur, secta erit data recta A *B*, in quinque partes æquales BK, KL, LM, MN, NA. Quoniam enim in triangulo CBL, recta DG, ipsi *BL*, est parallela, vel in triangulo CDG, recta BL, ipsi DG; sectaque est DG, bifariam in F, secta quoque erit bifariam BL, in *K*, ut in proximo theoremate demonstravimus. Eademque ratione recta *KM*, in L, secta erit bifariam, quemadmodum & FH, in G, bifariam secta est. Sunt ergò tres partes *BK*, *KL*, *LM*, inter se æquales, sicuti tres DF, *FG*, GH, atque ita de cæteris.

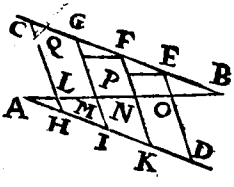


Aliter. Ad extremum A, lineæ AB, secandæ in quinq; partes æquales, constituatur angulus rectilineus quicunque A, & ex recta *AC*, *c* abscindantur quinque partes quantæcunq; inter se æquales AD, *DE*, EF, FG, GC: ductaque recta CB, *d* agantur ei parallelæ GL, *FK*, *EI*, DH. Dico rectam *AB*, sectam esse in quinque partes æquales. *e* Ductis enim per *G*, *F*, ipsi *AB*, parallelis GMFN, *f* quæ inter se etiam parallelæ erunt, & *g* ipsis BL, *LK*, æquales in parallelogrammis, *GB*, *FL*; *h* erunt tàm anguli FGN, GCM, externus & internus in parallelis GL, CB, quàm anguli CGM, GFN, externus & internus in parallelis GM, *FN*, æquales inter se. Quoniam igitur duo anguli C, G, trianguli CGM, duobus angulis G, *F*, trianguli GFN, æquales sunt, uterque utrique, lateraque illis adjacentia CG, GF, æqualia per constructionem, *i* erunt quoque latera GM, *FN*, æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis BL, LK, erunt quoque *BL*, LK, inter se æquales. Eademque ratione ostendemus *KL*, KI, æquales esse, nec non IK, *HI*,

c 3. primi. d 1. primi. e 31. primi. f 30. primi. g 34. primi. h 29. primi. i 26. primi.

HI, & HI, AH; ac propterea recta AB, in quinque æquales partes divisa erit. Quod est propositum.

Aliter. Ad extrema puncta A, B, lineæ AB, in quinque partes æquales dividendæ constituantur duo æquales anguli in diversas partes ABC, BAD. Et in utraque linea BC, AD, *a* quæ ob alternos angulos æquales A, B, parallelæ inter se sunt, *b* sumãtur quatuor partes inter se omninò æquales, tot nimirum, una minus, in quot partes linea secanda est, cujusmodi sunt BE, EF, FG, GC; AH, HI, IK, KD, jungunturque rectæ CH; GI, FK, ED, *c* quæ inter se erunt parallelę, cum conjungant extrema parallelarum æqualium. Dico rectam AB, in quinq; partes æquales sectam esse. *d* Ductis enim per E, F, ipsi AB, parallelis EP, EQ, *e* quæ inter se quoque parallelæ erunt, *f* & ipsis NO, MN, æquales in parallelogrammis EN, FM; *g* erunt tam anguli EFP, FGQ, externus & internus in parallelis FK, GI, quam anguli GFQ, FEP, externus & internus in parallelis QF, PE, inter se æquales. Itaque quoniam duo anguli G, F, trianguli FGQ, duobus angulis F, E, trianguli EFP, æquales sunt, uterque utrique, lateraque illis adjacentia FG, EF, æqualia per constructionem, *h* erunt quoque latera FQ, EP, inter se æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis MN, NO, erunt etiam MN, NO, inter se æquales. Eademque ratione æquales inter se erunt OB, NO, MN, LM, AL, propterea quæ recta AB, in quinque æquales partes divisa erit. Quod est propositum.

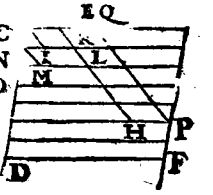


a 27. primi.
b 3. primi.
c 31. primi.
d 31. primi.
e 30. primi.
f 34. primi.
g 29. primi.
h 26. primi.

Praxis hæc brevius ita demonstrabitur. *i* Quoniam rectæ ED, FK, GI, GH, parallelæ sunt, quod conjungant extrema æqualium & parallelarum; secabitur recta BL, in quatuor partes æquales, nec non & recta AO, ut in præcedenti praxi ostendimus. Omnes ergò quinque partes AL, LM, MN, NO, OB, æquales erunt.

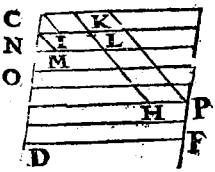
i 33. primi.

Aliter. Paretur instrumentum divisionibus linearum in partes æquales accommodatum, hoc modo. Ductis duabus parallelis satis magno spatio inter se distantibus CD, EF, *k* sumantur in utraque partes omninò inter se æquales quotcunque, tot videlicet in una, quot in altera, & modicæ quantitatis, punctaque respondentia lineis rectis jungantur, *l* quæ parallelæ inter se erunt, cum conjungant extrema parallelarum æqualium. Si igitur beneficio circini recta AB, in quinque dividenda partes æqua-



k 3. primi.

l 33. primi.



æquales, transferatur ex quovis puncto G, usque ad punctum H, ita ut quinque E spatia parallelarum inter G, & H, includantur, divisa erit ducta GH, ab illis parallelis in quinque partes æquales, quibus partibus si in data AB, a sumantur partes æquales, divisa quoque erit AB, in quinque æquales partes. Sectam autem esse GH, in quinque partes æquales, a 33. primi. ita demonstrabitur. Ductis ex C, N, ipsi GH, parallelis CI, NM, b 30. primi. quæ inter se quoque parallelæ erunt; c & ipsis GK, KL, æquales in c 34. primi. parallelogrammis GI, KM; erunt d tam anguli CNI, NOM, exter- d 29. primi. nus & internus in parallelis NK, OL, quam anguli ONM, NCI, externus & internus in parallelis NM, CI, æquales inter se. Igitur cum duo anguli N, C, trianguli CNI, duobus angulis O, N, trianguli NOM, æquales sint, uterque utrique lateraque illis adjacentia CN, e 26. primi. NO, æqualia, ex constructione, e erunt quoque latera CI, NM, inter se æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis GK, KL, erunt quoque GK, KL, inter se æquales. Eademque ratione omnes partes rectæ GH, ostendentur æquales: ac proinde recta GH, in quinque partes æquales erit divisa.

Praxis etiam hæc brevius demonstrabitur, si hoc modo fiat. Sumptis quinque intervallis rectæ EF, ab E, usque ad P, transferatur recta AB, beneficio circini ex P, ad aliquod punctum rectæ CE, ut ad Q. Erit enim hac ratione ducta recta PQ, divisa à parallelis in quinq; partes æquales, ut in secunda praxi demonstratum est. Quare si partes rectæ PQ, quæ datæ rectæ AB, æqualis est, ex constructione, transferantur in datam rectam AB, divisa quoq; erit AB, in quinque partes æquales. Quod est propositum.

THEOR. 31. PROPOS. 41.

xli

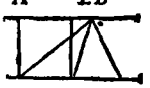
Si parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

Inter parallelas AB, CD, & super basin CD, constituantur parallelogrammum ACDE, & triangulum BCD. Dico, parallelogrammum esse duplum trianguli BCD. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, erunt f triangula ACD, BCD, æqualia; At parallelogrammum ACDE, duplum est trian- f 37. primi. *guli ACD; g quod triangula ACD, ADE, æqualia quoque inter se* g 34. primi *sint. Igitur & trianguli BCD, h duplum erit idem parallelogram-* h 6. prom. *mum ACDE. Quamobrem, si Parallelogrammū cum triangulo, &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHO-

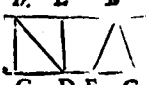
SCHOLIVM.

Hinc sequitur, si triangulum duplam habuerit basin, fueritque in eisdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam si basis CD, producatur ad F, ut sit DF, æqualis ipsi CD, ducaturque recta FB, erit triangulum BCF, duplum trianguli BCD, a quod triangula BCD, BDF, æqualia sint: Est autem & parallelogrammum ACDE, b duplum ejusdem trianguli BCD. c Igitur æqualia erunt triangulum BCF, & parallelogrammum ACDE.



a 38. primi.
b 41. primi.
c 6. pron.

Idem hoc theorema Euclidis demonstrari potest eodem modo, si parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint bases, & non eandem, fuerintque in eisdem parallelis, ut cernis in parallelogrammo ACDE, & triangulo BFG, quorum bases CD, FG, æquales sunt. Ductaenim diametro AD, in parallelogrammo, d erunt triangula ACD, BFG, æqualia. Cum igitur parallelogrammum ACDE, duplum sit trianguli ACD: e quod diameter AD, secet parallelogrammum ACDE, bifariam: f erit quoque idem trianguli BFG, duplum. Eadem ratione si basis FG, duplicaretur, & recta ad B, duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc esset duplum etiam trianguli BFG, &c.



d 38. primi.
e 34. primi.
f 6. pron.

Conversum hujus theorematis duplex est, hoc modo.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemque habuerint basin, vel æquales, & ad easdem partes constituta; Erunt ipsa in eisdem parallelis. Et si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eisdemque parallelis: erunt bases æquales, si non sit eadem.

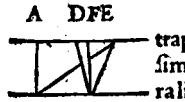
Sit parallelogrammum ABCD, duplum trianguli EBC, sive eandem habeant basin, sive æquales. Dico parallelam AD, productam cadere in E, punctum. Nam alias cadet aut supra E, aut infra. Vnde, ut in 39. vel 40. propos. ostendetur pars æqualis toti, ut figura indicat. g Nam erit quoque parallelogrammum ABCD, trianguli BFC, vel BGC, duplum. h Quare triangula EBC, FBC, vel triangula EBC, GBC, æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Sit deinde parallelogrammum ABCD, du-

g 41. primi.
h 6. pron.

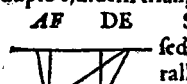
duplum trianguli EFG, in eiſdemque paralle-
lis. Dico baſes BC, FG, eſſe æquales. Nam
ſi altera, nempe BC, ſit major, abſciſſa æquali
CH, & *a* ducta HI, parallela ipſi AB, demon-
a 31. *primi.* ſtrabimus parallelogramma ABCD, IHCD,
eſſe æqualia totum & partem; (quia utrumque duplum eſt trian-
guli EFG; illud quidem per hypotheſin, hoc verò per 41. propoſ.)
Quod eſt abſurdum. Idem oſtendemus, ſi baſis FG. major dica-
tur. Si enim abſcindatur ipſi BC, æqualis FH, ducaturque recta
HE, erunt triangula EFH, EFG, æqualia, pars & totum; (Nam
utrumque dimidium eſt parallelogrammi ABCD; Illud quidem per
propoſ. 41. hoc verò per hypotheſin.) Quod eſt abſurdum.

EX PROCLO.

Si triangulum, & trapezium ſuper eadem baſi, & in eiſ-
dem fuerint parallelis major autem linea parallela trape-
zii ſit baſis trianguli: erit trapezium minus duplo trian-
guli: Si verò minor linea parallela trapezii baſis ſit trian-
guli, erit trapezium majus duplo trianguli.



Inter lineas parallelas AE, BC, ſint conſtituta
trapezium ABCD, & triangulum EBC, ſuper ba-
ſim BC. eandem, quæ ſit tamen major, quam alte-
ra linea AD, parallela in trapezio dato. Dico tra-
pezium ABCD, minus eſſe duplo trianguli FBC.
Cùm enim AD, minor ponatur quàm BC. ſumatur AF, æqualis ipſi
b 33. *primi.* BC, & ducatur recta CE, *b* quæ erit parallela ipſi AB; atque adeò
c 41. *primi.* parallelogrammum erit ABCF, *c* quod duplum eſt trianguli EBC.
Quare trapezium ABCD, cum ſit pars parallelogrammi, minus erit
duplo ejuſdem trianguli EBC, quod eſt propoſitum.

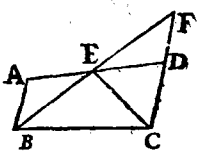


Sint rurſus trapezium, & triangulum, ut prius,
ſed baſis BC, ſit minor, quàm reliqua linea pa-
rallela AD, in trapezio dato. Dico trapezium
ABCD, majus eſſe duplo trianguli EBC. Cùm e-
nim AD, major ſit, quàm BC. abſcindatur DF, æ-
d 33. *primi.* qualis ipſi BC, & ducatur recta BF, *d* quæ erit parallela ipſi CD; atq;
e 41. *primi.* adeò parallelogrammum erit BCDF: *e* quod duplum eſt triangulum
EBC. Quare totum trapezium ABCD, quod ſuperat parallelo-
grammum BCDF, majus erit duplo ejuſdem trianguli EBC, quod
eſt propoſitum.

Idem concludetur, ſi trapezium, & triangulum conſtituta fue-
rint ſuper æquales baſes, ita tamen ut nunc quidem baſis trapezii
ſit major latere oppoſito parallelo, nunc verò minor.

Tra-

Trapezium habens duo latera oppoſita parallela, duplum eſt trianguli, quod baſin habet unum latus trapezii conjungens duas parallelas, verticem verò in medio puncto lateris oppoſiti.



Sit trapezium *ABCD*, cujus duo latera oppoſita *AB*, *DC*, ſint parallela, & ſuper baſin *BC*, conſtituatur triangulum *EBC*, verticem E, habens in medio puncto E, lateris *AD*. Dico trapezium *ABCD*, duplum eſſe trianguli *EBC*. Producatur enim unum latus trianguli ad verticem, nempe *BE*, donec coeat cum *CD*, protracto in F. Et quia parallelæ ſunt *AB*, *CF*, *a* erunt anguli alterni *BAE*, *FDE*, æquales: *b* Sunt autem & anguli *AEB*, *DFE*, æquales, quippe qui ad verticem E: & latus *AE*, trianguli *ABE*, lateri *DE*, trianguli *DEF*, æquale per hypotheſin. *c* Igitur & reliqua latera *AB*, *BE*, reliquis lateribus, *DF*, FE, æqualia erunt, utrumque utrique, & reliqui anguli *ABE*, *DFE*, æquales: atque idcirco triangula *AEB*, *DFE*, ex coroll. propoſ. 26. hujus lib. æqualia erunt. Quare addito communi triangulo *CDE*, *d* erunt triangulo *CEF*, æqualia triangula ſimul *ABE*, *CDE*. *e* Eſt autem & triangulum *BCE*, eidem triangulo *CEF*, æquale, quod baſes *BE*, *EF*, oſtenſæ ſint æquales, & ipſa triangula inter eaſdem ſint parallelas, ſi per C, duceretur parallela ipſi BF. *f* Igitur triangulum *CBE*, æquale erit triangulis *ABE*, *CDE*, & propterea *CBE*, triangulum dimidium erit trapezii *ABCD*, quod eſt propoſitum.

a 29. *primi.*
b 15. *primi.*
c 26. *primi.*
d 1. *pron.*
e 38. *primi.*
f 1. *pronum.*

PROBL. II. PROPOS. 42.

xlij

Dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

Datum triangulum ſit ABC, *& datus angulus rectilineus* D. *Oportet igitur conſtituere parallelogrammum æquale triangulo* ABC, *habens angulum æqualem angulo* D. *Dividatur latus unũ trianguli, nempe* BC, *g bifariam in* E, *& h fiat angulus* CEF, *æqualis ãgulo* D, *prout libet, h. e ſive angulus*, CEF, *vergat ad partes* C, *ſive ad partes* B, *prout magis videbitur expedire. Ducatur itẽ per A, i recta* AF, *parallela ipſi* BC, *quæ ſecet* EF, *in* F. *Rurſus per* C, *vel* B, *ducatur ipſi* EF, *parallela* CG, *occurrens rectæ* AF, *producta in* G. *Erit q in angulo* CEF, *qui dato angulo rectilineo* D, *factus eſt æqualis, conſtitutum parallelogrammum* CF, FG, *quod dico eſſe æquale triangulo ABC. Ducta enim recta* EA,

g 10. *primi.*
h 23. *primi.*
i 35. *primi.*

quo-

quoniam parallelogrammum CEFG, a *duplum est trianguli* AEC, *& triangulum* ABC, *duplum ejusdem trianguli* AEC, b *quod triangula* AEC, ABE, *super æquales bases* EC, BE, *& in eisdem parallelis, sint æqualia. Erunt parallelogrammum* CEFG, *& triangulum* ABC, c *æqualia inter se. Cùm igitur angulus* CEF, *factus sit æqualis angulo* D, *constat propositum. Quocirca dato triangulo æquale parallelogrammum constituimus, in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.*

a 41. *primi.*
b 38. *primi.*
c 6. *pron.*

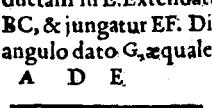
SCHOLIVM.

Praxis hujus problematis facilima est ex ipsa constructione.

Subjungit autem hoc loco Peletarius subsequens problema, quod hujus propos. conversum est.

Dato parallelogrammo æquale triangulum constituere, in dato angulo rectilineo.

Sit datum parallelogrammum *ABCD*, & datus angulus G. Fiat angulus CBE, angulo *G*, æqualis, fecetque recta BE. rectam AD, productam in E. Extendatur quoque BC, ad F, sitque *CF*, æqualis rectæ BC, & jungatur EF. Dico triangulum BEF, habens angulum EBF, angulo dato G, æqualem, æquale esse parallelogrammo ABCD.



Ducta enim recta *CE*, d erit parallelogrammum *ABCD*, duplum trianguli BCE. Item triangulum *BEF*, ejusdem trianguli *BCE*, duplum: e quod æqualia sint triangula *EBC*, *ECF*. Quare f æqualia inter se erunt parallelogrammum *ABCD*, & triangulum BEF. Quod est propositum.

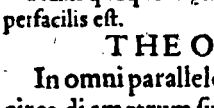
d 41 *primi.*
e 38. *primi.*
f 6. *pron.*

Praxis quoque hujus problematis Peletarii, ex ipsa constructione perfacilis est.

xliij

THEOR. 32. PROPOS. 43.

In omni parallelogrammo complementa eorum, quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.



In parallelogrammo ABCD, sint circa diametrum AC, *parallelogramma AEGH, CFGI, & complementa DFGH, EBIG, ut in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter se esse æqualia. Cùm* g *enim triangula* ABC, CDA, *æqualia sint; Itemque triangula AEG, GHA: si hæc ab illis demantur,* h *remanebunt trapezia* CBEG, CDHG, *æqualia:* i *Sunt autem & triangula* CGI, CGF, *æqualia. Quare si trahantur ex trapeziis,* k *remanebunt æqualia complementa* DFGH, EBIG,

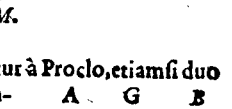
g 34. *primi.*
h 1. *pron.*
i 4. *primi.*
k 3. *pron.*

In omni

In omni igitur parallelogrammo, complementa, &c. Quod ostendendum erat.

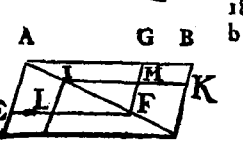
SCHOLIVM.

Eodem modo hoc theorema demonstratur à Proclo, etiamsi duo parallelogramma circa diametrum non conjunguntur in puncto G, sed vel unum ab altero sit semotum, vel ambo se mutuò intersecent. Sit enim prius unum ab altero distans, ita ut complemẽta sint figuræ quinquangulę. Vt in parallelogrammo ABCD, circa diametrum AC, consistant parallelogramma AEFG, CHIK. Dico cõplementa DEFIH, BKIFG, esse æqualia. Cùm enim *a* triangula ABC, CDA, æqualia inter se sint: Item triangula AEF, GHI, æqualia triangulis AGF, CKI: *b* erunt reliqua complementa DEFIH, BKIFG, æqualia. Quod est propositum.



a 34. primi.
18. primi.
b 3. pron.

Secent se jam mutuò parallelogramma AEFG, CHIK, circa diametrum consistentia, ita ut communem partem habeant ILFM. Dico adhuc complementa DELH, BGMK, esse æqualia. Cùm enim *c* æqualia sint triangula ABC, CDA: Item triangula AFG, AFE: *d* erunt reliqua quadrilatera BCFG, DCFE, æqualia: Sunt *e* autem rursus æqualia triangula IFM, IFL. Igitur si hæc addantur dictis quadrilateris, *f* erunt figuræ BCIMG, CDILE, æquales. Cùm igitur & *g* æqualia sint triangula CIK, CIH: *h* erunt reliqua complementa BGMK, DELH, etiam æqualia. Quod est propositum.



c 34. primi.
d 3. pron.
e 34. primi.
f 2. pron.
g 34. primi.
h 3. pron.

Conversum quoque hujus theorematis cum Peletario demonstrabimus, hoc modo.

Si parallelogrammum divisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita ut ex illis duo adversa sint æqualia: consistent reliqua duo circa diametrum.

Ductis duabus rectis EF, GH, quæ sint parallelæ rectis BC, CD, seque secent in I, divisum sit parallelogrammum ABCD, in quatuor parallelogramma, quorum adversa duo BEIH, DFIG, sint æqualia. Dico reliqua duo AEIG, CFIH, circa diametrum consistere, hoc est, diametrum à puncto C, ad punctum A, ductam transire per punctum I. Si enim non transit, secet diameter CKA, rectam GH, in K, si fieri potest, & per K, *i* ducatur LM, parallela ipsi BG. *k* Erunt igitur complementa

i 31. primi.
k 43 pri. mi.

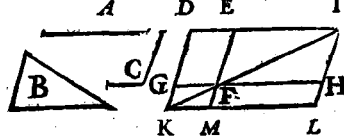
a 9. pron. plementa BHKL, DGKM, æqualia ; Est a autem DGKM, ma-
jus quàm DGIF. Quare & majus erit BHKL, quàm DGIF. Cùm
b 1. pron. ergò DGIF, æquale ponatur ipsi BEIH : b erit etiam BHKL, majus quàm BEIH, pars quàm totum. Quod est absurdum. Non ergò diameter AC, rectam GH, in K, secat, sed per punctum I, transit. Quod est propositum.

PROBL. 12. PROPOS. 44.

xliiij

Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

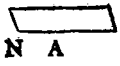
Data recta linea sit A, datum triangulum B, *& datus angulus rectilineus* C. *Oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo* B, *angulum habens æqualem angulo* C, *& unum latus æquale rectæ A. Constituatur triangulo* B, c *æquale parallelogram-*



c 42. primi. *mum* DEFG, *habens angulum* EFG, *angulo* C, *æqualem producaturque* GF, *ad*
H, ut FH, *sit æqualis rectæ* A; *& per H,* d *ducatur* HI, *parallela ipsi* FE, *occurrens* DE,
d 31. primi. *producta in* I. *Extendatur deinde ex* I, *per* F, *diameter* IF, *occurrens*
e 31. primi. *rectæ* DG, *productæ in* K; *& e per* K, *ducatur* KL, *parallela ipsi* GH,
secans IH, *protractam in* L. *producaturque* EF, *ad* M. *Dico parallelogrammum* LMFH, *esse id, quod quæritur. Habet enim latus*
FH, æquale datæ rectæ A, & angulum HFM, *angulo dato* C, *æqua-*
f 15. primi. *lem,* f *cum angulus* HFM, *æqualis sit angulo* EFG, *qui factus est*
æqualis angulo C: *Denique parallelogrammum* LMFH, *æquale est*
g 43. primi. *triangulo* B, g *cum æquale sit complemento* DEFG, *quod factum est*
æquale triangulo B. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo &c. Quod faciendum.

SCHOLIVM.

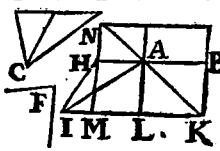
Quod si quis optet, lineam ipsam A, datam, esse unum latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammum FMLH, ad rectam A, ex iis, quæ in scholio propos. 31. hujus lib. do-



cuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo MFH, & sumatur recta NO, æqualis rectæ FM, compleaturque parallelogrammum, ceu in dicto scholio traditum fuit, effectum erit, quod quæritur.

Sed fortassis magis ex sententia Euclidis problema hoc conficiemus, si super ipsam rectam datam construamus parallelogrammum, non autem semper æqualem, cujusmodi fuerit FH, &c. Sit ergò rursus da-

ſus data recta *AB*, datum triangulum CDE, & datus angulus F, oporteatque ſuper rectam AB, conſtituere parallelogrammum æquale triangulo CDE, in dato angulo *F*, quod ita efficiemus. Secto uno latere trianguli, ut DE, bifariam in G, ductaque recta CG, ſecante ex ſcholio propoſ 38. hujus lib. triangulum CDE, bifariam, producatur recta AB, verſus eam partem, ubi parallelogrammum conſtruendum debet habere angulũ dato angulo *F*, æqualem, ut hic verſus A, fiatq; *AH*, æqualis ipſi EG, dimidio lateris DE. Deinde in *A*, *a* conſtituatur angulus HAI, angulo E, æqualis deorſum quidem, ſi parallelogrammum verſus ſuperiorem partem ſit conſtruendum, ſurſum verò, ſi verſus inferiorem. Poſita autem recta *AI*, æquali ipſi EC, jungatur recta *HI*. Et quia duo latera *HA*, AI, duobus lateribus *GE*, *EC*, æqualia ſunt, utrumque utrique, angulosque continent æquales, *b* erunt triangula *AHI*, EGC, æqualia. Poſt hæc, *c* ducta per I, ipſi HB, parallela IK, *d* conſtituatur in A, verſus hanc parallelam angulus *HAL*, angulo dato F, æqualis, ſecetque AL, rectam IK, in L. *e* Ducta quoque per H, ipſi *AL*, parallela HM, ſecante IK, in N, *f* erit parallelogrammum AHML, trianguli A*HI*, duplum: Eſt autem & triangulum *CDE*, trianguli EGC, duplum, quod æqualia oſtenſa ſint triangula EGC, DGC. Igitur cum æqualia ſint demonſtrata triangula AHI, EGC, *g* erunt æqualia parallelogrammum AHML, & triangulum CDE. Iam verò ſumpta recta LK, datæ rectæ AB, æquali ducatur recta *KA*, producaturq; donec cũ MH, producta coeat in N, & per N, agatur ipſi *HB*, parallela NO, donec in O, coeat cum *KB*, protracta ac tandem LA, producatur uſque ad P, in recta NO. Dico parallelogrammum ABOP, eſſe id, quod quæritur. Eſt enim conſtitutum ſuper datam rectam *AB*, habetque angulum BAP, dato angulo F, æqualem, *h* cum æqualis ſit angulo *HAL*, qui angulo F, *h* factus eſt æqualis. Deinde æquale eſt dato triangulo CDE, *i* cùm æquale ſit parallelogrammo AHML, quod triangulo CDE, oſtenſum fuit æquale.



a 23. *primi.*

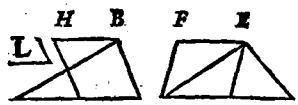
b 4. *primi.*
c 31. *primi.*
d 23 *primi.*
e 31. *primi.*
f 41. *primi.*
g 7. *prop.*
h 15. *primi.*
i 43. *primi.*

Praxis verò hujus problematis à conſtructione ipſa non differt, niſi quod recta HI, duci non debet, neque recta CG. Hæ enim propter demonſtrationem tantùm ductæ ſunt.

Addit hic aliud problema Peletarius hoc modo.

Ad datam rectam lineam, dato parallelogrammo conſtituere æquale triangulum in dato angulo rectilineo.

Sit data recta AB; datum parallelogrammum CDEF, & datus angulus L. Producatur CD, ad G, ut DG, æqualis ſit ipſi C[illegible], & jun-



& jungatur GE, recta: Eritque triangulum CEG, parallelogrammo CDEF, æquale, ut demonstravimus scholio propos. 41. a Fiat jam super data recta AB, parallelogrammum ABHI, æquale triangulo CEG, hoc est, parallelogrammo CDEF, habens angulum A, angulo L, æqualem; & producatur AI, ad K, ut sit IK, æqualis ipsi AI, jungaturque recta BK. Dico triangulum ABK, constitutum super datam rectam AB, habensque angulum A, æqualem dato angulo L; æquale esse dato parallelogrammo CDEE. Cùm enim triangulum ABK, æquale sit parallelogrammo ABHI, ex scholio prop. 41. quod æquale est constructum parallelogrammo CDEF, constat propositum.

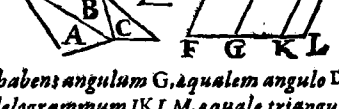
a 44. primi.

Praxis hujusce problematis à constructione non differt; difficilisque non est, si adhibeatur præcedens praxis, qua triangulo ECG, parallelogrammum ABHI, super data recta AB, in dato angulo A, constructur.

PROBL. 13. PROPOS. 45.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

Quamvis Euclides proponat hoc problema absolutè, non astringendo nos ad certam aliquam rectam lineam datam, ut in præcedenti prop. 44. fecerat; tamen quia in sequentibus frequenter usurpata in data recta linea, placuit ipsum proponere una cum data recta linea. Sit ergò recta data EF; *rectilineum* ABC, *& datus angulus* D. *Oportet igitur construere ad datam rectam* EF, *parallelogrammum æquale rectilineo* ABC, *quod habeat angulum æqualem angulo* D. *Resolvatur rectilineum in triangula* A, B, *&* C. *Deinde triangulo* A, *æquale parallelogrammum constituatur* EFGH, *super rectam* EF, *habens angulum* F, *æqualem angulo* D, *æqualem. Item super rectam* GH, *parallelogrammum* GHIK, *æquale triangulo* B, *habens angulum* G, *æqualem angulo* D. *Item super rectam* IK, *parallelogrammum* IKLM, *æquale triangulo*, C, *habens angulum* K, *æqualem angulo* D; *Et sic deinceps procedatur, si plura fuerint triangula in dato rectilineo: factumque erit, quod jubetur. Nam tria parallelogramma constructa, quæ quidem æqualia sunt rectilineo dato ABC, conficiunt totum unum parallelogrammum, quod sic demonstratur. Duo anguli* EFG, HGK, *inter se sunt æqua-*



b 44. primi.

c 1. prop.

æquales, cùm uterque æqualis sit angulo D. *Additoigitur communi angulo* FGH, *erunt duo anguli* EFG, FGH, a *qui duobus rectis æquivalent*, b *æquales duobus angulis* HGK. FGH, *ideoque hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt.* c *Quare* FG, GK, *unam rectam lineam efficient. Eadem ratione ostendemus*, EH, HI, *unam rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli* EHG, HIK, *æquales inter se sunt*, (d *cùm sint æquales oppositis angulis æqualibus* EFG, HGK.) e *& duo anguli* HIK, IHG, *duobus sunt rectis æquales*, &c. *Cùm igitur* EI, FK, *sint parallelæ.* f *Itemque* EF, IK: *quod utraque parallela sit recta* HG; *Parallelogrammum erit* EFKI. *Eodem modo demonstrabitur parallelogrammum* IKLM, *adjunctum parallelogrammo* EFKI, *constituere totum unum parallelogrammum* EFLM. *Ad datam ergò rectam lineam* EF, *dato rectilineo* ABC, *constituimus æquale parallelogrammum* EFLM, *habens angulum* F, *æqualem angulo* D, *dato. Quod erat efficiendum.*

a 29. primi.
b 13. prom.
c 14. primi.
d 34. primi.
e 29. primi.
f 30. primi.

SCHOLIVM.

Pari ratione propositis quotcunque rectilineis, constituemus illis parallelogrammum æquale, si omnia resolvantur in triangula, quibus æqualia parallelogramma exhibeantur, singulis singula, per propos. 44. veluti factum est in hoc problemate. Nam cùm omnia hęc parallelogramma efficiant unum parallelogrammũ, uti hic demonstratum fuit, constitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propositis. Vt si quis intelligat duo rectilinea proposita *AB*, & *C*; Atque *AB*, resolvatur in triangula *A*, & *B*, singulisque triangulis, *ABC*, singula parallelogramma EG, GI, IL, super rectas EF, HG, IK, juxta artem hujus problematis, æqualia constituantur, ex propos. 44. erit constructum parallelogrammum totum *EFLM*, æquale duobus rectilineis *AB*, & C. Et sic de pluribus.

Praxis autem hujus problematis ex praxi præcedentis propos. sæpius repetita petenda est.

Huc referri potèrit problema utilissimum ex Peletario, quod nos tamen alia ratione, & breviori demonstrabimus in hunc modum.

Datis duobus rectilineis inæqualibus, excessum majoris supra minus inquirere.

Sint data rectilinea *A*, & *B*, sitque *A*, majus. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum *A*, superet rectilineum *B*. g Fiat parallelogrammum *CDEF*, in quocunqi angulo *D*, æquale majori rectilineo *A*. Et super rectam CD; paral- g 45. primi.

lelogrammum *CDGH*, in eodem angulo D, æquale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum CD*EF*, superat parallelogrammum CDGH, parallelogrammo *EFHG*, superabit quoque figura *A*, figuram *B*, eodem parallelogrammo *EFHG*. Quod est propositum.

PROBL. 14. PROPOS. 46.

xlvi.

A data recta linea quadratum describere.

Sit data recta AB, *super quam oporteat quadratum describere.* *Ex A, & B, a educantur* AD, BC, *perpendiculares ad* AB, *sintque ipsi AB, æquales, & connectatur recta* CD. *Dico* ABCD, *esse quadratum.* *Cùm enim anguli* A, *& B, sint recti,* b *erunt* AD, BC, *parallelæ: Sunt autem & æquales, quod utraque æqualis sit ipsi AB.* D C *Igitur* c *& AB,* DC, *parallelæ sunt & æquales: & ideo parallelogrammum est* ABCD, *in quo, cum AD,* DC, CB, *æquales sint ipsi* AB, *omnes quatuor lineæ æquales existunt: Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum* C, *&* D, d *æquales sint oppositis rectis A, &* B. *Quadratum igitur est* ABCD, *ex definitione; Ac proinde à data recta linea quadratum descripsimus. Quod faciendum erat.*

a 11. *primi.* b 18. *primi.* c 33. *primi.* d 34. *primi.*

A B

EX PROCLO.

Linearum æqualium æqualia sunt quadrata: & quadratorum æqualium æquales sunt lineæ.

F EH G *Sint primum rectæ AB,* CD, *æquales. Dico eorum quadrata* ABEF, CDGH, *æqualia quoque esse. Ductis enim diametris BF,* DH, *erunt duo latera* BA, *AF, trianguli* BAF, *duobus lateribus* DC, CH, *tri-*

A BC D *anguli* DCH, *æqualia, utrumque utrique, cum ex definitione quadrati rectæ* AF, CH, *æquales sint rectis AB,* CD. *Sunt autem & anguli* A, *& C, æquales, nempe recti.* c *Igitur triangula* BAF, DCH, *æqualia erunt. Quæ cum sint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod est propositum.*

c 4. *primi.* f 34. *primi.*

Sint deinde quadrata ABDE BC, FG, *æqualia. Dico lineas quoque ipsorum* AB, BC, *æquales esse. Conjungantur enim quadrata ad angulum B, ut rectæ* AB, BC, *in directum constituantur. Et*

A E *quoniam anguli ABG,* ABD, *sunt recti,* g *erunt & rectæ* GB, BD, *in directum constitutæ. Ducantur diametri* AD, CG, *jungunturque rectæ* AG, CD. *Quoniam igitur quadrata* ABDE, BCFG, *æqualia sunt, erunt & triangula* ABD, BCG, *eorum dimidia, æqualia. Addito ergò com-*

G B D

F C

g 14. *primi.*

mune

mum triangulo BCD, *fiet totum triangulum* ACD, *toti triangulo* GDC, *æquale. Quare triangula* ACD, GDC, *cum eandem habeant basin* CD, *ad easdemque sint partes,* a *in eisdem sunt parallelis; ideoque parallela sunt* AG, CD. *Et quoniam, ut in scholio prop.* 34. *ostendimus, diameter in quadrato secat angulos quadrati bifariam, erunt anguli* DAC, GCA, *alterni semirecti, ideoq; æquales. Quamobrem,* b *& parallela sunt* AD, CG. *Igitur parallelogrammum est* ADCG: *ac propterea* c *recta* AD, CG, *æquales. Quoniam ergò in triangulis* ABD, BCG, *latera* AD, CG, *æqualia sunt, & anguli quibus ea latera adjacent, inter se etiam æquales, cùm sint semirecti, ut in scholio propos.* 34. *ostensum fuit: erunt* d *reliqua æqualia, nempe* AB, *ipsi* BC, *&c. Quod est propositum.*

a 39. primi.
b 27. primi.
c 34. primi.
d 26. primi.

SCHOLIVM.

Possent hæc omnia multò brevius probari per superpositionem quadrati unius super aliud. Nam si lineæ sint æquales, si una alteri superponatur, congruent ipsæ inter se. Cùm ergò & anguli sint æquales, nempe recti convenient quoque ipsi inter se, ideoque totum quadratum toti quadrato congruet. Quod si quadrata sint æqualia congruent ipsa inter se propter æqualitatem angulorum. Igitur & lineæ: alias unum quadratum alio majus esset,

Praxis autem hujus problematis perfacilis est. Si namque ad datam rectam AB, in altero extremorum, ut in *A*, erigatur perpendicularis *AD*, ipsi datæ rectæ *AB*, æqualis, & ex *B*, & *D*, ad intervallum ejusdem *AB*, duo arcus describantur sese in *C*, intersecantes, junganturque rectæ BC, DC, constructum erit quadratum. Nam *ABCD*, cum ex constructione sit figura æqualium laterum, atq; adeò latera opposita habeat æqualia, parallelogrammũ erit, ut ad initium scholii propos. 34. demonstravimus. Existente ergò angulo A, recto, *e* erunt & B, D, recti, nec non *f* & oppositus angulus C, &c.

e 29. primi.
f 34. primi.

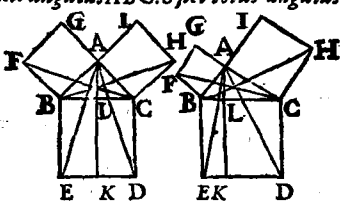
THEOR. 33. PROPOS. 46. xlvi.

In rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.

In triangulo ABC, *angulus* BAC, *sit rectus,* g *describanturque super* AB, AC, BC, *quadrata* ABFG, ACHI, BCDE. *Dico quadratum* BCDE, *descriptum super latus* BC, *quod angulo recto opponitur, æquale esse duobus quadratis* ABFG, ACHI, *quæ super alia duo latera sunt descripta, sive hac duo latera æqualia sint, sive inæqualia. Ducatur enim recta* AK, h *parallela ipsi* BE, *vel ipsi* CD, h

g 46. primi.
h 31. primi.

secans BC, *in* L. *& jungantur rectæ* AD, AE, CF, BH. *Et quia duo*
a 14. primi. *anguli* BAC, BAG, *sunt recti*, a *erunt rectæ* GA, AC. *una linea recta: eodemque modo* IA, AB, *una recta linea erunt. Rursus quia anguli* ABF, CBE, *sunt æquales, cùm sint recti, si addatur communis angulus* ABC.
b 2. pron. b *fiet totus angulus* CBF, *toti angulo* ABE. *æqualis; similiterq; totus angulus* BCH, *toti angulo* ACD. *Quoniam igitur duo latera* AB, BE *trianguli* ABE, *æqualia sunt duobus lateribus* FB, BC *trianguli* FBC. *utrumq; utrique, ut constat ex definitione quadrati: Sunt autem & anguli* ABE, FBC, *contenti hisce lateribus æquales, ut ostendimus;*



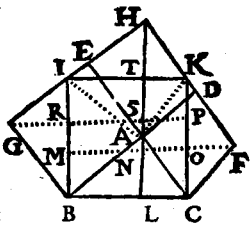
c 4. primi. c *Erunt triangula* ABE, FBC, *æqualia. Est autem quadratum, seu*
d 14. primi. *parallelogrammum* ABFG, d *duplum trianguli* FBC, *cùm sint inter parallelas* FB, CG, *& super eandem basin* BF: *Et parallelogrammum* BEKL, *duplum trianguli* ABE, *quod sint inter parallela* BE,
e 6. pron. AK, *& super eandem basin* BE. *Quare* e *æqualia erunt quadratum* ABFG, *& parallelogrammum* BEKL. *Eadem ratione ostendetur,*
f 4. primi. *æqualia esse quadratum* ACHI, *& parallelogrammum* CDKL. f *Erunt enim rursus triangula* ACD, HCB, *æqualia, ideoque eorum dupla, parallelogrammum videlicet* CDKL, *& quadratum* ACHI, *æqualia erunt. Quamobrem totum quadratum* BCDE, *quod componitur ex duobus parallelogrammis* BEKL, CDKL *æquale est duobus quadratis* ABFG, ACHI. *In rectangulis ergò triangulis, quadratum &c. Quod demonstrandum erat.*

SCHOLIVM.

Facilè ex theoremate isto quivis intelliget, in triangulo amblygonio quadratum lateris obtuso angulo oppositi majus esse duobus quadratis simul aliorum duorum laterum: In quovis autem triangulo quadratum lateris uni acutorum angulorum oppositi minus esse duobus quadratis simul aliorum duorum laterum. Nam si angulus coarctaretur donec fieret rectus, manentibus eisdem lateribus cum ambientibus, evaderet latus oppositum minus: Si autem acutus angulus dilataretur, donec fieret rectus, manentibus iisdem lateribus cum ambientibus, fieret latus oppositum majus, ut patet. Cùm ergò quadratum lateris angulo recto oppositi æquale sit hic ostensum duobus quadratis simul aliorum duorum laterum: perspicuum est, quadratum lateris obtuso angulo oppositi esse majus duobus quadratis simul aliorum duorum laterum: quadratum verò lateris angulo acuto oppositi esse minus duobus quadratis simul duorum laterum reliquorum. Quanto autem illud majus sit, & quanto hoc minus, demonstrabit Euclides lib. 2 prop. 12 & 13.

Quoniam

Quoniam verò theorema hoc pulcherrimum est, utilitatesq; habet insignes, operæ pretium judicavi tentare, num illud aliis viis demonstrari possit, variata aliquantulum constructione: Quod Peletarius sine proportionibus fieri posse negavit. Sit ergò rursus triangulum ABC, cujus angulus BAC, rectus sit, productisq; lateribus BA, CA, ad partes anguli recti, fiant AD, AE, ipsis AC, AB, æquales: & per C, D, B, E, ipsis AB, AC, parallelæ agantur coeuntes in F, G. Et quia in parallelogrammis CD, BE, a tàm latera DF, FC, oppositis lateribus AC, AD, quàm latera EG, GB, lateribus oppositis AB, AE, æqualia sunt, erit utrumq; parallelogrammum æquilaterum: Sed & anguli omnes recti sunt. b Nam F, G, oppositis rectis DAC, EAB. æquales sunt, ideoque recti. Anguli autem C, D, B, E, recti sunt, quod utervis C, D, cum recto DAC, & utervis B, E, cum recto EAB, c æqualis sit duobus rectis. Quadrata ergò sunt CD, BE, laterum AC, AB. Productis etiam lateribus FD, GE, donec conveniant in H, erigantur in B, C, ad BC, perpendiculares BI, CK, secantes GH, FH, in I, K, jungaturque recta IK. Et quia, si à rectis angulis IBC, ABG. auferatur communis angulus ABI, reliqui ABC, GBI, æquales sunt: sunt autem & recti anguli BAC, BGI, æquales: erunt duo anguli A, B, trianguli ABC, duobus angulis G, B, trianguli GBI, æquales, uterque utrique: Sunt autem & latera AB, GB, illis adjacentia æqualia, ob quadratum BE. d Igitur & tàm latera BC, BI, quàm AC, GI, æqualia erunt, & reliqui anguli C, I, æquales. Non aliter in triangulis ABC, FKC, æqualia erunt tàm latera BC, CK, quàm AB, FK, & anguli B, K: propterea quod duo anguli A, C, trianguli ABC, duobus angulis F, C, trianguli FKC, æquales sunt: (cum A, F, recti sint, & duo anguli C, reliqui duorum rectorum, dempto communi ACK) & latera AC, CF, illis adjacentia æqualia, ob quadratum CD. Quare rectæ BI, CK, inter se etiam æquales erunt. f Cùm ergò quoque sint parallelæ, g erunt etiam BC, IK, æquales, & parallelæ. Quadratum igitur est BCKI, lateris BC, cum quatuor ejus latera sint æqualia, & omnes anguli recti, quod anguli IK, oppositis rectis CB, æquales sint. Dico ergò, quadratum CI, duobus quadratis BE, CD, æquale esse. Ducta enim ex H, per A, recta HTAL, ipsis BI, CK, parallela erit. Nam quia GE, h ipsi BA, æqualis est, & EH, ipsi AD, hoc est, ipsi GI, quæ ipsi AC, sive AD, ostensa fuit æqualis, erit & addita communi EI, tota HI, toti GE, hoc est, ipsi AB, æqualis. Cùm ergò HI, AB, sint etiam parallelæ,



a 34. primi.

b 34. primi.

c 29. primi.

d 26. primi.

e 27. prim.

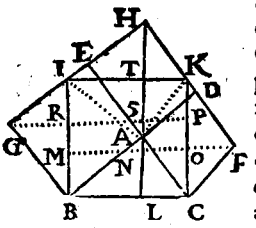
f 28. primi.

g 33. primi.

h 34. primi.

a 33. primi.

lelæ, a erunt quoq; BI, AH, parallelæ & æquales. Eodemq; modo AH, ipsi CK, parallela ostendetur, & æqualis. Quoniam igitur b tam quadratum BE, a parallelogrammo BH, super eandem basin AB, quàm parallelogrammum BT, eidem parallelogrammo BH, super eandem basin BI, æquale est, c erit quoque quadratum BE, parallelogrammo BT, æquale. Sic etiam quia tàm d quadratum CD, parallelogrammo CH, super eandem basin AC, quàm parallelogrammum CT, eidem parallelogrammo CH, super eandem basin CK, æquale est, e erit quoque quadratum CD, parallelogrammo CT, æquale. Totum ergò quadratum BCKI, ex duobus parallelogrammis BT, CT, compositum duobus quadratis BE, CD, æquale est. Quod erat demonstrandum.



b 35. primi.

c 1. pron.

d 35. primi.

e 1. pron.

Aliter loco rectæ HTAL, jungantur duæ rectæ AI, AK, & per A, ipsis BI, CK, parallela ducatur TAL. Quoniam ergò f tàm quadratum BE, (ostendemus enim ut prius, BK, BE, CD, quadrata esse laterum BC, AB, AC.) trianguli ABI, super eandem basin AB, quàm parallelogrammum BT, ejusdem trianguli ABI, super eandem basin BI, duplum est g erit quadratum BE, parallelogrammo BT, æquale. Pari ratione, quia h tàm quadratum CD, trianguli ACK, super eandem basin AC, quàm parallelogrammum CT, ejusdem trianguli ACK, super eandem basin CK, duplum est, i erit quoque quadratum CD, parallelogrammo CT, æquale. Quam ob rem, ut prius totum quadratum BCKI, ex parallelogrammis duobus BT, CT, conflatum, duobus quadratis BE, CD, æquale est. Quod erat ostendendum.

f 41. primi.

g 6. pron.

h 41. primi.

i 6. pron.

Aliter loco rectarum HTAL, AI, AK, ducantur per F, G, ipsis BC, IK, parallelæ FM, GP, secantes AB, CK, in N, O, & BI, CE, in R, S. Eritque BR, ipsi KO, æqualis. Quoniam enim k anguli O, R, recti sunt, & OKF, RBG, æquales, quod uterque angulo ABC, supra ostensus sit æqualis: erunt duo anguli O, K, trianguli FKO, duobus angulis R, B, trianguli GBR, æquales, uterque utrique: Sunt autem & latera FK, BG, illis adjacentia æqualia, quod utrumque supra sit ostensum ipsi BC, æquale. l Igitur & latera KO, BR, æqualia erunt. Itaque quoniam m tam parallelogramma BCFN, BCOM, super eandem basin BC, quam parallelogramma BCSG, BCPR, super eandē basin BC, æqualia sunt, estq; parallelogrammū BCPR, parallelogrāmū IKOM, æquale, ob rectas BR, KO, ostentas æquales: (Nam hinc fit, ut si unum alteri superponatur, sibi mutuò congruant, propter laterum, angulorumque æqualitatem erunt ambo parallelogramma BCFN. BCSG, toti quadrato BCKI,

k 29. primi.

l 26. primi.

m 33. primi.

ex

ex duobus parallelogrammis BCOM, IKOM, compositò æqualia.
a Cùm ergò tam quadratum CD, parallelogrammo BCFN, super eandem basin CF, quàm quadratum BE, parallelogrammo BCSG, super eandem basin BG, æquale sit; erunt quoque ambo quadrata CD, BE, eidem quadrato BCKI, æqualia. Quod demonstrandum erat. a 35. primi.

Atque in hunc modum aliæ demonstrationes excogitari poterunt. Video demonstrationem Euclidis simpliciorem esse, & magis expeditam, sed non injucundum tamen est intelligere, variis demonstrationibus eandem veritatem posse confirmari.

Inventio porrò admirabilis, atque pulcherrimi hujus theorematis ad Pythagoram refertur, qui, ut scribit Vitruvius lib. 9. hostias Musis immolavit, quod se in tam præclaro invento adjuverint. Sunt qui putent, eum immolasse centum boves: si tamen Proclo credendum est, unum tantummodo obtulit. Fortasse autem Pythagoras, ut nonnulli volunt, ex numeris occasionem sumpsit; ut theorema hoc investigaret. Cùm enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter esset contemplatus, vidisset que quadratum numerum majoris æqualem esse quadratis numeris reliquorum, composuit triangulũ scalenũ, cujus maximum latus divisum erat in 5. partes æquales, minimum in 3. ejusdem magnitudinis, & reliquum in 4. Quo facto, consideravit angulum sub his duobus lateribus contentum, invenitq; eum esse rectũ. Idq; in quamplurimis aliis numeris, ut in 6. 8. 10. & 9 12. 15. &c. observavit. Quare inquirendum esse judicavit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterũ quadratis æquale esset, quandoquidem omnia triangula, quorũ latera habebant magnitudinem secundum dictos numeros, continebant unum angulum rectũ: Atque ita tandẽ mirabile hoc theorema maxima animi voluptate adinvenit, firmaque ratione demonstravit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificavit lib. 6. propos. 31. Vbi demonstravit, non solum quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, æquale esse quadratis reliquorum duorum laterum; Verum etiam figuram quamlibet rectilineam super latus recto angulo oppositũ cõstructam, sive ea sit triangulum, sive quadrangulum, &c. æqualem esse duabus figuris, quæ super reliqua latera describuntur, dummodo priori sint similes, similiterq; descriptæ, ut ibidem ostendemus.

Cæterum quoniam mentionem fecimus trium numerorũ, quorum maximi quadratum æquale est quadratis reliquorum, non abs re fuerit, paucis explicare, quonam pacto hujusmodi numeri inveniantur. Habitis igitur his tribus numeris 3. 4. 5. si duplicentur habebuntur alii tres, 6. 8. & 10. si iidem triplicentur, exurgent alii tres 9. 12. 15. & si quadruplicentur, invenientur hi tres 12. 16. 20 Atque ita reperientur quotcunq; alii, si primi illi tres per quemcunque multipli-

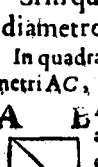
tiplicentur numerum. Traduntur tamen à Proclo duæ regulæ, quibus inveniuntur prædicti numeri, nulla habita ratione illorũ trium. Prima asscribatur Pythagoræ, & est hujusmodi. Sumatur pro minimo quicunque numerus impar, ut 5. ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, ut hic ex 25. rejice unitatem. Nam reliqui numeri dimidium videlicet 12. erit alter numerus, cui si addatur unitas, exurget tertius numerus 13. Hujus igitur quadratum æquale est quadratis aliorum. Quod si numerus impar acceptus fuisset 3. essent reliqui duo inventi per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula tribuitur Platoni, quæ talis est. Accipiatur numerus quicunque par, nempe 6. Ex hujus dimidii quadrato, nimirum 9. detrahe unum, eidemque adde unum, habebisque reliquos duos numeros 8. & 10. primus autem est 6. nimirum numerus par acceptus. Hac regula si accipiatur par 10. reperientur alii duo 24. & 26.

Colliguntur ex celeberrimo hoc Pythagoræ invento plurima scitu non injucunda tam theoremata, quàm problemata, è quibus visum est, ea duntaxat in medium proferre, quæ utilitatem magnam rebus Geometricis allatura creduntur, initium hinc sumentes.

I.

Si in quadrato quovis diameter ducatur, quadratum à diametro descriptum duplum erit prædicti quadrati.

In quadrato ABCD, ducatur diameter AC. Dico quadratum diametri AC, duplum esse quadrati ABCD. Cùm enim in triangulo ABC, angulus B, rectus sit, a erit quadratum lateris AC, æquale duobus quadratis laterum AB, BC. Cùm igitur quadrata linearum AB, BC, æqualia sint, quod lineæ AB, BC, sint æquales, erit quadratum diametri AC, duplum cujuslibet illorum, ut quadrati lineæ AB, hoc est, quadrati ABCD. Quod est propositum.

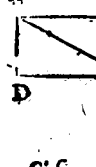


a 47. primi.

II.

Quadratum diametri figuræ altera parte longioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium.

In altera parte longiori ABCD, ducatur diameter AC, & quia in triangulo ABC, angulus B, est rectus, b erit quadratum lateris AC, æquale duobus quadratis laterum inæqualium AB, BC. Quod est propositum.



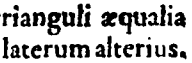
b 47. primi.

III.

Si fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis opposita sint æqualia, erunt duo quadrata reli-

reliquorum duorum laterum unius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius.

Triangulorum ABC, DEF, anguli A, & D, sint recti, lateraq; opposita BC, EF, æqualia. Dicō duo quadrata laterum AB, AC, simul sumpta æqualia esse duobus quadratis laterum DE, DF, simul sumptis.



Nam quadrata linearum BC, EF, æqualia inter se sunt, cum & ipsæ lineæ inter se ponantur æquales. Quadrato autem lineæ BC, *a* æqualia sunt quadrata linearum AB, AC. Et quadrato lineæ EF, æqualia sunt quadrata linearum AB, AC; Et quadrato lineæ EF, æqualia sunt quadrata linearum DE DF. *b* Quadrata ergò rectarum AB, AC, quadratis rectarum DE, DF, æqualia sunt. Quod est propositum.

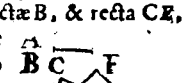
a 47. primi.

b 1. prem.

IV.

Duobus quadratis inæqualibus propositis, invenire alia duo quadrata, quæ & æqualia sint inter se, & simul sumpta æqualia duobus inæqualibus propositis simul sumptis.

Sint A, & B, latera duorum quadratorum inæqualium. Fiat angulus rectus DCE, sitque DC, recta æqualis rectæ B, & recta CE, rectæ A. Ducta deinde recta DE, conjungente duo puncta D, E, constituantur super ipsam duo anguli semirecti DEF, EDF, *c* coeantque rectæ DF, EF, in F. Quoniam igitur in triangulo FDE, anguli FDE, FED, æquales sunt; *d* erunt & latera DF, EF, æqualia, ideoque & quadrata eorundem laterum æqualia. Dico jam, eadem quadrata linearum DF, EF, æqualia esse quadratis linearum A, & B, hoc est, quadratis linearum CE, & CD. Nam cum in triangulo DEF, anguli FDE, FED, faciant unum rectum; *e* erit reliquus angulus F, rectus. *f* Quamobrem erunt quadrata linearum DF, EF, æqualia quadrato lineæ DE: *g* Sed eidem quadrato lineæ DE, æqualia sunt quoque quadrata linearum CD, CE. Igitur quadrata linearum DF, EF, *h* æqualia sunt quadratis linearum DC, EC. Quod est propositum.



c 13. prenun.

d 6. primi.

e 32. primi.

f 47. primi.

g 47. primi.

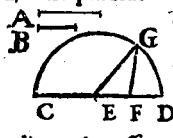
h 1. prem.

V.

Propositis duabus lineis inæqualibus, invenire id, quo plus potest major, quàm minor.

Potentia lineæ rectæ dicitur ejus quadratum. Tantùm enim quævis recta linea posse dicitur, quantum est ejus quadratum. Sint ergò duæ linæ inæquales A, & B, oporteatque cognoscere, quanto

majus sit quadratum majoris lineæ A, quàm minoris B. Ex quavis linea recta CD; sumatur CE, æqualis rectæ A, & EF, æqualis rectæ B. Deinde centro E, & intervallo EC, semicirculus describatur CGD; & ex F, ducatur FG, perpendicularis ad CD. Dico quadratum rectæ A, hoc est, rectæ CE, sibi æqualis, majus esse quàm quadratum rectæ B, hoc est, rectæ EF, sibi æqualis quadrato rectæ FG. Ducta enim recta EG, *a* erit ejus quadratum æquale quadratis rectarum EF, FG, hoc est, quadratum rectæ EC, illi æquale, superabit quadratum rectæ EF, quadrato rectæ FG. Quod est propositum.

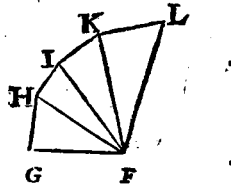


a 47. primi.

VI.

Propositis quotcunque quadratis, sive æqualibus, sive inæqualibus, invenire quadratum omnibus illis æquale.

Sint latera quinque quadratorum A, B, C, D, E. Oporteatque invenire quadratum æquale omnibus illis quinque. Fiat angulus rectus FG*H*, sitque recta FG, æqualis rectæ A, & recta GH, rectæ B. Ducta deinde recta *HF*, fiat angulus rectus *FHI*, sitque HI, æqualis rectæ C. Ducta rursus recta IF, fiat angulus rectus FI*K*, sitque I*K*, æqualis rectæ *D*. Ducta denique recta KF, fiat angulus rectus FK*L*, sitque *KL*, æqualis rectæ E, ducaturq; recta FL. Dico quadratum rectæ FL, æquale esse quinque quadratis propositis. Quadratum enim rectæ FH, *b* æquale est, quadratis rectarum FG, GH, hoc est quadratis rectarum A, & *B*. Rursus quadratum rectæ FI, *c* æquale est quadratis rectarum *FH*, HI, & idcirco quadratis rectarum A, *B*, & C. Item quadratum rectæ FK, *d* æquale est quadratis rectarum FI, I*K*, ideoque quadratis rectarum A, *B*, *C*, & *D*. Denique quadratum rectæ *FL*, *e* æquale est quadratis rectarum *FK*, *KL*, ac propterea quadratis rectarum A, *B*, *C*, D, & *E*. Quod est propositum.



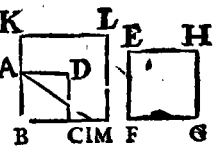
b 47. primi.
c 47. primi.
d 47. primi.
e 47. primi.

VII.

Propositis duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adjungere figuram, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita ut tota figura composita sit etiam quadrata.

Sint duo quadrata *ABCD*, EFGH, propositumque sit quadrato *ABCD*, apponere figuram, quæ sit æqualis quadrato EF*GH*, &c. Sumatur recta BI, æqualis rectæ FG, lateri quadrati *EFGH*. Ducta au-

cta autem recta *AI*, & producta recta *BA*, ad partes A, accipiatur *BK*, æqualis rectæ AI, perficiaturque quadratum *BKLM*. Dico figuram *ADCMLK*, quadrato *ABCD*, adjunctam, æqualem esse quadrato *EFGH*.



Quoniam enim quadratum rectę *AI*, hoc est, quadratum *BKLM*, *a* æquale est quadratis rectarum AB, BI, hoc est, quadratis *ABCD*, *EFGH*: si auferatur commune quadratum *ABCD*, *b* remanebit figura *ADCMLK*, æqualis quadrato *EFGH*: Quod est propositum.

a 47. primi.

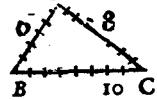
b 3. prop.

VIII.

Cognitis duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris pervenire.

Sit angulus A, rectus in triangulo *ABC*, sintq; primum cognita latera *AB*, AC, circa angulum rectum, quorum AB, ponatur 6. palmorum, & *AC*, 8. Quoniam igitur quadrata rectarum *AB*, *AC*, nempe quadrati palmi 36. & 64. *c* æqualia sunt quadrato rectæ *BC*: si illa conjungantur simul, efficietur hoc quadratorum palmorum 100. Latus ergò BC, continebit 10. palmos. Tantum enim est latus, seu radix quadrata 100. palmorum, ut perspicuum est apud Arithmeticos. Sint deinde cognita latera *AB*, BC, sitq; *AB*, 6. palmorum, & *BC*, 10. Quoniam igitur quadrata rectarum *AB*, *AC*, *d* æqualia sunt quadrato rectæ BC: si quadratum rectę AB, quod continet palmos 36. detrahatur ex quadrato rectæ *BC*, quod est palmorum 100. remanebit quadratum rectæ AC, 64. palmorum. Latus ergò AC, continebit 8. palmos. Tanta enim est radix quadrata, seu radix 64. palmorum. Quod est propositum. Cæterum non semper hac arte invenientur numeri rationales, quia non omnis numerus habet latus, radicemve quadratam, ut notum est apud Arithmeticos. Vnde latus inventum sæpenumero exprimi nequit, nisi per radicem surdam, quam vocant: Sed de his alias.

c 47. primi.

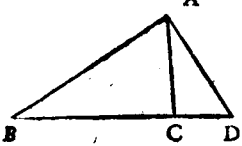


d 47. primi.

IX.

Si ex angulo à duobus lateribus inæqualibus triangulo comprehenso ad basin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum, secabit basis in partes inæquales, majorque pars juxta majus latus erit. Et contra si basis, à perpendiculari secetur non bifariam, erunt duo latera inæqualia, majusque illud erit, quod majori basis segmento adjacet.

Cadat



Cadat primum in triangulo *ABC*, cujus latus AB, majus sit latere AC, perpendicularis *AD*, ad *ABC*, demissa intra triangulum, quod tum demum continget quando uterque angulus B, *C*, acutus est, ut ex coroll 2. propos. 17. constat. Dico segmentum BD, esse majus segmento CD. Quoniam enim [a] tàm quadratum ex AB, quadratis ex *AD*, *BD*, quàm quadratum ex *AC*, quadratis ex AD, CD, æquale est: Est autem quadratum ex *AB*, majus quadrato ex *AC*, quod latus *AB*, latere AC, ponatur majus: erunt quoque duo quadrata ex AD, BD, majora duobus quadratis ex *AD*, *CD*: Et ablato communi quadrato rectæ AD, reliquum quadratum ex BD, reliquo quadrato ex *CD*, majus erit. Quare & recta *BD*, major erit, quàm recta CD, quod est primum.

[a] 47. primi.

Faciat deinde perpendicularis *AD*, segmentum *BD*, majus segmento CD. Dico latus AB, majus esse latere AC. Erit enim quadratum ex *BD*, quadrato ex CD, majus: Additoque quadrato communi ex AD: duo quadrata ex BD, AD, duobus quadratis ex CD, AD, majora erunt. Cùm ergò [b] tàm quadratum ex *AB*, quadratis ex BD, AD, quàm quadratum ex AC. quadratis ex CD, AD, æquale sit; erit quoque quadratum ex AB, quadrato ex *AC*, majus: propterea que & latus AB, latere *AC*, majus erit. Quod est propositum.

[b] 47. primi.

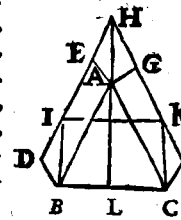
Atque in hunc modum plurima alia ex invento hoc Pythagoræ colligi possunt, quæ consulto, ne lectori molesti simus, hic omittenda censuimus, & in alium locum differenda.

Theoremate porrò hoc Pythagoreo multò universalius est illud, quod à Pappo demonstratur in omni triangulo, sive illud rectangulum sit, sive non, & de quibuscunque parallelogrammis super latera trianguli constructis tàm rectangulis, quàm non rectangulis, etiamsi non sint inter se æquiangula. Quod nos in formam theorematis redigentes clarius hoc modo proposuimus, & meo judicio generalis adhuc, quam Pappus.

In omni triangulo parallelogramma quæcunque super duobus lateribus descripta, æqualia sunt parallelogrammo super reliquo latere constituto, cujus alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conveniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli illius producantur.

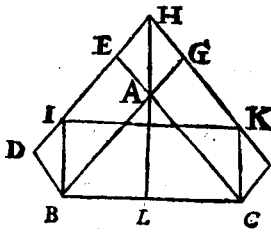
Sit triangulum quodcunque *ABC*, constituanturque super latera

tera AB, AC, parallelogramma quæcunque ABDE, ACFG, quorum latera DE, FG, quæ lateribus AB, AC, assumptis in triangulo opponuntur producta ad partes anguli A, dictis lateribus AB, AC, comprehensi, conveniant in H, ducaturque recta AH. Dico parallelogramma AD, AF, æqualia esse parallelogrammo super latus BC, descripto, cujus alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ AH. Producta enim HA, secet BC, in L, & per B, C, agantur BI, CK, parallelæ ipsi AH, jungaturque recta IK. Quoniam igitur parallelogramma sunt BI, HA, CK, HA: a erit utraque BI, CK, ipsi AH, æqualis; atque adeò & inter se æquales erunt BI, CK: b quæ cum sint etiam parallelæ, quod eidem AH, parallelæ sint: c erunt quoque BC, IK, parallelæ, & æquales. Quare parallelogramma est BCKI, super latus BC, habens alterum latus BI, rectæ AH, æquale, & parallelum: Cui quidem æqualia ostendenda sunt parallelogramma AD, AF. d Quia ergò æqualia sunt parallelogramma AD, ABIH, quod eandem habeant basin AB, in eisdemque sint parallelis AB, HD: e Est autem ABIH, parallelogrammo IL, æquale, quod illud cum hoc etiam eandem habeat basin BI, in eisdemque sit parallelis BI LH: Erit quoque AD, eidem IL, æquale. Non aliter ostendemus, AF, ipsi KL, esse æquale: Quare parallelogramma AD, AF, parallelogrammo BK, æqualia sunt. Quod est propositum.



a 32. primi.
b 30. primi.
c 33. primi.
d 35. primi.
e 35. primi.

Pappus construit figuram aliter. Nam sumit rectas AC, AE, & AB, AG, in directum positas, ita ut parallelogramma AD, AF, sint æquiangula, habentia angulos AED, AGF, angulo BAC, f internos externo æquales, ceu hæc ejus figura indicat. Sed nos universalius rem proposuimus, ut manifestum est.



f 29. primi.

THEOR. 34. PROPOS. 47. xlvij.

Si quadratum, quod ab uno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

Detur triangulum ABC, *sitque quadratum lateris* AC, *æquale quadratis reliquorum laterum* BA, BC. *Dico angulum* ABC,

ABC, esse rectum. Ducatur namque BD, perpendicularis ad BA, & aqualis rectæ BC, connectaturque recta AD. Quoniam igitur in triangulo ABD, angulus ABD, rectus est: a erit quadratum rectæ AD, aquale quadratis rectarum BA, BD: Est autem quadratum rectæ BD, quadrato rectæ BC, aquale, ob linearum aqualitatem. Quare quadratum rectæ AD, quadratis rectarum BA, BC, aquale erit. Cùm ergò quadratum rectæ AC, eisdem quadratis rectarum BA, BC, aquale ponatur: b erunt quadrata rectarum AD, AC, inter se aqualia, ac propterea & rectæ ipsæ AD, AG, aquales. Quoniam igitur latera BA, BD, trianguli ABD, aqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli ABC: & basis AD, ostensa est aqualis basi AC; c erunt anguli ABD, ABC, aquales: Est autem angulus ABD, ex constructione rectus. Igitur & angulus ABC rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab uno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 47. primi.

b 1. pron.

c 8. primi.

SCHOLIVM.

Conversum est autem theorema hoc præcedentis theorematis Pythagorici, ut perspicuum est.

TRIANGVLORVM COMPARATIONES.

Novem modis duo triangula inter se cõparavit Euclides hoc libro. Primum quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, utrumque utrique, continentque angulum angulo æqualem, d colligit æqualitatem basium, reliquorum angulorum, atque adeò totorum triangulorum.

d 4. primi.

Deinde, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, utrumque utrique, basisque basi æqualis, e intulit æqualitatem angulorum illis lateribus comprehensorum. Vbi nos concluſimus etiam æqualitatem reliquorum angulorum, totaque triangula probavimus esse æqualia.

e 8. primi.

Tertiò, cùm duo latera duobus lateribus sunt æqualia, utrumque utrique, comprehendunt autem angulos inæquales, f ostendit basin majori angulo oppositam esse majorem basi minori angulo oppositæ.

f 24. primi.

Quar-

Quartò, cùm duo latera duobus lateribus æqualia sunt, utrumque utrique, at bases inæquales, *a* demonstravit angulum majori basi oppositum esse majorem angulo minori basi opposito. a 25. primi.

Quinto, quando duo anguli duobus angulis æquales sunt, uterque utrique, & unum latus uni lateri æquale, sive quod æqualibus angulis adjacet, sive quod uni æqualium angulorum opponitur, *b* probavit reliqua latera unius reliquis lateribus alterius esse æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo. Vbi nos docuimus sequi etiam, tota triangula esse æqualia. b 26. primi.

Sexto, *c* demonstravit, duo triangula super eandem basin, & inter easdem parallelas constituta, esse æqualia. c 37. primi.

Septimo *d* ostendit, duo triangula super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, æqualia esse. d 38. primi.

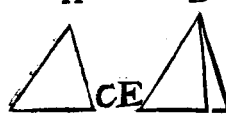
Octavo *e* docuit, duo triangula æqualia super eandem basin, & versus eandem partem constituta, esse inter easdem parallelas. e 39. primi.

Nono denique *f* probavit, duo triangula æqualia super æquales bases in eadem linea, in eandemque partem constituta, esse inter easdem parallelas. f 40. primi.

Atque his modis argumentandi in duobus triangulis propositis universa ferè Geometria niti videtur, ut propterea diligenter memoriæ mandandi sint. Quemadmodum autem à propos. 26. in scholio propos. 31. exclusimus duas comparationes, quando nimirum duo anguli duobus angulis æquales sunt, & unum latus uni lateri æquale, non quidem quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum opponitur in utroq; triangulo: sed quod in uno quidem angulis æqualibus adjacet, in altero verò uni æqualium angulorum opponitur: vel quod in uno opponitur uni æqualium angulorum, in altero verò alteri æqualium angulorum: Quemadmodum, inquam, duas hasce comparationes exclusimus, quod ex iis non sequatur reliquorum laterum æqualitas, ut in scholio prop. 31. demonstravimus: Ita quoque à propos. 4.

pos. 4. excludendæ sunt tres comparationes, ex quibus nullo modo inferri potest basium æqualitas.

Primum enim quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, utrumq; utriq;, & unus angulus uni angulo, qui unię qualiū laterū opponitur, baseś equales esse nequeunt; nisi quādo angulus in utroq; triāgulo alteri lateri æquali oppositus, vel est minor recto vel non minor recto.



Sit enim Isosceles DFG, habens latera DF, DG, æqualia & producta basi FG, usque ad E, jungatur recta ED, & triangulo DEG, æquale triangulum constituatur ABC, cujus latera AB, AC, lateribus DE, DG, æqualia sint & basis BC, basi FG. Sunt igitur duo latera *AB*, AC, duobus lateribus DE, DF, æqualia, utrumq; utrique anguliq; *B*, E, æqualibus lateribus AC, DF, oppositi æquales: & tamen basis *BC*, major est base EF; quod *BC*, ipsi EG, æqualis sit. Ratio est, quod angulus C, acutus est, at DFE, obtu-

a 5. primi, sus. Nam cùm *a* anguli DFG, & G, æquales sint; *b* & simul

b 17. primi. sumpti minores duobus rectis; erit uterque minor recto;

c 13. primi. ac proinde DFE, recto major; quandoquidem *c* duo anguli ad F, æquales sunt duobus rectis. Quod si duo latera *AB*, AC, duobus lateribus DE, DG, sint æqualia, angulusque *B*, angulo E, & uterque angulus C, G, vel minor recto, vel non minor; tum demū sequitur bases *BC*, EG; æquales esse, &c. Nam si basis *BC*, minor esset, quàm EG; si *AB*, ipsi DE, superponeretur, congrueret quidem BC; ipsi EG, propter æqualitatem angulorum *B*, E, sed punctum C, citra G, caderet, ut in F. Quia igitur latera DF, DG, æqualia sunt, quod DF, idem sit, quod AC, ipsi DG;

d 5. primi. æquale; *d* erunt anguli DFG, & G, æquales, ac propterea

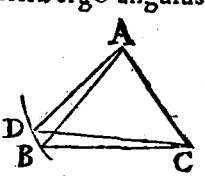
e 17. primi. uterque minor recto: quod *e* ambo minores sint duobus

f 13. primi. rectis. Cum igitur *f* duo anguli ad F, sint duobus rectis æquales, erit DFE, hoc est, C, quia DFE, non differt recto major. Non ergò uterque angulus C, & G; minor est, aut non minor recto, sed G, quidem acutus; & C, obtusus, quod est contra hypothesin. Eodem modo, si

basis

basis BC; dicatur esse major base EF, (positis lateribus AB, AC, æqualibus ipsis DE, DF, & angulo B, æquali ipsi F, & utroque angulo G, & F, vel minore recto, vel non minore) cadet punctum C, ultra F, ut in G; eritque rursus angulus quidem C, hoc est, G, acutus, & DFE, obtusus; quod est contra hypothesin.

Deinde, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt utrumque utrique, & unus angulus uni angulo, ita ut unus uni æqualium laterum; & alter alteri opponatur, nihil etiam colligi potest. Nam sit triangulum ABC, cujus latus AB, majus sit latere AC. Erit *a* ergò angulus ACB, major angulo ABC, fiat angulus ACD, angulo ABC, æqualis: cadetque CD, supra CB. Describatur quoque ex A, per B, arcus circuli secans CD, in D, jungaturque recta AD. Sunt igitur duo latera AB, AC duobus lateribus AD. AC, æqualia utrumque utriq; & angulus ABC, lateri AC, oppositus, æqualis angulo ACD, lateri AD, oppositi. Et tamen bases BC, DC, æquales non sunt. Si enim æquales essent, essent tàm duæ rectæ AB, AD; quàm duæ CB, CD, æquales, *b* quod est absurdū, vel etiam anguli BAC, DAC, *c* æquales essent, pars & totum, quod est absurdum.

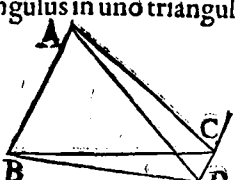


a 18. primi.

b 7. primi

c 8. primi.

Postremo, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, utrumque utrique; & angulus in uno triangulo illis lateribus comprehensus, æqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur uni illorum laterum, nihil etiam potest inferri. Sit namque triangulum ABC, cujus utrumque latus AC, CB, majus sit latere AB; & BC, majus quàm AC. Erit *d* ergò angulus BAC, major angulo ABC. Si igitur fiat angulus ABD, angulo BAC, æqualis, cadet BD, infra BC. Describatur quoque arcus circuli ex A, per C, qui infra BC, cadet, secabitque BD, in D. Iuncta igitur recta AD, erunt duo la-



d 18. primi.

tera AB, AC, duobus lateribus AB, *AD*, æqualia; utrumque utrique, angulusque B*A*C, illis lateribus *A*B, *A*C, comprehensus, æqualis angulo *A*BD, qui lateri *AD*, opponitur: Et tamen bases BC, *BD*, æquales non sunt. Alias tàm rectæ *AC*, *AD*, quàm *BC*, *BD*; æquales essent, *a* quod est absurdum. Vel etiam, *b* anguli *BAC*, *BAD*, æquales essent, totum & pars, quod est absurdum.

a 7. *primi.*
b 8. *primi.*

Rectè igitur Euclides propos. 4. præcepit angulum illis lateribus comprehensum in uno triangulo debere esse æqualem angulo alterius trianguli, qui illis quoque lateribus comprehenditur: quandoquidem sine hac conditione nihil colligere licet, ut demonstravimus.

FINIS ELEMENTI PRIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM SECUNDUM.

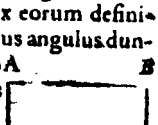
DEFINITIONES.

I.

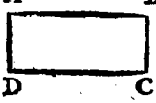
Omne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.

AGIT Euclides secundo hoc libro de potentiis linearum rectarum inquirendo, quanta sint & quadrata partium cujusvis lineæ rectæ divisæ, & parallelogramma rectangula sub partibus ejusdem lineæ divisæ comprehensa, tàm inter se, quàm comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod ut commodè exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonstranda sunt rectè intelligenda, maximè necessaria.

Priori definitione exponit, sub quibus rectis lineis contineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum: Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod ut intelligatur, explicandum primum est, Parallelogrammum illud dici rectangulum, cujus omnes anguli sunt recti. Cujus quidem duo tantùm sunt genera. Quadratum, & altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, ut perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porrò parallelogrammo, si unus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessariò recti. Sit enim in parallelogrammo ABCD, angulus A, rectus. Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoque esse. Nam cùm parallelæ sint AD, BC, [a] erunt anguli A, & B, interni duobus



[a] 29. primi.



a 34. primi. B rectis æquales: At ãgulus A, rectus eſt, ex hypotheſi. Igitur & B, rectus erit. Quoniam verò a quilibet ſuo oppoſito eſt æqualis, ut angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D: erunt & anguli C, & D, recti.

Dicit itaq; Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri ſub duabus rectis lineis, quæ unum ejus angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum ABCD, contineri dicitur ſub duabus lineis rectis AB, AD, vel ſub AD, DC, vel ſub DC, CB, vel denique ſub AB, BC; quoniam quælibet hujuſmodi duæ lineæ exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, una quidem ut AB, vel DC, ejus longitudinem, altera verò, ut AD, vel BC, ejus latitudinem. Vnde expreſſis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, ſtatim tota ejus quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, atque latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario unius lineæ in alteram hujuſmodi parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta AB, deorſum ſecundum rectam AD, moveri in tranſverſum, ita ut ſemper ángulum rectum cum AD, conſtituat, donec punctum A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perveniat, deſcriptum erit totum parallelogrammum ABCD. Idem fiet, ſi AD, ponatur moveri in tranſverſum ſecundum rectam AB, &c. Quamobrem jure optimo ſub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogrammum rectangulum.

Itaque parallelogrammum rectangulum, quod ſub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud, cujus duo latera circa unum angulum rectum æqualia ſunt duabus illis rectis lineis, utrumque utriq;.

E ———— Vt parallelogrammum rectangulum ſub rectis E,
F —— & F, *contentum, erit idem, quod* parallelogrammum ABCD: quoniam latus AB, æquale eſt rectæ E, & latus AD, rectæ F.

Perſpicuum autem eſt ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum ſub duabus lineis æqualibus eſſe quadratum. Cùm enim quælibet illarum linearũ æqualium æqualis ſit lineæ oppoſitæ, erunt omnia quatuor parallelogrammi rectanguli latera æqualia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.

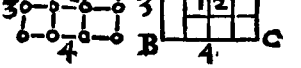
Item manifeſtũ eſt, ſi duæ rectæ lineæ aliis duabus rectis lineis æquales fuerint, utraque utriq; rectangulum parallelogrammum ſub prioribus duabus comprehenſũ, æquale eſſe ei, quod ſub duabus poſterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera unius æqualia ſunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facilè hac etiam ratione demonſtrari poteſt. Sint rectæ AB, BC, æquales rectis DE, EF, utraq; utriq;. Dico parallelogrammum rectangulũ ABCG, contentum ſub AB, BC, æquale

quale esse parallelogrammo rectangulo DEFH, A contento sub DE, EF. Ductis etenim diametris B AC, DF, cùm latera AB, BC, trianguli ABC, æqua- D lia sint lateribus DE, EF, trianguli DEF, & anguli E B, & E, æquales, nempe recti : a erunt triangula

a 4. primi.

ABC, DEF, æqualia Eadem ratione æqualia erunt triangula AGC, DHF. Quare tota parallelogramma ABCG, DEFH, æqualia erunt.

Habet autem comprehensio hæc parallelogrammi rectanguli sub duabus rectis lineis angulũ rectũ continentibus, magnam affinitatem cum multiplicatione unius numeri in alterum. Sicut enim ex multiplicatione 3. in 4. producitur numerus 12. qui in formam parallelogrammi constituitur, unde & contineri dicitur sub 3. & 4. Ita quoq; parallelogrammum ABCD, comprehensum sub duabus rectis AB, BC, quarum illa sit 3. palmorũ, hæc autem 4. constat 12. palmis quadratis, qui quidem ex ductu lineæ AB, 3. palmorum in lineam BC, 4. palmorũ producuntur, ut figura indicat, notumq; est Arithmeticis, atq; Geometris, demonstraturq; à Ioanne Regiomont. lib. 1. de triangulis, propos. 16. Hinc fit, ut nonnulli dicant parallelogrammum rectangulũ gigni ex ductu duarum linearũ circa angulũ rectum, unius in alteram. Vt proximè antecedens parallelogrammum ex ductu lineæ AB, in lineam BC, vel (quod idem est) ex ductu lineæ BC, in lineam AB. Idem enim parallelogrammũ procreatur, sive minor linea in majorem, sive major in minorem ducatur : quemadmodum etiam idem producitur numerus, sive minor numerus in majorem, sive major in minorem ducatur ut ab Euclide demonstratur lib. 7. propos. 16. Tàm enim ex multiplicatione 3. in 4. quàm ex 4. in 3. producitur hic numerus 12.

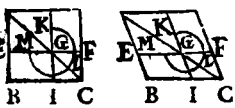


Obiter quoq; monendus mihi lector, videtur, Euclidem in hoc secundo libro, & in aliis, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum: quod etiam cæteri Geometræ observant, ita ut nomine rectanguli perpetuò intelligendum sit parallelogrammũ rectangulum. Rursus, ne toties eædem literæ repetantur, solent Geometræ exprimere parallelogrammum tàm rectangulũ, quàm non rectangulum duabus duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur. Vt appositũ parallelogrammum appellant, AC, vel BD.

II.

In omni parallelogrammo spatio, unumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complèmentis, Gnomon vocetur.

In parallelogrammo *ABCD*, sive rectangulum illud sit, sive non, ducatur diameter *AC*, ex cujus puncto quolibet G, ducantur rectæ *EF*, *HI*, parallelæ lateribus parallelogrammi, ita ut parallelogrammum divisum sit in quatuor parallelogramma, quorum duo *EH*, *IF*, dicuntur esse circa diametrum, alia verò duo *BG*, *GD*, complementa, ut manifestum est ex ultima definitione primi lib. Itaque figura composita ex parallelogrammo utrolibet circa diametrũ, ut ex *IF*, una cum duobus complementis *BG*, *GD*, qualis est figura *EBCDHGE*, quam complectitur circumferentia *KLM*, dicitur Gnomon. Eadem ratione figura *FDABIGF*, composita ex parallelogrammo *EH*, circa diametrum, & duobus complementis *BG*, *GD*, Gnomon appellabitur.



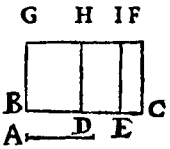
Sed jam ad propositiones secundi hujus lib. veniamus, in quibus sanè operæ pretium fuerit, multum laboris in eis exquisitè intelligendis ponere, propter multiplicem earum usum cum in rebus Geometricis, tum in humanis commerciis. Nam ex nonnullis harum propositionum demonstrantur regulæ illæ admirabiles Algebræ, quibus vix credo in disciplinis humanis præstantius aliquid reperiri, quippe cum miracula quædam numerorum (ut ita dicam) eruant tàm abstrusa, ac recondita, ut facultas illa omnem captum humanum superare videatur, tanta nihilominus facilitate, atq; voluptate, ut facilius videatur esse nihil. Ex aliis deinde propositionibus hujus lib. eliciuntur demonstrationes, quibus inter se adduntur, subtrahuntur, multiplicantur atque dividuntur numeri surdi (quos dicunt) h. e. qui nullo modo exprimi possunt: cujusmodi sunt radices numerorũ non quadratorum, aut non cubicorum, quæ neque per Divinam potentiam in numeris possunt exhiberi, quod hæc res contradictionem implicet, ut Philosophi atque Theologi loquuntur. Quo quid admirabilius? Quis enim credat, per demonstrationem sciri posse, quid producatur ex radice quadrata num. 8. ad radicem quadratam num. 18. adjecta, cum utraque radix incognita sit, & nulla ratione exprimi queat, quod illa paulò minor sit, quam 3. hæc verò paulò major quam 4? Et tamen summa, quæ ex utraq; fit, colligitur ex vi propositionis 4. hujus lib. radix quadrata numeri 50. quæ paulò major est, quàm 7. Præterea ex propos. 12. & 13. ejusdem hujus lib. area, & quantitas cujusvis trianguli exquisitissimè cognoscitur, ex qua cognitione rursus dimensio omnium magnitudinum fluit, atque dimanat. Postremò ultima propos. hujus lib. omnem figuram rectilineam licet irregularem, vel etiam plures, ad quadratum æquale mira facilitate reducit. Vt verè aureus dici mereatur hic liber cum mole quidem sit perexiguus, utilitates verò contineat propè infinitas.

THEOR.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, secetur que ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

Sint duæ rectæ A, & BC, quarum BC; secetur quomodocunque in quotlibet segmenta BD, DE, EC. *Dico rectangulum sub A, & BC, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indivisa A, & quolibet segmento comprehenduntur, nempe rectangulo sub* A, & BD; *Item sub* A, & DE; *Item sub* A, & EC, *comprehenso.*



Rectangulum enim BF, *comprehendatur sub A, & BC, hoc est, recta* GB, *æqualis sit rectæ* A. *Quod quidem fiet, si erigantur ad BC, duæ perpendiculares* BG, CF, *æquales rectæ* A, *ducaturque recta* FG. *Nam recta BG,* CF, a *parallelæ erunt, ob rectos angulos B,* C: *Sed* & b *æquales inter se sunt, quod utraque recta* A, *æqualis* b 1. pron. *ponatur.* c *Igitur erunt quoque* GF, BC, *parallelæ, & æquales inter* c 33. primi. *se: ac proinde rectangulum erit* BF, *contentum sub* A, *sive* GB, & BC, *ex defin.* 1. *hujus lib. Deinde ex* D, & E, *ducantur rectæ* DH, EI, *parallelæ ipsi* BG, *vel* CF. *Itaque* DH, EI, *cùm parallelæ sint ipsi* BG, d *inter se quoque parallelæ erunt. Rursus eadem, cùm ex constructione parallelogramma sint* BH, BI, e *æquales erunt rectæ* BG, *ac propterea rectæ* A. *Quoniam igitur recta* BG, *æqualis est rectæ A, erit rectangulum* BH, *comprehensum sub insecta linea* A, & *segmento* BD. *Eadem ratione erit rectangulum* DI, *comprehensum sub A, & segmento* DE. *Item rectangulum* EF, *sub* A, & *segmento* EC. *Quare cum rectangula* BH, DI, EF, *æqualia sint toti rectangulo* BF; *perspicuum est, rectangulum comprehensum sub A, & BC, æquale esse rectangulis omnibus quæ sub A, & segmentis* BD, DE, EC, *comprehenduntur. Si ergò fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.*

a 28. primi.
d 30. primi.
e 34. primi.

SCHOLIVM.

Quoniam lib. 9. propos. 14. decem priora theoremata secundi hujus libri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonstrabimus, si dividantur, ut lineæ; non abs re fuerit, b eviter numeris applicare ea, quæ pluribus verbis de lineis

hic demonſtrantur, præſertim cum multiplicatio numeri unius in alterum reſpondeat ductui unius lineę in alteram, ut ſupra diximus. Itaq; propoſitis duobus numeris quibuſcunq;, ut 6. & 10. dividatur poſterior in tres partes 5.3.& 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem eſſe tribus numeris 30. 18.& 12. qui ex multiplicatione 6. in 5.& 3 & 2. gignuntur: id quod perſpicuum eſt.

Demonſtrat hoc loco Federicus Commandinus duo alia theoremata, quæ iam ſequuntur.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, ſecenturq; ambæ in quotcunque ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis unius, & quolibet ſegmentorum alterius continentur rectangulis.

Sint duæ rectæ AB, AC, rectum angulum A continentes, quæ ſecentur in partes AD, DE, EF, FB; AG, GH, HC. Dico rectangulum CKLMI ſub rectis AB, AC, comprehenſum æquale eſſe rectangulis quæ ſub AD, AG; AD, GH; AD, HC: DE, AG; DE, GH; DE, HC: EF, AG; EF, GH; EF, HC: FB, AG; FB, GH; FB, HC, continentur. Compleatur rectangulum AE FB AI, ducanturque DK, EL, FM, parallelæ ipſi AC, vel BI. Item HN, GO, parallelæ ipſi AB vel CI; quæ ſecent priores in P, Q, R, S, T, V. Quoniam igitur rectangulum AS, continetur ſub AD, AG; & GP, ſub AD, GH; & HK, ſub AD, HC; (a quod rectæ GS, HP, ipſi AD, ſint æquales:) Item rectangula DT, SQ, PL, continentur ſub DE, AG; DE, GH; DE, HC; (b quod DS, SP, PK, ipſis AG, GH, HC, æquales ſint, & ST, PQ, ipſi DE,) Et eadem ratione rectangula EV, TR, QM, continentur ſub EF, AG; EF, GH; EF, HC: Nec non rectangula FO, VN, RI, ſub FB, AG; FB, GH, FB, HC: perſpicuum eſt, rectangulum ſub AB, AC, æquale eſſe rectangulis ſub ſingulis partibus AD, DE, EF, FB, & quolibet ſegmentorum AG, GH, HC, comprehenſis. Quod eſt propoſitum.

34 primi.

b 34 primi.

Si ſint duæ rectæ lineæ, ſecenturque ambæ utcunque: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, una cum rectangulo ſub una parte unius, & una parte alterius comprehenſo æquale eſt eis, quæ ſub totis lineis, & dictis partibus mutuò continentur, rectangulis, una cum rectangulo ſub reliquis partibus comprehenſo,

Sint duæ rectæ AB, AC, angulum continentes rectum A, quæ ſecentur utcunque in D, & E. Dico rectangulum comprehenſum ſub AB,

AB, AC, una cum rectangulo comprehenſo ſub partibus AD, EC, æquale eſſe rectangulis contentis ſub AB, EC; AC, AD; una cum rectangulo ſub DB, AE, comprehenſo. Compleatur enim rectangulum AF, agaturque per D, recta DG, ipſi AC, vel BF, C G F parallela; nec non per E, recta EH, ſecans DG, in I, parallela ipſi AB, vel CF. Quoniam igitur rectangulum AF, æquale eſt rectangulis EF, DH; AI, ſi addatur commune EG, erunt rectangula AF, EG, AD B nempe ſub totis AB, AC, & partibus AD, EC, comprehenſa æqualia rectangulis EF, AG, DH, ſub AB, EC; AC, AD; DB, AE, comprehenſis æqualia. Quod eſt propoſitum.

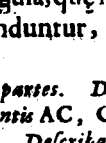
In numeris etiam hæc eadem perſpicua ſunt. Propoſitis enim duobus hiſce numeris 10. & 8. quorum prior in tres partes, 2.3.5. poſterior verò in duas, 3.5. dividatur; perſpicuum eſt, 80. numerum productum ex 10. in 8. æqualem eſſe ſex numeris 6.10.9.15.15.25. qui producuntur ex ſingulis partibus 2.3.5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntque ſimul additi 80. ut volebat theorema 1. Federici.

Rurſus, ſi iidem numeri ſecentur utcunq; , prior quidem in 3. 7. poſterior autem in 2.6. manifeſtum quoq; eſt 80. numerum productum ex 10. in 8. una cum 18. numero producto ex 3. in 6. æqualem eſſe tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum utrobique efficiantur 98. ut theorema 2. Federici optabat.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si recta linea ſecta ſit utcunque: Rectangula, quę ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, æqualia ſunt ei, quod à tota fit, quadrato.

Recta linea AB, *dividatur utcunque in* C, *duas in partes. Dico duo rectangula comprehenſa ſub tota,* AB, *& ſegmentis* AC, CB, *ſimul ſumpta, æqualia eſſe quadrato totius lineæ* AB. *Deſcribatur enim* AD, *quadratum lineæ* AB, *& ex* C, *ducatur* CF, *parallela rectæ* AE, *vel* BD, *quæ æqualis erit rectæ* AE, *hoc eſt,* E F D *2.3.4. primi. rectæ AB, cui æqualis eſt recta* AE, *ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta* AE, *æqualis eſt rectæ* AB, *erit rectangulum* AF, *comprehenſum ſub tota* AB, *& ſegmento AC. Similiter erit rectangulum* CD, *comprehenſum ſub tota* AB, *& ſegmento* CB. *Quare cum rectangula* AF, CD, *æqualia ſint quadrato* AD, *perſpicuum eſt, rectangula comprehenſa ſub* AB, *& ſegmentis* AC, CB, *æqualia eſſe quadrato lineæ* AB. *Si igitur recta linea ſecta ſit utcunque, &c. Quod demonſtrandum erat.*

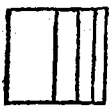


Aliter. Sumatur recta D, *æqualis rectæ* AB. *Quoniam igitur*

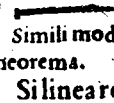
AB, *divisa est in* C, *erit rectangulum comprehensum sub insecta* D, *& rectæ* AB, *hoc est, quadratum rectæ* AB, *æquale duobus rectangulis,* 11. *sec.* *quæ comprehenduntur sub* D, *insecta, hoc est, sub* AB, *& singulis segmentis* AC, CB. *Quod est propositum.*

SCHOLIVM.

Quanquam Euclides secundum hoc theorema proponat de linea



recta divisa in duas tantummodo partes utcunque, idem tamen eisdem mediis demonstrabitur, si linea dividatur in quotcunque partes, ut ex his figuris manifestum est. In numeris verò idem perspicitur hoc modo. Numerus 10. divisus sit in duas partes 7. & 3. Dico numerus 70. & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. æquales esse 100. quadrato ipsius numeri 10. ut manifestum est. Simili modo si numerus



10. dividatur in plures partes 3. 2. 4. & 1. erunt numeri 30. 20. 40 & 10. geniti ex 10. in 3. 2. 4. & 1. æquales 100. quadrato ipsius numeri 10.

Simili modo demonstrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.

Si linea recta secetur in quotcunque segmenta: Quadratum, quod à tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur rectangulis.

Sit recta *AB*, divisa in partes quotcunque *AC*, *CD*, *DB*. Dico quadratum ex AB, descriptum, æquale esse rectangulis, quæ sub

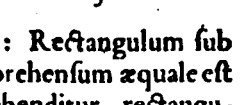
singulis partibus *AC*, *CD*, DB, & quolibet segmentorum *AC*, CD, *DB*, comprehenduntur, hoc est, rectangulis sub *AC*, *AC*; *AC*, CD; *AC*, *DB*: CD, *AC*; CD, CD; CD; DB: DB, AC; *DB*, *CD*; *DB*, DB, comprehensis, Sumpta enim recta *EF*, quæ æqualis sit ipsi AB. divisaque in partes EG, GH, *HF*, partibus *AC*, CD, DB, æquales. Erit ex iis, quæ ad propos. 1. hujus libri demonstravimus, rectangulum sub *AB*, *EF*, h.e. quadratū ipsius AB, æquale rectangulis sub *AC*, *EG*; *AC*, *GH*; AC, HF: CD, EG; CD, *GH*; CD, HF; DB, EG; DB, *GH*; *DB*, HF. Cùm igitur partes *AC*, CD; DB, partibus *EG*, *GH*, *HF*, sint æquales; erit quoque quadratum ex AB, æquale rectangulis sub AC, AC; AC, CD; AC, *DB*: CD, *AC*; CD, CD, *CD*, DB: DB, AC; DB, *CD*; *DB*, DB. Quod est propositum.

In

In numeris idem est manifestum. Si enim numerus 10. dividatur in 2. 3. 5. erit 100. quadratus totius æqualis his novem numeris 4. 6. 10. 6. 9. 15. 25. qui ex singulis partibus 2. 3. 5 in quamlibet partium 2. 3. 5. procreantur, ut perspicuum est.

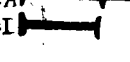
THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si recta linea secta sit utcunque : Rectangulum sub tota, & uno segmentorum comprehensum æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur, quadrato.



Linea recta AB, *divisa sit utcunque in punctо* C. *Dico rectangulum comprehensum sub tota* AB, *& utrovis segmento, ut* AC, *(sive hoc segmentum majus sit, sive minus) æquale esse rectangulo sub segmentis* AC. CB, *comprehenso & quadrato prioris segmenti assumpti* AC. *Constituatur enim quadratum dicti segmenti* AC: *quod sit* AD: *& ex* B, *educatur* BF, *parallela ipsi* AE, *donec coeat cum* ED, *protracta in* F. *Quoniam igitur* AE, *recta recta* AC, *æqualis est, ex quadrati definitione; erit rectangulum* AF, *comprehensum sub tota* AB, *& segmento* AC. *Rursus, quia recta* CD, *eadem ratione æqualis est recta* AC : *erit rectangulum* CF, *comprehensum sub segmentis* AC, *&* CB. *Cùm igitur rectangulum* AF, *æquale sit quadrato* AD, *& rectangulo* CF; *liquido constat, rectangulum sub* AB, *tota, & segmento* AC, *comprehensum esse æquale rectangulo comprehenso sub segmentis* AC, CB, *& quadrato prædicti segmenti* AC. *Itaque si recta linea secta sit utcunque, &c. Quod erat ostendendum.*

Aliter. Accipiatur recta D, *æqualis segmento* AC. *Quoniam igitur recta* AB, *divisa est in* C, *erit rectangulum comprehensum sub* D, *&* AB, *hoc est, sub* AB, *&* AC, *æquale rectangulo sub* D, *&* CB, *hoc est, sub* AC, CB, *& rectangulo sub* D, *&* AC, *hoc est, quadrato segmenti* AC. *Quod est propositum.*



a 1. *sec.*

SCHOLIVM.

Vt hoc theorema numeris accommodetur, sit numerus 10. divisus in 7. & 3. Dico numerũ 70. productũ ex 10. in 7. æqualẽ esse numero 21. qui ex 7. in 3. producitur, una cum 49. quadrato prioris partis 7. Id quod res ipsa indicat. Pari ratione erit n. 30. procreatus ex 10.

ex 10. in 3. æqualis numero 21. producto ex 3. in 7. simul cum 9. quadrato prædicti numeri 3.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

Si recta linea secta sit utcunque: Quadratum, quod à tota describitur æquale est & illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur rectangulo.

Recta linea AB, *divisa sit utcunque in* C. *Dico quadratum totius rectæ* AB, *æquale esse quadratis segmentorum* AC, CB, *& rectangulo comprehenso bis sub segmentis* AC, CB. *Describatur enim super* AB, *quadratum* AD, *ducaturque diameter* BE. *Deinde ex* C, *agatur* CF, *parallela rectæ* BD, *secans diametrum in* G, *puncto, per quod rursus ducatur* HI, *parallela rectæ* AB. *Erit & quadratum* AD, *divisum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli* ABE, *duo latera* AB, AE, *æqualia sunt*; a *erunt duo anguli* ABE; AEB, *æquales. Atqui* b *tres anguli* ABE, AEB, BAE, *trianguli* ABE, *duobus rectis sunt æquales, &* BAE, *rectus est. Reliqui ergò duo anguli* ABE, AEB, *semirecti erunt. Eadem ratione ostendes angulos* DBE, DEB, *semirectos esse. Quod etiam constat ex iis, quæ ad 34. propos. lib. 1. demonstravimus. Nam, ut ibi ostensum est, diameter* BE, *dividit angulos rectos* ABD, AED, *bifariam. Quia ergò anguli quoq; tres trianguli* EFG, c *æquales sunt duobus rectis, & angulus* EFG, *rectus est* d *cum sit æqualis recto* D, *externus interno: nec non* FEG, *ostensus semirectus: erit & reliquus* EGF, *semirectus: ideoq; æqualis angulo* FEG. *Quare* e *æqualia erunt latera* EF, FG, *quæ cum sint* f *æqualia oppositis lateribus* GH, HF, *erit parallelogrammum* FH, *quadratum, cum omnia ejus latera sint æqualia, & omnes anguli recti: præterea quod existente uno angulo recto, nempe* FEH, *vel* F, *in parallelogrammo* FH, *omnes quatuor recti sunt, ut ad defin. 1. hujus lib. monstravimus. Eadem ratione quadratum erit* CI. *Quamobrem* CI, FH, *quadrata sunt segmentorum* AC, CB, *quod latus* HG, g *æquale sit rectæ* AC. *Rectangula quoque* AG, DG, *comprehensa erunt sub segmentis* AC, CB, *propterea quod* CG, GI, *æquales sunt rectæ* CB, *ob quadratum* CI: *&* FG, *æqualis rectæ* GH, *ob quadratum* FH, *hoc est,* h *rectæ* AC. *Quocirca cum quadratum* AD, *æquale sit quadratis* CI, FH, *& rectangulis* AG, DG: *constat quadratum* AD, *totius lineæ* AB, *æquale esse quadratis segmentorum* AC, CB, *& rectangulo comprehenso suo eisdem segmentis* AC, CB,

a 5. primi.
b 32. primi.
c 32. primi.
d 29. primi.
e 6. primi.
f 34. primi.
g 34. primi.
h 34. primi.

bis

bis sumpto. Igitur si recta linea secta sit utcunque quadratum, quod à tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

Aliter. Quoniam recta AB, *divisa est in* C, a *erit quadratum totius* AB, *æquale rectangulis, quæ sub tota* AB, *& segmentis* AC, CB, *comprehenduntur: Rectangulum autem sub* AB, AC, *comprehensum,* b *æquale est rect-Aangulo comprehenso sub* AC, CB, *& quadrato segmenti* AC: *Item rectangulum sub* AB, CB *comprehensum, æquale est rectangulo sub* CB, AC, *comprehenso, & quadrato segmenti* CB. *Igitur quadratum rectæ* AB, *æquale etiam est quadratis segmentorum* AC, CB, *& rectangulis sub* AC, CB, *&* CB, AC. *Quod est propositum.*

a 2. sec.

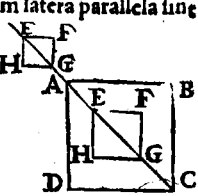
C B

b 3. sec.

COROLLARIVM I.

HINC manifestum est parallelogrammum circa diametrum quadrati esse quadrata.

Constat hoc ex priori hujus theorematis demonstratione, in qua ostensum est, rectangula CI, FH, quæ sunt circa diametrum BE, esse quadrata. In omnibus enim aliis quadratis eadem erit demonstratio: Est autem corollarium istud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrum quadrati, quæ communem aliquem angulum habent cum toto quadrato, cujusmodi sunt dicta parallelogramma CI, FH. Illud enim angulum habet *ABD*, communem cum quadrato, hoc verò angulum *AED*. Idem nihilominus verum est, de quibuscunque parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamvis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela sint quadrati lateribus. Circa enim diametrum AC, quadrati BD, constat parallelogrammū FH, sive intra quadratum, sive extra, quod tamen habeat latera lateribus quadrati BD, parallela. Dico FH, esse quadratum. Cùm enim parallelæ sint AB, EF, *c* erunt anguli BAC, FEG, æquales, internus, & externus: atque eadem ratione anguli BCA, FGE, æquales erunt: Sunt autem anguli BAC, BCA, semirecti, ut ostensum jam fuit. Igitur & anguli FEG, FGE, semirecti erunt: *d* propterea; latera EF, FG, illis opposita, æqualia, *e* & angulus F, rectus. Quare cum EF, FG, latera *f* æqualia sint oppositis lateribus GH, HE, æquilaterum erit parallelogrammum FH: Sed & rectangulum est, ex iis, quæ ad defin. 1. hujus lib. ostendimus, propterea quod angulus unus F, rectus est demonstratus. Igitur FH, quadratum erit. Quod est propositum.



c 29. primi.

d 6. primi.

e 32. primi.

f 34. primi.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR etiam ex demonstratione hujus propositi 4. diame-

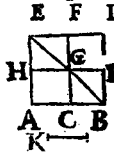
trum cujuſvis quadrati dividere ejus angulos bifariam. Probatum enim fuit, angulos AEB, DEB, eſſe ſemirectos, &c. Id quod etiam ad propoſ. 34. lib. 1. demonſtravimus.

SCHOLIVM.

In numeris ita theorema hoc quadratum exercebitur. Sit numerus 10. diviſus utcunque in 7. & 3. Vides igitur 100. quadratum totius numeri æquale eſſe 49. & 9. quadratis partium 7. & 3. una cum numero 21. qui ex 7. in 3, procreatur, bis ſumpto. Nam 49. 9. 21. & 21. efficiunt 100.

Perfacilè autem erit ex hoc theoremate 4. demonſtrare hoc aliud theorema.

Si linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa deſcriptum, quadruplum eſt quadrati ex hac deſcripti. Et ſi quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum eſt lateris hujus.



Sit enim primum linea AB, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ AB, quadruplum eſſe quadrati rectæ K. Nam diviſa AB, bifariam in C, ſi fiat conſtructio, ut in 4. hoc theoremate, erunt quatuor parallelogramma AG, CI, IF, FH, quadrata, atque inter ſe æqualia, cùm omnia eorum latera ſint æqualia, omneſq; anguli recti, ut facilè demonſtrari poteſt ex prop. 34. lib. 1. Quare cum quadratum AD, æquale ſit quatuor quadratis AG, CI, IF, FH, erit quadratum lineæ AB, quadruplum quadrati lineæ AC, hoc eſt, lineæ K, quæ æqualis eſt ipſi AC. Eſt enim utraque dimidium lineæ AB.

a 4. ſec. Brevius. a Quadratum rectæ AB, æquale eſt quadratis rectarum AC, CB, & rectangulo ſub rectis lineis AC, CB, bis comprehenſo. Cùm igitur quadrata rectarum æqualium AC, CB, æqualia ſint: & rectangulum ſub æqualibus AC, CB, quadratum quoque ſit, atque æquale quadrato rectæ AC; Conſtat quadratum rectæ AB, quadruplum eſſe quadrati rectæ AC: cùm æquale ſit quatuor quadratis, quorum unumquodque quadrato rectæ AC, æquale eſt.

Sit deinde quadratum rectæ AB, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus AB, duplum eſſe lateris K. Nam diviſa recta AB, bifariam in C, ut AB, dupla ſit ipſius AC; erit, ut jam demonſtratum eſt, quadratum rectæ AB, quadruplum quadrati rectæ AC. Ponitur autem & quadruplum quadrati rectæ K. Igitur æqualia ſunt quadrata rectarum K, & AC, & ipſę propterea rectæ K, & AC, æquales: Eſt autem AB, ex conſtructione ipſius AC, dupla. Dupla igitur etiam erit ipſius K. Hæc tamen omnia aliter demonſtrabimus ad propoſ. 20. lib. 6.

Cæte-

Cæterum ex hac propoſ. 4. colligi poteſt modus inveniendi numerum quadratum, cum quo datus quivis numerus quadratum quoq; numerum conſtituat. Si namque ex dato numero auferatur 1. erit quadratus numerus ex reliqui numeri dimidio in ſe multiplicato productus, is qui quæritur. Vt ſi datus ſit numerus 15. inveniendusq; numerus quadratus, cum quo datus numerus 15. faciat numerum item quadratum; detrahemus 1. ex 15. & reliqui numeri 14. dimidiū 7. accipiemus. Nam numerus quadratus 49. ex eo dimidio in ſe multiplicato productus erit is, cum quo datus numerus 15. cōſtituit 64. quadratū numerū, cujus latus eſt 8. nempe numerus una unitate major, quàm 7. latus quadrati inventi. Ratio hujus rei hæc eſt. Quoniam quadratū *AD*, rectæ *AB*, *a* æquale eſt duobus quadratis *FH*, CI, partium AC, CB, una cum rectangulo bis comprehenſo ſub AC, CB; ſi gnomonem *HBF*, qui cum quadrato FH, conſtituit totum quadratum *AD*, ponamus 15. quantus nimirum eſt datus numerus: quadratum autem CI, ſtatuamus 1. atq; adeò latus quoq; ejus *CB*, 1. erit utrumvis rectangulorum *AG*, DG, 7. ac proinde ſegmentum *AC*, 7. ut nimirum ex AC, in *CB*, quę eſt 1. fiant 7. Quadratū ergò FH, erit 49. Totum autem latus *AB*, erit 8. nempe una unitate majus, quàm AC, latus quadrati FH. Hæc ergò eſt cauſa, cur ex dato numero, hoc eſt, ex gnomone *HBF*, detrahamus 1. & reliqui numeri dimidium ſtatuamus latus quadrati *FH*, quæſiti. 2 4. ſec.

Vt autem numeri fracti vitentur, datus numerus debet eſſe impar, ut nimirum ablata 1. reliquus numerus dividi poſſit bifariam. Regula nihilominus vera eſt, quicunq; numerus datus ſit.

Idem efficiemus, ſi ex dato numero quemvis quadratū numerum demamus, & reſidui dimidium per latus quadrati ablati partiamur. Quotiens enim erit latus quadrati quæſiti. Vt ſi detur numerus 45. pro gnomone *HBF*, auferemus numerum quadratū 9. pro quadrato *CI*, cujus latus eſt 3. Reſidui 36. dimidium eſt 18. pro AG, quod diviſum per 3. hoc eſt, per *CG*, latus quadrati ablati CI, facit Quotientem 6. pro latere *GH*, cujus quadratum FH, nimirum 36. additum ad gnomonem *HBF*, nimirum ad 45. efficit quadratum numerum 81. Vt autem fractiones evitentur, dandus erit numerus, ita ut, ablato quadrato numero aliquo, reſiduus numerus habeat dimidium numerum, quem latus quadrati ablati numeret.

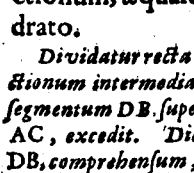
Viciſſim reperiemus numerū quadratum, à quo datus quivis numerus ſubtractus relinquat numerum quoq; quadratum. Nam ſi ex numero dato dematur 1. & reliqui numeri dimidio adjiciatur 1. conficietur latus quadrati quæſiti. Vt ſi rurſum datus ſit numerus 15. Detracta 1. erit reliqui numeri 14. dimidium 7. cui addita 1. fiet latus quadrati quæſiti 8. Si enim ex ejus quadrato 64. detrahas 15. remanet quadratus numerus 49. cujus latus eſt 7. quod perpetuò eſt una unitate minus, quàm latus quadrati

drati inventi. Ratio etiam hujus regulæ, facilis est ex eadem figura hujus propos. 4. Nam si gnomonem *HBF*, qui ex quadrato AD, subtractus reliquum facit quadratum *FH*, ponamus 15. quantus nimirum est numerus datus. Quadratum verò CI, statuamus 1. atque adeò & latus ejus *BC*, 1. erit utrumlibet rectangulorum *AG*, DG, 7. ac proinde & segmentum AC, 7. ut supra dictum est, & tota linea *AB*, 8. &c.

V THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, una cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod à dimidia describitur, quadrato.

Dividatur recta AB, bifariam in C, & per inæqualia in D, ut sectionum intermedia sit recta CD, quanimirum dimidia CB, minus segmentum DB, superat, vel qua majus segmentum AD, dimidium AC, excedit. Dico rectangulum sub segmentis inæqualibus AD, DB, comprehensum, una cum quadrato rectæ CD, quæ inter duas



sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ CB. Describatur enim CF, quadratum super dimidia CB, & ducta diametro BE, ducatur ex D, recta DG, parallela rectæ BF, secans diametrum BE, in H, puncto, per quod ducatur recta BC, parallela IK: Item ex A, recta CE, parallela AL, secans IK, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. præcedentis propos. DI, KG, quadrata, ideoque DH, recta rectæ DB, æqualis: a *Est autem & KH, ipsi CD, æqualis. Quare rectangulum AH, comprehendetur sub AD, DB, & KG, erit quadratum rectæ CD. Probandum itaque est, rectangulum AH, una cum quadrato KG, æquale esse quadrato CF. Quoniam ergò* b *complementa CH, FH, æqualia sunt; si addatur commune quadratum DI, erit parallelogrammum DF, parallelogrammo CI, æquale:* c *Est autem & AK, eidem CI, æquale, quod & bases AC, CB, æquales sint. Igitur DF, AK, æqualia etiam inter se erunt: quibus si commune apponatur CH, erit gnomon MNO, rectangulo AH, æqualis. Quocirca cum gnomon MNO, & quadratum KG, æqualia sint quadrato CF; Erit & rectangulum AH, una cum quadrato KG, æquale eidem quadrato CF. Si recta ergò linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod ostendendum erat.*

a 34. primi.

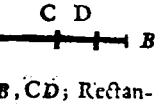
b 43. primi.

c 36. primi.

SCHOLIVM.

Aliter hoc theorema cum Francisco Maurolyco demonstrabimus

bimus, eo modo, quo idem in numeris demonstratur à Barlaam monacho, quod etiam cum eodem Maurolyco in sequentibus propositionibus usque ad 11. exclusivè faciemus. Demonstrationes autem has numeris accommodatas reperies ad propos. 14. lib. 9. Ita ergò propositum exequemur. Quia quadratum ex CB, *a* æquale est quadratis ex CD, DB, una cum rectangulo bis sub DB, CD; Rectangulo autem sub DB, CD; unà cum quadrato ex DB, *b* æquale est rectangulum sub DB, CB; Erit quadratum ex CB, æquale reliquo quadrato ex CD, una cum reliquo rectangulo sub DB, CD, & rectangulo sub DB, CB, vel sub DB, AC. Atqui rectangulis sub DB, AC, & sub DB, CD, *c* æquale est rectangulum sub DB, & tota AD. Igitur quadratum ex CB, æquale erit quadrato ex CD, una cum rectangulo sub DB, AD; hoc est rectangulum sub AD, DB, una cum quadrato ex CD, æquale erit quadrato ex CB: Quod erat demonstrandum.



a 4. sec.

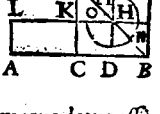
b 3. sec.

c 1. sec.

Idem in numeris est manifestum. Dividatur enim numerus 10. æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. ita vt medius numerus inter sectiones sit 2. quo videlicet dimidius numerus 5. superat minorem partem 3. &c. Vides igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, una cum 4. quadrato intermedii numeri 2. æqualem esse 25. quadrato dimidii numeri 5.

Ex hac etiam propos. 5. inveniemus alio modo numerū quadratum, cum quo datus quivis numerus quadratū quoq; conficiat numerū. Nam si dato numero adjiciatur 1. & à compositi numeri dimidio detrahatur 1. reliquum fiet latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 15. Addita 1. fit 16. à cujus dimidio 8. si dematur 1. manet 7. latus quadrati 49. cum quo datus numerus 15. componit numerū quadratū 64. cujus latus est 8. quod perpetuò est una unitate major latere 7. quadrati inventi. Ratio hujus regulæ ex demonstratione propos. 5. difficilis non est. Cùm enim rectangulum AH, cum quadrato KG, *d* æquale sit quadrato CF; si rectangulum AH, ponatur 15. sicut numerus datus; at verò quadratū DI; statuatur 1. ac proinde latus DB, quoque 1. erit recta AD, 15. ut nimirum ex AD, in DB, gignatur 15. rectangulum videlicet AH. Addita ergo 1. erit tota linea AB, 16. à cujus dimidio 8. dempta 1. relinquetur CD, 7. latus nimirum quadrati KG.

d 5. sec.



Hic quoq; si fracti numeri vitandi sint, debet numerus datus esse impar, ut videlicet, addita 1. dividi possit bifariam.

E contrario reperiemus numerum quadratū, à quo si datus quivis numerus subtrahatur, reliquus fiat numerus quoq; quadratus. Nam si ad datum numerū adjiciatur 1. erit dimidium compositi numeri latus quadrati quæsiti. Vt si rursum numerus 15. datus sit.

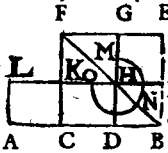
Addita 1. erit compositi numeri dimidium 8. latus quadrati 64. quæsiti. Si enim demus datum numerum 15. reliquus fiet quadratus numerus 49. cujus latus 7. perpetuò minus est una unitate, quàm latus quadrati inventi. Ratio hujus rei perspicua quoque est ex eadem figura hujus propos. 5. Nam si rectangulum *AH*, quod ex quadrato CF, ablatum relinquit quadratum *KG*, statuatur 15. sicut datus numerus; & quadratum DI, ponatur 1. atque adeò & DB, ejus latus 1, erit tota *AB*, 16. & ejus dimidium C*B*, 8. &c.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

vj

Si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adjiciatur: Rectangulum comprehensum sub tota cum adjecta, & adjecta, una cum quadrato à dimidia, æquale est quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adjecta componitur, tanquam ab una descripto.

Secetur recta AB, *bifariam in* C, *& ei in rectum addatur* BD. *Dico rectangulum comprehensum sub tota composita* AD, *& DB, adjecta, una cum quadrato dimidiæ* CB, *æquale esse quadrato lineæ* CD, *quæ ex dimidia* CB, *& adjecta* BD, *componitur. Describatur namque* CE, *quadratum super* CD, *& ducta diametro* DF, *ducatur ex* B. *recta* BG, *parallela rectæ* DE, *secans diametrum* DF, *in* H, *puncto, per quod agatur* IK, *parallela rectæ* CD: *Item ex* A, *ducatur recta* CF, *parallela* AL, *secans* IK, *productam in* L. *Erunt igitur per corollarium* 1. *propos.* 4. *hujus lib.* BI, KG, *quadrata, ideoque rectæ* DI, *rectæ* DB, *æqualis*; a *Est autem &* KH, *rectæ* CB, *æqualis. Quare rectangulum* AI, *comprehendetur sub rectis* AD, DB; *& KG, erit quadratum rectæ CB. Probandum itaque est, rectangulum* AI, *una cum quadrato KG, æquale esse quadrato* CE. *Quoniam ergò parallelogrammum* AK, b *æquale est parallelogrammo* CH, *quod bases* AC, CB, *æquales sint*: c *Est autem & parallelogrammum* HE, *eidem* CH, *æquale, complementum complemento; erunt* AK, HE, *æqualia inter se. Addito ergò communi* CI, *erit rectangulum* AI, *gnomoni MNO, æquale. Quocirca cum gnomon MNO, & quadratum* KG, *quadrato* CE, *sint æqualia; erit & rectangulum* AI, *una cum eodem quadrato* KG, *eidem quadrato* CE, *æquale. Itaque si recta linea bifariam secetur, & illi rectæ quædam linea in rectum adjiciatur, &c. Quod erat demonstrandum.*



a 34. primi.

b 36. primi.

c 43. primi.

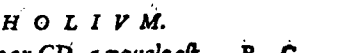
SCHO-

SCHOLIVM.

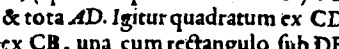
Aliter. Quia quadratum ex CD, *a* æquale est quadratis ex *CB*, BD; una cum rectangulo bis sub DB, CB, hoc est, quadratis ex *CB*, BD, una cum rectangulis sub DB, *CB*, & sub DB, AC: (sumpta AC, semel pro *CB*, quæ illi æqualis ponitur.) Est autem rectangulus sub *DB*, AC, DB, CB, & sub DB, *DB*, (quod est quadratum ex DB) *b* æquale rectangulum sub *DB*, & tota *AD*. Igitur quadratum ex CD, æquale est reliquo quadrato ex CB, una cum rectangulo sub DB, AD: Hoc est, rectangulum sub AD, *DB*, una cum quadrato ex *CB*, æquale est quadrato ex CD. Quod demonstrandum erat.

a 4. *sec.*

b 1. *sec.*



Cæterum si rem attentius considerare velimus, comperiemus propositionem hanc 6 per præcedentem 5. facilimè posse demonstrari: id quod etiam eruditus vir, & in omni doctrinarum genere exercitatissimus, Mauricius Brescius Gratianopolitanus, Regius olim Mathematicarum disciplinarum in Academia Parisiensi Professor, animadvertit. Sit enim recta AB, secta in C, bifariam, & ei addita recta quâtacunq; *BD*. Dico rectangulum comprehensũ sub tota *AD*, E



composita, & adjecta *BD*, una cum quadrato dimidiæ *CB*, æquale esse quadrato rectæ CD, ex dimidia, & adjecta composita. Addita namque rectæ AD, ex altera parte recta *AE*, quæ adjectæ *BD*, æqualis sit, erit tota *ED*, secta in C, æqualiter, & in B, inæqualiter, quod EA, AC; ipsis DB, *BC*, æquales sint. Recta quoque EB, rectæ AD, æqualis erit, quod EA, ipsi DB, sit æqualis, & AB, utrique communis. *c* Rectangulum igitur sub partibus inæqualibus EB, BD, una cum quadrato interjectæ sectionis *CB*, hoc est, rectangulum sub AD, *BD*, una cum quadrato dimidiæ CB, æquale erit quadrato dimidiæ *CD*, hoc est, quadrato rectæ ex dimidia *CB*, datæ rectæ AB, & ex adjecta *BD*, compositæ. Quod est propositum.

c 5. *sec.*

Secetur jam numerus 10. bifariam, (ut & hoc theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturque ei numerus 2. Vides igitur numerum 24. qui producitur ex toto numero composito 12. in adjectum 2. una cum 25. quadrato dimidii numeri, æqualem esse 49. quadrato hujus numeri 7. qui ex dimidio 5. & adjecto 2. componitur.

Ex hoc porrò theoremate colligitur proprietas insignis Arithmeticæ proportionalitatis, quæ consistit in eodẽ semper excessu quantitatum proportionalium. Cùm enim AD, superet CD, magnitudine *AC*, hoc est, CB: & CD, superet *BD*, eadem magnitudine *BC*; habebunt tres lineæ AD, CD, BD, proportionalitatem Arithmeticam: quandoquidem prima *AD*, superat secundam CD, eodem excessu *AC*, sive *CB*, quo secunda CD, tertiam BD, superat. Quare

cum oſtenſum ſit, rectangulũ ſub extremis AD, BD, una cum quadrato exceſſus CB, æquale eſſe quadrato lineæ mediæ CD: perſpicuè colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectangulum ſub extremis contentum, una cum quadrato exceſſus, æquale eſſe quadrato lineæ mediæ. Semper enim tres lineę Arithmeticè proportionales ita inter ſe conjungi poterunt, vt efficiant vnam lineam bifariam diviſam, (quæ nimirum æqualis ſit exceſſui inter primam & tertiam, & ex tertia. Vt patet, ſi tres rectæ ſint datæ AD, CD, BD. Si namque ex prima AD, abſcindatur DC, æqualis mediæ, & ex media hac DC, auferatur tertia DB, erit AB, (exceſſus inter primam & tertiam) ſecta bifariam in C, eique addita tertia BD. Cùm enim CB, exceſſus ſit inter mediam CD, & tertiam BD, qui æqualis eſſe debet, ob proportionalitatem Arithmeticam, ipſi AC, nempe exceſſui inter primam AD, & mediam CD; erit neceſſario AB, ſecta in G, bifariam. Eademq; ratio eſt in aliis. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent exceſſum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem exceſſum 3. habentibus numerus 40. productus ab ab extremis 4. 10. unà cum 9. quadrato exceſſus 3. æqualis eſt quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

Ex hac etiam propoſ. 6. reperiemus, vt ex 4. propoſ. numerũ quadratum, cum quo datus quivis numerus quadratum quoq; numerum componat. Nam ſi ex dato numero demat̃ur 1. & reliquus numerus bifariam ſecetur, erit quadratus numerus hujus dimidii is, qui quæritur. Vt ſi datus numerus ſit 15. Dempta 1. relinquitur 14. cujus dimidium 7. dabit numerum quadratum 49. quæſitum. Nam 15. cum 49. facit quadratum numerum 64. cujus latus 8. una unitate majus eſt latere 7. quadrati inventi. Hujus rei ratio manifeſta ex hac 6. propoſ. Cùm enim rectangulum AI, cum quadrato GK, æquale ſit quadrato CE: ſi rectangulum AI, ſtatuatur 15. at quadratum BI, 1. ideoque & latus BD, 1. erit tota linea AD, 15. ut nimirum multiplicata in BD, 1. producat rectangulum AI, 15. Ablata igitur 1. BD, remanet AB, 14. cujus dimidium 7. dabit CB, latus quadrati KG, quæſiti.

a 6 ſec.

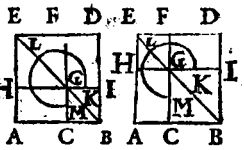
Neceſſe autem etiam hic eſt, datum numerum eſſe imparem, ut fracti numeri vitentur, vt videlicet dempta 1. bifariam poſſit dividi.

Verſa vice inveniemus numerum quadratum, à quo datus numerus detractus quadratum etiam numerum relinquat. Si enim ex dato numero tollatur 1. & reliqui numeri dimidio adjiciatur 1. ſurſus 1. conficietur latus quadrati quæſiti. Vt ſi datus numerus 15. Dempta 1. erit 7. dimidium reliqui numeri 14. additaq; 1. fiet latus quadrati quæſiti 8. Nam ſi ex ejus quadrato 64. ſubducas datum numerũ 15. reliquis erit quadratus numerus 49. cujus latus 7. ſemper vna vnitate minus eſt latere invento 8. Ratio eſt, quia ſi rectangulum

gulum AI, quod ex quadrato CE, subtractum relinquit quadratum KG, statuatur 15. at quadratum BI, ideoque & BD, ejus latus 1. erit tota linea AD, 15. ut dictum est. Dempta ergò 1. BD, erit AB, 14. cujus dimidio CB, quod est 7. si rursus apponatur 1. fiet latus CD, 8. quod quæritur, &c.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij

Si recta linea secetur utcunque; Quod à tota quodque ab uno segmentorum, utraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit, quadrato.



Secetur recta AB, *utcunque in* C. *Dico quadratum totius* AB, *& quadratum segmenti sive majoris, sive minoris* AC, *æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub tota* AB, *& dicto segmento* AC, *una cum quadrato reliqui segmenti* CB. *Describatur enim super* AB, *quadratum* AD, *& ducta diametro* BE, *ducatur ex* C, *recta* CF, *parallela rectæ* AE, *secans diametrum in puncto* G, *per quod agatur* HI, *parallela rectæ* AB. *Erunt igitur per corollarium* 1. *propos.* 4. *hujus lib.* CI, HF, *quadrata: & quia recta* GH, *æqualis est rectæ* AC, *erit* HF, *quadratum segmenti* AC. *Rursus quia* AE, *æqualis est ipsi* AB, *erit rectangulum* AF, *comprehensum sub tota* AB, *& segmento* AC. *Eadem ratione rectangulum* HD, *comprehensum erit sub eisdem rectis* AB, AC, *quod recta* DE, EH, *æquale sint rectis* AB, AC, *ob quadrata* AD, EH. *Quoniam igitur rectangulis* AF, FI, *una cum quadrato* CI, *hoc est, gnomoni* KLM, *una cum quadrato* CI, *æquale est quadratum* AD: *si apponatur commune quadratum* HF, *erunt quadrata* AD, HF, *æqualia rectangulis* AF, DH, (*quorum quodlibet comprehenditur sub tota* AB, *& segmento* AC,) *una cum* CI, *quadrato reliqui segmenti* CB. *Si igitur recta linea secetur utcunque, &c. Quod erat demonstrandum.*

a 34. primi.

SCHOLIVM.

Aliter. Quia quadratum ex AB, *b* æquale est quadratis ex AB, CB, una cum rectangulo bis sub AC, CB; si addatur commune quadratum ex AC, erunt quadrata ex AB, AC, æqualia quadrato ex AC, bis, & quadrato ex CB; una cum rectangulo bis sub AC, CB. Sed rectangulo sub AC, CB, una cum quadrato ex AC,

b 4. sec.

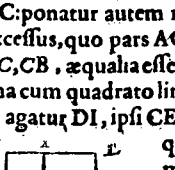
æquale est rectangulũ sub *AB*, *AC*: Et proinde rectangulo bis sub *AC*, *CB*, una cum quadrato ex *AC*, bis, æquale est rectangulum sub *AB*, *AC*, bis. Igitur quadrata ex *AB*, AC, æqualia sunt reliquo quadrato ex *CB*, una cum rectangulo bis sub AB, *AC*. Quod demonstrandum erat. 3. sec.

IN numeris autem dividatur numerus 10. utcunque in 6. & 4. Igitur 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 36. quadratus numerus partis 6. æquales sunt numero 120. qui fit bis ex toto 10. in partem 6. una cum 16. quadrato numero alterius partis 4. ut constat. Sic etiam 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 16. quadratus numerus partis 4. æquales sunt numero 80. qui bis fit ex toto 10. in partem 4. una cũ 36. quadrato numero alterius partis 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

Si recta linea in partes inæquales secetur: Earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, una cum quadrato ejus lineæ, qua major pars superat minorem.

Secetur recta AB, in partes inæquales AC, *CB*, sitque major pars AC: ponatur autem minori parti *CB*, æqualis linea AD, ut *CD*, sit excessus, quo pars AC, superat partem CB. Dico quadrata partium *AC*, *CB*, æqualia esse rectangulo, quod bis continetur sub AC, CB, una cum quadrato lineæ DC. Constituantur enim quadrata *AE*, *CH*, & agatur DI, ipsi CE, parallela, producaturque *HG*, ad *K*. Itaque quoniam AD, ipsi *CB*, est æqualis, addita communi DC, erit tota *AC*, hoc est, CE, toti *DB*, æqualis: Est autem & CG, ipsi CB, æqualis, quod quadratum sit *CH*. Igitur & reliqua GE, reliquæ DC, æqualis erit: Ac proinde, cum & *IE*, ipsi *DC*, sit æqualis, erunt GE, IE, æquales: ideoq; *IG*, quadratum erit ab excessu DC, descriptum. Quoniam verò rectangula *AI*, *DH*, continentur sub partibus AC, *CB*. (Est enim AC, utrique lineæ *AF*, DB, & *CB*, utriq; AD, BH, æqualis) manifestum est, quadrata *AE*, *CH*, partium AC, CB, æqualia esse rectangulis AI, *DH*, quæ continentur sub partibus *AC*, CB, una cum quadrato IG, excessus DC. Quod est propositum.



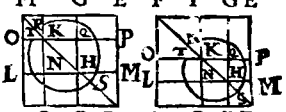
SCHOLIVM.

In numeris. Secetur numerus 10. inæqualiter in 4. & 6. ita ut major pars superet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16. 36. quadratos partium qui efficiunt 52. æquales esse numero 24. qui ex 4. in 6. fit, bis sumpto, una cum 4. quadrato excessus 2. ut volebat theorema.

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij

Si recta linea secetur utcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & uno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit, quadrato æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquam ab una linea describitur, quadrato.



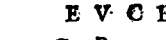
Sit recta AB, *in* C, *divisa utcunque. Dico rectangulum quater comprehensum sub* AB, *& segmento sive majore, sive minore* CB, *una cum quadrato reliqui segmenti* AC, *æquale esse quadrato linea, quæ ex recta* AB, *& dicto segmento* CB, *componitur. Producatur enim* AB, *versus dictum segmentum* CB, *ad* D, *sitque* BD, *recta æqualis segmento* CB; *& super tota* AD, *quadratum describatur* AE. *Ductæ autem diametro* DF, *ducantur* BG, CI, *parallelæ ipsi* DE, *secantes diametrum in* H, K, *punctis per quæ ducantur* LM, OP, *parallelæ ipsi* AD, *quæ secent priores parallelas in* N, Q. *Erunt igitur per corollarium* 1. *prop.* 4. *hujus lib.* OI, NQ, BM, LG, CP, *circa diametrum* DF, *quadrata. Et quia* OK, a *æqualis est rectæ* AC, *erit* OI, *quadratum segmenti* AC. *Rursus* b *quia* NH, *æqualis est rectæ* CB, *erit* NQ, *quadratum segmenti* CB, *ideoque quadrato* BM, *æquale, cum recta* CB, BD, *æquales sint. Quare recta* BH, HQ, *æquales sunt segmentis* CB; *atque adeò duo rectangula* AH, LQ, *comprehensa erunt sub mi.* AB, *& segmento* CB, c *cum* LH, *sit æqualis rectæ* AB. *Eadem ratione erunt duo rectangula* NG, HE, *comprehensa sub* AB, *&* CB, *cum* NH, HM, *rectæ* d *æquales sint rectis* CB, BD; *& rectæ* GH, EM, *mi. rectæ* FL, *hoc est, rectæ* LH, *hoc est, rectæ* AB. *Et quia quadrata* NQ, BM, *æqualia sunt; si addatur commune* KG, *erunt* BM, KG, *simul æqualia rectangulo* NG. *Quapropter quinque rectangula* AH, LQ, HE, BM, *& KG, gnomonem* RST, *componentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta* AB, *& segmento* CB. *Cum igitur gnomon* RST, *& quadratum* OI, *æqualia sint quadrato* AE; *erit rectangulum quater comprehensum sub data recta* AB, *& segmento* CB, *una cum quadrato reliqui segmenti* AC, *æquale quadrato linea* AD, *composita ex* AB, *& dicto segmento* CB. *Quamobrem, si recta linea secetur utcunque, &c. Quod demonstrandum erat.*

a 4. primi.
b 34. primi.
c 34. primi.
d 34. primi.

SCHOLIVM.

Aliter. Quia quadratum ex *AD*, *æquale* est quadratis ex AB, BD, una cum rectangulo sub AB, BD, bis, hoc est, quadratis ex AB,

c 4. sec.



ex AB, BC, una cum rectangulo bis sub
a 7. sec. DAB, BC: At quadrata ex AB, BC, a æ-
qualia sunt rectangulo bis sub AB, BC, una
cum quadrato ex AC; Erit quadratum ex AD, æquale rectangulo,
quater sub AB, BC, una cum quadrato ex AC. Quod demon-
strandum erat.

Secetur jam numerus 10. vtcunq; in 6. & 4. Numerus igitur 240.
qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato nume-
ro alterius partis 4. hoc est, numerus 256. æqualis est numero qua-
drato hujus numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta
parte 6. vt constat. Eodem modo numerus 160. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius
partis 6. hoc est, numerus 196. æqualis est quadrato numero hujus
numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. vt perspicuum est.

Potest propositio hæc 8. ita etiam proponi.

Si linea recta secetur utcunque, eique in rectum adjiciatur alia recta uni segmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compositæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub data linea, & adjecta sive dicto segmento, una cum quadrato alterius segmenti.

Nam recta AB, secta est in C, vtcunque, eique addita BD, segmento CB, æqualis, demonstratumq; est quadratum totius AD, æquale esse rectangulo quater comprehenso sub data linea AB, & adjecta BD, sive dicto segmento CB, vna cum quadrato alterius segmenti AC.

Item sic.

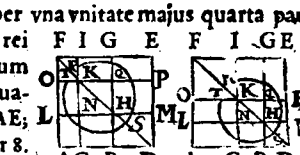
Si linea recta secetur bifariam, eique in rectum adjiciatur recta alia quantacunque: Quadratum totius compositæ lineæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub linea composita ex dimidia, & adjecta, & sub dimidia, una cum quadrato adjectæ.

Nam recta DC, secta est bifariam in B, eique addita CA, probatumque fuit quadratum totius AD, æquale esse rectangulo quater comprehenso sub AB, composita ex BC, dimidia, & adjecta AC, & sub dimidia CB, vna cum quadrato adjectæ AC.

Iam verò ex hac quoque propos. 8. inveniemus alia ratione numerum quadratum, cum quo datus quilibet numerus conficiat numerum similiter quadratum. Nam si ex quarta parte numeri dati dematur 1. reliquum erit latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 32. tollatur 1. ex ejus quarta parte 8. Reliquus enim numerus 7. dabit quadratum 49. cum quo datus numerus 32. efficit quadra-

tum

tum 81. Cujus latus 9. est semper vna vnitate majus quarta parte dati numeri. Facilis est hujusce rei ratio. Quoniam enim rectangulum AH, quater sumptum, cum quadrato OI, æquale est quadrato AE; si rectangulum AH, ponatur 8. nempe quarta pars dati numeri, at verò quadratum CH, adeoque & CB, ejus latus, erit linea AB. 8. vt ducta in CB, faciat 8. Ablata ergò 1. reliquum 1. erit AC, latus quadrati OI, 7. quod quæritur.



a 8. sec.

Vt autem fractiones vitentur, necesse est, datum numerum dividi posse in quatuor partes æquales, ita vt à 4. numeretur.

Contrà, inveniemus quoque numerum quadratum, à quo datus numerus subtractus relinquat numerum etiam quadratum. Si namq; ad quartam partem numeri dati addatur 1. conflabitur latus quadrati quæsiti. Vt si datus rursum sit numerus 32. si ad quartam ejus partem 8. adjiciatur 1. fiet latus 9. à cujus quadrato 81. si detrahatur datus numerus 32. remanebit quadratus numerus 49. cujus latus 7. semper est vnitate minus quarta parte dati numeri. Ratio est, quia si quarta pars gnomonis RST, qui ex quadrato AE, sublatus relinquit quadrarum OI, hoc est, si rectangulum AH, quod gnomonis RST, quartam partem esse demonstravimus, statuatur 8. quarta pars dati numeri 32. at quadratum BM, ideoq; & latus ejus BD, 1. erit linea AB, 8. vt dictum est, ac proinde totum latus AD, 9. ex cujus quadrato AE, quod est, 81. si auferatur gnomon RST, quem posuimus esse 32. reliquum fiet quadratum OI, 49. cujus latus AC, est 7. quandoquidem AB, erat 8. & CB, hoc est, BD, illi æqualis, 1. quod quidem latus AC, perpetuò vna vnitate minus est quarta parte numeri dati 32. ut dictum est.

THEOR. 9. PROPOS. 9. IX.

Si recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & ejus, quod à dimidia, & ejus, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

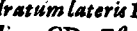
Secetur recta AB, *bifariam in* C, *& non bifariam in* D. *Dico, quadrata segmentorum inæqualium* AD, DB, *simul dupla esse quadratorum simul, quæ fiunt ex dimidia* AC, *& ex intermedia sectionum* CD. *Educatur enim ex* C, *ad* AB, *perpendicularis* CE, *quæ sit æqualis dimidiæ* AC, *vel* CB, *ducanturque rectæ* EA, EB. *Deinde ex* D, *ducatur quoque ad* AB, *perpendicularis* DF, *secans* EB, *in puncto* F, *per quod ducatur* FG, *parallela ipsi* AB, *secans* CE, *in* G, *ducaturque tandem* AF. *Quoniam igitur in triangulo* ACE, *la-*

a 6. primi. tera CA, CE, aqualia sunt, a erunt anguli CAE, CEA, aquales: b 32. primi. Est autem angulus ACE, rectus: Reliqui igitur b anguli alium rectum conficient, ideoque AEC, semirectus erit. Eadem ratione c 29. primi. gulus BEC, semirectus erit; ac propterea totus AEB, rectus. Rursus, quia trianguli FGE, angulus EGF, c aqualis est recto ECB, externus d 32. primi.

interno; d erunt reliqui duo anguli uni recto aquales: Ostensum autem est, angulum FEG, esse semirectum. Igitur & EFG, semirectus erit, propterea que anguli EFG, FEG; e 6. primi. aquales erunt, e ideoque & latera EG, GF, aqualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo BDF, latera BD, DF, esse aqualia. Nam angulus FDB, est rectus, & B, semirectus, &c. Itaque cum in triangulo ACE, angulus C, rectus sit, f erit quadratum lateris AE, aquale duobus quadratis laterum AC, CE: Atqui hac duo quadrata inter se sunt aqualia, quod & linea AC, CE, aquales sint. Igitur quadratum f 47. primi. lateris AE, duplum erit quadrati lateris AC. Rursus, quia in triangulo EGF, angulus G, rectus est, g erit quadratum lateris EF, aquale duobus quadratis laterum EG, GF: At duo hac quadrata inter se aqualia sunt, ob aqualitatem linearum EG, GF. Igitur quadratum lateris EF, duplum erit quadrati lateris FG, hoc est, quadrati g 47. primi. linea CD. Est enim CD, h recta recta FG, aqualis; cum CF, sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum AE, EF, dupla h 34. primi. sunt duorum quadratorum linearum rectarum AC, CD: Sunt autem duo quadrata rectarum AE, EF, i aqualia quadrato recta i 47. primi. AF; & quadratum recta AF, aquale duobus quadratis rectarum AD, DF. Igitur & duo quadrata rectarum AD, DF, dupla sunt duorum quadratorum rectarum AC, CD: Atqui quadratum recta DF, aquale est quadrato recta DB. Ostensum enim est, rectas DF, DB, esse aquales. Quare duo quoque quadrata rectarum AD, DB, segmentorum inaqualium, dupla sunt quadratorum rectarum AC, CD, dimidia linea, & intermedia sectionum. Si ergò recta linea secetur in aqualia, & non aqualia, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

k 4. sec. Aliter. Quia quadratum ex linea recta AD, descriptum, k æquale est quadratis descriptis ex AC, CD, una cum parallelogrammo rectangulo bis sub rectis AC, CD, comprehenso; si commune appo-



natur quadratum ex DB, erunt duo quadrata ex AD, DB, æqualia tribus quadratis ex AC, CD, DB, una cum rectangulo bis sub AC, CD, vel sub BC, CD; Atqui l 7. sec. quadrato ex DB, una cum rectangulo bis sub BC, CD, l æqualia sunt quadrata ex BC, seu AC, & ex CD. Quadrata igi-

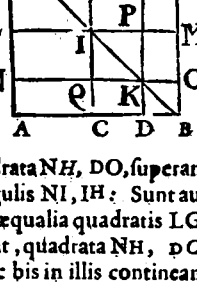
tur

tur ex AD, DB, æqualia sunt bis quadratis ex AC, CD: Ac propterea quadrata ex AD, DB, dupla sunt quadratorum ex AC, CD. Quod ostendendum erat.

Aliter ex Federico Commandino. Quoniam AC, ipsi CB, æqualis est & superat CB, ipsam CD, recta DB: superabit quoque AC, ipsam CD, eadem recta DB. Quare, ut ad 7. propos. hujus libri demonstravimus, quadrata rectarum AC, CD, æqualia sunt rectangulo sub AC, CD, bis una cum quadrato rectæ DB: Ac propterea quadrata rectarum AC, CD, & rectangulum sub AC, CD, bis una cum quadrato rectæ DB, dupla sunt quadratorum ex AC, CD: Sed quadratis rectarum AC, CD, una cum rectangulo sub AC, CD, bis [a] est æquale quadratum rectæ AD. Igitur & quadrata rectarum AD, DB, dupla sunt quadratorum ex AC, CD. [a] 4. sec.

Iam verò rursus numerus 10. dividatur æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. ut sit intermedia sectio numerus 2. ceu in propos. 5. est dictum. Quadrati numeri igitur 49. & 9 partium inæqualium 7. & 3. dupli sunt quadratorum 25. & 4. dimidii numeri 5. & numeri 2. inter duas sectiones, ut manifestum est.

Quod si lubeat, demonstrabimus & hanc 9. propos. ex ipsa constructione, vt præcedentes, hoc modo. Descripto quadrato AE, totius lineæ AB, ductaque diametro BF, ducatur per C, D, lateribus AF, BE, parallelæ CG, DH, secantes diametrum BF, in punctis I, K, per quæ lateribus AB, FE, parallelæ agantur LM, NO, secantes CG, DH, in Q, P. Quoniam igitur ex coroll. 1. propos. 4. hujus lib. quadrata sunt LG, QP, DO, CM, NH, [b] est q; LI, ipsi AC, & QK, ipsi CD, & NK, ipsi AD, æqualis; erunt NH, DO, quadrata partium inæqualium AD, DB, & LG, QP, quadrata dimidiatæ lineæ AC, & intermediæ sectionis CD. Dico illa horum esse dupla. Quoniam enim quadrata NH, DO, superant quadrata LG, QP, quadrato DO, & rectangulis NI, IH: Sunt autem quadratum DO, & rectangula NI, IH, æqualia quadratis LG, QP, ut mox demonstrabitur; liquido constat, quadrata NH, DO, quadratorum LG, QP, esse dupla, cum hæc bis in illis contineantur. Quod autem tria hæc rectangula DO, NI, IH, æqualia sint quadratis LG, QP, ita ostendetur. Rectangulum NI, [c] æquale est rectangulo QM, quod rectæ NQ, QO, [d] æquales sint æqualibus AC, CB. Igitur NI, complectitur quadratum QP: insuper KM. Si ergò KM, DO, IH, æqualia sint quadrato LG, erunt necessario DO, NI, IH, æqualia duob. quadratis LG, QP. Esse autem KM, DO, IH, æqualia quadrato LG. sic demonstrabimus. [e] Rectangula KM, DO, simul æqualia sunt ipsi PE, quod rectæ BM, ME, æquales sint, cum BM, æqua-



[b] 34. primi.

[c] 36. primi.

[d] 34. primi.

[e] 36. primi.

a 34. primi. æqualis sit ipsi CB, ob quadratum CM, a & ME, ipsi FL, hoc est, ipsi LI, ob quadratum LG, hoc est b ipsi AC. Addito ergò communi IH, erunt KM, DO, IH, æqualia ipsi IE, hoc est, quadrato LG: c quod IE, LG, æqualia sint, ob rectas LI. IM, d quæ æqualibus AC, CB, æquales sunt. Quod est propositum.

b 34. primi.

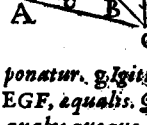
c 36 primi, d 34. primi.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

x

Si recta linea secetur bifariam, adjiciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adjuncta, & quod ab adjuncta, utraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod à dimidia & eius, quod à composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab una, descriptum sit, quadrati.

Secetur recta AB, *bifariam in* C, *& ei in rectam addatur* BD. *Dico duo quadrata rectarum* AD, BD, *simul dupla esse quadratorum simul, quæ ex rectis* AC, CD, *describuntur. Super* AB, *enim ex* C, *erigatur perpendicularis* CE, *quæ sit æqualis dimidiæ* AC, *vel* CB, *& jungantur rectæ* AE, EB. *Per* D, *deinde educatur* DF, *ipsi* CE, *parallela, occurrens rectæ* EB, *protractæ in* G: *& per* E, *ducatur recta* CD, *parallela* EF, *secans* DF, *in* F, *jungatur-*



que recta AG. *Ostendetur jam, angulum* AEB, *esse rectum, ut in præcedenti propos. &* CEB, *se-*

e 29. primi. D *mirectum;* e *ideoque ejus alternum* EGF, *semirectum quoque:* f *Est autem angulus* F, *rectus,*

f 34. primi. *cum in parallelogrammo* CF, *recto angulo* C, *opponatur.* g *Igitur & reliquus* FEG, *semirectus erit, & propterea ipsi*

g 32. primi. EGF, *æqualis. Quare recta* h EF, FG, *angulis* FEG, EGF, *oppositis, æquales quoque erunt. Eadem arte ostendes, rectas* BD, DG, *esse æquales, propterea quod angulus* BDG, *sit rectus &* BGD, *semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ* AE, i *æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium* AC, CE: *erit quadratum rectæ* AE, *duplum quadrati rectæ* AC. *Rursus quia quadratum rectæ*

h 6. primi.

i 47. primi.

k 47. primi. EG, k *quadratis æqualibus rectarum æqualium* EF, FG, *æquale est; erit quoque quadratum rectæ* EG, *duplum quadrati rectæ* EF, *hoc est rectæ* CD, l *cum* CD, *rectæ æqualis sit rectæ* EF. *Duo igitur quadrata rectarum* AE, EG, *dupla sunt quadratorum ex rectis* AC, CD, *descriptorum. Atqui duobus quadratis rectarum* AE, EG, *æquale est* m *quadratum rectæ lineæ* AG: *& quadrato rectæ* AG, *æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis* AD, DG, *describuntur. Quadrata ergò rectarum* AD, DG, *dupla sunt quadratorum ex rectis* AC, CD, *descriptorum. Cùm igitur quadratum rectæ* DG, *æquale sit quadrato rectæ* BD: *erunt quoque quadrata rectæ-*

l 34. primi.

m 47. primi.

rectarum AD, DB, *dupla quadratorum, quæ ex rectis* AC, CD, *describuntur. Itaque si recta linea secetur bifariam, &c. Quod ostendendum erat.*

SCHOLIVM.

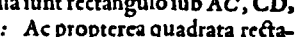
Aliter. Quia quadratum ex *AD*, *a* æquale est quadratis ex *AC*, *CD*, vna cum rectangulo bis sub *AC*, CD, vel sub BC, CD: si cõmune addatur quadratũ ex BD, erunt duo quadrata ex AD, *BD*, æqualia tribus quadratis ex *AC*, *CD*, *BD*, vna cum rectangulo bis sub *BC*, CD. a 4. sec.

b Sed quadrato ex BD, vna cum rectangulo bis sub *BC*, *CD*, æqualia sunt quadrata ex *CD*, BC, h.e. quadrata ex *AC*, CD. Igitur quadrata ex *AD*, BD, æqualia sunt quadratis ex *AC*, CD, bis: Ac proinde quadrata ex *AD*, BD, dupla sunt quadratorum ex *AC*, CD: Quod erat demonstrandum. b 7. sec.

Aliter ex Federico Commandino. Quoniam AC, ipsi *CB*, est æqualis, & superat *CD*, ipsam CB, recta BD: superabit quoque CD, ipsam *AC*, eadem recta BD. Quare, vt ad 7. propos. hujus lib. ostendimus quadrata ex AC, CD, æqualia sunt rectangulo sub AC, CD, bis, vna cum quadrato rectæ *BD*: Ac propterea quadrata rectarum *AC*, CD, & rectangulum sub AC, CD, bis, vna cum quadrato rectæ *BD*, dupla sunt quadratorum ex *AC*, CD. Atqui quadratis rectarum AC, *CD*, vna cum rectangulo sub AC, CD, bis, *c* æquale est quadratum rectæ *AD*. Igitur & quadrata rectarum *AD*, BD, dupla sunt quadratorum ex *AC*, CD. c 4. sec.

Numerus 10. bifariam secetur in 5. & 5. cui addatur numerus quivis 3. vt totus numerus compositus sit 13. Quadrati igitur numeri 169. & 9. horum numerorum 13. & 3. dupli sunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, vt perspicuum est.

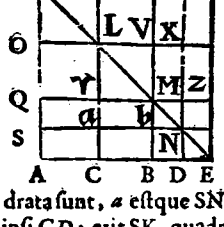
Sed & hæc propos. 10. facilè ex præcedenti 9 demonstrabitur, quemadmodum supra demonstrata fuit 6. ex 5. Sit enim recta *AB*, secta bifariam in C, eique addita recta quantacunque *BD*. Dico duo quadrata rectarum AD, BD, simul dupla esse duorum quadratorum rectarum AC, CD, simul. Addatur enim-



que rectæ *AD*, ad partes A, recta *AE*, quæ adjectæ *BD*, æqualis sit: erit tota ED, secta in *C*, bifariam, & in *B*, non bifariam, quod *EA*, *AC*, ipsis DB, *BC*, æquales sint. Recta quoque *EB*, rectæ *AD*, æqualis erit, quod *EA*, ipsi DB, sit æqualis, & *AB*, utrique communis. *d* Quadrata igitur rectarum EB, *BD*, hoc est, rectarum *AD*, BD, dupla erunt quadratorum rectarum *EC*, CB, hoc est, rectarum CD, *AC*, quod est propositum. d 9. sec.

Quod si lubeat eandem hanc propos. 10. demonstrare ex ipsa con-

constructione, quemadmodum præcedentem 9. ostendimus, fiet id hoc modo. Producta AD, ad E, ut DE, sit adjectæ lineæ BD, æqualis descriptoque quadrato AF, totius lineæ AE, ducantur per C, B, D, lateribus AG, EF, parallelæ CH, BI, DK, secantes ductam diametrum EG, in L, M, N, punctis, per quæ lateribus AE, GF, parallelæ agantur OP, QR, ST, secantes priores in V, X, Y, Z, a, b. Quoniam igitur ex coroll. 1. prop. 4. hujus lib. omnia rectangula circa diametrum EG, quadrata sunt, [a] estque SN, ipsi AD, æqualis, & OL, ipsi AC, & a N, ipsi CD: erit SK, quadratum rectæ AD, & DT, quadratum rectæ DE, sive BD, & OH, a X, quadrata rectarum AC, CD. Dico quadrata SK, DT, simul dupla esse quadratorum OH, a X, simul. Quoniam enim quadrata SK, DT, superant quadrata OH, a X, quadrato DT, & rectangulis SL, LK: Sunt autem quadratum DT, & rectangula SL, LK, æqualia quadratis OH, a X, ut mox demonstrabitur; liquido constat, quadrata SK, DT, quadratorum OH, a X, dupla esse, cum hæc in illis contineantur bis. Quod autem tria hæc rectangula DT, SL, LK, quadratis OH, a X, æqualia sint, ita patebit. Rectangulum QL, [b] æquale est quadrato OH, ob lineas QO, OG, quæ æquales sunt; [c] propterea quod QO, ipsi YL, æqualis est, & YL, ipsi OG, ob æqualia quadrata YV, OH, æqualium laterum OL, LV. Item [d] SY, ipsi a M, & LI, ipsi YV, & VK, ipsi VZ, & DT, ipsi b Z: igitur quinque rectangula QL, SY, Ld, VK, DT, hoc est, tria rectangula DT, SL, LK, æqualia sunt quinque rectangulis OH, a M, YV, VZ, b Z, hoc est, duobus quadratis OH, a X. Quod est propositum.



a 34. primi.

b 36. primi.

c 34. primi.

d 34. primi.

PROBL. 1. PROPOS. 11.

Datam rectam lineam secare, ut comprehensum sub tota & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

Data sit recta AB, *quam secare oportet in duas partes, ita ut rectangulum comprehensum sub tota* AB, *& altero ejus segmento, nempe minori, æquale sit quadrato reliqui segmenti, nimirum majoris. Describatur ex* AB, *quadratum* AC, *& diviso latere* AD; *quod cum linea data* AB, *angulum rectum efficit, bifariam in* E, *jungatur recta* EB, *cui ex* EA, *producta æqualis sumatur* EF; *& ipsi* AF, *abscindatur ex recta* AB, *data æqualis* AG. *Est enim* AB *major quàm* AF. *Nam cum* EB, *sit æqualis ipsi* EF, *ex constructione* [e] *sint autem latera* AE, EB, *majora latere* EB; *Erunt*

e 20. primi.

quoque

quoque rectæ EA, AB, *majores rectæ* EF: *ac proinde ablata communi* AE, *reliqua* AB, *major erit, quàm reliqua AF. Dico rectam AB, sectam esse in* G, *ita ut rectangulum comprehensum sub* AB, BG, *æquale sit quadrato rectæ AG; adeo ut* AG, *sit majus segmentum, &* BG, *minus. Ducatur enim per* G, *recta HI, parallela rectæ* DF, *secans CD, in l. Ac per F, ducatur ipsi* AG, *parallela* FH, *secans HI, in H. Erit igitur parallelogrammum* AH, *quadratum segmenti AG, cum omnia ejus quatuor latera sint æqualia, quippe cum* a FH, GH, *æqualia sint oppositis* AG, *AF, æqualibus; omnesque anguli ejusdem recti, ob rectum* A, *ut ad defin. 1. hujus libri estendimus. Rectangulum quoque* CG, *comprehensum sub* AB, *&* a 34. primi.

segmento BG; *quod AB, æqualis sit ipsi* BC. *Itaque probandum est, rectangulum* CG, *& quadratum* AH, *æqualia esse. Quoniam igitur recta* DA, *divisa est bifariam in* E, *& ei addita in* A *rectum AF;* b *erit rectangulum sub* DF, FA, *hoc est, rectangulum* DH (*cum* FH, *sit æqualis ipsi* FA;) b 6. sec. *una cum quadrato dimidiæ* AE, *æquale quadrato rectæ* EF, *hoc est, quadrato rectæ* EB, *quæ rectæ* EF, *æqualis est: Est autem quadratum rectæ* EB, c *æquale quadratis rectarum AE, AB. Quare rectangulum* DH, *una cum quadrato rectæ* AE, *æquale quoque est quadratis rectarum AE, AB. Dempto ergò communi quadrato rectæ AE, remanebit rectangulum* DH, *æquale quadrato rectæ AB, hoc est, quadrato* AC. *Ablato igitur rursus communi rectangulo* AI, *remanebunt rectangulum* CG, *& quadratum* AH, *inter se æqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam* AB, *secuimus &c. Quod erat faciendum.* c 47. primi.

SCHOLIVM.

Hoc problema nulla ratione accommodari potest numeris. Non enim numerus ullus in duos potest numeros dividi, ut numerus productus ex toto in alteram partem æqualis sit quadrato alterius partis, ut demonstrabimus ad propos. 14. lib. 9. Vbi etiam decem theoremata antecedentia hujus lib. in numeris demonstrabimus. Clariusque ad propos. 29. ejusdem lib. 9. ostendemus, problema hoc 11. nulla ratione posse numeris accommodari.

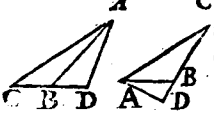
Praxis autem hujusce problematis non est difficilis. Nam ad extremum *A*, ubi terminari debet majus segmentum lineæ datæ AB, excitata perpendiculari *AD*, ipsi datæ lineæ AB, æquali, eaque secta in E, bifariam; si ad intervallum EB, resecetur EA, producta in F, erit *AF*, majori segmento AG, æqualis, ut demonstratum est.

THEOR.

THEOR. 11. PROPOS. 12.

xij In amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subtendente, majus est quadratis, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari propè angulum obtusum.

Triangulum ABC, habeat angulum ABC, obtusum & ex A, in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AC, quod obtuso angulo opponitur, majus esse quadratis laterum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, hoc est, quadratum lateris AC, æquale esse duobus quadratis laterum AB, BC, una cum rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso.



Cùm enim recta CD, divisa sit in B, utcunque a *erit quadratum rectæ CD, æquale duobus quadratis rectarum CB, BD, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub* b *CB, ED: b Est autem quadratis rectarum CD, DA, æquale quadratum rectæ AC. Quare & quadratum rectæ AC, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub* c *CB, BD. Cùm igitur quadratis rectarum BD, DA, c æquale sit quadratum rectæ AB; erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Quod est propositum. In amblygoniis ergò triangulis, quadratum, quod fit. &c. Quod erat ostendendum.*

a 4. *secu.*

b 47. *primi.*

c 47. *primi.*

SCHOLIVM.

Iam hoc loco demonstravit Euclides, quanto majus sit in triangulo amblygonio quadratum lateris angulo obtuso oppositi, quadratis aliorum duorum laterum: In sequenti autem propos. 13. ostendet, quanto quadratum lateris acuto angulo oppositi minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, vt ad initium scholii propos. 47. lib 1. monuimus.

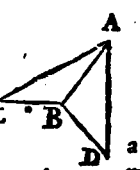
Quoniam verò assumpsit Euclides, perpendicularem ductam ex *A*, cadere in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum, ideo paucis id demonstrabimus. Sit in triangulo ABC, angulus *ABC*, obtu-

obtusus, & latus *CB*, ad partes *SB*, protractum. Dico perpendicularem ex *A*, deductam cadere extra triangulum in latus *CB*, protractum, cujusmodi est recta *AD*. Si enim caderet intra triangulum, qualis est recta *AE*, essent duo anguli *ABE*, *AEB*, duobus rectis majores, cum ille sit obtusus, hic vero rectus. Quod est contra propos. 17. l. 1 Si vero caderet extra triangulum in latus *BC*, productum ad partes *C*, qualis est recta AF, essent rursus in triangulo *ABF*, duo anguli *ABF*, *AFB*, majores duobus rectis, cum ille sit obtusus, hic vero rectus. Quod est absurdum.

Sed & hoc theorema verum est.

Si in triangulo quadratum unius lateris majus sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, obtusus erit.

In triangulo *ABC*, quadratum lateris *AC*, majus sit quadratis laterum *AB*, *BC*. Dico angulum B, quem latus AC, subtendit, esse obtusum. Ducatur enim ex *B*, ad *AB*, perpendicularis *BD*, lineæ *BC*, æqualis, jungaturque recta *AD*. Quoniam igitur quadratum ex *AD*, *a* æquale est quadratis ex *AB*, *BD*, hoc est, ex *AB*, *BC*: Ponitur autem quadratum ex *AC*, majus quadratis ex *AB*, *BC*; Erit quadratum ex *AD*, minus quadrato ex *AC* & idcirco recta *AD*, minor quam recta *AC*. Itaq; quia latera *AB*, *BC*; trianguli *ABC*, æqualia sunt lateribus *AB*, BD, trianguli *ABD*, utrumq; utriq;, & basis AC, major est base *AD*: *b* Erit angulus *ABC*, major angulo *ABD*: Sed *ABD*, rectus est. Igitur *ABC*, recto major, & obtusus erit. Quod est propositum.



a 17. primi.

b 25. primi.

Quin etiam conversum hujus propos. 12. demonstrabimus; nimirum.

Si in triangulo quadratum unius lateris majus sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab opposito angulo demissa abscindit: Demissa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, obtusus.

In triangulo *ABC*, ad latus CB, protractum demittatur ex opposito angulo A, recta AD, sitque quadratum lateris AC, majus, quam quadrata laterum AB, BC, rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso. Dico AD, ad CD, esse perpendicularem, & angulum ABC, obtusum. Si enim AD, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad

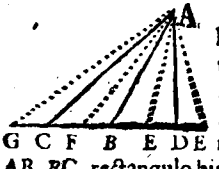
CB. perpendicularis, quam dico cadere necessario in CB, productam ad partes B. Cadat enim, si fieri potest, in B. ita ut AB, sit ad CB,
a 47. pri. mi. perpendicularis. Erit igitur a quadratum ex AC, æquale quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cum majus ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, in CB, demissa in punctum B.

Cadat deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, demissa, in latus
b 47. pri. mi. BC, qualis est AF. Erit igitur b quadratum ex AC, æquale quadratis ex AF, FC: Ponitur autem quadratum ex AC, majus quadratis ex AB, BC. Igitur & quadrata ex AF, FC, majora erunt quadratis ex AB, BC, quod est absurdum. Sunt enim quadrata ex AB, BC, majora quadratis ex AF, FC, quod recta AB, recto angulo AFB,
c. 19. pri. mi. opposita c major sit quam AF, & BC, tota major parte FC. Perpendicularis ergo ex A, demissa non cadit in CB.

Cadat tertio, si fieri potest, perpendicularis ex A, ad latus BC, demissa in C, ita ut AC, sit perpendicularis. Erit igitur quadratum
d 47. pri. mi. ex AB, d æquale quadratis ex AC, CB, ac proinde quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB, & propterea multo minus quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cum ponatur majus. Perpendicularis ergo ex A, & BC, demissa non cadit in C.

Cadat quarto, si fieri potest, perpendicularis ex A, in BC, protractam ad partes C, qualis est AG. Quoniam igitur duo anguli
e 17. pri. mi. AGC, ACG, e minores sunt duobus rectis, estque AGC, rectus; erit ACG, minor recto, ac proinde AGB, obtusus. Recta ergo AB, f
f 19. pri. mi. major erit quam AC, & propterea quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB, ac proinde multo minus quadratis ex AB, BC: sed & majus ponitur, quod est absurdū. Cum ergo perpendicularis ex A, demissa ad CB, nō cadat in B, neq; inter C, B, neq; in C, neq; extra C, cadet extra B, qualis est AD, ut demonstrabitur: Quare
g 17. pri. mi. angulus AB E g acutus erit, & AEC, obtusus, quod secundo loco proponitur, demonstrandum.

Cæterum angulum ABC, esse obtusum, si quadratum rectæ AC majus sit quadratis rectarum AB, BC, facilius demonstravimus in proximo theoremate hujus scholij. Ex quo fit (ut ad initium hujus scholij ostendimus) perpendicularem ex A, ad CB, demissam cadere extra triangulum ABC, ad partes anguli obtusi.



Quod autem AD, sit ad CB, perpendicularis, ita demonstrabimus. Si non est, ducatur AE, ad CB, perpendicularis cadens ultra B, ut ostendimus. Quoniam igitur angulus ABC, obtensus est obtusus, erit quadratum rectæ AC, majus quam quadrata rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BE: Sed & quadratum ejusdem rectæ AC, majus ponitur, quam quadrata earundem rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD. Igitur

tur quadrata ex AB, BC, una cum rectangulo sub CB, BD, comprehenso æqualia erunt quadratis ex AB, BC, una cum rectangulo sub CB, BE, bis comprehenso: & ablatis quadratis communibus rectarum AB, BC, rectangulum bis sub CB, BE, comprehensum æquale erit rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, ac proinde & rectangulum sub CB, BE, semel comprehensum æquale erit rectangulo semel sub CB, BD, cõprehenso, & recta BE, rectæ BD, æqualis, pars toti, vel totum parti, quod est absurdum. Est ergo AD, ad CD, perpendicularis, & nulla alia, quod est propositum.

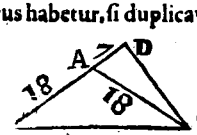
Iam vero, quoniam neq; hoc duodecimum theorema, neq; sequens 13. per numeros, quando libet, explicari potest, quod posito uno latere trianguli quotlibet pãrtium æqualium, alia latera, eorumq; partes à perpendicularibus lineis factæ plerumq; numeris exprimi nequeant, sed sint lineæ illi lateri incommensurabiles: quod in præcedentibus propositionibus non accidebat, quippe cum, posita divisa recta linea quotlibet partium æqualium, ejus partes statui possint pro libito ei commensurabiles, ut in exemplis numerorum adhibitis factum est, præscribemus regulas quasdam, quibus Geometrice triangula amblygonia atque oxygonia (quotquot quis optaverit) constituantur ejusmodi, ut omnia latera, partesque eorum à lineis perpendicularibus factæ sint lineæ commensurabiles: atq; adeo veritas utriusq; theorematis in numeris quoq; appareat. Hic autem de amblygoniis triangulis agemus, & in scholio sequẽtis propositionis de Oxygoniis. Quoniam autem amblygonium triangulum est vel Isosceles, in quo tertium latus semper a majus est, quod obtuso angulo opponatur, vel scalenum (æquilaterum enim esse non potest, ut ad definitionem 27. lib. 1. diximus) & in scaleno linea perpendicularis cadit vel in minimum latus productũ, vel in medium, proponemus tres regulas. Prima exhibebimus triangulum amblygonium Isosceles laterum commensurabilium, in quo etiam segmentum utriuslibet laterum æqualium producti inter perpendicularem, & angulum obtusum eisdem lateribus commensurabile sit. Secunda constituemus triangulum amblygonium scalenum laterum etiam commensurabilium, & in quo segmentum minimi lateris producti in perpendicularem, & angulum obtusum lateribus ejusdem sit commensurabile. Tertia deniq; triangulum amblygonium scalenum proponemus commensurabilium laterũ, & in quo segmentum lateris medii producti inter lineam perpendicularem & obtusum angulum eisdem lateribus commensurabile existat.

a 19. primi.

REGVLA I.

Ad constituendum triangulum amblygonium Isosceles laterum commensurabilium, in quo segmentum exterius alterius laterũ æqualium producti inter perpendicularem lineam, & angulum obtusum eisdem lateribus quoque sit commensurabile; statuatur segmẽ-

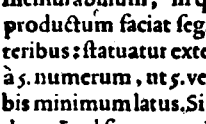
tum exterius tot partium æqualium, ut earum numerus à 7. numeretur, ut 7. vel 14. vel 21. vel 28. &c. Deinde utrumvis laterum æqualium ponatur dicti segmenti duplũ superquadrupartiens septimas, maximum autem obtuso angulo oppositum ejusdem segmẽti quadruplum superbipartiens septimas. Vt in triangulo *ABC*, ducta sit *CD*, ad *BA*, latus productum. Si igitur *AD*, constituatur partium 7. & utrumvis laterum *AB*, *AC*, partium 18. qui numerus habetur, si duplicaveris 7. addideris quę $\frac{2}{7}$ ipsius. Latus vero *BC*,



partium 30. quem numerum habebis, si quadruplicaveris 7. adjunxeris q; $\frac{2}{7}$ ipsius: erit triangulum *ABC*, quod quæritur. In hoc enim triangulo quadratum lateris *BC*, est 900. cui æqualia sunt quadrata laterum *AB*, *AC*, nempe 324. 324. una cum rectangulo bis comprehenso sub AB, AD, hoc est, cum 126. 126. Hæc enim conficiunt quoque summam 900. Quam ob rem ut in hoc scholio ostendimus, erit ducta CD, ad BD, perpendicularis & angulus BAC, obtusus. Quod si singulos numeros hujus trianguli per quemlibet numerum multiplices, procreabis alias lineas trianguli commensurabiles prioribus tamen proportionales. Vt si inventos numeros duplices, efficies *AD*, 14. & tam AB. quam AC, 36. ut BC, 60. Propositum quoq; triangulum reperies, statuendo segmentum exterius AD, quotcunque partium, etiamsi à 7. non numerentur: sed tunc latera erunt numeri integri cum fractionibus. Idem deniq; triangulum offendes, statuendo latus quodcunque, à quo incipere vis, quotlibet partium, dummodo maximum fiat segmenti AD, quadruplum superbipartiens septimas, utrumvis autem æqualium sit ejusdem segmenti duplum superquadrupartiens septimas.

REGVLA II.

Vt efficiatur triangulũ amblygonium Scalenum laterum commensurabilium, in quo perpendicularis cadens in minimum latus productum faciat segmentum exterius commensurabile etiam lateribus: statuatur exterius segmentum quotuis partium æqualium à 5. numerum, ut 5. vel 10. vel 15. vel 20. &c. Quibus si addas $\frac{3}{5}$ habebis minimum latus. Si vero easdem partes dicti segmenti triplices, ad dasq; $\frac{1}{5}$ vel si partes minimi lateris inventas duplices, efficies medium latus. Si denique partes easdem dicti segmenti quadruplices, reperies latus maximum. Vt si in appositio triangulo segmentum



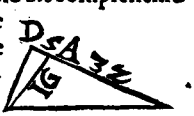
AD, constituatur 10. erit AB, 16. AC, 32. & BC, 40. ubi etiam vides, quadrato lateris BC, quod est 1600. æqualia esse quadrata laterũ *AB*, *AC*, nimirum 256. 1024. una cum rectangulo bis sub AB, AA, comprehenso, id est, cum 160. 160.

Ex

Ex quo fit, CD, esse ad BD, perpendicularem, & angulum BAC, obtusum, ut supra in hoc scholio ostendimus. Iam si singulos numeros inventos multiplices per quemvis numerum, gignentur alii numeri illis proportionales, qui idem præstabunt. Vt si eos duplices, erit latus AB, 32. AC, 64. & BC, 80. qui quidem numeri reperientur eadem arte, si exterius segmentum AD, statuas partium 20. quæ duplam quoque proportionem habent ad priores partes 10. Sic si eosdem numeros triplices, efficies segmentum exterius AD, partium 30. latus AB, 48. AC, 96. BC, 120, & sic deinceps.

REGVLA III.

Pro triangulo amblygonio Scaleno commensurabilium laterum, in quo perpendicularis linea in medium latus productum cadens efficiat quoque segmentum lateribus trianguli commensurabile: accipiatur rursum exterius segmentum quotlibet partium à 5. numeratarum, ut in præcedenti regula. Quas si triplices, addasque $\frac{1}{5}$ produces minimum latus: Si vero easdem multiplices per 8. adjungasq; $\frac{3}{5}$ habebis latus medium: Si deniq; easdem per 8. multiplices, produces maximum latus. Vt si in triangulo proposito segmentum AD, fiat partium 5. erit AB, 16. AC, 32. & BC, 40. Atq; ita quadrato lateris BC, nimirum 1600. æqualia existent quadrata laterũ AB, AC, nempe 256. 1024. una cũ rectangulo bis comprehenso sub AC, AD, hoc est, cum 160. 160. Ac proinde BD, ad CD, erit perpendicularis, angulusque BAC, obtusus, ut in hoc scholio supra demonstravimꝰ. Quod si numeros inventos per quemvis numerũ multiplices, invenies alios numeros laterũ illis proportionales, in quibus eadẽ hæc propos. 12. examinabitur. Vt si eos quadruplices, efficies segmentum exterius AD, partium 20. latus AB, 64. AC, 128. & BC, 160. Si vero eosdem illos priores numeros per 10. multiplices, erit segmentum exterius AD, 50. latus AB, 160. AC, 320. & BC, 400. Atque ita in infinitum.



Cave autem, existimes, posito latere aliquo trianguli amblygonij, vel segmento exteriori, quotlibet partium æqualium, alia latera cum illo servare necessario proportiones illas, quas in regulis prædictis explicavimus: adeo ut cognito uno, reliqua etiam cognoscantur. Hoc enim falsum est, cum illa variari possint mille modis, & alias atque alias proportiones habere. Itaque ex tribus præscriptis regulis solum colligendum erit, ex lineis rectis, quæ dictas proportiones servent, constitui posse triangulum amblygonium, una cum segmento exteriore, in quo veritas, propositionis 12. possit examinari.

THEOR. 12. PROPOS. 13.

13. III. In oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso, & ab uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

Sint omnes anguli trianguli A B C, *acuti*, *& ex* A, *perpendicularis* A D, *demissa cadant in latus* B C. *Dico quadratum lateris* A B, *quod acuto angulo* A C B, *opponitur*, *minus esse quadratis laterum* A C, C B, *circa angulum acutum dictum*, *rectangulo bis comprehenso sub* B C, C D, *hoc est*, *quadratum lateris* A B, *una cum rectangulo bis comprehenso sub* B C, C D, *æquale esse duobus quadratis laterum* A C, C B. *Cum enim recta* B C, *divisa sit in* D, *utcunq*, *erunt quadrata rectarum* B C, C D, a *æqualia rectangulo comprehenso bis sub* B C, C D, *& quadrato recta* B D. *Addito ergo communi quadrato recta* D A, *erunt triaquadrata rectarũ* B C, C D, D A, *æqualia rectãgulo bis cõprehenso sub* B C, C D, *& duobus quadratis rectarũ* B D, D A. *Duobus autẽ quadratis rectarũ* C D, D A, b *æquale est quadratũ recta* C A. *Duo igitur quadrata rectarũ* B C, C A, *æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub* B C, C D, *& duobus quadratis rectarum* B D, D A. *Cum ergo duobus quadratis rectarum* B D, D A, c *æquale sit quadratum recta* A B: *erunt duo quadrata rectarum* B C, C A, *æqualia rectangulo bis comprehenso sub* B C, C D, *& quadrato recta* A B, *quod est propositum. Eodem modo ostenditur*, *quadrata rectarum* A B, B C, *æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub* C B, B D, *& quadrato recta* A C, *hoc est*, *quadratum lateris* A C *minus esse quadratis laterum* A B, B C, *rectangulo comprehenso bis sub* C B, B D. *In oxygoniis ergo triangulus*, *quadratum à latere*, *&c. Quod demonstrandum erat*,

a 7. *sec.*

b 47. *primi.*

c 47. *primi.*

SCHOLIVM.

Itaq; ex tribus propositionibus, nempe 47. lib. 1. & 12. atq; 13. hujus lib. cognoscimus, quantum sit quadratum cujusuis lateris trianguli cum quadratis aliorum duorum laterum comparatum, nempe an sit illis æquale, an majus, minus ve, & quanto majus sit, aut minus, prout videlicet angulus assumpto lateri oppositus fuerit rectus, vel obtusus, aut acutus.

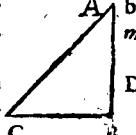
Quam-

Quamvis autem Euclides theorema hoc proponat de triangulis duntaxat oxygoniis, quæ scilicet omnes angulos habent acutos; idem tamen verum etiam est in triangulis rectangulis, & amblygoniis, ut constat ex posterioribus duobus triangulis in schemate propositis. Sunt enim in hisce triangulis necessario duo reliqui anguli acuti, ut perspicue colligi potest ex propos. 17. vel 32. primi lib. Hoc solum observandum est in triangulis rectangulis, & amblygoniis, perpendicularem duci debere ab angulo recto, vel obtuso, in oxygoniis vero à quolibet. Ita enim semper cadet perpendicularis intra triangulum, ut Euclides in demõstratione assumpsit. Quod quidem facile demõstrabitur hac ratione. Sint in triangulo ABC, duo anguli ABC, ACB, acuti; angulus vero BAC, rectus, vel obtusus, acutusve. Dico perpendicularem ex A, demissã cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in CB, protractam ad partes B, cujusmodi est recta AE, esset in triangulo ABE, angulus exterior ABC, acutus a major interno & opposito recto AEB, quod est absurdum. Si vero caderet extra BC, productam ad partes C, qualis est recta AF, in idem incideremus absurdum, ut manifestum est.

a 16. primi.

Idem hoc theorema in triangulis rectangulis, & obtusangulis demonstrat Federicus Commandinus, etiamsi perpendicularis AD, non cadat in latus BC, sed vel eadem sit, quæ latus AB, ut in rectangulis, vel extra triangulum cadat, ut in obtusangulis accidit, ceu in scholio propos. præcedentis demonstravimus: quod tum demum accidet, cum perpendicularis non ab angulo recto, vel obtuso, sed ab altero acutorum demittitur.

Sit triangulum rectangulum ABC, cujus angulus B, sit rectus; & ex angulo A, acuto ad BC, perpendicularis ducatur AD, quæ eadem erit, quæ latus AB, propter angulum rectum B. Dico quadratum lateris AB, acutum angulum C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo bis comprehenso sub latere CB, in quod perpendicularis cadit, & sub linea CD, quæ interijcitur inter perpendicularem AD, & acutum angulum C. Cum enim quadrata ex AB, CB, b æqualia sint quadrato ex AC, addito communi quadrato ex CB, erunt tria quadrata, nempe quod ex AB, & duplum ejus, quod ex CB, æqualia duobus quadratis ex AC, CB: At quadratum ex CB, idem est quod rectangulum sub CB, CD. Igitur & quadratum ex AB, una cum rectangulo bis sub CB, CD, æquale est quadratis ex AC, CB; Ac proinde quadratum ex AB, minus est, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis sub CB, CD. Quod est propositum.



b 4. primi.

Rursus sit triangulum obtusangulum ABC, cujus angulus

B, obtusus; & ex angulo acuto A, ad BC, perpendicularis ducatur AD, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris AB, acutum angulum C, subtendentis minus esse, quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo comprehenso bis sub CB, & CD. Quoniam enim

a 47. primi.

quadrata ex AD, CD, *a* æqualia sunt quadrato ex AC; addito quadrato ex CB, communi, erunt tria quadrata ex AD, CD, CB, æqualia duobus quadratis ex AC, CB: At quadratum ex CD, *b* æquale est quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis sub CB, BD. Igitur & duo quadrata ex AD, CB, una cum quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis sub CB, BD, æqualia sunt quadratis ex AC, CB: Sunt autem quadrata ex AD, BD, æqualia *c* quadrato ex AB. Quare quadratum quoque ex AB, & duplum quadrati ex CB, una cum rectangulo bis sub CB, BD, æqualia sunt quadratis ex AC, CB. Atqui quadrato ex CB, una cum rectangulo sub CB, BD, *d* æquale est rectangulum sub CD, CB. Ac propterea duplo quadrati ex CB, una cum rectangulo bis sub CB, BD; æquale est rectangulum bis sub CD, CB. Igitur & quadratum ex AB, una cum rectangulo bis sub CB, CD, æquale est quadratis ex AC, CB. Ac proinde quadratum ex AB, minus est, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis sub CB, CD. Quod est propositum.

b 4. sec.

c 47. primi.

d 3. sec.

Aliter, & brevius. Quoniam quadratum ex AC, majus *e* est, quam quadrata ex AB, BC, rectangulo bis sub CB, BD, comprehenso, hoc est, quadratum ex AC, æquale est quadratis ex AB, BC, una cum rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso; erit quadratum ex AB, minus quam quadratum ex AC, quadrato ex BC, & rectangulo sub CB, BD, bis: Ac proinde si quadrato ex AC, addatur quadratum ex BC, erit quadratum ex AB, minus quam quadrata ex AC, BC, quadrato ex BC, bis sumpto, & rectangulo bis sub CB, BD, comprehenso. Cum ergo quadrato ex BC, una cum rectangulo sub CB, BD, contento, *f* æquale sit rectangulum sub CB, CD, contentum; erit quoque quadratum ex AB, minus quam quadrata ex AC, CB, rectangulo comprehenso bis sub CB, CD. Quod est propositum.

e 12. sec.

f 3 sec.

In scholio quodam antiquo demonstratur sequens theorema, instar illius, quod nos in scholio præcedentis propos. secundo loco demonstravimus. Videlicet.

Si in triangulo quadratum unius lateris minus sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, acutus erit.

In triangulo ABC, quadratum lateris AB, minus sit, quam quadrata laterum AC, CB. Dico angulum C, quem dictum latus subten-

subtendit esse acutum. Ducatur enim ex C, ad AC, perpendicularis CD, lineæ CB, æqualis, iungaturque recta AD. Quoniam igitur quadratum ex AD, *a* æquale est quadratis ex AC, CD, hoc est, ex AC, CB: Ponitur autem quadratum ex AB, minus quadratis ex AC, CB; erit quadratum ex AD, maius quadrato ex AB; & ideo recta AD, maior quam recta AB. Itaque quia duo latera AC, CD, trianguli ACD, æqualia sunt duobus lateribus AC, CB, trianguli ACB, vtrumque vtrique, & basis AD, maior base AB; *b* Erit angulus ACD, maior angulo ACB: Sed ACD, rectus est, ex constructione. Ergo ACB, recto minor, & acutus erit.

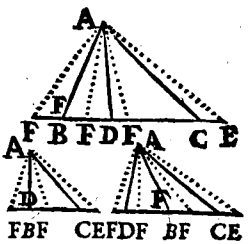
a 47. primi.

b 25. primi.

Sed & conuersum huius propos. 13. ostendemus, nimirum.

Si in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub recta linea inter angulum priori lateri oppositum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri oppositio demissam: Linea hæc demissa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli prioriilli lateri oppositus, acutus.

In triangulo ABC, ad latus BC, demittatur ex angulo opposito A, recta AD; sitq; quadratum lateris AB, minus quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo sub BC, CD, bis comprehenso. Dico AD, esse perpendicularem ad *BC*, & angulum ACB, acutum. Si namque AD, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad BC, perpendicularis, quam dico necessario cadere citra punctum *C*, versus *B*, hoc est, vel in latus BC, vel in punctum B, vel in latus *BC*, versus B productum. Cadat enim, si fieri potest, in *C*, ita, vt AC, sit ad *BC*, perpendicularis. Erit igitur *c* quadratum ex AB, æquale quadratis ex AC, CB, quod est absurdum, cum minus ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, deducta ad *BC*, in punctum C.



c 47. primi.

Cadat deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, demissa vltra C, in E, qualis est AE. Erit igitur *d* quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB: Ponitur autem quadratum ex AB, minus quadratis ex AC, CB. Igitur & quadrata ex AE, EB, minora erunt

d 47. primi.

erunt quadratis ex AC,CB. Cum ergo quadratum ex AC, *a* æquale
a 47. primi. sit quadratis ex AE,EC; erunt quoque quadrata ex AE,EB, minora quadratis ex AE,EC,CB: Et ablato communi quadrato rectæ *AE*, erit reliquum quadratum ex EB, minus quoque quadratis ex EC,
b 4. sec. CB, quod est absurdum. Cum enim quadratum ex EB, *b* æquale sit quadratis ex EC,CB, vna cum rectangulo bis comprehenso sub EC, CB, maius erit quadratum ex EB, quadratis ex EC, CB. Non ergo perpendicularis cadit vltra C: Sed neque in C, cadit, vt ostendimus. Igitur cadet citra punctum C, qualis est AD, vt demonstrabitur, ac propterea *c* angulus ACB, acutus erit. Quod secundo loco proponitur demonstrandum.

Cæterum angulum ACB, esse acutum, si quadratum rectæ AB, minus sit quadratis rectarum AC,CB, facilius demonstrauimus in proximè antecedente theoremate huius scholij. Ex quo fit, (quemadmodum in coroll. 2. propos. 17. lib. 1, ostensum est) perpendicula-
c 17. primi. rem ex A, ad BC, demissam cadere citra angulum ACB, acutum versus B.

Quod autem AD, sit ad BC, perpendicularis, ita ostendemus. Si non est, sit AF, ad BC, perpendicularis, eadens citra punctum C, vt probatum est, vbicunque hoc contingat, siue intra triangulum, siue in punctum B. siue extra triangulum. (In secundo tantum triangulo non dicet aduersarius, perpendicularem cadere in B; quia eadem esset quæ *AD*, quod ille negat.) Quia ergo angulus ACB, ostensus fuit acutus, *d* erit quadratum ex *AB*, minus, quam quadrata ex *AC*, CB,
d 13. sec. rectangulo bis comprehenso sub BC, CF, hoc est, quadratum ex AB, vna cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CF, æquale est quadratis ex *AC*, CB: Ponitur autem quadratum idem ex AB, minus quoq; quam quadrata ex AC. CB, rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, hoc est, quadratum idem ex AB, vna cum rectangulo bis contento sub BC, CD, æquale ponitur quadratis ex *AC*, CB. Igitur quadratum ex AB, vna cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, æquale erit quadrato eidem ex AB, vna cum rectangulo comprehenso bis, sub BC, CF: Et ablato communi quadrato rectæ *AB*, rectangulum sub BC, CD, bis comprehensum æquale erit rectangulo bis sub BC, CF, comprehenso: ac proinde & rectangulum semel comprehensum sub BC, CD, æquale erit rectangulo semel comprehenso sub BC, CF, ideoque & rectæ *CD*, CF, æquales erunt pars & totum. Quod est absurdum. Est igitur *AD*, ad BC, perpendicularis, & non alia. Quod est propositum.

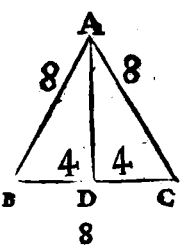
Quemadmodum autem in scholio superioris propositionis triangula amblygonia construximus laterum, & linearum commensurabilium, in quibus per numeros veritas propositionis 12. examinari possit, ita hoc loco oxygonia triangula constituemus laterum, atque linearum commensurabilium, in quibus huius 13. propos. ve-

ritas

ritas explicetur. Quia vero triangulum oxygonium est vel æquilaterum, vel Isosceles, vel Scalenum: complectemur totam hanc doctrinam septem regulis. Prima de triangulo æquilatero oxygonio aget. Secunda de Isoscele, in quo perpendicularis cadit in tertium latus inæquale, siue maius illud sit, siue minus vtrouis æqualium. Tertia de Isoscele, cuius tertium latus maius est, perpendicularisque in alterutrum æqualium laterum cadit. Quarta de Isoscele, cuius latus tertium minus est, & perpendicularis rursus in alterutrum laterum æqualiũ cadit. Quinta de Scaleno, in quo perpẽdicularis cadit in miniműlatus. Sexta de Scaleno, in quo perpendicularis in mediũ latus demittitur. Septima denique de Scaleno, in quo ad maximum latus perpendicularis ducitur. Loquor autem hic de illis etiam triangulis, in quibus perpendicularis linea cadit intra triangulum, ac proinde duo anguli supra basin sunt acuti, siue oppositus angulus acutus etiam sit, siue non. De his enim propositio etiam intelligenda est, vt diximus. Quo pacto autem triangula, in quibus linea perpendicularis cadit vel extra ipsa, vel cum vno laterum coincidit, numeris quoque possint accommodari, docebimus ad finem regularum.

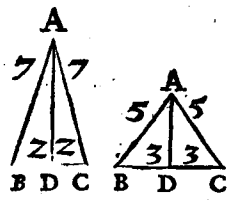
REGVLA I.

Si quodlibet latus trianguli æquilateri statuatur quotuis partium æqualium, numero tamen parium, vt fractiones vitentur, erunt omnia latera & inter se, & segmentis à linea perpendiculari factis commensurabilia. Vt in triangulo æquilatero ABC, diuidet perpendicularis AD, oppositum latus BC, bifariam, vt in scholio propos. 26. lib. 1. demonstrauimus. Quam ob rem posito quolibet latere 8. erunt segmenta BD, CD. 44. Vbi vides quadratum lateris AB, angulo acuto, C, oppositi, (omnes enim anguli in triangulo æquilatero acuti sunt, ex coroll. 3. prop. 17. lib. 1.) hoc est, 64. vna cum rectangulo bis contento sub BC, CD, id est, cum 32. efficere 128. quantum videlicet conficiunt duo quadrata laterum AC, CB, nempe 64. 64.



REGVLA II.

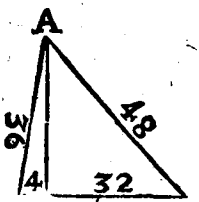
Si vtrumq; laterum æqualium trianguli Isoscelis statuatur quotcunque partium æqualium, tertium autem quotlibet partium numero parium, vt fractiones vitentur, siue pauciores partes, in hoc latere ponantur, quam in vtrolibet æqualium, siue plures, dummodo tot non sint, quot in vtroque simul, aut plures: quia sic non posset fieri triangulum, propterea quod duo latera æqualia non essent maiora tertio latere, sed vel æqualia, vel minora, quod propositio



positioni 20.lib.1.repugnat. Si inquam latera hoc modo numeris exponantur, erunt omnes lineæ trianguli inter se commensurabiles. Vt in priori horum Isoscelium vtrumuis latus AB,AC, statuatur 7.& BC.4.In posteriori autem vtrumlibet AB,AC,5.& BC,6.Cum ergo perpendicularis AD, diuidat basim BC, bifariam,ex scholio propos. 26. lib 1. erunt segmenta BD,GD,in priori quidem triangulo 2.2.in posteriori verò 3.3.Vbi etiam perspicuum est,quadratum lateris AB,angulo acuto C, oppositi (vterque enim angulus B,C,acutus est, ex coroll.3.propos.17. lib.1.) vna cum rectangulo bis comprehenso sub BC,CD, æquale esse quadratis simul laterum AC,CB,&c.

REGVLA III.

In triangulo Isoscele,in quo tertium latus maius est,& perpendicularis in alterum æqualium laterum cadit, erit segmentum prope maius latus tertium,maius,vt ad propos.47.lib.1.demonstrauimus. Si igitur minus segmentum statuas,quotuis partium,easque per 8. multiplices, habebis segmentum maius: Si vero easdem ducas in 12. efficies tertium latus: Duo denique segmenta simul addita conflabunt vtrumque laterum æqualium; quod etiam produces ex multiplicatione minoris segmẽti per 9.Vt si in Isoscele ABC, segmentum minus BD,ponatur 4. erit maius CD,32. latus verò AC,48. & vtrumque latus AB,BC,36.36. Quadratum igitur lateris AB, angulo acuto C, oppositi, nempe 1296.vna cum ex eo, quod fit bis ex BC, in CD, id est, cum 1152. 1152. conficit 3600. quantum nimirum efficiunt duo quadrata ex AC,CB,nempe 2304.1296. Ita quoque quadratum ex AC,nimirum 2304.vna cum eo quod bis fit ex CB, in BD, hoc est, cum 144.144. faciat 2592. qui numerus etiam conficitur ex quadratis laterum AB,BC, nimirum ex 1296. 1296. In huiusmodi ergo triangulo segmenta inæqualia proportionem habent octuplam; vtrumuis vero æqualium laterum ad minus segmentum proportionem habet noncuplam: Tertium denique latus maius ad idem segmentum minus habet proportionem duodecuplam.



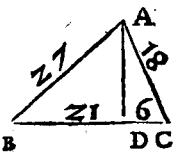
1296

REGVLA IV.

In triangulo Isoscele,cuius tertium latus minus est, & perpendicularis rursus in alterum æqualium laterum cadit, erit segmentum prope minus latus tertiũ minus,vt ad propos.47.lib.1.ostensum est.

Quod

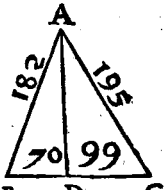
Quod ſegmentum ſi ſtatuas quotuis partium numero parium, vt fractiones fugiantur, eaſque per 3. multiplices, & producto earundem medietatem adijcias, vel earum medietatem per 7. multiplices, produces maius ſegmentum: Si vero eaſdem partes minoris ſegmenti multiplices per 3. efficies tertium latus minus. Vtrũque deniq; æqualium laterum componetur ex duobus ſegmentis: quod etiam ex multiplicatione medietatis minoris ſegmenti per 9. producetur. Vt ſi in Iſoſcele *ABC*, minus ſegmentum CD, ponatur 6. erit maius BD, 21. & latus AC, 18. atque tam *AB*, quam *BC*, 27. Quadratum ergo lateris *AB*, angulo acuto C, oppoſiti, nimirum 729. vna cum eo, quo fit bis ex BC, in CD, id eſt, cum 162. 162. efficit 1053. qui numerus etiam componitur ex quadratis laterum, AC, C*B*, nempe ex 324. 729. &c.



27

REGVLA V.

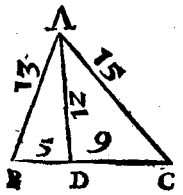
In Scaleno triangulo, in quo perpendicularis in minimum latus demittitur, erit ſegmentum baſis iuxta medium latus, minus, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtratum eſt. Quod ſegmentum ſi conſtituatur tot partium æqualium, vt à 70. numerentur, nimirum partium 70. vel 140. vel 210. &c. eiſque addantur earum $\frac{19}{70}$ confectum erit ſegmentum maius & ex additione partium horum ſegmentorum gignetur minimum latus. Si vero partes minoris ſegmenti duplicentur, & producto adijciantur $\frac{2}{70}$ hoc eſt, $\frac{1}{35}$ earundem partium, procreabitur medium latus. Si denique partes eiuſdem minoris ſegmenti duplicentur, productoque $\frac{55}{35}$ id eſt, $\frac{11}{14}$ earundem addantur, componetur latus maximum. Vt in ſcaleno ABC, ſi minus ſegmentum *BD*, ponatur 70. erit maius CD, 99. & totum minimum latus *BC*, 169. Medium autem latus *AB*, 182. & maximum *AC*, 195. Quadratum ergo lateris *AB*, acuto angulo C, oppoſiti, hoc eſt, 33124. vna cum numero, qui bis fit ex BC, CD, id eſt, cum 16731. 16731. conficit numerum 66586. æqualem duobus ſimul quadratis 38025. 28561. laterum AC, C*B*, &c.



169

REGVLA VI.

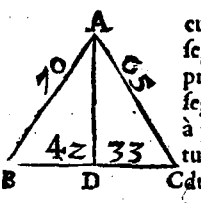
In Triangulo Scaleno, quando perpendicularis in medium latus cadit, erit ex iis quæ ad propoſ. 47. lib. 1. oſtendimus, minus ſegmentum minimo lateri adiacens. Quod ſegmentũ ſi ſtatuatur tot æqualium partium, vt à 5. numerentur, vt 5. vel 10. vel 15. &c. eiſque addan-



14

dantur $\frac{3}{5}$ confectum erit segmentum maius, & partes horum segmentorum in vnam summam collectæ component medium latus. Si autem partibus minoris segmenti duplicatis adijciantur earundem $\frac{3}{5}$ producetur minimum latus. Triplum denique earundem partium minoris segmenti dabit latus maximum. Vt in Scaleno *ABC*, si *minus segmentum BD*, fiat 5. erit segmentum maius CD. 9. & totum latus BC, medium 14. Minimum verò AB, 13. & maximum AC, 15. &c.

REGVLA VII.



75

In Scaleno denique triangulo, vbi perpendicularis ad maximum latus deducitur, erit minus segmentum iuxta latus minimum, ex ijs, quæ ad propos. 47. lib. 1. scripsimus. Si ergo pro minori segmento sumantur 3. vel quiuis alius numerus à 33. numeratus, vt 66. vel 99. &c. eique addantur $\frac{9}{33}$ hoc est, $\frac{3}{11}$ fiet maius segmentum: quæ duo segmenta simul composita maximum latus offerent. Si vero numero minoris segmenti duplicato adijciantur, $\frac{4}{33}$ producetur medium latus. Si denique eidem minori segmento apponantur $\frac{32}{33}$. exhibebitur minimum latus. Vt si in Scaleno *ABC*, minus segmentum CD, sit 33. erit maius segmentum *BD*, 42. totumque latus maximum BC, 75. & medium AB, 70. & minimum AC, 65. &c.

Quod si singulos numeros harum regularum per eundem numerum aliquem, quicunque is sit, multiplices, procreabis alios numeros lateribus triangulorum tribuendos. Idem etiam numeri reperientur, si minus segmentum, vel maius, vel quodcunque latus statuatur quotlibet partium: si *modo proportiones seruentur*, quas supradictis regulis expressimus.

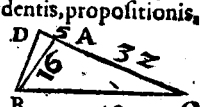
Hic quoque sciendum est, non in omni triangulo oxygonio proportiones præscriptas reperiri inter latera; cum mille modis possint variari eorum proportiones. Neq; vero hoc regulæ illæ docent, sed vsus earū in eo solū consistit, vt seruatis illis proportionibus, quas explicauimus, triangula oxygonia formari possint, in quibus propositio 13. huius lib 2. ad numeros accommodetur.

Iam vero si perpendicularis coincidat cum illo latere, cuius quadratum probandum est minus esse duobus quadratis aliorum duorum laterum, &c. Ita vt triangulum propositum sit rectangulum, quærendi sunt tres numeri pro lateribus, ex ijs, quæ in scholio

propos.

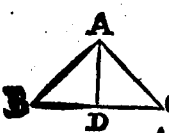
propoſ.47.lib.1.ſcripſimus. Vt in figura regulæ 6. ſi in triangulo ABD,minimum latus BD,ponatur 5.erit AD,12.& AB.13.Vbi cernis quadratum lateris AD,acuto angulo B,oppoſiti,nempe 144. vna cum eo,quod fit bis ex BD,in BD,hoc eſt,cum 25 25.efficere 194. quantum videlicet conficiunt duo quadrata ſimul ex AB,BD,nimirum 169. 25.Eadem ratione, ſi minimum latus BD, ſtatuatur partium 6.erit AD.8. & AB.10. Vbi etiam vides,quadratum lateris AD,acuto angulo B,ſubtenſi,nimirum 64.vna cum eo,quod ſit ex BD,in BD,hoc eſt,cum 36.36.conficere 136. quem numerum etiam conficiunt duo numeri quadrati laterum AB, BD, nimirum 100. 36. Ita quoque cernis,quadratum numerum lateris BD,acuto angulo A, oppoſiti,hoc eſt,36. vna cum eo, quod fit ex AD,in AD, bis,id eſt,cum 64.64.efficere 164. quantum ſcilicet conficiunt duo numeri quadrati ſimul laterum AB,AD, nimirum 100.& 64. Denique ſi in alio triangulo ACD,minimum latus CD,ponas 6. reperies ex ijs,quæ ad propoſ.47.lib 1. ſcripſimus,AD,40.& AC. 41. Vbi manifeſtum eſt, quadratum numerum lateris AD, angulo acuto oppoſiti, nimirum 1600. vna cum numero,qui fit ex CD,in CD, bis,id eſt,cum 81.81.facere 1762.qui numerus æqualis eſt quadratis numeris duorum laterum AC,CD, hoc eſt,duobus numeris 1681. 81.Hi enim conficiunt quoque ſummam 1762. Quod ſi minimum latus CD,facias 7. comperies AD,24. & AC,25.in quibus numeris idem experieris.Nam quadratus numerus lateris CD,angulo acuto A,ſubtenſi,id eſt,49. vna cum numero, qui bis producitur ex AD, in AD, hoc eſt cum 576.576. facit 1201. quantum ſcilicet efficiunt duo quadrati numeri laterum AC, AD, hoc eſt, 625. 576.

At ſi perpendicularis cadat extra triangulum,ita vt triangulum ſit obtuſangulum, quærendum erit ſegmentum exterius,vna cum lateribus,vt in tribus regulisſcholij præcedentis propoſitionis docuimus. Segmentum namque exterius cum latere producto,dabit totum ſegmentum inter acutum angulum aſſumptum & perpendicularem.Vt in figura regulæ 3.ſcholii antecedentis,propoſitionis, erit ſegmentum totum,CD. inter angulum acutum C,& perpendicularem BD, cadentem extra triangulum 37. Vbi perſpicuum eſt, quadratum lateris AB,angulo C,acuto oppoſiti,hoc eſt,256.vna cum rectangulo ſub AC,CD,comprehenſo bis, id eſt,cum 1184.1184.componere numerum 2624. qui æqualis eſt duobus quadratis ſimul laterum BC,AC,nimirum aggregato quadratorum numerorum 1600.1024. &c.



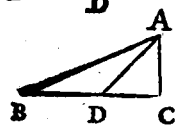
Neque vero alienum putaui hoc loco ex Pappo Alexandrino ſequens etiam theorema demonſtrare,

Si in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppositum bifariam, erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium simul dupla duorum quadratorum simul sumptorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum vero ex dimidiato latere describitur.



In triangulo *ABC*, recta *AD*, secet latus *BC*, bifariam in *D*. Dico quadrata ex *AB*, *AC*; dupla esse quadratorum ex *AD*, *BD*. Demittatur enim ex *A*, ad *BC*, perpendicularis, quæ primum rectæ *AD*, congruat, ac proinde triangulum *ABC*, æquilaterum sit, vel Isosceles, vt ad propos. 26. lib. 1. demonstrauimus. *a* Quoniam igitur tam quadratum ex *AB*, æquale est quadratis ex *AD*, *DB*, quam quadratum ex *AC*, quadratis ex *AD*, *DC*; erunt duo quadrata ex *AB*, *AC*, æqualia quadrato ex *AD*, bis sumpto, vna cum quadratis ex *DB*, *DC*. Cum ergo quadrata ex *DB*, *DC*, æqualia sint, si auferantur duo quadrata ex *AD*, *DC*, ablatum erit dimidium quatuor quadratorum, nimirum quadrati ex *AD*, bis sumpti, & quadratorū ex *DB*, *DC*. Quare duo quadrata ex *AB*, *AC*, dupla sunt duorum quadratorum ex *AD*, *DB*, quod est propositum. Quod clarius ita ostendetur. *b* Quoniam quadratum ex *AB*, duobus quadratis ex *AD*, *DB*, æquale est: Sunt autem duo quadrata ex *AB*, *AC*, quadrati ex *AB*, dupla, ob æqualitatē linearum *AB*, *AC*; erunt quoque quadrata ex *AB*, *AC*, dupla quadratorum ex *AD*, *DB*. Quod demonstrandum erat.

a 47. primi.



b 47. primi.

Congruat deinde perpendicularis *AC*, lateri *AC*. Et quia quadratum ex *BC*, quadruplum est, tam quadrati ex *BD*, quam quadrati ex *DC*, vt in scholio propos. 4. huius lib. ostendimus; erit idem quadratum ex *BC*, duplum duorum quadratorum ex *DB*. *DC*. Sunt autem duo quadrata ex *AC*, *CD*, bis sumpta, dupla quoque quadrati ex *AD*; quod *c* quadrata ex *AC*, *CD*, semel sumpta æqualia sint quadrati ex *AD*. Igitur quadratum ex *BC*, vna cum quadratis ex *AC*, *CD*, bis sumptis, duplum erit quadratorum ex *DB*, *DC*, *AD*. Cum ergo & quadratum ex *CD*. bis sumptum duplum sit quadrati ex *CD*; *d* erit reliquum quadratum ex *BC*, vna cum quadrato ex *AC*, bis sumpto, duplum quoque reliquorum quadratorum ex *DB*, *AD*. Sunt autem *e* quadrata ex *BC*, *AC*, æqualia quadrato ex *AB*. Igitur quadrata ex *AB*, *AC*, (quæ æqualia sunt quadrato ex *BC*, vna cum quadrato ex *AC*, bis sumpto) dupla quoque sunt, quadratorum ex *AD*, *DB*. Quod est propositum.

c 47. primi.

d 20. prænun.

e 47. primi.

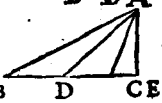
Tertio cadat perpendicularis *AE*, intra triangulorum inter puncta *D*, *C*. Quia igitur *f* quadrata ex *BE*, *EC*, dupla sunt quadratorum

f 9. sec.

torum ex BD, DE: Item quadrata ex AE, DE, bis sumpta, dupla sunt quadrati ex AD; quod *a* quadrata ex AE, ED, semel sumpta quadrato ex AD, æqualia sint; erunt quadrata ex BE, EC, una cum quadratis AE, DE, bis sumptis, dupla quoque quadratorum ex BD, DE, AD. Cum ergo & quadratum ex DE, bis sumptum, duplum sit quadrati ex DE; *b* erunt reliqua quadrata ex BE, EC, una cum quadrato ex AE, bis sumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex DB, AD. Quare cum quadratis ex BE, AE, *c* æquale sit quadratum ex AB; & quadratis ex EC, AE, quadratum ex AC; erunt quoque quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod est propositum.

a 47. primi.

b 20. pronum.



c 47. primi.

Postremo cadat perpendicularis AE, in latus BC, productum. Quoniam igitur *d* quadrata ex BE, CE, dupla sunt quadratorum ex BD, DE. Item quadrata ex AE, DE, bis sumpta dupla sunt quadrati ex AD; *e* quod quadrata ex AE, DE, semel sumpta, æqualia sint quadrato ex AD; erunt quadrata ex BE, CE, una cum quadratis ex AE, DE, bis sumptis, dupla quoque quadratorum ex BD, DE, AD. Cum ergo & quadratum ex DE, bis sumptum, duplum sit quadrati ex DE; *f* erunt reliqua quadrata ex BE, CE, una cum quadrato ex AE, bis sumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex BD, AD. Quare cum quadratis ex BE, *g* æquale sit quadratum ex AB, & quadratis ex CE, AE, quadratum ex AC; erunt quoque quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod erat ostendendum.

d 10. sec.

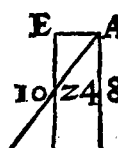
e 47. primi.

f 20. pronum.

g 47. primi.

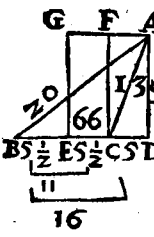
Non te moveat autem, quod ad hujus theorematis demonstrationem adhibuerimus pronunciatum 20. quod universaliter in omni genere multiplicium ab Euclide demonstratur lib. 5. propos. 5. quoniam in dupla proportione facile concedi potest sine demonstratione, ut in expositione ejus principii diximus: Vel propositio 5. lib. 5. ante hoc theorema demonstrari potest: Vel certe theorema ipsum post librum 5. demonstrari; ita ut circulus in demonstrando nulla ratione committatur, etiamsi principium illud demonstretur lib. 5. quia propositio 5. lib. 5. ex hoc theoremate non pendet.

Ex his autem, quæ proximis duobus theorematibus, & propos. 47. lib. 1. demonstrata sunt, aream cujusque trianguli latera habentis nota inveniemus, ut recte hoc loco monet Campanus, & Federicus Commandinus demonstrat, hac fere ratione. Sit primo triangulum rectangulum ABC, cujus latera nota sint, nempe AB, 10. palmorum; AC, 8. BC. 6. Diviso latere BC, bifariam in D, ut sint CD, BD, 3. palmorum, perficiatur rectangulum



ACDE, quod æquale est triangulo ABC, ut in scholio propos. 41. lib. ostendimus. Quia vero ex ductu CD, trium palmorum in CA, 8. palmorum producitur area rectanguli CE, 24. palmorum quadratorum, ut ad initium hujus lib. docuimus: Totidem palmos quadratos continebit triangulum ABC, rectangulo CE, æquale. Quod est propositum.

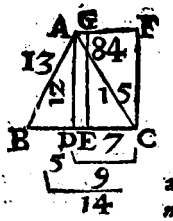
Sit deinde triangulum obtusangulum ABC, cujus latera sint cognita: AP, 20. palmorum: AC, 13. BC, 11. Primum igitur invenienda est quantitas perpendicularis lineæ AD, ex A, in latus BC.
a 12. sec. protractum demissæ, hoc modo. Quoniam quadratū lateris AB, a majus est, quam quadrata laterum AC, BC, rectangulo bis com-



prehenso sub BC, CD: si quadrata laterum AC, BC, nempe 169. 121. quæ efficiunt 290. detrahantur ex 400. quadrato lateris AB, remanebunt 110. pro rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, cujus numeri dimidium 55. dabit rectangulum sub BC, CD. Si igitur 55. rectangulum sub BC, CD, dividatur per 11. latus notum BC, exibit reliquum latus CD, 5. palmorum, ut Ioan Regiom. demonstrat prop. 17. lib. 1. de triangulis, & à nobis demonstratū est in libro de mensurationibus omnium quantitatum. Quia vero quadrata laterum AD, CD, b æqualia
b 47. primi. sunt quadrato lateris AC: si quadratum 25. palmorum, nempe lateris CD, 5. palmorum nuper inventi, auferatur ex 169. quadrato lateris AC, remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris AD. Quare latus AD, erit 12. palmorum, cum radix quadrata hujus numeri 144. sit 12. Iam vero diviso latere BC, bifariam in E, educantur ex CE, ad BD, perpendiculares CF, EG, occurrentes rectæ AG, quæ
c 34. primi. per A, ipsi BD, parallela ducitur, in punctis F, G. Quibus peractis, si EC, palmorum quinque cum dimidio, ducatur in CF, 12. palmorū, (Est c enim CF, ipsi AD, æqualis,) exurget area rectanguli CG, 66. palmorum: quod cum æquale sit triangulo ABC, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum CG, & triangulum ABC, in eisdem parallelis, &c.) Erit quoque area trianguli ABC, palmorum quadratorum 66. quod est propositum.

Sit postremo triangulum acutangulum ABC, latera habens nota: AB, 13. palmorum: AC, 15. BC, 14. Primum igitur hic quoque reperienda est quantitas perpendicularis AD, ex A, ad BC, demissa,
d 13. sec. hac ratione. Quoniam quadratum lateris AB, d minus est, quam quadrata laterū AC, BC, rectangulo comprehenso bis sub BC, CD: si quadratum lateris AB, nimirum 169. detrahatur ex quadratis laterum AC, BC, hoc est, ex 225. 196. quæ efficiunt 421. remanebunt 252. pro rectangulo cōprehenso bis sub BC, CD, cujus numeri dimidium 126. dabit rectangulum sub BC. CD. Si igitur 126. rectangulum

lum sub BC, CD, dividatur per BC, latus notum, ut per 14. exibit reliquum ejus latus CD, palmorum 9. ut constat ex Ioan. Regiom. lib. 1. de triangulis propos. 17. & à nobis demonstratum est in lib. de mensurationibus omnium quantitatum. Quoniam autem quadrata ex AD, CD, *a* æqualia sunt quadrato ex AC: si quadratum 81. palmorum, nempe lateris CD, 9. palmorum nuper inventi, auferatur ex 25. quadrato lateris AC: remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris AD. Quare cum radix quadrata hujus numeri 144. sit 12. erit latus AD, 12. palmorum. Iam vero diviso latere BC, bifariam in E, educantur ex C, E, ad BC, perpendiculares CF, EG, occurrentes rectæ AF, quæ per A, ipsi BC parallela ducitur, in punctis GF. Quibus peractis, si CE, 7. palmorum ducatur in EG, 12. palmorum: (*b* est enim EG, recta ipsi AD, æqualis) exurget area rectanguli EF, palmorum 84. Quod cum triangulo ABC, sit æquale, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum EF, & triangulum ABC, in eisdem parallelis, &c.) erit quoq; area trianguli ABC, 84. palmorum. Quod est propositum.



a 47. primi.

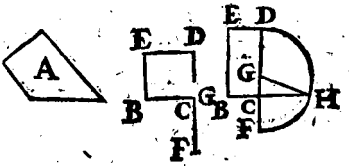
Itaque in universum, area cujuscunq; trianguli producitur ex dimidio basis in perpendicularem, quæ à vertice ad basim demittitur, ut in exemplis datis est manifestum. Sed plura hac de re in libro de mensurationibus omnium quantitatum, quem propediem, Deo juvante, in lucem edemus. Quo pacto autem, duobus lateribus, cum uno angulo, cognitis, vel duobus angulis, cum uno latere, reliqui anguli, & latera cognoscantur, demonstravimus in nostris triangulis rectilineis.

PROBL. 2. PROPOS. 14. xiv.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A, cui quadratum æquale constituendum est. c *Constituatur parallelogrammum BCDE, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cujus unum latus, ut DC, producatur ad F, sitq; CF, recta æqualis rectis BC. Dividatur quoq; DF, bifariam in puncto G, quod cadet aut in punctum C, aut non. Si cadit in punctum C; erit recta BC, (cum æqualis ponatur recta CF) recta CD, æqualis. Quare rectangulum BD, erit quadratum, cum latera DE, EB,* d *æqualia sint oppositis lateribus BC, CD: atque adeo constitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si vero*

c 45. primi.

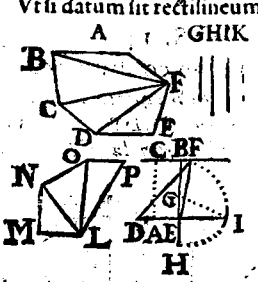


d 34. primi.

punctum G, non cadit in C: facto G, centro, describatur intervallo GD, vel GE, semicirculus FHD, producanturq; BC, donec circumferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ CH esse æquale rectilineo A. Ducta enim recta GH. quia recta DF, dividitur bifariam in G, & non bifariam in C: erit rectangulum comprehensum sub DC, CF, hoc est, rectangulum BD, una cum quadrato rectæ GC,
a 5. sec. *a æquale quadrato rectæ GF, hoc est, quadrato rectæ GH: cum recta*
b 47. primi. *GF, GH, sint æquales: At quadratum rectæ GH, b æquale est quadratis rectarum GC, CH. Igitur rectangulum BD, una cum quadrato rectæ GC, æquale quoq; erit quadratis rectarum GC, CH. Quam ob rem dempto communi quadrato rectæ GC, remanebit rectangulum BD; hoc est, rectilineum A, quadrato rectæ CH, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum constituimus: Quod facere oportebat.*

SCHOLIVM.

Verum quia laboriosum est, rectangulum dato rectilineo multorum angulorum construere æquale, quod sæpius super datam rectam constituendum sit, ex propos. 44. lib. 1. rectangulum æquale triangulo, facilius fortasse describemus quadratum dato rectilineo æquale, si datam figuram rectilineam in triangula resoluamus, & cuilibet triangulo quadratum æquale efficiamus, hoc est, latus quadrati, quod cuivis triangulo æquale sit, investigemus: quod factu facillimum est, ut mox ostendemus. Nam si per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. scripsimus, inveniamus latus alterius quadrati, quod sit omnium inventorum laterum quadratis æquale, factum erit, quod proponitur.



Vt si datum sit rectilineum ABCDEF, resoluemus illud in triangulo ABF, FBC, CFD, DEF, inveniemusq; latera G, H, I, K, quorum quadrata sint illis ordine æqualia. Deinde angulum rectum constituemus M, & lineas LM, MN, lateribus G, H, æquales. Ducta autem recta NL, erigemus ad eam perpendicularem NO lateri I, æqualem. Similiter ducta recta OL, excitabimus illi perpendicularem OP, lateri K, æqualē, jūgemusq; rectam PL. Atque hoc modo progrediemur, donec ultimo lateri sumpta sit perpendicularis linea æqualis, qualis hic fuit perpendicularis OP, ultimo lateri K, æqualis. Nam quadratum rectæ PL, postremo loco ductæ æquale erit omnibus quadratis laterum G, H, I, K, ut ad propos. 47. lib. 1. demonstravimus, atque adeo omnibus triangulis ABF, FBC, CFD, DEF, hoc est, datæ figuræ rectilineæ ABCDEF.

Praxis

Praxis autem, qua cujus triangulo quadratum æquale inveniatur, facilis est. Sit enim inveniendum quadratum æquale quarto triangulo DEF, datæ rectilineæ figuræ. Dividatur quodcunque latus, nempe DE bifariam in *A*. producaturq; quantumlibet. Ducta deinde per angulum oppositum F, lateri DE, parallela *FB*, ducatur per E, ad DE perpendicularis HE *B*, secans *FB*, in *B*. sitque EH, ipsi AE, dimidio lateris DE, æqualis. Postremo, divisa tota linea *BH*, bifariam in G, describatur ex G, ad intervallum GH, vel *GB*, arcus secans latus DE, productum in I. Dico quadratum lateris EI, æquale esse triangulo DEF. Si namque compleatur rectangulum *AEC*, & semicirculus *BH*, ducaturq; recta GI, ostendemus, *ut in hac propos.* 14. quadratum ex EI, rectangulo A *B*, æquale esse. Cum ergo rectangulum A *B*, triangulo *DEF*, sit æquale, ex scholio propos 41. lib. 1. quod basis DE, sit dupla basis AE, constat propositum.

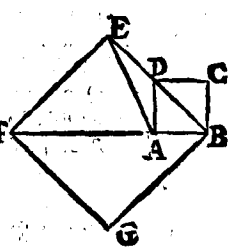
Non est tamen necessarium, ut rectangulum construatur *AB*. Nam si fiat angulus rectus IE*B*, atq; in *BH*, capiatur EH, semissi lateris DE, æqualis, & recta EB, æqualis perpendiculari ex F, in latus DE, demissæ, secteturq; *BH*, bifariam in G, auferet circumferentia ex G, circa *BH*, descripta rectam EI, cujus quadratum æquale est rectangulo sub *BE*, EH, hoc est triangulo DEF.

Quoniã vero secundo libro Euclides multa de quadratis, ac rectangulis parallelogrammis disputavit, recte hic inferi poterunt sequentia duo problemata de quadrato, & parallelogrammo rectangulo, neque injucunda, neq; inutilia: quorum posterius eruditus vir, atque excellens Mathematicus. Marinus Ghetaldus Patricius Racusinus, mihiq; familiarissimus, ingeniosissime sane soluit, & longe aliter, brevisque, quam à quodam alio solutum quondam fuit, quam solutionem hic subjungere supervacaneum est, cum illam Marini Racusini hic apposuerim, tanquam breviorem ac faciliorem.

I.

Dato excessu diametri alicujus quadrati supra latus ejusdem; Invenire latus ipsius quadrati.

Excedat diameter alicujus quadrati latus ejusdem recta *AB*, inveniendumq; sit latus illius quadrati. Ex recta *AB*, describatur quadratum *AC*, cujus diameter ducta BD, producatur ad E, ut sit *DE*, recta rectæ *AD*, æqualis. Dico rectam E*B*, esse latus illius quadrati, cujus diameter excedit ipsum latus BE, excessu dato *AB*. Ducatur enim EF, perpendicu-



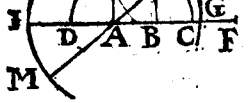
laris ad *BE*, quæ rectam BA, productam secet in F. Quoniam igitur in triangulo *BF*, angulus *FEB*, rectus est, & *EBF*, semirectus ex
a 32. pri. coroll. 2. propos. 4. hujus lib. *a* erit & *BFE*, semirectus. *b* Quare
b 6. pri. rectæ *BE*, *FE*, æquales sunt. Si igitur ex F, ducatur *FG*, parallela ipsi BE: & ex B, recta BG, parallela ipsi *EF*, occurrens priori in G, constitutum erit quadratum rectæ *BE*. *c* Quod si ducatur recta A *E*,
c 5. pri. erunt anguli AED, EAD, æqualibus lineis DE, DA, oppositi æquales. Quare si demantur ex rectis angulis DEF, DAF, remanebunt
d 6. pri. anguli AEF, EAF, æquales: *d* ideoque rectæ *EF*, AF, æquales erunt. Quoniam vero diameter BF, rectam AF, superat data recta AB: superabit eadem diameter BF, latus quadrati *E F*, eadem recta A B, quod est propositum.

COROLLARIVM

Itaque recta composita ex diametro quadrati supra excessum datum descripti, & ex latere ejusdem quadrati, exhibet latus quadrati, quod quæritur. Eadem autem diameter cum duplo excessus, diametrum quæsiti quadrati constituit.

II.

Datis duobus excessibus diametri alicuius parallelogrammi rectanguli supra utrumq; latus: Invenire latera ipsius rectanguli.



Superet diameter minus latus rectæ A B. & majus recta B C. Producta AC, in utramque partem sumatur A D, ipsi AB, æqualis: descriptoque circa CD, semicirculo, erigatur ad AC, perpendicularis secans circumferentiam in *E*, sumaturque ipsi *BE*, æqualis C *E*. Et quia, ut ex demonstratione propos. 14. hujus lib. constat, quadratum rectæ *BE* æquale est rectangulo sub DB, *BC*, erit *BE*, major quam BC, minus latus dicti rectanguli. Igitur & *CF*, major erit quam *BC*. Sumpta ergo FG, ipsi *BC*, æquali, cadet punctum *G*, inter *C*, & F. *E*recta autem ad *AF*, perpendiculari GH, ipsi *B* F, æquali. Dico *AG*, esse majus latus, & *GH*, minus, ita ut rectangulum quæsitum sit GK. Esse enim rectam *AG*, majorem quam *GH*, ita probabitur: Quoniam *BC*, FG, æquales sunt, addita communi *CG*, erunt quoque *BG*, *CF*, æquales. *A*dditis igitur inæqualibus AB, ipsi *BG*, & *B C*, ipsi CF, erit *A G*, major quam *B* F, hoc est, quam GH, quandoquidem addita *AB*, major est, quam addita *BC*. Esse autem *AG*, GH, latera quæsita, ita demonstrabitur. Descripto ex *A*, ad intervallum *AG*, circulo, ducatur per *A*, H, recta secans circumferentiam in L, M, & recta *AD*, producatur, circumferentiam

secans

secans in I. Quoniam igitur rectangulum sub BC, BD, *a* æquale est rectangulis sub CB, BA, & sub CB, AD, hoc est, duplum rectanguli sub excessibus AB, BC: Est autem rectangulo sub BC, DB, æquale quadratum rectæ BE, ut ostendimus: erit quoque quadratum rectæ BE, duplum rectanguli sub AB, BC, hoc est, quadratum rectæ BE, æquale erit duplo rectanguli sub AB, BC. Addito ergo communi quadrato rectæ BC, una cum duplo rectanguli sub BG, BC, hoc est, sub CF, BC: erunt quadrata rectarū BE, sive CF, & BC, una cū duplo rectanguli sub CF, BC, æqualia duplo rectanguli sub AB, BC, & quadrato rectæ BC, una cum duplo rectanguli sub CF, BC. Sunt autem quadrata rectarum CF, BC, una cum duplo rectanguli sub CE, BC, *b* æqualia quadrato rectæ BF. Igitur & quadratum rectæ BF, æquale erit duplo rectanguli sub AB, BC, & quadrato rectæ BC, una cum duplo rectanguli sub CF, BC, vel sub BG, BC. Cum ergo duplum rectangulorum sub AB, BC, & sub BG, BC, æquale sit rectangulo sub IG, (quæ ipsarum AB, BG, simul dupla est) & BC, vel FG: erit quoq; quadratum rectæ BF, æquale rectangulo sub IG, FG, una cū quadrato rectæ BC, vel FG. At rectangulo sub IG, GF, una cum quadrato rectæ FG, *c* æquale est rectangulum sub IF, FG. Igitur quadratum rectæ BF, sive GH, æquale etiam est rectangulo sub IF, FG. Addito ergo communi quadrato rectæ AG, erunt quadrata rectarum GH, AG, æqualia rectangulo sub IF, FG, una cum quadrato rectæ AG. Est autem quadratis rectarum GH, AG, *d* æquale quadratum rectæ AH: & rectangulo sub IF, FG, una cum quadrato rectæ AG, *e* æquale est quadratum rectæ AF. Igitur & quadratum rectæ AH, quadrato rectæ AF, æquale est, rectaque AH, rectæ AF, æqualis: demptisq; æqualibus AL, AG, reliquæ LH, GH, æquales erunt. Diameter ergo AH, rectanguli GK, hoc est, recta AF, excedit majus latus AG, recta GF, sive excessu dato BC: Ipsum vero minus latus GH, sive rectam BF, ipsi GH, æqualem, excessu dato AB. Quod est propositum.

a 1. sec.
b 4. sec.
c 3. sec.
d 47. primi.
e 6. sec.

COROLLARIVM.

Itaque recta BE, vel CF, cujus quadratum rectanguli sub datis excessibus AB, BC, duplum est, addita minori excessui BC, efficit minus latus quæsitum BF, hoc est, GH. Eadem autem recta BE, hoc est, BG, addita majori excessui AB, conficit maius latus quæsitum AG: Eadem denique BE, vel CF, cum utroque excessu AB, BC, diametrū AF, vel AH, constituit.

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

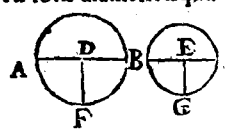
EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVM.

DEFINITIONES.

I.

Æquales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales; vel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ sunt æquales.

Voniam Euclides hoc 3. lib. varias circuli proprietates demonstrat, ideirco explicat prius terminos quosdam, quorum frequens in eo futurus est usus. Primum itaque docet, eos circulos esse æquales, quorum diametri, vel semidiametri æquales sunt. Cum enim circulus describatur ex circumvolutione semidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile, ut lib. 1. diximus, perspicuum est, eos circulos esse æquales, quorum semidiametri, seu rectæ ex centris ductæ, sunt æquales; vel etiam quorũ totæ diametri æquales sũt. Vt si diametri AB, BC, vel rectæ DF, EG, è cẽtris D, & E, ductę sint æquales, æquales erunt circuli AFB, & BGC. Sic etiam è contrario, si circuli sint æquales, erunt diametri, vel rectæ è centris ductæ, æquales. Ex his liquet, circulos, quorum diametri, vel rectæ ductæ ex centris sunt inæquales, inæquales esse; atq; adeo illum, cujus diameter, vel semidiameter major, majorem. Et contra, circulorum inæqualium diametros, semidiametrosve inæquales esse, majoris quidem majorem, & minoris minorem.

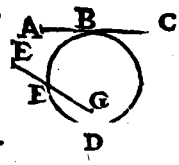


II.

Recta linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum, tangat, si producatur, circulum non secat.

Vt

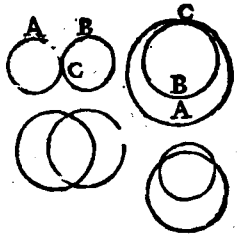
Vt recta AB, si ita circulum BFD, tangat in B, vt producta ad G, nulla ratione circulum secet, sed tota iaceat extra ipsum, dicetur tangere circulum. At vero recta EF, quia ita eundem circulum tangit in F, vt producta ad G, secet circulum, cadatque intra ipsum, non dicetur circulum tangere, sed secare.



III.

Circuli sese mutuo tangere dicuntur, qui sese mutuo tangentes, sese mutuo non secant.

Eodem modo duo circuli AC, BC, mutuo dicuntur tangere in C, si ita sese contingant in C. vt neuter alterum secet. Est autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exterius sese circuli tangunt, vt quando vnus extra alterum est positus; aut interius; quando vnus intra alterum constituitur. Quod si duo circuli ita se mutuo tangant, vt vnus alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuo secare, & non tangere.



IV.

In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ à centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

Quoniam inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, breuissima est perpendicularis, & semper eadem; aliæ vero infinitis modis variari possunt; recte distantia illius puncti à linea illa recta accipitur penes lineam perpendicularem. Vt distantia puncti A, à recta BC, dicitur esse perpendicularis AD, non autem AE, vel AF, vel alia quæuis, quæ non perpendicularis est, quia AD, omnibus est breuior, ex coroll. propos. 19. lib. 1. Immo non solum AE, AF, maiores sunt, quam AD, sed etiam ipsæ inter se æquales sunt. Est enim AF, *a* maior, quam AE, cum angulus *AEF*, sit obtusus, & AFE, acutus, & sic de alijs lineis non perpendicularibus. Quod enim *AFE*, acutus sit, constat ex eo, quod in triangulo *A* D F, duo anguli A DF, AFD, *b* minores sunt duobus rectis. Hinc enim fit, cum ADF, rectus sit, angulum AFD, recto esse minorem. Eadem ratione angulus; A ED, ostendetur acutus, propterea quod in triangulo ADE, *c* duo anguli ADE, AED, mino-

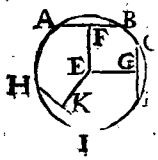
a 19. primi.

b 17. primi.

c 17. pri.

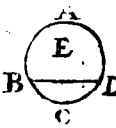
res sunt duobus rectis, & ADE. rectus est) ac proinde, cum ambo AED, AEF, æquales sint duobus rectis, erit AEF, obtusus. Hinc factum est, vt Euclides æqualem distantiam rectarum in circulo ab ipsius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem distantiam per inæquales. Vt duæ rectæ AB, CD, in circulo ABCD. æqualiter dicentur distare à centro E. si perpendiculares EF, EG æquales fuerint. At linea CD. longius abesse dicetur à centro E, quam linea HI, si perpendicularis EG, maior fuerit perpendiculari EK.

15. pri.



V.

Segmentum circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

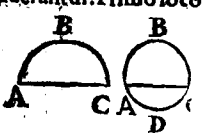


Vt si ducatur in circulo ABCD, recta BD, vtcunque, dicetur tam figura BAD contenta circumferentia BAD. & recta BD: quam figura BCD, comprehensa recta BD, & circumferentia BCD. circuli segmentum. Ex his colligitur triplex circuli segmentū. Semicirculus, quando recta BD, per centrum E, incedit: Segmentum semicirculo maius, quando recta BD, non transit per centrum, in ipso tamen centrum existit, quale est segmentum BAD: Et segmentum semicirculo minus, extra quod centrū circuli constituitur, cuiusmodi est segmentum BCD. In quod addefin. 18. lib. 1. demonstrauimus. Vocatur à plerisque Geometris recta BD. chorda, & circumferentia BAD, vel BCD arcus.

VI.

Segmenti autem angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

Definit iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis considerantur. Primo loco angulum segmenti, dicens angulum mixtum



BAC vel BCA. contentum sub recta linea AC. & circumferentia ABC, appellari angulum segmenti. Quod si segmentum circuli fuerit semicirculus, dicetur angulus semicirculi. Si vero segmentum maius semicirculo extiterit, vocabitur angulus segmenti maioris: Si denique segmentum minus fuerit semicirculo, angulus segmenti minoris nuncupabitur.

VII.

In segmento autem angulus est, cum in segmenti peripheria sumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ segmenti basis est, adiun-

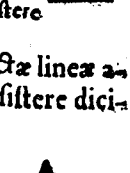
adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is, inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehensus.

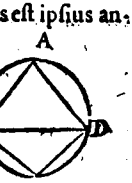
Sit segmentum circuli quodcunque ABC, cuius basis recta AC. Ex suscepto quolibet puncto B, in circumferentia, ducantur ad puncta A, & C extrema basis, rectæ lineæ BA, BC. Angulus igitur rectilineus ABC, dicitur existere in segmento ABC.

VIII.

Cum vero comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam assumunt peripheriam, illi angulus insistere dicitur.

Ex puncto A, quolibet suscepto in circumferentia circuli ABCD, ducantur rectæ duæ lineæ AB, AD, ad duo extrema B, & D, circumferentiæ BCD, cuiusque, quam quidem duæ rectæ AB, AD, assumunt. Angulus itaque rectilineus BAD, insistere dicitur circumferentiæ, BCD. Perspicuum autem est, hunc angulum à præcedenti non differre, nisi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus BAD, iuxta præcedentem quidem definitionem dicitur esse in segmento BAD, si recta BD, basis duceretur: ex hac vero insistere circumferentiæ BCD. Non tamen confundendus est angulus in segmento aliquo, cum angulo, qui circumferentiæ insistit, quamuis vnus & idem sit: ad diuersa siquidem referuntur. Angulus in segmento, segmentum, in quo existit, angulus autem insistens circumferentiæ, circumferentiam, quæ basis est ipsius anguli, respicit. Vnde si sumatur segmentum aliquod circuli BCD, in circulo ABCD, non erit idem angulus in hoc segmento existens, & eius circumferentiæ insistens. Angulus enim in eo existens, erit BCD: at eius circumferentiæ BCD, insistens, erit angulus BAD, qui multum ab eo differt. Qua in re mirum in modum hallucinati sunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nonnulli. Quod autem angulus in segmento, & angulus circumferentiæ cuipiam insistens, ad diuersos arcus referantur, luce clarius patebit ex vltima propos. lib. 6. quæ solum conuenire potest circumferentijs circulorum, quibus anguli insistunt, non autem in quibus existunt, vt eo in loco ostendemus. Idem quoque facile constat ex verbo βεβηκέναι, quod, ascendisse significat. Ascendit enim angulus DAB, supra circumferentiam BCD.





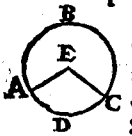
Præter tres dictos angulos consideratur etiam à Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea recta tangente circulum, & circumferentia circuli: vel certe duabus circumferentijs se mutuo tangentibus, siue hoc exterius fiat, siue interius. Exempli. S. recta AB, tangat circulum CDE, in C: angulus mixtus ACD, vel

BCE,

BCE, dicetur angulus contingentiæ, siue contactus: Rursus, si circulus CED, tangat, circulum EFG, exterius in E: Item circulus HFI, circulum EFG, interius in F: appellabitur tam angulus curuilineus CEF, quam EFH, vel GFI, angulus contactus, seu contingentiæ. Sunt itaque, vt vides, tres anguli contingentiæ, vnus quidem mixtus reliqui vero curuilinei.

IX.

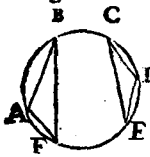
Sector autem circuli est, cum ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirum figura & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis assumpta.



Si in circulo ABCD, cuius centrum E, rectæ AE, CE, constituant angulum AEC, ad centrum E: nominabitur figura ABCD, contenta rectis AE, EC, & circumferentia ADC, quam prædictæ lineæ assumunt, Sector circuli. Ex hoc autem perspicue etiam colligitur, angulum, qui definitione 8. explicatur, referri ad circumferentiam, quæ ipsius basis est, non autem ad eam, in qua existit, vt multi interpretes existimarunt. Nam sicut in hac definitione Euclides intelligit circumferentiam ADC, quæ basis est anguli ad centrum constituti, quando mentionem facit peripheriæ à rectis AE, CE, assumptæ: Ita quoque in illa intellexisse eum necesse est nomine peripheriæ, quam rectæ lineæ assumunt, eam, quæ basis est anguli ad circumferentiam constituti: quandoquidem in vtraque dnfinitione vsus est eodem verbo græco ἀπολαμβάνω.

X.

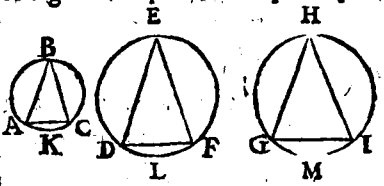
Similia circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter se sunt æquales.



Segmenta videlicet ABDF, DC AE, eiusdem circuli ABCDEF, quæ capiunt hos duos angulos ABF, ACE, æquales: vel, quod idem est, in quibus ijdem anguli æquales existunt, iuxta 7. definitionem similia dicuntur, & ipsæ circumferentiæ quoq; ABDF, DCAE, similes.

Eodem modo segmenta diuersorum circulorum tam æqualium, quam inæqualium, à Geometris dicuntur similia, quæ vel suscipiunt æquales angulos: vel in quibus æquales anguli

guli existunt. Vt si in circulis ABCK, DEFL, GHIM, anguli ABC, DEF, GHI, fuerint æquales, dicentur segmenta, seu circumferentiæ ABC, DEF, GHI, quæ dictos angulos suscipiunt, vel in quibus prædicti anguli existunt, similes. Consistit autem hæc segmentorum, circumferentiarumve similitudo in eo, quod qualis pars est vna circumferentia totius suæ circumferentiæ, talis quoque sit altera circumferentia, quæ dicitur huic similis, totius suæ circumferentiæ, ita vt qualis, & quanta pars est circumferentia ABC, totius circumferentiæ ABCA, talis & tanta quoque pars sit circumferentia DEF, totius circumferentiæ DEFD: Item talis, & tanta circumferentia GHI, totius circumferentiæ GHIG, vel potius segmentorum similitudo in hoc consistit, quod segmenta, seu circumferentiæ similes, ad totas circumferentias suas, eandem habeant proportionem. Quod autem segmenta, quæ vel æquales suscipiunt angulos, vel in quibus existunt æquales anguli, sint huiusmodi, demonstrabimus propositione vltima lib. 6. Nunc satis sit, talia segmenta circulorum, vel etiam arcus, circumferentiasve appellari similes.

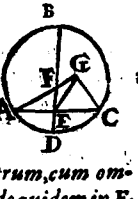


Eadem ratione dicuntur arcus, vel circumferentiæ similes, quibus æquales anguli, iuxta defin. 8. insistunt. Vt si in iisdem circulis anguli ABC, DEF, GHI, sint æquales, dicentur arcus circumferentiæve AKC, DLF, GMI, quibus insistunt similes. Immo si anguli ad centra insistentes arcubus AKC, DLF, GMI, sint æquales, erunt adhuc ipsi arcus, similes. Id quod à nobis in scholio propos. 22. huius lib. demonstrabitur.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

Dati circuli centrum reperire.

Sit circulus datus ABCD, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque AC, a qua bifariam diuidatur in E, & per E, ad AC, perpendicularis agatur BD, vtrinque in peripheria terminata in punctis B, D. Hæc igitur bifariam secta in F: dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta BD, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam diuidat inæqualiter, quandoquidem in E diuisa fuit æqualiter. Si igitur F, non est centrum, sit punctum G, extra rectam BD, centrum, à quo ducantur lineæ GA, GE, GC. Quoniam ergo latera AE, EG, trianguli AEG, æqualia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG: & basis AG, basi CG; (à centro enim ducidicuntur)



a 10. pri.

a 8. pri. *cuntur) a erunt anguli AEG, CEG, æquales, ideoque recti; Erat autem & angulus AEF, rectus ex constructione. Igitur recti AEF, AEG; æquales sunt, pars & totum, quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademque est ratio de omni alio. Quare F centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.*

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, si in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod B D, recta rectam A C. bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum eius medium F, necessario esse circuli centrum.

ij. THEOR. 1. PROPOS. 2.

Si in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intrà circulum cadet.

In circulo ABC, sumantur qualiberduo puncta A, & C, in eius circumferentia. Dico rectam ex A, in C, ductam cadere intra circulum, ita vt ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea ADC, recta, vt vult aduersarius. Inuento b *igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta assumpta A, & C, nec non ad quoduis punctum D, in recta ADC, linea recta EA, EC, ED, secetque ED, circumferentiã in B. Quoniam ergo duo latera EA, EC, trianguli, cuius basis ponitur recta ADC, æqualia sunt,* (à centro enim ducuntur) c *erunt anguli EAD, ECD, æquales: Est autem angulus EDA;* d *angulo ECD, maior, externus interno opposito, cum latus CD, in triangulo ECD, sit productum ad A. Igitur & angulo EAD, maior erit idem angulus EDA. Quare recta EA, maiori angulo ADE, opposita, hoc est, recta EB, sibi æqualis, e maior erit, quam recta ED, minori angulo DAE, opposita, pars quam totum. Quod est absurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur, rectam ductam ex A, in C, non posse cadere super arcum ABC, ita vt eadem sit, quæ circumferentia ABC. Esset enim recta EA, maior, quam recta EB. Quod etiã ex definitione recta linea patet, cum ABC, arcus sit lineã curua, non autem recta. Itaque si in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.*

b 1. tertii.

c 5. pri.

d 16 pri.

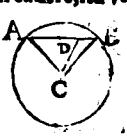
e 19. pri.

SCHOLIVM.

Idem hoc Theorema demonstrari poterit affirmatiue, hoc modo. Recta AB, coniungat duo puncta A, & B, in circumferentia circuli

AB,

AB, cuius centrum C. Dico rectam AB, intra circulum cadere, ita vt omnia eius puncta media intra circulum existant. Assumatur enim quodcunque eius punctum inter medium D, & ex centro educantur rectæ CA, CB CD. Quoniam igitur duo lateta CA, CB, trianguli CAB, æqualia sunt *a* erunt anguli CAB, CBA, æquales: Est autem angulus CDA, *b* angulo CBA, maior, externus interno. Igitur idem angulus CDA, angulo CAD, maior erit, & ob id latus CA, *c* latere CD, maius erit. Quare cum CA, ducta à centro ad circumferentiam, vsque, non perueniet recta CD, ad circumferentiam, ideoque punctum D, intra circulum cadet. Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto. Tota igitur recta AB, intra circulum cadit. Quod est propositum.



a 5. pri.
b 16. pri.
c 19. pri.

COROLLARIVM.

Hinc est manifestum, lineam rectam, quæ circulum tangit, ita vt eum non secet, in vno tantum puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, *d* caderet pars rectæ inter ea duo puncta posita intra circulum. Quare circulum secaret, quod est contra hypothesin.

d 2. ter.

THEOR. 2. PROPOS. 3. iij.

Si in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet: & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

Per centrum A, circuli BCD, recta CE, extensa diuidat rectam BD, non per centrum extensam, bifariam in F. Dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi BD. Ductis enim rectis AB, AD, erunt duo latera AF, FB, trianguli AFB, duobus AF, FD, trianguli AFD, æqualia: & bases AB, AD, æquales. e *Igitur anguli AFB, AFD, æquales erunt, hoc est, recti. Quod erat primo propositum.*

e 8. pri.

Sit iam AF, ad angulos rectos ipsi BD. Dico rectam BD, bifariam secari in F, à recta CE. Ductis enim iterum rectis AB, AD, cum latera AB, AD, trianguli ABD, sint æqualia, f erunt anguli ABD, ADB, æquales. Quoniam igitur duo anguli AFB, ABF, trianguli ABF, æquales sunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF: & latera AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque: g *erunt latera FB, FD æqualia. Quod secundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extensa, &c. Quod demonstrandum erat.*

f 5. pri.
g 26. pri.

Facile quoque demonstrari poterat secunda hæc pars, quæ quidem conuersa est primæ partis, hac ratione. Si enim AF, perpendicularis est ad BD, erit tam quadratum rectæ AB, æqua-

a 47. primi. *a aquale quadratis rectarum AF, FB, quam quadratum rectæ AD, quadratis rectarum AF, FD. Cum igitur quadratum rectæ AB, æquale sit quadrato rectæ AD; erunt & quadrata rectarum AF, FB, æqualia quadratis rectarum AF, FD. Quare dempto communi quadrato rectæ AF, remanebunt quadrata rectarum* FB, FD, *æqualia; atque idcirco & rectæ* FB, FD, *æquales erunt.*

COROLLARIVM.

Ex hac demonstratione facile inferemus, in quouis triangulo duorum laterum æqualium, siue æquilaterum illud sit, siue Isosceles, lineam, quæ basin bifariam secet, perpendicularem esse ad basin. Et contra, lineam, quæ ad basin sit perpendicularis, basin secare bifariam. Nam in triangulo ABD, cuius duo latera AB, AD. æqualia sunt, atque adeo ex centro A, per B, D, circulus describi potest: ex eo, quod recta AF, secat basin BD, bifariam ostensum est, angulos ad F, esse rectos: Et ex eo, quod anguli ad F, recti sunt, demonstratum est, basin BD, à recta AF, bifariam secari. Sed hoc etiam demonstrauimus ad propos. 26. lib. 1. & quidem vniuersalius.

SCHOLIVM.

Censemus quoque, demonstrandum esse hoc loco sequens theorema, ad ea, quæ sequuntur, non inutile; videlicet.

Duobus circulis ex eodem centro descriptis, si ab aliquo puncto circumferentię exterioris recta ducatur interioris circumferentiam secans; erunt eius segmenta inter vtramq; circumferentiam posita, inter se æqualia.

Duo circuli ABC, DEFG, habeant idem centrũ H, & ex puncto *A*, ducatur primum per centrum H, recta AC, secans circumferentiam interiorem in D, G. Dico rectas AD, CG, æquales esse. Nam si ex HA, HC, quæ *b* æquales sunt, demantur HD, HG, quæ eadem ratione æquales sunt, *c* erunt rectæ AD, CG, æquales.

b 15. def. c 4. prouu.

Deinde ex eodem puncto A, ducatur recta AB, non per centrum, secans interiorem circumferentiam in E, F. Dico rursus, rectas AE, BF, esse æquales. *d* Ducta enim ex centro H, ad AB, perpendiculari HI, *e* secabit hæc tam rectam AB, in circulo ABC, quam rectam EF. in circulo DEFG, bifariam. Ablatis igitur æqualibus IE, IF, ex æqualibus IA, IB, *f* remanebunt AE, BF, æquales, quod est propositum.

d 12. pri. e 3. ter. f 3. prou.

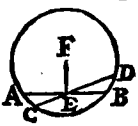
THEOR. 3. PROPOS. 4.

iiij.

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent non per centrum extensæ; sese mutuo bifariam non secabunt.

Duæ

DVÆ recta AB, CD, se mutuò in E, secent in circulo ACBD non per centrum extensa. Dico fieri non posse, ut mutuò sese bifariam secent. Si enim una earum per centrum transit, certum est, eam bifariam non secari: solùm enim in centro, per quod altera ponitur non transire, bifariam dividitur: Si verò neutra per centrum extenditur, quamvis una earum nonnunquam bifariam ab altera dividatur, tamen altera minimè secabitur bifariam. Divisa enim sit & AB, & CD, si fieri potest, bifariam in E. a *Invento igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta FE.* a 1. ter.

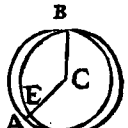


Quoniam ergo FE, ponitur secare rectam AB, bifariam in E, b *secabit ipsam ad angulos rectos. Eadem ratione secabitur CD, ad angulos rectos, cùm ponatur bifariam dividi in E. Quare rectus angulus FED, recto angulo FEB, aqualis est, pars toti, quod est absurdum. Itaque si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuò secent, &c. Quod erat demonstrãdum.* b 3. ter.

THEOR. 4. PROPOS. 5. v.

SI duo circuli sese mutuò secent; non erit illorum idem centrum.

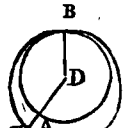
DVO circuli ABD, EBD, se mutuò secent in B, & D. Dico ipsos non habere idem centrum. Sit enim, si fieri potest, idem centrum utriusque, C, à quo duæ rectæ ducantur; CB, quidem ad sectionem B; CA, verò secans utramq; circumferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli EBD, erit recta EC, rectæ BC, aqualis. Rursus quia C, centrum quoque ponitur circuli ABD, erit & recta AC, eidem rectæ BC, aqualis. Quare recta EC, AC, c *aquales inter se erunt, pars, & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese mutuò secent, &c. Quod ostendendum erat.* c 1. pron.



THEOR. 5. PROPOS. 6. vj.

SI duo circuli sese mutuò interius tangant; eorum non erit idem centrum.

DVO circuli AB, BC, se interius tangant in B. Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, si fieri potest, idem centrum D, à quo duæ rectæ ducantur; DB, quidem ad tactum B. At DC, secans utramq; circumferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli AB, erit recta AD, rectæ BD, aqualis. Rursus quia D, ponitur centrum circuli BC, erit recta CD, eidem rectæ BD, aqualis. Quare recta AD, & CD; d *inter se erunt aquales, pars & totum, quod est absurdum.* d 1. pro. nun.



ſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe mutuò interius tangant, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

EVCLIDES propoſuit theorema hoc de circulis ſeſe interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius ſeſe tangentium, cùm unus ſit extra alium, non poſſe eſſe idem centrum, manifeſtum eſt.

vij.

THEOR. 6. PROPOS. 7.

SI in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima verò reliqua; aliarum verò propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore ſemper major eſt: Duæ autem ſolùm rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad utrasque partes minimæ, vel maximæ.

IN diametro AB, circuli ACDEB, cujus centrum F, punctum aſſumatur quodcunque G, prater centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ GC, GD, GE. Dico omnium, quæ ex G, ad circumferentiam ducuntur, maximam eſſe GA, in qua eſt centrum, minimam verò reliquam GB, quæ diametrum perficit: Deinde rectam GC, quæ recta GA, per centrum ducta propinquior eſt, majorem rectæ GD, quæ ab eadem GA, plus diſtat; & eadem ratione GD, majorem rectæ GE, atque ita de aliis lineis, ſi ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad utrasque partes minimæ lineæ GB, vel maximæ GA, duci poſſe tantummodò duas lineas inter ſe æquales. Ducantur è centro F; ad C, D, & E, rectæ lineæ FC, FD, FE. *Quoniam igitur duo latera* GF, FC, *trianguli* GFC, a *majora ſunt latere* GC. *Sunt autem rectæ* GF, FC, *æquales rectis* GF, FA, *hoc eſt, toti rectæ* GA; *erit &* GA, *maior quàm* GC. *Eadem ratione maior erit recta* GA, *quàm* GD, *& quàm* GE. *Quare* GA, *maxima eſt omnium, quæ ex* G, *in circulum cadunt.*

a 20. primi.

b 20. pri

DEINDE, quoniam in triangulo EFG, *latus* EF, b *minus eſt duobus lateribus* FG, GE. *Eſt autem* EF, *ipſi* FB, *æqualis; erit & FB, minor duabus rectis* FG, GE. *Dempta ergo communi recta* FG, *remanebit adhuc* GB, *minor, quàm* GE. *Eadem ratione minor erit* GB, *quàm* GD, *& quàm* GC. *Quare* GB, *minima eſt omnium, quæ ex* G, *in circuli circumferentiam cadunt.*

RVRSVS, quia duo latera GF, FC, *trianguli* GFC, *æqualia ſunt*

sunt duobus lateribus G F, F D, *trianguli* GFD; *& angulus totus* G F C, *major est angulo* G F D; a *erit basis* G C, *major basi* G D. a 24. pri. *Eadem ratione major erit* G C, *quàm* G E: *Item major erit* G D, *minor quàm* G E. *Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, major est ea, quæ remotior.*

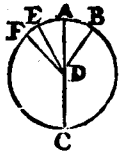
FIAT jam angulo B F E, *ex altera parte æqualis angulus* B F H, *& ducatur recta* G H. *Quoniam igitur latera* E F, F G, *trianguli* E F G, *æqualia sunt lateribus* H F, F G, *trianguli* H F G, *& anguli his lateribus contenti* E F G, H G F, *æquales;* b *erunt rectæ* G E, G H, b 4. pri. *ex utraque parte ipsius lineæ minimæ* G B, *vel maximæ* G A, *æquales inter se. Quòd autem nulla alia his duabus possit esse æqualis, constat. Nam si ex* G, *ducatur alia, quæ cadat supra punctum* H, *erit ea, cùm sit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, major quàm* G H: *si verò cadat infra* H, *erit ea, cùm sit remotior ab eadem* G A, *per centrum ducta, minor quàm* G H, *ut ostensum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad utrasque partes minimæ* G B, *vel maximæ* G A, *cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

QVANQVAM autem Euclides solùm demonstraverit, lineam; quæ propinquior est rectæ per centrum ductæ, remotiore esse majorem, si ambæ lineæ ex eadem parte diametri A B, existant; idem tamen verum etiam est, si ad diversas partes ductæ sint. Vt si quis dicat, rectam G D, propinquiorem esse rectæ G A, quàm rectam G H; dico G D, majorem esse, quàm G H. Si namque ipsi G H, ex altera parte æqualis ducatur G E, ut dictum est; nempe si fiat angulo G F H, æqualis angulus G F E, &c. cadet punctum E, inter D, & B; quod G H, G E, æqualiter à G A, distent, ob æqualitatem angulorum G F H, G F E; & G D, ponatur minùs distare quàm G H, ac proinde minùs, quàm G E. Cùm c ergo G D, major sit, quàm G E, major quoque erit c 7. ter. eadem G D, quàm G H.

HANC porrò propositionem nulli convertunt, hoc modo.

SI intra circulum punctum sumatur; ab eoque puncto in circulum rectarum linearum cadentium; una quidem maxima sit, una verò minima; & reliquarum aliæ sint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima verò erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt maximæ propinquiores, æquales autem ab eadem maxima, vel minima æqualiter distabunt.



IN circulo *ABC*, punctum sumatur D, à quo rectæ quotcunque D A, D C, D E, D F, D B, cadant in circumferentiam, quarum omnium maxima sit D A, minima verò D C; ipsarum verò D E, D F, major sit D E; denique D E, D *B*, sint æquales. Dico D A, per centrum transire, & D C, reliquam partem esse diametri, hoc est, *D* C, ipsi D A, esse in directum. Item D E, quæ major ponitur quàm D F, propinquiorem esse maximæ D A, quàm D F. Denique D E, *D B*, æqualiter ab eadem D A, vel D C, abesse. Primum enim si D *A*, non transit per centrum; ducta ex D, per centrum recta
a 7. ter. quapiam linea, *a* erit ea omnium ex D, cadentium maxima. Quod est absurdum; cùm D A, maxima ponatur. Transit ergo D A, per centrum.

DEINDE si D C, non est in directum ipsi D A; protracta A D,
b 7. ter. in directum, *b* erit alia recta quàm D C, ex *D*, cadens, nempe pars ipsius A D, protractæ, omnium minima; Quod est absurdum; cùm D C, minima ponatur. Est ergo D C, reliqua pars diametri.

RVRSVS si D E, non est vicinior maximæ D A, quàm D F; aut æqualiter distabunt ab ea, aut D E, longiùs ab ea aberit: Si æqualiter
c 7. ter. utrinq; à D A, dicantur distare, *c* ipsæ erunt æquales; quod est absurdum Ponitur enim D E, major. Si verò æqualiter ex eadem parte à D A, distare dicantur, erùt D E, D F, una eademq; linea; atq; adeò D E, major non erit, quàm D F, quod est contra hypothesin. Quod si D F, dicatur esse propinquior maximæ D A, *d* ipsa erit major,
d 7. ter. quàm D *E*. Quod magis est absurdum.

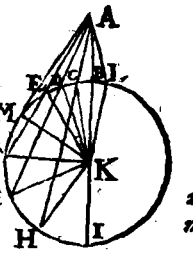
POSTREMO si D E, D B, non æqualiter distant à *D* A, vel
e 7. ter. D C, *e* erit ea, quæ magis à D A, distat, reliqua minor. Quod est absurdum. Ponuntur enim æquales D *E*, D *B*.

viij. ## THEOR. 7. PROPOS. 8.

SI extra circulum sumatur punctum quodquiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, reliquæ verò ut libet: In cavam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper major est; In convexam verò peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est. Duæ autem tantùm rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad utrasq; partes minimæ, vel maximæ.

EX

EX puncto A, extra circulum BCDE, cujus centrum K, lineæ secantes circulum ducantur, quarum AI, per centrum transeat, aliæ verò AH, AG, AF, utcunque. Dico omnium esse maximam AL, quæ per centrum incedit: Deinde rectam AH, quæ recta AI, quæ per centrum ducitur, propinquior existit, majorem rectæ AG, quæ remotior est ab eadem AI: Et eadem ratione AG, majorem quàm AF. E. contrario autem, rectam AB, omnium, quæ extra circulum sunt, minimam esse: Deinde rectam AC, quæ vicinior est minimæ AB, minorem esse rectâ AD, remotiore; Et eadem ratione, ipsam AD, minorem, quàm AE. Denique ex A, ad utrasque partes minimæ lineæ AB, vel maximæ AI, duci posse tantummodò duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ KC, KD, KE, KF, KG, KH. Quoniam igitur duo latera AK, KH, trianguli AKH, a majora sunt recta AH. Sunt autem rectæ AK, KH, æquales rectis AK, KI, hoc est, toti rectæ AI; erit & AI, major quàm AH. Eâdem ratione erit AI, major, quàm AG, & quàm AF. Quare AI, est omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.



a 20. primi.

DEINDE, quoniam latera AK, KH, trianguli AKH, æqualia sunt lateribus AK, KG, trianguli AKG; Et angulus totus AKH, major est angulo AKG; b erit basis AH, basi AG, major. Eadem ratione major erit AH, quàm AF: Item AG, major, quàm AF. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, major est linea remotiore.

b 24. primi.

RURSUS, quia in triangulo ACK, rectæ AK, C minor est duabus AC, CK; si auferantur æquales BK, CK; remanebit adhuc AB, minor, quàm AC. Simili ratione erit AB, minor, quàm AD, & quàm AE. Quare AB, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima est.

c. 20. primi.

RURSUS, cùm intra triangulum ADK, cadant duæ rectæ AC, CK, ab extremitatibus lateris AK; d erunt AC, CK, minores, quàm AD, DK, Sublatis igitur æqualibus CK, DK, remanebit adhuc AC, minor quàm AD. Pari ratione erit AC, minor, quàm AE: Item AD, minor quàm AE. Quare linea propinquior minimæ lineæ, AB, minor est, quàm remotior ab eadem.

d 21. primi.

POSTREMO fiat angulo AKC, angulus AKL, æqualis, & ducatur recta AL. Quoniam igitur latera AK, KC; trianguli AKC, æqualia sunt lateribus AK, KL, trianguli AKL; Sunt autem, & anguli AKC, AKL, dictis lateribus contenti æquales; e erunt rectæ AC, AL, ex utraque parte minimæ AB, vel maximæ

e 4. p.

AI, inter se æquales. Quòd autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex A, ducatur recta cadens ultra L, erit ipsa, cùm sit remotior à minima, major quàm AL. Quod si cadat inter B, & I, erit ea, cùm sit minimæ propinquior, minor quàm AL, ut ostensum est. Duæ igitur solùm rectæ lineæ æquales ad utrasque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodlibet, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ quarum una quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EADEM ratione ab A, in peripheriam concavam duæ tantùm lineæ æquales cadent, ad utrasque partes maximæ AI.

FIAT enim angulo AKH, æqualis angulus AKM, jungatúrque recta AM. Quia igitur latera AK, KH, æqualia sunt lateribus AK, KM; sunt autem & anguli AKH, AKM, æquales: *a* erunt bases AH, AM, æquales. Neque verò ulla alia his duabus æquabis exhiberi potest. Nam quæcunque ex A, ducatur ad partes H, ea vel major erit, vel minor, quàm AH, prout citra vel ultra rectam AH, ducta fuerit, ut manifestum est ex demonstratione theorematis.

a 4. tri.

HÆC propositio vera etiam est, quando una linearum ex A, cadentium circulum tangit. Hæc enim quia longiùs à linea per centrum ducta abest, minor erit omnibus alijs in cavam peripheriam cadentibus, qualis est recta AM, in priori figura. Nam ducta recta KM, ex centro ad contactum, erunt duo latera AK, KF, trianguli AKF, æqualia duobus lateribus AK, KM, trianguli AKM, angulus verò AKF, angulo AKM, major. Igitur *b* basis AF, basi AM, major erit. Eadem ratione major erit quæcunque alia in cavam peripheriam cadens, quàm recta AM.

b 24. primi.

PARI ratione eadem linea tangens AM, major erit omnibus alijs in eam cavam peripheriam cadentibus. Nam cùm duo latera AE, EK, *c* minora sint duobus lateribus AM, MK: si auferantur æquales rectæ KE, KM, erit reliqua AE, minor quàm reliqua AM. Eademq; ratio est de cæteris.

c 21. primi.

QVANQVAM verò Euclides solùm demonstraverit, lineam propinquiorem ei, quæ per centrum ducitur, majorem esse remotiore: Item lineam propinquiorē minimæ minorem esse remotiore, si ambæ lineæ ex eadem parte maximæ, vel minimæ existant: idem tamen verum etiam est, si ad diversas partes ductæ sint. Quod non aliter demōstrabitur, quàm idem in scholio præcedentis propositionis de duabus lineis ad diversas partes ductis demonstratum fuit.

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 9. IX.

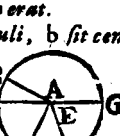
SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quàm duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

A puncto assumpto A, in circulo BCD, cadant plures rectæ, quàm duæ, AB, AC, AD, inter se æquales. Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis BC, CD; quibus divisis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ AE, AF. Quoniam igitur latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus AE, EC, trianguli AEC; & bases AB, AC, ponuntur etiam æquales; a erunt anguli AEB, AEC, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cùm recta AE, AF, dividant rectas BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos, transibit utraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. hujus lib. Punctum igitur A, in quo se mutuò secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret utraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 8. pri.

ALITER. Si punctum A, non est centrum circuli, b sit centrum inventum E, ex quo per A, agatur diameter GF. Quoniam igitur in diametro FG, præter centrum acceptum est punctum A, à quo in circumferentiam cadunt rectæ AD, AC; c erit recta AD, quæ propinquior est rectæ AG, per centrum E, ducta major, quàm recta AC, remotior ab AG, quod est absurdum. Posita sunt enim æquales rectæ AD, AC. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter A, centrum ponatur.

b 1. ter.



c 7. ter.

QVOD si quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum una trium æqualium datarum, ut si dicantur æquales tres AB, AF, AC, ubi EA, coincidit cum AF; d erit AF, omnium à puncto A, cadentium minima, atque adeò minor, quàm AB, & AC, quod est absurdum. Penitur enim utriq; æqualis.

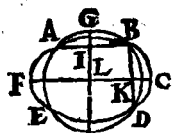
d 7. ter.

THEOR. 9. PROPOS. 10. X.

CIRCVLVS circulum in pluribus, quàm duobus, punctis non secat.

SECET enim, si fieri potest, circulus ABCDEF, circulum AGBDHE, in plurimbus, quàm duobus punctis A & D, quæ jun-

a 10. pri.
b 11. pri.



gantur rectis A B, B D: quibus a bifariam divisis in I, & K, b educantur ex I, & K, ad A B, & B D, perpendiculares I L, K L. Quoniam igitur recta I L, K L, secant rectas A B, B D, in circulo A G B D H E, bifariam, & ad angulos rectos; transibit utraque, ex corollario propos. 1. huius lib. per centrum ipsius. Quare punctum L, in quo se dividunt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli A B C D E F. Duo igitur

c 5. ter.

circuli se mutuò secantes idem possident centrum, c quod est absurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat, Quod erat demonstrandum.

ALITER. Secent se idem duo circuli, si fieri potest, in tribus

d 1. ter.

punctis A, B, & D. d Inventum autem sit I, centrum circuli

A G B D H E, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ I A, I B, I D, quæ per defin. circuli æquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulum A B C D E F, assumptum est punctum I, à quo cadunt in circumferentiam plures, quàm

e 9. ter.

duæ rectæ æquales, e erit I, centrum circuli A B C D E F. Erat autem idem punctum I, centrum circuli A G B D H E. Duo ergo

f 5. ter.

circuli se mutuò secantes habent idem centrum. f Quod est absurdum.

xj.

THEOR. 10. PROPOS. 11.

SI duo circuli sese intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adjuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TANGAT circulus A B C, circulum A D E, intus in A, & sit F, centrum circuli A B C, & G, centrum circuli A D E, quod necessariò ab illo diversum erit, cùm duo circuli interius se tangen-

g 6. ter.

tes, g non possint idem centrum habere. Dico rectam extensam per, G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit, secet utrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur A F, A G. Quoniam igitur in triangulo A F G,

h 20. pri.

duo latera G F, F A, h majora sunt latere G A; Est autem G A, recta rectæ G D, æqualis; (quod G, positum sit centrum circuli A D E) erunt & G F, F A, rectæ majores rectæ G D. Dempto igitur communi G F, remanebit F A, major, quam F D. Quare cùm F A, æqualis sit ipsi F B; (quod F, positum fuerit centrum circuli A B C) erit & F B, major, quàm F D, parsquàm totum, quod est absurdum.

QVOD si quis velit contendere F, esse centrum circuli

A D E.

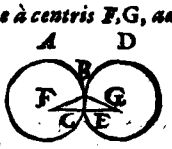
ADE, & G, centrum circuli ABC.instituetur argumentatio hac ratione.In triangulo AFG,duo latera FG, G*A*, a *maiora sunt latere FA: Est autem recta FA, recta* FE, *aqualis* (*cum* F, *ponatur centrum circuli ADE,*) *Igitur rectæ* FG, G*A*, *maiores sunt recta* FE. *Demptæ ergo communi* FG, *remanebit* G*A*, *maior, quam* GE. *Quia igitur* G*A*, *æqualis est ipsi* GC: (*propterea quod* G, *ponitur esse centrum circuli* ABC) *erit quoque* GC, *maior, quam* GE, *pars quam totum, quod est absurdum. Idem absurdum sequetur, si centrum maioris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta* FG, *extensa, vtrumque circulum secabit, sed in contactum A, cadet. Quare si duo circuli sese intus contingant, &c. Quod erat demonstrandum.*

a 20. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 12. xj.

Si duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

CIRCVLI duo ABC, DBE, *tangant se exterius in B, & centrum circuli ABC, sit F, circuli verò* DBE, *centrum sit* G. *Dico rectam extensam per* F, *&* G, *transire per contactum B. Si enim non transit, secet circumferentias in C, & E, ducanturque à centris F, G, ad B, contactum rectæ* FB, GB. *Quoniam igitur in triangulo* FBG, *latera duo* BF, BG, *maiora sunt latere* FG; *Est autem recta* BF, *recta* FC, *æqualis: (quod* F, *ponatur centrum circuli* ABC,) *& recta* GB, *rectæ* GE, *æqualis; (quod* G, *ponatur centrum circuli* DBE,) *erunt & rectæ* FC, GE, *maiores quam recta* FG, *pars quam totum, (cum* FG, *contineat præter* FC, GE, *rectam adhuc* CE,) *quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.*

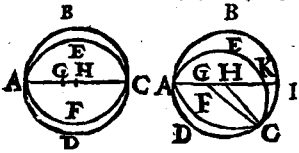


b 20. primi.

THEOR. 12. PROPOS. 13. xij.

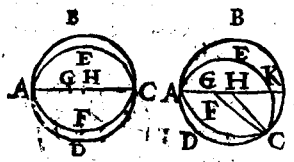
CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, siue intus, siue extra tangat.

TANGANT sese circuli AB CD, AECF, *intus, si fieri potest, in pluribus punctis, quam vno, A, & G: Assumatur autem centra horum circulorum* G, *H, c quæ diuersa erunt, per quæ recta GH, in vtramque partem extendatur, quam necesse est d*



c 6. tert.

cadere d 11. tert.



cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, sit centrum, & recta AGHC, diameter, diuidetur AGHC, bifariam in puncto G. Simili ratione diuidetur eadem AC, bifariam in H, quod est absurdum. Vna enim recta in vno duntaxat puncto diuiditur bifariam. Si namque GC, est dimidium totius AC, erit necessario HC, dimidio minor, cum sit pars dimidij GC.

QVOD si quis dicat rectam GH, extensam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At verò ad partes H, minime pertinere ad contactum C, sed secare vtrumque circulum in I, & K, vt in secunda figura perspicuum est: (Dicere enim quis posset, in precedenti propos. ostensum esse, rectam per duo centra circulorum sese intus tangentium ductam cadere in vnum duntaxat contactum, non autem in alterum, quod tamen nemo rectè affirmare poterit, cum demonstratio precedentis propos. vtrique contactui conueniat. Sed quicquid dicat aliquis, ostendemus, absurdum illud esse) ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ GC, HC. Ponatur igitur primo G, centrum circuli ABCD. & H, centrum circuli AECF. Et quia in triangulo GHC, duo latera GH, HC, a maiora sunt latere GC: Sunt autem recta GH, HC, æquales ipsi GK: (quod HC, HK, ex centro H, sint æquales, & GH, communis) & recta GC, recta GI; (quod sint ex G, centro) erit quoque recta GK, maior quam GI, pars quam totum, quod est absurdum. Ponatur secundo G, centrum circuli AECF; & H, centrum circuli ABCD. Quoniam igitur recta HG, GC, b maiores sunt recta HC; Est autem HC, æqualis rectæ HA; (cum vtraque ducta sit ex centro H,) erunt quoque HG, GC, maiores recta GA. Quare dempta communi HG, erit GC, maior, quam GA, quod est absurdum, cum vtraque ex centro G, ducatur. Non igitur circuli intus se tangent in pluribus punctis, quam vno.

a 20. primi.

b 20. primi.

TANGANT se iam circuli AB, CB, exterius in pluribus punctis, quam vno prope F. Ducatur ex D, centro circuli AB, ad E, centrum circuli CB, recta DE, c qua per contactum F, necessario transibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, se tangunt, tangant sese in B. Ductis igitur rectis DB, EB, erunt rectæ DB, EB, æquales rectis DF, EF, hoc est, ipsi DE: d Sunt autē & maiores, quod est absurdum. Non ergo se tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam vno.

c 12. tert.

d 20 primi.

ALITER. Si circuli AB, CB, exterius se tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta BF, cadet ipsa intra vnum circulorum, per

rum, per 2. propos. huius tertij lib. & ideo extra alium, quod est. contra eandem propos. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Si recte consideretur Euclidis demonstratio, quæ probauit, circulū à circulo intus non posse tangi in pluribus punctis, quam vno, videtur ea potissimum concludere, circulum non posse tangi à circulo in duobus, vel pluribus punctis, quæ longo interuallo à se dissideant, non autem eundem contactum plura puncta habere non posse; quamuis facile hoc ipsum eodem argumento fere demonstrari possit. Quare vt omni ex parte confirmatum reliquatur, circulum non posse tangere circulum in pluribus punctis, quam vno, ostendemus breuiter, in vno eodemque contactu non posse esse plura puncta, quam vnum. Tangat enim circulus ABG, circulum ABD, prope A; & per eorum centra E, & F, *a* quæ diuersa sunt, recta ducatur EF, *b* quæ ad contactum perueniet necessario, vt ad punctum A. Dico igitur, hos circulos sese duntaxat tangere in puncto A. Si enim se tangant in alio etiam puncto, vt in B; ductis ex B, ad centra E, & F, rectis BE, BF, *c* erunt rectæ EF, FB, maiores recta EB. Est autem recta EB, æqualis rectæ EA, cum vtraque sit ex centro E. Igitur & rectæ EF, FB, maiores erunt recta EA. Quare dempta communi EF, remanebit FB, maior, quam FA, quod est absurdum, cum FB, FA, cadant è centro F, ad circumferentiam, ideoque ex circuli defin. æquales existant. In solo ergo puncto A, se mutuo tangent circuli ABC, ABD, & non in alio.

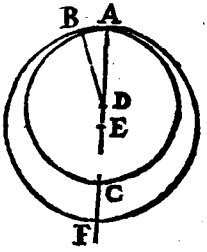
a 6. ten.
b 11. ter.
c 20. primi.

NON videtur etiam omittendum hoc loco sequens theorema, videlicet.

SI in semidiametro circuli producta punctum vltra centrum sumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus tanget priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusque extra eundem cadet.

SIT circulus ABC, cuius centrum D, & in semidiametro AD, producta sumatur punctum quodcunque E, ex quo ad interuallum EA, circulus describatur AF, quem dico circulum ABC, in solo puncto A, tangere. Aut enim punctum E, est intra circulum ABC, aut extra. Si intra, quoniam AE, maior est, quam AD, hoc est, quam DC, hoc est, à fortiori, quam EC; erit quoque EF, quæ ipsi AE, æqua-

AE, æqualis est, maior quam EC: ac proinde punctum F, extra circulum ABC, existet, circulusque AF, extra eundem circulum ABC, prope punctum F, existet. Multo magis punctum F. extra circulum ABC, cadet, si E, extra eundem circulum ABC, existet: Si igitur circulus AF, non totus extra circulum ABC, cadat, ita vt eum in solo puncto A tangat; secet, vel tangat circulus AF, circulum ABC, in alio puncto B, si fieri potest, ducaturque recta DB. Quoniam igitur in diametro circuli AF, sumptum est punctum D, præter centrum E, a erit DA, omnium rectarum ex D, cadentium minima. Minor est ergo DA, quam DB, quod est est absurdum. Sunt enim æquales rectæ DA, DB, cadentes ex centro D, in circumferentiam eiusdem circuli ABC. Non ergo circulus AF, circulum ABC, secat aut tangit in alio puncto, quam in A, sed totus extra illum cadit. Quod est propositum.



a 7. ter.

QVOD si in semidiametro non producta punctum sumatur citra centrum, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus, tanget quoque priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusque intra eundem cadet. Vt si in semidiametro AE, circuli AF, sumatur punctum D, ex quo ad interuallum, DA, circulus describatur ABC, cadet hic totus intra illum, tangetque eum in solo puncto A. Cum enim ostensum proxime sit, circulum AF, cadere totum extra circulum ABC, cadet viciſſim totus hic intra illum, ita vt se mutuo in solo puncto A, contingant.

xiij.

THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN Circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro. Et quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

SINT *in circulo* ABCD, *cuius centrum E, duæ rectæ æquales* AB, CD. *Dico ipsas æqualiter distare à centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas AB, CD, duæ perpendiculares EF, EG, & coniungantur rectæ EA, ED.* b *Secabunt rectæ* EF, EG, *rectas AB, CD, bifariam. Quare cum totæ AB, CD, æquales ponantur, erunt & dimidiæ earum, rectæ videlicet AF, DG, æquales. Quoniam igitur quadrata rectarum* EA, ED, *æqualium, inter se sunt æqualia; Quadratum autem rectæ* EA, c *æquale est quadratis rectarum AF, FE. & quadratum rectæ* ED, *quadratis rectarum* DG, GE: *Erunt quoque quadrata rectarum* AF, FE, *æqualia*

b 3. ter.

c 47. tert.

æqualia quadratis rectarum DG, GE. *Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum AF, DG, remanebunt quadrata rectarum* FE, GE, *æqualia, ideoque & recta* EF, EG, *æquales erunt: Distant igitur per 4. defin. huius lib. recta* AB, CD, *æqualiter à centro* E.

RVRSVS *distent rectæ* AB, CD, *æqualiter à centro* E. *Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterum ex centro* B, *ad* AB, CD, *perpendiculares* EF, EG, *quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt;* a *diuidentque rectas AB, CD, bifariam. Ductis igitur rectis EA,* a 3. tert. *ED, erunt earum quadrata æqualia: Est autem quadratum rectæ* EA, b *æquale quadratis rectarum* AF, FE; *& quadratum rectæ* b 47. primi. ED, *æquale quadratis rectarum* DG, GE. *Igitur & quadrata rectarum* AF, FE, *æqualia sunt quadratis rectarum* DG, GE; *ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum* EF, EG, *remanebunt quadrata rectarum* AF, DG, *æqualia; atque adeo rectæ* AF, DG, *ac propterea earum duplæ* AB, CD, *æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro &c. Quod erat demonstrandum.*

THEOR. 14. PROPOS. 15. XIV.

IN circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.

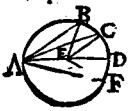
IN *circulo* ABCDEF, *cuius centrum* G, *diameter sit,* AF; *& rectæ ei propinquior* HI, *remotior autem* CD. *Dico omnium esse maximam AF, & HI, maiorem, quam* CD. *Ducantur enim ex* G, *centro rectæ* GK, GL, *perpendiculares ad* CD, HI. *Et quia remotior est* CD, *à centro, quam HI, erit GK, maior quam* GL, *per 4. defin. huius lib. Abscindatur ex* GK, *recta* GM, *ipsi* GL, *æqualis; atque per M, educatur* BME, *perpendicularis ad* GK, *& connectantur rectæ* GB, GC, GD, GF. *Quoniam igitur rectæ perpendiculares* GM, GL, *æquales sunt, æqualiter distabunt rectæ* BE, HI, *à centro, per 4. defin huius lib.* c *& ideo inter se æquales erunt.* c 14. tert. *Rursus quia rectæ* GB, GE, d *maiores quidem sunt rectæ* BE, *æquales autem diametro AF; erit & diameter AF, maior quam* BE. *Eadem ratione ostendetur AF. maior omnibus alijs lineis. Deinde quia latera* GB, GE, *trianguli* BGE, *æqualia sunt lateribus* GC, GD, *trianguli* CGD; *& angulus* BGE, *maior est angulo* CGD; e *erit recta* BE, *maior quam* CD; *atque adeo* HI, *qua æqualis ostensa fuit ipsi* BE, *maior* e 24 primi.

BE, maior quoque erit quam CD. In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EODEM ferè modo demonstrabitur theorema, si ab vno, eodemque circumferentiæ puncto plurimæ lineæ cadant.

CADANT enim à puncto A. plures lineæ AB, AC, AD, quarum AD, per centrum E, transeat. Dico AD, esse omnium maximam, & AC, maiorem remotiore AB. Ductis enim rectis BE, CE; cum in triangulo AEC, latera AE, EC, *a* maiora sint latere AC; sintque rectæ AE, EC, æquales rectis AE, ED, hoc est, recta AD; maior erit AD, quam AC. Eademque ratione maior erit, quam AB, & sic de cæteris. Maxima ergo omnium est AD.



a 20. primi.

DEINDE, quia duo latera AE, EC, trianguli AEC, æqualia sunt duobus lateribus AE, EB, trianguli AEB; & angulus AEC, totus maior est angulo AEB; *b* erit basis AC, maior basi AB. Eodemque argumento erit AC, maior quacunque alia linea, quæ à centro remotior est.

b 24. primi.

CÆTERVM & hic duæ tantum æquales lineæ duci possunt à puncto A, ad vtrasq; partes maximæ AD. Si namque angulo AEC; æqualis fiat angulus AEF, iungaturque recta AF; cum latera AE, EC, æqualia sint lateribus AE, EF, & anguli contenti quoque AEC, AEF, æquales; *c* erunt bases AC, AF, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis potest exhiberi. Quæcunque enim ducatur ex A, supra AC, ea minor erit quam AC; si vero infra AC, ea maior erit, vt iam demonstratum est.

c 4. primi.

QVOD si AB, AF, ad diuersas partes diametri AD, ductæ sint, & dicatur AF, propinquior centro, quàm AB, demonstrabitur, vt in scholio propos. 7. huius lib. AF, maiorem esse quàm AB. Si namque, vt proxime ostensum fuit, ducatur ipsi AF, æqualis AC, ex altera parte, nempe si fiat angulo AEF, æqualis angulus AEC, &c. cadet punctum C, inter B, & D; quod AF, AC, *d* æqualiter distent ab AD, ob earum æqualitatem, aut certe ob æquales angulos AEF, AEC. Hinc enim fit, cum AF, ponatur propinquior centro, quam AB vt & AC, ipsi AF, æqualis, propinquior sit centro, quam AB, ac proinde punctum C, sit inter B, & D. Cum ergo AC, maior sit, quam AB, vt in hoc scholio demonstratum est, maior erit quoque AF, quam AB,

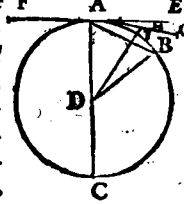
d 14. huius.

THEOR. 15. PROPOS. 16.

QVÆ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam compre-

comprehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.

IN circulo ABC, *cuius centrum* D, *diameter sit* AC, *ad quam ex* A, *puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum qualis est* AB; *ducta* DB; a *erunt duo anguli* DAB, DBA, *aquales, sed* DAB, *rectus est, per constructionem: Igitur &* DBA, *rectus erit, quod est absurdum. Duo enim anguli in triangulo* b *minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; neque eandem ob causam in ipsam circumferentiam, sed extra, qualis est* EF. *Dico iam ex* A, *inter* AE, *rectam, & circumferentiam* AB, *non posse cadere alteram rectam. Cadat enim, si fieri potest, recta* AG, *ad quam ex* D, *ducatur perpendicularis* DH, *secans circumferentiam in* I, *qua necessario ad partes anguli acuti* DAG, *cadet, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 1. Quoniam igitur in triangulo* DAH, c *duo anguli* DHA, DAH, *minores sunt duobus rectis; &* DHA, *rectus est, per constructionem, erit angulus* DAH, *recto minor, ideoque recta* DA, *hoc est, recta illi aqualis* DI, d *maior erit, quam* DH, *pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter* AE, *& circumferentiam* AB: *sed quacunque ex* A, *ducatur infra* AE, *ea secabit circulum. Dico denique angulum semicirculi, contentum diametro* AC, *& circumferentia* AB, *maiorem esse omni acuto angulo rectilineo; reliquum verò angulum contingentia, qui continetur recta* AE, *& circumferentia* AB, *minorem esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim ostensum est, omnem rectam ex* A, *ductam, infra perpendicularem* AE, *cadere intra circulum, faciet necessario ea linea cum* AC, *angulum rectilineum acutum minorem angulo semicirculi, at verò cum* AE, *angulum rectilineum acutum maiorem angulo contingentia, cum ille sit pars anguli semicirculi, hic verò totum quidpiam respectu anguli contingentia. Id quod liquido constat, ducta recta* AB, *quomodocunque infra* AE. *Nam cum hac linea* AB, *intra circulum cadat, vt demonstratum est, erit angulus rectilineus acutus* CAB, *minor angulo semicirculi contento sub diametro* AC, *& circumferentia* ABC, *cum ille huius sit pars: Angulus verò contingentia contentus sub tangente linea* AE, *& circumferentia* ABC, *minor angulo rectilineo acuto* BAE, *quod ille huius pars sit. Eademque ratio est de omnibus alijs angulis acutis rectilineis, cum omnes contineantur à diametro*



a 5. primi.

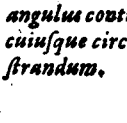
b 17. primi.

c 17. primi.

d 19. primi.

metro AC, vel tangente AE, & rectis ex A, sub AE, ductis, quæ omnes intra circulum cadent, vt demonstrauimus. Angulus igitur semicirculi maior est omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentiæ, minor. Itaque quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

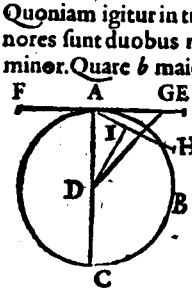


HINC manifestum est, rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam ipsum circulum tangere. Ostensum enim est, ipsam cadere extra circulum. Quare solum in puncto illo diametri extremo circulum attingit.

QVARE si iubeamur per datum punctum A, in circumferentia circuli AB, rectam lineam ducere, quæ circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam AC, & ad eam excitabimus perpendicularem DAE. Hæc enim circulum tanget in A, vt demonstratum est.

EX ORONTIO.

POTEST hoc idem theorema demonstrari ostensiue hac ratione. Sit diameter AC, in circulo ABC, cuius centrum D Ducatur ex A, ad AC, perpendicularis AE, quam dico extra circulum cadere. Sumatur enim in ea quoduis punctum G, & coniungatur recta GD. Quoniam igitur in triangulo ADG, duo anguli DAG, DGA, *a* minores sunt duobus rectis, & DAG, factus est rectus; erit DGA, recto minor. Quare *b* maior erit recta DG, quam DA; ideoque punctum G, extra circulum erit. Eademque est ratio de omnibus alijs punctis rectæ AE. Cadet ergo tota AE, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra AE, recta AH, quam dico necessario secare circulum. Fiat enim angulus ADI, æqualis angulo EAH. Addito igitur communi angulo DAH, erunt duo anguli ADI, DAH, æquales toti angulo recto DAE, ideoque minores duobus rectis: Quare *c* coibunt rectæ AH, DI, in aliquo puncto, vt in I. Dico igitur punctum I, esse intra circulum. Quoniam enim tres anguli in triangulo DAI, *d* æquales sunt duobus rectis, & duo anguli D AI, ADI, ostensi sunt æquales recto DAE; erit reliquus AID, rectus, atque adeo maior, quam DAI, acutus. Quare recta DA, *e* maior est, quam DI. Non igitur DI, ad circumferentiam perueniet; propterea que punctum I, intra circulum existet; atque adeo recta AH, circulum secabit. Reliquæ partes theorematis ostendentur, vt prius.



a 17. *primi.*

b 19. *primi.*

c 13. *pron.*

d 32. *primi.*

e 19. *primi.*

SCHO-

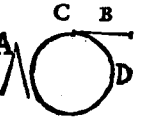
SCHOLIVM.

Existimat Peletarius, angulum contingentiæ, quam Euclides hic probauit minorem esse omni acuto angulo rectilineo, nihil esse, atque adeo ex illo contactu lineæ rectæ & circumferentiæ, non effici angulum vllum. Vt autem sententia illius planior fiat, afferemus in medium digressionem illam, quam ipse hoc loco instituit. Sic igitur inquit:

Cum huius theorematis caput postremum attentius considerarem, mihi sane in mentem subiit prima specie, Geometriam non satis sibi constare; *immo adeo repugnantiam in se admittere.*

Primum enim extra intelligentiam est, vt inter quantitates minima dari possit; qualem hoc loco angulum, quem dicunt contingentiæ, seu rectius, contactus, minorem omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima quantitas detur, qualis hic angulus semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quãtitas est, quod partibus constet, & secundum eam æquale, & inæquale dicatur. Quantitatis etiam continuæ in infinitum sectio est. Atque adeo cum in primam propositionem decimi incidissem, *tum magis anxie expendere cepi, quonam pacto* conciliari posset tam aperta, vt apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.

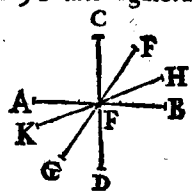
Si à maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidium; ac rursus ex reliquo maius, quam dimidium, idque continuo fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.



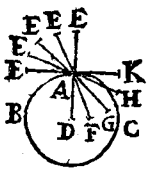
Verbi causa, sint duo anguli A, quidem rectilineus: BCD, vero angulus (si modo sit angulus) contactus: Vult prima decimi, si auferatur ab angulo A, maius, quam dimidium, ac rursus à reliqua parte maius, quam dimidium: sicque continuo ex residuis partibus maius, quam dimidium: tandem relinqui minorem angulum, quam BCD. Cuius demonstrationem hic non appono, cum ex sequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propositio est, quæ (vt sic dicam) magis naturaliter vera sit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non videt, propositis duobus numeris 8. & 2. cum ab octonario maius quam dimidium abstuleris, vt quinarium: tum à ternario residuo, maius quam dimidium, vt binarium; relinqui vnitatem posito binario minorem? Neque vero ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla est: quin etiam menti Euclidis contraria, vt nos, cum illuc ventum erit, manifestum faciemus. Immo & ipse Campanus, secum

pugnat, cum in ſecunda duodecimi demonſtranda, aliiſque propoſitionibus nonnullis ſolidorum, à curuo rectum auferat.

Nos igitur hanc dubitationem ſic expediemus: vt dicamus, lineam rectam, quæ circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere: ſcilicet BCD, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in ſectione conſiſtit, non in contactu. Et vbi ceſſat ſectio, ceſſat quoque anguli forma. Atque vt vno verbo dicam, in decuſſatione Decuſſationem hoc loco & ſectionem ſine diſcrimine accipio, omnes angulorum ſpecies perficiuntur. Duabus enim lineis



AB. & CD, ſe ſcindentibus in puncto E, ad angulos rectos, intelligatur CD, ſic moueri in orbem, ſcilicet ſuper puncto E, fixo, vt ex GD, fiat FG: hinc ſane ex recto angulo AEC, fiet obtuſus AEF: inde ex recto BEC, fiet acutus BEF. Cumque facta fuerit HK. hinc quidem angulus obtuſior fiet HEA, inde vero acutior BEH: ſicque continuo, donec peruenerit ad AB, & intra eoſdem terminos concludatur cum ea. Tum enim immmerſa, vt ſic dicam, linea CD, in lineam AB, euaneſcet angulus. Neque diuerſa ratio eſt in curuo. Sit enim in circulo ABCA, cuius centrum D, linea DE, præteriens peripheriam, & ſecans ipſam in A. puncto fixo, ſuper quod circumducatur ipſa DE. per puncta F, G, H Tum ſicut anguli continuo varij cum peripheria,

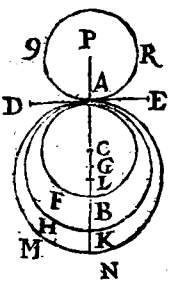


in ipſo puncto A: donec ceſſante decuſſatione, linea ED, facta ſit EK. & tangat circulum. Ac tum linea DE, non iam inclinata intelligitur, ſed immerſa in lineam BAC, quantum ad angulum attinet: non aliter quam ſi BAH, eſſet linea recta: neque contra facit, quod deducantur lineæ, faciantque ſpatium CAK. Nam id ſola AC, linea efficit, quæ rectum refugit: ſed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non conſiſtat, quam vnoſit, vt punctum A, tam ſit ineptum angulo conſtituendo, quam modo erat punctum ſectionis E, linearum rectarum. Fortaſſe dices, punctum A, lineæ rectæ manere in ſuo recto, punctumque A, peripheriæ in ſuo rotundo: neque vtrumque eſſe idem punctum: ſed lineas ſe tantum inter ſe veluti lambere, quia altera alteram penitus, omnique puncto refugit: vt contraria contrapoſita fiant manifeſtiora: Id vero ſenſus non recipit. Duo n. circuli ſeſe exterius tangentes, rectam lineam intermediam illi batam reliquerent: Scil. ſi intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipſum ABC, circulum exterius: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri poſſe, vt nihil incogitationem cadat, quod ſemel vſpiam Geometria non repræſentet. Illud tamen minime vrgebit: Imo tanto minus cõtactus linearum erit angulus. Habit enim vtrinq; ipſarum

ſarũ concurſus. Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus per theoremata.

Contactus duorum circulorum interior, quantitas non eſt.

Sit enim circulus AFBA, cuius centrum C, diameter vero AB, per cuius extremitatem A, ducatur linea DE, ad angulos rectos, Et conſtat ex conſectario huius decimæ ſextæ lineam DE, contingere ipſum AFBA, circulum: ac propterea DAF, eſſe minorem omni angulo acuto, ex ipſa Euclidis ſententia: ſcilicet per vltimam partem huiuſce decimæ ſextæ. Iã vero inter pũcta C, & B, ſuſcipiatur in diametro AB, centrũ G, & ſpatio GA, deſcribatur alter maior circulus AHKA. Dico FAH, non eſſe quantitatem. Conſtat quippe circulum AHKA, tranſire inter rectam DA, & curuam AF, cum ſit ſemidiameter GA, maior ſemidiametro CA. Manifeſtum quoque eſt, lineam DE, tangere ipſum AHKA, circulum ex eodem huiuſce decimæ ſextæ conſectario: ac propterea DAH, eſſe omni acuto minorem. Deſcribatur tertio, ſecundum maius ſpatium LA, circulus AMNA. Et erit ex eodem conſectario, DAM, omni acuto minor. Sicque in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea DE, cum circulis ductis per A, punctum, quorum centra in AB, linea, minores omni acuto rectilineo: ac ſic omnes æquales, ſi modo æqualitas inter non quãta dici poſſit. Quapropter contactus DAM, erit æqualis contactui DAF: Fietque vt MAF, contactus interior circulorum, neque augeat, neque minuat contactum DAM. Igitur MAF, quantitas non eſt. Quod erat demonſtrandum.



Sed & probabimus, contactum interiorem circulorum quantitatem non eſſe in hunc modum. Nempe cum omnes circuli ſint ſimiles erunt & ſemicirculi ſimiles. Quapropter anguli qui fiunt à diametro & peripheria, in omnibus circulis ſunt æquales, per conuerſam definitionis ſimilium ſectionum (Nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus BAF, æqualis vtrique angulorum KAH, & NAM: Ac propterea contactus FAM, nihil addit ad angulum BAF. Quare FAM, quantitas non eſt. Quod fuit demonſtrandum. Hinc ſequitur alterum.

Contactus lineæ rectæ cum circulo, quantitas non eſt.

Manente enim eadem conſtructione, ſi DAF, ſit quantitas: ipſa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non

per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimæ sextæ: neque per obliquam, vt per lineam AM. Esset enim FAM, pars ipsius DAF: Atqui FAM, quantitas non est, vt modo probauimus. Non est igitur FAM, pars ipsius DAF. Igitur DAF, neque per lineam rectam, neque per obliquam diuidi potest. Quare DAF, quantitas non est: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

Contactus duorum circulorum exterior, qantitas non est.

In eadem constructione, protrahatur, BA, diameter ad punctum P. Tum centro P, interuallo autem PA, describatur circulus AQRA, tangens circulum ABFA, exterius in puncto A. Dico contactum FAQ non esse quantitatem. Id vero manifestum est ex posteriori demonstratione. Namque per lineam obliquam diuiditur, cum FAM, non sit quantitas per primam harum, neque per rectam, cum neque DAF, sit quantitas, per secundam earundem: neque DAQ, quantitas per eandem. Quare cum FAQ partes nullas habeat, quantitas non erit: Quod erat probandum.

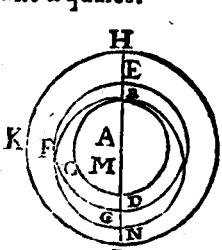
Ex his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit.

Anguli, qui fiunt à diametro, & peripheria, siue intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

Vt in posteriori figura, angulus BAF, æqualis est angulo BAD: cum ipsi nihil accrescat ob contactum DAF, qui quantitas non est: & ob id QAP, rectus quoque est, & æqualis ipsi DAP, cum DAQ, nihil addat: Quod erat probandum

Hæc Peletarius hoc in loco. In epistola autem, quam ad Cardanum scribit, affert aliam demonstrationem, quam ipse ait pleniorem esse. Han igitur hic subijcere statui. In primis autem præmittit hoc thorema.

In circulis anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, sunt æquales.



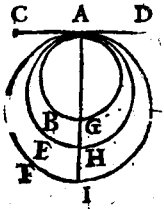
Sint enim super centro A, duo circuli BCDB, & EFGE, quorum diametri BD, & EG; & secet EG, ambos circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos CBD, & FED, esse æquales. Nam si sit FED, maior ipso CBD: (neq; enim contra, CBD, maior vllo pacto erit ipso FED,) ac describantur plures circuli super eodem centro A, quorum vnus hoc loco satis fuerit HKLH: fiet tandem ex continuo augmento, angulus à dia-

à diametro & peripheria, verbi gratia, angulus KHL, maior recto; quod eſt contra ipſius Euclidis ſententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Suntigitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter ſe æquales: quod fuit oſtendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonſtrandi ratione vllus eſt paralogiſmus. Licet enim nulla ſit comparatio angulorum quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos; attamen erit angulorum, qui fiunt ex ſectione rectæ lineæ, & peripheriæ, aliqua collatio ad ipſos rectilineos. Eiuſmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifeſte maiores, & minores fiunt.

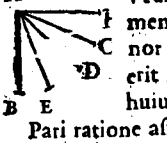
His ad hunc modum demonſtratis, aio contactum circulorum interiorem, non eſſe quantitatem. Super centro M, in eadem linea HL, poſito, deſcribatur BFNB, tanto interuallo, quanto eſt circulus EFGE: poſita ſcilicet MB, ſemidiametro æquali ipſi AE: qui circulus tangat BCDB, circulum in puncto B. Et manifeſtum eſt, angulum FBD, æqualem eſſe angulo FED, propter æqualitatem peripheriarum & diametrorum. Quapropter & idem ipſe FBD, erit angulo CBD, æqualis. Igitur CBF, contactus nihil addit ad ipſum CBD, angulum. Quare CBF, quantitas non eſt: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonſtratio eorum, quæ in tertio libro adduximus, theoremata.

Hæc igitur eſt Peletarij ſententia de angulo contactus, quæ omninoEuclidi eſt contraria. Si enim Euclides ſenſiſſet, angulum contactus nihil prorſus eſſe, & angulum ſemicirculi æqualem recto rectilineo: Quid, obſecro, tantopere deſudaſſet, vt demonſtraret, angulum contactus eſſe minorem omni acuto rectilineo, angulum vero ſemicirculi maiorem: Quid enim clarius, quam nihil, cuiuſmodi eſt angulus contactus, ex Peletarij ſententia, minus eſſe quocunque angulo? Quid quoque magis perſpicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum ſemicirculi, maiorem eſſe quolibet acuto? Quapropter angulum contactus vere eſſe angulum, ac quantitatem, affirmamus: atque adeo angulum ſemicirculi recto rectilineo minorem. Vnde diſſoluenda ſunt à nobis omnia Peletarij ſophiſmata, quæ in hac digreſſione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil eſſe.

Primum igitur extra intelligentiam eſſe fatemur, vt inter quantitates minima dari poſſit: ſed inficiamur, nos aſſerere, angulum contactus eſſe minimam quantitatem: Imo vero aſſeueramus, quemuis angulum contactus, etſi ab Euclide minor oſtenſus eſt omni acuto rectilineo, diuidi poſſe in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonſtrauit, & optime: ſed per lineam circularem. Vt propoſito angulo contactus CAB, ſi per A, deſcribatur circulus AEH, maior circulo ABG, tangens rectam GD, in A: fiet angulus contactus CAE, minor angulo contactus, CAB.



Quod ſi adhuc maior circulus AFI, deſcribatur, erit multo minor angulus contactus CAF, eodem angulo contactus CAB. Atque ita ſine fine ſemper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inæqualitas inter angulos contactuum quamuis quilibet eorum minor ſit acuto rectilineo quocunque. Quemadmodum quiuis angulus acutus minor eſt recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit: cum diuidi poſſit infinitè.



Vt angulus acutus BAC, minor eſt recto BAF: & tamen ſi ducatur recta AD, inter AC, AB, fiet acutus minor BAD. Quod ſi alia recta AE, inter AB, AD, ducatur erit multo minor acutus BAE, nec vnquam finis erit huius decrementi.

Pari ratione aſſerimus, angulum contactus augeri poſſe infinite, ita vt quouis angulo contactus propoſito, dentur alij maiores ſine numero. Vt in ſuperiori figura circulari, angulo contactus CAF, maior eſt angulus contactus CAE, & multo maior angulus contactus CAB: Atque ita deinceps, ſi minores ſemper circuli, quam ABG, deſcribantur, tangentes rectam CD, in A, augebitur perpetuo angulus contactus: ſemper tamen minor exiſtet quouis rectilineo acuto. Quemadmodum quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto BAE, maior eſt acutus BAD, & multo adhuc maior acutus BAC. Quod ſi alia recta ducatur inter perpendicularem AF, & rectam AC, fiet adhuc maior angulus acutus, nec vnquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiuſmodi incremento nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui ſit æqualis angulo recto, vel maior recto niſi acutus angulus mutetur, in rectum, vel obtuſum ſed ſemper recto, vel obtuſo minor eſt angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui æqualis ſit acuto angulo rectilineo propoſito, vel maior acuto, niſi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtum, (qui quidem efficitur à duabus lineis ſe ſecantibus: cuiuſmodi eſt angulus ſegmenti) ſed angulus contactus acuto ſemper minor eſt.

Eodem modo negamus, nos ponere angulum ſemicirculi maximam quantitatem. Imo aſſerimus, quolibet angulo ſemicirculi, propoſito, quamuis oſtenſus ſit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari poſſe maiores. Vt in eadem figura ſuperiori circulari, angulo ſemicirculi BAG, maior eſt angulus ſemicirculi EAH, & multo adhuc maior angulus ſemicirculi FAI: Atque ita deinceps, ſi maiores ſemper circuli deſcribantur, quam AFI, tangentes rectam CD, in A, augebitur perpetuo angulus ſemicirculi, ſemper tamen minor exiſtet angulo recto CAI. E contrario ve-

ro, an-

to angulo semicirculi FAI, minor est angul⁹ semicirculi EAH, & multo adhuc minor angulus semicirculi BAG, nec vnquã finis erit huius decrementi & tamen quilibet maior est quouis angulo acuto, rectilineo, licet infinite diminuatur, vt Euclides demonstrauit. Quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij vero minores innumerabiles.

Quod autem anguli contactus sint inæquales inter se, non omnes æquales, vt vult Peletarius, similiter & anguli semicirculorum ex eo manifestum est, quod angulus quilibet consistit in vnico puncto, & linearum inclinatione, quæ non indirectũ iacent, vt constat ex anguli plani definitione Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiusdem generis requirat eandẽ inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius cõueniant omnino lineis alterius, si vnus alteri superponatur; Ea enim æqualia sunt, quæ sibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis semicirculorum, nequaquam reperiatur semper eadem inclinatio, quod (vno superposito alteri) lineæ eorum non sibi respondeant, sed prorsus inter se dissideant, vt ex figuris superioribus perspicuum est; non erunt omnes anguli huiuscemodi inter se æquales. Imo quilibet angulus contactus augeri & diuidi poterit infinite per lineam curuam, licet per rectam secari nequeat, vt recte ostendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri potest causa. Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum secabit, donec iterum ipsum contingat. Tunc enim primum secare desinet circulum. Quare si vel minime inclinari intelligatur super puncto illo contactus fixo, secabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum possit tangere, vt ex 2. prop. huius lib. collegimus.

Solum igitur illi anguli contactus, pariterque illi duntaxat anguli semicirculorum æquales inter se erunt, qui efficiuntur à peripheriis æqualibus: In his enim tantummodo lineæ sibi congruunt mutuo. Anguli vero contactus, qui efficiuntur à peripheriis minoribus, maiores erunt; Et qui à peripheriis maioribus, minores. Anguli denique semicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obscure intelligi potest ex superioribus figuris. Neque enim lineæ talium angulorum sibi mutuo conueniunt.

Constat ergo quemuis angulum contactus habere partes: & vnum alteri posse æqualem exhiberi, ac rursus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum vero semicirculi maximam.

Deinde non est, quod anxium reddat Peletarium prima propositio decimi lib. Ea enim intelligenda est tam de quãtitatibus eiusdẽ generis, quam diuersi, dummodo vtrauis multiplicata alteram excedere possit; cuiusmodi non sunt angulus cõtact⁹, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis sumatur, siue ter, quaterue, siue denique, quoties libuerit, semper minor est angulo acuto rectilineo. Si namque quotcunque anguli contactus, vt centum, inter se æquales angulum acutum rectilineum excederent, vel se illis æquarent; esset quoque vnus illorum maior, vel æqualis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei; quod est absurdum, cum quilibet angulus contactus minor sit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonstratum. Quare nullo modo ex illa propositione colligere licebit, si ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rursus ex reliquo maius, quam dimidium, idque continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus proposito: quoniam angulus contactus, vt dictum est, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, siue quantumuis auctus, semper minor existit angulo acuto; nec vnquam ipsum superare potest: quod tamen necessariò requiritur ad demonstrationem illius propositionis. Vt enim demonstretur, multiplicanda est minor quantitas proposita toties, donec excedat maiorem, vt videre licet, apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipse Euclides per Campanum, quando in Stereometria à curuo rectum aufert, vel contra, vt vult prima propos. lib 10. assumit semper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere potest.

Iam vero nulla ratione concedemus Peletario, angulum tantummodo effici à duabus lineis se secantibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano adinuicem inclinari, ita tamen, vt non in directum iaceant, vt constat ex anguli plani descriptione tradita ab Euclide, quanquam se mutuo non secent, si producantur: cuiusmodi sunt peripheriæ se tangentes. Quare verò angulum efficiunt, vt antea diximus.

Porro demonstratio Peletarij, qua conatur ostendere, contactum interiorem non esse quantitatem, nullius est momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus qui efficiuntur à linea tangente, & peripheria, minores sunt quolibet angulo acuto, non tamen propterea inter se omnes æquales esse necesse est, sed potest alio alius maior esse, & minor, vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores sunt angulo recto, & tamen ipsi inter se non sunt omnes æquales. Sic etiam omnes formicæ (vt ex rebus quoque naturalibus exemplum afferamus,) minores sunt homine, vel monte, cum tamen ipsæ inter se valde sint inæquales. Quare non recte concludit Peletarius, contactum interiorem nihil esse.

Nega-

Negamus deinde, angulos segmentorum similium æquales esse, sicut ipse assumit in sequenti demonstratione: Neque enim hoc Euclides significavit in ultima definitione hujus tertii libri: Sed docuit ea segmenta esse similia, in quibus anguli rectilinei sunt æquales, vel quæ angulos rectilineos capiunt æquales; non autem quorū anguli æquales existunt. Immo magnum discrimen est inter angulos in segmentis & angulos segmentorum, ut aperte constabit ex propos. 31. hujus libri.

Ex his facile reiicientur reliquæ Peletarii demonstrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur à linea tangente, & peripheria, dividitur per lineam circularem, ita ut contactus interior sit vere pars ejus, cum contrarium nullo modo ostenderit. Eodem pacto angulus contactus, quem constituunt duo circuli se exterius tangentes, dividitur & per lineam circularem, & per rectam, quæ utrumque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo asseruit, angulum semicirculi æqualem esse angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum semicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Postremo hallucinatus est quoque Peletarius in illa demonstratione, quam ad Cardanum misit. Etsi enim angulus semicirculi in majori circulo major est angulo semicirculi in circulo minori: non tamen propterea efficitur, ut aliquis angulus semicirculi major sit angulo recto. Semper enim rectus angulus superabit quemvis angulum semicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur à peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quovis angulo acuto proposito, dari possunt alij majores: nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, ut in præcedenti figura cernere licet. Constat igitur ex his, angulum contactus vere esse angulum, demonstrationes autem Peletarii sophisticas esse, ac nullius momenti, homineque Geometra prorsus indignas.

Hæc porro mea de angulo contactus disputatio adeo Peletarium commovit, atque perturbavit, ut læsam esse omnino, atque offensam existimationem putaverit suam. Quare annis fere quinque post mei in Euclidem commentarii editionem, hoc est, anno 1579. ut se defenderet, Apologiam in me conscripsit: in qua tamen neque ausus est solutiones meas hoc loco adductas infringere, aut impugnare neque opinionem suam, novam illam quidem, & inauditam, novis rationibus (scilicet nullas habebat) confirmare, sed verbis duntaxat, & convitiis se defendere conatur, ut facile ii, qui eam perlegerint, judicabunt. Huic ego Apologiæ jam pridem non tam mei purgandi, quam veritatis tuendæ gratia respondissem, nisi me ab hoc consilio gravissima eruditissimorum hominum auctoritas, qui eam responso omnino indignam judicabant, revocasset. Nunc vero quoniam locus hic à me postulare videtur, ut in secunda hac editione patrocinium veritatis iterum suscipiam, non alienū esse duxi, breviter calumnias,

atque injurias, quibus frequenter me in ea Apologia afficit, quanta potero modestia, depellere. Quamvis enim hoc à me factum jam sit anno 1586. in meis triangulis sphæricis, ubi necessario de re ipsa, ejusque Apologia mentio facienda fuit; quia tamen fortassis non omnes librum illum meum viderunt, operæ pretium arbitratus sum me facturum, si totam illam responsionem hic, ubi proprius ejus locus est, interseram, ut benignus lector intelligat, sine causa cum tanto animi dolore, & iracundia, quantam præ se fert, contra me exarsisse, falsoq; mihi imposuisse multa: me autem è contrario nullum verbum injuriosum in illum effudisse, aut convitium, quod frustra in epistola nuncupatoria criminatur, ubi me à convitiis non abstinere, aperte testatur. Atque in illa Apologia nihil adeo me offendit, quam quod me Peletarius non syncere, sed animose, atque adeo invidiose fecisse insimulat, ut eum in meis commentariis vel reprehenderem, vel laudarem: quæ sane vitia pusilli semper animi esse duxi, & ab homine liberaliter, Christianeque educato alienissima. Verum ea quam longe absint tum à nostræ Societatis disciplina, tum à mea consuetudine, nemo omnino, qui nos ac nostra norit, ignorat. His vero, qui nostra minime norunt, hic ipse liber fidem faciet, syncere omnia dici, nihil invidiose, nihil animose: plane ut veritatem quæsitam, non cujusque auctoritatem contemptam esse appareat. Neque enim mihi tantum derogo, (etsi nihil arrogo) ut mihi uni interdictum putem, ne, si quid in alienis scriptis falsum videatur, occasione oblata, cur id mihi minus probetur, ostendam; modo (quod pudentium, ac bene moratorum hominum consuetudo postulat) id sine convitio, atque irrisione faciam: Hoc autem liber ipse, qui in medio est, ita à me factum esse clamat. Etenim ut totum hunc librũ pervolutes, ne verbum quidem unum reperias, quod vel speciem maledicti habeat, atq; convitii. Nam in scholio hoc de angulo contactus jurare liquido possem, nihil me minus cogitasse, quam ut Peletarium obtrectandi animo oppugnarem; sed illud habuisse propositum, (si modo cõsequi possem) ut suus esset veritati locus. Quod quidem eo liberius feci, quod Peletario ipso non modo invito, sed etiam libenti existimavi me esse facturum, quod vel ipso auctore facerem: qui non à Cardano solum, atque Campano, sed etiam à Proclo, Theone, Apollonio, Erathosthene, Pappo, Ptolomæo, Hippocrate Chio, Geometriæ luminibus, ab ipso deniq; omnium magistro Euclide dissentire non dubitavit. Nimirũ quia, ut ab eodem in Apologia vere dictũ est, in omni doctrina, præsertim vero in Geometria, non auctoritas est spectanda, sed veritas: quanquã non video, qui amicus veritatis sit is, apud quem veritas odium parit; nisi forte aut decipi se non posse arbitratur, qui columina illa Geometriæ errasse interdum prædicat, aut veritatem in alienis rebus amat, ac quærit potius, quam in suis. Equidem si quis me in re quapiam (quod pro humani ingenii imbecillitate fieri posse video) errasse ostenderit, næ

ego

ego maximam illi gratiam habuero, qui errantem in viam veritatis reduxerit. At enim probat ſtudium veritatis Peletarius, convitia ferre non poteſt: quæ tandem convitia? rogas? Demonſtrationes meas appellas ſophiſmata. Nunc demum, quæ convitia dicat intelligo. Nam alia nulla in meo hoc libro eſſe certo ſcio: ab his (ſi convitia ſunt) fateor me non abſtinere. At ego homo ſimplex, & ignarus verborum convitia, eſſe nunquam dixi, cum vere dicerentur. Neque enim, quo alio vocabulo demonſtrationes plane fallaces, & adulterinas appellarem, habebam: neque vero Philoſophorum, ac Mathematicorum conſuetudo loquendi magis appoſitum mihi verbum ſuppeditabat. Accedit, quod cum à Peletario, homine in loquendo conſideratiſſimo, germanas Campani, Cardanique demonſtrationes paralogiſmos appellari viderem, exiſtimavi in falſis ejus demonſtrationibus refellendis impunius perſimili me vocabulo uſurum. Quod ſi ſophiſma contumelioſius verbum eſt, quàm paralogiſmus, in Gallia, ignoſcat conſuetudinis ejus ignaro atque exiſtimet, me paralogiſmos dicere voluiſſe. Atque ut plane intelligat Peletarius, me non contradicendi ſtudio illa ſcripſiſſe, mecum unaquiſque ſideret, quantam mihi materiam ſui refellendi dederit ſi hominē refellere potius, quam rem, quæ tum agebatur, explanare in animo fuiſſet: quanquam occaſionem ejus reprehendendi in ſinum delatā ſæpius omiſi, ne illum mihi delegiſſe viderer, in quem potiſſimum incurrerem. Quam præclara enim occaſio fuit in propoſ. 4. & 8. lib. 1. atque in propoſ. 24. lib. 3. quam ipſe 23. facit? In his enim omnibus reijcit demonſtrationes antiquiſſimas Euclidis, tanquam non Geometricas; quippe in quibus figuram unam alteri ſuperponi concipere animo oporteat: quod ipſe à Geometriæ dignitate putat eſſe alienum, hac ſolum inductus ratione, quod ſuperpoſitionem illam mechanicum quid eſſe arbitretur, & quod omnes fere propoſitiones hoc modo, ut ait, poſſint demōſtrari, etiā problemata in quibus aliquid proponitur conſtruendū? atque in hujus rei exemplū adduçit propoſ. 2. & 3 lib. 1. quæ problemata ſunt. Hic certe Peletarium jure carpere potuiſſem, ſi id mihi fuiſſet propoſitū, ut falſo criminatur: maxime in eo, quod eadem ratione uſui fore exiſtimavit ſuperpoſitionē in demonſtrandis problematibus, ac theorematibus. Nam non ſatis intelligere videtur, quo pacto Geometræ ſuperpoſitionē illam uſurpent. Neque enim volunt, re ipſa facienda eſſe ſuperpoſitionem, (hoc enim mechanicū quid eſſet) ſed cogitatione tantū, ac mente, quod opus eſt rationis atque intellectus. Itaque in theorematibus quidem locum habebit genus hoc argumentandi, in problematibus vero nō. Namq; in theorematibus, propter magnitudinū æqualitatē, inæqualitatemve, quæ, ut nota ponitur, facile intellectū, cujusvis ſine ulla hæſitatione cōprehendit, unā vel nō excedere alteram, vel excedere, ſi animo cōcipiatur una alteri eſſe ſuperpoſita, quāvis re ipſa nō fiat illa ſuperpoſitio, ut in propoſ. 4. lib. 1. factū eſt:

At in problematibus, in quibus magnitudinem quis alteri æqualem conſtruere jubetur, licet mente cogitet magnitudinem propoſitam transferri in alium locum, non tamen propterea quicquam efficiet, cum re ipſa translatio nulla facta ſit. Vt mirum ſit, Peletarium ſibi perſuadere potuiſſe propoſ. 2. & 3. l. 1. & alias pene omnes per ſuperpoſitionem ſive translationem linearum, figurarumve poſſe demonſtrari, ſi hoc modo argumentandi in Geometria uti liceret. Et certe hac in re non ſolum Euclidem in crimẽ vocat Peletarius, verum etiam Archimedem, quo omnium judicio, acutior in demõſtrando, & ſubtilior fuit nemo, ejusque commentatorem graviſſimum, eumq; doctiſſimũ Eutocium Aſcalonitam, qui eodẽ argumentandi genere utuntur in æqueponderantibus, immo vero & omnes Geometras redarguat neceſſe eſt, qui non raro hoc argumenti genus adhibent. Sed videamus, quo tandẽ egregius hic noſter Geometra, qui omnes alios Geometras reprehendit, ſit devolutus. Viderat Peletarius, (neque enim rem adeo manifeſtam videre non poterat) ſi hunc modũ argumentandi è medio tollat, univerſam ſe Geometriam funditus evertere, cum plurimæ, eæque præcipuæ propoſitiõnes in Geometria demonſtrentur ex propoſitione 4. & 8. lib. 1. & ex 24. l. 3. quæ quidẽ alio modo demonſtrari nequeunt, quam per illam figurarum ſuperpoſitionem, non quidẽ re ipſa exiſtentem, ſed cogitatione duntaxat, ut dixi, comprehenſam. Quo igitur ſe verteret? quid ageret? Excogitavit ſane rem magis à Geometria alienam, quàm eſt ſuperpoſitio illa figurarum. Coactus enim eſt aſſerere, propoſitionem 4. lib. 1. eſſe definitionem angulorum æqualium, (& quis unquam talem audivit definitionem?) atque adeo concedendam eam eſſe ſine demonſtratione: propoſitionem vero 8. ejusdem lib principiũ eſſe per ſe quoque notũm. Quod ut credibile magis efficiat, ita ſcribit in propoſitionem 4. lib. 1. (*Et enim nulla evidentiori ſpecie æqualitas figurarum dignoſcitur, quam ex laterum æqualitate.*) Idemq; quaſi confirmat, & repetit in propoſitionem 8. ejusdem lib. dum ita loquitur. (*Quis enim negaverit, duas ſuperficies eſſe æquales, quarũ latera & quantitate, & numero ſunt æqualia?*) Hæc Peletarius, ut dictæ propoſitiones Euclidis ſine demonſtratione admittantur, commentus eſt, ſed quæ omnino falſa ſunt: ut magnopere mirandũ ſit, potuiſſe eum propoſitiones à Geometria proſus alienas tam inconſiderate proferre. Scilicet verum eſt, quod Philoſophi aſſerunt: Dato uno abſurdo, cætera conſequuntur. Aſſumpſerat enim Peletarius propoſ. 4. & 8. lib. 1. pro principiis: quod quidem falſum eſt, atque abſurdum. Vnde ad eas abſurditates neceſſario devenit, quas etiam illi qui vix adhuc principia Geometriæ attigerunt, vel facile vitare potuiſſent. Nam quis non videt, Rhombum, & Quadratum, etiamſi latera habeant & quantitate, & numero æqualia, poſſe tamen inter ſe valde eſſe inæqualia? Id quod in Pentagonis quoque æquilateris, & in

alijs

aliis figuris plurium laterũ æqualium cerni poteſt: quod non eſt hujus loci pluribus verbis explicare. Cum ergo in omnib⁹ figuris multilateris inæqualitas reperiatur, licet latera habeant & quantitate, & numero æqualia, demonſtrandum fuit neceſſario Euclidi, æqualitatem triangulorum colligi ex laterũ æqualitate, quandoquidẽ in alijs figuris ea non colligitur. Quare neque propoſitio 4. Definitio, neque propoſitio 8. principiũ erit: ac proinde omnes propoſitiones, quæ illis nituntur, quæ in numerabiles propemodum ſunt, corruant neceſſe eſt, niſi demõſtrationes Euclidis recipiantur in illis propoſitionibus, cũ alio modo demonſtrari nõ poſſint. Demonſtratio enim nova propoſ. 4. quam Peletarius confinxit, nihil aliud eſt, quam (ut cum Logicis loquamur) petitio principij. Id quod perſpicuum erit cuilibet, qui eam diligentius conſiderare voluerit. Nam in ea ſolum conſtruitur, unum triangulum poſteriori ex duobus datis æquale, immo idem, atque hoc ipſum quidem ineptiſſime, cum ad id præſtandum circulos deſcribat Peletarius, quibus tamen in demonſtratione non utitur, quod vitioſum omnino eſt in Geometria: Deinde infert, triangulum hoc conſtructum, quod à poſteriori ex duobus propoſitis non differt, priori eſſe æquale ſine ulla demonſtratione: certum autem eſt, hoc ab initio propoſitum fuiſſe, ut demonſtraretur. Quocirca manifeſte principium petit, cum eadem facilitate ſtatim in principio concludere potuiſſet, etiamſi nullam adhibuiſſet conſtructionem, triangula propoſita eſſe æqualia: quippe cum conſtructio illa ad rem non faciat. Idem dico de demonſtratione propoſ. 24. lib. 3. quam etiam novam confinxit: quod eorum judicio, ad quorum manus ejus commentarii pervenerunt, relinquo. Præterea alia loca innumerabilia in quibus abutitur propoſitionibus Euclidis in demõſtrando, ut quod plerunque ſecundam propoſ. lib. 1. inſcite pro tertia aſſumat, &c. Neque enim mihi in animo nunc eſt, ejus commentarios examinare, ſed ſolum calumnias, quas frequentes in ſua Apologia adhibuit, à me depellere. Quæ cum ita ſint, quod ille falſo de me, vere ego de illo dicere poſſem, rubere me, (ut ejus verbis utar) Euclidi interpretem contigiſſe, qui non jam Theonem, aut Campanũ emendet, ſed ipſum Euclidem ſine cauſa reprehendat: quippe cum ego Euclidem (uti par eſt) à calumniis ipſius defendam, omnesque inſidias, ac fallacias, quas contra eum inſtruxerat, detegam ac refellam. Liquet igitur, me ea mente non fuiſſe, ut Peletarium redarguerem, cum tot ac tantos errores diſſimulaverim: quos ego ne nunc quidem in lucem protuliſſem, niſi vellem omnes & intelligere, quantum Peletarius à me, de quo tam acerbe queritur, tum beneficium acceperit, & ex brevi hac diſputatione fructus aliquid, utilitatisque percipere. Nunc ut, quam diſpari ille animo in me fuerit, appareat, ejus calumnias breviter exponam, atque ita refellam ac diluam, ut omnes oculis videant, eas eſſe calumnias: In quo tamẽ ejusmodi à me moderatio adhibebitur, ut modeſtiæ, quę hominem reli-

religiosum decet, minime obliviscar. Neque enim illi, uti provocavit, respondebo.

Primum itaque mihi objicit Peletarius, quod in ejus demonstrationibus citandis ita me gesserim, ut si quo modo nomẽ ipsius supprimere potuissem, id me ostendam libenter fuisse facturum. Quod quam sit falsum, facile judicabunt ij, qui meos commentarios legerint: cum ubique eum honorifice appellem, eique plurimas demõstrationes adscribam, tanquam proprias, quas tamen aliter, quàm ipse, & multo brevius demonstro, & interdum etiam (quod majus est) universalius, ut liquido constat ex ijs, quæ tum ad propos. 38. tum ad propos. 45. lib. 1. ex Peletario demonstravi, ut alia interim taceam: quæ non injuria mihi vendicare potuissem: ut miter, quid illi in mentem venerit, id à me parum syncere, atque adeo invidiose factum existimare, quod ego verebar, ne nimis ambitiose factum quispiam judicaret. Quod vero prop. 16. lib 3. & in prioribus duab⁹ definitionib⁹ l. 5. ut ipse objicit, animose, ut ego fateor, libere, quid de ejus demonstrationibus sentirem, exposui, id feci, ut jam ante dixi, non cujusquam lædendi causa, sed quærendæ veritatis. Ea enim est natura, & conditio eorum, qui liberalibus artibus dant operam, ut etiamsi alter alterius interdũ sententiam impugnet, non tamen idcirco odijs potius, quàm ingeniis inter se certare videantur. Qui sit aliorum sensus ignoro, equidem, ut supra dixi, ita sum animo, ut si quis me alicujus erroris in demonstrando commissi admoneret, ei quam maximas gratias haberem: atque ut liberius id facerent, enixe rogavi non paucos, & nunc iterum eosdem, atque etiam alios amice oratos volo. Scio enim, quam facile possit in suis quisq; inventis hallucinari: video (quod ipse quoque Peletarius in Apologia sapienter asseruit) omnibus hominibus commune esse, ut peccent. Deinde quod in additionibus ad propos. 47. lib. 1. ejus mentionem non fecerim, non est, quod ægre ferat, cum illæ propositiones non sint ab ipso inventæ. Quædam enim multo tempore ante ipsũ demonstratæ sunt vel à Campano, vel à Proclo, aut Theone, quasdam vero demonstravi egomet, antequã ipsius demonstrationes vidissem: quod adeo manifestæ sint, & faciles, ut nulla probatione egeãt, sed sint instar corollariorũ propos. 47. Vt nulla prorsus laus, aut gloria illi accessura videretur, si maxime eas ab ipso inventas esse (quod tamen verum nõ est) prædicassem: cum eas quilibet, modo primoribus labris studia Mathematica degustarit, nullo negotio ex illa propos. 47. colligere possit: Vt non videam, cur tandem eas propositiones tanti ponderis esse dicat, cum sint omnium judicio levissimæ: adeo ut in plerisque earum nec ipse Peletarius demonstrationem ullam, propter earum evidentiam, adducat, sed eas nulla probatione egere fateatur. Denique nõ est, quod tãtopere mihi succenseat idcirco, quod constructionem Pentagoni æquilateri, & æquianguli supra datam rectam lineam finitam ei non tribuerim:

quo-

quoniam in ea constructione nihil prorsus ab eo sum mutuatus: quod iis dijudicandū relinquo, qui meam cum illius constructione contulerint. Nam & mea omnino diversa est, & ille in sua mirificè (ut alia peccata taceam) abutitur propositione 9. lib. 3. cum ex ea probet, pūctum quoddam esse centrum circuli, qui nondum est descriptus. Geometra sane dixisset, punctum illud esse ejusmodi, ut circulus ex eo descriptus ad intervallum cujuslibet lineæ rectæ ex illis tribus, quæ ibi ostensæ sunt æquales, transeat per extremitates reliquarum duarum linearum æqualium. Nam propositio 9. libr. 3. nihil eo loco ad rem facit, cum propositū ex ipsa constructione possit, concludi, & ex demonstratis, ut proxime dixi, etiamsi propositio illa vera non esset, aut nusquā demonstrata. Idem peccatū committit Peletarius in omnibus propositionibus libr. 4. in quibus vel intra figuram rectilineam, vel circa eandē circulus describendus est. Quod si ideo sum reprehendendus, quod propositionē unā, multo aliter à me, & brevius demonstratā, ei non ascripserim, non video, quo pacto in idem ipse vitium nō incurrat, cum problema hoc (*Propositis duabus lineis inæqualibus, potentiam majoris supra minorē cognoscere*) multis seculis ante ipsum a Theone demonstratum sibi arroget, hac solum de causa, ut arbitror, quod illud alia ratione, longiore tamen, demonstravit. Mitto hoc aliud problema, (*Dato angulo rectilineo æqualem angulum curvilineum constituere.*) quod in Apologia suum proprium appellat, idemq; hactenus desideratum esse gloriatur: cum tamen illud ipsum ego ex Proclo, qui multis ante eum seculis floruit, in defin. 5 lib 5. multo brevius, & clarius demonstraverim. Nam, ut eo in loco ostendi, si rectæ lineæ datū angulum rectilineum continentes ponantur æquales, & circa ipsas duo semicirculi (qui æquales erunt) versus easdem partes describantur, illico constitutus erit angulus curvilineus dato angulo rectilineo æqualis: Neq; opus est tot ambagibus uti, quot Peletarius ad eam rem demonstrandam adhibet; quamvis robur demonstrationis ipsius idē sit, quod meæ. Et quod magis mirandū est, fatetur Peletarius, se meam demonstrationem vidisse, & eā nihilominus sibi audet, tanquā propriā, arrogare. Ea cur Peletarius clamet, me nō paucas demonstrationes parum honeste, ut mihi vendicē, sibi subducere conatū. Quis autē nō videt, id eum in altero vituperare, quod ipse sibi gloriosū putat? Itaq; multo verius, ac justius eodē illum crimine ego, quā ille, me, cōdēmnare possum: cum nunquā propositionum illarū inventorē me appellaverim, ut ipse, sed solū ejus nomē, ob rationes à me expositas, reticuerim.

Deinde angulum contactus, & acutum rectilineum ejusdem generis esse, contra me plurib⁹ verbis conatur ostendere. Sed nescio quo modo aberrat, quod dicitur, à scopo. Solū enim probat utrumque angulum eodem genere quantitatis contineri, hoc est, utrūque angulū planū esse: quod acutus angulus rectilineus, vel etiam rectus constare possit ex angulo contactus, & alio angulo mixto: quod neque

que ego, neque ullus unquam Geometra negavit. Ego angulos illos ejusdem esse generis negavi hac solum de causa, quod angulus cō tactus quantumvis multiplicatus angulum acutum rectilineum superare nequeat, ut in scholio hujus propos. 16. evidenter ostendi. Hinc enim fit, ut alter ad alterum proportionem non habeat, atque adeo quodammodo diversi generis sint: quemadmodum eadem de causa linea recta finita, & infinita non censentur esse ejusdem generis, cum altera ad alteram proportionem non habeat: quamvis sub eodem genere magnitudinis: nimirum sub linea recta, comprehendantur. Hoc itaque feriat, ut collimasse videatur: quanquam ut omnia faciat, collimabit nunquam: ita longe abest, quod est propositum. Magnitudines autem, quarum altera multiplicata alteram superare nequit, non censeri ejusdem generis, (quod ad proportionē attinet) licet sub eodem genere quantitatis, hoc est, sub longitudine, aut latitudine, aut profunditate, aut numero, collocentur, liquido constat ex defin. 5. lib. 5. ubi Euclides satis perspicue explicat, cujusmodi debeant esse magnitudines ejusdem generis, inter quas proportio reperitur. Quare viderint alii, Peletarius homo consideratus quam cogitate me incogitantem hominem appellarit; quasi non recte intellexerim, quæ magnitudines sint ejusdem generis, quæ non sint. Nunquam enim dixi (id quod mihi affinxit, ut carperet) duarum magnitudinum, quæ sub diversis quantitatis generibus collocantur, quales sunt linea, superficies, corpus, ac numerus, alterutram ita posse multiplicari, ut alteram superet: In quo, nemine reluctante, frustra sese fatigat, ut doceat, id fieri non posse, sed de illis duntaxat magnitudinibus sum locutus, quæ cum in eodem genere quantitatis versentur, diversi tamen generis censeri possunt; quales sunt superficies rectilinea, & curvilinea, sive mixta; Itemque linea recta, & curva. Hæ etenim ita differre inter se videntur, ut Aristoteles liquido affirmarit, unam alteri æqualem esse non posse: quod tamen (pace Aristotelis dictum sit) verum usquequaque non est: cum Archimedes in lib. de lineis spiralib. demonstraverit, quænam linea recta æqualis possit esse circumferentiæ cujusvis circuli dati, idemq; nos in quadratura circuli ostenderimus. Non igitur negare poterit Peletarius, ab Euclide defin. 5. libr. 5. aliquas quantitates à proportionis definitione excludi, diversique propterea esse quodammodo generis, quod ad proportionem attinet, licet in eodem magnitudinis genere ponātur: quales sunt angulus contactus, & angulus rectilineus: Linea item recta finita, & infinita: Multas item magnitudines comprehendi in eadem definitione proportionis, quas plerique excludebant: cujusmodi sunt curvilinea, superficies, & rectilinea: nec non linea circularis, & recta, ut paulo ante diximus, latiusque in defin. 5. lib. 5. exponemus. Verum Peletarius, ne opinionem illam suam, quā de angulo contactus semel imbiberat: deserere cogeretur, noluit hanc expositionem 5. defin. lib. 5. recipere:

immo

immo eam ut oppugnet, omnes videtur in Apologia intendisse nervos, oblitus sui, qui fere eodem modo illam defin in lib. olim expo- fuerat; nisi quod non recte inde colligit, angulum contactus non esse quantitatem, propterea quod multiplicatus nullam magnitudinem ut dicit, possit excedere. Hoc enim (pace ejus dixerim) falsum est. Nam licet angulus contactus multiplicatus angulum rectilineum non possit excedere, excedet tamen alium angulum contactus. Quare ex illa defin. solum recte colligitur, angulum contactus ad angulum rectilineum non habere proportionem ullam: ad angulū vero alium contactus quemcunque proportionem habere. Sed sive ita intellexerit eam defin. ut ex commentariis ejus in lib. 5. colligi potest, sive secus, ut in Apologia indicare videtur, non multum laboro: Certe ita illam esse intelligendam, ut exposui, nemo qui verba Euclidis diligenter expenderit, negabit. Verum enim vero, si mihi fidem habere non vult Peletarius, habebit certe, (nisi arrogans haberi volet) aut Proclo gravissimo scriptori, qui lib. 2. in lib. 1. Euclidis ad definitionem anguli plani eodem modo definitionē illam intellexit, aut Petro Nonio Lusitano, quem tanti facit, (& merito id quidem: fuit enim acerrimo vir ingenio, & nullo hac nostra ætate in Mathematicis inferior) ut eum unum pro multis millibus testem citet, & suarum demonstrationum approbatorem, qui dissertissimis verbis tum in libro de Erratis Orontij, tum in Algebra sua, illam definitionē explicat, ut à me est exposita: quin etiam ibidem asserit ex ea defin. colligi, angulum contactus ad angulum rectilineum, & lineam finitam ad infinitam nullam habere proportionem, ut Petrus Nonius, quem testem produxerat pro se Peletarius, jam pro me testimonium dicat. Atque ex hisce duobus locis Petri Nonij facile quivis intelliget, quam sine ratione, & quanto contradicendi studio mihi insultet Peletarius, cum semel atque iterum odiose percontatur, undenam potuerim illi lineam infinitam deportare. In idem enim crimen (si crimen est, lineam infinitam exempli causa nominare) vocat etiam Petrum Nonium testem suum, atque adeo omnes Philosophos, quorum est illa vox nemini inaudita, præterquam Peletario, finiti ad infinitum nullam esse proportionem. Desinat igitur à me sciscitari, unde lineam infinitam deportaverim: Inde enim respondebo, unde eam Petrus Nonius, unde Philosophi omnes deportarunt. Quid? nonne sophisma illud Peletarij, semper in hoc erro, demonstratio illa, volui dicere, & quidem palmaris, qua conatur ostendere, propositionem 1. lib. 10. cum propos. 16. lib. 3. stare non posse, si angulus contactus concedatur esse quantitas, à Petro Nonio Peletarij cognitore eadē prorsus ratione, quæ à me ipso confutatur? Quæ si germana demonstratio est, miror quid sit, cui eā Nonius Geometriæ scientissimus, idemque Peletarij approbator, minus probarit: Cur nihilo magis demonstrationes ejusdem, quibus planum, facit, (ut putat) angulū contactus

quantitatem non esse, eundem illum Nonium nihil admodum moverint? Id enim (nisi fallor) illa Nonii verba. *Si quis sententiam Peletarii de angulo contactus amplecti velit.*) declarant. Nam si demonstrationes existimasset profecto Peletarii doctrinam in eo retinendam esse dixisset, Geometricæ enim demonstrationes ejusmodi sunt, ut assensum extorqueant, ac dubitationem omnem excludant, nulloq; modo quempiam sinant ancipiti opinione distrahi sic, ut tum assentiatur, si velit, tum, si nolit, dissentiat. En cur Peletarius Nonii testimonio aliorum judicia contemnat, en præclarum testimonium, quod Petrus Nonius ejus demonstrationibus dedit? quo æquiore animo ferat, eas à me nihilo magis, quam ab illo suo approbatore, demonstrationes putari.

Tertio, quod existimare dixi Peletarium, angulum contingentiæ nihil esse, falsum esse clamat: Nusquam enim dixisse se, nihil esse, sed quantitatem non esse. Ita ne vero? at in prædicamento Quantitatis, quod neque est punctum, (quis enim inclinationem illam punctum esse dixerit?) neque quantitas, quo alio nomine vocetur, quã Nihil? Sed ut ut dixit, profecto non modo mirabile est, sed monstri in Geometria simile, putare angulum contactus non esse quantitatem, qui postea additus aliis angulis efficiat curvilineum angulum rectilineo æqualem. Quis enim unquam Geometrarum id, quod quantitas nõ est, magnitudini adjunxit, ut æqualem eam alteri efficeret? Præterea, quod figura trilatera curvilinea intra tres circulos se mutuo tangentes concluſa nullum haberet angulũ ex Peletarii sententia; quia tres illi contactus, anguli non sunt: cum tamen tribus diversis lineis contineatur; quod omnino novum est, & inauditum apud Geometras. Itemque, si quatuor, aut plures circuli se mutuo tangerent, ut fieret figura curvilinea quadrilatera, vel plurium laterum, illa nullum angulum haberet. Atque etiam, si duæ lineæ rectæ angulũ continentes, unum eundemque circulum tangerent, trilatera illa figura habens tertium latus curvum, unicum tantum haberet angulum. Quæ omnia si sunt absurda, consentanea non est opinio Peletarii. Sed nimis fortasse multa ad Nihil illud Peletarii evertendum, ad quod tuendum ille nihil afferat. Quoniam vero, ne pro Nihilo suo nihil agere videatur, quando res non potest, mea verba carpit, verba defendam: quæ quidem ille nescio quibus præstigiis ita depravat, ut dicere videar, Nihil esse minus quocunque angulo: atque (ut simplicem, credo, hominem irretiat) quærit ex me, quod tandem genus sermonis sit illud. Viderit is, cujus ex officina prodiit. Neque enim ego ejusmodi sermonem agnosco, qui, Nihil esse minus quocunque angulo, nusquam dixerim, nisi ex sententia Peletarii. Sed videlicet homo vehemens, ut suum illud Nihil ulciscereturr, aliud mihi Nihil affinxit, quo cum impune pugnaret: At quam palæstrice pugnat? quam sibi placet hoc loco, dum meum illud argumentum, quo pectus fuerat, in me ipsum mira venustate convertit? Sic enim argumentatur.

mentatur. (*Angulus contactus nihil eſt: Angulus contactus angulo contactus major eſt. Angulus igitur major nihilo eſt: Atqui Clavius eundem ponit minorem nihilo. Eſt igitur angulus contactus nihilo major, & idem nihilo minor.*) Mox quaſi Nihil illud ab ſe effictum jugulaſſet, exclamat. (*En Clavii argumenta, qua utrum tandem Peletarii ſophiſmata ſunt, an Clavii potius figmenta, cum ipſe ſuum angulum contactus nihil eſſe dicat, non ego?*) Verum ut hominem fæneum, atq; adumbratum nequicquam petere deſinat, virum oſtendam, qui cum, ſi velit, certare cum laude poſſit. Ego, ut oſtenderem angulum contactus, ex Euclidis ſententia, vere eſſe angulum, & angulum ſemicirculi angulo recto rectilineo minorem; ita ſum argumentatus. Si Euclides ſenſiſſet, angulum contactus nihil prorſus eſſe (hoc eſt, ut Peletarius intelligit, non eſſe angulum, vel non eſſe quantitatem) & angulum ſemicirculi æqualem recto rectilineo: quid obſecro, tantopere deſudaſſet, ut demonſtraret, angulum contactus eſſe minorem omni acuto rectilineo, angulum vero ſemicirculi majorem? Quid enim clarius, quam nihil, cujusmodi eſt angulus contactus, ex Peletarij ſententia, hoc eſt, quam id, quod quantitas non eſt, minus eſſe quocunque angulo? Quid rurſus magis perſpicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum ſemicirculi, majorem eſſe quolibet acuto? Agnoſcat itaque Peletarius, Nihil illud ſuum male à nobis acceptum, idque ita ulciſcatur, ut meum hoc argumentum refellat: in quo ego ſi angulum contactus dixi eſſe nihil, & non potius eum nihil eſſe aſſerui ex ſententia Peletarii, libenter manus dabo. Videtur Peletarius aut non intelle xiſſe meum argumentum, aut intelligere noluiſſe: niſi eum quis dicat, dedita opera verba mea voluiſſe cavillari; quod & plerisque aliis in locis facere videtur. Nunquam enim dixi, angulum contactus minorem eſſe aut majorem nihilo; Solum affirmavi, angulum contactus quemcunque minorem eſſe, aut majorem aliquo alio angulo contactus; quem non ego dixi nihil eſſe, ſed Peletarius, eundemque Euclides minorem quolibet acuto rectilineo recte demonſtravit. Vt autem intelligat Peletarius, me, quod ipſe negat, didiciſſe Dialecticam, illum ipſum tam lepidū, atq; acutum ſyllogiſmum, quo nihil illud ab ſe confictum mira venuſtate cōfinxit, paulliſper conſiderabimus; ut quam ſuo jure Dialecticę ignaros alios vocet, appareat. Nam mihi quidem male tornatus ille ipſe ſyllogiſm⁹ videtur, incudique reddendus. Etenim cū verſetur in tertia figura, in eo major extremitas (ut Dialectici loquuntur) quæ eſt, Nihil, de minori extremitate, quæ eſt, angulo contactus major, in recto prædicari deberet, hoc pacto. Angulus contactus nihil eſt: Angulus cōtactus angulo cōtactus major eſt. Igitur aliquid, quod angulo cōtactus majus eſt, nihil eſt. Quæ quidem concluſio recte ſequitur ex præmiſſis, quarum prior Peletarii eſt, non mea, poſterior autem mea & Procli, immo & Euclidis. Concluſio autem illa Peletarii,

Angulus igitur major nihilo eſt, nulla ratione ex præmiſſis inferri poteſt. Nam ſi, angulum cum dicit intelligit Peletarius angulum cõtactus, aſſumitur medius terminus, qui in utraque præmiſſa, ſubiicitur: quod nefas eſſe, Ariſtoteles in prioribus Anal. & Dialectici omnes clamant. Si autem alium angulum intelligit, aſſumitur in cõcluſione terminus, cujus nulla facta eſt mentio in præmiſſis; quod nihilo magis licere, nemo eſt tam plumbeus in Dialecticis, qui neſciat. Neque contendat Peletarius, mentionem factam eſſe anguli in minore extremitate, ubi dictum eſt, angulum contactus angulo cõtactus majorem eſſe. Nam angulus in minore extremitate poſitus eſt in obliquo, qui in concluſione ſubiicitur in recto: quod, ut auctore Ariſtotele docent omnes Logici, ſine peccato fieri non poteſt. Quod, ut planum fiat, utemur ea palæſtra, quam ab illo didicimus. Si quispiam ita argumentetur; Angulus in ſemicirculo rectus eſt; Angulus in ſemicirculo angulo acuto major eſt. Angulus igitur acutus major recto eſt; quis modo ſit imbutus Dialecticis, ejusmodi argumentationem probet, cum præmiſſæ veræ ſint, concluſio autem falſa? Talis ille ſyllogiſmus eſt Peletarii, qui apud imperitam multitudinem alter Chryſippus videri voluit Concluſio, quæ recte ex præmiſsis inferretur, hæc eſſet. Igitur aliquis angulus, qui acuto major eſt, rectus eſt. Sed tamen ei veniam dandam puto, quod ſe Geometricum Dialecticum, ex alio quodam Dialecticorum genere, profitetur, cujus ego me Dialecticæ, ſi ab Ariſtotelica abhorret, plane fateor ignarum. Fatetur deinde Peletarius, ſe non intelligere, quo pacto dicere poſsim, angulum rectilineum minimum dari nõ poſſe, & tamen angulum contactus eſſe omni acuto rectilineo minorem, (ipſe ut aliquid addat de ſuo, dicit, omni minimo acuto rectilineo minorem, cum tamen verbum illud, minimo, ego non addiderim) cupitque ſcire, quid aliud ſit, angulum contactus minorem eſſe omni rectilineo acuto, quam angulum contactus eſſe acutorum rectilineorum minimum. Qua in re morem geram homini non gravate, etſi è ſcholio hujus propoſ. 16. potuit id, quod cupit, cognoſcere. Nempe ea ratione me illud potuiſſe dicere qua dicimus, angulum obtuſum rectilineum minimum dari non poſſe, & tamen angulum rectilineum acutum eſſe omni obtuſo rectilineo minorẽ. Item quemadmodum aliud eſt, angulum rectilineum acutum minorem eſſe omni rectilineo obtuſo, quam angulum rectilineum acutum eſſe obtuſorum rectilineorum minimum: propterea quod angulus acutus non eſt obtuſus, ſicut nec angulus contactus rectilineus eſt, aut acutus. Id quod etiam clariſsime docet Proclus lib. 2. in primum Euclidis ad defin. anguli recti, obtuſi, & acuti. Sed hæc puerilia ſunt, & quæ magis ad Grammaticos ſpectent, quam ad Geometras. Quod etiam, ne librum meum parum ſpiſſum viderer feciſſe, ſuas demonſtrationes ad verbum me recitaſſe queritur, id in me reprehendit, quod ego in ipſo deſidero. Id enim eo à me conſilio

factum

factum est, ut omnes plane viderent, syncere me, ac fideliter ejus opinionem retuliſſe, nullumque omnium verbum immutaſſe. Quod utinam in meis verbis recitandis ipſe facere in animum induxiſſet, Multo enim minus ſpiſſam Apologiam ſuam facere potuiſſet. Nam ego, quid erat, cur laborarem meum librum Peletarii verbis magis ſpiſſum efficere? Qui enim parum ſpiſſum indicarem librum eum, qui nec raras, nec inanes in libros omnes Euclidis commentationes contineret, cum Peletarius ſuum librum, qui ſex priorum duntaxat librorum demonſtrationes complectitur, ſatis ſpiſſum ſit arbitratus? Sed eo ſum æquior Peletario, quod ex ſe alios judicat. Nam in Apologia ſua, ne inanis rerum videretur, tres demonſtrationes nihil penitus ad eam pertinentes inſerſit: quarum priorem immerito ſuam propriam facit, ut ſupra dixi: poſteriorem vero, quam mirum in modum gloriatur ſe clariorem feciſſe, ego & longe brevius, & dilucidius (niſi meorum me amor fallat) jam pridem demonſtravi, ut mox, Deo adjuvante, ex Geometria mea Practica clariſsime apparebit. Sed licuerit Peletario ſuæ Apologiæ, ne incomitata prodiret, novo more comites ac pediſſequas adjungere: mihi cur non liceat, quod omnibus ſemper licuit, aliorum ſententias totas meis ſcriptis intexere? Aut igitur omnes reprehendat, atque inprimis Petrum Nonium laudatorem ſuum, qui idem fecit in refellendis paralogiſmis Orontii, aut ſine cauſa id ſe mihi vitio dediſſe fatearur. Quod ſi, poſtquam tam fideliter ejus verba propoſui, Peletarius criminatur, me ejus ſententiam perperam eſſe interpretatum, quid facturus fuiſſet, ſi alienis verbis ejus opinionem in medium adduxiſſem? Equidem facile ſibi perſuadebit quis, nullum eum verbum relicturum fuiſſe, quod non reprehendiſſet.

Quarto ut leviora hæc omittat, illud putat palmare, quod me laborare oſtendit, ut probem, angulos contactus alios aliis eſſe inæquales: propterea quod ſcripſi æqualitatem angulorum ejusdē generis requirere eandem inclinationem linearum, ita ut lineæ unius conveniant omnino lineis alterius, ſi alter alteri ſuperponatur, juxta octavum pronunciatum. Qua in re dupliciter me peccare ait. Primum quod dicam, ad æqualitatem angulorum ejusdem generis requiri eandem linearum inclinationem, cum tamen angulus rectilineus oſtēſus ſit à me æqualis curvilineo, atque adeo ejusdem generis cum illo, licet nō ſit in utroque eadem linearum inclinatio. Deinde, quod putē angulos contactus ideo inter ſe inæquales eſſe, quod ſibi mutuo non congruant. Equidem ſi quid in eo à me peccatū eſſe intelligerem, & peccatū (quod eſt ingenuo, & liberaliter educato homine dignum) agnoſcerem, & Peletario correctori, & emendatori meo (quocunque id animo fecerit) gratias agerem. Nunc vero, cū, tota re etiam atque etiam conſiderata, nihil omnino vitii ineſſe videam, ita, quæ obijciuntur, diluam, ut tamen gratiam habeam Pele-

tario, qui occasionem dedit ejus loci diligentius explicandi. Ego igitur eo loco intellexi angulos ejusdem generis illos, qui unam lineam habent rectam, & alteram circularem, quales sunt anguli contactus, & semicirculorum, de quibus tunc agebamus. Quare cum linea recta unius cōgruat lineæ rectæ alterius, circularis verò circulari non item, nisi circuli ponātur æquales, efficitur, angulos illos esse inæquales inter se, quippe cum alter alterū excedat. Eadē ratione, si dentur duo anguli curvilinei æqualiū circulorum æquales, necesse est, lineas unius lineis alterius congruere, si alter alteri superponatur. Quod si Peletarius hanc doctrinam oppugnat, sciat se jam bellum movere non mihi, sed Proclo, qui lib. 3. in primum Euclidis ad propos. 4. idem prorsus docet, quod ego. Ait enim (*Angulorum autem æqualitatem sumemus juxta convenientiam laterum in rectilineis: in cæteris quoq; omnibus, qui ejusdem sunt speciei, ut in Lunaribus, in Systroidibus, atq; in utrinq; convexis, &c.*) Et infra (*Quæ æqualia data sunt, sibi invicem congruunt. Hoc autē non in omnibus verū est, sed in iis, quæ specie similia sunt. Specie autē similia hæc dico, ut recta linea rectæ lineæ, & circūferētia circūferentiæ circuli ejusdem, & anguli, qui à similibus similiter jacentibus lineis comprehensi sunt. Horum autem dico, quod quæ æqualia data fuerint, sibi invicem congruunt*) Nonne luce clarius ex his colligitur, Proclum illos solū angulos contactus concedere æquales, quorum rectæ lineæ, & curuæ sibi mutuo congruunt? Temere igitur Peletarius mihi objecit angulum rectilineum, & curvilineum, triangulum & quadratum, atque alia hujusmodi, de quibus eo loco sermo non erat; quippe quæ non sint ejusdem speciei, atque adeo æqualitatem tueantur, etiamsi alterum alteri non congruat. Vt jam vereri incipiam, ne Peletarius noster contentionis sit cupidior, quam veritatis.

Postremo, ut nihil intactum relinquat, me non modo Geometriæ ignarum vocat, sed etiam Logices: propterea quod lib. 5. dixi, non recte à quibusdam dividi proportionem rationalem in proportionē æqualitatis, atque inæqualitatis: quod multæ proportiones inæqualitatis sint etiam irrationales. Ego vero (etsi non is sum, qui mihi quicquam ullo in genere arrogem) tamen in hisce studijs, in quibus mediocriter versatus sum, plane rudem non esse, præ me semper tuli. Quantulum autem sit id, quod in utroque possim, cæteri melius, qui vacant amore, & odio, judicabunt: Peletario quidem ipsi me adhuc respondisse arbitror, ut jam minus fortasse ignarus Geometriæ, ac Dialecticæ videar, quam putarat. Nunc, ut perspiciat, neque me pertinacem esse, neque illa, quæ exagitat, à Dialecticorum ceptis abhorrere, libenter ei concedo, divisionem illam, quam à me reprehensam criminatur, probam esse, ita tamen si in quolibet divisionis membro Divisum intelligatur: neque vero hoc unquam negavi, cum alibi similes divisiones usurpem. Solum

id eo

id eo loci contendi, rectius meo judicio, dividi Proportionem in universum duplici divisione, priori quidem in proportionem rationalem, & irrationalem: posteriori vero in proportionem æqualitatis, atque inæqualitatis, (quod verissimum esse, neminem negaturum censeo, qui rem diligentius expenderit) cum tam priora duo membra dividentia, quam posteriora totum Divisum, (ut Logici loquuntur) exhauriant: quam si prius membrum prioris divisionis, hoc est, proportio rationalis, secetur in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis, cum hæc membra dividentia latius pateant, quam Divisum, nisi in illis Divisum intelligatur. Atque eo magis duplex illa divisio mihi probatur, quod non desint, qui primum partiantur Proportionem in proportionem æqualitatis & inæqualitatis: posteriorem deinde hanc in proportionem rationalem, & irrationalem: contrario scilicet modo, quam priores. Vt igitur hanc controversiam dirimerem, ac dubitationem, utri rectius faciant, priores ne, an posteriores, tollerem, statui duabus divisionibus secandam esse Proportionem, quarū utraque absolutissima est, ac perfectissima. Non aliter arbitror, omnes magis esse probaturos, si corpus duplici divisione secetur, primum quidem in vivens, & non vivens: deinde vero in album, nigrum, ac mixto colore affectum: quam si corpus vivens dividatur in album, nigrum, ac mixto colore affectum: ob causam jam dictā: licet hæc subdivisio bona sit, si Divisū semper intelligatur. Huj'modi divisiones sexcētas adducere possem: sed satis est, me prudenti lectori instituti meū in divisione Proportionis exposuisse, & cur duplicem illam divisionē subdivisioni aliorū prætulerim. Quod si tam acres, & severi judices singulorū verborum aut impropriatū, quæ per incogitantiā interdum excidūt, esse velimus, næ scriptorū nullus aliquo vitio carebit neque ipse quidem Peletarius, ut partim ex iis, quæ dicta sunt, cōstat, partim etiam ex aliis ejus demōstrationibus apparere potest: quas si liberet ad certam illam Dialecticorū normam exquirere, profecto reprehendendi materia non deesset. Verum non est hoc nostri consilii, refellendi studio vitia aliena scrutari, sed ubi sese occasio obtulerit, meam (qualiscunque est) de aliorum sententiis sententiam exponere: Solum ab eo peto, (quoniam se tam acutū Dialecticum jactat, ut alios contemnere videatur; quanquam ex superiore syllogismo, quem in me convertit, liquido constat, quam sit Dialecticæ peritus) ex qua Logica hanc argumentationem hauserit: Omnes anguli cōtractus sunt minores quolibet angulo acuto rectilineo: ergo omnes inter se sūt æquales. Itemque hanc: Anguli semicirculorum, quo à majoribus circulis fiunt, eo sunt majores: igitur tandē ad aliquem perveniemus, qui recto rectilineo major sit: in qua quidem ad Cardanū scribit, nullum esse paralogismū. Ego sane vehementer miror, qua ratione in tam apertas hallucinationes, & viro cometra omnino indignas, incidere

potuerit. Sed argumentationes ejusmodi satis superq; in scholio hujus propos. 16. à me sunt confutatæ, adductis contra ipsas evidentissimis instantiis Deinde quod me perstringit, quasi parum intellexerim, quæ sit proportio rationalis, & quæ irrationalis, non multum laboro. Constat enim, eum studio mihi detrahendi id dixisse, cùm has proportiones ubique ex sententia gravissimorum scriptorum definierim, neque vero ipse ullum peccatum à me ea in re esse commissum, poterit ostendere. Certe commentarius meus in lib. 10. Euclidis abunde declarat, num illas intellexerim, nec ne. Denique quod criminatur, me in definitionibus lib. 5. proportionis nomen confundere cum Rationis nomine, nullo modo verum est. Perspicuis enim verbis docui in defin. 4. lib. 5. me in commentario comparationem duarum quantitatum, Proportionem cum pluribus Geometris appellaturum, habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem; licet in textu cum interprete illam dicam Rationem hanc vero, Proportionem. Neq; enim quicquam in textu Euclidis volui immutare. Itaque nulla in meis verbis potest esse ambiguitas.

Ex his, quæ diximus, satis (ut opinor) apparet, doctissimos illos viros, de quibus initio memini, non sine causa Apologiam Peletarii inanem, ac responsionis indignam judicasse. Ego tamen, ne contemnere hominem viderer, quem semper laudandum esse duxi, occasione invitatus respondendum amice putavi. Existimet ille, angulum contactus quantitatem non esse, atque adeo angulum semicirculi recto rectilineo esse æqualem, ego certe contrariam sententiam tuebor, donec aliud mihi demonstratum ab aliquo fuerit: rationes enim Peletarii fallaces sunt, nihilque continent in se probabilitatis, ut in scholio hujus propos. 16. ostendi, ubi omnes dissolui, neque meis ipse solutionibus vel unum verbum (exceptis ijs, quæ supra ex lib. 10. adduxit) respondit; quod tamen maxime ad Apologiam pertinebat: Vt non sine causa permulti existimaverint, eum non veritatis studio eam Apologiam scripsisse, sed ne veritati cessisse videretur. Nec vero quisquam putet, me unum existimare, angulum contactus vere esse angulum, & angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Multos enim ejus rei auctores, eosq; gravissimos laudare possum, Theonem, Campanum, Petrum Nonium & (ut Nonius refert) Archimedem, atq; Iordanum: quin etiam (quod plurimi facio) Euclidem ipsum, ejusque cõmentatorem celeberrimũ Proclum: ut taceam ex Gallis præstantissimos, atque eruditissimos viros non paucos, è quorum numero inprimis est Franciscus Candalla ex illustrissima Flussatum familia oriundus, qui insigne volumen in elementa Geometrica Euclidis edidit, ubi ad prop. hanc 16. apertissime docet, angulos cõtingẽtiæ vere esse angulos, ex definitione anguli plani, aliosque aliis esse majores, æquales, ac minores: Eos autem, qui aliter sentiunt, (Peletarium procul dubio intelligit. Præter eũ enim ad hunc diẽ nemo hac de re scripsit) absurde mul-

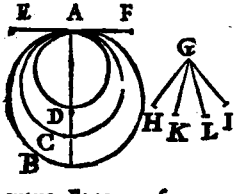
multa ex falsis suppositis concludere affirmat. Huc accedat etiam Henricus Monantholius Mathematicarum artium professor regius, qui, cum Apologiam Peletarij in me conscriptam vidisset, opusculum eruditum aduersus Peletarium de angulo contactus edidit. Vt autem studiosus lector videat, quid in hoc negotio sentiat Proclus, afferam in medium pauca quædam ex eius commentarijs in lib. 1. Euclidis quæ obiter notaui, & ex quibus liquido constabit, eius sententiam esse Peletarij commento prorsus contrariam. Primum itaque ita scribit lib. 2. in primum Euclidis, ad definitionem anguli plani. (*Duæ namque circumferentiæ se inuicem secando, vel sese contingendo, angulos efficiunt. Quin etiam à recta linea, & conuexa circumferentia angulus continetur, vt Cornicularis*) Intelligit autem nomine Cornicularis anguli angulum contactus mixtum. Paulò enim ante dixerat, angulum Cornicularem esse omni rectilineo minorem: quod solius anguli contactus proprium est. Deinde in eod. lib. ad definit. anguli recti, obtusi, & acuti ita habet. (*Cornicularis namque angulus omni recto est minor, quandoquidem & acuto, nec tamen acutus est: Semicircularis itidem quoque recto est minor, acutus tamen non est.*) Quid clarius quam Proclum hic asserere angulum semicirculi minorem esse recto? Rursus lib. 3. ad propos. 4. lib. 1. Euclidis ita scribit. (*Addiscemus enim, quod angulus Cornicularis acuto semper inæqualis est, & nunquam æqualis: Et semicircularis similiter, transituque à maiori ad minus non omnino per æquale fit*) En quam aperte docet, angulum semicirculi æqualem esse non posse angulo rectilineo, transitumque propterea fieri à maiori ad minus non per æquale: quorum vtrumque Peletarius negat, audetque posterius appellare paralogismum. Denique eodem lib. 3. ad propos. 23. hæc verba habentur. (*Cum autem nullus angulus mixtus rectilineo æqualis esse possit, &c.*); Et Peletarius tamen non dubitat angulum semicirculi, qui mixtus est, angulo recto rectilineo facere æqualem, contra Procli sententiam. Ex his liquere arbitror, vt de cæteris taceam, idem sentire Proclum de angulo cotactus, & semicirculi, quod ego contra Peletarium scripsi; quis autem neget, maiorem esse autoritatem, meliora argumenta Procli, quam Peletarij?

Obiter quoque hoc loco monendum lectorem censeo, id quod de angulo contactus, qui fit in circulis, ex sententia Euclidis, & Procli docui, verum etiam esse de angulo contactus, qui in conicis sectionibus efficitur, nimirum in Parabola, Hyperbola, & Ellipsi. Vt enim Apollonius Pergæus demonstrat lib. 1. propos. 32. in locum qui inter coni sectionem, & rectam lineam tangentem interijcitur, altera recta linea non cadit, atque adeo angulus ille contactus minor etiam est omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (si nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitatur

perpendicularis) omni acuto rectilineo maior. Si igitur, vt opinatur Peletarius, angulus contactus quantitas non est, (eadem enim hic est ratio, quæ in circulo) erunt omnes anguli contactus inter se æquales, hoc est, vt ipse vult, non inæquales, & reliquorum angulorum singuli recto rectilineo æquales. Vbi sane maior absurditas apparet, quo ad sensum, in ea Ellipsi quæ perexiguam habeat latitudinem, & in ea Hyperbola, quæ fere linea recta esse videatur. Valde enim inæquales cernuntur anguli ad verticem illius Ellipsis, & Hyperbolæ constituti: vt incredibile omnino sit, nisi firma ratione demonstretur, angulos illos contactus ad vertices sectionum constitutos inter se, & reliquos ex rectis inter se quoque esse æquales: propterea quod in ea Ellipsi linea tangens magis recedere perspiciatur à circumferentia Ellipsis, quam in circulo: in illa verò Hyperbola minus. Sed hæc alio tempore examinanda relinquamus; nunc ad interruptam expositionem Euclidis reuertamur.

EX CARDANO.

Aliqua quantitas potest continue, & infinite augeri, altera vero infinite minui: & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento hujus.



Proponatur enim angulus contactus BAE, & acutus HGI. Si igitur describantur alij circuli minores AC, AD, tangentes rectam EF, in A, augebitur cõtinue angulus contactus, vt dictum est. Si rursus inter rectas GH, GI, aliæ rectæ cadant GK, GL, diminuetur continue angulus acutus: Et tamen semper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor est angulo acuto, quantumuis diminuatur.

EX CAMPANO.

Cæterum ex hac propos. 16. perspicuum est, vitiosam esse argumentationem hanc, qua vsus est Brison in quadrando circulo, vt auctor est Aristoteles. Videlicet.

Transitur à minori ad maius, vel contra, & per omnia media: ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc, & minus eodem: ergo contingit reperire æquale.

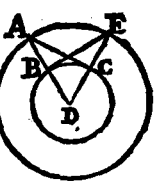
Describatur enim circulus ABC, cuius diameter AC, moueri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per puncta D, E, F, donec circulum contingat in A. Hoc concesso, manifestum est, quam-

quamdiu recta AC, secat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo semicirculi: quamprimum vero secare cessat, effici angulum rectum maiorem eodem angulo semicirculi. Cum igitur factus sit transitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus æqualis reperitur angulo semicirculi: (Rectus enim, vel obtusus, maior est: & acutus, minor,) constat quoque vitiosam esse posteriorem consequentiam.

PROBL. 2. PROPOS. 17.

xvii.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.



Ex puncto A, ducenda sit linea, quæ tangat circulum BC, *cuius centrum* D. *Ducatur recta* AD, *secans circulum* BC, *in* B. *Deinde centro* D, *interuallo autem* DA, *describatur circulus* AE, *& ex* B, *educatur* BE, *perpendicularis ad* AD, *secans circulum* AE, *in* E. *Ducta denique recta* ED, *secante circulum* BC, *in* C, *connectatur recta* AC: *quam dico tangere circulum* BC, *in* C. *Cum enim duo latera* DE, DB, *trianguli* BDE, *æqualia sint duobus lateribus* DA, DC, *trianguli* CDA, *vtrumque vtrique, vt constat ex circuli definitione: angulusque* D, *contentus dictis lateribus sit communis: Erunt* a *& bases* BE, CA, *& anguli* DBE, DCA, *super ipsas æquales. Est autem* DBE, *rectus ex constructione. Igitur &* DCA, *rectus erit. Itaque* CA, *cum sit perpendicularis ducta ad* C, *extremum semidiametri* CD, *tanget circulum, per corollarium præcedentis propositionis* A, *dato ergo puncto* A, *ducta est* AC, *recta tangens circulum* BC, *in* C, *quod faciendum erat.*

a 4. pri.

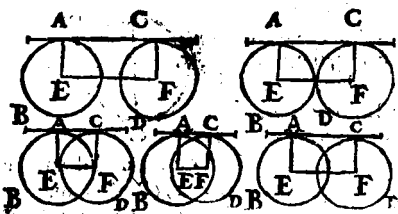
SCHOLIVM.

Praxis huius problematis ex ipsa demonstratione facile elicitur. Faciliorem tamen praxim ad propos. 31. huius lib. inuenies.

Sed & sequens problema cum Cardano absoluemus.

Propositis duobus circulis, quorum neuter alterum includat: rectam lineam ducere quæ vtrumque tangat circulum.

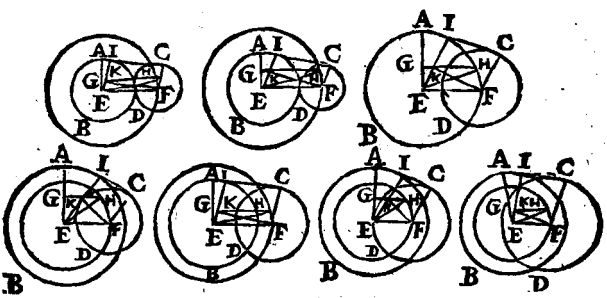
Sint primum duo propositi circuli æquales AB, CD, quorum centra E, & F. recta iungantur EF, ad quam ducantur perpendiculares EA, FC, secantes circumferentias in punctis A, & C. Dico rectam



ctam per A, & C, ed uctam vtrumque circulum tangere. Cum enim EA, FC, semidiametri circulorum æqualium sint æquales, a & parallelæ, quod anguli E, & F, recti sint: b Erunt quoque EF, AC, æquales & parallelæ: Ideoque c & anguli A & C, recti. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. recta AC, vtrumque circulum tanget, cum rectos angulos constituat in extremitatibus semidiametrorum.

a 28. primi.
b 33. primi.
c 29. primi.

Sint deinde duo circuli propositi inæquales ABCD, quorum rursus centra E, & F. iungantur recta EF, ad cuius interuallum ex E, centro maioris circuli circulus describatur FH, si maior non transeat per centrũ minoris. Deinde ducta ad EF, perpendiculari EA, abscindatur ex ea portio AG, semidiametro minoris circuli CD, æqualis: & ex G, ipsi EA, perpendicularis ducatur GH, vsque ad circumferentiam circuli FH, proxime descripti. Ducta autem recta HE, fiat angulo HEA, angulus FEI, æqualis: atque per F, agatur ipsi EI



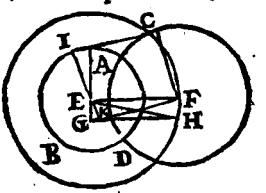
parallela recta FC. Dico rectam per puncta I, & C, ductam vtrumq; circulum AB, CD, contingere. Abscindatur enim ex IE, recta IK, ipsi AG, vel semidiametro FC, minoris circuli, æqualis, vt sint reliquæ EG. EK, æquales quoque, ducaturq; recta KF. Quoniam igitur latera HE, EG, trianguli HEG, æqualia sunt lateribus FE, EK, trianguli FEK, & anguli ipsis contenti æquales, ex constructione: d Erunt anguli HGE FKE, æquales: Ac proinde, cum HGE, rectus sit, ex constructione, erit & FKE, rectus. Rursus quia CF, IK, æquales sunt, & parallelæ ex constructione, e erunt quoque IC, KF, æquales & parallelæ: Atque propterea angulus EIC, f cum æqualis sit externo FKE, rectus erit: g Ideoque & IÇF, rectus existet. Quocirca, per coroll. propos. 16. huius lib. recta IC, vtrumque circulum contingit

d 4. pri.
e 33. pri.
f 29. pri.
g 29. primi.

tinget, cum rectos angulos efficiat in extremitatibus semidiametro. rum. Quod erat propositum.

Satis autem constat, si circuli propositi æquales fuerint, id quinque modis posse fieri. Aut enim alius extra alium cadit, aut se mutuo contingunt, aut se inuicem per centra secant, aut non, ita tamen, vt vel centra consistant in communi eorum segmento, vel certe extra illud.

Item si circuli propositi fuerint inæquales, id contingere posse septem modis. Aut enim minor totus extra maiorem cadit, aut ipsum tangit, aut ipsum secat, ita vt vel centrum eius sit in circumferentia maioris, vel intra ipsum circulum, hac tamen lege, vt circumferentia minoris, citra centrum maioris transeat, vel centrum minoris sit extra circulum maiorem, vel iterũ, ita intra, vt circumferentia minoris per maioris centrum incedat, vel denique ita intra, vt circumferentia minoris includat centrum maioris.

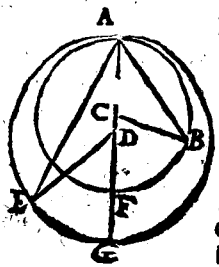


Quoniam vero circulis inæqualibus existentibus, initium constructionis sumpsimus semper à maiori, si quis maluerit à minori incipere, id efficiet eadem constructione, demonstratioque neque nisi quod rectæ AE, IE, protrahendæ sunt ad G, & K, vt AG, IK, æquales sint semidiametro FC, maioris circuli; Addito insuper, angulos HEG, FEK, contentos lateribus HE, EG, FE, EK, idcirco æquales esse quod HEA, FEI, reliqui duorum rectorum, æquales sint, ex constructione. Denique angulum EIC, esse rectum, ex 29. propos. lib. 1. quod & EKF, inter parallelas ICKF, rectus sit ostensus.

Quia verò & per punctum in circumferentia circuli datum, & per punctum extra circulum existens lineam rectam, quæ circulum tangat, ex ijs, quæ demonstrata sunt, ducere possumus: per punctum quidem in circuli circumferentia positum, ex coroll. propos. 16. per punctum vero extra circulum ex hac prop. 17. Itẽ ostensum est hoc scholio, rectam duci posse, quæ duos circulos tangat, dummodo alter eorum in altero non totus includatur, non alienum erit hoc loco demonstrare, quo pacto per datum punctum circulus alium datum circulum tangens, siue interius, siue exterius, describendus sit: Item qua ratione describendus sit circulus tangens duos alios circulos, quorum vnus non sit totus intra alium.

Sit ergo primum in circulo AB, cuius centrum C, datum punctum A, in circumferentia, per quod describendus sit circulus, circulum AB, tangens in A. Ducta ex A, per centrum C, recta AC, sumatur in ea quoduis punctum D, ex quo ad interuallum DA, circulus describatur AE, qui circulum AB, in A, tanget; Et si quidem

pun-



punctum D, fuerit vltrà centrum C, cadet circulus, AE, totus extra circulum AB: intrà vero, si punctum D, in semidiametro AC, extiterit, vt scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

Deinde extra eundem circulum AB, datum sit punctum G, per quod describendus sit circulus circulum AB, tangens. Ducta ex G, per centrum C, recta GCA, eaque secta bifariam in D, describatur ex D, per A circulus AE, qui per datum punctum G, transibit, tangetque circulum AB, in A, per ea, quæ in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

Aliter. Sit datum rursus punctum E, extra circulum AB, Ducta recta EA, vtcunque ex puncto dato E, quæ circulum secet, & non per centrum transeat, ducatur ex A, per centrum C, recta AC: eritque angulus EAC, acutus, cum pars sit anguli semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo EAC, in E, æqualis constituatur AED: coibitque recta ED, cum AC, in D, ob duos angulos DAE, DEA, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli DAE, DEA, æquales sunt, *a* erunt & latera DA, DE, æqualia. Circulus ergo ex D, per A, descriptus per datum punctum E, transibit, tangetque circulum AB, in A, ex ijs, quæ in supradicto scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

a 6. primi.

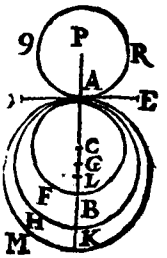
Tertio datum sit punctum F, intra circulum AE. Ducta ex F, per centrum D, recta FA: eaque secta bifariam in C, describatur ex C, per A, circulus AB, qui per datum punctum F, transibit, tangetque ex dicto scholio circulum AE, in A.

Aliter. Sit datum rursus punctum B, intra circulum AE, cuius centrum D. Ducta recta quacunque AD, per centrum D, & non per datum punctum B, transeunte, quæ cum recta coniuncta AB, faciet angulum acutum BAD, vtpote minorem angulo semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo BAD, in B, æqualis fiat ABC: coibitque recta BC, cum AD, in C, ob duos angulos BAC, ABC, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli BAC, ABC, æquales sunt, *b* erunt & latera CA, CB, æqualia. Circulus ergo ex C, per A descriptus, per datum punctum B, transibit, tangetque circulum AE, in A, per ea, quæ à nobis scholio propos. 13. huius lib. demonstrata sunt,

b 6. primi.

Quod si per punctum N, extra circulum QAR, datum describendus sit circulus tangens circulum QAR, exterius, ita vt neuter intra alium cadat, ducaturq; ex N, puncto dato ad centrum P, circuli QAR, recta NP, secans circumferentiam circuli in A. Diuisa deinde recta NA, bifariam in L, describatur ex L, per A, circulus qui per datum

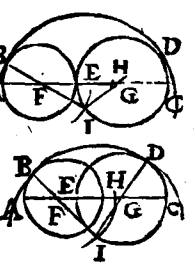
tum punctum N, transibit, tangetque circulum QAR, in A, propterea quod vterque circulus rectam DE, quæ per *A*, ducitur ad NP, perpendicularis tangit in *A*, ex coroll. propos. 16. huius lib.



Eodem modo si in circumferentia circuli QAR, datum sit punctum A, describemus circulum, qui circulum QAR, exterius tangat in A. Ducta enim ex centro P, recta PAC, per datum punctum A, si ex quolibet puncto huius rectæ per A, circulus describatur, nimirum AMN, ex centro *L*, tanget hic circulum QAR, vt dictum est, in A.

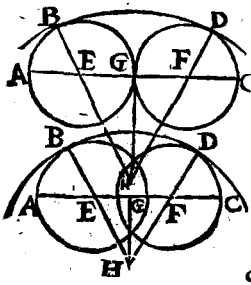
Ex his liquet, per idem punctum datum plures posse circulos describi alium datum circulum tangentes (si nimirum ex datis punctis E, B, in priori figura ducantur aliæ rectæ quæ à rectis EA, BA, differant: Item ex punctis datis FG, emittantur aliæ lineæ non per centra C, D, transeuntes, sed circulos secantes: ac tandem in recta AG, eiusdem figuræ, vel in PAC, posterioris figuræ, quando punctum A, in circumferentia datur, alia centra à centris C, D, L, diuersa assumantur) cum tamen per punctum datum extra circulum vna sola linea ad easdem partes duci possit circulum tangens. Quo pacto autem circulus duos circulos tangens quorum vnus nõ sit totus intra alium, describendus sit, hac ratione cum Ioan. Bapt. Benedicto demonstrabimus.

Sint primum duo circuli se mutuo tangentes, aut secantes inæquales, AB, minor, & CDE, maior quorum centra F, G, per quæ recta ducatur FG, occurrens circumferentiis in A, C, quæ, si circuli se tangant in E, *a* per contactum E, transibit. Abscissa recta EH, ex semidiametro maioris circuli, quæ semidiametro minoris sit æqualis, describatur ex F, centro minoris ad interuallum rectæ HC, quæ maior est quam semidiameter minoris, arcus secans circumferẽtiam maioris in I: & ex I, per centra F, G, rectæ ducantur IF, IG, occurrentes circumferentijs in *B*, D. Et quia CH, ipsi IF, & HE, ipsi FB, æqualis est, per constructionem: erunt totæ CE, IB, æquales. Cum ergo & diameter ID, diametro CE, æqualis sit, erit quoq; IB, ipsi ID, æqualis. Circulus ergo ex I, per B, descriptus transibit per D. Cum ergo idem, ex scholio propos. 13. huius lib. extra vtrumque circulum cadat totus, tanget vtrumque circulum, in B, D. Quod est propositum.



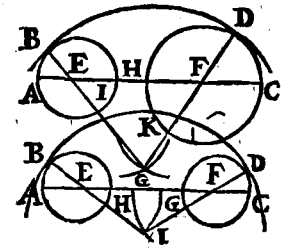
a 12. ter.

Sint



Sint deinde duo circuli se mutuo tangentes, vel secantes æquales, AB, CD, per quorum centra E, F, recta educatur AC. Diuisa deinde recta EF, inter duo centra bifariam in G, (Quando circuli se mutuo tangunt, diuiditur recta EF, bifariam in puncto contactus, propter semidiametros æquales æqualium circulorum) excitetur in G, ad EF, perpendicularis *GH*: in qua sumpto puncto H, vtcunque, ducantur ex eo per centra E, F, rectæ occurrentes circumferentiis in BD. Quoniam igitur duo latera GE, GH, duobus lateribus GF, GH, æqualia sunt, angulosque comprehendunt æquales, nimirum rectos; erunt & bases HE, HF, æquales: Et additis semidiametris æqualibus E*B*, F*D*, totæ lineæ HB, HD, æquales erunt. Circulus igitur ex H, per B, descriptus transibit per D, cadetque extra vtrumque circulum, ex scholio propos. 13. huius lib. Quare vtrumque tanget in B, D. Quod est propos.

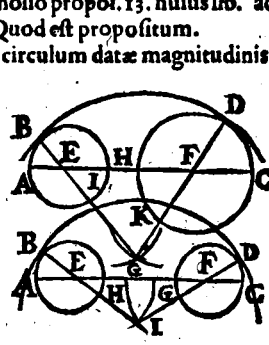
Tertio sint duo circuli siue æquales, siue inæquales, AB CD, quorum alter extra alterum sit totus. Per eorum centra E, F, ducatur recta AC. Et si circuli sunt inæquales, describatur ex E, centro minoris ad interuallum diametri maioris CH, arcus quem in G, secet alter arcus ex F, centro maioris descriptus ad intervallum rectæ FI, compositæ ex semidiametro majoris FH, & HI, semidiametro minoris æquali. Ponamus enim nunc hos arcus se intersecare: quando autem se non secant, dicemus mox, quid agendum sit Ex G, autem per centra E, F, rectæ ducantur secantes circumferentias in B. D. Et quia FG, ipsi FI, æqualis est: ablatis æqualibus F*K*, FH: reliquæ æquales erunt K*G*, HI. Est autem HI, sumpta æqualis semidiametro minoris EB. Igitur & KG, ipsi EB, æqualis erit. Cum ergo & EG, diametro maioris KD, sit æqualis; erunt totæ rectæ GB, GD, æquales. Quare circulus ex G, per B, descriptus transibit per D, cadetque extra vtrumq; circulum ex scholio propos. 13, huius lib. ac proinde vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum:



*V*erum quia non semper duo illi arcus ex E, & F, descripti se intersecant, quod accidit propter nimiam circulorum distantiam, vnius ab altero, absoluemus problema hoc alio modo, qui generalis est, siue circuli se tangant, siue non, etiamsi non se secent, & siue æquales sint, siue inæquales. Ducta recta AC, per circulorum centra, sumun-

ſumantur rectæ æquales AG, CH, ita vt quælibet ſemiſſem ipſius AC, ſuperet: & ex centro E, per G, arcus GI, deſcribatur, quem ſecet in I, alius arcus HI, ex centro F, per H, deſcriptus: ac denique ex I, per centra E, F, rectæ emittantur circumferentijs occurrentes in B, D. Et quoniam EG, EI, æquales ſunt: ſi addantur æquales AE, BE, fient totæ AG, BI, æquales. Eadem ratione erunt CH, DI, æquales. Cum ergo AG, CH, poſitæ ſint æquales, erunt quoque BI, DI, æquales. Circulus igitur ex I, per B, deſcriptus tranſibit per D, totuſque extra vtrumque circulum cadet, ex ſcholio propoſ. 13. huius lib. ac propterea vtrumque tanget in B, D. Quod eſt propoſitum.

Iam vero eadem arte deſcribemus circulum datæ magnitudinis, qui duos circulos propoſitos tangat, dummodo ſemidiameter circuli deſcribendi maior ſit ſemiſſe rectæ AC, per centra circulorum vſque ad circumferentias ductæ. Nam ſi ſemidiametro dati circuli rectas æquales abſcindamus, vt AG, CH, reliqua perficiemus, vt proxime dictum eſt.

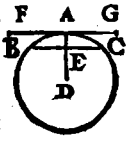


Porro manifeſtum etiam eſt, ſi ex puncto medio rectæ AC, per centra circulorum vſque ad circumferentias ductæ, deſcribatur circulus per A, & C, eum circulum tangere vtrumque circulum AB, & CD, in A, & C, ex ſcholio propoſ. 13. huius lib.

EX PELETARIO.

Lineæ rectæ, quæ circulum ſecet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.

Circulum enim ABC, cuius centrum D, ſecet recta BC, cui ducenda eſt parallela tangens circulum ABC. Ducatur ex centro D, recta DE, perpendicularis ad BC, extendaturq; ad punctũ A, in circumferentiam: & ex A, ducatur FG, perpendicularis ad AD, a Erit igitur FG, parallela ipſi BC, tangetque circulum in A, per corollarium prop. 16. huius lib. quod erat faciendum.



a 28. pri.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xviij.

Si circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipſam contingentem perpendicularis erit.

Recta linea AB. tangat in C. circulum CD. cuius centrum E. & ex E. ad C recta ducatur EC. Dico EC. perpendicularem esse ad AB. Si enim non est, ducatur EF, perpendicularis ad AB. secans circumferentiam in D.

a 17. primi. *Quoniam igitur in triangulo CEF. a duo anguli ECF, EFC. minores sunt duobus rectis: Et est EFC. rectus, ex constructione erit ECF, minor. Quare* b *maior erit recta EC. hoc est, ED quam EF. pars quam totum, quod est absurdum. Est igitur EC, perpendicularis ad AB. Quare si circulum tangat recta quapiam linea, &c. Quod demonstrandum erat.*

b 19. primi.

Aliter. Si EC. non est perpendicularis ad AB. erit alter angulorum ad C. obtusus. & alter acutus. Sit ergo ECB. acutus, qui cum maior sit angulo semicirculi ECD. erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum. Omnis siquidem angulus semicirculi c *maior est omni acuto.*

b 16. ter. c *maior est omni acuto.*

SCHOLIVM.

Hinc licebit demonstrare sequens theorema ad ea, quæ sequuntur non inutile: Videlicet.

Duobus circulis ex eodem centro descriptis: erunt omnes rectæ lineæ interiorem circulum tangentes, & vsque ad circumferentiam exterioris circuli extensæ, inter se æquales, bifariamque in punctis contactuum secabuntur.

Sint duo circuli ABCD. EF. ex eodem centro G, descripti, quos tangant rectæ AC. BD. in punctis E. F. Dico rectas AC, BD. esse æquales, bifariamque secari in E. F. Ducantur enim ex centro G, ad puncta contactuum EF, rectæ GE, GF. *d* quæ ad AC. BD. perpendiculares erunt: ac proinde, per defin. 4. huius lib. rectæ AC, BD æqualiter à centro G, in circulo ABCD. distabunt, cum perpendiculares GE. CF. æquales sint. Igitur *e* rectæ AC, BD, æquales sunt. Diuiduntur autem *f* & bifariam in EF. à perpendicularibus GE, GF. Constat ergo id, quod propositum est.

d 18. ter.

e 14. tertij.

f 3. tert. xviiij.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

Si circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: in excitata erit centrum circuli.

Tangat recta AB. circulum CDE. in C. & ex C. ducatur CE, perpendicularis AB. Dico in CE. esse centrū circuli. Si enim est extra CE. sit F, centrum à quo ad C, ducatur recta FC, quæ a perpendicularis erit

a 18. tertii.

vis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo ECB, aqualis erit, pars toti: quod est absurdum. Non igitur extra CE, centrum circuli existet. Itaque si circulum tetigerit recta quapiam linea, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 18. PROPOS. 20

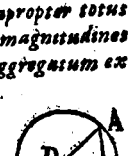
xx.

In circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

In circulo ABC, cuius centrum D, super basin BC, constituatur angulus BDC, ad centrum; & super eandem basin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplum esse anguli BAC. Includant enim primum duæ AB AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniam igitur recta DA. DB, aquales sunt; b erunt anguli DAB, DBA, aquales: Est autē externus angulus BDE, c aqualis duob. angulis internis DAB, DBA. Quare BDE, duplus erit alterius eorum, vt anguli DAB. Eodē modo duplus ostendetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC. Quando enim duæ magnitudines duarum sunt duplæ, singulæ singularum, est quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Constat ergo propositum.

b 5. primi.
c 32. primi.

Deinde non includant rectæ AB, AC, rectas DB DC, sed AB, per cētrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC, d aqualis est duobus internis DAC, DCA: Hi autem duo e inter se sunt æquales, quod latera DA, DC, sint aqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod est propositum.



d 32. primi.
e 5. primi.

Tertio recta AB, secet rectam DC, & per centrum D, extendatur recta AE. Quoniam igitur angulus EDC, ad centrum, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandem basin EC, & recta AE, extenditur per centrum; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, vt ostensum est in secunda parte. Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent enim hi anguli eandem basin EB. Reliquus igitur angulus BDC, duplus erit reliqui anguli BAC. f Quando enim totum totius est duplum, & ablatum ablati; est & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex est, &c. Quod erat demonstrandum.

f 20. pro.

SCHOLIVM.

Ad primam partem huius prop. demonſtrandam aſſumptum eſt hoc principium. (*Si duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint duplæ, ſingulæ ſingularum; erit quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum*) In tertia vero partis demonſtratione hoc aliud principium adhibitum eſt. (*Si totum toti eſt duplum, & ablatum ablati erit: & reliquum reliqui duplum*) Quorum vtrumque ab Euclide vniuerſaliter demonſtratur in omni genere multiplicium, & de quotcunque magnitudinibus, lib. 5. prop. 1. & 5. Non tamen propterea demonſtratio huius propoſ. cenſenda eſt vitioſa, quaſi aſſumat ea, quæ nondum ſint demonſtrata: quia & duo illa principia lumine naturali ita cognita ſunt in duplis magnitudinibus, vt facile à quouis ſine vlla demonſtratione concedantur, & vtraque illa propoſitio lib. 5 demonſtrari poteſt ante tertium hunc librum, cum ex eo non pendeant: adeo vt duo illa principia iure optimo adhiberi poſſint hoc loco, tanquam demonſtrata. Neque vero hac in re circulus ab Euclide committitur, cum duo illa principia, per quæ prop. 20. huius lib demonſtratur hac eadem propoſitione non nitantur, aut alijs propoſitionibus, quæ ex hac 20. pendent.

Verum, ſi placet, demonſtrabimus primam partem huius prop. ſine priore illo principio, & tertiam ſine poſteriore, (ſecunda enim pars neutro eorum indiget) hac ratione. Repetatur prima figura. Et quoniam *a* tam anguli DAB, DBA, inter ſe æquales ſunt, quam anguli DAC. DCA: erit totus angulus BAC. duobus angulis BC, ſimul ſumptis æqualis, ac proinde tres anguli BAC. B. & C. ſimul ſumptis, dupli erunt anguli BAC. Quia vero angulus BDC. æqualis eſt iſidem tribus angulis BAC, B, & C: (Nam *b* cum BDE. duobus internis B, & DAB. & CDE. duobus internis C. & DAC. æqualis ſit, erit totus BDC. omnibus quatuor, hoc eſt, tribus BAC B. & C. æqualis.) erit angulus quoque BDC. duplus anguli BAC. quod eſt propoſitum.

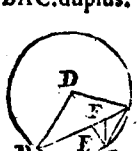
a 5. primi.

b 32. primi.

Aliter. Quoniam *c* ſex anguli triangulorum ABD. ACD. ſunt æquales quatuor rectis, ſunt autem & tres anguli BDC, CDA, ADB, quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. prop. 15. lib. 1. erunt hi tres illis ſex æquales: ablatiſque communibus ADB. ADC, *d* reliquus BDC. reliquis BAC. B. & C. æqualis erit. Quare vt prius, erit BDC. ipſius BAC. duplus.

c 32. primi.

d 3. pro.



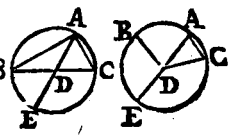
e 5 pro.

Repetatur quoque tertia figura, vbi recta DC, rectam AB, ſecat, vt in E. Quoniam ergo, ducta recta AD, *e* duo anguli DAC, DCA, æquales ſunt, eſtque angulus DAC, angulo EAC, maior, erit quoque angulus DCA, eodem angulo EAC, maior.

Si

Si igitur fiat angulus ACF, angulo EAC, æqualis secabit CF, rectam AE, vt in puncto F, *a* angulusque EFC, æqualis erit internis a 32. pri.
angulis FAC, FCA, ac proinde anguli BAC, duplus. Quia vero *b* b 5. pri.
anguli DAC, DCA, æquales sunt, & ablati quoque FAC, FCA: erunt & reliqui DAB, ECF, æquales. Cum *c* ergo DAB, ipsi DBA, æ- c 5. pri.
qualis sit: erit quoque ECF, eidem DBE, æqualis: Sunt autem, *d* & d 15. pri.
anguli DEB, FEC, ad verticem E, æquales. Igitur & reliqui anguli BDE, EFC, æquales erunt, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. Cum ergo angulus EFC, ostensus sit anguli BAC, duplus: erit quoque angulus BDC, anguli BAC, duplus, quod est propositum.

Quod si rectæ BD, CD, in centro angulum non constituant ad partes basis BC: quod dum demum fit, quando segmentum BAC, est vel semicirculus vel segmentum minus: nihilominus spatium illud ad centrum duplum erit anguli ad circumferentiam, qui eandem habeat basin, quam spatium illud. Ducta enim recta AE. per centrum, erit tam angulus BDE, ad centrum duplus anguli BAE, ad circumferentiam, quam angulus CDE, ad centrum, anguli CAE, ad circumferentiam, vt ostensum est. Spatium igitur ad centrum D, basin habens BEC, constansque ex duobus angulis BDE, CDE, duplum est totius anguli BAC. Quod est propositum.



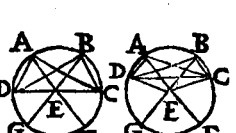
THEOR. 19. PROPOS. 21. XXI.

In circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli sunt inter se æquales.

In circulo ABCD, *cuius centrum* E, *existant anguli* A, & B, *in segmento* DABC. *Dico eos esse æquales. Sit enim segmentum* DABC, *primum semicirculo maius*: & *ducantur rectæ* DE, CE, *ad centrum* E. *Quoniam igitur angulus* DEC, *ad centrum* e *duplus est tam anguli* DAC, *quam* DBC, *ad peripheriam, cum omnes habeant eandem basin,* DC: *erunt anguli* A, & B, *dimidiatæ partes anguli* E. f *Quare inter se æquales erunt. Eademque ratione omnes alij anguli existentes in segmento* DABC, *ostendentur esse æquales.*

e 20. tertij.
f 7. pro.

Sit deinde segmentum DAEC, *vel semicirculus, vel semicirculo minus. Ducantur per centrum* E, *rectæ* AF. BG, & *in segmento minori connectantur rectæ* DE, CE. *Quoniam igitur angulus* DEF, *ad centrum,* g *duplus est anguli* DAF, *ad peripheriam: Similiter angulus* CEF, *anguli* CAF: *ac proinde*

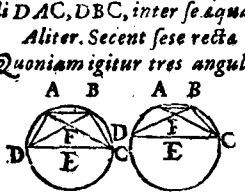


g 20. tertij.

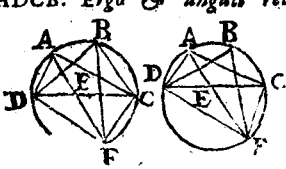
inde duo anguli simul DEF,CEF,*duorum angulorum simul* DAF, CAF,*dupli erunt,hoc est, totius anguli* DAC; *Sunt autem anguli* DEG, GEF, *aquales angulo* DEF: *erunt quoque tres anguli* DEG,GEF,FEC,*simul dupli anguli* DAC. *Eadem ratione erunt*
a 7. pro. *iidem tres anguli dupli anguli* DBC.a *Quare aquales erunt anguli* DAC,DBC.

Aliter. Quoniam,vt in scholio propos.praecedentis demonstrauimus,spatium ad centrum E,*cuius basis* DGFC, *duplum est vtriusque anguli* DAC,DBC, *ad circumferentiam:* b *Erunt ipsi anguli* DAC,DBC, *inter se aquales.*
b 7 pro.

Aliter. Secent sese rectæ AC, BD, *in* F, *& connectatur recta* AB. *Quoniam igitur tres anguli trianguli* AFD, *aquales sunt tribus*



c 23. pri. *angulis trianguli* BFC: *quoniam tam illi quam hi c aquales sunt duobus rectis: Si auferantur anguli* AFD, BFC, d *qui aquales sunt: erunt reliqui* ADF, DAF,*reliquis* BCF, CBF, *aquales. Atqui & anguli* ADF, BCF, *aquales sunt ostensi in segmento maiori* ADCB. *Ergo & anguli reliqui* DAC,CBC,*aquales sunt.*
d 15. primi.



Aliter, Ductis rectis DF,CF, *ad punctum in circumferentia quoduis* F,*includentibus centrum* E, *ita vt tam* DABCF, *quam* FDABC, *sit segmentum maius: iungantur quoque rectæ* AF, BF. *Quia igitur anguli* DAF,DBF, *in eodem segmento maiori* DABCF, *aquales sunt; nec non & anguli* FAC,FBC,*in segmento et maiori* FDABC,*existentes: si hi illis addantur, fiet totus angulus* DAC,*toti angulo* DBC,*aqualis. Itaque in circulo, qui in eodem segmento sunt, &c. Quod erat demonstrandum.*

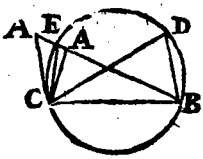
SCHOLIVM.

Facile quoque theorema istud conuertemus hoc modo.

Si à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex singulis binæ,quæ ad easdem partes contineant angulos duos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum descriptus, per alterum quoque angulum transibit.

Ex duobus enim punctis *B*,C, educantur quatuor rectæ lineæ BA,CA,BD,CD,binæ ex singulis,constituētes ad easdē partes duos æquales angulos A,D.Cico circulum per puncta B,C,& angulum D,descriptum,transire quoque per angulum A.Si enim non transit,

sit, transibit, vel vltra A, vel citra secans rectam AB, in E. Ducta ergo recta CE, a erunt anguli E, D, æquales. Cum ergo & angulus A, angulo D, ponatur æqualis: erunt anguli CAB, CEB, æquales, externus, & internus, quod est absurdum. b Externus enim interno maior est. Transit ergo circulus per A, quod est propositum.



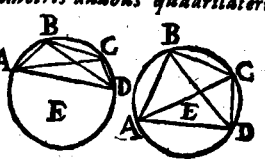
a 11. ter.

b 16. pri.

THEOR. 20. PROPOS. 22. XXII.

Quadrilaterorum in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

In circulo, cuius centrum E, *inscriptum sit quadrilaterum*, ABCD. *Dico duos angulos oppositos* ABC, CDA: *Item* BCD, DAB, *æquales esse duobus rectis. Ductis enim diametris duabus quadrilateri* AC, BD, c *erunt duo anguli* ABD, ACD, *in eodem segmento* ABCD, *æquales. Similiter erunt duo anguli* CBD, CAD *in eodem segmento* CBAD, *æquales. Quare duo anguli* ABD, CBD, *hoc est, totus angulus* ABC, *æqualis est duabus angulis* ACD, CAD. *Addito igitur communi* CDA, *erunt duo anguli* ABC, CDA, *æquales tribus angulis* ACD, CAD, CDA. d *Sed hi tres æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo* ABC, CDA, *duobus erunt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos* BCD, DAB, *duobus esse rectis æquales. Nam rursus duo anguli* ABD, ACD, *sunt æquales: Item duo* BCA, BDA: *ac propterea totus angulus* BCD, *duobus angulis* ABD, BDA, *æqualis erit. Addito igitur communi angulo* BAD, *erunt duo anguli* BCD, BAD, *æquales tribus angulis* ABD, BDA, DAB. e *Sed hi tres sunt æquales duobus rectis. Igitur, & duo* BCD, DAB, *duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterorum igitur in circuulis descriptorum, &c. Quod demonstrandum erat.*



c 21. pri.

d 32. pri.

e 32. primi

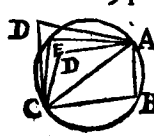
SCHOLIVM.

Conuersum quoque huius theorematis demonstrari potest, hoc modo.

Si in quadrilatero anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sint æquales: circulus, qui per tres quoscunque eius angulos describitur, transibit etiam per reliquum

quartum angulum; Atque adeo circa ipſum quadrilaterum circulus deſcribi poteſt.

In quadrilatero enim ABCD, ſint anguli oppoſiti B,& D,duobus rectis æquales,& per angulos A,B,C,circulus deſcribatur;(Quo modo autem hoc fieri poſſit,ad 25.prop.huius lib & ad 5.quarti lib.oſtendetur.)quem dico tranſire etiam per D.Si enim non tranſibit vel vltra D, vel citra. Ducantur ergo rectæ CE,AE, ad circumferentiam, ita vt non ſecent rectas CD,AD,Quo facto *a* erunt anguli *B*,& E,æquales duobus rectis: Erant autem & anguli *B*,& D, duobus rectis æquales. Igitur duo anguli *B*, E, æquales ſunt duobus angulis B,D. Quocirca ablato communi B, remanebunt anguli D, & E,æquales; quod eſt abſurdum.Ducta enim recta AC, *b* erit angulus D,maior angulo E, vel contra, angulus E, maior angulo D. Tranſit igitur circulus per punctum D.Quod eſt propoſitum.



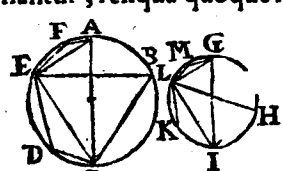
a 32. *primi.*

b 21. *primi.*

Satis autem eſt,ſumere duos tantum angulos oppoſitos æquales duobus rectis,vt theorema hoc verum ſit:quia ſi duo oppoſiti ſunt æquales duobus rectis, erunt neceſſario & reliqui duo oppoſiti duobus rectis æquales; cum omnes quatuor ſint rectis æquales vt ad propoſ.32.lib.1. demonſtrauimus.

Ex hac etiam prop.facile demonſtrabimus theorema hoc inſequens, quod frequenter vſurpari ſolet, tanquam principium, à Mathematicis, ſcilicet.

Si ex ſemicirculis,aut circulis ſegmenta ſimilia detrahantur; reliqua quoque ſegmenta ſimilia erunt.



Sint primum in circulis ABC, DEF, *GHIKLM*, arcus ſimiles CDE, IK*L*. Dico & reliquos arcus EFABC,LMGHI,ſimiles eſſe.Sumptis enim in dictis arcubus,punctis vtcunq; D,B,*K*, H, iungantur rectæ DC, DE, *B*C, BE, *K*I, *K*L, *H*I, HL. Quia igitur arcus CDE, IKL, ſimiles ſunt,erunt,ex definitione ſegmentorum ſimilium, anguli CDE,IKL,æquales. Cum ergo duo anguli CDE,CBE,duobus angulis IKL,IHL,ſint æquales; *c* quod tam illi,quam hi ſint æquales duobus rectis: *d* erunt & reliqui anguli CBE,I*H*L,æquales; ac propterea,ex defin.10.huius lib. arcus E*B*C, L*H*I, ſimiles erunt.

c 22. *tert.*

d 3 *pro.*

Deinde in ſemicirculis AEC,GLI,ſimiles ſint arcus EC, LI. Dico & reliquos arcus AE, GL, eſſe ſimiles. Sumptis enim punctis D,F,*K*,M,vtcunque in ijs arcubus,iungantur rectæ CD, DE, CE, EF,FA,AE: I*K*, *K*L, IL, *L*M, MG, GL. Itaque quia arcus EC, *L*I. ſimi-

similes sunt, erunt ex defin. anguli CDE, IKL, æquales. Cum ergo & duo anguli CDE, EAC, duobus angulis IKL, LGI, æquales sint; *a* quod tam illi, quam hi sint duobus rectis æquales; erunt & reliqui anguli EAC, LGI, æquales. Sunt autem & anguli AEC, GLI, in semicirculis, hoc est, in segmentis similibus AEC, GLI, æquales, ex definitione segmentorum similium. Igitur in triangulis AEC, GLI, & reliqui anguli ACE, GIL, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. æquales erunt. Cum ergo duo anguli ACE, EFA, duob, angulis GIL, LMG, æquales sint; *b* quod tam illi, quam hi duobus sint rectis æquales; erunt quoque anguli reliqui EFA, LMG, æquales: ac proinde, ex defin. similium segmentorum, arcus AE, GL, reliqui in semicirculis, similes erunt. Quod erat ostendendum.

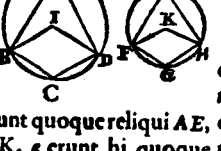
a 22. tertii.

b 22. tertii.

Quando autem de segmentis similibus sermo hic incidit, nō videntur omittenda hoc loco tria theoremata tum Geometricis rebꝰ, tum præsertim Astronomicis perneccssaria quorū primum sit hoc, quod nos ad defin. 10. hujus lib. demonstrandū recepimus, videlicet.

Anguli insistentes arcubus circulorum similibus sive ad centra, sive ad circumferentias, sunt inter se æquales. Et contra, arcus, quibus anguli æquales sive ad centra, sive ad circumferentias insistunt, similes sunt.

Sint in circulis ABCD, EFGH, quorum centra IK, primum arcus similes BCD, FGH, quibus ad centra insistant anguli I, K, ad circumferentias verò anguli A, E. Dico tam tam illos, quam hos inter se æquales esse. Constituantur enim in illis arcubus anguli C, G, qui ex defin. segmentorum similium, æquales erunt. *c* Sunt autem tam duo anguli C, A, quam duo G, E. duobus rectis æquales. Ablatis igitur æqualibus C, G, erunt quoque reliqui AE, æquales. Quorum *d* cum dupli sint anguli I, K, *e* erunt hi quoque æquales. Quod est propositum.



c 22. tertii.

d 20. tertii.

e 6. pronum.

Deinde sint tam anguli I, K, quam A, E, insistentes arcub. BCD, FGH, inter se æquales.

Dico arcus BCD, FGH, esse similes. Nam si A, & E, sint æquales: sint *f* autem tam duo anguli A, C, quam duo E, G, duobus rectis æquales; erunt & reliqui C, G, æquales; ac propterea, ex defin. similium segmentorum, arcus BCD, FGH, quibus anguli æquales A, E, ad circumferentias insistunt, similes. Si vero anguli I, K, ad centra sint æquales, *g* erunt quoque eorum dimidia æqualia, hoc est, anguli A, E. Quare ut prius, arcus BCD, FGH, similes sunt. Quod erat ostendendum.

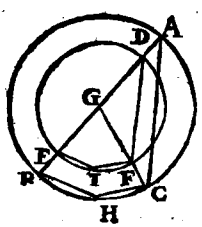
f 22. tertii.

g 7. pronum.

Secundum autem, quod nos etiam in sphæra ad finem primi ea demonstravimus, hujusmodi sit.

Si duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duæ, aut plures rectæ lineæ ducantur: erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti, similes.

Duo circuli ABC, DEF, ex eodem centro G. descripti sint, & ex centro G, duæ rectæ educantur GB, GC. Dico arcus EF, BC, esse similes. Producta enim BG, ad A, jungantur rectæ AC, DF: Item sumptis punctis HI. utcunque ducantur rectæ BH, CH, EI, FI.



a 20. ter. b 7. pro. c 22. tertii. d 3. pro.

Quoniam igitur angulus G, ad centrum arcubus EF, BC, insistens *a* duplus est tam anguli EDF, quam anguli BAC: *b* erunt anguli EDF, EIF, duobus angulis BAC, BHC, æquales: quod *c* tam illi, quam hi duobus rectis sint æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis EDF, BAC, *d* reliqui EIF, BHC, æquales erunt: ac proinde segmenta EF, BC, in quibus sunt, similia erunt ex defin. similium segmentorum. Quod erat ostendendum.

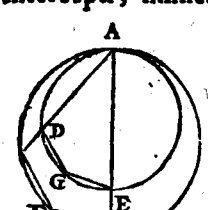
e 7. pro. f 20. tertii.

Brevius sic. *e* Quoniam anguli A, D, æquales sunt, quod utriusq; *f* duplus sit angulus G, ad centrum: erunt per antecedens theorema, arcus BC, EF, quibus ad circumferentias insistunt, similes. Quod est propositum.

Vel adhuc brevius. Quoniam arcubus EF, BC, æquales anguli in centro insistunt, imo unus & idem angulus BGC: erunt per antecedens theorema arcus EF, BC, similes. Atque in hac demonstratione non est opus ulla constructione, ut manifestum est.

Tertium denique, quod aliter quoq; in nostro Astrolabio ostendimus, hoc sit.

Si duo, aut plures circuli se mutuo tangant interius in uno puncto, à quo duæ, aut plures rectæ educantur: erunt & arcus inter quascunq; duas lineas intercepti, & arcus inter quamcunque lineam, & punctum contactus intercepti, similes.



g 22. ter.

Tangant se mutuo interius duo circuli ABC, ADE, in puncto A, à quo duæ rectæ educantur AB, AC. Dico tam arcus DE, BC, quam AD, AB, & AED, ACB, similes esse. Sumptis enim duobus punctis utcunque F, G, jungantur rectæ BF, CF, DG, EG. Quoniam igitur duo anguli DAE, DGE, duobus angulis BAC, BFC, æquales sunt, quod *g* tam illi, quam hi sint duobus

bus rectis æquales: ablato communi angulo BAC, a erunt reliqui a 3. pra-
anguli DGE, BFC, æquales: ac proinde arcus DE, BC, similes num.
erunt ex defin. segmentorum similium.

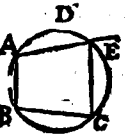
Brevius sic. Quoniam angulus A, communis utriq; arcui DE, BC, ad circumferentias insistit, erunt, ex demonstratis ante proxime antecedens theorema, arcus DB, BC, quibus insistit, similes. Quod est propositum.

Quia vero, si per circulorum centra ducta cogitetur recta AC, b hæc in contactum A, cadit, suntq; eodem pacto arcus DE, EC, similes, fit, ut hisce similib⁹ ablatis ex semicirculis similibus, reliqui arcus AD, AB, similes quoq; sint: atq; his ablatis ex totis circumferentiis similibus, similes quoq; sint reliqui arcus AED, ACB, ut paulo ante demonstravimus. Quod est propositum. b 11. ter.

Huc etiam referri potest hoc theorema.

Si unum latus quadrilateri in circulo descripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.

In circulo ABCD, descriptum sit quadrilaterum quodcunq; ABCD, cujus latus AD, producatur ad E. Dico angulum EDC, angulo B, æqualem esse. Cum enim duo anguli ad D, c æquales sint duobus rectis: Item d duo B, & D, in quadrilatero: erunt duo illi his duobus æquales. Ablato ergo communi angulo ADC, reliquus EDC, exterus reliquo B, æqualis erit. Quod est propositum.

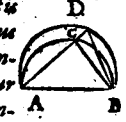


c 13. pri.
d 22. ter-tii.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxiij.

Super eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.

Si enim fieri potest, super recta AB, constituantur ad eadem partes duo segmenta similia, & inæqualia ADB, AEB. Perspicuum est autem, quod se solum intersecent in punctis A, & B: e Circulus enim circulum non secat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria unius segmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta AE, secans circumferentias in C, & D, & connectantur rectæ CB, DB. Quoniam igitur segmenta ponuntur similia, erit per 10. defin. hujus lib. angulus ACB, æqualis angulo ADB, externus interno: f quod est absurdum. Non igitur segmenta sunt similia: Quare super eadem recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.



e 10. ter-tii.

f 16. pri

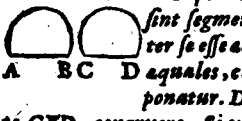
SCHO-

SCHOLIVM.

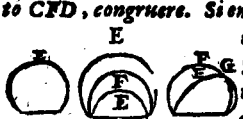
Eadem ratione, neq; ad diversas partes super eadem recta linea duo segmenta circulorum similia, & inæqualia constituentur. Nam si alterum eorum intelligatur moveri circa lineam AB, utjam ambo sint ad easdem partes, in idem absurdum incidemus, ut figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inæqualitatem.

XXIV. THEOR. 22. PROPOS. 24.

Super æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.



Super rectis lineis æqualibus AB, CD, *constituta sint segmenta similia* AEB, CFD. *Dico ea inter se esse æqualia. Linea enim* AB, CD, *cum sint æquales, congruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmentum* AEB, *segmento* CFD, *congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra.*



Quod si extra cadat, aut intra, constituentur super eadem recta CD, *duo segmenta* AEB, AFB, *similia, & inæqualia, quorū unum totum extra aliud ca-*

a 23. ter. *dit, quod est absurdū.* a *Demonstratū enim est contrarium. Quod si partim extra cadat, partim intra, secabunt sese in pluribus punc-*

b 10. ter. *tis, quam duobus, nimirum in* A, B, G. *Quod est absurdum.* b *Circuli enim non se secant in pluribus punctis, quam duobus. Congruet igitur segmentum* AEB, *segmento* CFD, *atque adeo ipsa inter se æqualia erunt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

Non solum in hac propositione ostenditur, segmenta similia AEB, CFD, esse æqualia, super æquales bases AB, CD: verum etiam ipsas peripherias, eo quod, ut demonstratum est, sibi mutuo congruant.

Conversum quoque hujus propositi & præcedentis, facile demonstrabitur. Nimirum, segmenta circulorum æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, esse similia. Nam propter æqualitatem, alterum alteri congruet: quare similia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipsis constituti æquales sint. Quod si quis dicat, non sibi mutuo congruere segmenta, secabit necessario una circumferentia alteram. Vna enim extra alteram non cadet.

Inæqua-

Inæqualia nāq; forent segmēta, quod est cōtra hypothesin. Sint ergo segmenta AFB, AGB, æqualia super eandem rectam AB. secentq; se mutuo in G. Igitur circuli AFB. AGB, secant sese in pūctis A. G. B. pluribus quam duobus, quod est absurdum. a Circuli enim non se intersecant in pluribus punctis quam duobus. Eodem modo res demonstrabitur, si æqualia segmenta super æquales rectas sint constituta: si nimirum altera alteri superponatur, &c. a 10. ter.

PROBL. 3. PROPOS. 25. XXV.

Circuli segmento dato, describere circulum, cujus est segmentum.

Sit segmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam secetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB. connectaturq; AB. angulus igitur DBA, vel major est angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Sit primum major, (quod quidem continget, quando segmentum ABC, minus fuerit semicirculo: Tunc enim, quia BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. hujus lib. quod est extra segmentum, cum ponatur esse minus: erit DA, major, quam DB, cum DB, perficiens diametrum b sit omnium minima, quæ ex puncto D, in circumferentiam cadunt. Quare angulus DBA, c major erit angulo DAB.)

b 7. ter.
c 18. pri.

fiat quo angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cujus segmentum ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, trianguli CDE, & anguli contenti, recti. d Quare bases EA, EC, æquales erunt: e Est autem & EA, æqualis ipsi EB, quod anguli EAB, EBA, æquales sint. Igitur tres lineæ EA, EB, EC, æquales erunt, mi. f ac propterea E, centrum erit circuli ABC. quandoquidem ex E, plures quam duæ rectæ æquales cadunt in circumferentiam.

d 4. pri.
e 6. pri.
f 9. ter.

Sit deinde angulus DBA, angulo DAB, æqualis: (Quod demum continget, quando segmentum ABC, semicirculus fuerit. Tunc enim erit AC, diameter, & D, centrum, atque adeo recta DA, DB, æquales: quare g & anguli DAB, DBA, æquales erunt) h Erunt igitur rectæ DA, DB, æquales: Erat autem & DC, æqualis ipsi DA, quod recta AC, secta sit bifariam. Quapropter cum tres rectæ DA, DB, DC, cadant ex D, in circumferentiam, i erit D, centrum.

g 5. pri.
h 6. pri.
i 9. tert.

Sit tertio angulus DBA, angulo DAB, minor, (quod quidem eveniet, si segmentum ABC, semicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1.

prop. 1. hujus lib. quod quidem intra segmentum, cùm
a 7. tert. *majus esse ponatur, existit: a erit DB; omnium, quæ*
ex D, in circumferentiam cadunt, maxima: major i-
b 18. primi. *gitur erit quam DA, b ideoq; angulus DAB, major*
angulo DBA.) fiat que angulus BAE, æqualis angulo
DBA, & secet recta AE, rectam BD, in E, puncto; quod ostendetur esse centrum eodem modo, quo id ipsum ostendimus, quando angulus DBA, major erat angulo DAB, ut constat, si recta ducatur EC. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum cujus est segmentum. Quod facere oportebat.

SCHOLIVM.

Sed fortassis hæc demonstratio Euclidis, quæ per omnia tria circuli segmenta progreditur, ita facilius instituetur. Divisa recta AC, bifariam in D, erectaq; perpendiculari DB, & ducta AB: aut DB,
c 18. pri. minor est, quam DA, aut æqualis, aut major. Si *minor*, c erit angulus DBA, major angulo BAD. Constituto igitur angulo BAE, æquali ipsi ABD: ostendemus, ut prius: E, centrum esse. Atque hoc evenit, quando segmentum est semicirculo minus.

Si vero DB, æqualis est ipsi DA: erunt omnes tres DA, DB,
d 9. ter. DC, æquales: d ac proinde D, centrum. Quæ ratio locum habet
e 18. pri. in semicirculo.

Si denique DB, major est, quam DA: e erit angulus DBA, minor angulo DAB. Constituto ergo angulo BAE, æquali ipsi ABE: ostendetur E, esse centrū, uti prius. Hoc autem *majori segmento* accidit.

Aliter idem problema hoc modo absoluetur. Positis iisdem, quæ prius, fiat angulo DBA, æqualis angulus EAB. Et si quidem recta AE, cadit intra AC, erit segmentum semicirculo minus, ut in prima figura. Si vero AE, cadit supra AC, erit segmentum semicirculo majus, ut in tertia figura: semper autem E, centrum erit, ut demonstratum est. Si deniq; recta efficiens cum AB, in A, angulum æqualem angulo ABD, coincidit cum AC, erit segmentum semicirculus, punctumq; D, centrum erit, ut in secunda figura.

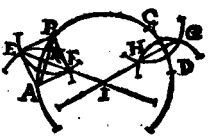
Brevius tamen invenietur centrum segmenti propositi cuiuslibet, sive illud semicirculo minus sit, sive æquale, sive majus, hac ratione.

Assumātur in peripheria segmenti tria puncta utcunque A, B, & C, quæ duabus rectis conjungantur AB, BC, quæ bifariam secentur in D, & E. Deinde ex D, & E, educantur ad AB, BC, perpendiculares DF, EF. Quoniam igitur per corollarium propos. 1. hujus lib. tam DF, quam EF, incedit per centrum circuli, cujus ABC, est segmentum, coibunt ambæ in centro, ut in F. Quare centrum est inventum. Quod est propositum.

Aliter, ut Mechanici solent. Accipiantur in circumferentia duo

puncta

puncta utcunq; A, & B, è quibus describãtur duo arcus ad idem intervallum quodcunque, qui se intersecent in E, & F. Postea ex aliis duobus punctis C. & D. alii duo arcus se secantes in G. & H. describantur ad quodvis intervallum, sive idem quod prius, sive diversum. Si igitur agantur rectæ EF, GH. transibunt ambæ per centrum. Quare punctum I. in quo cocunt, erit centrum. Quod autem lineæ EF, GH. per centrũ transeant ita demonstrabitur. Ducantur rectæ AE, AF. BE, BF. quæ inter se æquales erunt, ob æqualitatem circulorum. Quoniam igitur latera AE, EF, trianguli AEF. æqualia sunt lateribus BE. EF, trianguli BEF: & bases quoq; AF, BF. æquales. *a* Erunt anguli AEF, BEF, æquales. Rursus ducta recta AB, qui secet EF. in K: quoniam latera AF. EK. trianguli AEK. æqualia sunt lateribus BE. EK. trianguli BEK: & anguli AEK. BEK. ostensi quoque æquales. *b* erunt & bases AK. BK. & anguli AKE. BKE, æquales, ideoq; recti. Quare cum EF, dividat rectam AB, in circulo bifariam, & ad angulos rectos. transibit per centrum. ex coroll. prop. 1. hujus lib. Eadem ratione ostendetur GH, transire per centrum. Debent autem quatuor puncta A. B, C, D. in tali situ accipi, ut rectæ E F. G H. non in directum sibi occurrant, sed ut se mutuo secent. Quod si quando contingat, rectas EF, GH. in directum esse constitutas, dividenda erit recta intra circumferentiam comprehensa, bifariam. Punctum enim divisionis erit centrum circuli: propterea quod tunc recta illa est diameter circuli, quandoquidem per centrũ transit, ex coroll. propos. 1. hujus lib.



a 8. pri.

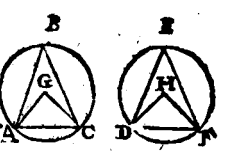
b 4. pri.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

XXVI.

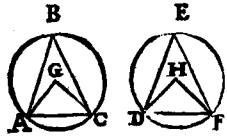
In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripheriis insistunt, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant.

In circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G. H. constituti sint primum ad centra anguli æquales AGC. DHF. Dico peripherias AC, DF. quibus insistunt, sive super quas ascenderunt, esse æquales. Sumantur enim in peripheriis ABC. DEF. duo puncta B. E. ad quæ rectæ ducantur AB. CB. DE. FE, connectanturque rectæ AC. DF. Quoniam igitur c anguli B. & E. dimidii sunt æqualium angulorum G. & H: erunt & ipsi æquales inter se. Quare ex defin. segmenta ABC. DEF, similia erunt. Et quia latera AG. GC. trianguli, AGC.



c 20. ter.

aqua-



æqualia sunt lateribus D *H*, *HF*, *trianguli* D *HF*, *propter circulorum æqualitatem*; *& anguli*, *quos continent*, *G*. *H*, *æquales*, *ex hypothesi*: *a erūt bases AC*, DF, *quales*. *Cum igitur segmenta similia ABC*, *DEF*, *sint super lineas æquales AC*, *DF*, *b erunt ipsa inter se æqualia*. *Quare si à circulis æqualibus demantur*, *remanebunt & segmenta AC*, DF, *inter se æqualia*: *atque adeo peripheria AC*, DF. *Quod est propositum*.

a 4. primi.

b 24. tertij.

Sint deinde ad peripherias constituti duo anguli æquales B, *& E*: *Dico rursus*, *peripherias AC*, DF, *super quas ascenderunt*, *esse æquales*. *Erunt enim*, *ut prius*, *segmenta ABC*, *DEF*, *similia*. *Cum igitur sint supra æquales lineas AC*, DF: (*cum enim anguli G*, *H*, *æquales sint*, c *quod sint dupli angulorum æqualium B*, *& E*: *erunt*, *ut prius*, *rectæ AC*, DF, *æquales*) d *erunt ipsa inter se æqualia*. *Si igitur à circulis æqualibus detrahantur*, *remanebunt & segmenta* AC, DF, *æqualia*. *In æqualibus itaque circulis*, *æquales anguli*, *&c*. *Quod erat demonstrandum*.

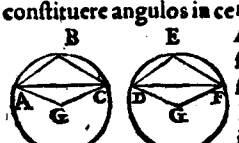
c 20. tertii.

d 24. tertii.

SCHOLIVM.

Hæc secunda pars brevius ita demonstrabitur. Quoniam anguli *G*, H, dupli sunt angulorum æqualium B, E, erunt ipsi inter se æquales. Quare ut ostensum est prius, peripheriæ AC, DF, super quas ascenderunt, æquales erunt.

Iam vero si quando contingat, rectas AG, C*G*: DH, FH, non constituere angulos in centris supra bases AC, DF, sed supra bases

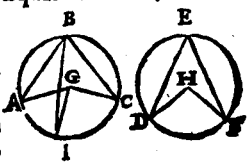


AB C, DEF. ut subjectæ hæ figuræ monstrant: ita secunda pars hujus prop. demōstranda est. Quoniam spatia ad centra *G*, H, insistentia arcubus AC, DF, æqualia inter se sunt, cum ex scholio propos. 20. hujus lib. dupla sint angulorum B, E, ad circumferentias: erunt etiam anguli A*G*C, DHF, reliqui quatuor rectorum, quibus tam spatium circa *G*, quam spatium circa H, æquale est, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. inter se æquales. Quare, ut prius, ostendemus, bases AC, DF. triangulorum A*G*C, DHF, æquales esse, ideoque segmenta similia ABC, DEF, ob æqualitatem angulorum B, E, super æquales bases AC, DF, esse æqualia, &c.

Hinc etiam fit, spatia æqualia in cæteris, insistere arcubus æqualibus. Nam si spatia in centris *G*, H, insistentia arcubus majoribus AC, DF, æqualia sunt: erunt quoque, ut ostendimus, anguli A*G*C, DHF, æquales. Igitur, ut in prima parte propositionis demōstratum

ſtratum eſt, erunt & arcus AC, DF, majores & minores ABC, DEF, inter ſe æquales.

Quod ſi dicti anguli fuerint inæquales, major inſiſtet majori peripheriæ, quam minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, ſit angulus AGC, ad centrum major angulo DHF, ad centrum: Item angulus ABC, ad circumferentiam, major angulo DEF, ad circumferentiam. Dico peripheriam AC, majorem eſſe peripheria DF. Si enim fiat angulus CGI, angulo DHF, & angulus CBI, angulo DEF, æqualis; erunt ut oſtensũ eſt, peripheriæ CI, DF, æquales. Ac propterea AC, major, quam DF.



Porro propoſitio hæc, & tres proxime ſequentes intelligendæ etiam ſunt in eodem circulo. Hoc eſt. In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt, &c. ut ex demonſtratione hujus propoſ. & ſequentium trium liquido conſtat. Eadem enim ſemper demonſtratio, quæ duobus, pluribusve circulis accommodatur, locum habet in uno eodemque circulo.

THEOR. 24. PROPOS. 27. xxvij.

Inæqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſunt inter ſe æquales, ſive ad centra, ſive ad peripherias conſtituti inſiſtant.

In circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, inſiſtant primum anguli ad centra AGC, & DHF, æqualibus peripheriis AC, DF. Dico angulos AGC, & DHF, æquales eſſe. Si enim non ſunt æquales, ſit angulus G, major, fiatque angulus AGI, æqualis angulo DHF. a *Erunt igitur peripheria AI, DF, æquales. Cum igitur peripheria AC, æqualis ponatur peripheria DF, erunt peripheria AI, AC, inter ſe æquales, pars, & totum; quod eſt abſurdum. Sunt ergo anguli AGC, DHF, æquales.* a 26. tertii.

Inſiſtant deinde eisdem peripheriis æqualibus AC, DF, anguli B, & E, ad peripherias; quos rurſus dico æquales eſſe. Nam ſi alter, ut ABC, major eſt; fiat angulo E, æqualis angulus ABI, b *eruntque peripheria AI, DF, æquales. Quare, ut prius, erunt peripheria AI, AC, æquales, pars & totum; quod eſt abſurdum. Sunt ergo anguli ABC, DEF, æquales. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis inſiſtunt, &c. Quod demonſtrandum erat.* b 26. tert.

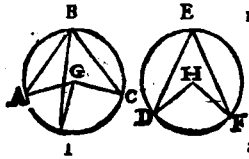
SCHOLIVM.

Hæc secunda pars ita quoque demõstrabitur, quando rectæ AG, CG; DH, FH, in centris angulos constituunt supra bases AC, DF. Quoniam *a* anguli ABC, & E, dimidii sunt angulorum AGC, & H, quos jam ostendimus esse æquales; erunt & ipsi inter se æquales.

a 20. *tertii.*

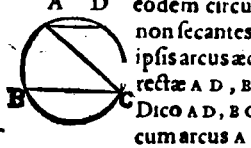
Eodem modo spacia in centris GH, insistentia arcubus ABC, DEF, æqualibus, æqualia erunt. Nam ablatis æqualibus ABC, DEF, ex circulis æqualibus, reliqui fient æquales arcus AIC, DF; ideoque ut ostendimus, anguli AGC, DHF, æquales erunt: quibus ablatis ex spatiis circa centra GH, quæ æqualia sunt, cum quodlibet sit quatuor rectis æquale, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. reliqua erunt & spatia in centris G, H, insistentia arcubus ABC, DEF, æqualia.

Si vero peripheriæ fuerint inæquales, insistet majori major angulus, sive ad centrum, sive ad circumferentiam, quam minori. In figura enim scholii præcedentis sit peripheria AC, major, quam peripheria DF. Dico angulum AGC, majorem esse angulo DHF, & angulum ABC, majorem angulo DEF. Si enim fiat peripheria CI, æqualis peripheriæ DF, ducanturque rectæ IG, IB, erunt ut ostensum est, tam anguli ad centrum CGI, DHF, quam anguli ad circumferentiam CBI, DEF, æquales. Quare & angulus AGC, angulo DHF, & angulus ABC, angulo DEF, erit major



Quod etiam de spatiis ad centra GH, insistentibus arcubus ABC, DEF, intelligendum est. Nam eodem modo demonstrabimus spatium ad H, arcui DEF, insistens majus esse spatio ad G, quod arcui ABC, insistit, si arcus DEF, major ponatur arcu ABC.

Ex hac porro propositione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuo non secantes, esse parallelas. Et si sint parallelæ, ab ipsis arcus æquales intercipi. In circulo enim ABCD, rectæ AD, BC, intercipiant arcus æquales AB, DC. Dico AD, BC, esse parallelas. Ducta namq; recta AC, cum arcus AB, DC, ponantur æquales, *b* erunt anguli ACB, CAD, ipsis insistentes, æquales: qui cum sint alterni, *c* erunt AD, BC, parallelæ.



b 27. *tertii.*

c 27. *primi.*

Sint jam AD, BC, parallelæ Dico arcus interceptos AB, DC, esse æquales. Cum enim sint parallelæ AD, BC, *d* ducta recta AC: erunt anguli alterni ACB, CAD, æquales: *e* Ac proinde arcus AB, DC, quibus insistunt, æquales erunt.

d 29. *primi.*

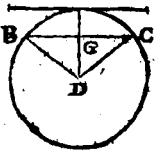
e 26. *tertii.*

Visum est quoq; hoc loco apponere sequens theorema ad ea quæ sequuntur, non inutile: videlicet.

Linea

Linea rectâ, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, quæ peripheriam illam subtendit.

In circulo A B C, cujus centrum D, ducatur ex A, puncto medio peripheriæ B A C, linea E F, tangens circulum. Dico E F, parallelam esse rectæ B C, arcum B A C, subtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctum contactus A, recta D A, secante rectam B C, in G, connexisq; rectis B D, D C, erunt anguli A D B, A D C, circumferentiis æqualibus A B, A C, insistentes, æquales: Sunt autem & latera B D, D G, trianguli B D G, lateribus C D, D G, trianguli C D G, æqualia utrumq; utrique. *b* Igitur & anguli ad G, æquales sunt super bases G B, G C, ac propterea recti igitur & A G B, A G C, illis deinceps recti sunt: Sunt autem & anguli G A E, G A F, recti, *c* quod D A, perpendicularis sit ad E F. *d* Ergo E F, B C, parallelæ sunt. Quod est propositum.

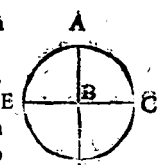


a 27. tertii.
b 4. pri.
c 18 pri.
d 28. pri.

Ex demonstratis in hac propos. & antecedente, colligitur etiam hoc theorema, quod ad initium quoque triangulorum rectilineorum demonstravimus.

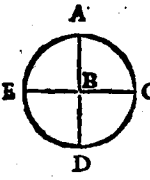
Angulus rectus in centro insistit quadranti: acutus vero arcui quadrante minori: & obtusus arcui quadrante maiori. Et contra, angulus in centro quadranti insistens, rectus est: insistens vero arcui quadrante minori, acutus: & arcui quadrante maiori, obtusus.

Rectus angulus A B C, insistat arcui A C, in centro B, circuli A C D E. Dico arcum A C, quadrantem esse, &c. Productis enim rectis A B, C B, ad D, E, erunt quoque anguli A B E, C B D, recto E A B C, deinceps, recti, ex defin. 10. lib. 1. nec non & angulus D B E, rectus, *e* cum æqualis sit recto angulo A B C, ad verticem. Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B, æquales sunt, utpote recti: ac propterea f arcus A C, C D, D E, E A, quibus insistunt, æquales erunt. Quilibet igitur eorum quadrans est. Et quoniam recta cum A B, in B, constituens angulum acutum, cadit in arcum A C: recta vero cum eadem A B, in B, continens angulum obtusum, cadit in arcum C D: liquido constat, angulum acutum insistere arcui quadrante minori obtusum vero maiori.



e 15. pri.
f 26. ter.

Sed insistat jam quadranti A C, angulus A B C, in centro B. Dico angulum A B C, esse rectum, &c. Productis enim rursùs rectis A B,

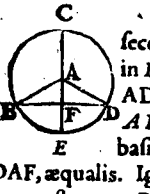


CB, ad D, E: quoniam tam CAE quam ACD, & AED, semicirculus est, estque AC, quadrans: erit tam AE, quam CD, quadrans quoque, ac proinde & DE, in semicirculo AED, quadrans erit: Sunt ergo quatuor arcus AC, CD, DE, EA, æquales, a ac proinde anguli ad centrum B, illis insistentes, æquales erunt. Quare cum omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, erit eorum quilibet rectus. Et quia recta cum AB, auferens minorem arcum quadrante AC, facit in centro B, cum AB, minorem angulum recto angulo ABC; recta vero cum eadem AB, auferens majorem arcum quadrante AC, cõstituit in centro B, angulum recto angulo ABC, majorem; perspicuum est, angulum minori arcui quadrante insistentem, esse acutum, majori vero, obtusum. Quod est propositum.

a 27. tertii.

Pari ratione & hoc theorema ex demonstratis elicitur, quod in sinubus etiam demonstravimus.

Recta linea è centro circuli ducta, secansque aliam rectam non per centrum ductam bifariam, secabit & arcum, cui hæc recta subtenditur, bifariam. Et contra, si secet arcum bifariam, secabit & rectam ei subtensam bifariam.



Ex centro A, circuli BCDE, recta egrediens AE, secet rectam BD, bifariam in F. Dico & arcum BED, in E, sectum esse bifariam, &c. Ductis enim rectis AB, AD: quoniam duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, æqualia sunt, utrumq; utrique basisq; BF, basi DF, æqualis ponitur: b erit angulus BAF, angulo DAF, æqualis. Igitur c arcus BE, arcui DE, æqualis erit. Sectus ergo est arcus BD, in E, bifariam.

b 8. pri.
c 26. ter.

Secet jam recta AE, arcũ BD, in E, bifariam. Dico rectam quoq; BD, in F. bifariam esse sectam. Ductis enim rursum rectis AB, AD: quoniam arcus BE, DE, ponuntur æquales: d erunt & anguli BAE, DAE, in centro æquales. Itaq; quia duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, æqualia sunt, utrumq; utriq; angulosq; continent æquales, ut ostendimus: e erunt quoq; bases BF, DF, æquales: ac proinde recta BD, in F, secta est bifariam. Quod erat ostendendum.

d 27. ter.
e 4. pri.

Neque vero omittenda hoc loco videtur eximia quædam proprietas circuli, quã Ioannes Baptista Benedictus ex Cardano l. 16. cap. 1. de subtilitate desumptam demonstrat: Videlicet.

Si in circulo, ductis duabus diametris se se ad angulos rectos secantibus, altera earum producatur, eique ex

vna

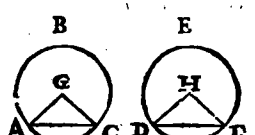
vna parte quotquot parallelæ agantur dividentes utrumque Quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctum proximæ parallelæ recta ducatur conveniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum concursus, & concavam peripheriam circuli, omnibus parallelis una cum diametro, quæ producta est, simul sumtis, æqualis.

In circulo *ABCD* secent se ad rectos angulos diametri *AC*, *BD*, & *AC*, producatur versus C, quantumlibet. Diviso autem Quadrante *BC*, in quotuis partes æquales *GF*, *FG*, *GB*, & Quadrante *BA*, in totidem, jungantur rectæ FH, GI, quæ ex scholio hujus prop. 27. ipsi *AC*, parallelæ erunt, cum arcus æquales intercipiant. Ex B, per G, denique extendatur recta *BG*, occurrens AC, productæ in K. Dico rectam AK, æqualem esse omnibus parallelis *AC*, *HF*, *IG*, simul sumptis. Ductis enim rectis *HC*, *IF*, & productis, donec cum AK, conveniant; *a* quoniam anguli *CHF*, *HFI*, arcubus æqualibus CF, HI, insistentes, sunt æquales: *b* erunt rectæ HC, IL. parallelæ: Est autem & FH, ipsi CL, parallela. Parallelogrammū ergo est CHFL; *c* ac proinde recta CL, rectæ FH, æqualis. Eadem ratione erit KL, ipsi GI, æqualis: & sic deinceps, si sint plures. Addita ergo communi AC, fiet tota AK, omnibus AC, HF, IG, simul sumptis æquales. Quod est propositum.

a 27. tertii.
b 27. primi.
c 34. primi.

THEOR. 25. PROPOS. 28. xxviii.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, majorem quidem majori, minorem autem minori.

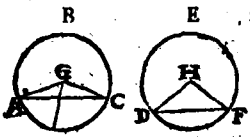


In circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, *&* H, *sint rectæ æquales AC, DF. Dico majorem peripheriam ABC, æqualem esse majori DEF, & minorem AC, minori DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Porro anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheria AC, DF, quibus insistunt æquales erunt: quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquent etiam æquales ABC, DEF. In æqualibus ergo circulis æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.*

d 8. pri.
e 26. tertii.

SCHOLIVM

Quod si fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus auferet major linea, majorem peripheriam, quam mior, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo. Nam si de segmentis circuli majoribus sermo habeatur, major linea auferet minorem peripheriam, quam minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sit recta AC, major, quam DF, Dico peripheriam AC, semicirculo minorem, majorem esse peripheria DF: At peripheriam ABC, minorem peripheria DEF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF, erunt latera AG GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponitur autem basis AC, major base DF. Igitur a angulus AGC, major erit angulo DHF. Fiat angulus CGI, angulo DHF, æqualis: eritq; propterea b peripheria CI, peripheriæ DF, æqualis: Ac proinde peripheria AIC, major, quam peripheria DF: Ideoq; reliqua ABC, minor, quam reliqua DEF.

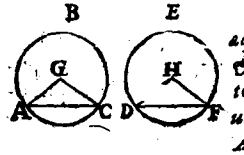


a 25. pri.

b 26. ter. tij.

XXIX. THEOR. 26. PROPOS. 29.

In æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.



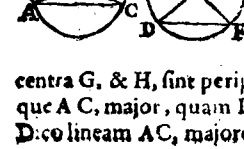
In circulis eisdem æqualibus ponantur æquales peripheriæ ABC, DEF: Item AC, & DF Dico rectas AC, DF, quæ eas subtendunt, esse æquales. Ductis enim lineis, ut prius, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF: sunt autem & anguli G, H. æquales, quod æqualibus peripheriis A, DF insistant. Igitur d bases AC, DF, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

c 27. tertii.

d 4. pri.

SCHOLIVM.

Si autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet majorem major linea, quam minorem, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmentis majoribus semicirculo loquamur, subtendet majorem minor linea, quam minorem. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sint peripheriæ semicirculo minores AC, DF: sitque AC, major, quam DF: Ac proinde ABC, minor quam DEF. Dico lineam AC, majorem esse, quam DF. Ductis enim rectis AG, GC,



GC, DH, HF; erit angulus AGC, major angulo DHF, ex scholio propos. 27. hujus lib. Cum igitur latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia sint lateribus DH, HF, trianguli DHF, *a* erit basis AC, major basi DF, &c. *a* 4. primi.

Sunt autem proxime antecedentes quatuor propositiones 26. 27. 28. & 29. intelligendæ etiam in eodem circulo, ut in scholio propos. 26. monuimus, quemadmodum constat ex demonstrationibus adductis. Eædem enim locũ habent in uno eodemq; circulo.

Itaque eædem quatuor propositiones magis universales fient, si ita proponantur.

In æqualibus circulis, vel eodem, æquales anguli æqualibus peripheriis insistunt, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant.

In æqualibus circulis, vel eodem, anguli qui æqualibus peripheriis insistunt, sunt inter se æquales, sive ad centra, sive ad peripherias constituti insistant.

In æqualibus circulis, vel eodem, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

In æqualibus circulis, vel eodem, æquales peripherias æquales rectæ lineæ subtendunt.

Sed & sequentes propositiones demonstrare, non fuerit inutile.

I.

Circuli, è quibus æquales rectæ lineæ auferunt similes circumferentias, æquales sunt.

Ex circulis ABC, DEF, rectæ lineæ æquales AC, DF, abscindant similes circumferentias ABC, DEF. Dico circulos ipsos æquales esse. Nam si segmenta ABC, DEF, similia sunt, erunt & reliqua segmenta AC, DF, similia, ut ad propos. 22 demõstravimus. Rursus quia super rectas æquales AC, DF, constituta sunt similia segmenta ABC, DEF, *b* ipsa inter se æqualia erunt. Eadem ratione æqualia erunt segmenta AC, DF, quæ similia sunt demonstrata. Toti ergo circuli æquales erunt. Simili modo, si rectæ æquales AC, DF, dicantur auferre similes circumferentias AC, DF, erunt ex iis, quæ ad propos. 22. demonstravimus, & segmenta ABC, DEF, similia. *c* Tam ergo illa, quam hæc inter se æqualia erunt: ac proinde & toti circuli æquales erunt inter se. Quod est propositum. *b* 24. tertii. *c* 24. tertii.

II.

Ex circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circumferentias dissimiles auferunt.

In eadem figura ponantur rectæ A C, D F, æquales, at circuli *ABC, DEF*, inæquales. Dico circumferentias *ABC, DEF*, dissimiles esse. Si enim similes essent circuli ipsi, ut proxime demonstravimus, essent æquales. Quod pugnat cum hypothesi. Dissimiles ergo sunt circumferentiæ *ABC, DEF*. Eadem ratione circumferentiæ *AC, DF*, erunt dissimiles. Quod erat ostendendum.

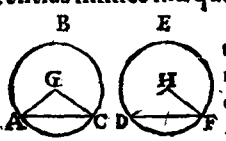
III.

Ex circulis inæqualibus lineæ rectæ, quæ circumferentias similes auferunt, inæquales sunt.

In eadem figura ponantur circuli inæquales, at circumferentiæ *ABC, DEF*, similes. Dico rectas A C, D F, inæquales esse. Si enim dicantur esse æquales, erunt ex primo theoremate, circuli æquales, quod est absurdum, cum ponantur inæquales. Sunt ergo rectæ *AC, DF*, inæquales. Eodē modo si similes dicantur circumferentiæ *AC*, DF, demonstrabitur, rectas lineas *AC, DF*, inæquales esse.

IV.

Rectæ lineæ, quæ ex quibuscunq; circulis circumferentias similes inæquales auferunt, inæquales sunt.



In eadem figura ponantur circumferentiæ *ABC, DEF*, similes & inæquales. Dico rectas *AC, DF*, inæquales esse. Aut enim circuli æquales sunt, vel inæquales. Sint primum æquales. Si ergo rectæ A C, D E, dicantur æquales, [a] erunt circumferentiæ *ABC, DEF*, ablatæ æquales, quod est contra hypothesin. Non ergo æquales sunt rectæ *AC, DF*. Sint deinde circuli inæquales. Igitur rectæ *AC, DF*, auferentes circumferentias *ABC, DEF*, similes, inæquales sunt, ut in tertio theoremate demonstratum est. Non aliter ostendemus, rectas AC, DF, inæquales esse, si circumferentiæ *AC, DF*, ponantur similes, & inæquales.

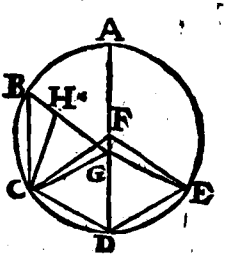
[a] 28. tertii.

V.

Si in diametro circuli præter centrum punctum sumatur, ab eoque in peripheriam duæ rectæ non in easdem partes cadentes efficiant ad diametrum angulos æquales, rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abscindent æquales. Et si lineæ sint æquales, constituent rectæ illæ

illæ ad diametrum angulos æquales, abſcindéntque æquales arcus. Si denique arcus æquales abſcindant, erunt rectæ illæ æquales, conſtituentque ad diametrum angulos æquales.

In circulo ABCDE, cuius centrum F; ſumatur in diametro AD punctum G, præter centrum, conſtituanturque primum duo anguli æquales CGD, EGD. Dico tam rectas GC, GE, quam arcus CD, ED, æquales eſſe. Quoniam enim *a* tam duo anguli CGD, CGF. a 13. *primi.*
quam duo EGD, EGF, duobus rectis æquales ſunt, ſi demantur æquales CGD, EGD; erunt & reliqui CGF, EGF, æquales. Ductis igitur rectis CF, EF, ad centrum, erunt duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia, angulique FGC, FGE, æqualibus lateribus oppoſiti æquales. Cum ergo reliquorum angulorum FCG, FEG, vterque ſit recto minor; (Ducta enim recta CD, erit angulus FCD, in Iſoſcele FCD, acutus; ex 3. coroll. propoſ. 17. lib. 1. ac propterea à fortiori FCG, acutus erit. Eodemque modo ducta recta DE, angulus FEG, acutus erit,) erit ex ijs, quæ ad finem lib. 1. demonſtrauimus, baſis GC, baſi GE, æqualis, & angulus CFG, angulo EFG; *b* ac proinde arcus CD, ED, æquales erunt. b 26. *tertij.*
Conſtat ergo propoſitum.



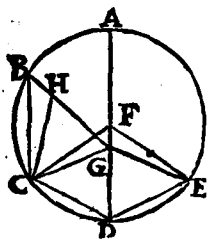
Deinde ſint lineæ GC, GE, æquales. Dico & angulos CGD, EGD, æquales eſſe, & arcus CD, ED. Si enim lineæ GC, GE, ſunt æquales, erunt duo latera GC, GF, æqualia duobus lateribus, GE, GF: Eſt autem & baſis FC, baſi FE, æqualis. *c* Igitur anguli FGC, FGE, æquales erunt, ac proinde & ex duobus rectis reliqui CGD, EGD, erunt æquales. Rurſus quia duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia ſunt, baſeſque æquales ponuntur GC, GE, *d* erunt & anguli CFD, EFD, æquales, *e* atque idcirco & arcus CD, ED, æquales erunt. Quod eſt propoſitum. c 8. *primi.* d 8. *primi.* e 26. *tertij.*

Tertio ſint arcus CD, ED, æquales. Dico & lineas GC, GE, & angulos CGD, EGD, eſſe æquales. Si enim arcus CD, ED, æquales ſunt, *f* erunt & anguli CFD, EFD, æquales. Quare cum duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, ſint æqualia, angulóſque æquales contineant; *g* erunt & baſes GC. GE, æquales, & anguli FGC, FGE; ac proinde ex duobus rectis reliqui CGD, EGD. Quæ omnia demonſtranda erant. f 27. *tertii.* g 4. *primi.*

Hoc tamen theoremate multo vniuerſalius eſt Lemma 21. lib. 1. noſtri Aſtrolabij.

V.

Si in diametro circuli præter centrum ſumatur punctum quodpiam, in quo ad eaſdem partes duo anguli æquales conſtituantur, inſiſtent hi anguli æquales arcubus inæqualibus, maiorque eritille, qui à maiori portione diametri remotior eſt.



In eadem figura proxima ſint anguli æquales CGD, duo CGB. Dico arcum BC, arcu CD, maiorem eſſe. Ductis enim rectis BC, CD, *a* quoniam recta GB, maior eſt, quam recta GD, abſcindatur GH, ipſi GD, æqualis, iungaturque recta CH. Quia igitur duo latera GH, GC, duobus lateribus GD, GC, æqualia ſunt, angulóſque continent æquales; *b* erunt & baſes CHCD, æquales, & angulus GHC, angulo GDC, æqualis. Eſt autem GDC, in Iſoſcele FCD, acutus, ex 3. coroll. propoſ. 17. lib. 1. Igitur & GHC, acutus erit; ac proinde ex duobus rectis reliquus CHB, obtuſus erit. Cum ergo *c* duo anguli CHB, CBH, ſint duobus rectis minores, erit CBH, acutus. Quare *d* latus BC, latere CH, maius erit. Eſt autem CH, recta oſtenſa ipſi CD, æqualis. Igitur recta BC, maior quoque erit quam CD; ac propterea ex ſcholio propoſ. 28. huius lib arcus BC, arcu CD, maior erit. Quod erat oſtendendum.

a 7. tertii.

b 4. primi.

c 17. primi.

d 19. primi.

XXX. PROBL. 4. PROPOS. 30.

Datam peripheriam bifariam ſecare.

Sit peripheria ABC, *ſecanda bifariam. Ducatur recta ſubtendens* AC, *quæ diuiſa bifariam in* D, *erigatur perpendicularis* DB, *quæ peripheriam* ABC, *bifariam ſecabit in* B. *Ductis enim rectis* AB, CB, *erunt latera* AD, DB, *trianguli* ADB, *æqualia lateribus* CD, DB, *trianguli* CDB: *Sunt autem & anguli ad* D, *æquales nempe recti. Igitur* c *& baſes* AB, CB, *æquales erunt; Ac propterea* f *peripheria* AB, CB, *erunt æquales.*

Datam ergo peripheriam bifariam ſecuimus. Quod erat faciendum.

c 4. primi.

f 28. tertij.

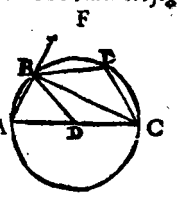
PRAXIS.

Non differt praxis diuidendi datam peripheriam bifariam à praxi diuidendi rectam lineam bifariam, quam ad propoſ. 10 lib. 1 tradidimus. Si namque quicunque arcus proponatur vt ABC, intelligenda ſemper eſt recta linea cum ſubtendens, AC, etiamſi ducta non ſit; atque ex punctis A, & C, deſcribendi arcus eodem interuallo ſe mu-

se muto intersecantes supra & infra puncta A, & C, &c. non secus, ac si dicta recta AC, secanda esset bifariam. Recta enim diuidens rectam AC, bifariam, secabit quoque arcum datum bifariam.

THEOR. 27. PROPOS. 31. xxxi.

In circulo angulus, qui in semicirculo rectus est: qui autem in maiori segmento, minor recto: qui vero in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est: minoris autem segmenti angulus, minor est recto.



Circuli enim ABC, *cuius centrum* D, *diameter sit* AC, *constituaturque in semicirculo angulus* ABC, *existetque angulus* BAC, *in maiori segmento* CAB. *Constituatur quoque in* CEB, *minori segmento angulus* BEC. *Dico angulum* ABC, *in semicirculo rectum esse: angulum vero* BAC, *in maiore segmento, minorem recto: & angulum* BEC, *in minori segmento, maiorem recto. Item angulum maioris segmenti comprehensum recta* BC, *& peripheria* BAC, *esse recto maiorem. At angulum minoris segmenti comprehensum recta* BC, *& peripheria* BEC, *recto minorem. Ducatur enim recta* BD, *ad centrum, & extendatur* AB, *in* F. *Quoniam igitur rectæ* DA, DB, *æquales sunt,* a *erit angulus* DBA, *angulo* DAB, *æqualis. Eadem ratione erit angulus* DBC, *angulo* DCB, *æqualis, ideoque totus angulus* ABC, *duobus angulis* BAC, BCA, *æqualis erit.* b *Est autem & angulus* FBC, *externus eisdem duobus internis angulis* BAC, BCA, *in triangulo* ABC, *æqualis. Quare æquales erunt inter se anguli* ABC, FBC: *ac propterea uterque rectus. Rectus igitur est angulus* ABC: *quod est primum.*

a 5 pri.

b 32. pri. mi.

Quoniam vero in triangulo ABC, c *duo anguli* ABC, & BAC, *sunt duobus rectis minores: Et est angulus* ABC, *ostensus rectus: Erit angulus* BAC, *in segmento maiori, recto minor, quod est secundum.*

c 17. pri.

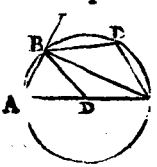
Rursus quia in quadrilatero ABEC, *intra circulum descripto,* d *duo anguli oppositi* BAC, & BEC, *sunt duobus rectis æquales: Et angulus* BAC, *ostensus est recto minor. Erit* BEC, *angulus in segmento minore recto maior: quod est tertium.*

d 22. tertij.

Satis autem est, demonstrasse, vnam angulum in semicirculo, nimirum ABC, rectum esse: & in maiori segmento, qualis est BAC, recto minorem: ac denique in segmẽto minori, cuiusmodi est BEC, maiorem recto. Cum enim omnes anguli in eodem segmento sint inter se æquales, perspicuum est, si vnus angulus in semicirculo rectus sit, omnes in eodem semicirculo esse rectos: Et si in maiore

segmen-

ſegmento vnus ſit recto minor, omnes in eodem ſegmento eſſe recto minores. Et ſi denique in minore ſegmento vnus ſit maior recto omnes in eodem ſegmento maiores eſſe recto. Hoc idcirco dixerim: quia Euclides non probat, abſolute quemcunque angulum in ſegmento maiore BAC, eſſe recto minorem, vt conſtat, ſi alius angulus in eo ſegmento conſtitueretur: cum is non contineretur à diametro, quemadmodum angulum BAC. Quare quicunque alius oſtendetur eſſe etiam recto minor, quia a æqualis eſt angulo BAC, in eodem ſegmento maiore, qui recto minor eſt oſtenſus ab Euclide.

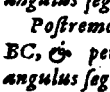


a 21. ter.

Amplius cum angulus rectus ABC, *pars ſit anguli ſegmenti maioris* BAC, *qui comprehenditur recta* BC, *& peripheria* BAC: *erit angulus ſegmenti maioris, recto maior, quod eſt quartum.*

Poſtremo, cum angulus ſegmenti minoris, comprehenſus recta BC, *& peripheria* BEC, *pars ſit quoque anguli recti* FBC: *Erit angulus ſegmenti minoris, recto minor: quod eſt quintum. In circulo igitur angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt &c. quod erat demonſtrandum.*

Alia demonſtratio huius propoſitionis. *In ſemicirculo, cuius diameter* AC, *& centrum* D, *ſit angulus* ABC, *quem dico eſſe rectum. Ducta enim recta* BD. b *erunt anguli* DBA, DAB, *æquales, quod recta* DA, DB, *æquales ſint. Cum igitur angulus* BDC, *externus* c *æqualis ſit duobus angulis internis* DBA, DAB, *in triangulo* ABD: *erit angulus* BDC, *duplus anguli* DBA. *Eodem modo erit angulus* ADB, *duplus anguli* DBC, *atque adeo duo anguli ad* D, *dupli erunt totius anguli* ABC. *Cum igitur* d *anguli ad* D, *ſint duobus rectis æquales: erit angulus* ABC, *eorum dimidium, rectus: quod eſt primum.*



b 5. pri.

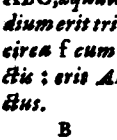
c 32. pri.

d 13. pri.

Vel ſic. Quoniam e *angulus* DAB, *angulo* DBA, *& angulus* DCB, *angulo* DBC *æqualis eſt: erunt duo anguli* A, C, *angulo* ABC, *æquales in triangulo* ABC: *ac proinde angulus* ABC, *dimidium erit trium angulorum* A, C, *& ABC, eiuſdem trianguli. Quocirca* f *cum tres anguli in triangulo ABC, ſint æquales duobus rectis: erit ABC, dimidium duorum rectorum, atque idcirco rectus.*

e 5. pri.

f 32. primi.

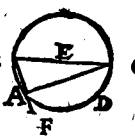


Sit rurſus in ſegmento maiori, cuius centrum D, *angulus ABC, quem dico eſſe recto minorem. Ducta enim diametro AE, & coniuncta recta* BE: *erit angulus ABE, in ſemicirculo rectus, vt demonſtratum eſt. Quare angulus* ABC, *pars recti, recto minor erit: quod eſt ſecundum: Atque hac demonſtratio in omnem angulum in mi-*

in minori segmento quadrat: quod de superiori demonstratione dici non poterat, vt ibidem monuimus.

Sit iterum in segmento minori, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico esse recto maiorem. Ducta enim diametro AE, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniuncta recta BE: erit angulus ABE, in semicirculo rectus, vt demonstratum est: qui cum sit pars anguli ABC, erit angulus ABC, recto maior: quod est tertium.

Iam vero proponatur segmentum maius ABC, & segmentum minus ADC, quorum centrum E. Dico angulum CAB, segmenti maioris, qui videlicet constituitur à recta CA, & peripheria ABC, esse recto maiorem: At angulum CAD, segmenti minoris, qui fit à recta eadem CA, & peripheria ADC, recto minorem. Ducta enim diametro CB, & recta BAF, cadet eius segmentum BA, duo puncta B, A, coniungens, a intra circulum, reliqua vero pars AF, extra circulum: eritque angulus BAC, in semicirculo rectus, atque adeo ei deinceps FAC, rectus quoque. Cum igitur angulus rectilineus rectus BAC, sit pars anguli CAB, segmenti maioris, qui nimirum sub recta CA, & peripheria ABC, continetur, & angulus CAD, segmenti minoris, contentus videlicet sub recta CA, & peripheria ADC, pars quoque anguli recti FAC: constat vtrumque.



a 2. tert.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, quod angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est: eo quod illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit æqualis. Quod quidem constat ex priore demonstratione. Vel eo quod dimidium sit trium angulorum trianguli, qui duobus rectis æquiualent. Quod ex posteriore demonstratione manifestum est.

EX CAMPANO.

Ex hac propositione perspicuum quoque est, non valere duas illas argumentationes, quas impugnauimus ad propos. 16. huius lib. quarum vna est.

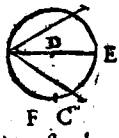
Transitur à maiore ad minus, & per omnia media: ergo per æquale.

Altera vero est eiusmodi.

Contingit reperire maius, & minus eodem: Igitur continget reperire æquale.

In circulo enim ABC, cuius centrum D, & diameter AE, ducatur recta AB. b Erit angulus ABE, segmenti maioris, recto maior. Quare si AB, moueatur versus AD, circa A, punctum fixum, faciet

b 31. ter.



a 16. huius.

b 31. ter.

faciet semper cum peripheria angulum recto maiorē, donec ad diametrum AE, peruenerit a vbi faciet angulum semicirculi, recto minorem. Quod si vlterius moueatur ad AC, b faciet à fortiori angulum ACF, segmenti minoris, recto minorem. Transitur ergo ab angulo segmenti maioris, qui recto maior est, ad angulum semicircirculi, vel etiam segmenti minoris, quorum vterq; recto minor est, nō tamen per angulum recto æqualem. Cum igitur per omnes medios angulos fiat transitus, perspicuum est, vitiosas esse prædictas consequentias.

SCHOLIVM.

Manifestum quoque est conuersum huius theorematis: hoc est,

Segmentum circuli, in quo angulus constitutus est rectus, est semicirculus: in quo vero angulus est acutus, est segmentum maius: & in quo angulus est obtusus, est segmentum minus. Et segmentum, cuius angulus recto est maior, est semicirculo maius; cuius vero angulus est recto minor, est vel semicirculus, vel semicirculo minus.

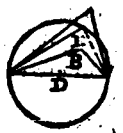
Nam angulo existente recto, si segmentum non sit semicirculus, erit vel maius, & sic angulus erit acutus: vel minus, & sic angulus in eo obtusus erit: quorum vtrumque pugnat cum hypothesi. Rursus angulo existente acuto, si segmentum non sit semicirculo maius, erit vel semicirculus, & sic angulus in eo erit rectus: vel minus, & sic angulus in eo erit obtusus: quorum vtrumque cum hypothesi etiam pugnat. Denique angulo existente obtuso, si segmentum non sit minus semicirculo, erit vel semicirculus, atque ita angulus in eo rectus erit: vel maius, atque ita angulus in eo acutus erit: quod similiter hypothesi contrarium est. Præterea quando segmenti angulus est recto maior, si segmentum non sit maius semicirculo, erit vel semicirculus, vel semicirculo minus, & sic eius angulus recto erit minor, quod non ponitur. At quando angulus segmenti est recto minor, si segmentum non sit semicirculus, aut semicirculo minus, erit maius, atque ita eius angulus recto quoque maior erit, quod hypothesi aduersatur.

Quin & hoc theorema verum est: scilicet.

Si angulo recto linea recta subtensa, hoc est, si in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, bifariam secetur, & ex puncto diuisionis circa illam rectam, vel latus, circulus describatur: transibit necessario circulus ille per angulum rectum.

Angulo enim recto ABC, subtensa recta AC, vel in triangulo rectan-

rectangulo ABC, latus AC, recto angulo B, oppositum bifariam secetur in D, puncto, ex quo ad interuallum DA vel DC, circulus describatur AEC, quem dico transire per B. Si enim transeat citra B, vel vltra; ductis rectis AE, CE, ita vt rectas AB, AC, non secent, sed vel intra eas cadant vel extra; *a* erit angulus AEC, rectus quoque. Quare anguli recti B, & E, æquales erunt; quod est absurdum: cum angulus E, sit necessario, *b* vel maior, vel minor angulo B. Transit igitur circulus per punctum B: quod est propositum.

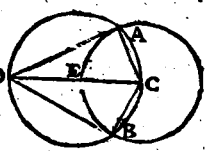


a 31. tertij.

b 21. primi.

Ex ijs, quæ in priore parte huius prop. demonstrata sunt, nullo negotio ex puncto extra circulum dato ducemus duas rectas ad vtramq; partem rectæ ex eodem puncto per centrum circuli ductæ quæ circulum tangant. Id quod ad propos. 17. huius lib. polliciti sumus.

Sit enim circulus AB, cuius centrum C, & punctum D, extra ipsum. Ducta recta DC, ex dato puncto ad centrum, eaque diuisa bifariam in E, describatur ex E, ad interuallum EC, vel ED, circulus ACBD, secans datum circulum in punctis A, B, iunganturque rectæ DA, DB. Dico vtramque circulum tangere in A, & B. Ductis enim rectis AC, BC, *c* erit vterque angulus A, & B, in semicirculo rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. recta DA, circulum AB, tanget in A; & recta DB, eundem tanget in B: quandoquidem tam illa perpendicularis est ad extremitatem semidiametri AC, quam hæc ad extremitatem semidiametri CB.

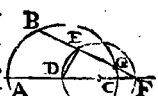


c 31. tertij.

Sed & hoc theorema non iniucundum ex Pappo Alexandrino demonstrauimus hoc loco.

Si per centrum circuli alius circulus describatur & per vtriusque circuli centrum recta eijciatur, à puncto vero, vbi hæc recta à posteriori circulo secatur, ducatur recta vtcunque: secabitur eius portio intra priorem circulum à circumferentia posterioris bifariam.

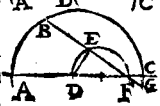
Sit circulus ABC, per cuius centrum D, describatur alius circulus DEF, & per horum circulorum centra ducatur recta AF; ac denique ex puncto F, vbi circulus DEF, rectam AF, intersecat, ducatur recta *FB*, secans circumferentias in B, E, G. Dico BE, GE, esse æquales. *Ducta enim recta DE, d* erit angulus DEF, in semicirculo DEF, rectus. Igitur *e* recta DE, rectam BG, secat bifariam.



d 31. tertij.

e 3. tertij.

Quod si posterior circulus transeat per punctũ C, vt in 2. figura; erit *f* rursum angulus DEC, in semi-



f 31. tertij

semicirculo DEC, rectus; ac *a* propterea BC, in E, secabitur bifariam.

Si denique posterior circulus totus sit intra priorem, vt in tertia figura; erit iterum *b* angulus DEF, in semicirculo DEF, rectus. Quare *c* recta DE, rectam BG, bifariam secabit. Quod erat demonstrandum.

Facile etiam aliud hoc theorema demonstrabitur.

Quadrilaterum in circulo descriptum, cuius duo latera opposita sunt parallela, & æqualia, parallelogrammum est rectangulum, hoc est, vel quadratum, vel altera parte longius.

In circulo ABCD, descriptum sit quadrilaterũ ABCD, cui[9] duo opposita latera AD, BC, parallela sint & æqualia. Dico ipsũ esse parallelogrammũ, & rectangulũ. Cũ enim rectæ AD, BC, parallelæ sint & æquales *d* erunt quoq; AB, DC, parallelæ, & æquales. Parallelogrammum ergo est, ABCD. Quia vero *e* & arcus AD, arcui BC, ob rectas æquales AD, BC, & arcus AB arcui DC, ob æquales rectas AB, DC, æqualis est; erit totus arcus BAD, toti arcui BCD, & totus arcus ADC, toti arcui ABC, æqualis; ac proinde, ductis rectis BD, AC, semicirculi erunt BAD, BCD, ADC, ABC. Quare *f* anguli quadrilateri recti erunt. Quod est propositum.

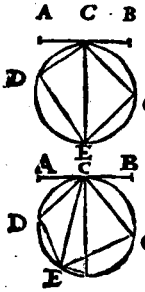
d 33. primi.
e 28. tertij.
f 31. tertij

xxxij.

THEOR. 28. PROPOS. 32.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

Tangat recta AB, *circulum* CDE, *in* C, *puncto à quo ducatur recta* CE, *diuidens circulum in duo segmenta, in quibus fiant anguli* CGE, CDE. *Dico angulum* ACE, *æqualem esse angulo* CGE, *in alterno segmento*; *& angulum* BCE, *angulo* CDE, *in alterno quoque segmento. Transeat enim primum, vt in priore figura, recta* CE, *per centrum.* g *Erit igitur vterque angulus* ACE, BCE, *rectus:* h *Sunt autem & anguli* CGE, CDE, *in semicirculis recti. Igitur angulus* ACE, *angulo* CGE; *& angulus* BCE, *angulo* CDE, *æqualis est.*



g 18. tertij.
h 31. tertij.

Non

Non transeat jam CE, recta per centrum, ut in figura posteriore. Ducta igitur recta CF, per centrum, connectatur recta EF: a erit-que CF, perpendicularis ad AB, b & angulus CEF, rectus; ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, æquales erunt uni recto, ut an-gulo recto ACF. Demptoergo communi angulo ECF, erit reli-quus ACE, reliquo CFE, æqualis: c Est autem angulo CFE, aqua-lis quoque angulus CGE, cum uterq; sit in segmento CGE. Quare angulus ACE, angulo CGE, æqualis erit. Quoniam vero in qua-drilatero CDEG, duo d anguli CDE, CGE, duobus sunt rectis æ-quales: e Sunt autem & duo anguli ACF, BCE, duobus rectis aqua-les; si auferantur æquales anguli ACE, CGE, remanebit angulus BCE, angulo CDE, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua re-cta linea, à contactu autem, &c. Quod erat ostendendum.

a 18. ter-tii.
b 31. ter-tii.
c 21. ter-tii.
d 22. ter-tii.
e 13. pri-mi.

SCHOLIVM.

Potest theorema hoc converti hoc modo.

Si linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum taget.

In eadem figura priore transeat primum recta CE, per centrum, secans circulum CDE, & ducatur recta AB, per C, faciens angulum ACE, æqualem angulo CGE. Dico AB, tangere circulum. Quoniam *f* angulus CGE, rectus est, erit & angulus ACE, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propos. 16. hujus lib. AB. circulum tanget. Iam vero CE, non transeat per centrum, construaturq; figura posterior, ut supra. Quoniam igitur angulus ACE, æqualis ponitur angulo CGE, in alterno segmento majore, *g* & hic est æqualis angulo CFE; erit & angulus ACE, æqualis angulo CFE. Addito ergo communi angulo ECF, erit angulus ACF, æqualis duobus angulis EFC, ECF: Atqui anguli EFC, ECF, æquales sunt uni recto; quod *h* angulus CEF, rectus sit in semicirculo, & tres anguli in triangulo CEF, æquales *i* sint duobus rectis. Angulus igitur ACF, rectus quoq; erit; ideoq; per coroll. propos. 16. hujus lib. AB, circulum tanget.

f 32. ter-tii.
g 21. ter-tii.
h 31. ter-tii.
i 32. pri-mi.

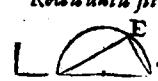
Eodem modo, si angulus BCE, æqualis fuerit angulo CDE, in alterno segmento minori, ostendetur recta AB, tangere circulum. Cum enim k anguli BCE, ACE, duobus sint rectis æquales; Item k 13. pri-duo *l* anguli CDE, CGE, duobus rectis æquales: si demantur æqua-les BCE, CDE, remanebunt anguli ACE, CGE, æquales. Quare, l 22. ter-ut demonstratum jam est, recta AB, circulum tanget. tii.

mi.

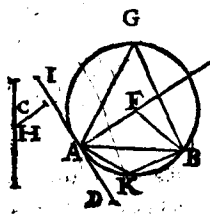
PROBL. 5. PROPOS. 33. xxxiij.

SVPER data recta linea describere segmentum cir-

culi, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.



Recta data sit A B, & datus angulus primum rectus C. Oportet igitur super A B, segmentum describere, in quo angulus existens sit æqualis angulo recto dato C. Divisa A B, Bifariam in D, describatur centro D, intervallo autem D A, vel D B, semicir-
a 31. ter- *culus A E B; factumque erit, quod proponitur. Nam a angulus*
tii. *A E B, in descripto semicirculo rectus est, idegque æqualis angulo C, recto.*

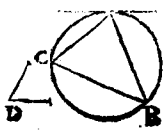


Sit deinde angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus D A B, æqualis angulo C, acuto: & agatur ad D A, perpendicularis A E, quæ cadet supra A B. Fiat deinde angulo F A B, æqualis angulus F B A, secetq; B F, rectam A E, in F.
b *Erunt igitur rectæ F A, F B, æquales. Quare si centro F, & intervallo F A, cir-*
pri- *culus describatur A G B, transibit is per B. Dico igitur angulum in segmento A G B, quod descriptum est super A B, esse æqualem angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento A G B. Quia igitur A E, per centrum F, transit, & ei perpendicularis est D A, tanget D A, recta circulum in A, per coroll. propos.*
32. ter- *16. hujus lib. Quapropter c angulus D A B, hoc est, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in segmento alterno A G B.*

Sit tertio angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo H, æqualis angulus I A B, & agatur ad I A, perpendicularis A E, quæ supra A B, cadet. Reliqua omnia fiant, ut prius, describtumque erit super A B, segmentum A K B, in quo angulus K, æqualis est angulo dato obtuso H. Nam angulus I A B, hoc est, angulus datus H, æqua-
ter- *lis d est angulo K, in alterno segmento A K B. Eadem enim est demonstratio. Itaque super data recta linea describimus segmentum, &c. Quod efficiendum erat.*

PROBL. 6. PROPOS. 34.

A Dato circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.



Datus circulus sit A B C, à quo auferre oporteat segmentum, in quo angulus existens æqualis sit dato angulo D. c Ducatur recta E F, tan-
ter- *gens circulum in A. Fiat deinde angulus F A B, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulum A C B, in segmento ablato, A C B, æqualem*

esse

esse dato angulo D. Est enim a angulus FAB, æqualis angulo C, a 32. ter-
in alterno segmento ACB. Cum ergo angulo dato D, factus sit ii.
æqualis angulus FAB, erit quoque angulus C, angulo D, æqualis.
A dato ergo circulo abscindimus segmentum ACB, &c. Quod
erat faciendum.

THEOR. 29. PROPOS. 35. xxxiv.

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis unius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

In circulo ACBD, secent se mutuo rectæ AB, CD, in E. Dico rectangulum comprehensum sub segmentis AE, EB, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis CE, ED. Aut enim utraque linea transit per centrum, aut una tantum, aut neutra. Transeat primum utraque per centrum. Quoniam igitur omnia quatuor segmenta inter se æqualia sunt, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub duobus unius lineæ æquale esse ei, quod sub duobus alterius linea comprehenditur, rectangulo, ex iis, quæ ad initium lib. 2. scripsimus.

Transeat deinde CD, sola per centrum F, dividatque primum rectã AB, bifariam, b *ac propterea ad angulos rectos, conjungatur*q *recta BF. Quoniam igitur CD, divisa est per æqualia in F, & per inæqualia in E,* c *erit rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectæ FD, ideoque quadrato rectæ FB, cum rectæ FD, FB, sint æquales: Est autem quadratum rectæ FB, d æquale quadratis rectarum FE, EB. Igitur rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ EF, æquale quoque erit quadratis rectarum FE, EB. Quare ablato communi quadrato rectæ FE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale quadrato rectæ EB, hoc est, rectangulo sub AE, EB, cum AE, EB, rectæ sint æquales: ac proinde rectangulum sub eis comprehensum, sit quadratum, ex iis, quæ ad defin. 2. lib. 2. scripsimus.*

b 3. tert.

c 5. sec.

d 47. primi.

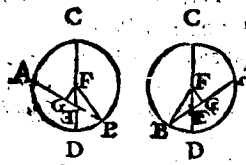
Dividat jam CD, transiens per centrum rectam AB, non bifariam. Secetur ergo AB, bifariam in G, ducanturq; rectæ FG, FB, e *erit*q *FG, perpendicularis ad AB. Quoniam vero rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ FE, æquale* f *est quadrato rectæ FD, hoc est, quadrato rectæ FB:*

e 3. tert.

f 5. sec.

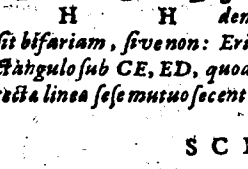
Est autem quadratum rectæ FE, g *æquale quadratis rectarum FG,*

g 47. primi.



FG, GE, & quadratum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG, GB: erit quoque rectangulum sub CE, ED, una cum quadratis rectarum FG, GE, æquale quadratis rectarum FG, CB. Dempto ergo communi quadrato rectæ FG, remanebit rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ GE, æquale quadrato rectæ GB. Atqui etiam rectangulum sub AE, EB, una cum quadrato rectæ GE, æquale est eidem quadrato rectæ GB: propterea quod recta AB, secta est bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, una cum quadrato ejusdē rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale rectangulo sub AE, EB, quod est propositum. 2. 3. sec.

Tertio neutra per centrum transeat, sive una illarum bifariam dividatur, sive neutra. Ducatur per centrum F, & punctum sectionis E, recta GH. Quoniam itaque ostensum est, rectangulum sub AE, EB, æquale esse rectangulo sub GE, EH, sive AB, dividatur bifariam, sive non: Item rectangulum sub CE, ED, æquale esse quoque eidem rectangulo sub GE, EH, sive CD, secta sit bifariam, sive non: Erit rectangulum sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED, quod est propositum. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, &c. Quod demonstrandum erat.

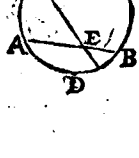


SCHOLIVM.

Converti poterit theorema istud hoc modo.

Si duæ rectæ ita se secent, ut rectangulum sub unius segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulos: describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus; hoc est, circulus per quælibet tria pūcta earū extrema descriptus, per quartum quoque punctum transibit.

Secent se mutuo rectæ A B, CD, in E, sitque rectangulum sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED. Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circumferentiam circuli cadere, hoc est, per ea circulum posse describi: adeo ut circulus per tria puncta A, D, B, descriptus, transeat necessario per punctum etiam C. Describatur enim per tria puncta A, D, & B, circulus aliquis



(quo

(quo autem modo id fiat, ostendemus ad 5. prop. lib. 4.) qui si non transeat per C, transibit aut ultra C, vel citra, ut per F. Quoniam ergo rectangulum sub FE, ED, a æquale est rectangulo sub AE, EB: & rectangulum sub CE, ED, ponitur quoq; æquale eidē rectangulo sub AE, EB: Erunt rectangula sub CE, ED, & sub FE, ED, æqualia pars & totum: quod est absurdum. Transibit igitur circulus per punctum C. quod erat propositum.

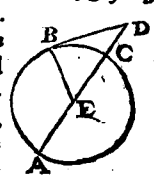
a 35. tertii.

THEOR. 30. PROPOS. 36. XXXVI.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera verò tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.

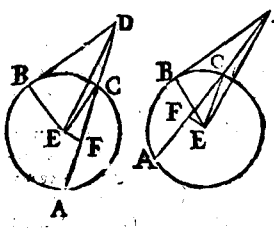
Extra circulum ABC, punctum sumatur D. à quo linea ducatur DA, secans circulum in C, b *& linea DB, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub DA. DC, æquale esse quadrato rectæ DB. Transeat enim primum recta DA, per centrum E, & jungatur recta EB,* c *quæ perpendicularis erit ad DB. Quoniam igitur CA, divisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum CD,* d *erit rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ EC, hoc est, cum quadrato rectæ EB, æquale quadrato rectæ DE: Est autem quadratum rectæ DE.* e *æquale quadratis rectarum EB. BD. Quare rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadratis rectarum DB, BE. Ablato igitur communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum sub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale. Quod est propositum.*

b 17. tertii. c 18. tertii. d 6 sec. e 47. primi.



Non transeat jam DA, secans per centrum E. Divisa ergo AC, bifariam in F, ducātur rectæ EB, EC, ED, EF: f *eritque EB, ad BD, perpendicularis:* g *& EF, ad AC. Quoniam igitur CA, divisa est per æqualia in F, & ei addita recta CD,* h *erit rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ CF, æquale quadrato rectæ DF. Addito igitur communi quadrato rectæ FE, erit rectangulum sub DA, DC, una cum quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratis rectarum DF,*

f 18. tertii. g 3. tertii. h 6. sec.



a 47. pri. b 47. pri. c 47. pri. *FE: Est autem quadratis rectarum CF, FE, a aquale quadratum recta EC, ideoque & quadratum recta EB: Et b quadratis rectarum DF, FE, aquale est quadratum recta DE. Quare rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato recta EB, aquale erit quadrato recta DE. Cum igitur quadratum recta DE, c aquale sit quadratis rectarum DB, BE: erit & rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato recta EB, aquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo communi quadrato recta BE, remanebit rectangulum sub DA, DC, quadrato recta DB, aquale: quod est propositum. Si igitur extra circulum sumntur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.*

COROLLARIVM. I.

Hinc manifestum est, si à puncto quovis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus, inter se esse æqualia. Vt si ex A, ducantur rectæ AC, AD, AE, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub AC, AF: Item sub AD, AG: & sub AE, AH, æqualia inter se. Nam ducta AB, tangente circulum d erunt quadrato rectæ AB, æqualia singula illa rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt.

d 24. tertii.

COROLLARIVM. II.

Constat etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter se esse æquales. Ducantur enim ex A, rectæ AB, AC, tangentes circulum; quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta AD, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ AB. quam quadratum rectæ AC, e æquale rectangulo sub AD, AE. Quare quadrata rectarum AB, AC, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ AB, AC, æquales quoque erunt.

e 36. tertii

COROLLARIVM III.

Perspicuum quoque est, ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantū posse duas lineas, quę circulum tangant. Si enim præter duas AB, AC, duci possit tertia AD, circulum eundem tangens: ductis rectis EB, ED, ex centro E, f erunt anguli ABE, ADE, recti, ideoque æquales; quod est absurdum. Nam si ducatur recta AE, g erit angulus ADE, major angulo ABE.

f 18. tertii.

g 21. pr.

Aliter. Si tertia AD, circulum etiam tangat, erunt duę tangentes AB, AD, æquales, ut ostensum est: quod est absurdum. Ducta namque recta AE, ad centrum E, quę circulum secet in F, h erit AD, cum sit propinquior minimę AF, minor, quam AB, quę à minima AF, remotior est. Vel sic. Si AB, AD, sunt æquales: additis æqualibus EB, ED, erunt quoque AB, BE, ipsis AD, DE, æquales quod est absurdum. i Sunt enim majores AB, BE. Solum igitur duæ rectæ ducentur à puncto A, quæ circulum tangant: Quod est propositum.

h 8. tert.

i 21. pri.

COROL-

COROLLARIVM. IV.

Illud denique constat etiam, si duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in conuexam peripheriam incidant, & earum una circulum tangat, alteram quoque circulum tangere. Vt si duæ rectæ AB, AC, in antecedente figura sint æquales, & AC, tangat circulum in C, tanget quoque AB, eundem circulum in B. Si enim non tangat, ducatur AD, tangens, (semper enim duæ tangentes ab eodem puncto duci possunt, ut constat ex scholio propos. 31. hujus lib. eruntque ex 2. coroll. AC, AD, æquales. Cum ergo & AB, ipsi AC, æqualis ponatur, ducentur tres rectæ æquales AB, AC, AD, quod est absurdum. *a* Duæ enim tantum duci possunt.

Aliter. Ponantur in figura sequentis propos. duæ rectæ æquales DB, DF, & DB, circulum tangat, in B. Dico & DF, eundem tangere in F. Ductis enim rectis EB, EF, ex centro, erunt duo latera DB, BE, duobus lateribus DF, FE, æqualia, & basis DE, communis. *b* Igitur anguli B, F, æquales erunt: *c* Sed B. rectus est. Igitur & F, rectus erit, atque idcirco DE, circulum tanget in F, ex coroll. propos. 16. hujus lib.

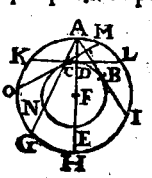
a 8. tert. tii.

b 8. pri.

c 18. ter.

SCHOLIVM.

Facillimo negotio propositionem hanc per antecedentem propositionem demonstrabimus, hoc modo. Ex puncto A, extra circulum BCD, ducatur tangens AB, & secans AE, quæ primum per centrum F. transeat, secetque circumferentiam in D. Dico rectangulum sub AE, AD, æquale esse quadrato ex AB. Descripto namq; ex F. per A, circulo AKL, producantur AE, AB, usq; ad H, I: & per D, ad AH, perpendicularis KL, quæ eundem circulum BCD, tanget in D, ex coroll. propos. 16. hujus lib. Eruntq; ex demonstratis in scholio propos. 3. hujus lib. AD, HE, æquales, ac proinde, ad dita communi DE, & AE, H, D, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. hujus lib. AI, KL, æquales erunt, secabunturq; in B, D, bifariam: ac propterea rectangula sub AB, BI: & sub KD, DL, æqualia inter se erunt, atq; adeo quadrata, ob æqualitatem rectarum AB, BI: KD, DL. Itaque quoniam rectangulum sub HD, DA, hoc est, sub AE, (quæ ipsi HD, ostensa est æqualis) AD, æquale est rectangulo sub KD, KL, hoc est, rectangulo sub AB, BI, sive quadrato ex AB, constat propositum.



d 35. ter. tii.

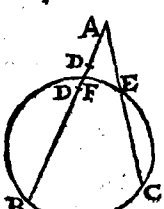
Sed jam secans linea AN, non transeat per centrum F, secetque circumferentiam in C. Dico rursum, rectangulum sub AN, AC, quadrato ex AB, æquale esse. Descripto enim rursus ex F. per A. circulo AKL, producantur AN, AB, usque ad G, I: & per C, ducatur OM, circulū BCD, tangens. Eruntque ex scholio propos. 3. hujus lib AC, GN, æquales, ac proinde, addita communi CN, & AN, GC, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. hujus libr. AI, OM, æquales erūt, secabunturq; in B, C, bifariā: ac propterea rectangula sub

AB, BI, & sub OC, CM, æqualia inter se erunt, atq; adeo quadrata ob æqualitatem rectarum AB, BI, OC, CM. Itaque quoniam rectangulum sub GC, CA, hoc est, sub AN, (quæ ipsi GC, ostensa est æqualis) AC, æquale est rectangulo sub OC, CM, hoc est, rectangulo sub AB, BI, sive quadrato ex AB; constat rursus id, quod proponebatur. a 35. tertii.

Primum etiam corollarium hujus propos. hoc modo ferme convertemus.

Si à puncto aliquo binæ lineæ rectæ finitæ egrediantur, quæ ita secentur in binas partes, ut rectangula sub totis, & segmentis prope punctum comprehensa sint æqualia: describi poterit per extrema puncta aliorum segmentorum circulus, hoc est, circulus per tria puncta extrema aliorum segmentorum descriptus, per quartum etiam punctum extremum transibit.

Ex puncto enim A, egrediantur duæ rectæ AB, AC, quæ ita secentur in punctis D, E, ut rectangula sub AB, AD, & sub AC, AF, sint æqualia. Dico quatuor puncta B, C, E, D, in circumferentiam circuli cadere; hoc est, per ea posse describi circulum: adeo ut circulus per tria puncta B, C, E, descriptus, transeat necessario per reliquum etiam punctum D. Describatur enim per tria puncta B, C, E, (ut ad propos. 5. lib. 4. docebimus) circulus BCE, qui si dicatur non transire per quartum punctum D, transibit aut citra D, aut ultra, ut per F. Quoniam ergo rectangulum sub AB, AF, æquale est, ex coroll. 1. hujus propos. rectangulo comprehenso sub AC, AE; & rectangulum sub AB, AD, eidem rectangulo sub AC, AE, ponitur æquale: erunt rectangula sub AB, AF, & sub AB, AD, inter se æqualia, pars & totum: quod est absurdum. Transibit ergo circulus per punctum D. Quod erat demonstrandum.

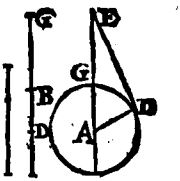


Licebit quoque ex demonstratis hac propos. colligere hujusmodi problema.

Datis duabus rectis sive æqualibus, sive inæqualibus, alterutri earum rectam adjungere, ut rectangulum sub tota composita, & adjuncta comprehensum, quadrato alterius sit æquale.

Sint datæ duæ rectæ AB, & C, sitque ipsi AB, minori adjungenda recta, ita ut rectangulum comprehensum sub tota composita, & adjuncta, æquale sit quadrato rectæ C, majoris. Divisa recta AB, bisa-

bifariam in D, describatur ex quouis centro A, ad interuallum AD, dimidiata, circulus DFG, & ad AD, in D, excitetur perpendicularis DE, ipsi C, æqualis, ac denique ex E, per A, centrum recta extendatur EF, secans circumferentiam in G. Dico si rectæ AB, adiiciatur BG, ipsi EG, æqualis, rectangulum sub tota AG, & GB, æquale esse quadrato rectæ C. Quoniam enim rectangulum sub FE, EG, *a* æquale est quadrato rectæ ED; (quod ED, circulum tangat in D, ex coroll. propos. 16. huius lib.) Est autem rectangulum sub FE, EG, æquale rectangulo sub AG, GB, (quod rectæ FE, EG, rectis AG, GB, æquales sint. Sumpta enim est GB, ipsi EG, æqualis, & AB, ipsi FG, æqualis posita est,) & quadratum ex ED, quadrato ex C, (ob æqualitatem rectarum ED, & C, ex constructione,) æquale. Igitur & rectangulum sub AG, GB, quadrato ex C, æquale erit. Quod est propositum.



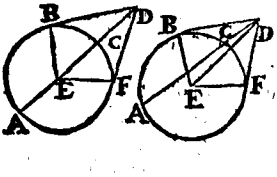
a 36. tertij.

Non secus propositum demonstrabitur, si rectæ C, maiori adiungenda sit recta, ita vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta comprehensum quadrato rectæ AB, minoris æquale sit.

THEOR. 31. PROPOS. 37. xxxvij.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.

Extra circulum ABC, cuius centrum E, punctum sumatur D, à quo ducatur recta DA, circulum secans in C, & recta DB, incidens in circulum ad punctum B; *sitque rectangulum sub DA, DC, æquale quadrato rectæ DB. Dico DB, circulum tangere in B.* b *Ducatur enim DF, tangens circulum, & iungantur rectæ EB, EF. Quod si DA, secans non transeat per centrum E, iungatur quoque recta DE. Quoniam igitur rectangulo sub DA, DC,* c *æquale est quadratum rectæ tangentis DF: Et eidem rectangulo sub DA, DC, æquale ponitur quadratum rectæ DB: erunt quadrata rectarum DF, DB, inter se æqualia, ideoque & rectæ DF, DB, æquales inter se erunt. Itaque quia latera DF, FE,*



b 17. tertij.

c 36. tertij.

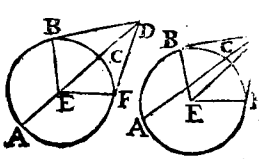
trianguli DFE, æqualia sunt lateribus DB, BE, trianguli DBE; &
a 8. pri. *basis DE, communis a erunt anguli DFE, DBE, æquales.* b *Atqui an-*
b 18. tertij. *gulus DFE, rectus est, quod DF, circulum tangat. Igitur & angulus DBE, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib. DB, circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.*

SCHOLIVM.

Est autem hoc theorema conuersum precedentis theorematis, vt perspicuum est.

Placet hoc loco sequens etiam theorema demonstrare.

Si à puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum tangentes ducantur, aut duæ lineæ vsque ad conuexam peripheriam inter se æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circuli iecta angulum ab eis comprehensum diuidens bifariam, per centrum circuli transibit.



In priori figura huius propos. duę rectę DB, DF, circulum ABCF, tangant in B, F, punctis, quę ex 2. coroll. precedentis propos. æquales erunt: Vel ducantur quęcunque duę æquales DB, DF. Et per centrum E, ducatur recta linea DEA. Dico angulum BDF, sectum esse bifariam à recta DA. Cum enim iunctis
c 8. pri. rectis EB, EF, duo latera BD, DE, duobus lateribus FD, DE, æqualia sint, basisque EB, basi, EF, æqualis: c erunt duo anguli ad D, inter se æquales. Quod est propositum.

Diuidat iam recta DA, angulum BDF, bifariam. Dico rectam DA, per centrum transire. Si enim in DA, non est centrum sit extra ipsam centrum E, iungaturque recta ED, vt in posteriori figura huius propos. Ergo, vt demonstratum est, recta ED, angulum BDF, bifariam diuidet: ac propterea anguli BDA, BDE, cum sint dimidiæ partes anguli BDF, æquales inter se erunt, pars, & totum: quod est absurdum. Transit ergo recta DA, per centrum. Quod demonstrandum erat.

EVCLI-

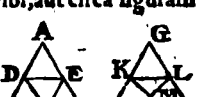
EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.

I.

Figura rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli ſingula latera eius, in qua inſcribitur, tangunt.

AGENS Euclides quarto hoc libro de varijs inſcriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum deſcriptionibus: Item de inſcriptionibus circuli in eiſdem figuris, & circuli deſcriptionibus circa eaſdem: exponit paucis definitionibus, quid ſit figuram inſcribi, aut circa figuram deſcribi, incipiens à rectilineis figuris. Si igitur anguli D,E,F, trianguli interni DEF, tangant latera AB, AC, BC, trianguli externi ABC: dicetur triangulum DEF, in triangulo ABC, eſſe inſcriptum. At quoniam angulus M. trianguli KLM, non tangit latus HI, trianguli GHI, non dicetur triangulum KLM, inſcribi in triangulo GHI: quamuis totum illud ſit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera GH, GI.



II.

Similiter & figura circum figuram deſcribi dicitur, cum ſingula eius, quæ circumſcribitur, latera ſingulos ejus figuræ angulos tetigerint, circum quam illa deſcribitur.

Eccon-

E contrario dicetur triangulum ABC, describi circa triangulum DEF: quoniam singula latera illius singulos huius angulos tangunt: At triangulum GHI, non dicetur descriptum esse circa triangulum KLM, propterea quod latus illius HI, angulum huius M, non tangit. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

Cæterum proprie figuræ rectilineæ dicuntur in figuris rectilineis describi, & circa easdem describi, quando inscripta, & circumscripta habent latera numero æqualia, & angulos numero æquales: quamuis hoc non sit omnino necessarium, cum & quadratum intra triangulum describi possit, vt ad finem lib. 6. docebimus.

III.

Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

Vt si tangãt anguli A, B, C, trianguli ABC, peripheriã circuli ABC, dicetur triangulum in circulo esse inscriptum. Quod si vel vnus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum esse inscriptum in circulo.

IV.

Figura vero rectilinea circa circulum describi dicitur, cum singula latera eius, quæ circumscribitur, circuli peripheriam tangunt.

At vero. si latera trianguli ABC, singula tangant peperipheriam circuli DEF; dicetur triangulum circa circulum esse descriptum.

V.

Similiter & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

VI.

Circulus autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit eius figuræ, quam circumscribit, angulos.

Vicissim dicetur circulus DEF, in figura definitionis 4. inscriptus esse in triangulo ABC: At vero circulus ABC, in figura defini-

finitionis 3. descriptus esse circa triangulum ABC. Idem iudicium habeto de aliis figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.

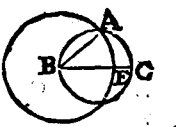
VII.

Recta linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

Vt recta linea AB, quoniam eius extrema A, & B, in peripheria circuli ABC, existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicetur: Non autem recta E, vel CD: quia hæc alterum duntaxat extremorum, nempe C, habet in peripheria circuli: Illa vero neutrum.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

In dato circulo rectam lineam commodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.



In circulo ABC, coaptanda sit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen maior non sit diametro circuli dati. Cum enim diameter a sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta diametro maior foret, non posset in circulo aptari illi vnæ æqualis. Ducatur ergo diameter BC. Itaque si data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit BC, illi æqualis: si vero D, minor fuerit diametro b abscindatur BE, æqualis ipsi D, & centro B, interuallo autem BE, circulus describatur EA, secans circulum ABC, in A. Ducta igitur recta BA, erit ea aptata in circulo ABC, æqualis datæ recta D. c Est enim BA, æqualis ipsi BE: & D, æqualis eidem BE, per constructionem. Quare AB, & D, inter se æquales quoque erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

a 15. ter.

b 3. pri.

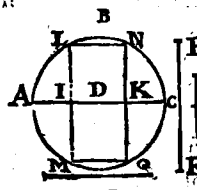
c 15. def. primi.

EX FEDERICO COMMANDINO.

In dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.

In dato circulo ABC, cuius centrum D, accommodanda sit recta æqualis rectæ EF, quæ diametro maior non sit, & alteri rectæ G, parallela. *d* Ducatur per centrum D, diameter AC, rectæ G, parallela. Quod si recta EF, diametro fuerit æqualis, factum iam erit, quod pro-

d 31. pri.



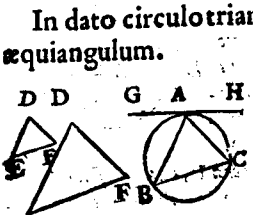
proponitur. Si vero EF, diametro minor fuerit, secta ea bifariam in H, abscindatur DI, ipsi HE, & DK, ipsi HF, æqualis vt tota IK, toti EF, sit æqualis. *a* Et per I, K, ad angulos rectos ipsi AC, ducantur LM, NO: iungaturque LN. Dico LN, accommodatam esse æqualem ipsi EF, & ipsi G, parallelam. Cum enim LM, NO, æqualiter à centro distent, *b* ipsæ æquales inter se erunt: *c* quæ cum diuidantur bifariam in I, & K, quod ad angulos rectos secentur à recta AC, per centrum D, transeunte; erunt & earum semisses LI, NK, æquales. *d* Quia vero LI, NK, parallelæ etiam sunt; *e* erunt quoque LN, IK, æquales, & parallelæ. Quare cum IK, æqualis sit ipsi EF, & parallela ipsi G. Erit etiam LN, æqualis ipsi EF, *f* & ipsi G, parallela. Eadem ratione si recta ducatur MO, erit ea æqualis ipsi EF, & parallela ipsi G. Quod est propositum.

a 12. primi.
b 14. tertii.
c 3. tert.
d 28. primi.
e 35. primi.
f 30. primi.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

ij.

In dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.



Sit in circulo ABC, dato describendum triangulum æquiangulum triangulo dato cuicunq; DEF. *Ducatur recta GH, tangens circulum in* A, *fiatque angulus* GAB, *angulo* F, *æqualis, & angulus* HAC, *angulo* E, *atque extendantur rectæ* AB, AC, *ad circumferentiam vsque in puncta* B, & C, *coniungaturque recta* BC. *Non cadet autem recta* AC, *in rectam* AB, *vel inter rectas* AB, AG: *propterea quod anguli* GAB, HAC, *hoc est, anguli* F, E, *minores sunt duobus rectis.* h *Essent autem duobus rectis æquales, si* AC, *in* AB, *caderet; vel maiores duobus rectis, si inter* AB, AG, *caderet. Dico triangulum* ABC. *circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo* DEF. *Est enim angulus* C, i *æqualis angulo* GAB: & *eidem angulo* GAB, *æqualis est angulus* F, *ex constructione. Quare anguli* C, & F, *inter se quoque erunt æquales. Similiter quia angulus* B, k *æqualis est angulo* HAC: & *eidem angulo* HAC, *æqualis est, per constructionem, angulus* E, *erunt etiam anguli* B, & E, *inter se æquales. Cum igitur duo anguli* B, & C, *trianguli* ABC, l *æquales sint duobus angulis* E, & F, *trianguli* DEF, *erunt quoque reliqui anguli* A, & D, *æquales. Æquiangulum est ergo triangulum* ABC, *triangulo* DEF. *Quare in dato circulo triangulum descriptum, &c. Quod faciendum erat.*

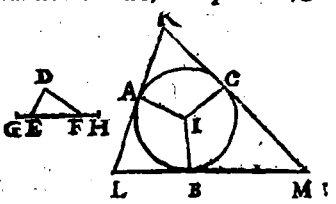
g 17. primi.
h 13. primi.
i 32. tert.
k 32. tertii.
l 32 pri.

PROBL.

PROBL. 3. PROPOS. 5. iij.

Circa datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

Circa circulum datum ABC, *describendum sit triangulum æquiangulum dato triangulo* DEF. *Producto latere* EF, *utrinque ad* G, & H, *sumptoque centro circuli* I, *ducatur recta utcunque* AI, & *fiat angulus* AIB, *æqualis angulo* DEG, & *angulus* BIC, *angulo* DFH. *Deinde ex* A, B, C, *educantur ad* AI, BI, CI, *perpendiculares* KL, LM, MK, *quæ circulum tangent in punctis* A, B, C, *per coroll. propos.* 16. *lib.* 3. *coibuntque in punctis* K, L, M. *Si enim ducatur recta* AC, *fierent duo anguli* KAC, KCA, *duobus rectis minores, ac proinde* AK, CK, *coibunt, &c. Nam recta hæc ducta* AC, *caderet supra rectas* AI, CI, *quod ha angulum constituant in* L. *Cum enim spatium circa* I *æquale sit quatuor rectis ex coroll.* 2. *propos.* 15. *lib.* 1. *hoc est quatuor angulis ad* E, & F, *sintque duo anguli* AIB, CIB. *duobus angulis* DEG, DFH, *æquales; erit reliquum spatium* AIC, *reliquis duobus angulis* DEF, DFE, *æquale*: Sed a *hi minores sunt duobus rectis. Igitur & spatium* AIC, *minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit* AIC. *Alias spatium illud esset vel æquale duobus rectis, si nimirum* AI, CI, *unam rectam lineam constituerent, vel maius duobus rectis, si recta* AI, *producta caderet supra* IC. *Cadit igitur necessario* AI, *producta infra* CI, *atque idcirco angulus fit* AIC, *ad partes* K, & *ducta recta* AC *faciet cum* AK, CK, *duos angulos minores duobus rectis, ideoque recta* AK, CK, *coibunt in* K. *Non secus ostendemus,* AL, BL, *coire in* L, & CM. BM, *in* M: *quia ducta recta* AB, BC, *facient cum* AL, BL, CM, BM, *angulos minores duobus rectis. Descriptum est igitur circa circulum triangulum* KLM, *quod dico esse æquiangulum triangulo* DEF. *Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero* AIBL, *æquales sunt quatuor rectis, vt ad* 32. *propos. lib.* 1. *ostensum fuit, & anguli* IAL, IBL, *sunt duo recti, erunt reliqui* AIB, & L, *duobus rectis æquales. Cum igitur* b & *anguli* DEG, DEF, *sint duobus rectis æquales; si auferantur æquales* AIB, DEG, *remanebit angulus* L, *angulo* DEF, *æqualis. Pari ratione ostendemus angulum* M, *æqualem esse angulo* DFE. c *Reliquus igitur angulus* K, *reliquo angulo* D, *æqualis erit; atque idcirco triangulum* KLM, *æquiangulum triangulo* DEF. *Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.*



a 17. primi.

b 13. primi.

c 31. primi.

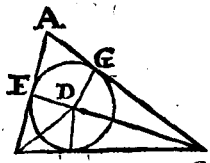
PROBL.

IV.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

In dato triangulo circulum inscribere.

Sit describendus circulus in dato triangulo ABC. Diuisis duobus angulis ABC, ACB, *bifariam rectis* BD, CD, *quæ intra triangulum coeant in* D, *ducantur ex* D, *ad tria latera, perpendiculares,* DE, DF, DG. *Quoniam igitur duo anguli* DBE, DEB, *trianguli* DBE, *æquales sunt duobus angulis* DBF, DFB, *trianguli* DBF, *vterque vtrique; & latus* BD, *commune; a erunt quoque latera* DE, DF, *æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera* DF, DG, *in triangulis* DCF, DCG. *Cum igitur tres rectæ* DF, DF, DG, *sint æquales; circulus ex* D, *ad interuallum* DE, *descriptus transibit per reliqua puncta* F, & G; *tangetque latera trianguli in* E, F, G, *per coroll. propos. 16. lib. 3. quod latera perpendicularia sint ad semidiametros* DE, DF, DG. *In dato ergo triangulo circulum descripsimus, Quod erat efficiendum.*



a 26. primi.

SCHOLIVM.

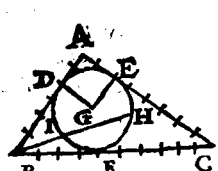
b 20. primi.

Verum quoniam Euclides libro 1. demonstrauit; *b* in omni triangulo duo latera quomodolibet assumpta reliquo esse maiora; non abs re fuerit demonstrare hoc loco, cum Io. Baptista Benedicto, quanto maiora sint, hoc proposito theoremate.

In omni triangulo, si circulus inscribatur, duo quælibet latera superant reliquuum recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ab angulo illis lateribus comprehenso in cauam peripheriam ducta, & sub eius segmento exteriore. Quod si angulus comprehensus sit rectus superabunt illa duo latera latus recto angulo oppositum diametro circuli triãgulo inscripti.

c 4. quarti.

Sit triangulum ABC, *c* cui circulus inscribatur DEF, tangens latera trianguli in D, E, F, punctis: & à quouis angulo B, siue rectus is sit, siue obtusus, siue acutus, ducatur recta BH, secans circulum in I. Dico duo latera BA, BC, superare latus AC, recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli sub BH, BI, comprehensi. Quoniam enim per coroll. 2. propos. 36. lib 3. recta CF, rectæ CE, & recta AD, rectæ AE, æqualis est, erunt duæ rectæ FC, DA, lateri AC, æquales. Latera igitur

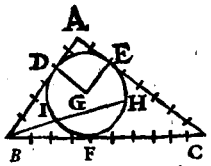


igitur BA, BC, latus AC, ſuperant ſegmentis BD,BF: quæ cum ex eodem coroll. ſint æqualia; ſuperabunt eadem latera BA, BC, latus AC, recta, quæ dupla eſt ſegmenti BD. Sed quadratum rectæ, quæ dupla eſt ſegmenti BD, quadruplum eſt quadrati rectæ BD, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Et *a* quadratum rectæ BD, æquale eſt rectangulo ſub BH, BI. Igitur latera BA, BC, ſuperant latus AC, recta, cuius quadratum quadruplum eſt rectanguli ſub BH, BI. Quod eſt propoſitum. *a* 36. ter. iij.

Quod ſi angulus A, rectus ſit, dico non ſolum duo latera AB, AC, ſuperare latus BC, recta, cuius quadratum quadruplum eſt rectanguli comprehenſi ſub recta ex A, in cauam peripheriam ducta, & eius ſegmento exteriore, vt oſtenſum eſt: verum etiam exceſſum illum eſſe diametro circuli DEF. æqualem. Ductis enim ex centro G, ad puncta contactuum D, E, rectis GD, GE; *b* erunt anguli ad D, & E, recti. Cum ergo & angulus A, ponatur rectus, *c* erunt tam rectæ AE. DG, quam AD, EG, parallelæ inter ſe: atque idcirco AG, parallelogrammum erit. *d* Quare tam recta AD, ſemidiametro EG, quam recta AE, ſemidiametro DG, æqualis erit: hoc eſt, duæ rectæ AD, AE, ſimul toti diametro circuli erunt æquales. Superant autem duo latera AB, AC, latus BC, duabus rectis AD, AE, vt oſtenſum eſt. Nam EC, ipſi FC, & DB, ipſi FB, æqualis eſt, ex coroll. 2. propoſ. 36, lib. 3. Igitur eadem latera AB, AC, ſuperant latus BC, diametro circuli inſcripti. Quod eſt propoſitum. *b* 18. ter. iij. *c* 28. primi. *d* 34. primi.

Itaque quæuis duo latera ſuperant reliquum duabus rectis circulum triangulo inſcriptum tangentibus, quæ inter angulum duobus illis lateribus comprehenſum, & circulum intericiuntur. Oſtenſum enim eſt, latera AB, AC, ſuperare latus BC, rectis tangentibus AD, AE, &c.

Iam vero his ita demonſtratis, ſi tria latera trianguli cognita ſint, inueniemus nullo negotio tria puncta, in quibus circulus triangulo inſcribendus latera tangere debet. Quia enim latera, verbi gratia, AB, AC, ſuperare debent latus BC, duabus tangentibus ex A, ductis, quæ quidem æquales ſunt: ſi dematur latus BC, notum ex notis lateribus AB, AC, relinquentur duæ tangentes AD, AE, notæ. Semiſſis ergo huius exceſſus dabit vtrumque punctum D, E. Reliquū deinde ſegmentum EC, dabit ſegmentum CF, vſque ad punctum tertium F: Vel reliquum ſegmentum DB, dabit ſegmentum BF, ad idem punctum F. Si igitur ex duobus punctis D, E, erigantur perpendiculares DG, EG, coibunt hæ in G, centro circuli inſcribendi. Exempli gratia. Sit latus AB, 6. latus AC, 8. & latus BC, 10. palmorum. Dempto latere BC, 10. palmorum ex duobus lateribus AB, AC, hoc eſt. ex 14. palmis, relinquuntur 4. palmi. Tam ergo AB, quam AE, duos palmos continebit. Segmentum ergo D, B, continebit 4. palmos, totidemque ſegmentum BF, habebit. Segmentum

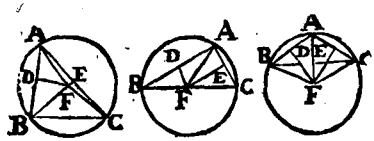


autem EC, ac proinde & CF, erit 6. palmorum. Sic etiam dempto latere AB. 6. palmorum, ex lateribus AC, BC, id est, ex 18. palmis, reliqui fiunt 12. palmi. Vtrumque ergo segmentum GE, CF, erit 6. palmorum: ac proinde vtrumque AE, AD, 2. palmorum, & vtrumque BD, BF, 4. palmorum. Postremo dempto latere AC, 8. palmorum ex lateribus AB. CB, hoc est, ex palmis 16. remanent 8. palmi. Vtrumque ergo segmentum BD, BF, habebit 4. palmos: At vtrumque CF, CE, 6. palmos; & vtrumque AD, AE, 2. palmos.

V. PROBL. 5. PROPOS. 5.

Circa datum triangulum circulum describere.

Sit circulus describendus circa datum triangulum ABC. *Diuidantur duo latera* AB, AC, (*quæ in triangulo rectangulo, vel obtusangulo sumenda sunt facilitatis gratia, circa rectum, vel obtusum angulum, quamuis hoc non sit omnino necessarium, sed duo quauis latera bifariam possint secari*) *bifariam in* D, & E, *punctis, ex quibus educantur* DF, EF, *perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in* F, (*Quod enim coeant, patet. Nam si ducta esset recta* DE, *fierent anguli* FDE, FED, *duobus rectis minores.*) *erit q; F, vel intra triangulum, vel in latere* BC, *vel extra triangulum. Ducantur rectæ* FA, FB, FC. *Quoniam igitur latera* AD, DF, *trianguli* ADF, *æqualia* a *sunt lateribus* BD, DF *trianguli* BDF, & *anguli ad* D, *recti*; a *erunt bases* FA, FB, *æquales. Eodem modo erunt* FA, FC, *æquales. Cum ergo tres rectæ* FA, FB, FC, *sint æquales, circulus descriptus ex* F, *ad interuallum* FA, *transibit quoque per puncta* B, & C. *Circa datum ergo triangulum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.*



a 4. primi.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, si centrum intra triangulum cadat, b omnes anb 31. tertii. gulos esse acutos, quoniam omnes sunt in maiori segmento circuli: si vero sit in latere BC, c angulum BAC, ei lateri oppositum, esse rectum, quod c 31. tertij. sit in semicirculo; Si denique cadat extra triangulum, d angulum oppod 31. tertij. situm BAC, obtusum esse, cum sit in minori segmento circuli.

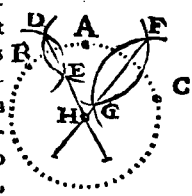
Contra vero perspicuum est, si triangulum fuerit acutangulum, cadere intra triangulum; si rectangulum, in latus recto angulo oppositum, si denique obtusangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile ostendetur, ducendo ad incommodum aliquod, siue absurdum. Quia si in

acutan-

acutangulo caderet centrum in vnum latus, esset angulus ei oppositus rectus: si vero extra, esset idē angulus obtusus. Itē si in rectangulo centrum caderet intra, essent omnes anguli acuti, si vero extra esset angulus oppositus obtusus. Denique si in triangulo obtusangulo caderet in vnum latus, esset angulus ei oppositus, rectus, si vero intra, omnes anguli essent acuti. Quæ omnia ex priori parte huius coroll. colliguntur, & pugnant cum hypothesi.

SCHOLIVM.

Colligitur etiam ex hoc problemate, quanam arte describendus sit circulus, qui per data tria puncta non in vna recta linea existentia transeat Nam si data puncta tribus rectis iungantur, vt constituatur triangulum, facile circa ipsum circulus describetur, vt hac propos. traditum est. Quod tamen facilius efficietur praxi illa, quā tradidimus propos. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C. Ex A, & B, quouis



interuallo eodem duo arcus describantur se intersecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur DH. Item ex A, & C, quouis alio interuallo eodem; vel etiam, si placet, priori illo, alij duo arcus delineentur secantes sese in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur FH, secans rectam DH, in H. Dico H, esse centrum circuli transeuntis per data puncta A, B, & C. Nam si ducerentur rectæ AB, AC, BC, diuiderentur latera AB, AC, trianguli ABC, bifariam à rectis DH, FH, ceu demonstratum est in praxi illa propositionis 25. lib. 3. Quare vt in hoc 5. problemate Euclides ostendit, H, erit centrum circuli circa triangulum ABC, descripti. Quod est propositum.

PROBL. 6. PROPOS. 6. vj.

In dato circulo quadratum describere.

Sit in dato circulo ABCD, cuius centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes sese ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ AB, BC, CD, DA. Dico ABCD, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera EA, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus EC, EB, trianguli CEB, cum omnia sint ex centro: & anguli contenti sunt recti; a erunt bases AB. BC, æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ BC, CD: Item rectæ CD, DA, & rectæ DA, AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, æqualia inter se sunt. Quod breuius ita cōcludem^b. Quoniā quatuor anguli ad E, æquales sunt, nimirū recti; b erūt quatuor arc^s, quib^s insistūt, æquales: c ac proinde & rectæ quatuor subtēsæ æquales erūt. Omnia ergo latera quadrilateri ABCD, inter se æqualia sunt. Sunt autē

a 4. pri.

b 26. tertij.

c 29. ter.

a 31. ter. a & anguli recti, cum omnes in semicirculis existant. Quare quadratum erit ABCD, propterea que in dato circulo quadratum descripsimus. Quod erat faciendum.

vij. PROBL. 7. PROPOS. 7.

Circa datum circulum quadratum describere.

Sit circa datum circulum ABCD, cuius centrum E, describendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se in E. centro ad angulos rectos: & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpẽdiculares FG, FH. HI, IG, coeuntes in punctis F, H, I, G.

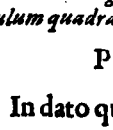
Quod enim coeant AF, BF, patet ex eo, quod ducta recta AB, faciat cum AF, BF, duos angulos duobus rectis minores: atque ita de reliquis. Dico FHIG, esse quadratum circa circulum datum descriptum. Cum enim anguli AEB, FBE, sint recti, b erunt FH, AC, parallelæ: similiterque erunt GI, AG, parallelæ. c Quare & FH, GI, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erũt FG, HI. Quoniam igitur parallelogrammum est ACHF, d erunt latera opposita AC, FH, æqualia, & anguli oppositi ACH, AFH, æquales: Sed ACH, est rectus. Igitur AFH, rectus erit. Eadem ratione ostendemus angulos H, I, G, rectos esse: & latera HI, IG, GF, æqualia esse diametris BD, AC. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera FG, FH, HI, IG, æqualia, ideoque FGIH. quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per coroll. propos. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.

b 28. primi.
c 28. primi.
d 38. primi.

viij. PROBL 8. PROPOS. 8.

In dato quadrato circulum describere.

Sit in dato quadrato ABCD, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ EG, FH, secantes se in I.



Quoniam igitur AD, BC, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum AH, BF, æquales & parallelæ. c Quare & AB, parallela est, & æqualis ipsi FH. Eadem ratione erit DC, parallela, & æqualis eidem FH: Itemque rectæ AD, BC, parallelæ erunt, & æquales ipsi EG. Sunt igitur parallelogramma AI, IB, CI, ID, ideoque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt rectis AH, EB, DH, AE: Sunt autem hæ inter se æquales, cum sint semisses æqualium AD, AB, &c. Quare rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad interuallum IE,

c 33. pri.

ſit, tranſibit quoque per puncta F, G, H, qui eum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. a *quod anguli ad E, F, G, H, ſint recti, deſcriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum deſcripſimus. Quod efficiendum erat.* a 29. pri.

PROBL. 9. PROPOS. 9. IX.

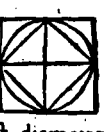
Circa datum quadratum circulum deſcribere.

Sit deſcribendus circulus circa quadratum ABCD. Ducantur diametri AC, BD, ſecantes ſe in E. Quoniam igitur latera AB, AD, trianguli ABD, aqualia ſunt, b *erunt anguli ABD, ADB. aquales: Eſt autem angulus BAD, rectus.* c *Quare ABD, ADB, ſemirecti erunt. Similiter oſtendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, eſſe ſemirectos, & idcirco inter ſe aquales. Cum ergo anguli EAD, EDA, ſint aquales:* d *erunt recta EA, ED, aquales. Eadem ratione EA, EB, aquales erunt: nec non EB, EC. Itum EC, ED. Quare circulus ex E, deſcriptus, interuallo EA, tranſibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum deſcripſimus. Quod erat faciendum.*

b 5. pri.
c 32. pri.
d 6. pri.

SCHOLIVM.

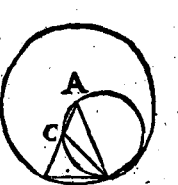
Quod ſi circa datum circulum deſcribatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inſcribatur, erit quadratum circumſcriptum quadrati inſcripti duplum. Quoniam enim latus quadrati circumſcripti æquale eſt diametro circuli, vt ex 7. propoſ. huius lib. conſtat, hoc eſt, diametro quadrati inſcripti; quadratum vero diametri duplum eſt quadrati, cuius eſt diameter, vt ad 47 propoſ. lib. 1. oſtendimus: Conſtat propoſitum.



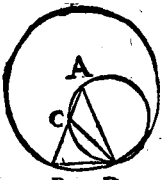
PROBL. 10. PROPOS. 10. X.

Iſoſceles triangulum conſtituere; quod habeat vtrumque eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum, duplum reliqui.

Sumatur quauis recta linea AB, quæ diuidatur in C, ita vt rectangulum ſub AB, BC, aquale ſit quadrato rectæ AC. Deinde centro A, interuallo vero AB, circulus deſcribatur, in duo f *accommodetur recta BD, aqualis ipſi AC, iungaturque recta AD. Quoniam autem recta AB,*



e 11. ſec.
f 1. quarti.



AD, æquales ſunt, erit triangulum ABD, Iſoſceles. Dico vtrumque angulorum ABD. ADB, *duplum eſſe reliqui anguli A. Ducta enim recta* CD, a *deſcribatur circa triangulum* ACD, *circulus* DC*A. Quoniam igitur rectangulum ſub AB, BC, æquale eſt quadrato rectæ* BD, *& rectæ AB, ſecat circulum* DCA, b *tanget recta* BD, *eundem circulum* DC*A, in D. Quare angulus* BDC, c *æqualis eſt angulo* A, *in alterno ſegmento* CAD. *Addito igitur communi* CD*A, erit totus angulus ADB, æqualis duobus angulis* CAD; CD*A: Sed his eiſdem* d *æqualis eſt etiam angulus externus* BCD. *Angulus ergo* BCD, *æqualis erit angulo ADB, hoc eſt, angulo* ABD, e *cum* ABD, ADB, *æquales ſint: ac propterea* f *rectæ* CD, BD, *æquales erunt: Eſt autem* BD, *æqualis poſitæ rectæ* AC. *Igitur &* CD, *ipſi* C*A, æqualis erit:* g *ac propterea anguli* CAD, CD*A, æquales. Angulus igitur* ADB, *qui æqualis oſtenſus eſt duobus angulis* CAD, CD*A, duplus erit alterius eorum, anguli nimirum* A. *Quare & angulus* ABD, *duplus erit eiuſdem anguli* A. *Iſoſceles ergo triangulum conſtituimus, habens, &c. quod erat efficiendum.*

a 5. quarti.

b 37. tertij.

c 32. tertij.

d 32. primi.

e 5. pri.

f 6. pri.

g 5. pri.

COROLLARIVM.

Quoniam vero tres anguli trianguli ABD, *b* æquales ſunt duobus rectis, hoc eſt, quinque quintis duorum rectorum: perſpicuum eſt, angulum A, eſſe quintam partem duorum rectorum; vtrumlibet autem B, D, duas quintas partes. Item A, eſſe duas quintas partes vnius recti, & vtrumuis E, D, quatuor quintas partes: quandoquidē omnes tres æquales ſunt duobus rectis, hoc eſt, decem quintis vnius recti.

h 32. primi.

i 32. pri.

SCHOLIVM.

Potuiſſet problema hoc proponi ad inſtar theorematis hoc modo.

Si recta linea ſecetur, vt prop. 11. lib. 2. traditum eſt: Iſoſceles triangulum, cuius baſis maiori ſegmento æqualis eſt, vtrumuis vero laterum æqualium ipſi datæ lineæ æquale, habet vtrumlibet angulorum æqualium ad baſim, duplum reliqui.

Non eſt autem, quod ſe excrucient Campanus, & Peletarius, vt probent, rectam BD, ita applicari circulo DCA, vt eum nullo modo ſecet. Nam propterea quod quadratum rectæ *BD*, æquale eſt rectangulo ſub *AB, BC*, oſtenſum eſt vltima prop. 3. lib. rectam BD, perpendicularem eſſe ad ſemidiametrum circuli ex D, ductam. Quare circulum tanget, & nulla ratione ſecabit.

Qua arte autem conſtrui debeat triangulum Iſoſceles, cuius vterius angulorum ad baſim, ad reliquum habeat quamcunque pro-

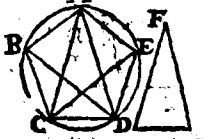
por-

portionem datam, non ſolum duplam, vt hic ab Euclide factum eſt, trademus cum Pappo ad finem lib. 6. Quæ res hactenus deſiderata eſt.

PROBL. II. PROPOS. II. XI.

In dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

Sit in dato circulo ABCDE, *inſcribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum.* a *Conſtruatur triangulum Iſoſceles* FGH, a 10. *ita vt vterque angulorum* G, H, *duplus ſit reliqui* F, *& in circulo quarti.*
b *inſcribatur triangulum* ACD, *æquiangulum triangulo* FGH, *& b 2.*
vterque angulorum ACD, ADC, c *bifariam diuidatur rectis* CE, *quarti.*
DB, *atque rectæ iungantur* AB, BC, CD, *c 9 pri.*
DE, EA. *Dico pentagonum* ABCDE, *in circulo dato inſcriptum, eſſe æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim vterq; angulorũ* ACD, ADC, *duplus ſit anguli* CAD, *& diuiſis bifariam; erunt quinque anguli* ADB, BDC, CAD, DCE, ECA, *æquales.* d *Quare arcus* AB, BC, CD, DE, EA, *ſuper quos aſcenderunt, atque idcirco* e *& recta* AB, BC, CD, DE, EA, *æquales d 26. tertij.*
erunt. Æquilaterum eſt igitur pentagonum ABCDE. *Rurſus quia e 29. tertij.*
arcus AB, ED, *æquales ſunt; addito communi* BCD, *fient æquales f 27. tertij.*
ABCD, EDCB. f *Anguli ergo* AED, BAE, *dictis arcubus inſiſtentes æquales erunt. Eodem modo æquales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Inſiſtunt enim æqualibus arcubus, quorum ſinguli externis arcubus æqualibus componuntur. Æquiangulum eſt ergo pentagonum* ABCDE. *Quare cum & æquilaterum eſſe ſit oſtenſum, inſcriptum erit dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum: Quod faciendum erat.*



COROLLAIRVM.

Sequitur hinc, angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum rectorum; vel ſex quintas recti. g Cum enim tres anguli BAC, CAD, DAE, æquales ſint, vtpote qui æqualibus arcubus BC, CD, DE, inſiſtant, ſit autem CAD, per coroll. præcedentis propoſ. quinta pars, duorum rectorum, vel duæ quintæ vnius recti: erit totus BAE, tres quintæ duorum rectorum: vel ſex quintę vnius recti. g 27. tertii.

SCHOLIVM.

Quod ſi detur recta linea terminata CD, ſuper ea conſtituemus pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc modo. h Fiat triangulum Iſoſceles FGH, habens vtrumlibet angulorum G, H, duplũ reliqui anguli F. Deinde conſtituantur anguli ACD, ADC, h 10. quarti.

æquales angulis G,H, cocantque rectæ CA, DA, in A, a quæ efficient angulum CAD, æqualem angulo F; ac propterea trianguli ACD, vterque angulorum ACD, ADC, duplus erit reliqui anguli CAD. Iam vero circa triangulum ACD, circulus b describatur ABCDE; In quo cum sit inscriptum triangulum ACD, si anguli ACD, ADC, bifariam secentur, inscribetur, vt prius, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, cuius latus est recta CD. Quod est propositum.

a 32. primi.

b. 5. quarti.

Facilius idem efficiemus hac ratione. Secta recta proposita AB, supra quam pentagonum æquilaterum, & æquiangulum constituendum est, in C, vt propos. 11. lib. 2. traditum est, producatur ad vtramque partem, sintque AD, BE, maiori segmento AC, æquales. Interuallo deinde datæ rectæ AB, ex A, D, duo arcus describantur secantes sese in F. Item ex B, E, eodem interuallo alij duo se interseeantes in G. Denique ex F, G, eodem interuallo alij duo se diuidentes in H, coniunganturque rectæ AF, FH, HG, GB. Dico pentagonum ABGHF, super datam rectam AB, descriptum, esse æquilaterum, atque æquiangulum. Quod enim sit æquilaterum, constat ex constructione, cum omnes lineæ ipsi AB, sumptæ sint æquales, hoc est, omnes arcus descripti sint ad interuallum AB. Quod autem sit & æquiangulum, ita ostendetur. Ducta recta DF, erit ADF, Isosceles, quale ab Euclide propos. 10. constructum est, vt ex scholio eiusdem propos. manifestum est, propterea quod basis AD, æqualis est maiori segmento AC, lineæ AB, vtrumuis vero laterum æqualium ipsi AB, æquale. Quare ex coroll. eiusdem propos. 10. angulus DAF, continebit duas quintas duorum rectorum; ac proinde reliquus angulus duorum rectorum, nimirum BAF, reliquas tres quintas duorum rectorum continebit. Cum ergo ex coroll. huius propos. angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli complectatur tres quintas duorũ rectorũ; erit BAF, angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli. Eademque ratione erit ABG, angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli. Ex quo sequitur, totum pentagonum esse æquiangulum. Si enim compleatur, aut concipiatur esse completum, hoc est, super F, G, cogitentur descripta duo alia latera, cadent ea necessario in punctum H. Alioquin, si supra H, aut infra conuenirent, c essent ea vel maiora, vel minora rectis FH, GH, vt constat si angulo H, subtenderetur basis FG: atque idcirco alijs lateribus FA, AB, BG, æqualia non forent, quod est absurdum. Pentagonum ergo ABGHF, & æquilaterum & æquiangulum est. Quod erat ostendendum.

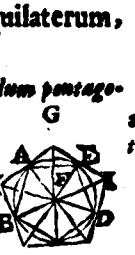
c 21. primi.

PROBL.

PROBL. 12. PROPOS. 12. xij.

Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Sit circa datum circulum A B C D E, *describendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum.* a *Inscribatur in eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum* A B C D E, *& ex centro* F, *ducantur rectæ* FA, FB, FC, FD, FE, *ad quas ducantur perpendiculares* G H, H I, I K, K L, L G, *coeuntes in* G, H, I, K, L. *Cum enim anguli* G A E, G E A, *anobus sint rectis minores, partes nimirum angulorum rectorum* FAG, FEG; b *coibunt rectæ* A G, E G, *ad partes* G, *& sic de aliis. Et quia ipsa tangunt circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit descriptum pentagonum* G H I K L, *circa circulum; quod dico esse æquilaterum atq; æquiangulum. Ductis enim rectis* F G, F H, F I, F K, F L, *erunt quadrato rectæ* F H, c *æqualia tam quadrata rectarum* FA, AH, *quam rectarum* FB, BH. *Quare quadrata rectarum* FA, AH, *æqualia erunt quadratis rectarum* FB, BH. *Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium* FA, FB, *remanebunt quadrata rectarum* AH, BH, *æqualia; ideoque & rectæ* AH, BH, *æquales erunt. Quod etiam constat ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. cum* AH, BH, *ex eodem puncto* H, *ducantur circulum tangentes in* A, *& B. Quoniam ergo latera* AF, FH, *trianguli* AFH, *æqualia sunt lateribus* BF, FH, *trianguli* BFH. *Est autem & basis* AH, *basi* BH, *æqualis, ut ostensum est;* d *erunt anguli* AFH, BFH, *æquales. Igitur* e *& anguli* AHF, BHF; *Duplus igitur est angulus* AFB, *anguli* BFH, *& angulus* AHB, *anguli* BFH. *Eodem modo ostendemus, angulum* BFC, *duplum esse anguli* BFI, *& angulum* BIC, *anguli* BIF. *Cum igitur* f *anguli* AFB, BFC, *sint æquales, quod insistant circumferentiis* AB, BC, g *quæ æquales sunt, cum à rectis æqualibus subtendantur* AB, BC; *erunt & dimidii eorum* BFH, BFI, *æquales. Quocirca tum duo anguli* BFH, HBF, *trianguli* BFH, *æquales sint duobus angulis* BFI, IBF, *trianguli* IFB, *& latus illis adiacens commune* BF, h *erunt & latera* BH, BI, *æqualia, & anguli* BHF, BIF, *æquales. Dupla est ergo recta* HI, *rectæ* HB. *Eadem queratione ostendemus* GH, *rectam duplam esse rectæ* HA. *Sunt autem ostensæ æquales* HB, HA. *Igitur & earum duplæ* HI, HG, *æquales erunt. Similiter demonstrabimus, rectas* IK, KL, LG, *æquales esse cuilibet rectarum* HI, HG. *Æquilaterum ergo est pentagonum* GHIKL. *Rursus quoniam ostensum est, angulos* BHF, BIF, *æquales esse, ac semisses angulorum* BHA, BIC, *erunt & eorum dupli* BHA, BIC, *æquales. Eademq; ratione an-*



a 11. *quarti.*

b 13. *primum.*

c 47. *primi.*

d 8. *primi.*

e 4. *primi.*

f 27. *tertii.*

g 28. *tertii.*

h 26. *primi.*

guli IKL, KLG, LGH, æquales erunt cuilibet angulorum BHA, BIC. Æquiangulum igitur est pentagonum GHIKL. Quapropter cum & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod efficiendum erat.

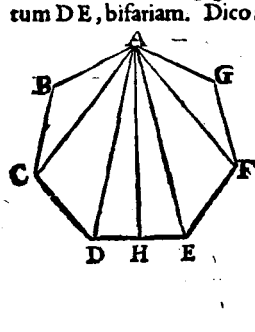
COROLLARIVM.

Sequitur ex huius problematis demonstratione; si in circulo quæcunque figura æquilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: has perpendiculares constituere aliam figuram totidem laterũ, & angulorum æqualium circulo circumscriptam. Eadem enim semper ratione demonstrabitur, illas perpendiculares concurrere, angulosque conficere æquales, si nimirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, ut in pentagono factum est: quæ quidem ipsos angulos bifariam secabunt, quemadmodum in pentagono hic probatum est. &c.

Huc referendum est theorema sequens ad figuras æquilateras & æquiangulas spectans, quod perutile erit ad invenienda centra circulorum circa ipsas figuras, sive intra ipsas describendorum, ut ex sequentibus patebit.

In figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est, recta linea ex quovis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, dividit quoq; angulum bifariam; Et contra, recta linea dividens angulum bifariam secat quoq; latus oppositum bifariam: Si vero numerus angulorum est par, recta linea ex quovis angulo ad oppositum angulum ducta secat utrumque angulum bifariam: Et contra, recta linea secans quemvis angulum bifariam cadit in oppositum angulum, eumque bifariam quoque dividit.

Sit primum figura æquilatera, æquiangulaq; imparium laterum ABCDEFG, & ex angulo A, demissa recta AH, secet latus oppositum DE, bifariam. Dico angulum quoque BAG, sectum esse bifariam. Ductis enim ex A, rectis ad omnes angulos non proximos; quoniam duo latera BA, BC, duobus lateribus GA, GF, æqualia sunt, angulosque cõtinent æquales, ex hypothesi; *a* erunt & bases AC, AF, æquales, & tam anguli BAC, GAF, quam BCA, GFA: ac proinde cum toti anguli BCD, GFE, ponãtur æquales; erunt quoque reliqui ACD,



a 4. primi.

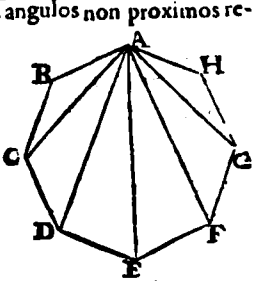
ACD, AFE, æquales. Quia igitur rursus duo latera CA, CD, duobus lateribus FA, FE, æqualia sunt, continentque angulos æquales, ut ostensum est: a erunt & bases AD, AE, æquales, & tam anguli CAD, FAE, quam CDA, FEA. Atque ita procedendum erit, donec ad latus oppositum perventum sit. Vbi quia rursus toti anguli CDE, FED, æquales sunt; erunt quoque reliqui ADH, AEH, æquales. Quare cum duo latera DA, DH, duobus lateribus EA, EH, æqualia sint, angulosque æquales contineant, b erunt etiam anguli DAH, EAH, æquales. Quocirca cum quotuis anguli BAC, CAD, DAH, totidem angulis GAF, FAE, EAH, sint æquales, singuli singulis: erit quoq; totus angulus BAH, toti angulo GAH, æqualis: ac proinde angulus BAG, sectus erit bifariam. Quod est propositum.

a 4. pri.

b 4. pri.

Sed jam recta AH, secet angulum BAG, bifariam. Dico eam secare quoque latus oppositum DE, bifariam. Si enim dicatur latus DE, non secari bifariam, si ex A, ducatur alia recta secans DE, bifariam, secabit eadem & angulum BAG, bifariam, ut jam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAG, secabunt bifariam, quod est absurdum, cum una medietas major esset quam altera. Recta ergo AH, secans angulum BAG, bifariam, secat quoque latus DE, bifariam. Quod est propositum.

Sit deinde figura æquilatera, & æquiangula parium laterum ABCDEFGH, & ex angulo A, ad angulum oppositum E, ducatur recta AE. Dico rectā AE, secare tam angulum BAH, quam DEF, bifariam. Ductis enim ex A, ad omnes angulos non proximos rectis: demonstrabimus, ut in antecedente figura, quotuis angulos BAC, CAD, DAE, totidem angulis HAG, GAF, FAE, esse æquales, singulos singulis: ideo totum angulum BAE, toti angulo HAE, æqualem esse, nec non & angulum DEA, FEA, esse æqualem. Vterque igitur angulus BAH, DEF, secabitur bifariam. Quod est propositum.



Sed jam recta AE, secet angulum ABH, bifariam. Dico eam cadere in angulum oppositum E, eumq; dividere bifariam. Si enim non dicatur cadere in E, si ex A, ad E, ducatur alia recta, secabit ea angulum BAH, bifariam, ut jam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAH, bifariam secabunt, quod est absurdum. Recta ergo AE, secans angulum BAH, bifariam, cadit in E, secatque propterea, ut demonstratum est proxime, angulum DEF, bifariam quoque. Quod est propositum.

PROBL.

xiij. PROBL. 13. PROPOS. 13.

In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.

Sit inscribendus circulus in dato pentagono ABCDE. a *Dividantur duo ejus anguli* BAE, ABC, *proximi bifariam rectis* AF, BF, *quæ coeant in* F. *Cum enim ex scholio præcedentis propos. rectæ* AF, BF, *secent opposita latera* CD, DE, *bifariam, necesse est, duas rectas* AF, BF, *se mutuo intra pentagonum secare, priusquam rectis* CD, DE, *occurrant. Connectantur deinde rectæ* FC, FD, FE. *Quoniam igitur latera* AB, BF, *trianguli* ABF, *æqualia sunt lateribus* CB, BF, *trianguli* CBF. *Sunt autem ex constructione, & anguli ipsis contenti æquales* ABE, CBF: b *erunt bases* AF, CF, *& anguli* BAF, BCF, *æquales. Cum igitur anguli* BAE, BCD, *ponantur æquales, &* BAF, *dimidium sit anguli* BAE, *per constructionem: erit &* BCF, *dimidium anguli* BCD. *Divisus est ergo angulus* BCD, *bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos* CDE, DEA, *divisos esse bifariam. Ducantur jam ex* F, *ad singula Pentagoni latera perpendiculares* FG, FH, FI, FK, FL. *Quoniam igitur duo anguli* FGA, FAG, *trianguli* FAG, *æquales sunt duobus angulis* FLA, FAL, *trianguli* FAL: *estque latus* AF, *subtensum uni æqualium angulorum commune,* c *erunt & rectæ* FG, FL, *æquales. Similiterque ostendentur reliqua perpendiculares* FH, FI, FK, *æquales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro* F, *& intervallo* FG, *transibit per puncta quoque* H, I, K, L. *Quoniam vero latera pentagoni circulum hunc tangunt, per coroll. propos. 16. lib. 3. eo quod angulos rectos faciant cum semidiametris* FG, FH, *&c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.*

a 9. pri.

b 4. pri.

c 62. pri.

SCHOLIVM.

Eadem prorsus arte in quacunque figura æquilatera, & æquiangula circulum describemus. Semper enim ostendemus, divisis duobus angulis proximis bifariam, si ex puncto concursus linearum angulos dividentium perpendiculares ducantur ad latera, eas inter se esse æquales: ac proinde punctum illud concursus centrum esse circuli inscribendi. Concurrent autem necessario intra figuram duæ illæ rectæ, quæ angulos duos proximos secant bifariam: propterea quod in figura imparium laterum dividunt latera opposita bifariam: in figura vero parium laterum, angulos oppositos bifariam, ut in scholio antecedentis propos. ostensum est.

PROBL.

PROBL. 14. PROPOS. 14. XIV.

Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.

Sit circa pentagonum ABCDE, *æquilaterum, & æquiangulum, circulus describendus. Divisis duobus angulis* BAE, ABC, *bifariam rectis* AF, BF *quæ coeant in* F, *intra pentagonum, ut in antecedente propos. demonstratum est: & conjunctis rectis* FC, FD, FE, *ostendemus, ut in præcedenti problemate, reliquos etiam angulos* BCD, CDE, DEA, *sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidii inter se æquales, quod toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo* AFB, *duo anguli æquales sunt* FAB, FBA; a *erunt rectæ* FA, FB, *æquales. Eademque ratione* a 6. pri. *erunt reliquæ* FC, FD, FE, *cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro* F, *intervallo autem* FA, *transibit quoque per puncta* B, C, D, E. *Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.*

SCHOLIVM.

Eodem prorsus artificio circa quamlibet figuram æquilateram, & æquiangulam circulum describemus: Semper enim ostendemus, divisis duobus angulis proximis bifariam, rectas ex puncto concursus linearum angulum dividentium ad angulos figuræ ductas, inter se esse æquales: ac propterea punctum illud concursus centrum esse circuli circumscribendi.

PROBL. 15. PROPOS. 15. XV.

In dato circulo, hexagonum & æquilaterum & æquiangulum inscribere.

Sit in dato circulo ABCDEF, *cujus centrum* G, *inscribendum hexagonum æquilaterum, & æquiangulum. Ducta diametro* AD, *describatur circulus ex centro* D, *intervallo vero* DG, *qui secet circulum datum in punctis* C, *&* E, *à quibus per centrum* G, *rectæ extendantur* CF, EB. *Si igitur connectantur rectæ* AB, BC, CD, DE, EF, FA, *inscriptum erit in dato circulo hexagonum* ABCDEF: *quod dico esse æquilaterum & æquiangulum. Cum enim recta* GC, *æqualis sit rectæ* GD, *& rectæ* DC, *æqualis eidem rectæ* DG, *ex definitione circuli: erunt & rectæ* GC, DC, *æquales inter se: Ideoq; triangulum* CDG, *erit æquilaterum. Quare* b *tres anguli* CGD, GDC, DCG, b 5. pri. *æquales inter se erunt: qui cum* c *æquales sint duobus rectis,* c 32. pri. *erit quilibet illorum, nempe* CGD, *tertia pars duorum rectorum.*

Eodem

Eodem modo erit angulus DGE, tertia pars duorum rectorum. Sunt autem tres anguli CGD, DGE, EGF, a aequales duobus rectis. Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoq; pars erit duorum rectorũ. Sunt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF. inter se aequales: quibus cum etiam b aequales sint ad verticem anguli FGA, AGB, BGC: erunt sex anguli ad centrum G, aequales. c Quare circumferentia, quibus insistunt, d ac propterea recta AB, BC, CD, DE, EF, FA, aequales erunt. Quapropter aequilaterum est hexagonum ABCDEF. Rursus quia circumferentia B C, aequalis est circumferentia A F: si addatur communis CDEF, erunt circumferentia BCDEF, AFEDC, aequales. Anguli igitur ipsis insistentes BAF, ABC, c aequales erunt. Similiterque ostendemus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, aequales esse cuilibet istorum, quia nimirum quilibet insistit arcui composito ex quatuor arcubus aequalibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inscripta, demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes aequalibus arcubus insistere. Quare aequiangulum quoq; est hexagonum ABCDEF. In dato ergo circulo hexagonum aequilaterum, & aequiangulum descripsimus. Quod faciendum erat.

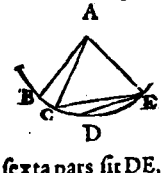
a 13. pri.
b 15. pri.
c 26. tertii.
d 29. tertii.
e 27. tertii.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, Hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli. Nam D C, latus hexagoni, æquale est semidiametro D G, ex definitione circuli.

SCHOLIVM.

Cæterum per ea, quæ dicta sunt de pentagono propos. 12. 13. & 14. describemus hexagonum æquilaterum, & æquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus, & deniq; circa idem hexagonum describemus circulum. Nam, ut hexagonum circulo circumscribatur, inscribendum prius erit hexagonum intra circulum, ut hac propos. 15. docuit Euclides. Si vero circulus vel in hexagono, vel circa hexagonum describendus sit, dividendi erunt duo anguli proximi bifariam. Reliqua deinde perficienda, ut propos. 12. 13. 14. traditur.



Porro ex his quoque facile demonstrabimus, dari posse triangulum Isosceles oxygonium, cujus tertium latus utrovis æqualium majus sit f sive in quo utrumis laterum æqualium tertio minus sit. Id quod ad defin. 28. lib. 1. admonuimus. Sit enim A, centrum circuli BCDE, in quo sexta pars sit DE, & quarta BE. *f* Erit ergo subtensa DE, semidiametro æqualis. Et si ex quovis puncto C, inter B, & D, ad E, recta ducatur C E: erit hæc major quam DE, ex scholio propos. 29. lib. 3. hoc est, major, quam semidiameter. Quare junctis duabus semidiametris A C, A E, erit triangulum ACE, Isosceles, cujus tertium la-

f. 15. quarti.

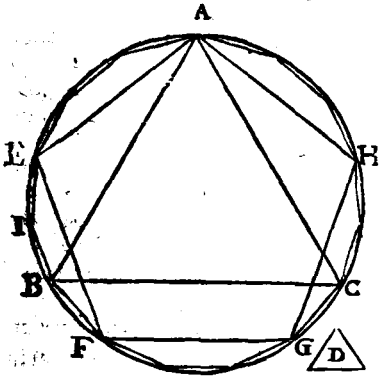
tus

tus CE, utrovis æqualium AC. AE, majus est. Dico idem esse oxygonium. Quoniam enim a anguli ACE, AEC, æquales sunt, b & a 5. prius simul duobus rectis minores, erit uterq; acutus. Ducta item recta mi. AB, erit angulus BAE, quadranti BE, in centro insistens rectus, ex b 17. prischolio propos. 27. lib. 3. ac proinde CAE, acutus erit. Oxygo- mi. nium ergo Isosceles triangulum ACE, habens tertium latus CE, utrolibet æqualium majus, Quod est propositum.

PROBL. 16. PROPOS. 16. XVI.

In dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.

Sit in dato circulo ABC, inscribendum Quintidecagonum aquilaterum, & aquiangulum. Constituto triangulo æquilatero D, quod ex coroll. propos. 5. lib. 1. erit etiam æquiangulum; c in scribatur ei æquiangulum triangulū ABC, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. d eruntque tres arcus AB, BC, CA, æquales, vel propter tres rectas AB, BC, CA, æquales, vel propter tres æquales angulos A, B, C, trianguli ABC. Qualium igitur partium æqualium quindecim est circumferentia tota ABC, talium quinq; erit arcus AB, qui tertia pars est totius circumferentia. e Inscribatur rursus in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum AEFGH, applicans unum angulorum ad punctum A, f eruntque quinq; arcus AE, EF, FG, GH, HA, æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim est tota circumferentia ABC, talium trium erit arcus AE, quinta pars existens totius circumferentia. Itaque cum arcus AB, contineat tales partes quinque, & arcus AE, tres; continebit reliquus arcus EB, duas. Diviso g ergo arcu EB, bifariam in I, erit arcus BI, pars decimaquinta totius circumferentia. Quare ducta recta BI, subtendet decimamquintā partem totius circumferentia; cui si alia quatuordecim h æquales in circulo accommodentur, inscriptum erit in circulo quintidecagonum æquilaterum, quod i & æquiangulum est, cum ejus anguli i 27. tertia subtendant arcus æquales, compositos videlicet ex 13. arcubus æqua-



c 2. quarti.

d 26. vel 28. terti.

e 11. quarti.

f 28. terti.

g 30. terti.

h 2. quarti.

i 27. terti.

aqua-

aqualibus omnes, ut perſpicuum eſt. In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

Similiter autem per ea, quæ dicta ſunt de pentagono ſupra, propoſ. 12. 13. & 14. deſcribemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribemus; & tandem circa datum quintidecagonum deſcribemus circulum.

SCHOLIVM.

Ex hujus problematis ſtructura, atque demonſtratione colligi poteſt methodus, atque ars quædam, qua infinitæ propemodum figuræ in dato circulo inſcribantur. Nam quia recta AB, denominatur à ternario, quod ea ſit latus trianguli æquilateri, & recta AE, à quinario, quod ea ſit latus pentagoni; ſi multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex illis duobus lateribus in circulo deſcriptis, inſcribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumq; æqualium, hac ratione. Denominator lateris AB, hoc eſt, 3. exceditur à denominatore lateris AE, id eſt, à 5. binario. Igitur arcus BE, continebit duo latera figuræ prædictæ; Ideoque diviſo arcu BE, bifariam in F, erit ſubtenſa recta BI, latus figuræ 15. laterum, angulorumq; æqualium, ut demonſtratum fuit. Hac fere arte uſus eſt Euclides in deſcribendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre hujusmodi Theorema.

Si in circulo ab eodem puncto inſcribantur duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum; continebit arcus inter illa latera incluſus tot latera alterius figuræ inſcribendæ in eodem circulo, quot unitatibus inter ſe differunt denominatores eorundem laterum: Continebit autem figura inſcribenda tot latera, angulosque æquales, quot unitates ſunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.

Inſcribantur in circulo A B C D E, *initio ſemper facto à puncto* A, *plurima latera; Hexagoni quidem* A B, *pentagoni vero AC, & quadrati* A D, *trianguli denique æquilateri* A E. *Quoniam igitur denominator lateris* A B, *nimirum 6. excedit denominatorem lateris* A C, *nempe 5. unitate; continebit arcus* B C, *inter ea latera incluſus unum latus figuræ 30. laterum, angulorumque æqualium. Nam ex multiplicatione 5. cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita eſſe, ſic demonſtrabitur. Qualium*

partium

partium æqualium 30. est tota circumferentia, talium 5. est arcus AB, sexta pars circumferentiæ; & talium 6. est arcus AC, quinta pars circumferentiæ. Igitur arcus BC, vnam talem continebit partem.

Pari ratione arcus BD, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumque æqualium. Nam denominator lateris AB, videlicet 6. superat denominatorem lateris AD, nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24.

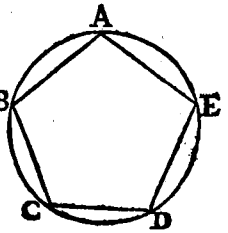
Ita quoque arcus BE, comprehendet tria latera figuræ 18. laterum.

Arcus vero CD, complectetur vnum latus figuræ 20. laterum.

Arcus autem CE, duo latera figuræ 15. laterum.

Arcus denique DE, continebit vnum latus figuræ 12. laterum angulorumque æqualium. Hac itaq; arte, ac methodo inuestigabuntur fere infinitarum figurarum latera.

Non est autem prætereundum hoc loco, omnem quidem figuram æquilateram circulo inscriptam, esse quoq; æquiangulam: at non omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam necessario æquiangulam quoque esse, nisi quando numerus angulorum ipsius est impar; vel si par est, quando duo anguli proximi æquales sunt, vel duo non proximi, dummodo vno eorum primo posito, alter occupet locum parem quemcunq;, vt quartum, (si enim secundum occuparet, esset primo proximus, quod est contra hypothesin.) sextum, octauum, decimum, &c. Qua in re nonnulli hallucinati sunt, putantes omnẽ figuram æquilateram circulo circumscriptam, necessario esse quoque æquiangulam: inter quos est Campanus Euclidis non obscuri nominis interpres.

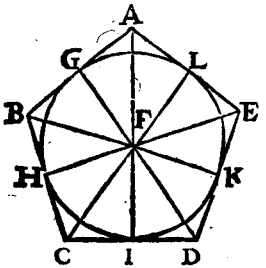


Sit enim figura æquilatera quotcunque angulorum ABCDE, circulo inscripta. Dico eam necessario esse quoque æquiangulam. Cum enim latera AB, BC, CD, sint æqualia a erunt arcus quoque AB, BC, CD, æquales; ac proinde & totus arcus, ABC, toti arcui BCD, æqualis erit. Reliqui ergo ADC, BED, in eodem circulo æquales erunt. Quocirca b, anguli ABC, BCD, illis insistentes æquales erunt:

a 28. tertij.
b 27. tertij.

Eodemque modo omnes anguli oſtendentur eſſe æquales, quot-quot illi ſint; ac propterea figura ABCDE, æquiangula eſt, ſiue angulorum numerus ſit par, ſiue impar. Quod oſtendendum erat.

Sit rurſus figura æquilatera ABCDE, quotlibet angulorum numero imparium circulo, cuius centrum F, circumſcripta. Dico eam neceſſario eſſe quoque æquiangulam. Ductis enim ex F, centro ad omnes angulos, & ad puncta contactuum, rectis, *a* erunt hæ ad latera perpendiculares. Et quoniam tangentes AG, AL, ex coroll 2. propoſ. 36. lib. 3. æquales ſunt; erunt duo latera AG, AF, duobus lateribus AL, AF, æqualia. Cum ergo & baſes FG, FL, ex centro ſint æquales; *b* erunt & anguli ad A, æquales: ac proinde angulus BAE, diuiſus erit bifariam. Non aliter oſtendemus reliquos omnes angulos figuræ ſectos eſſe bifariam. Rurſus quia duo latera AB, BF, duobus lateribus CB, BF, æqualia ſunt, angulique illis contenti, oſtenſi æquales; *c* erunt quoque baſes AF, CF, & anguli B AF, BCF, æquales. Cum ergo hi anguli ſint ſemiſſes angulorum BAE, BCD, vt oſtenſum eſt, erunt toti anguli BAE, BCD, quoque æquales. Eadem ratione erit recta CF, rectæ EF, & angulus BCD, angulo DEA, æqualis: Atque ita deinceps, ſi figura plures habeat angulos, erit ſemper tertius quiſque angulus ei, à quo tertius eſt, vno relicto in medio, æqualis: hoc eſt primus (conſtitui autem poteſt primus quicunque angulus) æqualis erit tertio, tertius quinto, quintus ſeptimo, ſeptimus nono, &c. Atque ita omnes anguli in locis imparib⁹ poſiti, æquales inter ſe erunt: Eademq; ratione omnes anguli parium locorum, vt ſecũdus, quartus, ſextus, octauus, decimus &c. æquales inter ſe erunt; cum quartus ſit à ſecundo tertius, & ſextus à quarto tertium quoque locum occupet, &c. Itaque quoniam figura propoſita habet numerum angulorum imparem, erit primus angulus, qui æqualis oſtenſus eſt omnibus angulis locorum imparium, æqualis vltimo angulo impari, qui primo proximus eſt. Hic autem vltimus angulus erit eadem ratione ſecundo angulo æqualis, qui tertius eſt ab vltimo, primo relicto in medio; & omnibus alijs à ſecundo tertium locum occupantibus, vt quarto, ſexto, octauo, decimo, &c. vſque ad penultimum. Quapropter omnes anguli figuræ propoſitæ inter ſe æquales erunt. Quod erat oſtendendum.



a 18. tertii.

b 8. primi.

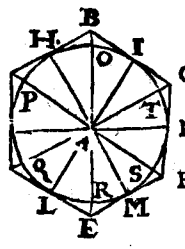
c 4. primi.

Hæc demonſtratio in figuris æquilateris circulo circumſcriptis, quæ habent numerum angulorum parem, locum non habet. Ex ea enim ſolùm concludetur, primum angulum æqualem eſſe tertio, quinto, ſeptimo, nono, & alijs loca impãria occupantibus; nunquam autem

autem probabitur, primum vltimo esse æqualem, eo quod vltimus cum parem occupet, vt in quandrangulo quartum, in hexagono, sextum, in octogono, octauum, &c. Sic etiam solum ex eadem demonstratione colligetur, angulum secundum æqualem esse quarto, sexto, octauo, decimo, & alijs loca paria occupantibus: nunquam autem ostendetur, secundum angulum esse primo æqualem, propterea quod primus locum imparem occupat. Itaq; soli anguli imparium locorum inter se & soli quoque anguli locorum parium inter se semper conuincentur æquales.

Quod si duo anguli proximi, vel etiam duo non proximi, dummodo vnus eorum in loco impari, alter vero in loco pari collocatus sit, fuerint inter se æquales, tum demum per superiorem demonstrationem cõcludetur omnium angulorum æqualitas. Nam si primus angulus æqualis sit secundo, (quando enim duo anguli proximi sunt æquales, licebit vnum eorum dicere primum, & alterum secundum,) cum ostensum sit, primum esse æqualem quoque omnibus angulis loca imparia occupantibus, secundum vero omnibus parium locorum: erunt omnes inter se æquales. Si autem primus angulus æqualis sit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo anguli non proximi sunt æquales, quorum vnus in loco impari, & alter in loco pari existat dicere licebit eorum vnum primum, & alterum vel quartum, vel sextum, vel octauum, &c. prout ab illo desiterit non autem secundum, quia secundus primo proximus est) cum primus ostensus sit æqualis omnibus alijs locorum imparium, alter vero omnibus parium locorum atque adeo & secundo angulo: erit quoque primus secundo æqualis: hoc est, duo proximi inter se æquales erunt. Quamobrem, vt proxime demonstrauimus, omnes anguli inter se erunt æquales.

Verum si dicat forsan aliquis, quanquam ex ea demonstratione colligi nequeat, omnem figuram æquilateram, cuius angulorum numerus sit par, circulo circumscriptam, esse quoque æquiangulam; non colligi tamen contrarium; ac proinde eam posse esse æquiangulam, non quidem propter illam demonstrationem, sed propter quampiam aliam: adeo vt nulla dari possit figura æquilatera circulo circumscripta, quin simul sit æquiangula, vt Campanus cum nonnullis alijs asseruit. Si, inquam, aliquis ita dicat, respondemus, infinitas figuras æquilateras angulorum numero parium circumscriptas circulo, non esse æquiangulas. Sit enim circulus ex centro A, descriptus, cuius circumferentia tribus diametris BE, CF, DG, in 6. partes æquales OP, PQ, QR, RS, ST, TO, diuidatur, quemadmodum propos. 15 in descriptione hexa-



goni traditum est. Deinde arcus OP, secetur inæqualiter in H, sitque maius segmentum OH, & minus PH. Arcui quoque OH, æquales sumantur OI, QK, QL, SM, SN, ita vt sex arcus æquales ad vtrasque partes trium semidiametrorum non proximarum, sed inter binas singulis relictis in medio, sumantur. Bruntque ad vtrasque partes semidiametrorum relictarum sex reliqui arcus PH, PK, RL, RM, TN, TI, æquales. Ductis item ex centro A, ad puncta H.K.L.M.N.I. rectis lineis, ducatur per H. ad HA. perpendicularis BC. secans semidiametros AO, AP, productas in BC, quæ circulũ tanget in H, ex coroll. prop. 16. l. 3. Coibunt autem necessario rectæ HB, AB, propterea quod duo anguli BHA, BAH, duobus rectis minores sunt. Est enim BHA, rectus, & BAH, insistens arcui OH, qui minor est quadrante, minor recto, ex scholio propos. 27. lib. 3. Iungatur quoque recta BI. Et quia duo latera AH, AB, duobus lateribus AI, AB, æqualia sunt, a anguloque continent æquales æqualibus arcubus OH, OI, insistentes: b erunt quoque bases BH, BI. & anguli HI, æquales. Cum ergo BHA. rectus sit ex constructione, erit & BIA, rectus: ac propterea recta BI, circulum tanget in I, conuenietque cum semidiametro AT, producta in G, ob angulos AIG, GAI, duobus rectis minores: Est namque AIG, ostensus rectus, at GAI, recto minor est, ex scholio propos. 27. lib 3. ob arcum TI, quadrante minorem. Et quoniam duo anguli I, A, trianguli GAI, duobus angulis H, A, trianguli CAH, æquales sunt: (Nam l, H, recti sunt, c & GAI. CAH, æquales sunt insistentes æqualibus arcubus TI, PH,) lateraque AI, AH, quibus adiacent, æqualia: d erunt quoque latera GI, GA, lateribus HC, CA, æqualia. Cum ergo & BI, ipsi BH, ostensa sit æqualis: erit tota BG, toti BC, æqualis Eadem ratione, ducta recta GN, tanget circulum in N, coibitque cum semidiametro AF, producta in F, eritque ipsi GB, æqualis. Item iuncta recta FM, circulum tanget in M, & cum semidiametro AR, producta conueniet in E, ipsique FG, æqualis erit. Similiter ducta recta EL, tanget circulum in L, & semidiametro AQ, protactæ occurret, in D, ipsique EF, fiet æqualis. Denique iuncta recta DK, eundem circulum tanget in K, & cum semidiametro AP, producta concurret in C, fietque ipsi DE, æqualis. Quod autem DK, in eodem puncto C, occurrat semidiametro AP, in quo recta BH, eidem occurrit, manifestum est. Si enim in alio puncto eam secaret, cum ducta recta CL, circulum tangeret in K, vt demonstratum est, tangerent duæ rectæ circulum in eodem puncto K: atque adeo inter peripheriam, & tangentem interciperetur ad punctum contactus vna linea recta: quod fieri non posse, e Euclides demonstrauit Est ergo hexagonum BCDEFG, circulo circum-

a 27. tertij.
b 4. primi.
c 27. tertij.
d 26. pri.
e 16. ter.

cumſcriptum, æquilaterum. At idem eſſe non æquiangulum, ita demonſtrabimus. Quoniam figura BCD, EFG, æquilatera eſt, erunt quidem per ea, quæ paulo ante monſtrauimus, anguli locorum imparium, nimirum B, D, F, inter ſe, & anguli locorum parium, vt C, E, G, inter ſe æquales: omneſque ſecti erunt bifariam à ſemidiametris: At quia tres anguli trianguli ABH, a tribus angulis trianguli ACH, æquales ſunt: ablatis rectis ad H, erunt reliqui duo reliquis duobus æquales: Eſt autem BAH, maior quam CAH, ex ſcholio prop. 27. lib 3. quod & arcus OH, maior ſit arcu PH. Igitur reliquus ABH, reliquo ACH, minor erit: qui cum ſemiſſes ſint totorum angulorum B, C, vt oſtenſum eſt: erit totus quoque CBG, toto BCD, minor. Eodemque modo toti anguli D, F, totis angulis E, G, minores oſtendentur. Non eſt ergo hexagonum BCDEFG, æquiangulum. Quod erat oſtendendum.

a 32. primi.

Eadem omnium conſtructio, & demonſtratio fieri poteſt in octogono, decagono, & aliis figuris parium laterum ſi circulus quatuor diametris ſecetur in 8. partes, vel quinque diametris in 10. &c.

Quod ſi figura æquilatera quotcunque angulorum circulo circumſcribatur per doctrinam prop 12. deſcripta nimirum prius ſimili figura intra circulum, & ductis lineis circulum tangentibus in figuræ inſcriptæ angulis, &c. vt factum eſt in pentagono propoſ. 12. tum neceſſario figura illa erit ſimul æquiangula, vt ex demonſtratione eiuſdem propoſ. liquido conſtat.

Obſeruatione quoque dignum eſt, omnem quidem figuram æquiangulam circulo circumſcriptam, eſſe etiam æquilateram: at non omnem figuram æquiangulam circulo inſcriptam neceſſario æquilateram quoque eſſe, niſi quando numerus laterum ipſius eſt impar; vel ſi par eſt, quando duo latera proxima æqualia ſunt, vel duo non proxima, dummodo vno eorum poſito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (ſi enim ſecundum occuparet, eſſet primo proximum, quod eſt cõtra hypotheſin.) ſextum, octauum, decimum, &c. Qua in re facile etiam quis hallucinari poſſit.

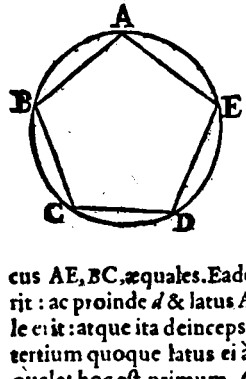
Sit enim figura æquiangula ABCDE, quotuis laterum circulo, cuius centrum F, circumſcripta. Dico eam eſſe quoque neceſſario æquilaterã. Ductis enim ex F, centro ad puncta contactuum rectis FG, FH, FI, FK, FL, b quæ ad latera figuræ ſunt perpendiculares: emittantur quoque ex centro F, ad angulos figuræ rectæ FA, FB, FC, FD, FE. Et quoniam tantes G, AL, ex 2. coroll. propoſ. 36. lib. 3. æquales ſunt, erunt duo latera G,

b 28. ter.

AF. trianguli AGF, duobus lateribus AL, AF, trianguli ALF, æqualia: Sunt autem & baſes FG, FL, ex centro æquales. a Igitur anguli quoque ad A, illis lateribus comprehenſi æquales ſunt, ideoque angulus BAE, ſectus eſt bifariam. Non aliter oſtendemus, reliquos angulos figuræ bifariam, ſectos eſſe, ac proinde cum toti anguli ponantur æquales, & eorum ſemiſſes æquales erunt. Quocirca duo anguli AG, trianguli AFG, duobus angulis B, G, trianguli BFG, æquales erunt: Eſt autem latus FG, vni æqualium angulorum oppoſitum commune. b Igitur latera quoque AG, BG, æqualia erunt: atque ideo latus AB, ſectum erit bifariam in G. Eodem modo probabis, reliqua figuræ latera ſecta eſſe bifariam. Quia ergo AG, AL, dimidiæ æquales ſunt, erunt quoque totæ lineæ, AB. AE, æquales. Eademque ratione AB, BC, & BC, CD, & CD, DE, & DE, EA, æquales erunt. Quamobrem, figura ABC DE. æquilatera eſt ſiue numerus laterum ſit par, ſiue impar. Quod erat demonſtrandum.

a 8. pri.

b 26. pri.



Sit rurſus figura æquiangula AB, CDE, quotuis laterum numero imparium circulo inſcripta. Dico eam neceſſario eſſe quoque æquilateram. Quoniam enim anguli BAE, ABC, ponuntur æquales; c erunt arcus BCE, ADC, quibus inſiſtunt, æquales: quibus demptis ex communi circulo æquales quoque erunt reliqui arcus BAE, ABC. Dempto ergo communi arcu AB, erunt & reliqui arcus AE, BC, æquales. Eadem ratione arcus BC, arcui DE, æqualis erit: ac proinde d & latus AE, lateri BC, & latus BC, lateri DE, æquale erit: atque ita deinceps ſi figura plura habeat latera, erit ſemper tertium quoque latus ei à quo tertium eſt, vno relicto in medio, æquale: hoc eſt, primum (conſtitui autem quoduis latus poteſt primum) æquale erit tertio, tertium quinto, quintum ſeptimo, ſeptimum nono, &c. atque in hunc modum omnia latera in locis imparibus poſita, æqualia inter ſe erunt: Eademque ratione omnia latera parium locorum, vt ſecundum, quartum, ſextum, octauum, decimum, &c. æqualia inter ſe erunt, cum quartum ſit à ſecundo tertium, & ſextum à quarto tertium item occupet locum, &c. Itaque quoniam propoſita figura numerum habet imparem, æquale erit vltimum primo, cui proximum eſt. Hoc autem vltimum latus eadem ratione æquale erit ſecundo, quod ab vltimo tertium eſt, primo in medio relicto: & omnibus alijs à ſecundo tertium locum occupantibus, vt quarto, ſexto, octauo, &c. vſque ad penultimum. Quocirca omnia latera figuræ propoſitæ inter ſe æqualia erunt, quod oſtendendum erat.

c 26. ter.

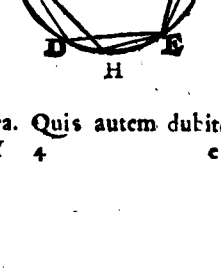
d 26. tertij.

Hæc

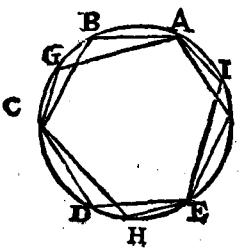
Hæc etiam demonſtratio in figuras æquiangulas parium laterum circulo inſcriptas non quadrat. Ex ea enim ſolum concludetur, primum latus eſſe æquale tertio, quinto, ſeptimo, & alijs loca imparia occupantibus; nunquam autem per eam demonſtrabitur, primum vltimo eſſe æquale, propterea quod vltimum occupat locum parem, vt in quadrangulo quartum, in hexagono ſextum, &c. Pari ratione eadem demonſtratio conuincet tantum, latus ſecundum æquale eſſe quarto, ſexto, octauo, & alijs loca paria poſſidentibus, at per eam nunquam colligetur, ſecundum latus eſſe æquale primo, eo quod primum in loco impari locetur. Itaque ſola latera imparium locorum inter ſe & ſola latera in paribus locis poſita inter ſe conuincentur eſſe æqualia.

Quod ſi duo latera proxima, vel etiam duo non proxima, dummodo vnum eorum in loco impari, alterum vero in loco pari poſitum ſit, fuerint inter ſe æqualia, tum demum ſuperior demonſtratio concludet omnium laterum æqualitatem. Nam ſi primum latus ſecundo ſit æquale, (quando enim duo proxima latera æqualia ſunt, dici poterit vnum primum, & alterum ſecundum) cum demonſtratum ſit, primum æquale eſſe quoque omnibus lateribus locorum imparium, ſecundum vero omnibus parium locorum; perſpicuum eſt, omnia inter ſe eſſe æqualia. Si autem primum latus æquale ſit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo latera non proxima ſunt æqualia, ita tamen, vt vnum in loco impari, & alterum in loco pari reperiatur, licebit vnum eorum appellare primũ, & alterum vel quartum, vel ſextum, &c. prout ab illo deſtiterit, non autem ſecundum, quia ſecundum primo proximum eſt.) cum primum oſtenſum ſit æquale omnibus alijs poſitis in locis imparibus, alterum vero omnibus loca paria occupantibus, atque idcirco & ſecundo lateri; erit quoque primum ſecundo æquale: ac proinde duo proxima inter ſe æqualia erunt. Vt ergo proximè demonſtratum eſt, omnia latera erunt inter ſe æqualia.

Si quis autem dubitet, dari poſſe figuram æquiangulam parium laterum circulo inſcriptam, quæ non ſit æquilatera (quanquam enim ſuperior demonſtratio non probet omnia latera eſſe æqualia, ſi omnes anguli æquales ſint; contrarium tamen ex ea inferre non licet.) demonſtrabimus id Geometrice hac ratione. Primum quidem conſtat id in figuris quadrilateris. Nam figura altera parte longior æquiangula eſt, quippe cum omnes eius anguli ſint recti, ſed non æquilatera. Quis autem dubitet,



eam circulo posse inscribi? Deinde vero hexagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDEF, in circulo descriptum; sumaturque in arcu BC, quodvis punctum G, & arcui BG, in tertio arcu ab eo arcus æqualis DH; Item in quinto ab eo arcus æqualis FI, junganturque rectæ AG, GC, CH, HE, EI, IA. Dico hexagonum AGCHEI, æquiangulum esse, at non æquilaterum. Quod enim sit æquiangulum sic ostendemus. Anguli B, G, *a* æquales sunt in eodem segmento ABC. Eadem ratione æquales sunt anguli D, H, & F, I. Præterea quia arcus BG, DH, æquales sunt, per constructionem; addito communi GD, erunt toti arcus BCD, GCH, æquales. Igitur reliqui ex circulo arcus BFD, GFH, æquales erunt; *b* ac proinde anguli BCD, GCH, illis insistentes æquales quoque erunt. Non aliter ostendemus & angulos DEF, HEI, & FAB, IAG, æquales inter se esse. Ergo sex anguli hexagoni AGCHEI, sexangulis hexagoni ABCDEF, æquales sunt, singuli singulis: ideoque cum hoc ponatur æquiangulum, erit quoque illud æquiangulum. Quod autem non sit æquilaterum, ita probabimus. Latus AG, latere AB, maius est, & latus GC, latere BC, minus, ex scholio propos. 29. lib. 3. Item eadem ratione latera CH, EI, lateribus CD, EF, maiora sunt, & latera HE, IA, lateribus DE, FA, minora. Cum ergo latera AB. BC, CD, DE, EF, FA, æqualia ponantur, erunt AG, GC, CH, HE, EI, IA, inæqualia: quanquam AG, CH, EI, inter se, & GC, HE, IA, inter se, relicto semper vno in medio, æqualia sint, vt supra ostendimus.



a 21. tertii.

b 27. tertij.

Idem prorsus eodem modo demonstrabitur fieri posse in octogono, decagono, & aliis figuris parium laterum, si in circulo inscribantur prius octogonum, decagonum, & aliæ figuræ æquilateræ, atque æquiangulæ.

Quod si figura inscribatur circulo per doctrinam propos. 11. 15. & 16. erit ea perpetuo & æquiangula & æquilatera, vt ex earum propositionum demonstrationibus perspicuum est.

Porro qualemcunque figuram æquilateram & æquiangulam in circulo nouerimus inscribere, talem etiam sciemus describere circa circulum, & in ea circulum quoq; inscribere, & circa eandem describere circulum, si artem imitemur, quæ tradita fuit de pentagono, propos. 12, 13. & 14.

Rursus inscripta figura quacunq; æquilatera & æquiangula in circulo, inscribetur in eodem figura, quæ habeat latera duplo plura. Diuisis etenim arcubus, quos latera subtendunt, bifariam, & subtensis rectis lineis, constat propositum. Vt per triangulum æquilaterũ inscriptum inscribetur & hexagonum. & ideo dodecagonũ, figura

24. la-

4. laterum, &c. Sic quoque ex quadrato in circulo descripto, inscribetur octogonum, atque adeo figura 16. laterum, figura 32. 64. 128. laterum, &c.

Cæterū omnes figuræ æquilateræ & æquiangulæ in circulo inscribi possunt beneficio Isoscelium triangulorum, ut recte hoc loco nonnulli Euclidis interpretes monent.

Imparium enim laterum figuræ inscribentur beneficio triangulorum Isoscelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt beneficio Isoscelis, cujus uterque angulorum ad basin æqualis est ei, qui ad verticem, descripti in circulo inscribetur prima figura imparium laterū, hoc est, triangulum æquilaterum. Nam Isosceles hujusmodi, triangulum æquilaterum erit. Quod si in circulo inscribatur Isosceles, cujus uterque angulorum ad basin duplus sit ejus, qui ad verticem, inscribetur secunda figura imparium laterum, nimirum pentagonum, in circulo, si duo anguli æquales secentur bifariam, veluti propos. 11. fuit ostensum. At Heptagonum, tertia figura laterum imparium, inscribetur in circulo, per triangulum Isoceles habens utrumque angulorum ad basin triplum ejus, qui ad verticem, si duo ejus anguli æquales dividantur in tres angulos æquales ei qui ad verticem. Ita quoque figura quarta imparium laterum, quale est Hennagonum, in circulo inscribetur beneficio Isoscelis, cujus uterque angulorum ad basin quadruplus est ejus, qui ad verticem, si uterque distribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad verticem, &c.

Divisio autem hæc angulorum ad basin in partes æquales perfacilis est. Nam si angulo ad verticem constituantur ad basin tot anguli æquales ordine, quot unitates sunt in numero proportionis multiplicis, quam uterque angulorum æqualium habet ad reliquum, divisus erit angulus in partes æquales. Verum descripto hujusmodi triangulo Isoscele in circulo, describetur figura in circulo sine divisione angulorum ad basin, si basi accommodentur rectæ æquales in circulo. Basis enim semper est unum figuræ latus, ut in Pentagono patuit.

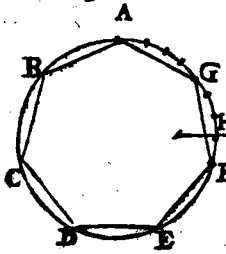
Parium vero laterum figuræ in circulo inscribentur, beneficio Isoscelium, quorū anguli æquales ad basin multiplices sesqui alteri sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorū. Vt quadratum constituens primam figuram parium laterum, inscribetur beneficio Isoscelis, cujus uterque angulorum ad basin sesquialter est anguli ad verticem. Nam angulus ad verticē insistit quartæ parti circumferentiæ. Cum enim duo anguli ad basin simul contineant tres angulos æquales, ei, qui ad verticem, quod quilibet semel eum contineat, & dimidiatam insuper ejus partem; subtendent ipsi tres partes circumferentiæ, & idcirco angulus ad verticem unam duntaxat. Hexagonum, hoc est, secunda figura laterum parium, inscribetur beneficio Isoscelis, cujus uterq; angulorū ad basin duplus sesquialter est ejus,

qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticem, insistit sextæ parti circumferentiæ, cum reliqui anguli simul compositi contineant ipsum quinquies; propterea quod quilibet bis eum continet, & dimidiatam ejus insuper partem. Ita quoq; Octogonum, id est, tertia figura laterum parium, inscribetur beneficio Isoscelis habentis utrumq; angulorũ ad basin triplum sesquialterũ anguli ad verticẽ.

Si igitur inventa fuerit ars, qua Isoscelia triangula construantur habentia angulos ad basin multiplices eorum, qui ad verticem sunt, angulorum, quemadmodum Euclides Isosceles fabricavit habens utrumque angulorum ad basin duplum anguli ad verticem, facile in circulo describentur figuræ omnes laterum imparium. Et si arcus earum dividantur bifariam, inscribentur quoque omnes figuræ parium laterum, post quadratum, atque adeo circumferentia cujuslibet circuli in quotlibet æquales partes Geometrice dividetur. Quæ res summam Astronomis afferret utilitatem. Verum hæc ars adhuc ignota extitit. Non enim recte sibi eam vendicat Orontius Finæus in libello hactenus, ut ipse ait, desiderato de absoluta figurarum rectilinearum omnium descriptione intra circulum, &c. cum ejus demonstrationes falsæ sint, ac sophisticæ, ut Geometrice ostensum est à Petro Nonio Lusitano in libello de erratis Orontii.

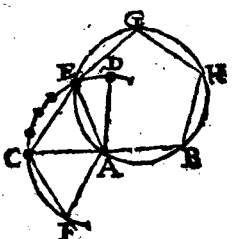
Nos tamen ad finem lib. 6. ex Pappo Alexandrino lineam quandam inflexam Geometrice describemus, qua non solum triangula Isoscelia, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant datam proportionem, construantur, ac proinde omnes figuræ æquilateræ, & æquiangulæ in circulo describantur: verum etiam arcus quivis circuli distribuatur in quotcunq; partes æquales, sive is quadrans sit, sive non. Quin etiam ejusdem lineæ inflexæ beneficio jucunda operatione circulus quilibet sine ullo negotio in quadratũ æquale commutabitur, ut ibidem dicemus. Quæ res ad hunc usque diem animos Mathematicorum tenuit suspensos.

Sed doceamus, si placet, qua etiam via figura quævis æquilatera, & æquiangula circulo inscribatur sine triangulis Isoscelibus, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant proportionem datam. Sit ergo in circulo ABCDEFG, inscribendum heptagonum æquilaterum, & æquiangulum. Secetur ejus quadrans AH, in septem partes æquales, in tot videlicet, quot latera, angulosve figura inscribẽda continet. Secabis autem quadrantem AH, in propositas partes æquales vel ex iis, quæ ad finem lib. 6. nos demonstraturos diximus, vel beneficio circini, dilatando ejus crura modo magis, modo minus, donec reperias



perias eorum distantiam partiri quadrantem in partes optatas. Facilius enim quadrans in quotuis æquales dividetur partes, quam tota circumferentia, quod sæpius attentando, & quasi repetendo opus, clarius appareat in parva magnitudine, quam in magna, quantum detrahi, vel addi debeat parti uni beneficio circini acceptæ, si ea partē desiderata non offerat. Secto quadrante in septē partes æquales, vel in plures si figura pluriū laterū desideretur, erit recta linea A G, quæ quatuor ejusmodi partes subtendit, latus figuræ inscribendæ. Quoniam enim in tota circumferentia quater tot partes æquales continentur, in quot quadrans divisus est, continebitur aggregatum ex quatuor partibus toties in tota circumferentia, quoties una pars in quadrante: quia quælibet pars cum aliis tribus, quarum singulæ in singulis aliis tribus quadrantibus accipiantur, efficit aggregatum ex quatuor partibus. Quod etiam ita perspicuum fiet. Quoniam partes eandem proportionem habent, quam earum æque multiplicia, ut ab Euclide demonstratur lib. 5. propos. 15. (Liceat enim huc accommodare eam propos. cum ex antecedentibus nullo modo pendeat.) ita se habebit una pars ad quadrantem, ut quadruplum unius partis, hoc est, arcus AG, ad quadruplum quadrantis, id est, ad totam circumferentiam. Qualis ergo pars quadrantis est una illarum, in quas quadrans divisus est, talis erit arcus AG, totius circumferentiæ. Atque ita si quadrans divisus sit in 7. partes, continebuntur ejusmodi partes 28. in tota circumferentia. Igitur 4. efficient $\frac{4}{28}$ hoc est, $\frac{1}{7}$ totius circumferentiæ. Ita quoque si quadrans sectus sit in 11. partes, continebuntur ejusmodi partes 44. in tota circumferentia: atque adeo 4. efficient $\frac{4}{44}$. hoc est, $\frac{1}{11}$ totius circumferentiæ: & sic de cæteris. Itaque si arcui A G, quatuor partium abscindātur, arcus continue æquales, eisdemque arcubus rectæ subtendātur inscripta erit circulo figura proposita, ut ex demonstratis liquet.

Iam vero si supra datam rectam lineam quævis figuræ æquilatera, & æquiangula describenda sit, efficiemus id hac ratione. Sit supra datam rectam A B, constituendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Producta B A, ad C. ut A C, ipsi AB, æqualis sit, describatur ex A, per C, arcus circuli: ductaque AD, perpendiculari ad A C, ut quadrans sit CD, ex scholio propos. 27. lib. 3. dividatur quadrans C D, in quinque partes æquales, in tot videlicet, quot laterum figura construenda sit: quarum 4. sint CE, jungaturque recta A E, quæ ipsi AB, æqualis erit. Dico angulum BAE, æqualem esse angulo pentagoni æquilateri & æquianguli. Sumpto enim arcu



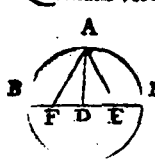
CF,

CF, æqualia arcui CE, jungantur rectæ CE, CF. Et quoniam CE, recta subtendens 4. partes quadrantis, latus est pentagoni æquilateri & æquianguli: ut proxime demonstravimus, in circulo ECF, describendi, erit CF, alterum latus: ac proinde duo latera EC, FC, comprehendent angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ECF. Quoniã vero, ducta recta AF, duo latera EC, CA, duob⁹ lateribus FC, CA, æqualia sunt, & basis item æquales AE, AF *a* erunt anguli ECB, FCA, æquales. Cum ergo, *b* & anguli ACE, AEC, sint æquales: erit & ACF, ipsi AEC, æqualis: additoque communi ACE, totus angulus ECF, duobus angulis ACE, AEC, æqualis erit. Est autem *c* externus BAE, eisdem internis ACE, ABC, æqualis. Igitur & ECF, BAE, inter se æquales erunt. Cum ergo ECF, sit angulus pentagoni, erit quoque BAE, pentagoni angulus. Quocirca si circa tria puncta, B, A, E, circulus describatur, & rectis AB, AE, *d* rectæ æquales in eo accommodentur BH, HG, GE, descriptum erit pentagonum æquilaterum & æquiangulum descriptum in circulo ABHGE, ac proinde supra datã rectam AB. Quod faciendum erat. Non est autem dubitandum, quin rectis AB, AE, æquales rectæ possint in circulo accommodari, quæ totam circumferentiam absoluant. Nam angulus pentagoni BAE, insistit tribus quintis partibus totius circumferentiæ, singula autem latera AB, AE, singulas quintas partes subtendunt, ac proinde singulæ BH, HG, GE, singulas quoque quintas partes subtendent, cum ipsis AB, AE, sumptæ sint æquales, propterea que totum arcum BGE, continentem tres quintas partes absoluent. Eadem ratio est de aliis figuris æquilateris, & æquiangulis.

a 8. *pri.*
b 5. *pri.*
c 32. *primi.*
d 1. *quarti.*

Si forte in promptu habeamus aliquam figuram æquilaterã, & æquiangulam, cui supra datam rectam lineam desideramus constituere similem, sive ea in circulo aliquo descripta sit, sive non: satis erit uni ejus angulo æqualem angulum constituere BAE, in extremo datæ lineæ AB. Si namque, posita recta AE, æquali ipsi AB, per tria puncta B, A, E, circulus describatur, perficiemus figuram propositam, ut ante diximus.

Quoniam vero longa est, atque difficilis ea inscriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo, quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annectere praxin quandam, qua una eademque opera Ptolomæus lib. 1. magnæ constructionis, in circulo dato inscribit Pentagonum, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus ABC, cujus centrum D: Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde divisa semidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abscindatur EF. Itaque si ducatur recta AF, erit AF, latus Pentagoni, &



DF,

DF, latus Decagoni in dato circulo inscribendi, ut ipse demonstrat. Cæterum cum demonstratio hujus rei pendeat ex 13. lib. Euclidis, non videtur hoc loco scribenda, sed in proprium locum, utpote in librum 13. differenda.

Non erit etiam præter institutum nostrum, aut ab hoc libro alienum, si sequens adhuc theorema adjungamus, videlicet.

Si bifariæ sectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis conjungantur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoq; & æquiangula totidem laterum in illa figura idem centrum habens.

Centrum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ appellatur punctum illud, è quo circulus figuræ inscribitur, aut circumscribitur: ut idem sit centrum circuli, & figuræ.

Sit igitur figura æquilatera, & æquiangula ABCDEF, cujus latera bifariam secentur in G, H, I, K, L, M, junctis rectis GH, HI, IK, KL, LM, MG. Dico figuram GHIKLM, inscriptam figuræ ABC, DEF, æquilateram esse quoque, atque æquiangulam, idemque centrum habere. Æquilatera quidem erit, quoniam ejus latera cum subdant angulos æquales comprehensos æqualibus rectis, utpote dimidiis laterum æqualium, æqualia sunt. Quoniam vero tam tres anguli AMG, GML, LMF, quam tres FLM, MLK, KLE, *b* duobus sunt rectis æquales: Sunt autem AMG, LMF, FLM, *b* 13. pri. KLE, *c* inter se æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, *c* 8. pri. subtendanturque à basibus æqualibus: Erunt reliqui anguli GML, MLK, æquales. Eodemque argumento concludemus, reliquos angulos & hisce, & inter se æquales esse. Æquiangula igitur quoque est figura GHIKLM.

24. pri.

Quod autem idem habeat centrum, ita ostendetur. Ex centro N, figuræ ABCDEF, ad omnes angulos figuræ inscriptæ ducantur rectæ NG, NH, &c. junganturque rectæ NA, NB. Quoniam igitur AG, GN, latera trianguli AGN, æqualia sunt lateribus BG, GN, trianguli BGN: suntque bases AN, BN, cum sint semidiametri circuli circa figuram descripti, æquales: *d* Æquales erunt anguli AGN, *d* 8. pri. BGN, ideoque recti. Quare NG, perpendicularis est ad latus AB: Eodemque modo reliquæ NH, NI, &c. perpendiculares erunt ad latera BC, CD, &c. Quæ cum ex defin 4. lib. 3. ostendant distantias rectarum AB, BC, &c. æqualium à centro N: *e* æquales ad invicem *e* 14. tert. erunt. Circulus igitur ex N intervallo NG, descriptus per reliquos angulos H, I, K, L, M, incedet: Ac propterea N, centrum erit figuræ GHIKLM, hoc est, circuli circa eam figuram descripti. Quod est propositum.

Neque verò & hoc omittendum est, inter omnes figuras æquilate-

lateras, & æquiangulas, ſolum triangulum, quadratum, & hexagonum replere locũ, hoc eſt, aliquot triangula, vel quadrata, vel hexagona, ita in plano poſſe inter ſe aptari, ut inter eorum angulos nihil ſit vacui ſed planam ſuperficiem conſtituant. Nam ſex anguli in triangulo æquilatero, & quatuor in quadrato: & tres in hexagono æquilatero, & æquiangulo, æquales ſunt quatuor rectis, quantum nimirum eſt ſpatium circa punctum quodlibet in plano, ut ad propoſ. 15. lib. 1. oſtendimus. Quoniam enim unus angulus trianguli æquilateri continet $\frac{4}{3}$. unius recti, quod omnes tres contineant $\frac{3}{3}$. unius recti, hoc eſt, duos rectos, continebunt ſex ejusmodi anguli $\frac{12}{3}$. unius recti, id eſt, quatuor rectos. Item quatuor anguli in quadrato ſunt quatuor recti. Denique quia unus angulus hexagoni æquilateri, & æquianguli continet $\frac{8}{3}$ unius recti, quod omnes ſex contineant $\frac{24}{3}$. unius recti, hoc eſt, 8. rectos, continebunt tres ejusmodi anguli $\frac{12}{3}$. unius recti, id eſt, 4. rectos. Quod in aliis figuris planis æquilateris, & æquiangulis non cernitur. Nam tres anguli in pentagono æquilatero, & æquiangulo æquales ſunt $\frac{108}{5}$ unius recti, hoc eſt, angulis rectis $3\frac{3}{5}$. dũtaxat, at quatuor æquales ſunt $\frac{216}{5}$. unius recti, id eſt, angulis rectis $4\frac{4}{5}$. propterea quod omnes quinque æquivalent 6. rectis, hoc eſt, conſtituunt $\frac{30}{5}$. unius recti, atq; idcirco unus continet $\frac{6}{5}$. unius recti, &c. Tria igitur pentagona locum replere non poſſunt, cum trium in plano aptatorũ tres anguli minores ſint quatuor rectis: quippe qui efficiant tantum tres angulos rectos cum tribus quintis. Eadem ratione quatuor pentagona locum replere nequeunt, propterea quod quatuor in plano aptatorum quatuor anguli majores ſunt quatuor rectis, cum æquales ſint quatuor angulis rectis, & inſuper quatuor quintis unius recti, ut dictum eſt. Pari ratione neque ex heptagonis locus poterit repleri. Nam tres anguli cujuslibet heptagoni æquilateri, & æquianguli æquales ſunt $\frac{30}{7}$ unius recti, hoc eſt, angulis rectis $4\frac{2}{7}$. Quoniam enim omnes ſeptẽ anguli 10. rectis ſunt æquales, hoc eſt, cõplectuntur $\frac{70}{7}$. uni^{s} recti; fit, ut un^{s} cõtineat $\frac{10}{7}$ uni^{s} recti, hoc eſt, unũ rectũ, & præterea $\frac{3}{7}$. uni^{s} recti: ac proinde tres cõtineãt quatuor rectos, & $\frac{3}{7}$. uni^{s} recti. Non ergo tribus heptagonis in plano aptatis, eorũ tres anguli locũ replere poſſunt, cum quatuor rectos excedant. A fortiori neque quatuor heptagona locum replebunt: neq; tria octogona æquilatera, & æquiangula, aut quatuor, neq; tres aut quatuor figuræ æquilateræ, atq; æquiangulæ plurium laterum, quam octo, quippe cum ſemper tres anguli ſimul ſumpti ſint majores quatuor rectis, propterea quod majores ſunt tribus angulis heptagoni æquilateri & æquianguli, quos oſtendimus quatuor rectis eſſe majores. Solum ergo triangulum æquilaterum, quadratum, & hexagonum æquilaterum atque æquiangulum, ſuis angulis locum replere poſſunt, ut diximus.

FINIS ELEMENTI QVARTI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM.

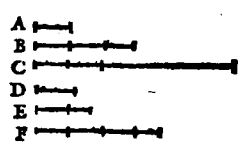
DEFINITIONES.

I.

Pars eſt magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum minor metitur majorem.

EGIT in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua abſolute conſiderata; Nunc vero duobus ſequentibus de eadem diſputat non abſolute, ſed prout una ad aliam refertur, hoc eſt, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, non deſcendendo ad ullam quantitatis ſpeciem, ut ad lineam, ſuperficiem, vel corpus aliquod. Sexto vero oſtendit in ſpecie, quamnam proportionem habeant inter ſe lineæ, anguli, circumferentiæ circulorum, triangula, & aliæ figuræ planę. Vt igitur inſtitutum ſuum ſeruet, definit prius vocabula, quæ ad demonſtrationes proportionum adhibentur.

Itaq; ait magnitudinem illam minorem, quæ majorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Vt quoniam magnitudo A, ter ſumpta, metitur magnitudinem B; ſexies autem ſumpta, magnitudinem C, dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C. At vero quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, ſed ſumpta bis, excedit magnitudinem E, & ſumpta ter, deficit à magnitudine F, ſumpta autem quater, eandem ſuperat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.



Duplex

Duplex autem est pars apud Mathematicos: Quædam metitur suum totum, ita ut aliquoties repetita totum suum constituat; qualis est numerus 4. cum 8. 12. 16. 20. &c. collatus; Quædam autem non metitur suum totum, sed aliquoties sumpta ipsum vel excedit, vel ab eodem deficit: cujusmodi pars est numerus 4. collatus cum 6. 7. 9. 10. 18. 38. &c. Prior dici solet aliquota, posterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc loco definit partem aliquotam duntaxat, tum quia hæc solum metitur suum totum; (*Aliquanta* enim non dicitur metiri suum totum) tum etiam, quia ut ex lib. 7. constabit, pars aliquanta in numeris non dicitur ab Euclide pars, sed partes. Nam numerus 4. non est pars hujus numeri 6. sed duæ partes tertiæ, quales sunt duo binarii. Accedit etiam, quod in omnibus demonstrationibus hujus quinti libri pars sumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vnde mirum sane est, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos est etiam Peletarius, contendere, partem hoc loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quam aliquantam: cum tamen in demonstrationibus etiam ipsi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II.

Multiplex autem est major minoris, cum minor metitur majorem.

Vt in superiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo C, multiplex est magnitudinis A: quoniam hæc utramq; illam metitur. At vero neq; magnitudo E, neq; magnitudo F, multiplex est dicenda magnitudinis D; propterea, quod hæc neutram illarum metitur. Itaq; pars ad multiplex refertur, & multiplex ad partem, ita ut minor quantitas mensurans majorem, dicatur pars majoris: Major vero mensurata à minori, dicatur, minoris multiplex.

Satis autem perspicue ex hac definitione colligitur, partem antea definitam esse eam, quæ perfecte metitur suum totum. Si enim 6. diceretur metiri 7. ut vult Peletarius, esset juxta hanc definitionem, 7. multiplex ipsius 6. quod est absurdum.

Cæterum quando duæ magnitudines minores duas alias majores æq; metiuntur, hoc est, una minor in una majore toties continetur, quoties altera minor in altera majore: dicuntur duæ hæ majores duarum illarum minorum æquemultiplices. Quod idem dices, si plures minores æque metiantur plures majores.

III.

Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua quædam, secundum quantitatem, habitudo.

Quando duæ quantitates ejusdem generis, ut duo numeri, duæ

duæ lineæ, duæ ſuperficies, duo ſolida, &c. inter ſe comparantur ſecundum quantitatem, hoc eſt, ſecundum quod vna maior eſt, quam altera, vel minor, vel æqualis; appellatur huiuſmodi comparatio, ſeu habitudo mutua. Ratio ſeu (vt alijs placet) Proportio. Itaque ſi comparetur linea aliqua cum ſuperficie quapiam, vel numerus cum linea, non dicetur ea comparatio proportio, quod neque linea & ſuperficies; neque numerus, & linea ſint eiuſdem generis quantitatis. Similiter ſi conferatur linea aliqua cum alia linea ſecundum qualitatem, hoc eſt, ſecundum quod vna eſt alba & altera nigra; aut quod vna eſt calida, & altera frigida, &c. quamuis ambæ ſint eiuſdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non fit ſecundum quantitatem.

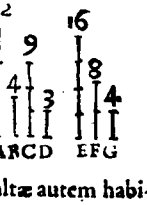
Quanquam autem in ſolis quantitatibus proprie reperitur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam ſapiunt quantitatis, cuiuſmodi ſunt tempora, ſoni, voces, loca, motus, pondera, & potentiæ, proportionem quoq; dicuntur habere, ſi eorum habitudo conſideretur ſecundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore eſſe maius, vel minus, vel duo tempora, eſſe æqualia &c. appellabitur eiuſmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc conſiderantur, veluti quantitates quædam.

Cæterum in omni proportione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs antecedens proportionis; Ea verò, ad quam alia refertur, conſequens proportionis dici ſolet. Vt in proportione lineæ 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6 palmorum dicitur antecedens proportionis, at linea 3. palmorum, proportionis conſequens. Quod ſi è contrario conſideretur proportio lineæ 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens linea 3. palmorum, conſequens vero linea 6 palmorum, & ſic in cæteris.

IV.

Proportio vero eſt rationum ſimilitudo.

Quod hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία, pleriſque autem Latinis proportionalitas dicitur. Quēadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter ſe, dicitur proportio; Ita comparatio duarum vel plurium proportionum inter ſe, proportionalitas ſolet nuncupari. Vt ſi proportio quantitatis A, ad quātitatem B, ſimilis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter has proportiones proportionalitas. Eodem modo, ſi ſimilis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G,



appellabitur hæc ſimilitudo proportionalitas. Multæ autem habitudines proportionum, ſeu proportionalitates, (Nos enim cum pluribus comparationem duarum quantitatum, proportionem appellabimus; habitudinem autem proportionum, Proportionali-

tatem)à ſcriptoribus,præſertim Boëtio & Iordano, deſcribuntur; inter quas primum ſemper locum obtinuerunt apud Veteres Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Muſica, ſeu Harmonica, de quibus paulo poſt dicemus. Verum Euclides de ſola Geometrica agit hoc libro; quæ quidem duplex eſt, continua altera, in qua ſingulæ quantitates intermediæ bis ſumuntur, ita vt nulla fiat proportionum interruptio, ſed quælibet quantitas intermedia ſit & antecedens, & conſequens; Antecedens quidem quantitatis ſubſequentis, conſequens vero quantitatis antecedentis. Vt ſi dicatur, quæ eſt proportio E, ad F, ea eſt F, ad G; vocabitur hæc proportionalitas, continua Altera vero diſcreta, ſeu non continua, in qua ſingulæ quantitates intermediæ ſemel tantum accipiuntur, ita vt fiat proportionum interruptio, nullaque quantitas ſit & antecedens, & conſequens, ſed vel antecedens tantum, vel conſequens tantum. Vt ſi dicatur, quæ eſt proportio A, ad B, ea eſt C, ad D; appellabitur proportionalitas hæc, diſcreta, ſiue non continua.

DE PROPORTIONIS Diuiſionibus.

Operæ pretium eſſe arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam ſint genera porportionum apud Mathematicos, & quænam ſint præcipuæ proportionalitates, earumque proprietates, vel ob hanc præcipue vtilitatem, vt ea, quæ his duobus libris ab Euclide demonſtrantur de proportionibus magnitudinum, rebus poſſint materialibus accommodari, quando opus fuerit, & tum ea, quæ à Mathematicis de proportionibus dicuntur, tum ea, quæ à Philoſophicis cum Ariſtotele de proportione motuum diſputantur, intelligi. Vt autem maior vtilitas, ac voluptas ex admirabilibus proportionum affectionibus percipi poſſit, inſtituemus paulo vberiorem tractationem in hac poſteriori editione, quam in priori: reijcientes nihilominus innumera propemodum quæ dici poſſent, in plenioré noſtram Arithmeticam, vbi omnia genera Proportionalitatum diligentiſſime perſequemur.

Proportio igitur ab Euclide definita diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis eſt ea, quæ in numeris poteſt exhiberi, qualis eſt proportio lineę 20. palmorum, ad lineam 10. palmorum. Hæc enim proportio in hiſce numeris 20. & 10. oſtenditur. Irrationalis vero proportio ea eſt, quæ in numeris exhiberi nequit, qualis

qualis est proportio diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiusdem quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non potest, vt in 10. lib. ab Euclide demonstratur. Alij dicunt, proportionem rationalem eam esse, quam habent quæuis duæquantitates commensurabiles: Irrationalem vero eam, quam habent duæ quælibet quantitates incommensurabiles. Dicuntur autem quantitates incommensurabiles, quæ habent vnam communem partem aliquotam seu quas eadem mensura communis metitur. Cuiusmodi sunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam linea 4. palmorum est vtriusque pars aliquota, similiter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quam 2. palmorum metitur lineam 20 palmorum; ita quoque eadem linea tum 4. tum 2. palmorum lineam 8. palmorum mensurat. Non aliter omnes numeri, commensurabiles dicentur, quia saltem vnitas omnes metitur. Quantitates vero incommensurabiles dicuntur, quæ nullam habent communem partem aliquotam, seu quarum nullam mensuram communem contingit reperiri. Cuiusmodi sunt diameter, & latus eiusdem quadrati. Quamuis enim quælibet harum linearum infinitas habeat partes aliquotas, vtpote partem dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota vnius, quantumuis minima, alteram metiri potest, vt demonstratur ab Euclide lib 10. propos. vltima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommensurabiles ostenduntur, præter illas duas. Itaque in numeris inuenitur sola proportio rationalis; At in quantitate continua tam rationalis, quam irrationalis proportio continetur.

Alio modo diuidi solet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Æqualitatis proportio, est inter duas quantitates æquales, vt inter 20. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorum, & lineam 10. palmorum, &c. Inæqualitatis vero proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, vt inter 20. & 10. inter 8. & 40. inter lineã 6. palmorum, & lineã 2. palmorum, &c. Habẽt autem hæc duo proportionum genera cum superioribus duobus eam connexionem, vt omnis proportio æqualitatis sit necessario rationalis, sed non contra. Omnis item

proportio irrationalis neceſſario ſit proportio inæqualitatis, ſed nõcõtra. Ex quo manifeſtũ eſt minus rectè à quibuſdam diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis ſit neceſſario æqualitatis, inæqualitatiſve, non tamen contra omnis proportio huiuſmodi eſt rationalis; cum multæ proportiones inæqualitatis ſint irrationales. Pari ratione perſpicuum eſt, quoſdam non ſatis recte diſtribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis ſit neceſſario rationalis, irrationaliſve, non tamen omnis huiuſmodi proportio è contrario eſt proportio inæqualitatis: cum multæ proportiones rationales ſint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio duplici diuiſione ſecunda eſt proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem & irrationalem; Poſteriori verò in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis, vt à nobis factum eſt. Ita enim membra diuidentia cum Diuiſo (vt cum Dialecticis loquamur) in vtraque diuiſione reciprocantur. Scio recte poſſe ſubdiuidi tam proportionem rationalem in proportionem æqualitatis: & inæqualitatis; quam proportionem inæqualitatis in proportionem rationalem, & irrationalem; ſi in vtraque diuiſione ſubintelligatur Diuiſum. Sed cur duplicem noſtram diuiſionem, qua proportio in tota ſua latitudine diuiditur, vtrique harum ſubdiuiſionum prætulerim, ſupra expoſui in reſponſione ad Apologiam Peletarij.

Rurſus proportio inæqualitatis (Reliquimus enim æqualitatis proportionem, quoniam amplius ſubdiuidi nequit, cum quæcunque quantitates æquales ſiue magnæ, ſiue paruæ fuerint, eandem ſemper habeant proportionẽ æqualitatis) ſubdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis: Maioris inæqualitatis proportio eſt, quando maior quantitas cum minore confertur; qualis eſt proportio 20. ad 10. Item lineę 8. pedum ad lineam 6. pedum, &c. Proportio minoris inæqualitatis eſt, quando minor quantitas ad maiorẽ refer-

tur; qualis est proportio 10. ad 20, Item lineæ 6. pedum ad lineam 8. pedum, &c. Non est autem hæc diuisio inanis, & superuacanea, vt multi suspicantur. Neque enim eadē est proportio 4. ad 2. quæ 2. ad 4. sed multum inter se differunt, cum valde diuersus sit vsus vtriusque, vt perspicuum est ijs, qui vel mediocriter in rebus Geometricis, & regula Algebræ sunt versati. Hæ igitur sunt generales diuisiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla secluſa: Nunc autem tam proportionem maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, quatenus solas proportiones rationales comprehendunt, subdiuidemus; quoniam de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. est sermo futurus.

Proportio ergo rationalis maioris inæqualitatis, distribuitur in quinque genera, vt in proportionem multiplicem, superparticularem, superpartiētem, multiplicem superparticularem, & multiplicem superpartientem. Pari ratione proportio rationalis minoris inæqualitatis in eadem genera secatur, si modo singulis vocabulis præponatur præpositio (sub) vt in proportionem submultiplicem, subsuperparticularem, subsuperpartientem, submultiplicem superparticularem, & submultiplicem superpartientem. Horum autem quinque generum priora tria sunt simplicia, posteriora vero duo ex illis tribus composita, vt manifestum est. Cur vero tantum sint quinque hęc genera proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis, post explicationem omnium harum quinque proportionum ostendemus.

DE PROPORTIONE MVLTIPLICI.

Proportio Multiplex est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, decies, centies, &c. continet: ita vt minor maiorem metiatur, qualis est proportio numeri 20. ad 4. Nam numerus 20. comprehendit 4. quinquies. Item proportio lineæ 30. pedem ad lineam 5. pedum, &c.

Hæc autem sub se continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorem bis tantum continet, dicitur proportio dupla: si ter, tripla: si decies decupla: si centies, centupla, &c.

Ex his facile omnes ſpecies proportionis multiplicis definiemus. Nam proportio octupla nil erit aliud, quam habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur. Eodemque modo definiendæ erunt reliquæ proportiones multiplices: vt proportio quintupla, qualis eſt 40. ad 8. dicetur ea, cuius maior quantitas minorem cõtinet quinquies. Item proportio dupla lineæ 10. cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & ſic de reliquis.

Cæterum omnes proportiones multiplices in numeris integris, hoc eſt, omnes numeros multiplicem habentes proportionem, inuenies hoc modo. Accipe numerum, qui indicat, quoties maior numerus minorem in data proportione multiplici continet. Is enim ad vnitatem habet primam proportionem multiplicem, quæ inueſtigatur: hoc eſt, numerus ille, & vnitas ſunt primi, ac minimi numeri, inter quos propoſita proportio multiplex reperitur. Atque numerus ille idem, atque vnitas dicuntur ab Arithmeticis termini eius proportionis multiplicis, quæ proponitur. Inuentis hiſce terminis, inter quos prima proportio multiplex propoſita reperitur, ſi vterque duplicetur, producentur duo numeri habentes ſecundam proportionem multiplicem propoſitam: ſi vterque idem triplicetur, procreabuntur numeri tertiæ proportionis multiplicis propoſitæ: ſi vterque quadruplicetur, exurgent numeri quartæ proportionis multiplicis quæſitæ. Atque ita ſi ijdem termini per quemuis numerum multiplicentur, producentur duo numeri proportionis multiplicis propoſitæ, quæ eum locum inter omnes proportiones multiplices illius ſpeciei obtinet, quem numerus, qui vtrumque terminum multiplicauit, indicat: Adeo vt, ſi multiplicatio fiat per 100 procreentur duo numeri obtinentes centeſimum locum inter omnes numeros propoſitam proportionem habentes.

Exempli gratia. Quærantur omnes numeri proportionis quintuplæ. Et quoniam maior numerus minorem continet quinquies in quintupla proportione, erit prima proportio quintupla inter 5. & 1. qui duo termini ſi ducantur in 2. reperietur ſecunda proportio quintupla inter 10. & 2. Si ijdem termini per 3. multiplicentur, procreabuntur numeri 15. & 3. tertiæ proportionis quintuplæ. Et ſic deinceps. Itaque ſi decima proportio quintupla quæratur, ducendi erunt duo primi termini inuenti 5. & 1. per 10. ſi vero milleſima reperienda ſit, multiplicandi erunt ijdem termini per 1000. &c.

Omnes item numeri cuiuſque proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Conſtituantur duæ ſeries numerorum in infinitum progredientes: quarum inferior ab vnitate incipiat, & per ſeriem natu-

naturalem numerorum progreditur; superior autem ab eo numero, qui significat, quoties maior numerus minorem in data proportione continet, initium ducat, progrediaturque per continuam additionem eiusdem numeri, primum ad seipsum, deinde ad conflatum numerum, &c. Nam superioris ordinis numeri ad numeros ordinis inferioris, vt primus ad primum, secundus ad secundum, tertius ad tertium, &c. habent omnes proportiones multiplices speciei propositæ. Exempla hic habes in proportionibus quintuplis, septuplis, & decuplis.

Proportiones quintuplæ.

5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45	60.	65.	70.	75.	80.	&c.		
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	12.	14.	15	16.	&c.

Proportiones septuplæ.

7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.	70.	77.	84.	91.	98.	105. &c.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13	14.	15. &c.

Proportiones decuplæ.

10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90,	100.	110.	120.	130.	140.	&c.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	&c.

DE PROPORTIONE.

Proportio superparticularis est habitudo maioris quãtitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper vnam eius partem aliquotam, scilicet dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Qualis est proportio 3. ad 2. Nam 3 continent 2. semel, & insuper vnitatem, quæ dimidiata pars est numeri 2. Ita quoque linea 12. pedum ad lineam 9. pedum, proportionem habet superparticularem, quia prior linea continet posteriorem semel & insuper lineam 3. pedum, quæ tertia pars est lineæ pedum, &c.

Hæc quoque proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, est dimidiata pars minoris quantitatis, constituitur proportio sesquialtera: si est tertia pars, exurgit proportio sesquitertia; si quarta, sesquiquarta: si millesima, sesquimillesima, &c.

Vnde ex ipsomet vocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum superparticularium. Erit enim

proportio ſeſquioctaaua, quando maior quantitas minorem ſemel includit. & inſuper octauam partem minoris: qualis eſt inter 9. & 8. Item inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.

Inuenientur omnes proportiones ſuperparticulares, ſiue omnes numeri, inter quas proportio ſuperparticularis quæcunque reperitur, hoc modo accipiatur numerus, qui partem aliquotam in proportione expreſſam denominat. Ad eum enim numerus proxime maior, qui videlicet eum vna ſola vnitate ſuperat, habebit primam proportionem ſuperparticularem propoſitam, ita vt in minoribus numeris ea proportio reperiri nequeat. Hi duo numeri, qui termini datæ proportionis dicuntur, ſi duplicentur, triplicentur, vel per quemcunque alium numerum multiplicentur, gignentur alij numeri eandem proportionem habentes, nimirum ſecundam, tertiam, vel eam, quam numerus multiplicans indicat.

Verbi cauſa. Si quærantur omnes proportiones ſeſquiſeptimæ, quoniam hic exprimitur pars ſeptima, erit 7. minor terminus huius proportionis, maior autem erit 8. vna vnitate illum ſuperans: atque inter 8 & 7. prima proportio ſeſquiſeptima exiſtit. Qui duo termini ſi duplicentur, procreabuntur hi alij duo numeri 16. & 14. inter quos ſecunda proportio ſeſquiſeptima cernitur: ſi triplicentur, erit tertia proportio eadem inter 24. & 21. Si denique centeſima proportio eadem quæratur, ducendi erunt termini inuenti 8. & 7. per 100. vt gignantur numeri 800. & 700.

Numeri quoque omnes cuiuſque proportionis ſuperparticularis comperientur, ſi conſtituantur duo ordines numerorum, quorum inferior à numero partem aliquotam denominante incipiat, ſuperior vero à numero proxime maiore: vterque vero per continuam additionem numeri, à quo initium ſumit, primum ad ſe, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur. Exempla hic poſuimus in proportionib. ſeſquialteris, ſeſquiſeptimis, & ſeſquidecimis.

Proportiones ſeſquialteræ.
3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. 36. 39. 42. 45. &c.
2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. 30. &c.
Proportiones ſeſquiſeptimæ.
8. 16. 24. 32. 40. 48. 56. 64. 72. 80. 88. 96. 104. 112. 120. &c.
7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. 84 91. 98. 105. &c.
Proportiones ſeſquidecimæ.
11. 22. 33. 44. 55 66. 77. 88. 99. 110. 121. 132. 143. 154. &c.
10. 20. 30. 40. 50. 60. 70. 80. 90. 100 110 120. 130. 140. &c.

DE

DE PROPORTIONE SUPERPARTIENTE.

Proportio ſuperpartiens eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem ſemel duntaxat continet, & inſuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes vnam aliquotam. Qualis eſt proportio 8. ad 5. Nam 8. continent ſemel 5. & inſuper tres vnitates, quarum quælibet eſt pars aliquota, vtpote quinta, huius numeri 5. ipſe autem ternarius ex illis compoſitus, non eſt pars vna aliquota numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere conſtituere vnam partem aliquotam, ob multas proportiones, quæ primo aſpectu videntur eſſe ſuperpartientes, cum tamen ſint ſuperparticulares; cuiuſmodi proportio eſt inter 10. & 8. Quanquam enim 10. cõtineant ſemel 8. & duas inſuper vnitates, quarum quælibet eſt octaua pars numeri 8. quia tamen binarius ex illis vnitatibus compoſitus, eſt quarta pars 8. non dicenda eſt ea proportio ſuperpartiẽs, ſed ſuperparticularis, nempe ſeſquiquarta. Itaque vt duæ quantitates dicantur habere proportionem ſuperpartiẽtem, neceſſe eſt, vt maior quãtitas minorem contineat ſemel, & plures eius partes aliquotas, quæ ſimul ſumptæ non conſtituant vnam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter ſe confundunt.

Diuiditur primum proportio ſuperpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorem ſemel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non conſtituentes vnam cõficitur proportio ſuperpartiens: ſi tres partes aliquotas, ſupertripartiens: ſi decem, ſuperdecupartiens, &c.

Diuiditur deinde quodlibet horum generum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio ſuperbipartiens inter duas quantitates inæquales, quarum maior continet minorem ſemel, & duas eius partes tertias, dicitur ſuperbipartiens tertias. Quod ſi duæ illæ partes fuerint quintæ, appellabitur ſuperbipartiens quintas, & ita de reliquis

proportionibus ſuperbipartientibus. Pari ratione ſuperdecupartiens proportio inter duas quantitates inæquales, quarum maior excedit minorem decem partibus vndecimis, appellabitur ſuperdecupartiēs vndecimas. Quod ſi decem illæ partes ſint decimætertiæ, vocabitur proportio ſuperdecupartiens decimas tertias; & ſic de reliquis omnibus ſuperdecupartientibus proportionibus.

Ne autem proportiones ſuperpartientes vel inter ſe confundantur, vel cum proportionibus ſuperparticularibus, quod à pleriſq; factum eſſe deprehendimus, diligenter conſideranda ſunt ea, quæ ſequuntur. Primum, in pronunciatione cuiuſcunque proportionis ſuperpartientis, duos indicari numeros, quorū alter monſtrat, quotnam partes aliquotæ minoris quantitatis in maiore ſuperſint; alter vero, quotæ partes eæ ſint, aut quantæ, indicat. Vt in proportione ſupertripartiente octauas, denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior ſignificat, maiorem quantitatem dictæ proportionis continere ſemel minorem, & adhuc tres eius partes aliquotas, exprimiturque ſyllaba illa (tri) quando dicitur, ſupertripartiens: poſterior autem per vocem (octauas) expreſſius oſtendit, illas tres partes aliquotas eſſe partes octauas minoris. Deinde in qualibet proportione ſuperpartiente duos prædictos numeros, qui quidem facile ex ipſa proportionis prolatione cognoſcuntur, vt ex proximo exemplo patet) eiuſmodi eſſe debere, vt non habeant vllam partem aliquotam communem, præter vnitatem, quæ quidem eſt omnium numerorum pars aliquota: hoc eſt, vt ſint inter ſe primi. Numeros enim, qui præter vnitatem nullam aliam partem aliquotam communem admittunt, dicunt Arithmetici cum Euclide, primos inter ſe, vt ex lib. 7. conſtabit. Tales ſunt duo illi numeri 3. & 8. in ſuperiori proportione ſupertripartiente octauas expreſſi. Nam ſola vnitas, vt conſtat, eſt vtriuſque pars communis aliquota. Quare rectè denominabimus proportionem inter 11. & 8. ſupertripartientem octauas: qualis etiam eſt inter 22. & 16. Non autem recte appellabitur proportio poſterior inter 22. & 16. ſu-

16. superſextupartiens ſextasdecimas, quamuis maior minorem contineat ſemel, & inſuper ſex vnitates, quarum quælibet decima ſexta pars eſt minoris: Non, inquam, recte ſic appellabitur; quia duo numeri 6. & 16. in ea expreſſi, habent partem aliquotam 2. per quam, vt in Arithmetica traditur, reducuntur $\frac{6}{16}$: ad $\frac{3}{8}$. atque ita proportio ea dicenda eſt, ſupertripartiens octauas. Sic etiam non recte vocabitur proportio inter 9. & 6. ſupertripartiens ſextas, quoniam duo numeri in ea notati 3. & 6. habent præter vnitatem, aliam communem menſuram, videlicet 3. Nam ternarius ſemel ſumptus, ſeipſum, & bis repetitus, ſenarium metitur, ac proinde $\frac{3}{9}$. reducentur per partem aliquotam communem 3. ad $\frac{1}{2}$. Quocirca talis proportio nuncupanda erit ſeſquialtera, cum maior quantitas contineat ſemel minorem, & eius partem dimidiatam. Eadem ratione non recte dicitur proportio inter 10. & 6. ſuperquadripartiens ſextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habent 2. communem partem aliquotam, præter vnitatem; atque ita dicenda erit talis proportio, ſuperbipartiens tertias, cum maior quantitas contineat minorem ſemel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur non difficile erit vnicuiq; denominare conuenienter omnes proportiones ſuperpartientes.

Perſpicuum etiam ex dictis relinquitur, cur proportionem ſuperbipartientem diuiſerimus paulo ante, in proportionem ſuperbipartientem tertias, quintas, ſeptimas, nonas, &c. prætereuntes ſuperbipartientem quartas, ſextas, octauas, decimas, &c. Cum enim hæ poſteriores omiſſæ, ſint ſuperparticulares, propterea quod $\frac{1}{2}$. faciunt $\frac{1}{2}$. & $\frac{2}{3}$. cõſtituunt $\frac{1}{3}$. & $\frac{3}{4}$. efficiunt $\frac{1}{4}$. denique $\frac{4}{5}$. æquivalent $\frac{1}{5}$. confunderentur proportiones ſuperpartientes cum proportionibus ſuperparticularibus, ſi & ipſæ in numerum proportionum ſuperbipartientium referrentur. Quo modo autem dignoſcẽdum ſit, an duo quilibet numeri propoſiti habeant, præter vnitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, nec ne, in Arithmetica docetur, demonſtrabiturq; ab Euclide, ad initium lib. 7.

Inuento omnium proportionum ſuperpartientium cuiuſque

&c.

ſpeciei ſic ſe habet. Numerus tot vnitatibus maior denominatore partium aliquotarum, quæ in proportione nominãtur, quot partes in eadem proportione exprimuntur, habebit primam proportionem ſpeciei propoſitæ ad numerum eaſdem partes aliquotas denominantem. Qui duo termini duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati gignent ſecundos numeros eandem proportionem habentes, tertios, vel alios, vt ſupra dictum eſt. Verbi gratia, ſi inquirendi ſint omnes numeri proportionis ſupertripartientis decimas, erunt primi huiuſmodi numeri 13. & 10. quia maior ſuperat minorem, qui partes decimas denominat, tribus vnitatibus quot videlicet partium decimarum mentio fit, in proportione ſupertripartiente decimas. Dupli eorum, qui nimirum ſecundam proportionem conſtituunt; ſunt 26. & 20. Tripli 39. & 30. Centeſima autem eiuſdem proportio erit 1300. ad 1000. cum hi numeri centupli ſint terminorum 13. & 10. qui primo loco inuenti ſunt.

Eoſdem numeros omnium proportionum ſuperpartientium reperies, ſi ſtatuas duos numerorum ordines, quorum inferior incipiat à partium aliquotarum denominatore; ſuperior autem à numero, qui numero partium nominatarum priorem illum ſuperat: vterque deinde ordo progrediatur per continuam additionem primi numeri ſui ordinis ad ſeipſum, & ad numeros conflatos, vt ſupra diximus. Exempla hic adiecimus proportionum ſuperbipartientium quintas, ſuperoctupartientium nonas & ſuperſeptupartientium decimas.

Proportiones ſuperbipartientes quintæ.

7.14.21.28.35.42.49.56.63.70.77.84.91.98. *&c.*

5.10.15.20 25.30.35.40 45.50.55. 60.65.70. *&c.*

Proportiones ſuperoctupartientes nonas.

17.34.51.68.85.102.119.136.153.170.187. *&c.*

9. 18. 27. 36. 45. 63. 72. 81. 90. 99. *&c.*

Proportiones ſuperſeptupartientes decimas

17.34.51.68.85.102.119.136.153.170.187. *&c.*

10.20.30.40.50.60.70.80.90.100.110. *&c.*

DE PROPORTIONE MVLTIPLICI ſuperparticulari.

Proportio multiplex ſuperparticularis eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, vel quater, &c. continet, & præterea vnam eius partem aliquotam. Cuiuſmodi eſt proportio 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (qua ex parte pro-

portio

portio hæ cum multiplici conuenit, vtpote cum dupla) &insuper comprehendunt vnitatem, quæ est quarta pars numeri minoris; (qua in re proportioni superparticulari, nimirum sesquiquartæ, eadem proportio proposita similis est.) vt recte proportio hæc composita dicatur ex multiplici, & superparticulari.

Diuiditur autem proportio hæc, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita, veluti multiplex. Vt in duplam superparticularem; triplam superparticularem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quaterve, &c. & insuper vnam partem minoris quantitatis aliquotam.

Vnumquodque rursus horum generum infinita alia subdiuiditur, habita ratione proportionis superparticularis. Nam proportio, v. g. tripla superparticularis continet sub se triplam sequialteram, (quando scilicet maior quantitas minorem ter continet, & præterea dimidiatam eius partem;) triplam sesquitertiam; triplam sesquiquartam, & ita infinitas alias.

Reperiemꝰ vero omnes proportiones multiplices superparticulares cuiuslibet speciei, si aduertamus diligenter denominatorem partis aliquotæ, & proportionis multiplicis, quarum in proposita proportione mentio fit. Nam si denominatorem partis aliquotæ per denominatorem multiplicis proportionis multiplicemus productoque numero adijciamus vnitatem, habebit hic numerus conflatus ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem speciei propositæ. Et hi duo numeri duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati dabunt alios in eadem proportione numeros, nimirum secundos, tertios, vel alterius ordinis pro numero vnitatum, quæ in numero multiplicante continentur, vt in alijs dictum est. EXEMPLI gratia, si inueniendi sint omnes numeri proportionis sextuplæ sesquinonæ, ducemus 9. denominatorem partis nonæ in 6. denominatorem multiplicis proportionis, productoque numero 54. addemus 1. Conflatus namque numerus 55. ad 9. denominatorē partis nonæ expresse habet primam proportionē sextuplam sesquinonam, ita vt in minoribus numeris integris ea dari nequeat. Dupli horum numerorum 110. & 18. erunt secundi numeri in eadem propoportione. Tripli vero 165. & 27. erunt tertij &c. ita vt eorundem centupli 5500. exhibeant centesimam proportionem eandem.

Eaſdem proportiones multiplices ſuperparticulares inuenies, ſi con-

constituas duas series numerorum, quarum inferior incipiat à denominatore partis aliquotæ nominatæ, superior autem à numero conflato ex vnitate, & numero producto ex multiplicatione denominatoris partis aliquotæ eiusdem in denominatorem proportionis multiplicis expressæ: Vterque vero ordo per continuam additionem primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad conflatum numerū, &c. progrediatur, vt in superioribus dictum est. Exempla hic vides proportionis duplæ sesquialteræ, triplæ sesquiseptimæ, & decuplæ sesquitertiæ.

Proportiones dupla sesquialtera.

5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55. 60. 65. 70. &c.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. &c.

Proportiones tripla sesquiseptima.

22. 44 66. 88. 110. 132. 154. 176. 198. 220. 242. &c.

7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. &c.

Proportiones decupla sesquitertiæ.

31. 62. 93. 124. 155. 186. 217. 248. 279. 310. 341. &c.

3. 6. 9. 12. 15. 18. 21 24. 27. 30. 33. &c.

DE PROPORTIONE MVLTIPLICI superpartiente.

Proportio denique multiplex superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes vnam: qualis est proportio 11. ad 3. Dixi, non conficientes vnam, ob causam dictam in proportione superpartiente. Nam si partes illæ aliquotæ vnam efficerent, non esset proportio multiplex superpartiens, sed multiplex superparticularis. Vt proportio 20. ad 6. non dicenda est multiplex superbipartiens sextas, quamuis 20. contineant ter 6. & duas sextas: quia duæ sextæ conficiunt vnam tertiam partem. Quare vocabitur proportio tripla sesquitertia.

Distribuitur autem hæc proportio primum, habita ratione proportionis multiplicis. Vt multiplex in duplam superpartientem: triplam superpartientem, &c.

Deinde quælibet harum, habita ratione numeri partium, sub se continet genera infinita. Vt sub tripla superpartiente, continetur tripla superbipartiens; tripla supertripartiens &c.

Po-

Postremo quæuis istarum, habita ratione denominationis partium aliquotarum: in genera adhuc infinita secatur. Vt tripla supertripartiens diuiditur in triplam supertripartientem quartas; in triplam supertripartientem quintas, &c. Quarum omnium definitiones, & exempla non difficile est cuiuis ex dictis depromere, &c.

Omnes proportiones multiplices superpartientes postremæ diuisionis ita inueniemus. Denominator partium aliquotarum propositarum multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis propositæ, productoque numero addatur numerus partium aliquotarum expressus. Conflatus enim numerus ad eundem partium aliquotarum denominatorem habet primam proportionem earum, quæ inuestigantur. Atque hi duo numeri, si duplicentur, triplicentur, vel per alium quemcunque numerum multiplicentur, dabunt secundos numeros, tertios, & alios in eadem proportione. VELVTI si quærantur omnes proportiones quadruplæ superoctupartientes vndecimas, ducemus 11 denominatorem partium vndecimarum in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, numeroque procreato 44. adijciemus 8. numerum octo partium. Nã conflatus numerus 52. ad 11. denominatorem partium habet primã proportionem quæsitam. Secundi numeri erunt 104. & 22. Tertij 156. & 33. nimirum illorum dupli, tripli, &c. Centupli autem eorundem, vt 5200. & 1100. habent centesimam proportionem inter omnes quadruplas superoctupartientes vndecimas.

Quod si duo numerorum ordines constituantur, quorum inferior incipiat à denominatore partium aliquotarum propositarum, & per continuam eiusdem additionem primum ad se, deinde ad numerum conflatum, &c. progrediatur; superior vero incipiat à numero conflato ex numero producto ex eodem partium denominatore in denominatorem multiplicis proportionis datæ, & ex numero partium expresso, ac per eiusdem continuam additionem primum ad se, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur; obtinebimus quoque omnes numeros oblatæ proportionis vt in superioribus quoq; diximus: Exempla hic vides in proportione dupla superbipartiente tertias, dupla superquintupartiente sextas, & quintupla supertripartiente quintas.

Proportiones dupla superbipartientes tertias.

8. 16. 24. 32. 40. 48. 56. 64. 72. 80. 88. 96. 104. &c.
3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. 36. 39. &c

Proportiones dupla superquintupartientes sextas.

17. 34. 51. 68. 85 102. 119. 136. 153. 170 187. &c.
6. 12. 18. 24. 30. 36. 42. 48. 54. 60. 66. &c.

Pro-

Proportiones quintuplæ ſupertripartientes quintas.

28.56.84.112.140.168.196.224.252.280.308. &c.

5.10.15.20.25.30.35.40.45.50.55. &c.

DE PROPORTIONIBVS RATIONALIbus minoris inæqualitatis.

Omnia quæ dicta hactenus ſunt de quinque generibus proportionum rationalium maioris inæqualitatis, intelligenda ſunt quoque de quinque generibus correſpondentibus minoris inæqualitatis, præmiſſa tamen ſemper præpoſitione (ſub) vt dictum eſt. Nam ſi in exemplis allatis conferãtur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportiones minoris inæqualitatis correſpondentes. Quemadmodum enim proportio 100. ad 1. eſt centupla, ita proportio 1. ad 100. eſt ſubcentupla. Sicut etiam proportio 11. ad 3. eſt tripla ſuperbipartiens tertias; ita proportio 3. ad 11. eſt ſubtripla ſuperbipartiens tertias: atque ita de cæteris.

Non videtur autem hoc loco prætermittenda inſignis vtilitas tabulæ Pythagoricæ, quam cap. 4. noſtræ Arithmeticæ conſtruximus, in omnibus proportionibus rationalibus inueniendis: quæ eiuſmodi eſt. Cõſtructa tabula Pythagorica, (Eſt autem conſtructio facillima, cum numeri in ſiniſtro latere conſtituant ſeriem numerorum naturalem, in infinitumque progredi poſſint; quælibet autem linea in tranſuerſionem procreetur ex continua additione numeri in ſiniſtro latere à quo incipit, ad ſeipſam, & ad numerum conflatũ, & ſic in infinitum: ita vt hæ lineæ in tranuerſum nil aliud ſint, quam progreſſiones Arithmeticæ numerorum, quorum differentiæ ſint primi numeri earundem linearum) primum omnes numeri cuiuſuis proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Denominator datæ proportionis multiplicis in ſuprema linea acceptus ad vnitatem in ſiniſtro latere habet primam eam proportionem multiplicem: Numeri autem ſub eodem denominatore deſcendentes per lineam rectam ad numeros ſub vnitate in latere ſiniſtro poſitos, ſinguli ad ſingulos, habent ſecundam, tertiam, quartam, & alias proportiones eiuſdem ſpeciei, in infinitum. Vt prima proportio noncupla erit inter 9. ſupremæ lineæ ad 1. in ſiniſtro latere; ſecunda inter 18. ſub 9. ad 2. ſub 1. tertia inter 27. eiuſdem lineæ à 9. deſcendentis, & 3. in ſiniſtro latere, &c. atque ita de alijs proportionibus multiplicibus dicendum eſt.

Deinde omnes numeri cuiuſuis porportionis ſuperparticularis ſi

ris ſic invenientur. Ad denominatorem partis aliquotę, quę in proportione exprimitur, in latere ſupremo acceptum habet proximè inſequens numerus primam proportionem datam. Et ſi per lineam rectam ab hiſce duobus numeris deſcendamus, reperiemus omnes alios numeros ejuſdem proportionis, ut de multiplicibus dictum eſt. Verbi gratia, prima proportio ſeſquioctavæ erit 9. ad 8. aliæ verò ordine erunt inter numeros ſub illis poſitus ut ſecunda inter 18. & 16. tertia inter 27. & 24. &c.

Tertiò ſic reperies omnes proportiones ſuperpartientes cujuſlibet ſpeciei. Poſt denominatorem partium aliquotarum, quarum in proport. data mentio fit, in ſupremo latere acceptū numera tot numeros, quot partes in eadem proportione nominantur. Vltimus enim ad denominatorem earundem partium habebit primam proportionem ſuperpartientem propoſitum. Secunda autem, tertia, quarta & aliæ ordine, reperientur inter numeros ſub illis duobus collocatos. Exempli cauſa, ſi quis omnes numeros proportionis ſuperoctupartientis undecimas deſideret, ſumat in latere ſupremo denominatorem partium, id eſt, 11. poſt quem numeret hos octo numeros, propter octo partes, 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. Vltimus enim 19. ad 11. habet primam proportionem ſuperoctupartientem undecimas. Secundam habebit numerus 38. ad 22. tertiam 57. ad 33. & alias alii numeri ſub 19. & 11. per rectam lineam deſcripti.

Quarto numeros omnes cujuslibet proportionis multiplicis ſuperparticularis invenies hac ratione. In ſupremo latere accipe numerū, qui ad denominatorem partis aliquotæ expreſsè habeat proportionem multiplicē, cujus mentio fit. Numerus enim proximè inſequens habebit ad denominatorē partis aliquotæ primam proportionem propoſitam: Secundam autem, tertiam, & alias habebūt numeri ſub illis duobus poſiti. Vt autem ſcias numerū qui ad denominatorem partis aliquotæ habeat multiplicem proportionem propoſitam, ſumendus eſt denominator partis in ſupremo latere, & in ſiniſtro, denominator proportionis multiplicis: Vel prior denominator in ſiniſtro latere & poſterior in ſupremo. In angulo enim communi reperies numerū multiplicem, quem deſideras exempli gratia. Inveniendi ſint omnes numeri proportionis triplæ ſeſquiquintæ. Primum quæratur numerus ad denominatorem partis aliquotæ, hoc eſt ad 5. triplus, nimirum 15. quem reperies in communi angulo denominatoris proportionis triplæ, qui eſt 3. & denominatoris partis aliquotæ, qui eſt 5. quorum alteruter in ſupremo latere; & alter in ſiniſtro ſumatur. Deinde hic numerus triplus, nimirum 15. accipiatur in latere ſupremo. Numerus enim 16. proximè inſequens ad denominatorem partis aliquotæ, id eſt, ad 5. habet primam proportionem triplam ſeſquiquintam. Alias proportiones ejuſdem

TABVLA PYTHAGORICA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308

speciei reperies in numeris, qui sub illis duobus ponuntur, ut de aliis dictum est.

Quinto & ultimo reperientur omnes numeri cujuslibet proportionis multiplicis superpartientis hoc modo: In latere supremo accipiatur numerus, qui ad denominatorem partium aliquotarum habeat proportionem multiplicem propositam: qui quidem invenietur quoq; in angulo communi denominatoris proportionis multiplicis, & denominatoris partium aliquotarum. Deinde post acceptum numerū multiplicem numerentur tot numeri, quot partium aliquotarum sit mentio. Vltimus namq; ad denominatorem partium aliquotarum comperietur habere primam datam proportionem multiplicem superpartientem. Alias proportiones ejusdē speciei reperies sub illa prima ut de aliis diximus. Vt si cupiat quis omnes proportiones quadruplas supertripartientes quintas. Primum inquirat numerum quadruplum denominatoris partium; qui est 5. Inveniet autem eum numerum esse 20. quippe qui in angulo communi denominatoris proportionis quadruplæ, qui est 4. & denominatoris partium quintarum, qui est 5. descriptus sit. Deinde post numerum hunc 20. inventum numerer, in supremo latere tres hos numeros 21. 22. 23. quod tres partes quintæ nominentur. Nam ultimus 23. ad 5. hoc est, ad denominatorem partium, habet primam proportionem quadruplam supertripartientem quintas. Numeri aliarum proportionum ejusdem speciei continentur sub duobus illis numeris, ut in aliis traditum est.

Inventis hac arte omnibus numeris cujuslibet proportionis majoris inæqualitatis, si minores cum majoribus conferantur, invenientur quoque erunt omnes numeri ejusdem proportionis minoris inæqualitatis.

Neque verò silentio transiri debet hoc loco admirabilis quædam proprietas cujuslibet proportionis rationalis; quæ sic se habet. Inventis minimis sive primis terminis, numerisve cujuslibet proportionis, si constituatur progressio, seu proportionalitas Arithmetica incipiens à numero, qui una unitate minor sit, quàm differentia minimorum illorum numerorum, progredienſque per ipſammet eandem differentiam numerorum minimorum, cadent inter primos numeros illius progressionis tot numeri in serie naturali numerorum, quot unitates sunt in primo termino constitutæ tuę proportionalitatis Arithmeticæ; Inter secundos verò, qui primorū dupli sunt, tot, quot in secundo termino ejusdem progressionis continentur unitates, inter tertios autem tot, quot unitates in tertio termino ejusdem progressionis continentur: atq; ita deinceps. Exempli gratia, si proponatur proportio dupla, cujus minimi numeri sūt 2 & 1. cōstituetur progressio incipiens ab 0. (quod differētia inter 2. & 1. sit 1. & figura 0. una unitate minor quàm 1.) progredienſque

per continuam additionem unitatis, nimirum differentiæ inter 2. & 1. primus ad 0. deinde ad conflatum numerum 1. Postea ad numerum confectum 2. &c. hoc scilicet modo.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12 13. 14. 15. &c.

Itaque inter primos numeros duplæ proportionis, hoc est, inter 2. & 1. nullus cadit medius numerus: Inter secundos, qui sunt 4. & 2. cadet unus medius, nimirum 3. Inter tertios 6. & 3. duo medii intercipiuntur 5. & 4. Inter quartos 8. 4. tres medii existūt 7 6. 5. & sic deinceps. Id quod in hac formula apparet, ubi numeri extremi cujuslibet lineæ habent proportiones omnes duplas, ut primam, secundam, tertiam, &c. Multitudines autem numerorum seriei naturalis inter eos cadentium respondent numeris superioris proportionalitatis Arithmeticæ.

						1	2	1						
					1	4	3	2	1					
				1	6	5	4	3	1					
			1	8	7	6	5	4	1					
		1	10	9	8	7	6	5	1					
	1	12	11	10	9	8	7	6	1					
1	14	13	12	11	10	9	8	7	1					
1	16	15	14	13	12	11	10	9	8	1				
1	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	1			
1	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	1		

Quod si superiori proportionalitati Arithmeticæ superponas seriem naturalem numerorum, quæ ab 1. incipiat, ita ut singuli ejus termini singulis terminis constitutæ tuæ Arithmeticæ proportionalitatis respondeant, dicto citius cognoscemus, quotnam numeri cadant medii inter quosvis duos numeros proportionis duplę. Numeri enim seriei hujus naturalis indicabunt, quem locum duo numeri duplæ proportionis obtinent, respondentes verò numeri in proportionalitate Arithmetica constituta multitudinem numerorum inter illos cadentium significabunt. Exemplum hic vides.

Ordo

Ordo proportion. duplarum.	1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | &c.
Multit. med. numerorum.	0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | &c.

Itaque si scire cupias, quot numeri cadant inter vndecimos numeros proportionis duplæ, cape in serie naturali numerum 12. cui supponitur numerus 10. Dices ergò 10. numeros inter illos intercipi, & sic de cæteris.

Proponatur deinde proportio decupla, cujus termini minimi sunt 10 & 1. Differentia eorum est 9. & numerus una unitate minor, 8. Progressio ergò Arithmetica incipiet ab 8. progredieturque per continuam additionem 9. primum ad 8. deinde ad numerum conflatum 17. & sic deinceps, ut hic videre licet, ubi supra scripsimus etiam seriem numerorum naturalem, cujus idem usus hic est, qui supra fuit in proportione dupla.

Ordo propor. decuplarum.	1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | &c.
Multit. med. numerorum.	8 | 17 | 26 | 35 | 44 | 53 | 62 | 71 | &c.

Inque inter primos numeros decuplæ proportionis cadent 8. numeri medii; Et 17. inter secundos: Et 26. inter tertios: At inter octavos intercipientur 71. numeri medii, & sic de cæteris. Vt hæc formula declarat.

10. 9. 8. 7. 6 5. 4. 3. 2. 1.
20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2.

Rursus detur proportio quæcunque superparticularis. Et quoniam duo minimi numeri differunt sola unitate, quemadmodum & minimi numeri proportionis duplæ, inservient hic eædem progressiones, quæ in dupla proportione, ita ut idem numerus sit numerorum mediorum hic, qui ibi. Vt hic perspicuum est in proportione sesquioctava.

Ordo propor. sesquioct.	1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11. &c.
Multit. med. numerorum.	0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | &c.

19 | 8 |
18 | 17 | 16 |
27 | 26 | 25 | 24 |
36 | 35 | 34 | 33 | 32 |
45 | 44 | 43 | 42 | 41 | 40 |
54 | 53 | 52 | 51 | 50 | 49 | 48 |
63 | 62 | 61 | 60 | 59 | 58 | 57 | 56 |

Offeratur quoque proportio ſuperquadrupartiens ſeptimas, cujus minimi termini ſunt 11. & 7. Differentia eorũ eſt 4. Progreſſio ergò Arithmetica incipiet à 3. progredieturq; per 4. ut hic patet, una cum ſerie naturali. Inter primos numeros proportionis ſuperquadrupartientis ſeptimas comprehenduntur 3. numeri medii. Et 7. inter ſecundos; Et 23. inter ſextos, atque ita de cæteris, ut hic vides.

Ordo propor. ſuperquadr.	1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | &c.
Multit. med. numerorum.	3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | 27 | 31 | &c.

11. 10. 9. 8. 7.
22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14.
33. 32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21.
44. 43. 42. 41. 40 39 38. 37. 36. 35. 34. 33. 32. 31. 30. 29. 28.

Item data ſit proportio dupla ſeſquiſexta, cujus numeri minimi ſunt 13. & 6. Differentia eorum eſt 7. Incipiet ergò progreſſio à 9. habebitq; differentiam 7. inter ejus numeros, ut hic cernitur, unà cum ſerie naturali numerorum. Inter primos ergò numeros proportionis duplæ ſeſquiſextæ cadent 6. medii numeri: inter ſecundos, 13. & inter octavos, 55. &c. veluti hic cernitur.

Ordo propor. dup. ſeſquiſex.	1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | &c.
Multit. med. numerorum.	6 | 13 | 20 | 27 | 34 | 41 | 48 | 55 | &c.

13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6.

26. 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17 16. 15. 14. 13. 12.

39. 38. 37. 36. 35 34. 33. 32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18.

Postremò propositum sit idem experiri in proportione dupla superbipartiente tertias, cujus minimi termini sunt 8. & 3. Et quia eorum differentia est 5. sumet progressio Arithmetica initium à 4. habebuntque ejus numeri differentiam 5. veluti hic manifestum est, una cum numerorum naturali serie.

Ordo propor. duplarum superbip. tertias.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	4	9	14	19	24	29	34	39	&c.

Cadent ergò inter duos primos numeros proportionis duplæ superbipartientis tertias, 4. numeri medii; & inter secundos, 9. & inter septimos, 34. &c. ut hic perspicuum est

8. 7. 6. 5. 4. 3

16. 15. 14. 13 12. 11. 10 9. 8. 7. 6.

24 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15 14. 13. 12. 11. 10. 9.

32 31 30. 29. 28. 27. 26. 25 24. 23 22. 21. 20. 19 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12.

Manifestum autem est, quod de proportionibus majoris inæqualitatis hoc loco diximus, verum quoque esse de minoris inæqualitatis proportionibus, cum iidem numeri inter majorem numerum ac minorem, & inter minorem ac majorem, interjiciantur.

Cæterum ex iis, quæ de quinq; speciebus proportionis rationalis tam majoris, quam minoris inæqualitatis diximus, perspicuè colligitur, nõ posse plura esse genera proportionis rationalis majoris inæqualitatis, quàm quinq; jã exposita. Cùm enim, ut Euclides demonstrat prop. 5. l. 10. commensurabiles quantitates quæcunq; inter quas, ut diximus, est proportio rationalis, inter se proportionẽ eam habeant, quam numerus ad numerum; fit, ut omnis proportio rationalis quarumcunq; quantitatum continuarum assignari, seu exhiberi possit in numeris. Aut igitur major numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfectè; qua ratione constituitur proportio multiplex: Aut semel tantùmmodo, ac præterea unam ejus partem aliquotam; & sic habetur

proportio ſuperparticularis : Aut ſemel duntaxat, & inſuper plures partes ejus aliquotas non facientes unam: & conficitur proportio ſuperpartiens: Aut aliquoties, & unam ejus partem aliquotam , & colligitur proportio multiplex ſuperparticularis: Aut denique aliquoties, & plures ejus partes aliquotas non facientes unam; & exurgit proportio multiplex ſuperpartiens. Neque verò alio modo major quantitas minorem continere, aut minor quantitas à majore contineri poteſt. Eadem ratione conſtat, totidem eſſe genera proportionis minoris inæqualitatis. Rectè ergò proportionem rationalem tum majoris inæqualitatis, tum minoris, in quinque genera, quæ expoſuimus, partiti ſumus.

DE PROPORTIONVM RATIONALIUM Denominatoribus.

Quoniam verò non exiguus eſt uſus Denominatorum proportionum rationalium, quas hactenus expoſuimus, non abs re erit, paucis docere, à quibuſnam numeris ſingulę proportiones denominentur. Denominator ergò cujuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit diſtinctè, & apertè habitudinem unius quantitatis ad alteram: Vt denominator proportionis octuplæ eſt 8. Nã hic numerus indicat, majorem quantitatem proportionis octuplę cõtinere minorem octies. Similiter denominator proportionis ſeſquiquintæ eſt $1\frac{1}{5}$; quoniam iſte numerus ſignificat, majorem quantitatem proportionis ſeſquiquintæ, continere minorem ſemel, & quintam ejuſdem partem. Atque ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum eſt, ut arbitrór, quod Euclides lib. 6. & plerique alii Mathematici appellant denominatorem cujuſvis proportionis quantitatem illius: quia denominator, ut diximus, oſtendit, quanta ſit una quantitas ad alteram , cum qua confertur, ut ex propoſitis exemplis conſtat.

Ex iis autem quæ diximus, facilè colligi poteſt denominator cujuſq; proportionis. Denominator enim proportionis

tionis multiplicis, quæcunque ea ſit, eſt numerus integer tot continens unitates, quoties major quantitas minorem continere dicitur in ea proportione, cujus denominator quæritur. Vt proportionis duplæ denominator eſt 2. Noncuplæ, 9. Centuplæ, 100. Millecuplæ, 1000. &c. Denominatores autem proportionum ſubmultiplicium, multiplicibus correſpondentium, ſunt partes aliquotæ à denominatoribus proportionum multiplicium, quibus reſpondent, denominatæ. Vt denominator proportionis ſubduplæ, eſt $\frac{1}{2}$; ſub quintuplæ, $\frac{1}{5}$. ſubnoncuplæ, $\frac{1}{9}$. ſubcentuplæ, $\frac{1}{100}$. ſubmillecuplæ, $\frac{1}{1000}$. Eodem modo, denominatores aliarum proportionũ ſubmultiplicium reperiemus. Itaque denominator cujuſcunq; proportionis ſubmultiplicis eſt numerus fractus, cujus numerator perpetuò eſt unitas, denominator autem, numerus proportionem multiplicem correſpondentem denominans ut ex prolatis exemplis patet. Neque verò ulla difficultas eſt in cujuſque proportionis multiplicis, vel ſubmultiplicis, denominatore reperiendo, ſi ea, quæ dicta ſunt, rectè intelligantur: quippe cum ipſa prolatio proportionis denominatorem offerat, ut ex datis exemplis manifeſtum eſt.

Denominator cujuſvis proportionis ſuperparticularis eſt unitas cum parte illa aliquota, quam major quantitas debet ultra minorem comprehendere. Vt proportionis ſeſquialteræ denominator eſt $1\frac{1}{2}$; ſeſquioctavæ, $1\frac{1}{8}$, ſeſquimilleſimæ, $1\frac{1}{1000}$. &c. Neq; difficilè erit denominatorũ cujuſque proportionis ſuperparticularis invenire: cum ipſa proportionis prolatio denominatorẽ exprimat per ſuam partem aliquotam, ut ex datis exemplis perſpicuum eſt. Denominatores autem proportionũ ſuperparticularium correſpondentium, ſunt fractiones quarũ numeratores una tantùm unitate minores ſunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis ſubſeſquialteræ, eſt $\frac{2}{3}$; ſubſeſquioctavæ, $\frac{8}{9}$. ſubſeſquimilleſimæ $\frac{1000}{1001}$; &c. Invenietur autẽ denominator cujuslibet proportionis ſub-

ſuperp rticularis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partis aliquotæ in proportione expreſſæ, & pro ejuſdem fractionis denominatore, numerus unitate major. Vt denominator proportionis ſubſeſquidecimæ eſt $\frac{10}{11}$. cum hujus fractionis numerator ſit numerus denominans partem decimam, nimirum 10. denominator autem ejuſdem fractionis numeratorem ſuperet unitate, &c. Reperiemus quoque denominatorem cujuſvis proportionis ſubſuperparticularis hoc modo. Denominatorem correſpondentis proportionis ſuperparticularis revocabimus ad unam fractionem, ut in Arithmetica docuimus: cujus quidem numerator ſuperabit hic ſemper una unitate denominatorem, qui etiam denominator eſt partis aliquotæ, cujus mentio fit in ablata proportione. Nam ſi hujus fractionis terminos invertamus, ut ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, habebimus denominatorem propoſitæ proportionis ſuperparticularis. Vt ſi offeratur proportio ſubſeſquiſeptima: quoniam denominator proportionis ſeſquiſeptimæ, quæ illi reſpondet, eſt $\frac{15}{8}$. qui revocatur ad hanc fractionem $\frac{7}{8}$. cujus numerator una unitate major eſt, quàm denominator partis aliquotæ. Quare ſi eam fractionem invertamus hoc modo $\frac{8}{7}$. dicemus denominatorem proportionis ſeſquiſeptimæ eſſe $\frac{8}{7}$. Facilius denique cujuſvis proportionis ſubſuperparticularis denominator fortasſis reperietur, ſi inveniantur primi numeri habentes proportionem ſuperparticularem reſpondentem, ut ſupra docuimus. Nam fractio, cujus numerator ſit eorum numerorum minor, denominator verò major, erit denominator propoſitæ proportionis. Vt ſi proponatur proportio ſubſeſquiſeptima: quoniam primi, ſive minimi numeri habentes proportionem ſeſquiſeptimam, ſunt 8. & 7. ſi ex minore fiat numerator, & ex majore denominator, conficiemus hanc fractionem $\frac{7}{8}$. pro denominatore proportionis ſeſquiſeptimæ propoſitæ, ut prius.

Deno-

Denominator cujuſvis proportionis ſuperpartientis eſt unitas cum illis partibus aliquotis non efficientibus unam, quas major quantitas debet ultra minorem continere. Vt denominator proportionis ſupertripartientis ſeptimas, eſt $1\frac{3}{7}$. ſupertripartientis vigeſimas, $1\frac{3}{20}$. &c. Neque ulla difficultas eſt in hujuſmodi denominatoribus inveniendis: propterea quod prolatio ipſa proportionis denominatorem proprium exhibet, ut ex ſuperioribus exemplis liquidò conſtat. Denominatores autem proportionum ſubſuperpartientium, ſunt fractiones, quarum numeratores tot unitatibus minores ſunt, quam earundem fractionum denominatores, quot partibus aliquotis major quantitas minorem ſuperat. Vt denominator proportionis ſubſupertripartientis ſeptimas, eſt $\frac{7}{10}$; ſubſupertripartientis, vigeſimas: $\frac{20}{23}$; &c. Invenietur autem denominator cujuslibet proportionis ſubſuperpartientis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partium aliquotarũ, quæ in proportione exprimuntur, cui ſi addatur numerus earundem partium, habebitur ejuſdem fractionis denominator. Vt denominator proportionis ſubſuperquadrupartientis undecimas, eſt $\frac{11}{15}$, cum hujus fractionis numerator ſit numerus denominans partes undecimas, nimirum 11. cui additus eſt numerus 4. quatuor partium, ut fiat ejuſdem fractionis denominator 15. Denominator autem proportionis ſubſupertripartientis quintas eſt hæc fractio, $\frac{5}{8}$. Nã ejus numerator eſt numerus denominans partes quintas, nimirum 5. Denominator autem 8. ejuſdem fractionis conflatus eſt ex illo numeratore 5. & ex numero 3. trium partium. Eademq; ratione reperiemus & aliarum proportionum ſubſuperpartientium denominatores. Quos hac etiam ratione invenies. Revoca denominatorem proportionis cujuſque ſuperpartientis correſpondentis ad unam fractionem, ut in Arithmetica docuimus; cujus quidem numerator denominatorem, qui partes etiam aliquotas expreſſas

deno-

denominat, ſuperabit hic ſemper tot unitatibus, quot ſunt partes aliquotæ. Nam hujus fractionis numeri inverſi ut ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, dabunt denominatorem propoſitæ proportionis ſubſuperpartientis. Ut denominator proportionis ſubſuperdecupartientis decimastertias eſt $1\frac{1}{13}$. quia denominator proportionis ſuperdecupartienris decimas tertias eſt $1\frac{10}{13}$. quia ad hanc fractionem $\frac{3}{13}$. revocatur, cujus numeri inverſi efficiunt hanc fractionem $1\frac{1}{3}$. Deniq; facilius cujuſvis proportionis ſubſuperpartientis denominator invenietur fortaſſis, ſi reperiantur primi, vel minimi numeri habentes proportionem ſuperpartientem correſpondentem, ut ſuprà tradidimus. Fractio etenim, cujus numerator ſit eorum numerorum minor; denominator autem major, denominator erit propoſitæ proportionis ſubſuperpartientis. Veluti ſi proponatur proportio ſubſuperquadrupartiens nonas: quoniam minimi numeri habentes proportionem ſuperquadrupartientem nonas ſunt 13. & 9. faciemus fractionem $\frac{9}{13}$. pro denominatore proportionis ſubſuperquadrupartientis nonas: & ſic de cæteris.

Denominator cujuſvis proportionis multiplicis ſuperparticularis eſt numerus integer multiplicem proportionẽ expreſſam denominans, cum illa parte aliquota, quam major quantitas cõtinere debet ultra minorem quantitatem. Vt denominator proportionis triplę ſeſquiſeptimæ $3\frac{1}{7}$. Quintuplæ ſeſquinonæ. $5\frac{1}{9}$. &c. Vt nullus omnino labor ſit exhibere denominatorem cujuslibet proportionis multiplicis ſuperparticularis; quippe cum ipſa prolatio proportionis diſtinctè exprimat & denominatorem multiplicis proportionis, & partem aliquotam, ut exempla propoſita declarant. Denominatores autem proportionum ſubmultiplicium ſuperparticularium, ſunt fractiones, quarum numeratores numeri ſunt denominantes partes aliquotas in proportionib⁹ expreſſas. Vt denominator proportionis ſubtriplę ſeſquiſeptimę, eſt $\frac{7}{21}$; ſubquintuplæ ſeſquinonæ, $\frac{9}{45}$; &c. Invenietur autẽ denominator cujuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperparticularis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partis aliquotæ, qui ſi multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis, addaturq; unitas numero producto, habebitur denominator ejuſdem fractionis. Vt denominatos proportionis ſubquadruplæ ſeſquiſextæ, eſt $\frac{5}{25}$; cum hujus

fractio-

fractionis numerator 6. denominet partes sextas, isque ductus sit in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, ac producto numero 24. addita unitas, ut ejusdem fractionis denominator conficiatur 25. &c. Iidem denominatores proportionum submultiplicium superparticularium invenientur, si denominator cujusvis proportionis multiplicis superparticularis respondentis revocetur ad unam fractionem, ut in Arithmetica docuimus, multiplicando nimirum denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero unitatem, id est, numeratorem ejusdem fractionis addendo. Nam si hujus fractionis termini commutent ordinem inter se, fiet denominator proportionis propositę. Vt si detur proportio subquadrupla sesquisexta: quoniam denominator correspondentis proportionis quadruplæ sesquisextę est $4\frac{1}{6}$. ducemus 4. id est, denominatorē multiplicis proportionis, in 6. hoc est, in denominatorem fractionis adhærentis, numeroque producto 24. addemus. 1. nimirum numeratorem ejusdem fractionis, ut totum denominatorem $4\frac{1}{6}$. revocemus ad hanc fractionem $\frac{25}{6}$. Cujus termini si inter se ordinem permutent, fiet hæc fractio $\frac{6}{25}$. pro denominatore proportionis subquadruplæ sesquisextæ. Eodemq; modo in cæteris agendum erit. Denique facilius fortasse denominatorem cujusque proportionis submultiplicis superparticularis invenies, si duos primos, minimosve numeros proportionis multiplicis superparticularis correspondentis reperias, ut suprà traditum est. Nam fractio, cujus numerator sit minor eorum numerus, denominator autem, major, erit denominator proportionis propositæ. Vt si offeratur proportio subtripla sesquiseptima quoniam primi, sive minimi numeri proportionis triplæ sesquiseptimæ sunt 22. & 7. fiet ex illis fractio hæc $\frac{7}{22}$. pro denominatore proportionis subtriplæ sesquiseptimæ atque ita de cæteris.

Denominator cujusvis proportionis multiplicis superpartientis, est numerus integer denominans proportionem multiplicem in ea expressam, cum illis partibus aliquotis, non constituentibus unam, quas major quantitas ultra minorem debet comprehendere. Vt denominator proportionis triplæ superquintupartientis octavas, est $3\frac{5}{8}$; quadruplæ superbipartientis quintas, $4\frac{2}{5}$. &c. Nihil enim difficultatis habet hæc inventio denominatorum in proportionibus multiplicibus superpartientibus, quod apertè, & distinctè in qualibet earum exprimatur tàm denominator proportionis multiplicis in ea contentæ, quàm partes aliquotæ, ut perspicuè in exemplis prolatis apparet. Denominatores verò proportionum submultiplicium superpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt denominantes partes aliquotas, quæ in proportionibus expressæ sunt. Vt denominator proportionis subtriplæ superquintupartientis octavas, est $\frac{8}{25}$. subquadruplæ superbipartientis quin-

tas,

tas, $\frac{5}{22}$. &c. Invenietur autem denominator cujuslibet proportionis submultiplicis superpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, quem si multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroque producto addas partium aliquotarum numerum, obtinebis ejusdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis subduplæ superoctupartientis decimastertias, est $\frac{13}{34}$. quia hujus fractionis numerator 13. denominat partes tertiasdecimas: qui si ducatur in 2. denominatorem duplæ proportionis, productoque numero 26. adjiciatur numerus 8. octo partium, conficietur ejusdem fractionis denominator 34. &c. Denominatorem quoque cujuslibet proportionis submultiplicis superpartientis sic reperies. Reduc denominatorem proportionis multiplicis superpartientis, quæ proposita respondet, ad unam fractionem, ut in Arithmetica præcepimus, nimirum multiplicando denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero addendo numeratorem ejusdem fractionis. Nam hujus fractionis termini, si inter se permutent ordinem dabunt fractionem, quæ denominator erit proportionis submultiplicis superpartientis. Veluti si proponatur proportio subquintupla supertripartiens decimas, reducemus denominatorem correspondentis proportionis quintuplæ supertripartientis decimas, hoc est, $5\frac{3}{10}$. ad hanc fractionem $\frac{53}{10}$. quod fit ducendo 5. in 10. productoq; numero addendo 3 ut fiat numerator 53. cui idem denominator 10. supponendus est. Nam si hæc fractio terminos permutet, fiet denominator proportionis subquintuplæ supertripartientis decimas, $\frac{10}{53}$. &c. Sed forsitan facilius denominatorem cujusvis proportionis submultiplicis superpartientis obtinebis, si primos, sive minimos numeros proportionis multiplicis superpartientis respondentis reperias, ex eisque fractionem constituas, sumendo minorem pro numeratore, & majorem pro denominatore. Fractio enim hæc dabit denominatorem proportionis propositę. Vt si proponatur proportio subquintupla supertripartiens decimas: quoniam minimi numeri in proportione quintuplà supertripartiente decimas sunt 53. & 10. constituetur ex iis denominator proportionis propositæ hæc fractio $\frac{10}{53}$. & sic de cæteris.

Denominator denique proportionis æqualitatis perpetuò est unitas: quia una quantitas debet in ea proportione esse æqualis alteri, ac proinde una alteram continere semel; & nihil præterea, quod quidem unitas significat.

Ex his, quæ de proportionum denominatoribus diximus perspicuum

picuum esse puto, denominatores proportionum majoris inæqualitatis re & nomine ipsas proportiones majoris inæqualitatis denominare; denominatores verò proportionum minoris inæqualitatis re tantùm, non autem & verbo, sive nomine, denominare proportiones minoris inæqualitatis. Id quod ex prolatis exemplis liquidò constat. Nam denominator, verbi gratia, proportionis triplæ super quadrupartientis nonas, qui est $3\frac{4}{9}$. hoc est, tria integra, & quatuor nonæ partes, re & verbo denominat eam proportionem, cùm distinctè apertèque nobis indicet, in ea majorem quantitatem continere minorem ter, & insuper quatuor ejus partes nonas. At verò denominator correspondentis proportionis subtriplæ superquadrupartientis nonas, nimirum $\frac{9}{31}$, id est, novem trigesimæ primæ partes, re quidem ipsa proportionem subtriplam superquadrupartientem nonas denominat, cùm verè significet, minorem quantitatem in ea esse majoris novem partes trigesimas primas, quod omninò necessarium est, ut minor quantitas ad majorem habeat proportionem subtriplam superquadrupartientem nonas: Verbo autem, sive nomine, eam proportionem nequaquam denominat; quippe cum $\frac{9}{31}$. hoc est, novem partes trigesimæ primæ cum nomine proportionis subtriplæ superquadrupartientis nonas nihil videantur habere commune, sed penitus ab eo discrepare.

Quare si denominator alicujus proportionis minoris inæqualitatis numeris expressus sit, nimirum per fractionem, ut dictum est; ut scias, quo pacto proportionem, quam denominat, efferre debeas, vide quam proportionem habeat denominator ejus fractionis ad numeratorem, quod scies, si partiaris denominatorem fractionis per numeratorem. Nam Quotiens denominabit proportionem, quam denominator fractionis habet ad numeratorem. Eodem enim nomine proportionem dati denominatoris proportionis minoris inæqualitatis pronunciabis, præpositâ tantùm syllaba, sub quo illa denominatoris fractionis ad numeratorem appellatur. Ut si detur denominator $\frac{1}{8}$. dicetur ejus proportio suboctupla. Quando enim numerator fractionis est unitas, proportio dati denominatoris erit submultiplex ab ejusdem fractionis denominatore denominata. Quodsi datus denominator sit $\frac{20}{327}$. Diviso denominatore 327. per numeratorem, fit Quotiens $16\frac{7}{20}$. Denominator igitur fractionis $\frac{20}{327}$. ad numeratorem habet proportionem sedecuplam superseptupartientem vigesimas: ac proinde proportio, cujus denominator est $\frac{20}{327}$. dicenda est subsedecupla superseptupartiens vigesimas, & sic de cæteris.

Quia verò non semper commodè omnes proportiones propriis nominib⁹ appellari possūt, (quis enim proportionē, verbi gratia, 37.

ad 4

ad 1. commodè dixerit triginta ſeptuplam, vel trigecuplam ſeptuplam, vel alio id genus nomine? Quis itē commodè proportionem 48. ad 29. dixerit ſupernovem decupartientē vigeſimas nonas? &c.) ſolent Geometræ plerumq; in ſuis ſcriptis exprimere proportionē quamcunq; per primos, ſive minimos numeros ejus proportionis. Vt proportionem 13. ad 1. vel 39. ad 3. vel 390. ad 30. malunt dicere eam, quā habent 13. ad 1. quam tredecuplā. Et viciſſim proportionem 1. ad 13. vel 3. ad 39. vel 30. ad 390. potius dicunt eam, quam habet 1. ad 13. quam ſubtredecuplam. Ita quoque proportionem 52. ad 40. vocant proportionem 13. ad 10. quæ alias diceretur ſupertripartiens decimas. Proportionem verò 40. ad 52. appellant eam, quę eſt 10. ad 13. quæ proprio nomine diceretur ſubſupertripartiens decimas, & ſic de aliis.

Quanquam autem proportio quælibet exprimi poſſit per minimos ejus numeros, ut diximus; perneceſſaria tamē eſt cognitio denominatoris ejuſdem proportionis, ut habitudinem unius numeri ad alterum cognoſcamus. Nam etiamſi aliquis proportionem numeri 1700. ad 400. dicat eſſe eam, quæ eſt numeri 17. ad 4. non intelligam tamen planè, quænam ſit illa proportio, niſi ejus denominatorem cognovero, qui eſt 4¼. Hic enim manifeſtè declarat, majorem numerū continere minorē quater, & inſuper quartā ejꝰ partem. Atq; hic denominator facilius ex minimis numeris alicujus proportionis percipitur, quam ex numeris non minimis. Quod ſi quando minimi numeri alicujus proportionis ſint ita magni, ut denominator ex illis non facilè poſſit intelligi, recurrendum erit ad præceptū, quod mox ſubjungā, & ex quo denominator proportionis inter quoſvis duos numeros, ſive minimi ii ſint, ſive nō, notꝰ efficitur.

Quod ſi proportionem quamcunq; per ejus numeros minimos efferunt Mathematici, licebit nobis multo commodius proportionem quorumlibet duorū numerorū explicare per ejus proportionis denominatorem: ita ut proportionē 100. ad 20. dicamus eā cujus denominator eſt 5. Item proportionem 48. ad 38 eam, cujus denominatoreſt 1 $\frac{5}{19}$. quæ dicenda eſſet ſuperquintupartiēs decimas nonas, ſic etiā proportio 20. ad 100. dici poteſt ea, quę habet denominatorem ¼. Et proportio 38. ad 48. ea, cujus nominator eſt 1$\frac{10}{24}$. atque ita de reliquis; quoniam videlicet denominator clariſſimè demonſtrat habitudinem unius numeri ad alium, ut dictum eſt.

Denominator porrò proportionis inter duos quoſvis numeros ita reperietur: Dividatur numerus antecedens, qui nimirū ad alium refertur, per conſequentem. Quotiens enim numerus, reducta prius fractione, ſi qua adſit, ad minimos numeros, ut in Arithmetica tradimus, erit ejus proportionis denominator. Veluti propoſita proport. 39. ad 3. vel 390. ad 30. dicemus denominatorem ejus eſſe 13. Quotientem videlicet numerum diviſionis 39. per 3. vel 390. per 30.

Quod

Quod si vicissim conferantur 3. cum 39. vel 30. cum 390. erit Quotiens divisionis fractio hæc $\frac{3}{39}$. vel $\frac{30}{390}$. Nam quando minor numerus per majorem dividitur, Quotiens semper est fractio, cujus numerator est minor numerus, & denominator, major: ut in Arithmetica explicavimus. Et quia utraque fractio si ejus numeri ad minimos revocētur, reducitur ad hāc $\frac{1}{13}$. dicemus denominatores proportionis 3. ad 39. vel 30. ad 390. esse $\frac{1}{13}$. Rursus data proportione 52. ad 40. ex divisione 52. per 40. fit Quotiens $1\frac{12}{40}$. cujus fractio reducitur ad hanc $\frac{3}{10}$. Igitur denominator proportionis 52. ad 40. erit $1\frac{3}{10}$. Si autem proportio offeratur 40. ad 52. invenietur denominator sive Quotiens $\frac{40}{52}$. hoc est, in minimis numeris $\frac{10}{13}$. Præterea proportio 110. ad 20. denominatorem habebit 5. Divisis nnim 100. per 20. Quotiens est 5. Proportionis verò 20 ad 100. denominator erit $\frac{1}{5}$. propterea quod divisis 20. per 10. Quotiens est $\frac{10}{100}$. id est, in minimis numeris $\frac{1}{5}$. Deinde denominator proportionis 48. ad 10. erit $4\frac{8}{10}$. quod divisis 48. per 10. Quotiens fit $4\frac{8}{10}$. hoc est, in numeris minimis, $4\frac{4}{5}$. At denominator proportionis 10. ad 48. erit $\frac{10}{48}$. id est in minimis numeris $\frac{5}{24}$. Et quia denominator fractionis $\frac{5}{24}$. ad numeratorem habet proportionem quadruplam superquadrupartientem quintas, (quod divisis 24. per 5. Quotiens fiat $4\frac{4}{5}$. appellabitur proportio 10. ad 48. subquadrupla superquadrupartiens quintas. Et enim ritè efferatur proportio minoris inæqualitatis, denominanda prius est proportio denominatoris fractionis ad numeratorem, ut suprà diximus.

Invento denominatore proportionis duorum numerorum in minimis numeris, ut dictum est, eoque reducto ad unam fractionem, ut in Arithmetica traditum est, erunt numerator, & denominator fractionis, minimi numeri, iter quos illa porportio reperitur. In multiplici tamen proportione, quando nimirum denominator inventus non habet annexam fractionem, erunt denominator inventus, & unitas, minimi numeri illius proportionis. Vt quoniam denominator proportionis 348. ad 120. est $2\frac{8}{10}$. si reducatur ad hanc unam fractionem $\frac{28}{10}$. (quod fit, ducendo integrum numerum 2. in denominatorem fractionis 10. productoque numero 20. ejusdem fractionis numeratorem 9. addendo.) erunt 29. & 10. minimi numeri habentes proportionem eandem, quam 348. ad 120. Sic etiam, quia denominator proportionis 824. ad 1133. est $\frac{8}{11}$. erunt 8 & 11. minimi numeri proportionis 824. ad 1133. Item quia denominator proportionis 84. ad 12. est 7. erunt in ea proportione minimi numeri 7. & 1. Vicissim numeri minimi proportionis 12. ad 84. cujus denominator est $\frac{1}{7}$. erunt 1. & 7. Itaque propositis duobus numeris quibuscunque, si quærantur minimi numeri eandem, quam illi, habentes proportionem, invenien-dus erit denominator proportionis eorum, ut dictum est, isque ad

unam fractionem redigendus. Hujus enim fractionis numerator, & denominator, erunt minimi numeri quæsiti. Vt si quærantur minimi numeri proportionis, quam habent 400. ad 90. Diviso antecedente per consequentem terminum, fit Quotiens $4\frac{4}{9}$. in minimis numeris. Quo revocato ad hanc fractionem $\frac{4}{9}$ dicemus, minimos numeros proportionis 400. ad 90. esse 40. & 9. Eademque ratio est de cæteris.

Iam verò si, propositis duabus proportionibus, cognoscere velis, utra earum major sit, vel minor, dices eam majorem esse, cujus denominator major est, minorem verò eam, cujus denominator est minor. Quod si denominatores sint æquales, proportiones quoq; æquales esse pronunciabis. Vt si proponantur duæ hæ proportiones, superoctupartiens decimas quintas, & superdecupartiens decimas septimas, quarum denominatores sunt $1\frac{8}{15}$. & $1\frac{10}{17}$. dices priorem posteriore esse minorem: quia denominator $1\frac{8}{15}$. minor est denominatore $1\frac{10}{17}$. Qua vnrò arte cognoscas, utra duarum fractionum major sit, vel minor, an vero æquales sint, tradidimus in Arithmetica, Eadem ratione, si offerantur duæ proportiones, quarum denominatores sunt $10\frac{1}{1000}$. $9\frac{100}{101}$. dicemus priorem esse majorem. Quanquam enim fractio $\frac{1}{1000}$. minor sit fractione $\frac{100}{101}$. numerus tamen integer 10. integro numero 9. major est. Sic si dentur duæ proportiones, una 17. ad 11. altera 18. ad 12. dices illam hac esse majorem, quia illius denominator $1\frac{6}{11}$. major est hujus denominatore $1\frac{1}{2}$. Cæaerum, quando duæ proportiones proponuntur in numeris, dignoscemus facilè, utra earum sit major, etiamsi earum denominatores non inquiramus, hac ratione. Multiplicatio antecedente termino prioris proportionis in terminum consequentem posterioris, & termino antecedente posterioris in consequentem terminum prioris; cujus proportionis antecedens terminus majorem numerum produxerit, illa proportio major est; Et si duo æquales numeri geniti fuerint, proportiones inter se æquales erunt. Vt si proponantur duæ proportiones 17. ad 11. & 18. ad 12. comperiemus priorem majorem esse, quia illius antecedens 17. in hujus consequentem 12. ductus procreat 204. at antecedens hujus 18. in consequentem illius 11. producit tantummodo 198. Rursus si dentur duæ proportiones 18. ad 12. & 108. ad 72. producetur idem numerus 1296. tàm ex prioris antecedente 18. in posterioris consequentem 72. quàm ex antecedente posterioris 108. in consequentem prioris 12. multiplicato. Quare proportiones ipsæ æquales inter se erunt. Ratio hujusce operationis est: quia hac ratione, propositis quatuor numeris, multiplicantur inter se tàm extremi duo, quàm duo intermedii, ut in datis exemplis patet. Igitur si procreentur numeri æquales, erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertii ad quartum, ut ab Euclide demonstratur

lib. 7.

lib. 7. propos. 19. Hinc fit, si primus in quartum producat majorem numerum, quam secundus in tertium, majorem esse primum, quam ut eandem habere possit proportionem ad secundum, quam tertius ad quartum: quandoquidem minor esse deberet, ut eundem numerum posset producere, ac proinde eandem habere proportionem.

Desiderantur nonnunquam duo numeri in quacunque proportione, sive ii primi sint, sive non: hos ergò, ut inveniamus, multiplicabimus quemcunq; numerum assumptum, vel dividemus, per propositæ proportionis denominatorem. Nam productus numerus ad assumptum, qui multiplicatus est, vel assumptus, qui divisus est, ad Quotientem habebit proportionem propositam. Verbi gratia, si sint inveniendi duo numeri in proportione quintupla, ducemus quemcunque numerum, ut 100. in denominatorem 5. Productus enim numerus 500. ad multiplicatum numerum 100. proportionem habebit quintuplam. Vel eundem numerum 100. dividemus per denominatorem 5. Nam divisus numerus 100. ad Quotientem 20. habebit quoque datam proportionem quintuplam. Ita quoque si inveniendi sint duo numeri in proportione dupla sesquitertia, cujus denominator est $2\frac{1}{3}$. multiplicabimus quemvis numerum, ut 24. per $2\frac{1}{3}$. Productus enim numerus 56. ad numerum multiplicatum 24. habet proportionem denominatam à $2\frac{1}{3}$. idem si numerum 24. dividamus per $2\frac{1}{3}$. habebit divisus numerus 24. ad Quotientem $10\frac{2}{7}$. proportionem datam duplam sesquitertiam. Sed ut fractiones vitentur, si quidem per multiplicationem rem expedire lubet, accipiendus erit numerus multiplicandus, qui numeretur à denominatore partis aliquotæ, vel plurium partium, quarum in proportione fit mentio: In proportione tamen multiplici, quia nullius partis fit mentio, assumi potest quilibet numerus. Vt si desiderentur duo numeri proportionis triplæ superbipartientis nonas, accipiendus erit numerus à 9. numeratus, qualis est 18. vel 27. 36. 45. &c. Quilibet enim horum ductus in denominatorem $3\frac{2}{3}$. gignet numerum integrum: ut ductus 45. in $3\frac{2}{3}$. fit numerus 145. qui ad assumptum numerum 45. proportionem habet datam. Sic etiam si cupiat quis proportionem subquadruplam, cujus denominator est $\frac{1}{4}$. sumendus erit numerus à 4. numeratus, ut 12. Hic enim ductus in denominatorem $\frac{1}{4}$. producet 3. numerum integrum, qui ad assumptum 12. habet proportionem subquadruplam. Si verò per divisionem agendum sit, & fractiones vitandæ, sumendus erit in proportione multiplici numerus à denominatore proportionis numeratus. In aliis autem proportionibus revocandus erit denominator proportionis ad unam fractionem, numerusque sumendus à numeratore numeratus. Vt si quæratur proportio quintupla,

ſumendus erit, verbi gratia, numerus 30. a 5. numeratus. Hic enim diviſus per denominatorem 5. facit Quotientem 6. ad quem proportionem habet quintuplam. Si autem deſideretur proportio, cujus denominator ſit $4\frac{3}{5}$. revocato eo ad fractionem $3\frac{1}{5}$. ſumendus erit numerus à 31. numeratus, ut 62. Nam hoc diviſo per $3\frac{1}{5}$. fit Quotiens 14. ad quem acceptus numerus 64. habet proportionem à $\frac{4}{5}$. denominatam, nimirum quadruplam ſupertripartientem ſeptimas. Cæterum ſi duo numeri proponantur, cupiatque quis alios duos in eadem proportione reperire, ſatis erit, ſi utrumque per quemvis numerum multiplicet, aut dividat. Numeri enim producti, aut Quotientes eandem habebunt proportionem, quam propoſiti duo numeri. Item ſi propoſito quovis numero, inveniendus ſit alius, qui ad eum proportionem habeat datam, vel ad quem is datam habeat proportionem, aſſequeris primum, ſi propoſitum numerum per denominatorem proportionis multiplices: at ſecundum obtinebis, ſi eundem per denominatorem proportionis dividas. Quod ſi proportio detur in duobus numeris, proponaturq; tertius quiſpiam numerus; ſi quidem inveniendus ſit quartus, ad quem tertius datus eandem habeat proportionem, quam primus datus ad ſecundum: ſi quidem denominator proportionis duorum numerorum datorum notus eſt, dividendus erit tertius numerus datus per denominatorem. Quotiens enim numerus erit, quem quærimus. Vel certè, ſive denominator cognitus ſit, ſive non, multiplicandus erit tertius numerus per ſecundum datum, hoc eſt, per conſequentem terminum datæ proportionis, productuſque numerus per primum, ſive per antecedentem terminum dividendus. Vt ſi dentur duo numeri 4. 7. quorum proportionis denominator eſt $\frac{4}{7}$. detur item tertius numerus 20. Divide numerum 20. per denominatorem $\frac{4}{7}$. producaturque quartus numerus quæſitus 35. Vel multiplica tertium numerum 20. per ſecundum 7. & productum numerum 140. partire per primum 4. Ad Quotientem enim 35. habebit tertius numerus 20. eandem proportionem, quam 4. ad 7. Si verò inveniendus ſit quartus, qui ad tertium eandem habeat proportionem, quam dati duo numeri, ſi quidem denominator notus eſt ducendus is erit in tertium numerum. Productus enim numerus erit, quem quæris. Vel ſive notus ſit denominator, ſive non, multiplicandus erit tertius numerus per primum datum, nimirum per terminum antecedentem, & numerus productus per ſecundum, id eſt, per conſequentem terminum, dividendus. Vt datis eiſdem duobus numeris 4. 7. & tertio 20. multiplica 20. per $\frac{4}{7}$. denominatorem, gigneturque quæſitus numerus $11\frac{3}{7}$. Vel duo tertium numerum 20. in primum 4. numerumque productum 80. partire per ſecundum 7. Nam ad tertium 20. habebit Quotiens $11\frac{3}{7}$. eandem proportionem, quam 4. ad 7.

Quia

Quia verò diximus eam proportionem esse majorem; cujus denominator major est, fit, ut in proportionibus multiplicibus detur minima; nimirum dupla, denominata à 2. non autem maxima: propterea quod numerus 2. inter omnes denominatores proportionum multiplicium est minimus, maximus autem dari non potest, cum numeri augeantur in infinitum. Efficitur quoque, inter proportiones superparticulares reperiri maximam nimirum sesquialteram, denominata à $1\frac{1}{2}$. non autem minimam: quia numerus $1\frac{1}{2}$. omnium denominatorum proportionum superparticularium maximus est, minimus autem dari non potest, cum denominatores fractionum progredi possint in infinitum. Constat autem ex iis, quæ in Arithmetica tradidimus, fractionem, cujus denominator major est, minorem esse, si idem sit numerator: fractionem autem, cujus denominator minor est, si idem sit numerator, majorem esse. Cùm ergò denominator 2. sit omnium minimus, erit fractio $\frac{1}{2}$. omnium, quæ numeratorem habent 1. (quales sunt fractiones denominatorum proportionum superparticularium) maxima. Colligitur denique, in aliis proportionibus majoris inæqualitatis neque minimam posse dari, neque maximam. Quod intelligendum est de ultimis speciebus. Nam si de ultimis speciebus non sit sermo, erit superbipartiens inter superpartientes, minima; superpartiens autem tertias, maxima. Inter multiplices autem superparticulares maxima erit multiplex sesquialtera: minima verò, dupla superparticularis. Inter multiplices denique superpartientes maxima erit multiplex superpartiens tertias: minima verò, dupla superbipartiens. E contrario in proportionibus submultiplicibus datur maxima, nimirum subdupla, non autem minima: In subsuperparticularibus autem reperitur minima, ut subsesquialtera, non autem maxima: In aliis denique proportionibus minoris inæqualitatis neque maxima, neq; minima dari potest. Quæ omnia perspicua erunt, si denominatores proportionum inter se conferantur.

Colligitur etiam, hanc esse connexionem inter proportionem majoris inæqualitatis, æqualitatis, & minoris inæqualitatis, ut quælibet proportio majoris inæqualitatis major sit proportione æqualitatis, quælibet verò proportio minoris inæqualitatis, minor: propterea quod quilibet denominator proportionis majoris inæqualitatis, quantumvis minimus, major est unitate, quæ denominator est proportionis æqualitatis, cum ille minor esse nequeat, quàm unitas cum una parte aliquota: At denominator proportionis minoris inæqualitatis semper minor est, quàm unitas, cum sit fractio, cujus numerator à denominatore superatur, ut ex iis, quæ supra diximus, patet. Itaque proportio æqualitatis media est inter proportionem majoris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Vbi hoc animadversione dignum est. Proportionem majo-

ris inæqualitatis decreſcendo appropinquare ſemper magis ac magis in infinitum proportioni æqualitatis, nunquam tamen ad eam pervenire: E contrario verò proportionem minoris inæqualitatis creſcendo ſemper magis, ac magis in infinitũ accedere ad eandem proportionem æqualitatis, nunquam tamen eam attingere. Nam qualibet proportione multiplici propoſita datur minor, ac minor, uſq; ad duplam, quæ omniũ multiplicium eſt minima. Deinde hac datur minor, nimirũ ſuperparticulatis, vel ſuperpartiens quæcunque, in qua cum minima non poſſit dari, omniſq; proportio ejuſmodi major ſit proportione æqualitatis, liquido conſtat, proportionẽ majoris inæqualitatis ad æqualitatis proportionem non poſſe pervenire, etiamſi in infinitũ decreſcendo ad ipſam accedat. Rurſus cum omnis proportio minoris inęqualitatis minor ſit proportione æqualitatis non poſſit autẽ in ea reperiri maxima, manifeſtũ quoque eſt, proportionem minoris inæqualitatis attingere non poſſe proportionem æqualitatis, licet in infinitũ creſcendo ad eam accedat. Sed utrumque exemplo etiam diſcatur, ſciendũ eſt, ſi inter duos numeros quoſvis non proximos interponatur quilibet numerus intermedius, major ſcilicet uno eorũ, & altero minor; proportionem majoris numeri ad minorem diviſam eſſe in duas minores, quarũ una eſt majoris numeri ad mediũ interpoſitũ, altera verò numeri medii ad minorem. Item proportionem minoris numeri ad majorem diviſã eſſe in duas majores, quarum una eſt minoris numeri ad medium interpoſitum, altera verò medii ad majorem. Vt ſi inter dũos numeros 6. 3. ponatur medius 4. hoc modo 6. 4. 3. proportio 6. ad 3 quæ dupla eſt, diviſa erit in ſeſquialteram 6. ad 4 & ſeſquitertiam 4. ad 3. quarum utraque minor eſt proportione dupla 6. ad 3. Contrà verò, proportio 3. ad 6. quæ ſubdupla eſt, diviſa erit in ſubſeſquitertiam 3. ad 4. & ſubſeſquialteram 4. ad 6. quarum utraque major eſt proportione ſubdupla 3. ad 6. Idem fit, ſi inter eoſdem numeros 6. 3. interponatur medius 5. hoc modo, 6. 5. 3. Tàm enim proportio 6. ad 5. ſeſquiquinta, quàm proportio ſuperbipartiens tertias 5. ad 3. minor eſt proportione dupla 6. ad 3. Contra verò tàm proportio ſuperbipartiens tertias 3. ad 5. quàm ſubſeſquiquinta 5. ad 6. major eſt proportione ſubdupla 3. ad 6. Quæ omnia ex denominatoribus probari poſſunt. Verum utrumque demõſtrabitur hac ratione. Quoniam medius numerus minor eſt majore dato, & major minore, habebit major datus ad minorem datum, majorem proportionem, quam idem major ad medium, & quam medius ad minorem. At verò minor ad majorem habebit minorem proportionem, quam idem minor ad medium, & quam medius ad majorem, ut manifeſtum eſt, vel ex defin. 20. lib. 7. ut ibidem explicavimus, vel ex propoſ. 8. hujus lib. 5. ubi demonſtrat Euclides, propoſitis duabus quantitatibus inæqualibus

majoris

majoris ad tertiam aliquam esse majorem proportionem quàm minoris: At è contrario, tertiam eandem quantitatem ad majorem habere minorem proportionem, quàm ad majorem. Ex quo sequitur id, quod diximus: nimirum positis his tribus numeris 6. 4. 3. majorem esse proportionem ejusdem numeri 6. ad minorem 3. quàm ad medium 4. majorem: Item majorem esse proportionem majoris numeri 6. ad 3. quàm minoris 4. ad eundem 3. Contrà verò, majorem esse proportionem ejusdem numeri 3. ad minorem 4. quàm ad majorem 6. Item majorem esse proportionem majoris numeri 4. ad 6. quàm minoris 3 ad eundem 6. Eademq; in cæteris ratio est. His positis erit proportio dupla 4. ad 2. divisa hic 4. 3. 2. in duas minores. Et tàm proportio 8. ad 6. quæ eadem est, quæ 4. ad 3. divisa hic 8. 7. 6. quàm proportio 6. ad 4. quæ eadem est, quæ 3. ad 2. hic 6. 5. 4. in duas minores. Item tàm proportio 16. ad 14. quæ eadem est, quæ 8. ad 7. divisa hic 16. 15. 14. & proportio 14. ad 12. quæ eadem est, quæ 7. ad 6. hic 14. 13. 12. quàm proportio 12. ad 10. quæ eadem est, quæ 6. ad 5. hic 12. 11. 10. & proportio 10. ad 8. quæ eadem est, quæ 5. ad 4. hic 10. 9. 8. in duas minores: atque ita fieri potest in infinitũ. E contrario verò proportio subsesquialtera 4. ad 6. divisa erit hic 4. 5. 6. in duas majores. Et tàm proportio 8. ad 10. quæ eadem est, quæ 4. ad 5. divisa hic, 8. 9. 10. quam proportio 10. ad 12 quę eadẽ est, quę 5. ad 6. hic 10. 11. 12. in duas majores. Item tàm proportio 16. ad 18. quæ eadem est, quæ 8. ad 9. divisa hic, 16. 17. 18. & proportio 18. ad 20. quæ eadem est, quæ 9. ad 10. hic 18. 19. 20. quàm proportio 20. ad 22. quæ eadem est, quæ 10. ad 11. hic 20. 21. 22. & proportio 22. ad 24. quæ eadem est, quæ 11. ad 12. hic 22. 23. 24. in duas majores: atque hujus incrementi nunquam erit finis. Idemq; experiri licebit in quibusvis aliis proportionibus. Vt proportio decupla 10. ad 1. divisa hic est, 10. 6. 1. in duas minores: Et proportio subsuperseptupartiens undecimas 11. ad 18. divisa hic 11. 15. 18. in duas majores &c.

DE PROPORTIONALITATIBUS.

Proportionalitas ab Euclide definita in plura genera dividitur, ut videre licet apud Boëtium, Iordanum, & alios Arithmeticos: sed præcipuè proportionalitates, quas auctores nominati Medietates vocant, sunt hę tres: Arithmetica, Geometrica & Musica, sive Harmonica.

Arithmetica proportionalitas, sive Medietas, est, quando tres, vel plures numeri per eandem differentiam progrediuntur. Vt hi numeri 4. 7. 10. 13. 16. quorum quilibet suum antecedentem ternario superat,

dicuntur constituere proportionalitatem Arithmeticam. Est autem duplex continua, & discreta. Continua est, quando in progressione numerorũ nulla fit interruptio, sed quilibet cum proximè antecedente cõfertur, ut in dato exemplo fit. Discreta autem est, quando in numerorũ progressione interruptio fit, ita ut bini tantùm inter se conferantur, non autem quilibet cum proximè præcedente. Vt in his numeris contingit, 4. 7. 8. 11. 30. 33. Nam eadem differentia est inter binos 4. 7. & 8. 11. & 30. 33. non autem inter 4. 7. & 7. 8. &c.

Geometrica proportionalitas, sive Medietas est, quando tres, vel plures numeri eandem prpportionem habent: quam quidem Euclides definivit: Hæc enim propriè proportionalitas dicitur, sive analogia: aliæ verò impropriè, cum non sit eadem semper inter earum terminos proportio, ita ut rectius Medietates dicantur propter medios terminos, qui certa quadã ratione inter extremos interjiciuntur. Vt hi numeri 2. 6. 18. 54. quoniã quilibet ad suum antecedentem eandẽ habet proportionem triplam, constituunt proportionalitatem Geometricam. Hæc duplex quoq; est, continua & discreta, ut in 4. defin. hujus lib. explicavimus. Continua cernitur in datis numeris, discreta autem in hisce sex 2. 3. 12. 18. 20. 30. Nam bini tantùm 2. 3. & 12. 18. & 20. 30. eandem habent proportionem sesquialteram; non autem quilibet ad proximè præcedentem.

Musica sive Harmonica proportionalitas, sive Medietas est, quando tres numeri ita ordinantur, ut eadem sit proportio maximi ad minimum, quæ differentiæ inter majores duos ad differentiam inter duos minores: ita ut nec eadem inter eos sit differentia, ut in Arithmetica, nec eadem proportio, ut in Geometrica. Vt tres illi numeri 3. 4. 6. quoniam eadem est proportio maximi 6. ad minimum 3. quæ differentiæ inter maximum 6. & medium 4. nimirum numeri 2. ad differentiam inter medium 4. & minimũ 3. id est, ad 1. (cum utrobiq; proportio sit dupla) constituunt proportionalitatem, sive Medietatem Musicam sive Harmo-

Harmonicam: Ipsi verò neque eandem habent differentiam, neque eandem proportionem, ut patet. Sic etiam tres hi numeri *42*, *12*. 7. Harmonicam proportionalitatem constituunt, quia eadem proportio est maximi *42*. ad minimũ 7. quæ differentiæ inter maximũ *42*. & mediũ *12*. h.e. numeri *30*. ad differentiã 5. inter mediũ *12*. & minimũ 7. cum utrobique proportio sit sextupla. Dicitur autem hujusmodi proportionalitas Musica, sive Harmonica, quia plerumque ejus numeri habent proportiones eas, in quibus consonantię Musicę consistunt. Vt in priori exemplo inter 6. & *4*. est proportio sesquialtera, constituens consonantiam, quæ Diapente dicitur, sive Quinta. Item inter *4*. & *3*. est proportio sesquitertia, constituens consonantiam, quam Diatesseron sive Quartam vocant. Denique inter extremos 6. & *3*. cernitur proportio dupla, quæ Diapason consonantiam, sive octavam constituit. Atque eodem modo in plerisque aliis idem cernitur.

PROPRIETATES ALIQVOT TRIVM PROPORTIONALITATUM, sive Medietatum, quas explicavimus.

I.

In tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, minor est proportio maximi ad medium, quàm medii ad minimũ. Vt hic patet. 2. 4. 6. Nam proportio 6. ad 4. est sesquialtera: & 4. ad 2. dupla.

At in tribus numeris proportionalitatis Musicæ, major est proportio maximi ad medium, quàm medii ad minimum. Vt hic vides. 3. 4. 6. Proportio enim 6. ad *4*. est sesquialtera: & 4. ad 3. sesquitertia.

In tribus deniq; numeris proportionalitatis Geometricæ, eadem est proportio maximi ad medium, quę medii ad minimũ, ut ex ejus definitione constat, apparetque in hisce tribus numeris 3. 6. 12. Tam enim 12. ad 6. quam 6. ad *3*. duplam habent proportionem. Qua in re Geometrica proportionalitas mediũ locũ tuetur inter Arithmeticam, atq; Harmonicã, cum in Arithmetica inter majores numeros minor sit proportio, quàm inter minores. Cõtrà verò in Harmonica inter majores numeros major, quàm inter minores: In Geometrica autem eadem inter majores, quæ inter minores, ut explicatum est.

II.

Arithmetica proportionalitas habet terminorum differentias æquales, proportiones verò eorundem inæquales.

Geometrica è contrario differentias terminorum habet inæquales, proportiones verò eorundem æquales.

Harmonica denique neque differentias, neque proportiones terminorum ęquales habet: Patet ex superioribus exemplis.

III.

In tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, medius eadem sui parte, vel partibus minorē superat & à majori superatur. Vt hic, 3. 7. 11. Medius 7. superat minorē 3. quatuor unitatibus, quæ efficiunt $\frac{4}{7}$ ipsius medii 7. Item medius idem 7. superatur à majore 11. quatuor quoq; unitatibus, quę constituunt ejusdē medii $\frac{4}{7}$. Item hic 15. 20. 25. medius 20. superat minorē 15. quinque unitatibus, quæ efficiunt $\frac{1}{4}$. ipsius medii 20. Itē medius idē 20. superatur à majore 25. quinq; quoq; unitatib⁹, quę cōstituunt $\frac{1}{4}$. ejusdē medii 10.

At in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, medius eadē sui parte, vel partibus minorem superat, qua parte, vel partibus majoris à majore superatur. Vt hic 4. 6. 9. medius 6. superat minorē 4. binario, qui est $\frac{1}{3}$. medii superaturq; à majore 9. ternario, qui quoq; est $\frac{1}{3}$. majoris. Sic etiam hic 9. 15. 25. ubi est continua proportio superbipartiens tertias, medius 15. superat minorē 9. sex unitatibus, quę faciunt $\frac{2}{5}$ ipsius medii 15. Et idē medius 15. superatur à majore 25. decē unitatibus, quę efficiunt quoq; $\frac{2}{5}$ ipsius majoris 25.

In tribus deniq; numeris Harmonicæ proportionalitatis, medius eadē parte, vel partibus minorē superat, qua parte vel partibus majoris à majore superatur. Vt hic 3. 4. 6. medius 4. superat minorem 3. unitate, quæ est $\frac{1}{3}$. ejusdē minoris, superaturq; à majore 6. binario, qui quoque est $\frac{1}{2}$. ejusdē majoris. Rursus in hac proportionalitate Harmonica, 42. 12. 7. medius 12. superat minorē 7. quinq; unitatibus, quæ sunt $\frac{5}{7}$. ipsius minoris 7. Et idem medius 12. superatur à majore 42. triginta unitatibus, quæ sunt $\frac{30}{42}$. hoc est, in minimis numeris, $\frac{5}{7}$. quoque ipsius majoris 42.

IV.

In trib⁹ numeris Arithmeticę proportionalitatis, sūma extremorū dupla est medii. Vt hic 3. 7. 11. summa extremorū 14. dupla est medii.

At in tribus numeris proportionalitatis tàm Geometricę, quàm Harmonicę, summa extremorū superat duplum medii numero, quo differentia majorū, differentiā minorum superat. Vt hic, 4. 6. 9. & 3. 4. 6. tàm summa 13. extremorū 4. 9. superat duplū medii 6. h. e. 12. unitate, qua differentia majorū, nimirum 3. superat 2. differentiā minorū, quàm summa 9. extremorū 3. 6. duplū medii 4. i. e. 8. superat unitate, qua differentia majorum, nimirū 2. superat differentiam minorum, quæ est 1. Sic etiam hic 9. 15. 25. ubi est continua proportio superbipartiens tertias, summa 34. extremorū 9. 25. superat duplū medii 15. hoc est, 30. numero 4. quo eodē differentia majorum 10. differentiam minorū. 6. superat. Item in hac proportionalitate Harmonica, 42. 12. 7. summa 49. extremorū duplū medii 12. id est, 24. superat numero 25, quo differentia majorum 30. superat differentiam minorū 5.

V. In

V.

In tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, extremi inter se multiplicati procreant numerũ, qui à quadrato medii superatur numero, qui fit ex differentia minorũ in majorũ differentiam. Vt hic 3.7.11. numerus 33. factus ex 3. in 11. superatur à 49. quadrato medii; numero 16. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4.

At in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, numerus ex primo in tertium genitus quadrato medii æqualis est, ut hic 4. 6. 9. Extremi inter se multiplicati faciunt 36. quadratum medii.

In tribus numeris denique Harmonicæ proportionalitatis, numerus ex multiplicatione extremorũ inter se genitus superat quadratum medii numero, qui fit ex differentia minorũ in differentiam majorũ. Vt hic 42.12.7. numerus 294. factus ex 42. in 7. superat 144. quadratũ medii numero 150. qui fit ex differentia 30. in differentiam 5. Quã in re etiam medium locũ obtinet Geometrica proportionalitas inter Arithmeticam, & Harmonicam; quippe cum in Arithmetica minus producatur ex primo in tertium, quàm ex medio in se, in Harmonica verò plus, & in Geometrica idem numerus gignatur.

VI.

In tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, summa extremorum in medium ducta producit numerũ, qui duplũ producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam majorum duplicatam. Vt hic 3. 7. 11. Summa extremorũ 14. in medium 7. facit 98. qui numerus superat numerũ 66. qui duplus est producti 33. ex primo in tertiũ, numero 32. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4. duplicatã, hoc est, in 8.

In tribus autem numeris Geometricæ proportionalitatis summæ extremorũ in mediũ multiplicata gignit numerũ, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorũ in differentiam majorũ. Vt hic 4 6.9. Summa 13. extremorũ in medium 6. facit 78. qui numerus duplum producti ex 4. in 9. i.e. 72. superat numero 6 ex differentia 2. in differentiam 3. genito.

Denique in tribus numeris proportionalitatis Harmonicæ, ex summa extremorum in medium procreatur numerus duplus producti ex primo in tertium. Vt hic 3. 4. 6. Ex summa extremorum 9. in medium 4. fit numerus 36. duplus producti 18. ex 3. in 6.

VII.

Quatuor numeris in proportionalitate Geometrica non continuè proportionalibus datis, si secundus est inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, erit tertius inter eosdem extremos medius in Harmonica proportionalitate: Et si secundus medius est in proportionalitate Harmonica, erit tertius in Arithmetica medius. Vt hic, 6 9. 8. 12. quoniam ita est 6. ad 9.

ad 9. ut 8. ad 12. Et sunt 6. 9. 12. proportionales Arithmeticè, cum eundem habeant excessum 3. vides 6. 8. 12. Harmonicè proportionales esse, cum eadem sit proportio 12. ad 6. quæ differentiæ majorum, 4. ad 2. differentiam minorum. Item hic 6. 8. 9. 12. quia ita est 6. ad 8. ut 9. ad 12. Et sunt 6. 8. 12. proportionales Harmonicè, ut diximus, vides 6. 9. 12. Arithmeticè esse proportionales, cum eundem excessum 3. habeant.

Item quatuor numeris datis quorum alteruter mediorum sit inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica: erunt quatuor dati numeri Geometricè non continuè proportionales. Vt quia datis his 4. numeris, 4. 6. 8. 12. tertius 8. medius est Arithmeticè inter extremos 4. 12. & secundus 6. inter eosdem extremos 4. 12. medius est Harmonicè; vides ita esse 4. ad 6. ut 8. ad 12. Et 4. ad 8. ut 6. ad 12.

VIII.

Propositis quotquot numeris continuè proportionalibus sive Arithmeticè, sive Geometricè, sive Harmonicè, (continuantur autem plures numeri in proportionalitate Harmonica, quando tres primi sunt Harmonicè proportionales, itē tres primū insequentes, relicto primo: & relictis primis duobus, alii tres, qui sequuntur: nec non primis tribus relictis, subsequentes tres, & sic deinceps) erunt in eadem proportionalitate constituti numeri, qui in locis tàm imparibus, quàm paribus, atq; etiam partim in imparibus, partim in paribus alternis locantur, dummodo æqualis multitudo numerorum inter quosvis impares, & pares, vel inter partim impares, partim pares alternis interjiciantur: cujusmodi sunt primus, tertius, quintus, septimus, &c. Item secundus, quartus, sextus, &c. Præterea primus, quartus, septimus &c. Insuper primus, quintus, nonus, &c. atque ita deinceps. Id quod in exemplis, quæ sequuntur, perspicuum est.

PROPORTIONALITATES ARITHMETICÆ.

3.	7.	11.	15.	19.	23.	27.	31.	35.	39.	43.	47.	51.	55.	59.
3.		11.		19.		27.		35.		43.		51.		59.
	7.		15.		23.		31.		39.		47.		55.	
3.			15.			27.			39.			51.		
	7.			19.			31.			43.			55.	
3.				19.			35.			51.				

Pro-

Proportionalitates Geometricæ.

5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120	10240	20480	40960
5		20		80		320		1280		5120		20480	
	10		40		160		640		2560		10240		40960
5		40		320		2560		20480					
	10		80		640		5120		40960				
5			80			1280			20480				

Proportionalitates Harmonicæ.

1252	280	315	360	420	504	630	840	1260	2520
252		315		420		630		1260	
	280		360		504		840		2520
252			360		360				2520
	280			420			840		
252			420				1260		

IX.

Quotquot numeris proportionalibus datis sive in Arithmetica proportionalitate, sive Geometrica, aut Harmonica, si singuli per aliquem numerum eundem multiplicentur, aut dividantur, habebunt quoque producti numeri, vel Quotientes proportionalitatem Arithmeticam, vel Geometricam, aut Harmonicam. Vt hic vides singulos multiplicatos per 4. Item divisos per. 4

Arithmetica pro.	Geometrica pro.	Harmonica pro.
20 | 28 | 36	20 | 40 | 80	60 | 84 | 140
Producti.	Protracti.	Protracti.
80 | 112 | 144	80 | 160 | 320	240 | 336 | 560
Quotientes.	Quotientes.	Quotientes
5 | 7 | 9	5 | 10 | 20.	15 | 21 | 35

Cæterum in Geometrica, & Harmonica proportionalitate, numeri producti, & Quotientes retinent eandem specie proportionem, quam numeri multiplicati, aut divisi habent: At in Arithmetica nō servant eandem differentiam: Sed producti numeri habent differentiam differentiæ multiplicatorum numerorū multiplicem à numero multiplicante denominatam. Vt in dato exemplo quadruplam. Differentia enim inter 20. & 28. est 8. at inter 80. & 112. est 32. Quotientum verò differentia ad differentiam numerorum divisorum habet proportionem submultiplicē à divisore denominatā, prępositā parti-

particula ſub. Vt in dato exemplo ſubquadruplam. Nam differentia inter 20. & 28. eſt 8. at inter 5. & 7. eſt 2. Eadem proportio differentiarum inter productos numeros, & multiplicatos, atque inter Quotientes, numeroſq; diviſos reperitur in proportionalitate Geometrica, & Harmonica: Ita vides differentias numerorum 80. 160. 320. Item numerorum 240. 336. 560. quadruplas eſſe differentiarum inter numeros 20. 40. 80. & inter numeros 60. 84. 140. At verò differentias numerorum 5. 10. 20. & numerorum 15. 21. 35. eſſe earundem differentiarum ſubquadruplas.

DE PROPORTIONALITATE ARITHMETICA.

I.

Datis duobus numeris quibuſcunq; , ſi eorum differentiam majori addas, habebis tertium terminum in proportionalitate Arithmetica utroque dato majorem. Et ſi eandem differentiam huic tertio addas, conficies quartum adhuc majorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps reperies infinitos alios ſemper majores, ſi differentiam ultimo invento ſemper adjicias, Vt datis duobus numeris 4. 11. quorum differentia eſt 7. conſtituetur hæc proportionalitas Arithmetica, quæ extendi poteſt in infinitum.

4. 11. 18. 25. 32. 39. 46. 53. 60. 67. &c.

Quod ſi eandem differentiam à minori ſubtrahas, quando ſubtrahi poteſt, habebis rurſus tertium terminum in eadem proportionalitate: utroque minorem: Et ſi differentiam eandem à tertio detrahas, reliquus fiet quartus adhuc minor in eadem proportionalitatis. Atque ita deinceps invenies alio minores, ſi differentiam ab ultimo invento ſemper demas, donec ſubtractio amplius fieri nequeat. Vt datis numeris 30. 34. quorum differentia eſt 4. conſtituetur hæc proportionalitas Arithmetica uſque ad 2. quæ ulterius progredi nequit, cum differentia 4. amplius ſubtrahi nequeat.

34. 30. 26. 22. 18. 14. 10. 6. 2.

Eadem proportionalitas extendetur, etiamſi differentia non aſſumatur, hoc modo. Datis duobus numeris, à majore duplicato detrahe minorem. Reliquus enim numerus erit tertius terminus utroque dato major. A quo duplicato ſi proximè præcedentem ſubtrahas, habebis quartum; & ſic in infinitum. Vt datis duobus numeris 4. 15. ſi à 15. duplicato, hoc eſt, à 30. ſubtrahas 4. reliquus erit tertius terminus 26. Ab hujus duplo 52. ſi quoque demas 15. habebis quartum terminum 37. & ſic deinceps, ut hic apparet 4, 15. 26. 37. 48. &c.

Rurſus datis duobus numeris; ſi ex duplo minoris detrahas majorem, relinquetur tertius numerus utroque minor. Et ſi ex hujus duplo proximè præcedentem demas, relinquas quartum terminum,

num adhuc minorem; & sic deinceps, donec amplius subtractio fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 20. 27. si ex 20. duplicato, id est, ex 40. detrahas 27. reliquus fiet tertius terminus 13. Ab hujus duplo 26. si quoq; detrahas 20. manebit quartus terminus 6. Et quia ab hujus duplo 12. præcedens terminus 13. subtrahi non potest, non poterit proportionalitas ulterius progredi, ut hic vides, 27. 20. 13. 6.

II.

Quando terminorum numerus est impar, summa extremorum æqualis est summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter distantium, dupla autem medii termini, à quo extremi æqualiter distant. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28.

Summa 4. & 28. Item 7. & 25. Item 10. & 22. Item 13. & 19. Item duplum medii termini 16. semper est 32.

Quando autem numerus terminorum est par, summa extremorum æqualis semper est summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter remotorum. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31.

Summa 4. & 31. Item 7. & 28. Item 10. & 25. Item 13. & 22. Item 16. & 19. semper est 35.

Itaq; quando numerus terminorum impar est, habebit summa omnium terminorū ad medium terminū ab extremis æqualiter distantem, hoc est, ad semissem summæ extremorū, vel duorū quorumlibet ab extremis æqualiter distantiū, proportionē multiplicē à numero terminorū denominatā. Cum enim summa extremorū, vel quorumlibet duorū ab extremis æquali intervallo distantium, dupla sit termini mediī, continebitur medius terminus, sive semissis summę extremorū, in summa omnium terminorū toties, quot sunt termini: semel quidē in ipso medio termino, & bis in qualibet summa duorū à medio termino æqualiter distantiū: ac proinde omniū terminorū summa ad semissē aggregati extremorū, h. e. ad medium terminum, proportionem habebit multiplicem, cujus denominator est numerus terminorum. Vt in hac serie novem numerorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30.

Summa omniū terminorū continebit medium terminū 18. hoc est, semissem summæ extremorum 6. & 30. toties, quot unitates sunt in 9. numero terminorū, id est, summa omnium terminorū ad 18. semissem summæ extremorū, sive ad mediū terminū, proportionem habebit noncuplam. Eademque, in cęteris est ratio.

Summam igitur omnium terminorū proportionalitatis Arithmeticę, cujus terminorum numerus impar est, facilè inveniemus, si semissem aggregati extremorum, (quod semper par est,

par eſt, quando terminorum numerus eſt impar) per numerum terminorum multiplicemus. Vt in hac ſerie 11. terminorum.

7. 19. 31. 43. 55. 67. 79. 91. 103. 115. 127.

Summa extremorum eſt 134. cujus ſemiſſis 67. quæ à medio termino 67. non differt in 11. numerum terminorum ducta producit 737. ſummam omnium terminorum. Atque hæc ratio convenit etiam in proportionalitatem, cujus terminorum numerus eſt par: ſed quando extremorum ſumma impar eſt (quando enim terminorum numerus eſt par, poteſt eſſe ſumma extremorum impar, non autem ſemper par) erit ejus ſemiſſis, numerus integer cum $\frac{1}{2}$.

Quando autem terminorum numerus eſt par, habebit ſumma omnium terminorum ad ſummam extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantiam, proportionem multiplicem à ſemiſſe numeri terminorum denominatam. Cùm enim ſumma quorumlibet duorum ab extremis æqualiter diſtantium æqualis ſit ſummæ extremorum, continebitur hæc ſumma extremorum toties in ſumma omnium terminorum, quoties unitas in dimidiato numero terminorum continetur, ſemel nimirum in ſumma quorumlibet duorum ab extremis diſtantium æqualiter: atque idcirco ſumma omnium terminorum ad ſummam extremorum proportionem habebit multiplicē à dimidiato numero terminorum denominatam. Vt in hac ſerie. 10. terminorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33.

Summa omnium terminorum ſummam extremorum 6. & 33. quæ eſt 39. continebit quinquies, hoc eſt, ſumma omnium terminorum ad 38. ſummam extremorum habebit proportionem quintuplam. Et ſic de aliis.

Summam ergò omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cujus terminorum numerus par eſt, obtinebimus, ſi ſummam extremorum in dimidiatum numerum terminorum (qui terminorum numerus dimidium habebit ſine fractione unitatis, cum par ponatur) ducamus. Vt in hac ſerie 10. terminorum.

6. 11. 16. 21. 26. 31. 36. 41. 46. 51.

Summa extremorum eſt 57. quæ in 5. ſemiſſem numeri terminorum, ducta efficit 285. ſummam omnium terminorum. Hæc ratio cōvenit etiam in proportionalitatem, cujus terminorū numerus eſt impar: ſed ſemiſſis numeri terminorum ſemper erit integer cum $\frac{1}{2}$. numerus terminorum ponatur impar.

Vides igitur ſatis eſſe, ut ſumma inveniatur, ſi extremi termini, una cum terminorum numero cogniti ſint. Quo pacto autem ex cognito altero extremorum terminorum numero, atque differentia in cognitionem alterius extremi pervenire poſſimus, jamjam docebimus.

Si in

III.

Si in proportionalitate Arithmetica quotvis terminorum alterum extremorum, numerum terminorum, & differentiam cognoscamus reperiemus alterum extremum, hoc modo. Numerum proximè minorem numero terminorum in differentiam datam ducemus, & productum minori extremo cognito adjiciemus, vel eundem numerum productum ex majore extremo noto detrahemus. Nam ibi conficiemus majus extremum, quod quæritur, hic autem reliquum fiet minus extremum ignotum. Exempli causa. Si proponatur minus extremum notum 4. numerus terminorum 12. & differentia 5. multiplicabimus 11. nimirum numerum proximè minorem terminorum numero, per differentiam datam 5. productoque 55. minus extremum 4. adjiciemus. Summa enim 59. erit extremum majus. Vt in his 12. terminis manifestum est, quorum differentia est 5.

4. 9. 14. 19. 24. 29. 34. 39. 44. 49. 54. 59.

Si verò proponatur majus extremum notum 59. & idem terminorum numerus 12. cum differentia eadem 5. auferemus numerum 55. productum ex 11. numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam 5. ex noto majore extremo 59. Reliquus enim numerus 4. erit minus extremum. Vt in eodem exemplo perspicuum est.

Necesse autem est, si minus extremum inquiratur, numerũ productum ex numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam, majorẽ esse majore extremo cognito, ut subtractio fieri possit. Alioquin quæstio erit impossibilis: hoc est, fieri non poterit, ut datus numerus possit esse majus extremum in progressione ulla, cujus differentia, & numerus terminorum ita se habeant, ut proponitur. Vt si quis daret majus extremum 20. numerum terminorum 6. & differentiam 5. non posset inveniri minus extremum, propterea quod numerus 25. productus ex 5. qui proximè minor est terminorum numero, in differentiam 5. major est dato majore extremo 20. Quod si quando contingat, productum illum numerum majori extremo esse æqualem, ita ut subtractione facta, relinquatur 0. erit quidem quæstio possibilis, sed minus extremum erit 0. Vt si in posteriori hoc exemplo majus extremum proponeretur 25. fieret hæc proportionalitas Arithmetica.

0. 5. 10. 15. 20. 25.

IV.

Si extremi termini noti sint, una cum numero terminorum, reperimus differentiam numerorum hoc pacto. Dempto minore extremo à majore, dividemus reliquum numerum per numerũ proximè minorem numero terminorum. Nam Quotiens erit differentia quæsita. Vt si quis dicat, esse 10. terminos proportionalitatis cujuspiam Arithmeticè, cujus numeri extremi sint 7. & 52. Dempto

minore extremo ex majore 52. reliquum numerum 45. partiemur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 5. erit differentia, quæ quæritur, ut hic apparet.

7. 12. 17. 22. 27. 32 37. 42. 47. 52.

Verum ut fractiones vitentur, progressioque proposita locum habeat in numeris integris, necesse est, minore extremo detracto ex majore, ut reliquus numerus possit numerari à numero, qui terminorum numero proximè minor est. Si enim non numeretur, differentia inventa erit vel fractio, vel numerus integer cum fractione: quæstio tamen erit possibilis. Vt si quis proponat extremos terminos 2. & 38. & numerum terminorum 9. Demptis 2. ex 38. & reliquo numero 36. diviso per 8. reperitur differentia 4. $\frac{1}{2}$ ut patet in hoc exemplo.

2. 6$\frac{1}{2}$. 11. 15. $\frac{1}{2}$. 20. 24$\frac{1}{2}$. 29. 33$\frac{1}{2}$. 38.

V.

Si duo termini extremi una cum differentia, noti sint, eliciemus numerum terminorum hac ratione. Detracto minore extremo à majore, partiemur reliquum numerum per differentiam. Nam si quotienti adjiciamus 1. conflabimus numerum terminorum quæsitum. Vt datis duobus extremis 10. & 40 cum differentia 3. Ablatis 10. ex 40. & reliquo numero 30. diviso per 3. fit Quotiens 10. Addita ergo 1. fit numerus terminorum 11. ut hic videre licet.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34 37. 40.

Sed ut quæstio proposita sit possibilis, hoc est, ut verè in rerum natura existat progressio aliqua, quæ habeat omnes conditiones propositas, necesse est, majore extremo subducto ex majore, reliquum numerum à differentia numerari. Si enim non numeretur, Quotiens non erit numerus integer, ac proinde indicare non potest numerũ terminorũ, etiamsi addatur 1. Fieri enim non potest, ut detur progressio aliqua, cujus terminorum numerus non sit integer.

VI.

Si duo extremi termini, una cum omnium terminorum summa, noti sint, explorabimus, & numerum terminorum, & differentiam hac arte. Summam omnium terminorum per extremorum summam partiemur. Quotiens enim dabit dimidiatum numerum terminorum, & duplicatus totum numerum indicabit. Invento autem terminorum numero, cum & duo extremi termini cogniti sint, inveniemus differentiam, ut in 4. regula traditum est: si nimirum minore extremo dempto ex majore, reliquum numerum dividamus per numerum proximè minorem numero terminorum invento.

Verbi

Verbi gratia. Si summa proponatur 515. & extremi termini 20. & 83 dividemus summam 515. per 103. summam extremorum Quotiens enim 5: duplicatus dabit numerum terminorum 10. quorum differentiam obtinebimus; si demptо minore extremo 20. ex majore 83. reliquum numerum 63. partiamur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum invento. Nam Quotiens 7. erit differentia, ut hic cernis.

20. 27. 34. 41. 48. 55. 62. 69 76. 83.

Vides ergò, ut quæstio sit possibilis, hoc est, ut re vera existat aliqua progressio, in qua omnium terminorum summa, & duo extremi ita se habeant, ut proponitur, necesse esse, ut summa omnium terminorum data à summa extremorum numeretur. Alioquin terminorum numerus erui non poterit, si Quotiens non sit numerus integer. Vel certè, si summa omnium terminorum data à summa extremorum non numeretur, necesse esse, ut divisa summa omnium terminorum per extremorum summam, Quotiens sit numerus integer cum $\frac{1}{2}$. ut nimirum duplicatus efficere possit numerum terminorum integrum.

VII.

Si trium terminorum extremi habeant proportionem duplam; medius ad differentiam habebit triplam proportionem. Si verò extremorum proportio major sit quàm dupla, proportio medii ad differentiam minor erit quàm tripla: Si denique minor sit extremorum proportio quam dupla, major erit proportio medii ad differentiam, quam tripla. Vt hic 8. 12. 16. proportio extremorum 6. & 8. est dupla: & medii 12. ad differentiam 4. tripla. Hic autem 8. 14 20. proportio inter extremos 20. & 8. est dupla sesquialtera, nimirum major quàm dupla: & medii 14. ad differentiam 6. dupla sesquitertia, minor videlicet, quàm tripla. Hic denique 8. 11. 14. extremi 14. & 8. proportionem habent supertripartientem quartas; quæ minor est quàm dupla: & medius 11. ad differentiam 3. triplam superbipartientem tertias, hoc est, majorem quam triplam.

VIII.

Inter quosvis duos numeros constitues medium proportionalem Arithmeticè, si eorum summæ accipias semissem. Vt datis duobus numeris 6 & 30. summa eorum est 36. Huius ergò semissis 18. medio loco proportionalis est Arithmeticè inter 6. & 30. ut hic manifestum est 6. 18. 30. Itaque si medius terminus constituendus sit numerus integer, necesse est, utrumque numerorum datorum esse vel parem, vel imparem, ut videlicet summa extremorum semper sit par, hoc est, ut possit habere dimidium sine fractione unitatis:

Nam quando ſumma extremorum impar eſt: quod accidit cum alter extremorum par eſt, & alter impar, erit medius terminus integer numerus cum ſemiſſe unitatis. Vt, datis numeris duobus 8. 25. ſumma eorum eſt 33. Hujus ergò dimidium $16\frac{1}{2}$. medius terminus erit hoc modo, $8.16\frac{1}{2}25$.

IX.

Inter quoſvis autem duos numeros conſtitues, quotquot quis juſſerit, medios proportionales Arithmeticè, hoc modo. Minorem detrahe ex majore: Reliquum deinde numerum partire per numerum proximè majorem numero mediorū conſtituendorum. Quotiens enim erit differentia proportionalitatis Arithmeticæ, quam ſi minori numero propoſito adjicias, conflabis primum medium. Huic ſi eandem differentiam addas, conficies ſecundum, & ſic deinceps. Vel ſi eam differentiam à majori numero propoſito ſubtrahas, relinquetur ultimus medius. A quo ſi eandem differentiam demas, remanebit penultimus, & ſic deinceps. Veluti ſi inter 6. & 114. conſtituendi ſint 11. termini medii, detrahemus 6. ex 114. Reliquum numerum 108. per 12. (qui numerus proximè major eſt numero mediorum conſtituendorum) partiemur. Quotiens enim 9. erit differentia terminorum proportionalitatis. Sic ergò ſe habebunt 11. termini medii inter 6. & 114.

6. 15. 24. 33. 42. 51. 60. 69. 78. 87. 69. 105. 114.

Sed quoniam plerumque tales duo numeri proponuntur, inter quos non poſſunt cadere numeri integri medii proportionales propterea quod inventus Quotiens pro differentia non ſemper numerus integer eſt: ſi fractiones vitare velis, neceſſe eſt, duos propoſitos numeros eſſe ejuſmodi, ut dempto minore ex majore, reliquus à numero, qui proximè major eſt numero mediorum conſtituendorum, numeretur: quos ita facilè reperies. Accipe pro minore extremo quemcunque numerum eumque adde cuicunque alii numero, quem numerus proximè major numero mediorum inveniendorum metitur. Conflatus enim numerus majus extremum proportionalitatis erit. Vt ſi velis duos numeros, inter quos cadant 8. numeri proportionales Arithmeticè, primus autem ſit, verbi gratia 7. Adde hunc numerum 7. ad quemvis numerum, quem novenarius, (qui proximè major eſt numero mediorum conſtituendorum) metitur, nimirum ad 72. conficieſque majus extremum 79. Differentiam autem invenies, ut dictum eſt, detrahendo 7. ex 79. & reliquum numerum 72. per 9. dividendo. Quotiens enim 8. erit differentia, ut hic vides.

7. 15. 23. 31. 39. 47. 55. 63. 71. 79.

Quod

Quod si quis proponat & minus extremum, & differentiam proportionalitatis, invenies, majus extremum, ita ut inter minus, & majus cadant quotvis medii numeri habentes illam differentiam, si numerum proximè majorem numero mediorum constituendorum per datam differentiam multiplices, numeroque producto minus extremum addas. Vt si quis velit inter 5. & quempiam majorem numerum constituere 9. terminos medios, quorum differentia sit 4. Multiplicanda erunt 10. per 4. & producto numero 40. addendum minus extremum 5. Nam inter conflatum numerum 45. & datum minus extremum 5. intercipiuntur 9. medii termini cum differentia data 4. Vt hic manifestum est.

5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45.

Hacalia etiam jucunda operatione constitues quotvis medios proportionales inter datos duos numeros. Vtrumque datorum numerorum partire per numerum proximè majorem numero mediorum constituendorum: Quotientes sub illis colloca, quemque sub suo, & ab eisdem Quotientibus ascende per continuam eorum additionem addendo primo quemque ad se ipsum, deinde ad numerum conflatum, atque ita deinceps, ita ut duas proportionalitates Arithmeticas instituas à Quotientibus incipientes, & per eosdem progredientes, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medii termini desiderantur. Postremò adde singulos terminos unius ordinis singulis terminis adversis alterius ordinis, id est, maximum unius minimo alterius: proximum deinde sub illo, proximo supra hunc, &c. Numeri enim conflati dabunt medios optatos. Exēpli gratia. Sint inter 15. & 100. constituendi 4. medii termini Arithmeticè proportionales. Vtroque diviso per 5. hoc est, per numerum proximè majorem numero mediorum fiunt Quotientes 3. & 20. Constitues ergò hos ordines 4. terminorum sub 15. & 100. Arithmeticè proportionalium per eorundem Quotientum continuam additionem, addendo primum 3. ad 3. ut fiant 6. Item 3. ad 6. ut fiant 9. Item 3. ad 9. ut fiant 12. Rursus addendo 20. ad 20. ut fiant 40. Item 20. ad 40. ut fiant 60. Item 20. ad 60. ut fiant 80. ut hic vides.

15	32	49	66	83	100
12					80
9					60
6					40
3					20

Ex 12. supremo primi ordinis, & infimo 20. secundi ordinis fiunt

32. pro primo medio. Ex 9. & 40. fiunt 49. pro secundo medio. Ex 6. & 60. fiunt 66. pro tertio medio. Denique ex 3. & 80. fiunt 83. pro quarto medio. Itaq; in primo ordine semper descendendum est à supremo ad infimum usque in secundo verò ab infimo ad supremum usque ascendendum.

Est autem dignum consideratione differentiam Quotientum qui sunt minimi numeri duorum ordinum constitutorum, esse quoque differentiam proportionalitatis constituendæ. Ita vides differentiam in proposito exemplo esse 17. quæ differentia etiam est inter Quotientes 3. & 20. Quocirca, inventis Quotientibus si minor à majore subtrahatur, & reliquus numerus minori extremo dato adjiciatur, & huic compositio numero idem ille numerus reliquus addatur, & ita deinceps, constituentur iidem termini medii, etiamsi duo illi ordines non instituantur.

Vides ergò, utrumque numerum propositum numerari debere à numero, qui numerum mediorum una unitate superat, si fractiones evitandæ sint? Vel certè inveniendos esse duos extremos, ut in priori parte hujus regulæ præcepimus. In iis enim fractiones quoq; vitantur, etiamsi eos numero mediorum proximè major non numeret: quia minore Quotiente detracto ex majore, semper numerus integer relinquitur, ut in exemplis prioris illius regulæ apparet. Nam in tertio eorum verbi gratia, inter 5. & 45. constituendi sunt 9. termini medii. Si igitur uterque per 10. dividatur, fiunt Quotientes $1\frac{5}{10}$ & $4\frac{5}{10}$. hoc est, $1\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. quorũ differentia est 4. numerus integer, ex cujus continua additione ad minus extremum datum medij termini optati conficiuntur: qui iidem reperientur, si per Quotientes $1\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. duo ordines instituantur ascendentes, ut dictũ est, per ipsorum Quotientum additionem continuam, &c.

X

Numerum quemlibet propositum distribuemus in partes, quot-quot quis jusserit, proportionalitatem Arithmeticam servantes, hac ratione. Diviso dato numero per semissem numeri terminorum, secabimus Quotientem in duas partes inæquales utcunque, pro extremis terminis proportionalitatis. Deinde quia jam dati sunt duo termini extremi, cum numero terminorum, detrahemus minus extremum ex majore, partiemurque reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Ita namq; prodibit in Quotiente differentia, ut ex 4. regula patet. Si igitur hæc differentia addatur minori extremo assumpto, deinde ad numerum conflatum, atque ita deinceps, constituetur numerus terminorum datus, quorum summa proposito numero æqualis est: ac proinde datus numerus in numerum partium Arithmeticè proportionalium sectus erit. Exempli causa, si numerus 830. distribuendus sit in 10. partes proportionales Arithmeticè: partiemur eum per 5. semissem

terminor.

terminorum, Quotientemque 166. secabimus in 20. & 146. terminos extremos proportionalitatis constituendæ. Deinde deductis 20. ex 146. numerum reliquum 126. dividemus per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 14. (ut in 4. regula dictum est) differentia erit proportionalitatis. Vt hic vides.

20. 34. 48. 62. 76. 90. 104. 118. 132. 146.

Rursus si numerus 10. dividendus sit in 10. partes proportionales Arithmeticè, dividemus eum per 5 semissem terminorum: Quotientem verò 2. in duas partes inæquales secabamus $\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{2}$. pro extremis terminis proportionalitatis. Dempto deinde minore extremo $\frac{1}{2}$. ex majore $1\frac{1}{2}$. partiemur reliquum 1. per 9. numerum proximè minorem numero partium constituendarum. Quotiens enim $\frac{1}{9}$ differentia erit continuè addenda minori extremo $\frac{1}{2}$. & numero conflato, &c. Quæ additio, ut facilior fiat, reducemus minus extremum $\frac{1}{2}$. & differentiam $\frac{1}{9}$. ad eandem denominationem, ut ad $\frac{9}{18}$. $\frac{2}{18}$. Sic ergò divisus erit numerus 10. in 10. partes Arithmeticè proportionales, quarum prima est $\frac{1}{2}$. sive $\frac{9}{18}$. ultima verò $1\frac{1}{2}$. sive $1\frac{9}{18}$. & differentia $\frac{2}{18}$.

$$\frac{9}{18} + \frac{11}{18} \cdot \frac{13}{18} \cdot \frac{15}{18} \cdot \frac{17}{18} \cdot 1\frac{1}{18} \cdot 1\frac{3}{18} \cdot 1\frac{5}{18} \cdot 1\frac{7}{18} \cdot 1\frac{9}{18}.$$

Certum autem est, hac ratione variis modis datum numerum dividi posse in propositum numerum partium proportionalium, prout videlicet, diviso dato numero per semissem numeri terminorum, Quotiens in alias partes binas inæquales pro terminis extremis sectus fuerit.

IDEM efficiemus hac ratione. Numero dato, ac si esset summa omnium terminorum constituendorum, diviso per numerum terminorum datum, dabit Quotiens duplicatus summam extremorũ: propterea quod hujus extremorum summæ semissis, id est, Quotiens inventus ductus in numerum terminorum, hoc est, in divisorem, producit summam omnium terminorum, nimirum datum numerum, ut in secunda regula dictum est. Quare si Quotientem duplicatum in duos numeros inæquales secemus pro terminis extremis: & minore detracto ex majore, reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorũ dato dividamus, dabit Quotiens differentiam, ut in 4. regula diximus. Quam si ad minus extremum factum adjiciamus, & iterum ad conflatum numerũ, & sic deinceps; constituta erit proportionalitas Arithmetica, quæ imperatur. Veluti, si numerus 198. secandus proponatur in 9. partes Arithmeticè proportionales, partiemur eum per 9. terminorum numerum ut fiat Quotiens 22. qui duplicatus dabit 44.

ſummam extremorum. Conſtituto igitur minore extremo 10. ac proinde majore 34. ſi detrahamus 10. ex 34. & reliquum numerum 24. per 8. numerum proximè minorem numero terminorum partiamur, gignetur differentia 3. Sic ergò ſtabunt 9. termini proportionalitatis Arithmeticæ conficientes ſummam 198.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

Hic etiam manifeſtum eſt, variis mediis datum numerum diſtribui poſſe in datum numerum partium, prout videlicet Quotiens primus duplicatus, quem ſummam eſſe diximus extremorum, in alias atque alias partes binas ſectus fuerit pro extremis duobus terminis.

Sed fortaſſe facilius (quanquam operatio aliquanto longior ſit) idem hoc abſolves hac ratione: Cape tot numeros Arithmeticè quomodocunque proportionales, in quot partes datus numerus diſtribuendus eſt, & ſingulos in datum numerum duc, procreatoſq; numeros per ſummam omnium terminorum ſumptorum ex 2. regula inventam, partire. Quotientes enim dabunt partes, quas quæris. Verbi gratia. Sit dividendus numerus 525. in 10. partes proportionales Arithmeticè. Sume 10. numeros Arithmeticè proportionales quoſcunque, 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. quorum ſumma eſt 175. Ductis autem ſingulis in datum numerum 525. creabuntur hi 10. numeri, 2100 3675. 5250. 6825. 8400. 9975. 11550. 13125. 14700. 16275. quibus ſingulis diviſis per ſummam 175. duorum numerorum in proportionalitate Arithmetica acceptorum gignentur hæ 10. partes, quas quæris.

12. 21. 30. 39. 48. 57. 66. 75. 84. 93.

Idem obtinebis, ſi datum numerum per aſſumptorum numerorum ſummam partiaris, Quotientemque in ſingulos aſſumptos numeros ducas. Producti enim numeri dabunt partes, quas quæris. Vt in dato exemplo, ſi datus numerus 525. dividatur per 175. ſummam aſſumptorum numerorum, fit Quotiens 3. quo ducto in ſingulos numeros aſſumptos, 4. 7. 10. &c. gignentur eædem partes, quæ prius, 12. 21. 30. &c.

Vt autem operatio fiat facilior, ac brevior, ſatis eſt, priores duos numeros proportionalitatis acceptæ multiplicare per datum numerum, productoſque numeros per ſummam omnium terminorum ejuſdem acceptæ proportionalitatis partiri. Vel ſatis eſt, dato numero per ſummam aſſumptorum numerorum diviſo, Quotientem in duos priores aſſumptos numeros ducere. Ita enim reperiuntur primæ duæ partes numeri dati, quarum differentia addita majori, fiet tertia & eadem differentia addita tertiæ faciet quartam, & ſic deinceps. Liquidò autem hic quoque conſtare puto, datum numerum variis modis diſtribui poſſe in partes, quotquot quis imperaverit, proportionales: prout ſcilicet alii atque alii numeri ejuſ-

dem

dem proportionalitatis Arithmeticæ fuerint assumpti, vel quorum alia atque alia sit differentia.

Hac via partes inventæ habent ordinatim eadem proportiones inter se, quæ inter terminos proportionalitatis assumptos eodem ordine reperiuntur. Perpetuò autem singuli numeri acceptæ proportionalitatis ad singulas partes inventas, primus ad primam, secundus ad secundam, &c. eandem omninò habent proportionem. Sic vides, inter primas partes inventas 12. 21. esse proportionē supertripartientem quartas, qualis est inter primos numeros acceptos 4. 7. &c. Item 4. ad 12. & 7. ad 21. & 10. ad 30. &c. habere eandem prorsus proportionem, nimirum subtriplam.

Itaque, si accipiatur proportionalitas Arithmetica, cujus primi duo numeri habeant proportionem duplam, ita ut primus sit differentia omnium terminorum, habebunt primæ partes duplam quoque proportionem, atque ideo prima erit quoque differentia, ex cujus additione aliæ partes coacerventur. Vt si in superiore exemplo accepisses hos 10. terminos, 1. 2. 3. 4. 5. 6, 7. 8. 9. 10. quorum summa est 55. Vel hos 10. numeros, 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. quorum summa est 165. multiplicasseque primum quemque in datum numerum 525. & productos numeros 525. 1575. per summam quamlibet propriam, ut priorem per 55. & posteriorem per 165. divisisses, invenisses primam partem, $9\frac{6}{11}$. quæ eadem esset differentia. Quare partes omnes 10. constituentes proportionalitatem Arithmeticam fuissent hæ.

$$9\tfrac{6}{11}.\ 9\tfrac{7}{11}.\ 28\tfrac{4}{11}.\ 38\tfrac{2}{11}.\ 47\tfrac{9}{11}.\ 57\tfrac{7}{11}.\ 66\tfrac{5}{11}.\ 76\tfrac{4}{11}.\ 85\tfrac{10}{11}.\ 95\tfrac{8}{11}.$$

DE PROPORTIONALITATE Geometrica.

I.

Datis quibusvis duobus numeris, si denominatorem proportionis, quam habent, conferendo majorem cum minore, hoc est, si diviso majore per minorem Quotientem ducas in majorem, gignes tertium terminum in proportionalitate Geometrica utroque dato majorem. Et si eundem denominatorem, sive Quotientem in hunc tertium ducas, produces quartum adhuc majorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps constitues infinitos alios semper majores, si denominatorem, Quotientemve per ultimum inventum semper multiplices. Vt datis duobus numeris 4. 12. denominator proportionis 12. ad 4. est 3. quod divisis 12. per 4. Quotiens fiat 3. Si igitur ducas 3. in 12. & iterum in productum, & sic in infinitum, constitues hanc proportionalitatem Geometricam, quæ in infinitum potest extendi.

4. 12. 36 108. 324. 972. 2916. 8748. &c.

Quod si minorem cum majore conferas,& denominatorem proportionis,quam habent,id est, diviso minore per majorem , Quotientem ducas in minorem: Vel,quod idem est,per denominatorem proportionis, quàm major ad minorem habet, dividas minorem, creabitur tertius numerus proportionalis utroque minor. Ex quo eadem via reperies quartum adhuc minorem,& sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 8.16. denominator proportionis 8.ad 16.est $\frac{1}{2}$.quod diviſis 8. per 16. Quotiens fiat $\frac{1}{2}$. Denominator autem proportionis 16. ad 8. est 2. quod diviſis 16.per 8. Quotiens fiat 2. Si igitur ducas $\frac{1}{2}$.in 8.vel diviſis 8 per 2. idemque cum producto numero facias,constituetur hæc proportionalitas Geometrica, progrediens quoque in infinitum versus minores numeros, sicut illa in infinitum versus majores numeros progrediebatur.

16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{64}$.

EXTENDETVR quoq; eadem proportionalitas in infinitum, etiamsi denominator proportionis ignotus sit,hoc modo. Datis duobus numeris, duc majorem in se, & productum per minorem divide.Quotiens enim erit tertius terminus utroque major.Hunc si iterum in se ducas, productumque per proximè præcedentem terminum dividas,dabit Quotiens quartum terminum,& sic deinceps. Vt datis duobus numeris 3. 6. Ducto 6. in se fit 36.quo diviso per 3. fit 12. tertius terminus. Rursus ducto 12.in se fit 144. quo diviso per 6. fit 24. quartus terminus,atque ita in infinitum, Vt hic vides, 3. 6. 12. 24. 48. &c.

RVRSVS datis duobus numeris, si minorem in se duxeris, productumque per majorem diviseris, dabit Quotiens tertium terminum utroque minorem. Quem si rursus in se duxeris,productumque per proximè præcedentem terminum diviseris,dabit Quotiens quartum terminum adhuc minorem, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris 6 18. Ducto 6. in se fit 36. quo diviso per 18. fit 2. tertius terminus. Rursus ducto 2. in se fit 4. quo diviso per 6. fit $\frac{4}{6}$, sive $\frac{2}{3}$. in minimis numeris,pro quarto termino: atque ita in infinitum, ut hic apparet.

18. 6. 2. $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{9}$. $\frac{2}{27}$. &c.

Iam verò si quamcunque proportionem non multiplicem (in multiplici enim, si regulam præscriptam sequaris,nulla est difficultas) extendere velis in numeris integris ad quotlibet terminos majores, efficies id jucunda hac & facili operatione. Cape tot terminos continuè proportionales ejus proportionis multiplicis ab 1. incipientis,cujus denominator denominat partem, vel partes aliquotas,cujus,vel quarum in data proportione fit mentio; tot,inquam, cape terminos, quot in proposita proportionalitate non multiplici,

termi-

terminos desideras. Vltimus enim eorum erit primus terminus tuæ proportionis non multiplicis. Eum ergò si multiplices per denominatorem datæ proportionis, & iterum numerum productum in eundem denominatorem ducas, atque ita deinceps, constitues terminos optatos. Vbi hoc est mirabile, si termini imperati hac via reperiantur, non posse ultra terminos propositos proportionalitatem extendi sine fractione. Verbi gratia, si inveniendi sint 7. termini proportionis sesquialteræ: Quoniam denominator fractionis $\frac{1}{2}$ cujus mentio fit, est 2. sumendi sunt 7. termini proportionis duplæ, videlicet, 1. 2. 4. 8. 16 32. 64. Si ergò à 64. incipias, constitues 7. terminos proportionalitatis sesquialteræ, & non plures hos nimirum.

64. 96. 144. 216. 324. 486. 729.

Invenientur autem facilè hi termini, si ad primum 64. adjicias ejus dimidium, & ad secundum 96. jam factum, ejus quoque dimidium, &c. Sic quoque si desiderentur 6. termini proportionis duplæ superbipartientis quintas, accipiendi sunt 6. termini proportionis quintuplæ propter denominatorem partium quintarum, qui est 5. videlicet, 1. 5 25 125 625. 3125. Nam si ab ultimo 3125. incipias, reperies hos 6 terminos in proportione dupla superbipartiente quintas.

3125. 7500. 18000. 43200 103680. 248832.

Qui termini facilè reperientur, si duas quintas partes primi ad eundem primum duplicatum adjicias, & rursus $\frac{2}{5}$. secundi jam facti ad eundem secundum duplicatum, &c. Atque numeri hac via inventi semper minimi sunt in sua proportione, ita ut alii totidem termini in eadem proportione continua reperiri, qui minores illis sint, sit prorsus impossibile: nisi fractiones admittere velimus. Facilius iidem termini reperientur, si inventis duobus minimis terminis in data proportione, per majorem multiplicetur primus ex illa proportione multiplici inventus, & productus per minorem dividatur. Ita enim secundus terminus reperietur. Qui si rursus ducatur in majorem minimorum terminorum, & productus per minorem dividatur, invenietur tertius terminus; & sic deinceps. Vt in posteriori exemplo, minimi termini proportionis duplæ superbipartientis quintas sunt 5. & 12. Si igitur sextum 3125. proportionis quintuplæ, qui debet esse primus sex terminorum quæsitorum, ducatur in 12. & productus 37500. per 5. dividatur, prodibit secundus terminus 7500. qui si rursus in 12. ducatur, & productus 90000. per 5 dividatur, producetur tertius terminus 18000. &c. In proportione porrò multiplici quacunque minimi termini quotcunque perpetuò incipiunt ab 1. Vt tres minimi termini in proportione continua quadrupla sunt hi, 1. 4. 16.

Quan-

II.

Quando numerus terminorum continuè proportionalium impar est, numerus genitus ex multiplicatione extremorum inter se, æqualis est numero, qui ex quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium multiplicatione inter se creatur, & ei quoque qui ex medio in se ipsum ductò producitur. Vt in his 5. numeris proportionis sesquialteræ.

16. 24. 36. 54. 81.

tàm ex 16. in 81. quàm ex 24. in 54. & ex 36. in se, procreatur numerus 1296.

Quando autem proportionalium terminorum numerus est par, etiamsi non continuè sint proportionales, dum modo bini continuam proportionem interrumpentes habeant unam eandemq; inter se proportionem, hoc est, dum modo secundus & tertius: Item quartus & quintus: nec non sextus & septimus, &c. (quibus in locis proportio interrumpitur) sint quoque non continuè proportionales, in diversa tamen proportione ab ea, quam primus habet ad secundum, & tertius ad quartum, & quintus ad sextum, &c. Quando, inquam, terminorum numerus est par, numerus ex ductu extremorum unius in alterum productus semper æqualis est numero, qui ex multiplicatione quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium inter se gignitur. Vt hic in 6. numeris duplæ proportionis continuæ.

3. 6. 12. 24. 48. 96.

Ex 3. in 96. & ex 6. in 48. & ex 12. in 24. producitur idem semper numerus 288.

Item in hac sesquitertia non continua 8. terminorum, ubi bini proportionem continuam interrumpentes habent unam eandemq; proportionem, videlicet triplam, quæ à sesquitertia diversa est.

3. 4. 12. 16. 48. 64. 192. 256.

idem omnium numerus 768. fit ex 3. in 256. & ex 4. in 192. & ex 12. in 64. & ex 16. in 48.

Hinc sequitur, quando terminorum numerus impar est, numerum ex ductu extremorum unius in alterum, vel ex duorum quorumlibet æqualiter ab extremis, vel à medio distantium multiplicatione inter se procreatum, esse quadratum. (Dicitur quadratus numerus is, qui ex multiplicatione alicujus numeri in se ipsum producitur: numerusq; ipsum producens latus ejus, sive radix appellatur) cujus radix, sive latus est medius numerus: quia nimirum idem numerus gignitur ex medio in seipsum: ac proinde medius ejus radix quadrata est. Numerum verò ex tribus inter se multiplicatis productum.

ductum, quorum duo ſunt vel extremi, vel ab extremis æqualiter remoti, tertius autem, medius, eſſe cubum. (Numerus ille dicitur cubus qui producitur ex numero aliquo in ſeipſum ducto, & iterum in productum numerum: & numerus ille, qui in ſe ductus, & iterum in productum, cubum producit, latus ejus cubicum, ſive radix cubica appellatur) cujus latus, ſive radix eſt medius numerus: quia videlicet gignitur ex medio in ſe cubice ducto, hoc eſt, primum in ſe, deinde in productum ex aliis duobus inter ſe multiplicatis. In ſe enim facit productum ex aliis duobus: ac proinde in hunc procreatum iterum ductus producit cubum.

Sequitur quoque, quando ſunt 4. numeri ſive continuè, ſive non continuè proportionales, numerum ex mutua omnium multiplicatione productum, (Dicuntur tres, vel plures numeri ſe mutuò multiplicare continuè, quando unus ducitur in alium, & productus numerus in tertium, & hic productus numerus in quartum, & ſic deinceps, donec omnes numeri ſint multiplicati) eſſe quadratum, cujus latus, ſive radix eſt numerus ex primo in quartum, vel ex ſecundo in tertium genitus. Nam ex multiplicatione mutua omnium 4. numerorum inter ſe idem procreatur numerus, quem producit numerus factus ex primo in quartū, ſi in productū ex ſecundo in tertium (qui producto ex primo in quartū, æqualis eſt) multiplicetur. Quando autem ſunt 6. numeri ſive continuè, ſive non continuè proportionales, dum modo bini numeri proportionem continuam interrumpentes ſint quoque non continuè proportionales, fiet cubus ex mutua multiplicatione omnium 6. numerorum inter ſe, cujus radix, latuſve eſt numerus ex multiplicatione extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, productos: qui videlicet gignitur ex numero, qui fiet ex duobus extremis inter ſe multiplicatis; in ſe cubice multiplicato: hoc eſt, ſemel in ſe, nimirum in productum ex duobus, qui ſunt extremis proximi, & iterum in productum, quando videlicet hic productus numerus dicitur in productum ex duobus mediis: quippe cum tres hi numeri producti ſint inter ſe æquales.

III.

Si, propoſitis quotcunque terminis continuè proportionalibus, minus extremum à majore ſubtrahatur, & reliquus numerus per numerū una unitate minorem denominatore proportionis, (quam quilibet propoſitorum numerorum ad minorem habet, qui illi proximus eſt) dividatur, Quotiens denique majori extremo adjiciatur, conflabitur ſumma omnium terminorum. Vt hic in proportione continua tripla.

2. 6. 18 54. 162. 486. 1458. 4374. 13122.

Dempto minore extremo 2. ex majore 12122. & reliquo numero 13120. diviſo per 2. per numerum ſcilicet una unitate minorem

denó-

denominatore 3. proportionis triplæ, quàm quilibet eorum numerorum ad proximè antecedentem minorem habet, fit Quotiens 6560. cui si addatur majus extremum 13122. fit summa omnium 19682. Item in hac sesquitertia continua.

243. 324. 432. 576. 768. 1024.

Subducto minore extremo 243. ex majore 1024. & reliquo numero 781. diviso per $\frac{1}{3}$. (qui numerus una unitate minor est denominatore $1\frac{1}{3}$.) fit Quotiens 2343. Addito ergò majore extremo 1024. fit omnium terminorum summa 3367.

Itaque ut vides, ad explorandam summam quotcunque terminorum proportionalitatis Geometricæ satis est, si duo extremi cognoscantur, una cum proportionis denominatore. Quo verò artificio investigandus sit ultimus terminus cujusvis proportionalitatis Geometricæ quotcunque terminorum, etiamsi medios numeros ignoremus, copiosè tradidimus in progressionibus in nostra Arithmetica practica, ut supervacaneum sit, ea hoc loco repetere.

IV.

Propositis quotlibet numeris se mutuò æqualiter superantibus, id est, Arithmeticè proportionalibus: si totidem alii numeri sumantur habentes easdem proportiones, quas illi eodem ordine sumpti: superabunt se quoq; posteriores hi numeri æqualiter, hoc est, erunt Arithmeticè proportionales, sicut illi. Vt si sex hi numeri, 4. 7 10. 13. 16 19. Arithmeticè proportionales proponantur, sumanturque alii sex cum iisdem proportionibus, cujusmodi sunt hi, 20. 35 50. 65. 80. 95. comperies ipsos quoque Arithmeticè esse proportionales: quippe cum habeant differentiam 15. Sed cave putes; hanc proprietatem posse converti: Neque enim si dentur quotvis numeri Arithmeticè proportionales, & totidem alii Arithmeticè quoq; è proportionales sumantur, etiamsi utrobique eadem sit differentia; necessario hi illis proportionales erunt. Id quod perspicuum est hisce duabus proportionalitatibus Arithmeticis.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21.

Vbi prioris duo primi numeri 2. 4. habent proportionem duplam, at posterioris duo primi 3. 5. superbipartientem tertias. Idem primus numerus 3. in posteriore ordine ad primum numerum 2. in ordine priore habet sesquialteram proportionem, secundus autem 5. ad secundum 4. sesquiquartam, &c.

Duo-

V.

Duobus quibuſvis numeris datis, ſi eorum alterutro in quotlibet partes diſtributo, ſingulæ partes in alterum ducantur, & ſinguli numeri producti per priorem numerum dividantur, conſtituent omnes Quotientes ſimul ſumpti poſteriorem numerum, habebuntq; ordine eaſdem omninò proportiones inter ſe, quas partes prioris numeri inter ſe eodem ordine habent: at ſinguli Quotientes, ſive partes poſterioris numeri ad ſingulas partes prioris, ut prima ad primam, ſecunda ad ſecundam, &c. unam eandemque prorſus habebunt proportionem. Veluti, datis duobus numeris 57. 285. ſi prior ſecetur in partes, quæ ſimul additæ ipſum conficiant, 2. 5. 10. 40. & earum quælibet in poſteriorem numerum 285. ducatur, gignentur hi numeri, 570. 1425. 2850. 11400. quibus ſigillatim per numerum priorem 57. diviſis fiunt Quotientes 10. 25. 50. 200. qui in unam collecti ſummam conſtituunt poſteriorem numerũ 285. habentque eaſdem proportiones, quas habent partes 2. 5. 10. 40. nimirum duplam ſeſquialteram, duplam, & quadruplam: ſinguli vero ad ſingulas partes, ut 10. ad 2. & 25. ad 5. & 50. ad 10. & 200. ad 40. eandem omninò proportionem habent, nimirum quintuplam.

EASDEM partes numeri poſterioris obtinebis, ſi eum per priorem, qui in partes diſtributus eſt, partiaris, Quotientemque factum in ſingulas partes ejuſdem prioris numeri ducas. Vt in eodem exemplo, diviſo numero 285. per 57. fit Quotiens 5. quo ducto in 2. 5. 10. 40. partes numeri 57. fiunt partes numeri 285. hæ 10. 25. 50. 200. ut prius.

HINC facilè elicitur, quo pacto duo quilibet numeri ſecandi ſint in partes componentes ipſis numeris æquales, ita ut partes unius ſint partibus alterius proportionales, collatis tum partibus utriuſque numeri inter ſe, tum & partibus unius cum partibus alterius. Atque hac proprietate nititur tertia ratio diſtribuendi numerum propoſitum in quotvis partes Arithmeticè proportionales quam in regula 10. proportionalitatis Arithmeticæ præſcripſimus. Nam ſumptis totidem numeris Arithmeticè proportionalibus, erit eorum ſumma, numerus in illos, tanquam in partes ipſum componentes, diviſus. Quare ſi ſingulæ hæ partes in datum numerũ ducantur, & producti numeri per ſummam illam dividantur: Vel ſi per aſſumptorum numerorum ſummam datus numerus dividatur ac Quotiens in ſingulos eos numeros, ducatur: producentur partes totidem numeri propoſiti in eiſdem proportionibus. Quare Arithmeticè quoque proportionales erunt, ut ex antecedente regula 4. manifeſtum eſt.

VI.

QVOTLIBET numeris continuè proportionalibus datis, erunt eorum differentiæ continuè quoq; in eadem proportione proportionales.

tionales. Vt in appoſito exemplo tàm numeri, quàm eorum differentiæ, habent continuam proportionem ſeſquialteram.

Differentiæ.	32	48	72	108	162	243
	64	96	144	216	324	486	729

Eadem ratione in hoc altero exemplo, quod ſequitur, habent & numeri & eorum differentiæ duplam proportionem. Vbi vides differentias non differre à numeris duplæ proportionis, quorum ſunt differentiæ. Id quod ſoli proportioni duplæ cuicunque accidit: quia in ea quilibet numerus major proximè præcedentem minorem ſuperat ipſomet numero proximè antecedente, cujus duplus eſt, hoc eſt, quem bis continet.

Differentiæ.	7	14	28	56	112	224	448	896
	7	14	28	56	112	224	448	869	1792

VII.

Datis quotcunque numeris continuè proportionalibus, ſi eorum ſumma per eos ſigillatim dividatur, erunt Quotientes converſo ordine in eadem proportione continuè proportionales. Et ſi Quotientum ſumma per ipſos Quotientes ſigillatim dividatur, creabuntur iidem prorſus Quotientes ordine converſo: atque ita in infinitum. Summa autem eorum Quotientum æqualis erit numero, qui fit ex primo Quotiente in ultimum, vel ex multiplicatione duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique, ſi terminorum numerus eſt impar, ex medio in ſe ipſum ducto. Quod ſanè incredibile videri poſſit. Exempli cauſa. Si dentur hi 4. numeri continuè proportionales in proportione dupla, 3.6.12.24. ſi eorum ſumma 45. per ſingulos dividatur, erunt Quotientes $15.\ 7\frac{1}{2}.\ 3\frac{3}{4}.\ 1\frac{7}{8}$. converſo ordine in eadem proportione dupla continuè proportionales. Et ſi per hoſce Quotientes dividatur eorum ſumma $28\frac{1}{8}$ prodibunt ordine converſo iidem omnino Quotientes, & ita deinceps in infinitum. Ipſa verò ſumma $28\frac{1}{8}$. æqualis eſt numero, qui fit ex $15.$ in $1\frac{7}{8}$. vel ex $7\frac{1}{2}$. in $3\frac{3}{4}$. Sic etiam datis his 5. terminis in continua proportione tripla, 2.6.18.54.162. ſi eorum ſummam partiemur per eos ſigillatim, efficiemus hos 5. Quotientes, $121.\ 40\frac{1}{3}.\ 13\frac{4}{9}.\ 4\frac{13}{27}.\ 1\frac{40}{81}$. in eadem continua proportione tripla. Quorum ſumma $180\frac{61}{81}$. producitur vel ex $121.$ in $1\frac{40}{81}$. vel ex $40\frac{1}{3}$. in $4\frac{13}{27}$. vel denique ex $13\frac{4}{9}$. in ſeipſum. Vbi duo conſideratione ſunt digna. Primum, quando terminorum numerus eſt impar, ſummam Quotientum eſſe numerum quadratum, cujus radix eſt medius terminus: Quippe qui ex medio termino in ſeipſum ducto procrea-

procreetur, vt dictum est, Deinde, eosdem semper Quotientes gigni ex divisione summę quotcunq; terminorū proportionis ejusdē continuæ, quantumvis termini illi sint magni, aut parvi, dummodo terminorum numerus idem semper sit. Velut si sint tres termini continuè dupli, sive magni, sive parvi, erunt perpetuò hi Quotientes, 7. $3\frac{1}{2}$. $1\frac{3}{4}$. Si sint quatuor, hi Quotientes erunt, 15. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{3}{4}$. $1\frac{7}{8}$. In quinq; numeris continuè triplis, erunt hi semper Quotientes, 121. $40\frac{1}{3}$. $13\frac{4}{9}$. $4\frac{13}{27}$. $1\frac{40}{81}$. Ac deniq; in quinq, numeris continuam proportionem sesquialteram habentibus reperientur hi Quotientes, $13\frac{1}{16}$. $8\frac{1}{24}$. $5\frac{31}{36}$. $3\frac{49}{54}$. $2\frac{49}{81}$.

Ex hac proprietate inveniemus quotcunque terminos in data proportione continuè proportionales, quorum summa æqualis sit numero, qui fit ab extremis inter se multiplicatis, vel ex duobus mediis quibuslibet æqualiter distantibus ab extremis, vel etiam ex termino medio in seipsum ducto, si numerus terminorum fuerit impar. Nam si sumantur tot termini in data proportione continuè proportionales, quot inveniendi sunt, sive magni, sive parvi, eorumque summa per eosdem seorsum dividatur, erunt Quotientes numeri, qui desiderantur. Quod si summa debeat esse numerus quadratus, accipiendi erunt termini, quorum numerus impar sit, & dato numero terminorum impari æqualis, &c. Quæ res miraculi instar quodammodo censeri possit, dari posse in data proportione, quotquot quis jusserit, terminos continuè proportionales, quorum summa ex multiplicatione primi termini in ultimum gignatur: cum contrarium hujus experiamur in omnibus proportionibus continuis inæqualitatis, quarum termini sint numeri integri; & in aliis etiam omnibus, quarū numeri fractiones habent admixtas, nisi hi numeri Quotientes sint producti ex divisione summæ alicujus quotcunq; terminorum continuè proportionalium, per ipsos terminos proportionales, vt diximus.

Eodem modo satisfaciemus quæstioni, si quis petat duos numeros datam habentes proportionem, quorum summa æqualis sit numero ex eorum multiplicatione vnius in alteram procreato. Nam si sumantur quilibet duo numeri in proportione data, atque eorum summa per eosdem sigillatim dividatur, satisfiet quæstioni propositæ per Quotientes inventos. Vt si cupiat quis duos numeros, inter quos reperiatur proportio tripla superbipartiens nonas, accipiemus vel hos duos numeros 29. 9. vel 87. 27. proportionem datam habentes, vel alios quosvis. Summa etenim priorum 38. divisa per 29. & 9. vel posteriorum summa 114. per 87. & 27. divisa dabit Quotientes, $1\frac{9}{29}$. & $4\frac{3}{9}$. proportionem eandem habentes, quam 29. & 9. vel 87. & 27. ordine tamen converso, & quorum aggregatum est $5\frac{132}{261}$. qui videlicet numerus ex ductu etiam $1\frac{9}{29}$. in $8\frac{3}{9}$. gignitur.

VIII.

Inter duos quoscunque numeros constituemus mediũ Geometricè proportionalem, si eos inter se multiplicemus, & procreati numeri radicem quadratam accipiamus. Vt datis duobus numeris 6. & 96. ex uno in alterum fit numerus 576 cujus radix quadrata 24. erit medio loco proportionalis inter datos numeros hoc modo, 6. 24. 96 Nam 96. ad 24. habent proportionem quadruplam, qualem etiam habent 24. ad 6. Itaque si inter datos duos numeros constituendus sit numerus medius rationalis, qui videlicet exprimi possit, necesse est, vt numerus ex vno in alterum productus sit quadratus. Nisi enim quadratus sit, non habebit radicem in numeris, sed ejus radix erit numerus, quem Arithmetici surdum, vel irrationalem vocant, explicantque hoc modo, radix quadrata talis numeri. Veluti, datis duobus numeris 7 & 9. fiet ex vno in alterum numerus 63. qui radicem non habet. Dicemus ergò radicem quadratam numeri 63. quę quidem numeris exprimi nequit, esse medio loco proportionalem inter numeros datos 7 & 9. hoc modo, quæ quidem radix

| 7. | R.q 63. | 9. |

major est, quam 7. cum hujus quadratum sit 49 minor verò quàm 8. cum hujus quadratum sit 64 Neque verò numerus 7 cum aliqua fractione, qui medius est inter 7. & 8. radix esse potest, etiamsi unitas in infinitum cogitetur esse divisa: quia omnis talis numerus cum fractione producit numerum cum fractione, vt ad defin. 8. demonstrabimus, cujusmodi non est numerus 63.

IX.

Si quis invenire velit tres numeros in Arithmetica proportionalitate, inter quorũ binos singuli cadant medii Geometricè proportionales, assequetur id hac ratione. Sumantur tres numeri quicunque, quorum secundus primi sit quintuplus, & tertius ejusdem primi septuplus. Quadrati enim numeri eorum erunt Arithmeticè proportionales, & primus numerus acceptus in secundum ductus producet medium proportionalem Geometricè inter primum quadratum, & secundum, in proportione primi assumpti numeri ad secundum, secundus verò numerus assumptus in tertium ductus gignet medium proportionalem inter secundum quadratum, & tertium, in proportione quam inter se habent secundus ac tertius numerus assumptus. Id quod perspicuè in hoc exemplo apparet.

Tres num. assumpt.	Primus 8.	quintup. pri. 40.	Septup. prim. 56.
Quad. Arith. pro.	64	1600	3136.
Medii Geometr.	320.	2240.	

Differentia enim trium quadratorum est 1536. & medii proportionales inter eos, 320. & 2240. producti ex 8. in 40. & ex 40. in 56.

Hinc

Hinc facilè reperies tres numeros quadratos, qui se æqualibus differentiis mutuò superent, si pro radicibus eorum sumes tres numeros, quorum secundus sit primi quintuplus, & tertius ejusdem primi septuplus, vt diximus.

Pari ratione, dato quovis quadrato, reperientur alii duo majores cum illo constituentes proportionalitatem Arithmeticam. Si enim radix dati quadrati statuatur primus numerus, & alii duo numeri sumantur, quorum alter illius radicis sit quintuplus, & septuplus alter, erunt quadrati numeri horum duorum numerorum, quos quærimus. Vt si detur quadratus numerus 64. erit ejus radix 8. primus numerus, secundus, 40. & tertius, 56. &c.

Inventis autem tribus quadratis Arithmeticè proportionalibus, si eos per quemvis numerum eundem multiplices, vel per quamvis partem aliquotam, si quam habent, dividas, erunt producti quoque numeri, aut Quotientes Arithmeticè proportionales, inter quorum binos singuli etiam medii in Geometrica proportionalitate intercipiuntur: qui medii reperientur eodem modo; si nimirum medii inter quadratos inventos per eundem illum numerum multiplicentur, vel per eandem illam partem aliquotam dividantur. Vt si superiores quadrati, vna cum mediis proportionalibus duplicentur, creabuntur hi numeri.

Arithmet. proportio.	128		3200		6272.		
Medii Geometr.		640		4480			

Si verò dividantur iidem per 8. partem aliquotam communem quadratorum; (sunt autem quælibet partes aliquotæ quadratorum; partes etiam aliquotæ mediorum) prodibunt hi numeri.

Arith. proportio.	8		200		392.		
Medii Geometr.		40		280			

Habebunt autem hi numeri hoc modo inventi easdem semper proportiones, quas quadrati, eorumq; medii inter se habent. Quod si hos 8. 200. 392. dividas per 4. invenies alios 2. 50. 98. Arithmeticè proportionales; inter quos cadunt Geometricè medii, 10 & 70. Et si denique hos 2. 50. 98. partiaris per 2. habebis alios; 1. 25. 49. inter quos medii Geometricè sunt, 5. & 35.

Vbi hoc etiam admiratione videtur dignum; quandocunque inter tres numeros Arithmeticè proportionales, sive quadrati sint, sive non, cadunt duo medii Geometricè proportionales, vnus inter primum & secundum, & inter secundum ac tertium alter, quadratum prioris medii, & quadratum secundi numeri Arithmeticè

proportionalitatis, & quadratum posterioris medii constituere proportionalitatem Arithmeticam. Vt in posteriori exemplo, quadrati numeri horum trium numerorum 40. 200. 280. sunt 1600. 40000. 78400. Arithmeticè proportionales, habentes differentiam eandem communem 39400. & sic de cæteris.

X.

Inter quoscunq; duos numeros reperiemus quotcunque medios continuè proportionales, jucunda sanè, & artificiosa operatione: quam vt planius explicem, dicenda pauca sunt de radicū generibus, & quo pacto numeri ex suis radicibus gignantur. In omni ergò proportione continua, quæ ab 1. incipit secundus terminus radix est omniū numerorū insequentium. Ea enim enim radix bis posita, atq; ita in se ipsam ducta producit tertium terminum, qui est numerus quadratus, radixque ipsa quadrata dicitur. Eadem radix ter posita, & primum in se, & iterum in productū multiplicata gignit quartum terminum, qui cubus est, & propterea radix ejus cubica appellatur. Denique si eadem radix ponatur quater, & fiant tres multiplicationes, primum in se, deinde in productum, tertiò iterum in ultimum productum, fiet quintus terminus: Et si ponatur quinquies, fiantq; quatuor ordine multiplicationes orietur sextus terminus, atque ita in infinitum: Quo pacto autem omnes hæ radices nominari debeant, & signari, non est hujus loci declarare, sed ad Algebram tota hæc res spectat, vbi etiam docebimus, qua arte ex dato numero eruendæ sint. Nunc, vt intelligatur res, de qua agimus, notandæ sunt tres infrascriptæ proportionalitates continuæ, quarum duæ primæ sunt Arithmeticæ, nimirum duæ series naturales numerorum ab 1. incipientes, tertia verò Geometrica ab 1. quoq; initium ducens. Vbi perspicuè apparebit, quam egregium vsum habeat series numerorum naturalis in re proposita.

Numerus mediorum.			1	2	3	4	5	6	&c.
Numeri significantes radices		1	2	3	4	5	6	7	&c.
Numeri Geometr. propor.	1	2	4	8	16	32	64	128	&c.

Prima complectitur numeros mediorum constituendorum secunda numeros, qui significant genera radicum, hoc est, quoties terminus secundus tertiæ proportionalitatis, quem radicem omniū insequentium diximus, ordine poni debeat, vt multiplicatos numeros proportionalitatis Geometricæ illis respondentes procreet. Verbi gratia, vnitas medii ordinis significat, numerum 2. tertii ordinis, qui radix est omnium aliorum, semel positum non esse multiplicandum, sed ipsummet esse radicem omnium ex nulla sui multiplicatione productum. At numerus 2. ejusdem secundi ordinis in-

nis indicat, eandem radicem 2. tertii ordinis positam bis hoc modo, 2.2. & ita in se multiplicatam gignere 4. tertium terminum ejusdem tertii ordinis. Sic numerus 3. medii ordinis denotat radicem eandem 2. infimi ordinis positam ter hoc modo. 2.2.2. atque ita multiplicatam producere 8. quartum terminum infimi ordinis. Nam ex radice 2. primo loco posita in eandem 2. positam secundo loco fit numerus 4. & ex hoc producto in radicem 2. tertio positam loco gignitur numerus 8. quartus nimirum proportionalitatis Geometricæ sub numero 3. ordinis secundi. Idem dices de aliis. Vt verbi gratia numerus 7. secundæ proportionalitatis monstrat, radicem eandem 2. tertii ordinis positam septies, hoc pacto, 2.2 2.2.2.2.2. & in se continuè sexies multiplicatam producere 128. octavum numerum Geometricæ proportionalitatis illi numero 7. suppositum. Nam ex 2. primi loci in 2. secundi loci fiunt 4. & ex 4. in 2 tertii loci fiunt 8. & ex 8. in 2 quarti loci fiunt 16. & ex 16. in 2 quinti loci fiunt 32 & ex 32. in 2. sexti loci fiunt 64. & denique ex 64. in 2. septimi loci fiunt 128. &c. Atque hoc non solùm verum est in proposita proportione continua dupla, sed in omnibus aliis ab vnitate incipientibus, quicunq; numerus secundum locum occupet tanquam radix aliorum, & qui proportionem denominat.

Itaque si constituere vis quotlibet medios inter duos propositos numeros, cape numerum medioxum constituendorũ in primo ordine. Nam ex vtroq; numero dato extrahenda est radix, quæ toties ordine posita, & continuè multiplicata vtrumq; producat, quot vnitates continentur in numero secundi ordinis, qui infra numerũ mediorum constituendorũ in supremo ordine acceptum scriptus est. Radices inventas sub datis numeris colloca, quamq; sub suo, & ab eisdem ascende per continuam utriusq; multiplicationem, (ducendo primum quamq; radicem in se, deinde in numerum productum, & sic deinceps) ita vt duas proportionalitates Geometricas multiplices inſirtuas à radicibus incipientes, & ab eisdem denominatas, tot terminorũ, (exclusis datis duobus numeris) quot medii termini quæruntur. Post hæc singulos terminos vnius ordinis duc in singulos terminos alterius ordinis adversos, & oppositos, h.e. maximum vnius in minimum alterius: proximũ deinde sub illo in proximum supra hunc, &c. Ita vt in vno ordine semper descendas à supremo ad infimum vsq;, in altero verò ab infimo vsq; ad supremum ascendas, vt in exemplis patebit. Numeri enim procreati dabunt medios terminos, quos quærimus. Exempli causa, si inter 9. & 144. inveniendus sit vnus terminus medio loco proportionalis, sumemus in primo ordine 1. & sub hoc termino in secundo ordine numerũ 2. qui indicat ex vtroq; numero dato eruendam esse radicem quadratam, quæ videlicet bis posita, per ejus multiplicationem vtrumq; producat, ut declaravimus. Radices autem quadratæ inventæ sunt 3. & 12.

Et quia vnus tantùm medius terminus desideratur, non sunt instituendæ proportionalitates Geometricę à radicibus incipientes, quę plures terminos habeant, sed ipsæ radices inter se multiplicandæ. Numerus enim procreatus 36. erit medio loco proportionalis inter 9. & 144. Vt hic vides, 9. 36. 144. Sic etiam si inter 18. & 288. constituendus sit vnus terminus medius: quoniam hi numeri radices quadratas non habent, signabimus priorem hoc modo, R. q. 18, posteriorem autem sic, R. q. 288. Hæ autem radices inter se multiplicatæ faciunt 72. terminum medium proportionalem inter 18. & 288. hoc modo 18. 72. 288. Vbi etiam admiratione dignum est, duos numeros, quorum neuter potest efferri, inter se multiplicatos gignere numerum rationalem cuius rei demonstratio ex lib. 10. petenda est. Quo pacto autem inter se multiplicandi sint duo numeri surdi, qui nimirum efferri non possunt, quales sunt R. q. 18. & R. q. 288. docebimus in Algebra.

Rursus si dati sint duo numeri 6. & 625. inter quos tres medii constituendi sint, accipiemus in primo ordine numerum mediorum 3. cui in ordine secundo subscribitur numerus 4. Igitur ex vtroque dato numero extrahenda est radix quæ quater posita, & continuè multiplicata vtrumque producat, quæ quadrati quadrata, vel Zensizensica dici solet, cujusmodi in dato exemplo sunt 2. & 5. Constitues ergò hos ordines trium terminorum sub 16. & 625. Geometricè proportionalium in proportione multiplici, incipientes ab eisdem radicibus 2. & 5. à quibus proportiones horum ordinum denominantur, vt hic apparet.

16	40	100	250	625
8				125
4				25
2				5

Ex 8. supremo primi ordinis in 5. infimum secundi ordinis fiunt 40. pro primo medio Ex 4. in 25. fiunt 100. pro medio secundo. Denique ex 2. in 125. fiunt 250 pro tertio medio.

Scitu autem dignum est, medios terminos inventos cum duobus extremis datis continere proportionem continuam eam, quæ inter radices datorum numerorum reperitur. Sic enim in dato exemplo vides ita esse 625. ad 250 & 250. ad 100. & 100. ad 40 & 40. ad 16. vt 5. ad 2. Quapropter, inventis radicibus, si major per minorem dividatur & per Quotientem, qui denominator est proportionis radicum inventarum, multiplicetur minor numerus datus, & productus numerus rursum per eundem Quotientem multiplicetur, atque ita deinceps, constituentur inter duos extremos datos medii termini iidem, etiamsi duo illi ordines proportionum multi-

tiplicium à radicibus denominatarum non instituantur. Vt in exemplo dato. Diuisa radice 5. per radicem 2. fit Quotiens $2\frac{1}{2}$. denominator videlicet proportionis 5. ad 2. Si igitur ducas minorem numerum datum 16. in $2\frac{1}{2}$ gignes 40. primum medium: Et si rursus ducas 40. in $2\frac{1}{2}$. procreabis 100. secundum medium: Et denique si 100. ducas in $2\frac{1}{2}$ produces 250. tertium medium.

Perspicuum autem est, inter datos quoslibet numeros nos semper constitui posse numerum terminorum propositum, qui sint rationales: propterea quod dati numeri non habent semper illas radices, quæ extrahendæ sunt: aut certè non habent eam proportionem, quam aliqui duo numeri, ex quibus eæ radices possunt extrahi, quod etiam satis esset. Sicut enim inter 16. & 625. qui habent radices quadrati quadratas, hoc est, quæ quater positæ eos suis multiplicationibus producunt, tres medii termini incidunt: ita quoque inter 48. & 1875. qui illis 16. & 625. proportionales sunt, licet non habeant similes radices, cadunt tres medii termini, vt hic patet 48. 120. 300. 750. 1875.

Quamobrem si quis desideret duos numeros, inter quos cadant, quotquot voles, termini medii rationales in data proportione, accipiendi sunt duo numeri quomodocunque datam habentes proportionē. Eorum enim vterque si toties ponatur, quot termini medii quærendi sunt, & adhuc semel, & continuè multiplicetur, erunt vltimi duo numeri producti, quos quærimus: Inter eos enim medii termini constituentur eo modo, quem exposuimus; hoc est, vel instituendo sub illis duos ordines proportionū multiplicium, quas assumpti numeri denominent, tot terminorum, quot medii termini quæruntur; vel multiplicando minorem eorū per denominatorem proportionis datæ, quæ est inter acceptos duos numeros, &c. Verbi gratia, si quis velit duos numeros, inter quos constitui possint quatuor termini medii rationales in proportione superbipartiente tertias, cuius denominator est $1\frac{3}{3}$. sumemus duos numeros 6. & 10. habentes datam proportionem superbipartientem tertias, & vtrumq; quinquies ponemus hoc modo, 6. 6 6.6.6. & 10.10 10.10.10. Ex multiplicatione enim continua utriusque existent hi numeri 7776. & 100000. inter quos constitues quatuor medios numeros proportionales, vt hic vides.

7776	12960	21600	36000	60000	100000
1296				10000
216				1000
36				100
6				10

Qui quidem medii termini inveniuntur vel ex 1296. in 10. & ex 216. in 100. & ex 36. in 1000. & ex 6. in 10000. vel ex denominatore $1\frac{2}{3}$. proportionis superbi partientis tertias in minorem numerum inventum 7776. & iterum in numerum productum, &c.

X.

Numerum quemcunq; datum distribuemus in quotvis partes proportionales Geometricè in data proportione hoc modo. Cape tot numeros continuè proportionales in data proportione sive minimos, sive non minimos in quot partes datus numerus distribuendus est, & per eorum summam datum numerum partire. Quotiens namq; per singulos terminos in data proportione acceptos multiplicatus procreabit partes dati numeri servantes datam proportionem inter se. Veluti si datus numerus 756. secandus sit in 6. partes continuè proportionales in proportione dupla; si sumantur 6. termini continuè dupli 3. 6. 12. 24. 48. 96. quorum summa est 189. & per hanc summam dat 18 numerus 756. dividatur. Quotiens autem 4. per singulos acceptos numeros multiplicetur, procreabuntur hi 6. numeri continuè dupli, conficientesq; simul in vnam summam collecti datum numerum 756. videlicet.

12. 24. 48. 96. 192. 384.

Eædem partes invenientur, si sumantur hi alii 6. numeri continuè dupli, $\frac{1}{100}$. $\frac{2}{100}$. $\frac{4}{100}$. $\frac{8}{100}$. $\frac{16}{100}$ $\frac{32}{100}$. quorum summa est $\frac{63}{100}$. Vel hi 6. alii, 100, 200. 400. 800. 1600: 3200. quorum summa est 6300. Nam datus numerus 756. divisus per summam priorem $\frac{63}{100}$. facit 1200. qui Quotiens ductus in primum numerum acceptum $\frac{1}{100}$. dabit primam partem 12. vt prius, &c. At idem numerus datus 756. divisus per posteriorem summam 6300. facit Quotientem $\frac{756}{6300}$. qui ductus in primum numerum assumptum 100. producit eandem partem primam 12. & sic de cæteris.

Quod si cupias numerum, qui secari possit in quotvis partes proportionales sine ulla fractione, (Nam nisi servetur id quod jam præcipiemus, incidemus plerumq; in fractiones) assequeris propositū, si sumas quemcunq; numerum multiplicem summæ totidem terminorum proportionalium assumptorum. Vt si quis quærat numerum, qui possit distribui in 5. numeros integros sesquialteram proportionem continuam habentes; sumptis 5. terminis in sesquialtera proportione continuè quibuscunq;, vt 64. 96. 144. 216. 324. quorum summa est 844. accipiemus hujus summæ quemcunque numerum multiplicem, nimirum decuplum 8440. Hic enim per præceptum traditum secabitur in 5. numeros integros proportionis sesquialteræ continuæ, cum eo diviso per summam acceptorum numerorum, Quotiens necessariò sit numerus integer.

Hinc

Hinc nullo negotio satisfaciemus quæstioni, qua jubeamur, in data proportione continua reperire quotvis numeros, qui in vnam summam collecti constituant numerum quemcunq; datum. Nam si datus numerus secetur in tot partes proportionales datæ proportionis, vt docuimus, soluta erit quæstio. Vt si quis invenire velit 4. numeros triplæ proportionis continuæ, quorum summa sit 100. secandus erit hic numer⁹ 100. in 4. numeros proportionis triplę, vt in $2\frac{1}{2}.7\frac{1}{2}.22\frac{1}{2}.67\frac{1}{2}$. Hi enim conficiunt datum numerum 100. Quod si conficere debeant summam 400. erunt numeri quęsiti in tripla proportione continua hi 10.30.90.270. Horum enim summa est 400. Si deniq; summam conficere debeant non superantem 1. erunt hujusmodi numeri $\frac{1}{40}.\frac{3}{40}.\frac{9}{40}.\frac{27}{40}$. Summa enim horum est $\frac{40}{40}$. hoc est 1.

DE PROPORTIONALITATE Harmonica.

I.

Tres numeri in proportionalitate Harmonica invenientur ex tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ quibuscunque, si primus in secundum, ac tertium, & secundus in tertium multiplicetur. Vt subiecta exempla demonstrant.

Arit.	1. 2. 3.	3. 7. 11.	4. 6. 8.	10. 60. 110.
Har.	2. 3. 6.	21.33.77.	24.32.48.	600. 1100. 6600.

In omnibus enim ex primo termino Arithmeticæ proportionalitatis in secundum & tertium fit primus terminus Harmonicæ, & secundus: ex secundo verò in tertium, tertius.

Alio modo, & in idem recidit, gignitur Harmonica proportionalitas ex Arithmetica. Nam medius terminus Arithmeticæ proportionalitatis ductus in extremos gignit extremos Harmonicæ: extremi verò ejusdem Arithmeticæ inter se multiplicati creant medium Harmonicæ. Vt in eisdem exemplis manifestum est.

Hinc fit, extremos terminos Harmonicæ proportionalitatis, ac proinde & differentias, eandem habere proportionem, quam extremi Arithmeticæ, ex qua orta est, habent: quia videlicet extremi Arithmeticæ per eundem medium multiplicati produxerunt Harmonicæ extremos.

Quapropter si recipiendi sint tres numeri proportionalitatis Harmonicæ, quorum extremi, atq; adeò & differentiæ, datam habeant proportionem, sumendi sunt duo numeri proportionem datam habentes, & inter eos medius Arithmeticæ proportionalitatis constituendus: ac deniq; ex hisce tribus terminis inveniendi tres in proportionalitate Harmonica: vt diximus. Vt si quęrantur tres, quo-

tum extremi habeant proportionem ſeſquitertiam, ſumemus 3.& 4. inter quos ea proportio reperitur: ſed quia eorum ſumma 7. impar eſt, non poteſt inter eos collocari medius integer in proportionalitate Arithmetica, ducemus vtrumq; per aliquem numerū parem, nimirum per 2. Inter productos enim 6.8. cader integer medius proportionalis Arithmeticè 7. nimirum ſemiſſis eorum ſummæ. Ex his igitur tribus 6. 7. 8. Arithmeticè proportionalibus orientur hi tres Harmonicè proportionales, 42. 48. 56. quorum extremi, atque adeò & differentiæ, proportionem ſeſquitertiam datam habent.

Sequitur etiam, binos numeros trium terminorū proportionalitatis Harmonicę binis Arithmeticæ, ex qua orta eſt, converſo ordine eſſe proportionales, h.e. in Harmonica ita eſſe ſecundū ad primum, vt in Arithmetica tertius eſt ad ſecundum. Item in illa ſic eſſe tertium ad ſecundum, vt in hac eſt ſecundus ad primum: quia nimirum priores duo in Harmonica producti ſunt ex poſterioribus duobus in Arithmetica per primum eundem multiplicaris: Duo verò poſteriores Harmonicę procreati ſunt ex prioribus duobus Arithmeticæ in tertium ductis. Vt ex ſuperioribus exemplis perſpicuum eſt.

Viciſſim ſi primus numerus Harmonicæ proportionalitatis ducatur in ſecundum, ac tertium, & ſecundus in tertium, procreati erunt tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis. Vel (quod idem eſt) ſi medius terminus Harmonicę in duos extremos ducatur, gignentur duo extremi Arithmeticæ; duo verò extremi Harmonicæ inter ſe multiplicati producent medium Arithmeticæ: eodem ſcilicet prorſus modo, quo ex Arithmetica proportionalitate Harmonicam oriri diximus. Ita vides ex hac Harmonica 2. 3. 6. gigni hanc Arithmeticam, 6 12. 18. Sive enim ducas primum 2. in ſecundum 3. & tertium 6. Item ſecundum 3. in tertiam 6. produces 6. 12. 18. ſive ducas medium 3. in extremos 2. 6. facies extremos 6. 18. & ex primo 2. in tertium 6. medium 12.

Harmonica proportionalitas dicitur continuari vltra tres terminos, ſive ad majores numeros progrediendo, ſive regrediendo ad minores, quando primi tres numeri ſunt proportionales Harmonicè, & tertio adjunguntur duo cum eo conſtituentes quoq; eandem proportionalitatem Harmonicam, & in eadem omninò proportione. Deinde ultimo, qui quintus eſt, adjunguntur eodem modo alii duo: atq; vltimo, ſive ſeptimo, alii duo; & ſic in infinitum. Hoc autem fit verſus majores numeros progrediendo, ſi poſteriores duo numeri ducantur in denominatorem proportionis, quam tertius ad primum habet. Vt datis his tribus numeris 2. 3. 6. Harmonicè proportionalibus, ſi poſteriores duo, 3. 6. ducantur in 3. denominatorem proportionis 6. ad 2. fient 9. 18. atque ita erunt jam quinque termini 2. 3. 6. 9. 18. Harmonicè proportionales: Et ſi poſteriores duo 9, 18, ducantur iterum in 3. denominatorem proportionis, erunt

ſeptem

septem hi termini, 2.3.6.9.18.27.54. continuè proportionales Harmonicè: & sic progredi poterimus in infinitum, ita vt semper Harmonica proportionalitas continuetur per terminos locorum imparium, vt per tertium, quintum, septimum, nonum, &c. Quod si versus minores terminos progredi libeat, dividendi erunt minores duo numeri per denominatorem proportionis extremorum: Et posteriores duo minores inventi iterum dividendi per eundem denominatorem, & sic deinceps in infinitum. Vt datis his tribus numeris, 18. 9. 6. si minores duo 9. 6. dividantur per 3. denominatorem proportionis inter extremos 18. 6. fient 3, 2. atq; ita erunt jam quinq; termini, 18. 9. 6. 3. 2. Et si rursus duo posteriores inventi 3. 2. dividantur per eundem denominatorem 3 adjuncti erunt vltimo termino 2. alii duo in Harmonica proportionalitate hoc modo. 18. 9. 6. 3. 2. 1. $\frac{2}{3}$. atque ita deinceps progredi licebit in infinitum.

Alio modo, & quidem magis propriè, continuatur proportionalitas Harmonica, sive ad majores numeros progrediendo, sive ad minores, quando primi tres numeri sunt Harmonicè proportionales; Item, relicto primo, alii sequentes tres: & relictis duobus sequentes alii tres, atque ita deinceps: Sed in hac continuatione nunquam erit eadem proportio inter extremos trium, quæ inter extremos aliorum trium. Vt in his 4. numeris 3. 4. 6. 12. continuata dicitur proportionalitas Harmonica, quoniam tam tres 3. 4 6. 12. quam tres 4. 6. 12. Harmonicè proportionales sunt; sed priorum extremi 3. 6. proportionem habent duplam, ad extremi posteriorum 4. 12. triplam. Item continuata esse dicitur Harmonica proportionalitas in his quinque terminis 10. 12. 15. 20. 30. quia & in tribus, 10. 12. 15. & in tribus, 12. 15. 20. & in tribus 15. 20. 30. Harmonica proportionalitas reperitur, licet extremi quorumlibet trium non habeant easdem proportiones. Quo pacto autem in vtramque partem hoc modo continuanda sit, quando continuari potest (neque enim semper ad majores numeros progrediendo potest hoc modo extendi) aut quo pacto quotlibet numeri continuè Harmonicè proportionales, vt exposuimus, reperiri possint ex iis, quæ sequuntur, constabit.

II.

Inter quotvis datos duos numeros constitues medium Harmonicè proportionalẽ, hac ratione. Numerũ, qui fit ex datorũ duorum numerorum differentia in eorum minorem, partire per eorundem summam, Quotientemq; minori adde. Conflatus enim numerus erit medius, quem quæris. Vel eandem differentiam datorum numerorũ duc in majorem, & productum partire per eorundem summam, Si enim Quotiens ẽ ex majore dato subtrahas, reliquus fiet medius terminus quæsitus. Vt inter duos numeros 15. & 60. inventurus

medi-

medium duc eorum differentiam 45. in minorem 15. & numerum productum 675. partire per eorum ſummam 75. Nam ſi Quotientem 9. minori 15. adjicias, conflabis medium terminum 24. vt hic patet, 15. 24. 60. Eundem medium reperies, ſi eandem differentiam 45. ducas in majorem 60. & productum 2700. per eorũ ſummam 75. dividas. Quotiens enim 36. ex majore 60. detractus relinquet eundem medium terminum 24.

Vides ergò, quando ſumma datorum duorum numerorum non metitur productum ex eorundem differentia in minorem eorum, vel in majorem, medium inventum eſſe neceſſariò integrum cum fractione. Vt ſi inter 7. & 10. inveniendus ſit medius, duc eorum differentiam 3. in minorem 7. & productum 21. per eorundem ſummam 17. partire. Quotiens enim $1\frac{4}{17}$. additus eidem minori 7. facit medium terminum $8\frac{4}{17}$. Vt hic vides, $7. 8\frac{4}{17}. 10$ Quia tàm 10. ad 7. habent proportionem ſupertripartientem ſeptimas, quàm differentia majorum $1\frac{3}{7}$ ad minorum differentiam $1\frac{4}{7}$. Vel eorum differentiam 3. duc in majorem 10. productumque numerum 30. partire per eorum ſummam 17. Quotiens enim $1\frac{13}{17}$. ſubtractus ex majore 10. reliquum faciet eundem medium terminum $8\frac{4}{17}$.

Alii tradunt medii termini inventionẽ inter duos numeros datos in proportionalitate Harmonica hoc modo. Inventis duobus minimis numeris in proportione duorum numerorum datorum, jubent Quotientem, qui fit ex diviſione differentiæ datorum duorum numerorum per ſummam minimorum duorum inventorum, ducì in minorem inventum, & productum numerum minori dato adjici: Vel eundem Quotientem ducì in majorem inventum, & productum numerum ex majore dato ſubtrahi. Semper enim vel ille conflatus numerus, vel hic reliquus dabit medium terminum, qui quæritur. Vt ſi inter 20. & 30. ſit inveniendus medius: minimi numeri proportionis inter 20. & 30. ſunt 2. 3. Si igitur differentia datorum numerorum 10. dividatur per inventorum ſummam 5. fit Quotiens 2. quem ſi ducamus in minorem inventum 2. & productum 4. minori dato 20. addamus, vel ſi eundem Quotientem 2. ducamus in majorem inventum 3. & productum 6. ex dato majore 30. demamus, invenietur ſemper medius terminus 24. Vt hic apparet. 20. 24. 30.

Brevius ita medius terminus reperietur. Dividatur datorum numerorum differentia per numerum, qui denominatorem proportionis, quam dati numeri habent, vna vnitate ſuperat. Quotiens enim minori termino additus dabit medium. Vt datis numeris 10. 40. habentibus proportionem quadruplam: ſi eorum differentia 30. dividatur per 5. qui numerus denominatorem proportionis vna vnitate ſuperat, fiet Quotiens 6. qui additus minori termino 10. conficiet medium terminum 16. hoc modo 10. 16. 40.

Sed ad memoriam juvandam inveniemus fortaſſe commodius,

ſicet

(licet aliquanto longiore operatione) medium terminũ inter duos extremos datos, hoc modo. Si duo extremi non sunt impares, vel pares, sed vnus par, & alter impar, duplica illos, & inter duplicatos constitue medium Arithmeticè proportionalem, qui semper erit semissis summæ eorum. Per eos deinde tres numeros Arithmeticè proportionales quære ex regula 1. tres Harmonicè proportionales. Ita enim inventus erit medius terminus inter duos, qui eandem inter se proportionem habent, quam dati duo extremi. Quod si fiat, vt primus inventus ad secundum, ita primus datus ad aliud, hoc est, si per primum inventum dividatur numerus ex secundo invento in primum datum factus, reperietur medius inter datos duos extremos. Vt si inter 7. & 10. inveniendus sit medius, duplica eos, vt fiant 14. & 20. Summa enim horum 34. par est, cujus semissis 17. est medius Arithmeticè inter 14. & 20. hoc modo 14. 17. 20. Ex his tribus invenientur hi tres Harmonicè proportionales, 238. 280. 340. Si ergò fiat, vt primus inventus 238. ad secundum 280. ita primus datus 9. ad aliud invenietur numerus $8\frac{4}{17}$. qui medius est Harmonicè inter 7. & 10. qui ab initio propositi fuerunt.

III.

Propositis duobus numeris, reperiemus tertium vtroque majorem in proportionalitate Harmonica, quando id fieri potest, (Pulchrè autem operatio docebit, quando id fieri nequeat) hac ratione. Numerum ex vno in alterum genitum partiemur per numerum, qui relinquitur, subtracta amborum differentia ex minore termino dato. Quotiens enim erit terminus vtroque dato major, quem quærimus. Quod si quando divisor reperiatur esse 0. vel quando amborum differentia ex minore termino subtrahi nequit, impossibile est, datis duobus numeris posse adjungi tertium majorem in proportionalitate Harmonica. Vt si duo termini minores dentur 12. 16. dividemus numerum ex eis procreatum 192. per 8. qui numerus relinquitur, si amborum differentia 4. ex minore 12 detrahatur. Quotiens enim 24. cum datis duobus constituit hanc Harmonicam proportionalitatem, 12. 16. 24. Hanc extendemus, si ad duos terminos 16. 24. tertium adjungamus, nimirum dividendo 384. numerum ex 16. in 24. factum per 8. qui numerus remanet facta, subtractione differentiæ amborum, quæ est 8. ex minore 16. Invenietur enim numerus 48. Quare ita stabunt 4. termini Harmonicè proportionales, 12. 16. 24. 48. Quòd si tentemus his adjungere alium majorem, frustra laborabimus. Nam datis duobus vltimis 24. 48. reperietur divisor 0. Differentia enim amborum, quæ est 24. subtracta ex minore 24. relinquit 0. Quod si quis proponat hos duos numeros, 10. 12. adjungetur illis tertius vtroque major, 15. Ad hos verò duos 10. 11. opponetur tertius $12\frac{2}{10}$. Et ad duos 90. 99. tertius 110. At verò ad 3. 6. nullus adjungi poterit: quia differentia inter ambos, quæ est:

dempta

dempta ex majore 3. relinquit 0. Atque eodem modo quando dati numeri habeant proportionem duplam ; non poteſt illis adjungi tertius proportionalis, quia differentia amborum ſemper eſt minori termino æqualis. Multò magis cùm dati numeri habent proportionem dupla majorem ; non invenietur tertius major illis proportionalis Harmonicè, quia differentia amborum tunc ſemper major eſt minore termino, atque idcirco ſubtractio fieri nequit. Vt ſi dentur numeri 3. 7. quorum proportio eſt dupla ſeſquitertia, nimirum major, quam dupla, vides amborum differentiam 4. majorem eſſe minore termino 3. Quare illis non adjungetur ullus tertius proportionalis.

Alii ita inveſtigant tertium terminum. Ducunt datorum numerorum differentiam in majorem, numerumque productum per numerum, qui relinquitur, ſubtracta eadem differentia ex minore numero, dividunt: Quotientem denique majori adjiciunt, ut tertium conficiant. Vt datis duobus numeris, 12. 16. ſi eorum differentia 4. ducatur in 16. & productus numerus 64. dividatur per 8. (qui numerus relinquitur, ſubtracta eadem differentia 4. ex minore 12.) fit Quotiens 8. qui additus ad minorem 16. facit tertium 24. ut prius.

Itaque, ut duobus numeris adjungi poſſit tertius major proportionalis, neceſſe eſt, illorum proportionem eſſe vel ſuperparticularem, vel ſuperpartientem, nimirum duplam minorem. Ex quo liquido conſtat, Harmonicam proportionalitatem non poſſe progredi in infinitum verſus majores numeros, ſi de continuatione ſecundo modo accepta loquamur, quæ propria eſt, ut in prima regula diximus. Nam cum primum ventum erit ad duos numeros, quorum proportio dupla eſt ; vel major ; ibi neceſſariò proportionalitas conſiſtet, & ultra non promovebitur.

Sequitur quoque ex priori regula, quando minor terminus ſuperat differentiã amborũ ſola unitate, tertium procreari ex primo in ſecundum: quia productus hic numerus diviſus per illam unitatem facit tertium numerum, ut diximus. Conſtat autem numero per unitatem diviſo, Quotientem eſſe eundem numerum diviſum. Vt ſi dentur duo numeri 6. 11. quia minor 6. ſuperat amborum differentiam 5. ſola unitate, erit tertius proportionalis numerus 66. qui fit ex 6. in 11. veluti hic vides, 6. 11. 66. Idem cernitur in hiſce numeris: 2. 3. 6. & 10. 19. 190. Semper enim tertius fit ex primo in ſecundum : quia primus ſuperat differentiam priorum duorum ſola unitate.

Ex poſteriori verò regula ſequitur, quando minor terminus ſuperat amborũ differentiam ſola unitate, tertium procreari, ſi productus ex amborũ differentia in majorem, majori adjiciatur: quia productus ille diviſus per illam unitatẽ, non facit diverſũ Quotientẽ ab eo producto. &c. Vt datis iiſdẽ numeris 6. 11. ſi differẽtia 5. ducatur in

11. pro-

11. productus 55. addatur majori 11. fiet tertius terminus 66. ut prius.

Quare facilè quoque reperiri possunt tres numeri Harmonicè proportionales, si pro primo sumatur quilibet numerus, pro secundo verò ejus duplus, detracta prius unitate, pro tertio denique numerus, qui ex primo fit in secundum. Vt si primus sit 8. erit secundus 15. & tertius 120. & sic de cæteris. Proportio autem tàm extremorum hoc modo inventorum, quàm differentiarum semper erit multiplex à medio, qui perpetuò impar est, denominata. Vt in his proximis tribus, 8. 15. 120. proportio est quindecupla.

Vnde si quærantur tres minimi numeri integri Harmonicè proportionales in quacunque proportione multiplici, siquidem denominator est numerus impar, statuemus eum denominatorem in medio; semissem autem numeri proximè majoris in primo loco. In tertio denique collocabimus eum, qui ex primo in secundum fit. Vt si desiderentur tres numeri integri, & minimi in proportione septupla, locabimus 7. in medio, & 4. (i.e. semissem numeri 8 proximè majoris quam 7.) in primo loco & in tertio numerum 28. ex 4. in 7. procreatum, ut hic vides, 4. 7. 28. Si verò denominator est par, statuemus numerum proximè majorem in primo loco: in tertio verò collocabimus numerum, qui fit ex illo proximè majore in denominatorem: In medio deniq; ponemus denominatorem duplicatum. Vt si inveniendi sint tres minimi integri in proportione octupla, cõstituemus 9. qui numerus proximè major est denominatore 8. in primo loco; & in tertio numerũ 72. ex 9. in 8 genitũ, in medio deniq; duplum denominatoris, nimirum 16. ut hic apparet 9. 16. 72.

Quod si tres numeri Harmonicè proportionales in data proportione inveniendi sint, sive illi minimi sint & integri, sive non, agendum erit hoc modo. In medio statuemus denominatorem datæ proportionis: In primo verò semissem numeri, qui denominatorem una unitate superat: In tertio deniq; loco locabimus numerum ex multiplicatione primi per medium factum. Veluti si quærantur tres in data proportione dupla supertripartiente septimas; erit denominator hujus proportionis $2\frac{1}{3}$. collocandus in medio, & in primo numerus $1\frac{1}{6}$. nimirum semissis numeri $3\frac{1}{3}$. qui denominatorem $2\frac{1}{3}$. unitate superat. Tertius deniq; erit $4\frac{4}{18}$. factus ex primo $1\frac{1}{6}$. in medium $2\frac{1}{3}$. Ita igitur stabunt tres numeri inventi, $1\frac{1}{6}. 2\frac{1}{3}. 5\frac{4}{18}$ qui ad hos tres ejusdem denominationis revocabuntur $\frac{84}{72}. \frac{168}{72}. \frac{204}{72}$ si prius quilibet ad unicam fractionem reducatur; Numeratores autem 84. 119. 204. erunt numeri integri Harmonicè proportionales, eritque extremorum proportio, ac proinde & differentiam, dupla supertripartiens septimas, quæ videlicet data est.

IV.

Duobus numeris datis, reperiemus tertium utroque minorem in proportionalitate Harmonica, hoc modo. Numerũ ex uno in alterum

rum productū partiemur per ſummam ex majore dato, & amborū differentia collectam, Quotiens enim erit is, qui quæritur. Vt ſi dentur duo numeri 6. 12. ſi dividamus numerum 72. ex 6. in 12. factum per 18. ſummam ex 12. & amborum differentia 6. collectam, reperiemus tertium 4. minorem vtroque illis proportionalem, vt hic cernis 4. 16. 12. Hanc extendemus regrediendo verſus minores numeros, ſi duobus 4. 6. minorem tertium adjungemus 3. hoc modo 3. 4. 6. 12. qui numerus 3. invenietur dividendo numerū 24. factum ex 4. in 6. per 8. ſummam videlicet ex 6. & amborū differentia 2. collectam. Eodem modo duobus minoribus 3. 4. adjungetur tertius minor $2\frac{2}{3}$. Atq; in hunc modū decreſcet proportionalitas quælibet Harmonica continuè in infinitum. Vbi animad vertere licet admirabilem ſane varietatem inter has tres proportionalitates, Arithmeticam, Harmonicam, & Geometricam; quæ varietas tribus hiſce propoſitionibus explicatur.

I. Arithmetica augetur in infinitum, ſed in infinitum non decreſcit.

II. Harmonica contra decreſcit in infinitum, ſed in infinitum augeri non poteſt. Quod intelligendum eſt, ſi ita continuati debeat, vt quilibet tres numeri habeant proportionalitatem Harmonicam; hoc eſt, vt primus, ſecundus, ac tertius ſint Harmonicè proportionales: Item ſecundus, tertius, & quartus: Item tertius, quartus, & quintus, &c. Nam alias in vtramq; partem extendi poteſt in infinitum, ſicut Geometrica, vt ſupra in regula 1. diximus.

III. Geometrica deniq; & augetur & decreſcit in infinitum.

Eſt & hoc notatu dignum, in cubo reperiri quatuor terminos in Harmonica proportionalitate continuos, qui variè inter ſe comparati præcipuas perfectaſq; conſonantias Muſicas exprimunt. Nam 6. ejus baſes quadratæ; 8. anguli ſolidi; 12. latera; 24. anguli plani conſtituunt hos 4. terminos 6. 8. 12. 24. continuè proportionales Harmonicè. Proportio autem 8. ad 6. eſt ſeſquitertia, quæ conſonantiam Diateſſaron, ſive Quartam, conſtituit. Proportio verò 12. ad 8. ſeſquialtera eſt, continens conſonantiam Diapenten, ſive Quintam. Proportio deinde 12. ad 6. vel 24. ad 12. dupla eſt, explicans conſonantiam Diapaſon, ſive Octavam. At proportio 24. ad 8. tripla eſt, efficiens conſonantiam Diapaſon & Diapenten, hoc eſt, Duodecimam. Denique proportio 24. ad 6. quadrupla exiſtit, exhibens conſonantiam Diſdiapaſon, ſive Decimamquintam.

V.

Datis quotlibet numeris Arithmeticæ proportionalitatis, ſi quicunq; numerus, ſive minimus, ſive non minimus, ab eis numeratus per ſingulos dividatur, erunt Quotientes converſo ordine Harmoni-

monice proportionales. Et vicissim, datis quotlibet numeris in proportionalitate Harmonica, si numerus, quem metiuntur, per singulos dividatur, erunt Quotientes ordine converso Arithmetice proportionales. Verbi gratia: Sint Arithmetice proportionales 1. 2. 3. 4. 5. 6. Numerus, quem metiuntur, est 720. ex eorum continua multiplicatione inter se procreatus. At minimus ab eis numeratus erit 60. quem reperies per ea, quæ in Arithmetica practica cap. 10. scripsimus. Priore ergo per singulos datos diviso, invenientur hi in proportionalitate Harmonica continua.

720. 360. 240. 180. 144. 120.

Posteriore autem per eosdem datos diviso, reperientur hi:

60. 30. 20. 15. 12. 10.

Atq; hi numeri inventi easdem proportiones habent, quas dati numeri Arithmeticæ proportionalitatis, bini ac bini, converso tamē ordine: nimirum ut in Harmonica primus ad secundum, ita in Arithmetica secundus ad primum: Et ut in Harmonica secundus ad tertium, ita in Arithmetica tertius ad secundum, &c. Numeri quoque per minimum numeratum inventi, sunt minimi in suis proportionibus. Quod si vicissim numerus ab inventis numeratus dividatur per singulos inventos; gignentur totidem numeri Arithmetice proportionales: & si quidem minimus, quem metiuntur, dividatur, prodibunt iidem numeri Arithmetice proportionales per quos Harmonice proportionales inventi sunt, & eodem quidem ordine, quo dati sunt, sed ordine converso, si cum inventis in Harmonica proportionalitate conferantur. Semper enim si in una proportionalitate progrediantur numeri à minoribus ad majores, in altera à majoribus ad minores progressus fit, & contra.

Igitur si quis cupiat quotcunq; terminos continue Harmonice proportionales, sumendi sunt totidem termini Arithmetice quomodolibet proportionales, & numerus ab eis numerat⁹ (& minim⁹ quidē, si minimi desiderentur) per singulos dividendus, ut diximus.

VI.

Datis tribus numeris in proportionalitate Harmonica, tantum fit ex priorum differentia in tertium, quantum ex differentia posteriorum in primum. Vt hic cernis. Nam tum ex 2. in 12. tum ex 4. in 6. fit numerus 24. Ratio hujusce rei est; quia cum sit, ut 12. primus ad 6. secundum, ita 4. tertius ad 2. quartum; erit numerus ex primo 12. in quartum 2. factus, æqualis numero, qui ex secundo 6. fit in ter-

Differentia	2	4	
Proportio. Har.	6	8	12

tium 4. ut ex 2. regula proportionalitatis Geometricæ manifestum est. Idem constat in pluribus terminis, si terni ac terni sumantur cum suis differentiis, ut in his 6. terminis apparet.

Differentia.	30	10	5	3	2	
Propor. Harm.	60	30	20	15	12	10

Nam ex 30. in 20. & ex 10. in 60. fiunt 600. Item ex 10. in 15. & ex 5. in 30. fiunt 150. Rursus ex 5. in 12. & ex 3. in 20. fiunt 60. Ac denique ex 3. in 10. & ex 2. in 15. fiunt 30. Atq; ita, ut vides, jucunda operatione probare potes, num dati quotcunque termini, aut inventi, servent continuam proportionalitatem Harmonicam, nec ne. Nam sumptis ternis, ac ternis, cũ suis differentiis, si differentiæ commutato ordine ducantur in primum terminum ac secundum, producantque utrobique numeros æquales, erunt termini omnes continue proportionales Harmonice, sin minus, nequaquam.

VII.

Quod si quis reperire velit quinque minimos numeros, in quibus omnes tres proportionalitates existant: ita ut primi tres numeri habeant proportionalitatem Arithmeticam: Relicto autem primo, tres insequentes, proportionalitatem Geometricã, & tres postremi proportionalitatem Harmonicam: ac deinde primus, tertius, & quintus habeant datam proportionem continuam Geometricam. Vel si reperire quis velit tres numeros in data proportione cõtinue proportionales, ita ut inter primum, ac secundum cadat medius Arithmetice proportionalis, & inter secundũ ac tertium medius Harmonice proportionalis, medius deniq; trium datorum numerorum sit inter medios inventos medius proportionalis Geometrice, atq; quinque numeri ita inventi sint minimi omnium, in quibus ea contingant; efficiendum id erit hâc ratione.

9.	6.	3.	$1\frac{1}{2}$.	1.
9.	6.	3.	$\frac{3}{2}$.	1.
18.	12.	6.	3.	2.

Sit data proportio tripla, in qua tres minimi sumantur termini, 9. 3. 1. Inter primo duos statuatur medius Arithmetice 6. Per hunc dividatur quadratus medii numeri 3. assumpti, & Quotiens $1\frac{1}{2}$ inter 3. & 1. statuatur, ut in primo ordine hic posito apparet. Sed quia hic quotiens integer est cum fractione, revocabimus eum ad unicam fractionem hanc $\frac{3}{2}$. ut in secundo ordine vides. Quod si ejus numeratorem 3. accipiamus, relicto denominatore, & alios numeros secundi ordinis per denominatorem 2. multiplicemus, procreabimus quinque minimos numeros quæsitos, ut in tertio ordine cernis, Nam 18, 12. 6. Arithmeticam habent proportiona-

tionalitatem: 12. 6. 2. Geometricam: & 6. 3. 2. Harmonicam: ac denique 18. 6. 2. triplam datam. Quod si non inveniendi sint minimi quinq; termini in his tribus proportionalitatibus continuatis, accipi possunt quicunq; tres numeri datam proportionem habentes continuam, & cum eis duo medii, nimirum secundus, & quartus, investigandi, ut dictum est.

Si minores termini cum majoribus conferendi sint, & data sit proportio subtripla, inveniemus eodē artificio ex his tribus minimis, 1. 3. 9. subtriplis hos quinq; 2. 4. 6. 9. 18. Nam 2. 4. 6. servant proportionalitatem Arithmeticam: 4. 6. 9. Geometricam: 6. 9 18. Harmonicam; & 2. 6. 18. subtriplam propositam. Inveniendi modum conspicis in hisce tribus ordinibus appositis.

1.	1 2.	1 3.	1 4½.	1 9.
1.	1 2.	1 3.	1 4½.	1 9.
2.	1 4.	1 6.	1 9.	1 18.

Rursus sit data proportio sesquialtera, in qua tres minimi termini sint, 9. 6 4. Inter 9. & 6. medius est Arithmetice 7½. ut in primo ordine, Revocetur ad unicam hanc fractionem 15/2. ut in secundo ordine. Sumpto autem numeratore 15. pro secundo numero, relicto denominatore, ducantur alii in secundo ordine in denominatorem, 2. Vt in tertio ordine factum est: Et quadratus numerus numeri 12. nimirum 144. dividatur per 15. ac Quotiens 9⅗. in minimis terminis statuatur medius inter 12. & 8. ejusdem tertii ordinis. Hunc numerum 9⅗. revocabimus ad hanc unicam fractionem, 48/5. ut in quarto ordine. Sumpto denique numeratore 48. pro penultimo numero, relicto denominatore, ducemus alios quarti ordinis in denominatorem 5. inventiq; erunt quinq; minimi numeri quæsiti, ut in quinto ordine apparet.

9.	1 7½.	1 6.	1 4.	
9.	1 15/2.	1 6.	1 4.	
18.	1 15.	1 12.	1 9⅗.	18.
18.	1 15.	1 12.	1 48/5.	18.
90	1 75.	1 60.	1 48.	1 40

Si minores numeri cum majoribus comparandi sint, invenientur in proportione data sesquialtera quinq; termini minimi, ut hic vides in quarto ordine. Eademq; in cæteris est ratio.

Potes quoque, si placet, in primo ordine omnes quinque numeros constituere, & fractiones, si quæ sint, ad unicā denominationē minimā revocare, & deinde quamlibet ad unicam fractionem; Nam si numeratores pro illis substituas, denominatore communi relicto, & reliquos numeros integros per communem denominatorem multiplices, efficies quinque numeros minimos integros quæsitos. Vt si sub quadrupla proportio proponatur, erūt minimi tres termini, 1. 4. 16. Additis simul 1. 4. erit sūmę dimidiū 2½. medius Arithmetice inter eos. Et si dividatur quadratus numer⁹ numeri 4:

4.	1	1 6.	1	1 9.
4.	1 5.	1 6.	1 7⅕.	1 9.
4.	1 5.	1 6.	1 36/5.	1 9.
20	1 25	1 30	1 36	1 45.

1.	$2\frac{1}{2}$.	4.	$6\frac{2}{5}$.	16.
1.	$2\frac{5}{10}$.	4.	$\frac{64}{10}$.	16.
1.	$\frac{25}{10}$.	4.	$\frac{64}{10}$.	16.
1.	25.	40.	64	16.

per $2\frac{1}{2}$. fit Quotiens $6\frac{2}{5}$. medius Harmonice inter 4. & 16. Duæ autem fractiones reducentur ad eandem denominationem, ut in secundo ordine. Et fractionibus singulis ad unicam fractionem revocatis, constituetur tertius ordo. Sumptis autem numeratoribus, relinquendo denominatorem communem, & numeris integris per denominatorem communem multiplicatis, constituentur quinq; minimi numeri quæsiti, ut in quinto ordine vides. Atque in hunc modum quotcunque terminos proportionem aliquam servantes, in quibus permistæ sunt fractiones, ad totidem terminos integros reduces, quando res exigit.

VIII.

Quando quatuor numeri ita ordinantur, ut ipsi sint Geometrice proportionales non continue, unus autem mediorum cum extremis servet proportionalitatem Arithmeticam, alter vero Harmonicam, ita ut in quatuor illis numeris tres proportionalitates, quas diximus, reperiantur, dicuntur quatuor illi numeri constituere Harmoniam maximam. Quando autem quatuor numeri ita ordinantur, ut in ipsis reperiantur duæ duntaxat proportionalitates, ut vel Geometrica, & Arithmetica: vel Geometrica, & Harmonica; vel Harmonica, & Arithmetica, dicuntur illi quatuor numeri Harmoniam minorem constituere.

Maximam Harmoniam, in qua extremi termini habeant etiam proportionem datam, ita constitues. Sit data proportio quæ 6. ad 1. quam extremi termini habere debent. Quoniam summa eorum est impar, accipio eorum duplos 12. & 2. inter quos medius Arithmetice constituatur 7. hoc modo 12. 7. 2. Quod si eorum summa fuisset par, accepissem statim medium inter eos in proportionalitate Arithmetica. Ex his tribus Arithmetice proportionalibus inveniantur tres Harmonice proportionales per primam regulam, 84. 24. 14. quorū extremi habent proportionem datam, nimirū eandē quā 12. ad 2. vel 6. ad 1. Si igitur inter extremos 84. 14. qui semper ita inventi pares erunt, statuatur etiam medius Arithmetice, 49. erunt quatuor quæsiti numeri, 84. 49. 24. 14. Nā extremi habent datam proportionem, quam 6. ad 1. Deinde in eis reperiuntur omnes tres proportionalitates. Inter ipsos enim quatuor existit Geometrica proportionalitas non continua, cum eadem sit proportio 84. ad 49. quæ 24. ad 14. vel 84. ad 24. quæ 49. ad 14. ut liquido constat ex 7. proprietate trium harum proportionalitatum. At inter 84. 49. 14. Arithmetica. Ac denique inter 84. 24. 14. Harmonica ex constructione, ut hic vides.

Tres

Tres proportio	84.		49.		24.		14		nalitates simul.		
Geometricè prop.	84.		49.		24.		14.	Vel	84.	24	49.	14.
Arithmet. prop.		84.		49.		14.					
Harmonice prop.		84.		24.		14.					

Rursus sit data proportio, quæ 3. ad 2. Quoniam iterum eorum summa est impar, sint eorum dupli 6. 4. inter quos statuatur medius in Arithmetica proportionalitate, 4. hoc modo, 6 5. 4. Ex his per primam regulam invenio Harmonice proportionales 30. 24. 20. Constituto autem medio Arithmetice 25. inter 30. & 20. erunt eadem ratione quatuor numeri quæsiti 30. 25. 24. 20. cum habeant omnes tres proportionalitates, ut hic apparet.

Geometrice proport.	30.	25.	24.	20.	Vel	30.	24.	25.	20.
Arithmetic. proport.		30.		25.			20.		
Harmon proport.		30.		24.			20.		

Eosdem 4. numeros maximæ Harmoniæ reperiemus, si pro extremis sumamus quosvis duos numeros datam proportionem habentes, pares, vel impares. Si enim inter hos statuatur medius Arithmetice: fiat autem, ut inventus ad primum extremum, ita alter extremus ad aliud, erit hic inventus Harmonica proportionalitate medius inter eosdem extremos. Quando enim in 4. numeris Geometrice proportionalibus, quales sunt 4. inventi, unus mediorum est medius in proportionalitate Arithmetica, alter mediorum medius est in Harmonica inter eosdem extremos, ut diximus in 7. proprietate harum trium proportionalitatum. Quando igitur hi 4. numeri inventi sunt integri, factum erit, quod proponitur, si vero admistæ sint fractiones, reducemus eos ad integros, ut ad finem antecedentis regulæ 7. scripsimus. Vt si proportio data sit dupla, statuemus extremos, 12. & 6. Dimidium summæ eorum 9. erit medius terminus inter eos Arithmetice proportionalis, hoc modo 12. 9. 6. Si igitur fiat, ut 9. ad 6. ita 12. ad aliud: Vel ut 9. ad 12. ita 6. ad aliud, invenietur semper numerus 8. inter 12. & 6. in Harmonica proportionalitate medius. Quare sic stabunt 4. numeri maximæ Harmonicæ, 12. 9. 8. 6. Postremo si in eadem proportione dupla extremorum sumamus pro extremis, 20. & 10. inveniemus medium Arithmetice, 15. & Harmonice $13\frac{1}{3}$. in minimis numeris, hoc modo, 20. 15. $13\frac{1}{3}$. 10. Si ergo tertium numerum ad unicam fractionem $\frac{40}{3}$ revocemus, & ejus numeratorem 40. denominatore relicto, tertium statuamus, invenientur alij, si inventos per denominatorem 3. multiplicemus, ut hic vides: 60. 45. 40. 30.

Minorem autem Harmoniam ſic reperiemus. Si in 4. numeris debet reperiri ſola proportionalitas Geometrica cum Arithmetica, cape tres numeros continue proportionales Geometrice, quorum extremi pares ambo ſint, vel impares. Si enim inter extremos ſtatuas medium in proportionalitate Arithmetica, habebis 4. numeros quæſitos. Vt ſi ſumantur hi tres numeri ſesquialteri, 16. 24. 36. & inter extremos inveniatur medius Arithmetice proportionis, 26. erunt 4. quæſiti numeri, 16. 24. 26. 36. quorum tres 16. 24. 36. Geometrice, & tres 16. 26. 36. Arithmetice proportionales sũt, ex conſtructione.

Si vero ſola Geometrica cum Harmonica deſideretur, cape quoq; tres numeros quoscunque continue proportionales Geometrice. Si enim inter extremos invenias medium in Harmonica proportionalitate, habebis 4. numeros, qui quæruntur. Vt ſi ſumantur iidem tres ſesquialteri 16. 24. 36. invenietur inter extremos medius in Harmonica proportionalitate, $22\frac{2}{7}$. Sic ergo ſtabunt 4. numeri inventi, 16. $22.\frac{2}{7}$. 24. 36. qui reducentur ad hos integros, 208. 286. 312. 468. Si accepiſſes hos numeros tres duplos, 20. 10. 5. inveniſſes inter extremos medium Harmonicum 8. hoc modo, 20. 10. 8. 5.

Si denique optes ſolam Harmonicam cum Arithmetica proportionalitate, accipe tres quoslibet Harmonice proportionales. Si namque inter medium, & alterutrum extremorũ ſtatuas medium Arithmeticum, inventi erunt quatuor numeri, quos quærimus. Vt ſi ſumantur hi tres 6. 8. 12. erit inter priores duos medius Arithmetice proportionalis 7. Quare 4. inventi numeri erunt hi, 6. 7. 8. 12. At inter poſteriores duos erit medius in Arithmetica proportionalitate 10. Sic ergo ſtabunt 4. inventi numeri, 6. 8. 10 12. qui omnes (quod caſu quodam fortuito in hoc exemplo accidit) ſunt Arithmetice proportionales, & non ſolum tres 8. 10. 12. ex conſtructione: at ſoli tres accepti 6. 8. 12. habent proportionalitatem Harmonicam.

IX.

Si inveniendi ſint quotcunque numeri Arithmetice proportionales continue, inter quorum binos ac binos cadant ſinguli medii Harmonice proportionales integri, efficietur id hac ratione. Sumantur tot termini Arithmetice proportionales, quot quæruntur; & bini in proportione binorum proximorum minimi. Si enim accipiatur, minimus numerus numeratus à ſummis binorum minimorũ acceptorum, atque hic in ſingulos acceptos numeros Arithmetice proportionales ducatur, procreabuntur numeri, qui quæruntur. Sint enim verbi gratia inveniendi quatuor. Cape quatuor quoscunque numeros Arithmetice proportionales, 3. 6. 9. 12. & 1. 2. minimos terminos proportionis 3. ad 6. & 2. 3. minimos proportionis 6. ad 9. & 3. 4. minimos in proportione 9. ad 12. eruntq; tres ſummæ binorum minimorum 3. 5. 7. atque ab his minimus numeratus,

ratus, 105. Si igitur hunc ducas seorsum in singulos acceptos, 3. 6. 9. 12. procreabis 4. numeros Arithmetice proportionales quos desideras, 315. 630. 945. 1260. Nam inter primum & secundum in Harmonica proportionalitate medius est, 420. inter secundum & tertium, 756. Inter tertium & quartum, 1080. ut hic cernis.

Arith proport.	315.	630	945	1260
Medii Harm.	420.	756.	1080	

Itaque si vis duos in data proportione duorum numerorū, inter quos cadat unus integer medius Harmonice, sume duos minimos in data proportione, & eorum summam duc in duos datæ proportionis. Vt si data sit proportio tripla inter 4. & 12. erunt minimi termini, 1. 3. quorum summam 4. si duxeris in 4. & 12. efficies 16. & 48. numeros quæsitos Medium Harmonicum inter eos erit 24. Vt hic vides, 16. 24. 48. Si datæ proportionis numeri fuissent minimi 1. 3. duxissemus utrumq; in eorum summam 4. factiq; essent hi duo numeri. 4. 12. inter quos cadit Harmonice medius 6.

X.

Si autem volueris quotcunque terminos in continua proportione Geometrica data, inter quorum binos, ac binos, bini medii integri cadant, unus in proportionalitate Arithmetica & alter in Harmonica, assequeris id hoc artificio. Sume tot minimos numeros continue proportionales Geometrice, quot desiderantur, & singulos multiplica per summam duorum in eadem proportione minimorum. Et si quidem producti fuerint omnes pares, ipsi erunt, quos quærimus; sin minus, eorum dupli dabunt quæsitos numeros. Sint enim inveniendi verbi gratia tres in proportione sesquialtera. Cape totidem minimos in data proportione, 4. 6. 9. & duos minimos in eadem 2. 3. Horum summam 5. duc in singulos acceptos, & productos numeros quoniam non omnes pares sunt, dupla, habebisque propositos numeros 40. 60. 90. Nam inter 40. 60. medium Harmonicum est, 48. Arithmeticum, 50. Et inter 60. 90. Harmonicum medium est, 72. Arithmeticum 75. Vt hic vides.

Geom. proport.	40		60		90
Medii Harm.		48		72.	
Medii Arithm.		50		75	

Hinc facilè reperies duos numeros in data proportione, inter quos intercipiantur duo medii, alter secūdū proportionalitatē Arithmeti-

cam & ſecundum Harmonicam alter. Sumptis enim minimis terminis datæ proportionis, ſi eorum ſummam vel in duos illos minimos terminos, vel in duos quoscunq; alios numeros datam habentes proportionem duxeris, erunt numeri producti, ſi pares ſunt, quæſiti: ſi vero uterque nõ eſt par, erunt eorũ dupli, quos quærim⁹. Vt ſi data ſit proportio ſeſquitertia, cujus minimi numeri ſunt 3. 4. eorumq, ſumma, 7. Si ergo duces 7. in 3. & 4. vel in 12. & 16. datam quoque habentes proportionem, produces vel 21. 28. vel 84. & 112. Et quia priores duo non ſunt pares, erunt eorum dupli 42. 56. ij, quos quærimus. Poſteriores autem duo, quia pares ſunt, erunt quæſiti. Tam enim inter illos, quam inter hos cadunt duo medij, quos quærimus, ut hic manifeſtum eſt.

Numeri inventi	42			56			84			112	
Medii Harmon.		84.			Vel			96			
Medii Arithm.			49					98			

XI.

Si vero quis petat ſibi dari tres numeros in proportionalitate Harmonica inter quorum binos bini cadant medii, alter in proportionalitate Arithmetica & in Geometrica alter, exequemur id hac methodo. Inveniantur, per 9. regulã proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmetice proportionales 2. 50. 98. inter quorũ priores binos ſit medius Geometrice, 10. & inter binos poſteriores, 70. ſtatuanturq; ordine ſic 2. 10. 50. 70. 98. Minimus autẽ numerus ab his quinque numeratus ſit 2450. Quo diviſo per eosdẽ quinque numeros Quotientes ſint, 1225. 245. 49 35. 25. Si igitur omnes Quotiẽtes ſint pares, vel impares, erunt primus, tertius & quintus: ut 1225, 49 25. ii numeri, qui quæruntur. Sunt enim Harmonice proportionales, ut cõſtat ex 5 regula, cum ſint Quotientes producti ex diviſione numeri 2450. quem numeri 2. 50. 98. Arithmetice proportionales numerant per eosdem numeros 2. 50. 98. Inter binos autẽ cadũt Geometrice proportionales, 245. ſecundus Quoties; & 35. tertius Quotiens. Habent enim 1225. 245. 49. easdem proportiones cõverſo ordine, quas continue proportionales 2. 10. 50. habent, ut cõſtat ex 7. regula proportionalitatis Geometricæ. Eodẽq; modo 49. 35. 25. easdẽ habebunt proportiones quas cõverſo ordine habent cõtinue proportionales 50. 70. 98. cum tam illi, quã hi, ſint Quotientes producti per diviſionẽ ejusdẽ numeri 2450. per 2. 10. 50. & per 50. 70. 98. Certũ autẽ eſt, inter binos eosdẽ 1225. 49. & inter 49. 25. cadere quoque ſingulos Arithmetice proportionales, cũ omnes pares ponãtur, vel impares. Quod ſi nõ omnes ſint pares, duplicandi erunt omnes 5.

Quo-

Quotientes, vt pares numeri fiant, quiidem omnino præstat unę quod quærimus. Habebunt enim eaſdem proportiones, quas eorū ſubdupli habent, ac proinde tam inter primum ac tertium ſecundus, quam inter tertium & quintum quartus medio loco erit Geometrice proportionalis. Cum ergo inter eoſdem cadant medij Arithmetice, conſtat propoſitum. Exemplum ſuperius ob oculos hic propoſitum eſſe vides.

Tres Har. prop. inuenti.	1225.			49.			25.	
Medij Arith.		637			37			
Medij Geometr.				245	35			

VII.

Rurſus ſi quærantur tres numeri in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos cadant bini proportionales: Geometrice vnus, & alter Harmonice, ſatisfaciemus quæſtioni hoc modo. Reperiātur iterum per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmetice proportionales. 2. 50. 98. inter quorum binos ſinguli medij cadant in proportionalitate Geometrica; ſumāturque duo minimi 1. 25. in proportione priorum duorum: Item duo minimi 25. 49. in proportione duorum poſteriorum: & horum ſummæ 26. 74. numerent minimum numerum 692. in quem tres illi inuenti. 2. 50. 98. ducantur. Producti enim numeri 1924. 48100. 94276. erunt, quos inquirimus. Cum namque eaſdem proportiones habeant, quas eorum ſubmultiplices 2. 50. 98. fit vt quemadmodum inter binos horum ſinguli cadunt medij Geometrice, ita quoque inter binos illorum ſinguli intercipiantur medij in eadem proportionalitate Geometrica. Deinde quia ſummæ minimorum numerorum 1. 25. & 25. 49. in proportionibus 2. ad 50. & 50. ad 98. (qui tres 2. 50 98. Arithmetice ſunt proportionales) numerāt minimum numerū 962. qui in eos tres, 2. 50. 98. ductus produxit 1924. 48100. 94276. cadent inter binos horum trium ſinguli medij Harmonice proportionales, vt in 9. regula taditum eſt. Exemplum ergo cum medijs ſic ſtabit.

Arith. prop. nu.	1924			48100.			94276	
Medij Harm.		3700			63700			
Medij Geom.			9620			67340		

XIII.

Ex his, quæ diximus, inuenire quis poterit tres numeros proportionales ſiue Arithmetice, ſiue Geometrice, ſiue Harmonice, inter

quorum binos cadant terni medii, vnus Arithmetice, alter Geometrice, & reliquus Harmonice. Sint enim primum inueniendi tres Arithmeticæ proportionalitatis. Per antecedentem regulam 12. reperiantur tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis, inter quorum binos cadant bini medij, vnus in Geometrica proportionalitate, & in Harmonica alter. Qui tres numeri si fuerint omnes pares, vel impares, cadent quoque inter binos singuli Arithmetice proportionales, atque adeo quæstioni satisfacient. Si vero non omnes pares sint, aut impares, eorum dupli erunt, quos quærimus. Exemplũ hic habes in tribus numeris antecedentis regulæ, qui omnes pares sunt, vt hic apparet.

Arith. prop.	1924				48100				94276		
Medij Har.		3700				63700					
Med. Geom.			9620				67340				
Med. Arith.				25012				71188			

Deinde inueniendi sint tres numeri in Geometrica proportionalitate, inter quorum binos cadant terni medij, in singulis proportionalitatibus singuli, sitque proportio data, quam medij Geometricæ proportionalitatis efficere debent, nimirum sesquialtera. Cape quinq; numeros minimos datæ proportionis continue proportionales 16. 24. 36. 54. 81. & duos minimos 4. 9. in proportione primi 16 ad tertium 56. & tertij 36. ad quintum 81. Horum minimorum summam 13. duc in eundem primum 16. tertium 36. & quintum 81. Producti enim numeri 208. 468. 1053. duplicati, (quoniam ipsi non omnes pares sunt, aut impares; alias non essent duplicandi) nimirum 416. 936. 2106. (vt inter binos cadere possint singuli medij Arithmetice) sunt ij quos quærimus. Nam inter binos cadunt bini medij, alter Harmonice, & Arithmetice alter, vt ex 10. regula patet: Et inter eosdem cadunt medij Geometrice, nimirum dupli eorum, qui fiunt ex eadem summa 13. duorum minimorum in secundum 24. & tertium 54. ab initio acceptos: quemadmodum hic manifestum est.

Geom. prop.	416				936				2106		
Med. Harm.		576				1296					
Med. Geom.			624				1404				
Med. Arith.				676				1521			

Postremo sint inueniendi tres in Harmonica proportionalitate Inuentis tribus in Harmonica porportionalitate, 1225. 49. 25. inter quorum binos cadant bini Medij, vnus Arithmetice & alter Geo-

Geometrice vt in 11. regula docuimus, sint proportionis priorū duorum minimi duo numeri 25. 1. & proportionis duorum posteriorum minimi duo numeri 49. 25 quorum summæ 26. 74. numerēt minimum numerum 962. Hunc si in tres inuentos duxeris gignes tres quæsitos 1178450. 47138. 24050. Nam inter binos cadent, bini medij, vnus Arithmetice & alter Geometrice, quemadmodum inter eorum submultiplices 1225. 49. 25. nimirum numeri, qui fiunt ex eodem 962 in medios supra inuentos. Item inter eosdem binos cadent singuli medij Harmonice, vt ex 12. regula constat, cum producti sint ex minimo numerato à summis minimorum terminorum, in omnes tres. Exemplum hic habes.

Har.prop	1178450			47138			24050	
Med.Ar.		612794			35594			
Med.Geo.			235690			133670		
Med.Har.				90650			31850	

XIV.

Pari ratione comperiemus duos numeros proportionem habentes duplicatam datæ proportionis, inter quos cadant tres medij, vnus in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alius, & tertius in Harmonica. Sit enim data proportio 6. ad 3. & tres minimi in ea numeri 4. 2. 1. critque ex defin. 10. huius lib. proportio 4. ad 1. duplicata proportionis 2. ad 1. vel 6. ad 3. datæ. Ducatur summa 5. ex 4. & 1. collecta in duos quosuis numeros habentes eandem proportionem quam 4. ad 1. hoc est, duplicatam datæ proportionis, vt in 12. & 3. Producti autem numeri 60. 15. duplicentur, si ambo non sint pares, vel impares. Dupli enim 120. 30. sunt quos quærimus. Et si vterq; esset par, aut impar, ipsi essent quæsiti, & duplicatio non foret necessaria. Ita autem se habent tres medij inter 120. & 30. vt hic apparet.

Duo numeri inuenti	120			30
Medius Arith.		75		
Medius Geomet.			60	
Medius Harmon.			48	

XV.

Postremo si iubeat numerum quemcunque propositum distribuere in quotuis partes Harmonicam proportionalitatem seruātes, efficies id hac ratione. Cape per 5. reg. tot numeros Harmonice propor-

proportionales, in quot partes numerus eſt diſtribuendus. Si enim per eorum ſummam diuides numeros, qui ex dato numero in numeros acceptos fiunt, erunt Quotientes partes, quas quæris, eruntque acceptis numeris eodem ordine proportionales. Vel ſi per ſummam acceptorum numerorum partiaris datum numerum, & Quotientem in ſingulos numeros acceptos ducas, erunt numeri procreati, quos quæris. Vt ſi numerus 130. diſtribuendus ſit in tres partes Harmonicè proportionales; ſi ſumantur tres numeri 6.8.12. ex 5. regula inuenti, & per eorum ſummam 26. diuidantur numeri 780. 1040. 1560. qui ex dato numero 130. in aſſumptos numeros 6.8.12. gignuntur, erunt Quotientes 30. 40. 60. partes, quas inquirimus. Vel ſi datum numerum 130. per 26. ſummam acceptorum numerorum diuidas, & Quotientem 5. ducas in ſingulos acceptos, 6.8.12. erunt procreati numeri 30. 40. 60. eædem partes, quas inquirimus. Conſtituunt enim datum numerum 130. ſuntque Harmonicè proportionales, ſicut aſſumpti numeri 6.8.12. Eodem modo diuidetur numerus 10. in has tres partes $2\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{3}$. $4\frac{1}{3}$. eodem modo proportionales. Eademque ratio eſt de pluribus partibus.

QVO PACTO EX PROPORTIONE ÆQVALITATIS omnes inæqualitatis proportiones rationales oriantur.

Poſitis tribus terminis æqualibus, ſiue vnitatibus, ſiue numeris, mirabile dictu eſt, quam facili, & iucunda ratione, ex varia illorum inter ſe additione, omnes proportiones rationales inæqualitatis in tribus terminis gignantur, hoc ordine.

Æquales termini, ſiue numeri, procreant numeros duplos: Dupli triplos: Tripli quadruplos: Quadrupli quintuplos; & ſic in infinitum.

Deinde ex multiplicibus terminis, ſi ordinem inuertant, gignentur omnes ſuperparticulares hoc ſeruato ordine. Dupli inuerſi producunt ſeſquialteros: Tripli inuerſi ſeſquitertios: Quadrupli inuerſi ſeſquiquartos: atque ita deinceps.

Tertio ex terminis ſuperparticularibus inuentis ſi inuertant quoque ordinem, producentur omnes ſuperpartientes, hac ſerie. Seſquialteri inuerſi exhibent ſuperbipartientes. Seſquitertij inuerſi ſupertripartientes: Seſquiquartj inuerſi ſuperquadrupartientes, &c.

Quarto ex iiſdem terminis ſuperparticularibus eo ordine, quo inuenti ſunt, naſcentur omnes multiplices ſuperparticulares, hoc ordine.

Seſquialteri dant duplos ſeſquialteros: Dupli ſeſquialteri triplos ſeſquialteros: Tripli ſeſquialteri quadruplos ſeſquialteros, &c. Seſquitertij item gignunt duplos ſeſquitertios: Dupli ſeſquitertij triplos ſequitertios: Tripli ſeſquitertij quadruplos ſeſquitertios, &c.

Seſ-

Sesquiquarti rursus efficiunt duplos sesquiquartos: Dupli sesquiquarti triplos sesquiquartos: Tripli sesquiquarti quadruplos sesquiquartos, &c.

Quinto ex terminis superpartientibus inuentis elicientur omnes multiplices superpartientes, hoc ordine.

Superbipartientes generant duplos superbipartientes: Dupli superbipartientes triplos superbipartientes: Tripli superbipartientes quadruplos superbipartientes, &c. Supertripartientes quoque pariunt duplos supertripartientes; Dupli supertripartientes, triplos supertripartientes: Tripli supertripartientes, quadruplos supertripartientes, &c. Superquadrupartientes item gignunt duplos superquadrupartiētes: Dupli superquadrupartiētes, triplos superquadrupartientes: Tripli superquadrupartientes, quadruplos superquadrupartientes: atque sic de cæteris.

Modus autem, quo omnes hæ proportiones ex tribus terminis æqualibus generantur eo ordine, quem exposuimus, est vnicus, isque facillimus, nimirum hic.

Summa collecta ex primo termino datæ proportionalitatis, ex qua alia generari debet, semel sumpto & secundo bis, & tertio semel exhibet primum terminum propotionalitatis Geometricæ constituendæ.

Secundus terminus Geometricæ proportionalitatis constituendæ oritur ex secundo, & tertio tremino datæ proportionalitatis, ex qua alia oriri debet, semel sumpto.

Tertium terminum proportionalitatis Geometricæ constituendæ offert tertius terminus datæ proportionalitatis, ex qua alia erui debet, sumptus semel.

Atque hoc præceptum triplex sub oculos ponitur hoc appositio typo, vbi liquido constat, qui termini datæ proportionalitatis sumendi sint vel semel, vel bis, vel omittendi, vt termini alterius proportionalitatis constituantur.

TYPVS PROCREATIONIS VNIVS PROPORTIONIS Geometricæ ex alia Geometrica.

Ordo termin. data proportionalitatis.	*Primus*	*Secundus*	*Tertius.*
Primᵘˢ cōstituitur, si dati term. ita sumātur.	*Semel.*	*Bis*	*Semel.*
Secūdᵘˢ cōstituitur, si term dati ita sumātur.		*Semel.*	*Semel.*
Tertiᵘˢ cōstituitur, si ita sumatur dati term.			*Semel.*

Sequuntur iam exempla generationis omnium proportionum ex æqualitatis proportione. Proponimus autem duas æqualitatis proportiones, vnam in vnitatibus, alteram vero in binarijs. Vbi hoc notatio-

notatione dignum videtur, ex vnitatibus procreari semper minimos terminos cuiusque proportionalitatis trium terminorum.

GENERATIO MVLTIPLICIVM.

Æqualitatis proportio.	1	1	1		2	2	2
Dupli ex æqualibus creati.	4	2	1		8	4	2
Tripli ex duplis.	9	3	1		18	6	2
Quadrupli ex triplis.	16	4	1		32	8	2
Quintupli ex quadruplis.	25	5	1		50	10	2

GENERATIO SVPERPARTICVLARIVM.

Dupli inuerso ordine.	1	2	4		2	4	8
Sesquialt. ex duplis inuersis.	9	6	4		18	12	8
Tripli ordine conuerso.	1	3	9		2	6	18
Sesquiter. ex triplis inuersis.	16	12	9		32	24	18
Quadrupli ordine conuerso.	1	4	16		2	8	32
Sesquiquart. ex quad. conuersis.	25	20	16		50	40	32

GENERATIO SVPERPARTIENTIVM.

Sesquialteri inuersi.	4	6	9		8	12	18
Superb. ex sesquial. inuersis.	25	15	9		50	30	18
Sesquitert. ordine inuerso.	9	12	16		18	24	32
Supertr. ex sesquit. inuersis.	49	28	16		98	56	32
Sesquiquart. conuerso ordine.	16	20	25		32	40	50
Superquadr. ex sesquip. conuersis.	81	45	25		162	90	60

GENERATIO MVLTIPLICIVM SVPERPARticularium.

Sesquialteri directo ordine.	0	6	4		18	12	8
Dupli sesquialteri directo ordine.	25	10	4		50	20	8
Tripli sesquial. ex dupl. sesquial.	49	14	4		98	28	8
Quadr. sesquial. ex tripl. sesquial.	81	18	4		162	36	8

Sesqui

Sesquitertii ordine recto.	16	12	9	32	24	18
Dupli sesquiter. ex sesquit.	49	21	9	98	42	18
Tripli sesquit. ex dup. sesquit.	100	30	9	200	60	18
Quadr. sesquit. ex trip. sesquit.	169	39	9	338	78	18
Sesquiquarti ordine recto.	25	20	16	50	40	32
Dupli sesquiqua. ex sesquiquar.	81	36	16	162	72	32
Tripl. sesquiq. ex dup. sesquiq.	169	52	16	338	104	32
Quadr. sesquiq. ex trip. sesquiq.	286	68	16	578	136	32

GENERATIO MVLTIPLICIVM SVPERpartientium.

Superbipart. ordine recto.	25	15	9	50	30	18
Dupli superbip. ex superbip.	64	24	9	128	48	18
Tripli superbi. ex dup. superbip.	121	33	9	242	66	18
Quadr. superb. ex trip. superbip.	196	42	9	392	84	18
Supertripart. directo ordine.	49	28	16	98	56	32
Dupli supertrip. ex supertrip.	121	44	16	242	88	32
Trip. supertri. ex dup. supertrip.	225	60	16	450	120	32
Quadr. supertri. ex trip. supertr.	361	76	16	722	152	32
Superquadrup. recto ordine.	81	45	25	162	90	50
Dupl. superquad. ex superq.	196	70	25	392	140	50
Trip. superq. ex dup. superq.	361	95	25	722	190	50
Quad. superq. ex trip. superq.	576	120	25	1152	240	50

Hic enim perſpicue cernis, quoslibet tres terminos ex trib. proxime antecedentibus procreatos eſſe ex præſcripto triplicis præcepti ſuperioris. Vt verbi gratia poſtremi hi tres, 576. 120. 25. ita producti ſunt ex tribus antecedentib. 361. 95. 25. Primus 576. coaceruatus eſt ex primo 361. ſemel, & ex ſecundo 95. bis & ex tertio 25. ſemel. Secundus autem 120. conflatus eſt ex ſecundo 95. ſemel, & ex tertio 25. ſemel. Tertius denique 25. eſt tert. 25. ſemel ſumptus, vt hæc appoſita formula demonſtrat. Atque hoc eodem modo omnes alij geniti ſunt, initio facto à terminis æqualibus. 1. 1. 1. vel 2. 2. 2.

361.		
95.		
95.	95.	
25.	25.	25.
576.	120	25.

QVO

QVO PACTO VICISSIM OMNIS PROPORTIO INæqualitatis ad æqualitatis proportionem reuocetur.

Propoſitis turſus tribus terminis inæqualibus in quacunq; proportione, reſtituetur viciſſim proportio æqualitatis, non minus iucunda, quam facili ratione, per variam ſubtractionem terminorum inæqualium, vnius ab altero. Ita autem res expedietur triplici hoc præcepto.

MINIMVS trium terminorum inæqualium datorum ſtatuatur vnum extremum proportionis, ad quam reductio fit.

MINIMO eodem ſubtracto ex medio, reliquus numerus conſtituatur in medio loco proportionis, ad quam fit reductio.

SVMMMA collecta ex conſtituto iam extremo ſemel, & medio termino bis ſumpto, ſubtrahatur ex maximo datorum trium numerorum, & reliquus numerus alterum extremum nouæ proportionis fiat.

Hac ratione quævis proportio trium terminorum inæqualium reuocatur ad aliam proportionem conferendo ſemper maiores numeros cum minoribus: & hæc rurſus eodem modo ad aliam; atq; ita deinceps, donec tres termini æquales occurrant. Quod ſi tres dati termini habeant continuam proportionem duplam, reducentur ij prima ſtatim operatione ad æqualitatem. Id quod exempla, quæ ſequuntur, planum facient.

Quintupla proportio.	150	30	6.
Quadrupla.	96	24	6
Tripla.	54	18	6.
Dupla.	24	12	6.
Æqualitatis proportio.	6	6	6.

Hoc enim exemplum monſtrat, quintuplam proportionem reuocatam eſſe ad quadruplam, quadruplam ad triplam, triplam ad duplam, & denique duplam ad æqualitatem. In hoc altero vero exemplo vides proportionem ſupertripartientem quartas reduci ad ſeſquitertiam, ſeſquitertiam ad triplam, triplam ad duplam, ac duplam tandem ad æqualitatem.

Propor-

Proportio supertripartiens quartas.	49	28	16
Sesquitertia.	9	12	16
Tripla.	9	3	1
Dupla.	4	2	1
Proportio æqualitatis	1	1	1

Vides ergo vltimam proportionem inæqualitatis semper esse duplam, hanc vero statim ad æqualitatem reduci.

Est autem animaduersione dignum, si tres numeri dati fuerint in sua proportione minimi, proportionem æqualitatis ad quam fit reductio, consistere in tribus vnitatibus: Si vero non fuerint minimi, proportionem illam æqualitatis consistere in tribus numeris æqualibus, quorum quilibet tot vnitates continet, quotum locum occupant tres termini dati inter omnes tres terminos eiusdem generis proportionis. Ita vides in posteriori exemplo tres datos numeros 49.28.16. minimos esse in proportione supertripartiente quartas, atque reductionem factam esse ad hanc æqualitatem 1. 1. 1. At in priori exemplo occupant tres numeri dati, 150. 30. 6. sextum locum inter omnes, tres numeros continuæ proportionis quintuplæ propterea que æqualitas inuenta est inter hos tres senarios, 6.6.6. Minimi enim siue primi numeri quintuplæ proportionis sunt, 25.5.1. Secundi 50. 10.2. Tertij 75.15.3. Quarti 100. 20.4. Quinti 125.25.5. Sexti autem, 150.30. 6. vt manifestum est. Idem experiri licebit in omnibus alijs proportionibus.

Sed & hoc obseruatione non indignum videtur, quamlibet proportionem primo loco ad eam reduci, ex qua ortum habuit. Vt in priori exemplo quintupla reducta est ad quadruplam, ex qua orta est: quadrupla ad triplam Hæc enim illam genuit, & sic de cæteris, vsque ad æqualitatem. In exemplo vero posteriori, Supertripartiens reuocata est ad sesquitertiam ordine inuerso. Constat autem, numeros sesquitertios conuerso ordine gignere supertripartientes, vt supra diximus. Item sesquitertia hæc, conferendo maiores numeros cum minoribus, reducta est ad triplam ordine inuerso, quemadmodum tripla inuersa generat sesquitertiam. Deinde tripla conferendo maiores item numeros cum minoribus, redacta est ad duplam, & hæc ad æqualitatem, &c.

Neque vero silentio prætereundum censeo, ex tribus terminis cuiuscunque proportionalitatis Geometricæ siue ea æqualitatis sit, siue inæqualitatis, gigni posse quamlibet trium proportionalitatū, quas supra explicauimus, si ipsi termini varijs modis inter se coagmententur. Proportionem enim trium terminorum Geometricam procreare aliam Geometricam trium terminorum, si primus terminus semel, secundus bis, & tertius semel, pro primo termino

ſumatur; pro ſecundo autem ſecundus, & tertius ſemel, pro tertio denique ipſe tertius ſemel, perſpicue conſtat ex iis, quæ paulo ante ſcripſimus de ortu omnium proportionum inæqualitatis ex æqualitatis proportione.

At vero vt ex eadem Geometrica proportionalitate gignatur Arithmetica trium terminorum, ſeruabis hoc præceptum triplex.

SVMMAM exprimo, & ſecundo termino bis, & tertio ſemel collectam fac primum terminum Arithmeticæ proportionalitatis.

SVMMAM vero ex primo, ſecundo, & tertio ſemel, cõfectam, ſtatue ſecundo loco.

TERTIVM denique terminum conſtitue tertium.

Cuius quidem productionis typum hic vides.

TYPVS PROCREATIONIS PROPORTIONIS Arithmetica ex Geometrica.

Ordo terminorũ data proportionalitatis.	*Primus*	*Secundus*	*Tertius.*
Primus fit ex datis term. ita conceruatis.	*Bis.*	*Bis.*	*Semel.*
Secundus vero fit.	*Semel.*	*Semel.*	*Semel.*
Tertius denique hoc modo.			*Semel.*

NIHIL porro intereſt, vtrum minimum numerum proportionalitatis Geometricæ facias primum terminum, an verò maximum, vt ex ſequentibus exemplis apparebit.

GENERATIO ARITHMETICÆ PROPORTIONALITATIS ex Geometrica.

Geom. prop.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9	
Arith proport.	5	3	1	20	12	4	34	19	4	29	19	9	

CONSIDERATIONE autem dignissimum est, differentiam constitutæ proportionalitatis Arithmeticæ semper æqualem esse summæ primorum duorum terminorum Geometricæ proportionalitatis per quam constituitur. Sic vides in primo exemplo differentiam esse 2. summam ex 1. 1. In secundo, 8. summam scilicet ex 4. 4. In tertio 15. quæ summa conficitur ex 9. 6. In quarto denique, 10. nimirum summam ex 4. 6. collectam, atque ita in alijs.

ITAQVE si Arithmetica proportionalitas constituatur ex proportione æqualitatis, erit differentia dupla vnius termini æqualis: vt perspicuum est in prioribus duobus exemplis.

Demi-

Deniq; Harmonicam proportionalitatem oriri quoque ex Geometrica, hoc alio præcepto triplici planum fiet.

Summam collectam ex primo bis, & secundo ter, & tertio semel sumpto, statue in primo loco proportionalitatis Harmonicæ.

Summam vero confectam ex secundo bis, & tertio semel sumpto, in secundo loco.

Summam denique secundi & tertij, in tertio loco.

Vbi etiam nihil interest, vtrum minimus terminus dicatur primus, vel maximus. Typum porro huius generationis hic expressum vides.

TYPVS PROCREATIONIS HARMONICÆ PROportionalitatis ex Geometrica.

Ordo terminorum proportionalitatis.	*Primus*	*Secundus*	*Tertius*
Primus fit ex ter datis sic in vnũ collect.	*Bis*	*Ter*	*Semel.*
Secundus vero sic.		*Bis*	*Semel.*
Tertius denique hoc modo.		*Semel*	*Semel.*

GENERATIO PROPORTIONALITATIS HARmonica ex Geometrica.

Geomet. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9	
Harmo propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15	

Iam vero è contrario reducetur Harmonica proportionalitas quæcunque ad æqualitatem hoc pacto.

Detrahe minimum terminum ex medio, & quod relinquitur, fac medium terminum proportionalitatis constituendæ.

Hoc medio inuento sublato ex minimo datæ proportionalitatis Harmonicæ, erit reliquus numerus, vnum extremorum proportionalitatis.

Denique minimus datus semel, & medius inuentus bis in vnam summam collecti, & ex maximo dato subtracti, dabunt duplum alterius extremi. Semissis ergo huius erit ipsum alterum extremum.

Hac ratione reuocabitur Harmonica proportionalitas vel ad æqualitatem, vel ad proportionalitatem aliquam Geometricam, quæ ad æqualitatem redigetur, vt supra docuimus. Semper autem Harmonica proportionalitas proposita oritur ex illa Geometrica, si superius præceptum adhibeatur, ad quam per hoc præceptum reuocata est. Exempla hic vides.

Harm. propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15
Geom. propor.	2	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9

ALIA EXEMPLA.

Harmon propor.	3	4	6	60	40	30	24	16	12
Geometr. propor.	2	1	$\frac{1}{2}$	5	10	20	2	4	8
Æqualitas	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	5	5	2	2	2

At proportionalitas Arithmetica reuocabitur ad æqualitatem, vel ad Geometricam proportionalitatem, per quam constituitur, hoc modo.

Minimum terminum fac vnum extremorum. Subducto deinde eodem minimo ex medio erit reliquus numerus conflatus ex medio constituendæ proportionalitatis, & altero extremo. Igitur si hic numerus reliquus duplus est minimi, secto eo bifariam, erit dimidiata pars tam medius terminus, quam alterum extremorum: reductaque erit data proportionalitas Arithmetica ad æqualitatem, ex qua ortum traxit.

3	9	15
3	3	3

Vt detur Arithmetica proportionalitas, 3. 9. 15, si in Geometrica cõstituẽda facias vnum extremum 3. ex minimo proportionalitatis Arithmeticæ datæ, & hunc eundem numerum demas ex dato medio 9. supererunt 6. qui numerus duplus est minimi 3. Redigitur ergo data proportionalitas ad æqualitatem hanc 3. 3 3. ex qua oritur secũdum superius præceptum.

Si vero reliquus ille numerus non est duplus minimi, secandus erit in duas partes, quæ cum minimo constituant proportionalitatem Geometricam continuam. Ad hanc enim illa reuocata erit.

34	19	4
9	6	4

Vt si data sit Arithmetica proportionalitas, 34. 19. 4. Facto in Geometrica extremo vno, 4. minimo datæ Arithmeticæ proportionalitatis, eoque subdu-

ſubducto ex medio 19. relinquitur numerus 15. qui non eſt duplus minimi. Quare ſecto eo in 6. & 9. reducetur illa Arithmetica ad hanc Geometricam 9.6.4. ex qua rurſus ortum ducet, ex præſcripto ſuperioris præcepti.

Sed quoniam reliquus ille numerus non poteſt ſemper diuidi in tales duas partes, quæ cum minimo conſtituant continuam proportionalitatem Geometricam (quo pacto autem ea diuiſio facienda ſit, & quando fieri in numeris nequeat, docebimus ad propoſ. 17. lib. 6. niſi numeri ſurdi, irrationaleſue adſciſcantur: reuocabimus quamcunque proportionalitatem Arithmeticam ſtatim ad æqualitatem, ex qua, ſi termini æquales cum differentia propoſita coacerventur, ortum duxit: hoc pacto.

Minimus terminus datus ſiat vnus ex duobus extremis. Differentia autem proportionalitatis ſubducta ex medio, reliquus numerus ſiat medius: & eadem differentia duplicata, atque ex maximo termino ſublata, fiat reliquus numerus alter extremorum.

Vt ſi data ſit Arithmetica proportionalitas, 20. 27. 34. cuius differentia eſt 7. ſi 20. fiat vnum extremorum, & differentia 7. demat ur ex 27. & eadem duplicata ex 34. reliqui erunt alij duo termini æquales 20. 20. Ex hac æqualitate, cognita differentia 7. quam termini Arithmeticæ proportionalitatis habere debent, conficietur ipſa proportionalitas Arithmetica, hac ratione.

20	27	34
20	20	20

Vnus terminorum æqualium ſiat minus extremum. Huic addatur differentia data, vt fiat ſecundus terminus. Eidem denique minori extremo adijciatur data differentia duplicata, vt efficiatur maius extremum.

Vt in dato exemplo, minus extremum erit 30. cui ſi differentia 7. addatur, fiet medius terminus 27. Et ſi eadem differentia 7. duplicata adijciatur eidem minimo extremo 20. conflabitur maius extremum 34. Eodem pacto data hac æqualitate 15. 15. 15. ſi ex ea conſtitui debeat proportionalitas Arithmetica, cuius differentia, ſit 20. addatur hæc differentia ad 15. vnum terminorum æqualium, vt habeas ſecundum terminum 35. Quod ſi eadem differentia duplicata, hoc eſt, numerus 40. ad eundem terminum æqualem adijciatur, fiet tertius terminus 55. Primus autem eſt 15. vnus terminorum æqualium, vt hic vides.

Differentia 20.

15	15	15
15	35	55

Atque pauca hæc prælibasse hoc loco sufficiat ex infinitis, quæ de immensa proportionum, proportionalitatumque vi ac natura, innumerabilibusque proprietatibus dici possent. Plura enim & quidem scitu periucunda in pleniore nostra Arithmetica, Deo annuente, explicabimus. Nunc ad Euclidem interpretandum reuertamur.

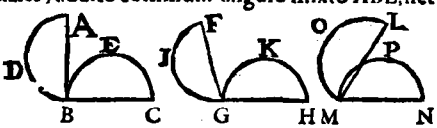
V.

Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ sese mutuo superare.

Quoniam Euclides in tertia definitione habitudinem duarum magnitudinum eiusdem generis, vocauerat rationem, quam nos cum aliis auctoribus proportionem dicimus: explicat nunc definitione hac 5. quidnam requirant duæ quantitates eiusdem generis, vt proportionem dicantur habere. Neque enim omnes lineæ, neque etiam omnes anguli plani, quamuis sint eiusdem generis quantitatis, proportionem habent inter se, vt mox dicemus. Ait igitur illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quarum vtrauis multiplicata ita augetur, vt alteram tandem superet, adeo vt si alterutra quantumuis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiusdem quadrati, dicentur habere proportionem: (licet irrationalem, quæ nullo possit numero exprimi) quia latus multiplicatum per 2. hoc est, bis sumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter constituant triangulum Isosceles, a erunt duo latera quadrati diametro eiusdem maiora. Ita quoque circumferentia circuli, & diameter eiusdem proportionem habent, (quamuis nondum sint nobis explorata, atque cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc est, sumpta quater, circumferentiam superat, cum omnis circumferentia circuli, vt ab Archimede demonstratur, ter duntaxat comprehendat diametrum eiusdem, & particulam adhuc paulo minorem septima parte diametri. Eodem modo multa curuilinea cum rectilineis proportionem habebunt, quia & æqualitas & inæqualitas inter ea reperitur, cum & Hippocrates Chius Lunulam quandam, quæ figura est contenta duobus arcubus circulorum instar Lunæ nouæ, quando falcata esse cernitur: & Archimedes parabolam quadrarit; hoc est, ille cuidam lunulæ, hic vero parabolæ quadrarum inuenerit æquale. Hinc enim fit, vt & quadrarum detur maius ea lunula, ac parabola: Atque è contrario lunula, & parabola maior eo quadrato. Huc accedit, quod Archimedes in lib. de Spiralibus demonstrauit, lineam aliquam rectam esse circumferentiæ circuli æqualem, & aliam duplam, triplam aliam, &c. ac proinde & quadratum aliquod circulo esse æquale, vt in libello de dimensione circuli demonstrauit. De æqualitate porro lineæ rectæ, & circularis, qua-

a 20. primi.

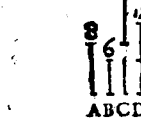
quadrati,& circuli.ad calcem.lib. 6.agemus. Adde,à Proclo quoque inter angulos rectilineos, ac curuilineos æqualitatem demonſtrari. Oſtendit enim lib. 3. in primum Euclidis,ad 12 Axioma, quod ipſi eſt 4. Poſtulatum,tam recto angulo,quam obtuſo,& acuto,exhibere poſſe angulum curuilineum æqualem. Sit enim angulus rectus *ABC*,contentus rectis æqualibus *AB*,*BC*,circa quas ſemicirculi deſcribantur ADB, BEC. Quoniam igitur anguli ſemicirculorum *ABD*,*CBE*,ſunt æquales; addito communi angulo mixto ABE,fiet angulus totus curuilineus DBE, toti angulo recto ABC, æqualis. Similiter oſtendes, angulum



curuilineum IGK, æqualem eſſe obtuſo FGH; nec non curuilineum OMP, acuto LMN, dummodo hic ab angulis ſemicirculorum LMO, NMP, auferas communem angulum mixtum, qui continetur recta linea LM,& curua MP. Ex quibus conſtat, alterutrum angulorum multiplicatum poſſe alterum excedere; quare proportionem inter ſe habebunt At vero linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem,quia finita quomodocunque multiplicata, infinitam nequit ſuperare. Sic neque linea cum ſuperficie, neque ſuperficies cum corpore,eandem ob cauſam,vllam habebit proportionem. Denique non cenſebitur habere proportionem angulus contactus cum angulo rectilineo,quia angulus contactus, quantûuis multiplicatus,minor adhuc ſemper exiſtit quouis angulo rectilineo,etiam minimo,vt propoſ.16.lib.3.demonſtrauimus. Itaque vt apertius Euclides explicaret,quænam magnitudines eiuſdem generis proportionem dicantur habere,hoc eſt, quas magnitudines eiuſdem generis in definitione 3.intellexerit,voluit hac definitione eas intelligi,quæ hanc conditionem habeant, vt alterutra multiplicata alteram poſſit ſuperare,alias vero non, etiamſi in eodem quantitatis genere videantur comprehendi, quales ſunt linea finita,& infinita,angulus rectilineus,& angulus contactus, &c. Hanc ob cauſam in pleriſque demonſtrationibus proportionum, iubet toties multiplicare vnam propoſitarum magnitudinum, quæ proportionem ponuntur habere inter ſe,donec alteram excedat. Quod etiam faciet propoſ.1.lib 10.& in pleriſque alijs propoſitionibus. Taceant igitur, qui putant,per magnitudines eiuſdem generis in definitione Proportionis, quam Euclides Rationem dixit, intelligendas eſſe, quæ ſub eodem genere proximo,ſiue infimo continẽtur. Hac enim ratione non eſſet proportio inter angulos rectilineos, & curuilineos aut inter figuras rectilineas, curuilineaſque. cùm non ſub eodem contineantur genere proximo : quod falſum eſſe diximus. Sileant quoque, qui exiſtimant, intelligendas eſſe magnitudines

in eodem genere quantitatis, siue in eodem genere subalterno, vt Logici loquuntur; ita vt satis sit, vt duæ quantitates dicantur habere proportionem si sint vel lineæ, vel superficies, vel corpora, vel anguli, vel numeri. Ita enim proportio esset inter angulū rectilineum, & angulum contactus, cum in genere anguli contineantur; Item proportionem haberent inter se, linea finita, & linea infinita, cum in genere lineæ existant; quorum vtrumque falsum esse, liquido ex hac definitione constat.

Perspicuum est ex his, quam inepte, & quam falsò, hanc definitionem exposuerit Orontius. Ait enim Euclidem nō definire, seu docere, quænam magnitudines proportionem dicantur habere, sed qualem proportionem duæ quæcunq; propositæ quantitates habeant. Itaque inquit, vult Euclides, si magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & ambæ multiplicentur æqualiter, hoc est, ambarum sumantur quæcunque æque multiplicia, nempe C, tam multiplex ipsius A, quam multiplex D, ipsius B; habere magnitudines A, & B, eam inter se proportionem, quam earum æque multiplicia C, & D. Non aduertit autem hoc, quod ait, non esse definitionem, sed theorema decimum quintum huius 5. lib. vbi demonstratur ab Euclide, Partes cum pariter multiplici-



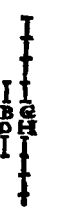
bus in eadem proportione esse, hoc est, A, B, magnitudines eādem habere proportionem, quam earum æque multiplicia C, & D. Non ergo ita est intelligenda hæc definitio, præsertim cum tam ignota sit hæc proportio inter C, & D, quam illa inter A, & B; quandoquidem semper eadem est. Quare non rectè nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B. Est ergo sensus huius definitionis ille, quem exposuimus, vt liquido constat ex verbis Euclidis.

VI.

In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, à secundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, vtrumque ab vtroque vel vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, vel vna excedunt; si ea sumantur, quæ inter se respondent.

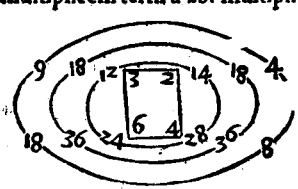
Explicat hoc loco Euclides, quænam conditiones requirāt, apud Geometras, magnitudines, vt eandem dicantur habere proportionem. Quod vt exequatur, cogitur confugere ad earum æque multiplicia, vt complectatur omnes proportiones magnitudinum, tam rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B, secunda; C, tertia; & D, quarta, sumanturque primæ, & tertiæ

tertiæ æque multiplicia quæcunque; E quidem ipſius A; & F. ipſius C: itē ſumātur ſecūdæ & quartæ alia quæcunque æque multiplicia; G. quidem ipſius B; & H, ipſius D, ſive hæc duo poſteriora ſint ita multiplicia ſecundæ, & quartæ, ſicut priora duo multiplicia ſunt primæ, & tertiæ, ſive non. Quod ſi jam inter ſe conferantur ſumpta æque multiplicia ea, quæ inter ſe reſpondent, ut multiplex primæ, & multiplex ſecundæ inter ſe, hoc eſt, E, & G; Item multiplex tertiæ, & multiplex quartæ inter ſe, hoc eſt, F, & H; deprehenſumque fuerit perpetuo, ea inter ſe habere, ut ſi E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quam G, multiplex ſecundæ magnitudinis B; etiam F, multiplex tertiæ magnitudinis, C, minus ſit quam H, multiplex quartæ magnitudinis D: Aut ſi E, æquale fuerit ipſe G, etiam F, æquale ſit ipſi H: Aut denique ſi E, majus fuerit quam G; etiam F, majus ſit quam H: (quod eſt utrumque ab utroque vel una deficere, vel una æqualia eſſe, vel una excedere) ita ut in nullo genere multipliciū contrarium poſſit reperiri, id eſt, ut nunquam E, minus ſit, quam G, quin & F, minus ſit quam H; & ut nunquam E, æquale ſit ipſi G, quin & F, ipſi H, ſit æquale. Denique ut nunquam E, majus ſit quam G, quin & F, majus ſit quam H. Si inquam, deprehenſum fuerit, æque multiplicia quævis accepta, perpetuo ſeſe ita habere, ut dictum eſt; dicetur eadem eſſe proportio primæ magnitudinis A, ad ſecundā magnitudinem B, quæ eſt proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartā magnitudinē D. Quod ſi deprehenderetur aliquando, etiam in ſolo uno genere multiplicium, multiplex ℈ D, deficere à multiplici G, nō autem multiplex E, deficere à multiplici H; Aut E, æquale eſſe ipſi G, at F, nō æquale ipſi H; Aut denique E, excedere ipsū G, at F, nō excedere ipſum H, quamvis in infinitis aliis multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates propoſitæ eādem habere proportionem, ſed diverſas, ut ex defin. 8. fiet perſpicuum.



Itaque ut demonſtratione aliqua, per hanc 6. definitionē, concludantur quatuor quantitates eandem habere proportionem, oſtendendum erit, (quod quidem diligenter ab Euclide & hoc 5. lib. & aliis ſeruatur) quæcūque æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuscunque æque multiplicibus ſecundæ, & quartę, habere ſemper conditionē prædictam defectus, æqualitatis, aut exceſſus; ita ut nunquam contrarium ejus inveniri poſſit. Similiter ſi quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionē, concedatur quoque neceſſe eſt, quælibet æque multiplicia primę, & tertię collata cum quibuslibet æque multiplicibus ſecundæ, & quartæ, habere eandem defectus, æqualitatis, aut exceſſus conditionem. Debent enim definitio & definitum reciprocari. Vt autem perſpiciatur, quonam pacto, propoſitis quatuor magnitudinibus eandē proportionē

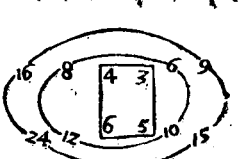
habentibus: quædam æque multiplicia primæ & tertiæ magnitudinis, à quibusdam æque multiplicibus secundæ & quartæ magnitudinis, utrumque ab utroque unà deficiant; alia vero una æqualia sint: alia denique una excedant, si ea sumantur, quæ inter se respõdent; placet unum exemplum proferre in numeris. Sint gitur quatuor numeri 3. 2. 6. 2. 6. 4. sumanturq; primi & tertii æque multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item secundi & quarti sumantur alii æque multiplices, ut septupli, 14. & 28. Vides igitur tum 12. multiplicem primi deficere à 14. multiplice secundi, quam 24. multiplicem tertii à 28. multiplice quarti. Rursus primi, & tertii sumantur alii æque multiplices, nimirum sextupli, 18. & 36. Item secundi, & quarti sumantur alii æque multiplices, ut noncupli 18. & 36. Vides ergo, tam 18. multiplicem primi æqualem esse 18. multiplici secundi, quam 36. multiplicem tertii 36. multiplici quarti. Postremo primi, & tertii, sumantur alii æque multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item, secundi, & quarti alii æque multiplices, ut dupli 4. & 8. Vides igitur tam 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem secundi, quam 18. multiplicem tertii, superare 8. multiplicem quarti. Si igitur in omnibus æque multiplicibus, in quacunque sumantur multiplicatione, semper deprehendatur, unum trium horum verum esse, dicetur eadem esse proportio 3. ad 2. quæ est 6. ad 4. alias non.



CAMPANVS vero atque Orontius, longe aliter definitionem hanc exponunt. Dicunt enim Euclidem velle, tum demum quatuor magnitudines eandē habere proportionem, cum primæ, & tertiæ æque multiplicia, à secūdæ & quartæ æque multiplicibus, utrūque ab utroque, vel una deficiunt proportionaliter, hoc est, in eadē proportione, vel una æqualia sunt, vel una excedunt proportionaliter, si ea sumantur, quæ inter se respondent. Clarius, ut ait Campanus, quando earū æque multiplicia proportionalia sunt, id est, cum eandem proportionem habet multiplex primæ ad multiplicē secundæ, quā multiplex tertiæ ad multiplex quartæ. Sed quis non videt, si ita intelligatur definitio, Euclidem idem per idem definire? Quod sane absurdum est. Præterea si Euclides vult, eas magnitudines in eadem esse proportione, quarum æque multiplicia (si sumantur, & inter se conferantur eo ordine, quo dictum est) in eadem proportione existunt; cur, obsecro, in 4. Theoremate hujus libri demonstrat, si fuerint quatuor magnitudines in eadem proportione, earum æque multiplicia eo ordine, quem diximus, sumpta, eandem quoque habere proportionem? Immo cum illud Theorema per hanc definitionem ostendatur, perspicuum est, idem per idem demonstrari, quod ridiculum est, veluti eo loco admonebimus. Accedit etiam,

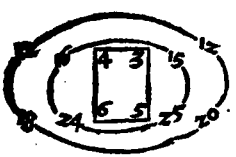
etiam, si ita interpretemur definitionem, plurima Theoremata quinti hujus lib. non posse demonstrari, ut propriis locis monebimus. Intelligenda est igitur definitio, ut exposuimus: nimirum propositis quatuor magnitudinibus, si quotiescunque multiplex primæ deficit à multiplici secundæ, vel æquale est, vel excedit; necessario etiam multiplex tertiæ tunc deficiat à multiplici quartæ, vel æquale sit, vel excedat, quicunq; sit ille defectus, excessusve, non considerando, an proportionalis sit, an non: ita ut nunquam contingat, multiplicem primæ à multiplici secundæ deficere, multiplicem vero tertiæ non deficere à multiplici quartæ: aut multiplicem primæ æqualem esse multiplici secundæ, multiplicem vero tertiæ multiplici quartæ non æqualem: aut denique multiplicem primæ majorem esse multiplici secundæ, at multiplicem tertiæ multiplici quartæ non majorem. Propositis, inquam, quatuor magnitudinibus, quarum æque multiplicia sumpta, ut dictum est, perpetuo eam conditionem in defectis, æqualitate, & excessu servant, dicuntur quatuor illæ magnitudines eandem habere proportionem: quicquid sit de earum æque multiplicium proportione, quæ nunc non consideratur: sed quarto postea Theoremate demõstrabitur, eum defectum, excessumve esse proportionalem.

Porro Campanus conatur ostendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & excessu. Nam si de quocunque intelligeretur, essent, ait, quatuor hi numeri 4. 3. 6. 5. in eadem proportione. Si enim primi & tertii, utpote 4. & 6. sumantur æque multiplices numeri, ut dupli, 8. & 12. Item secundi & quarti nempe 3. & 5. æque multiplices, dupli quoque, 6. & 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6, multiplicem secundi, quam 12. multiplex tertii 10. multiplicem quarti. Idemque cernitur, si primi, & tertii sumantur quadrupli 16. & 24. secundi vero, ac quarti capiantur tripli 9. & 15. Si igitur sufficit, ut æque multiplicia accepta una excedant sese quomodocunque, & non requiritur, ut proportionaliter se mutuo superent, erit eadem proportio 4. ad 3 quæ est 6. ad 5. quod falsũ est, cum proportio 4. ad 3 sit sesquitertia, proportio vero 6. ad 5 sesquiquinta. Intelligendus igitur est defectus, aut excessus æque multiplicium, proportionalis: Ita enim fiet, non esse eandem proportionem 4. ad 3 quæ est 6. ad 5. quod eorum æque multiplices non sese excedant proportionaliter, ut constat. Veruntamen dicendum est, Campanum mirum in modum hallucinatum fuisse. Quamvis enim numeri æque multiplices ab eo prolati sese una excedant, tamen quam plurimi alii reperientur, quorum multiplex primi



exce-

excedet quidem multiplicem ſecundi, vel æqualis erit: at multiplex tertii deficiet à multiplice quarti. Si enim in ejus exemplo, primi & tertii ſumantur quadruplices 16. & 24. At ſecundi & quarti, quintuplices ſumantur, 15. & 25. excedet quidem 16. multiplex primi 15. multiplicem ſecundi. At 24. multiplex tertii non excedet 25 multiplicem quarti; ſed deficiet. Quod ſi primi, & tertii ſumantur tripli 12. & 18. At ſecundi, & quarti ſumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi æqualis 12. multiplici ſecundi: At vero 18. multiplex tertii, æqualis non erit 20. multiplici quarti, ſed ab eo deficiet. Cum igitur non deprehendantur quælibet æque multiplicia dictorum numerorum ſic ſe habere, ut ſi multiplex primi excedit multiplex ſecundi, multiplex tertii excedat quoque neceſſario multiplex quarti: quamvis id in nonnullis æque multiplicibus ita eſſe contingat: non dicentur, juxta hanc definitionem 6. dicti numeri eandem habere proportionem, ut adhuc clarius ex 8. definitione conſtabit.

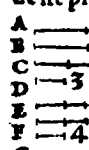


Cæterum definitio iſta complectitur etiam tres magnitudines eandem habentes proportionem, ſi modo ſecunda bis ponatur, ut quatuor habeantur. Exempli cauſa: Eadem dicetur proportio 9. ad 6. quæ 6. ad 4. quoniam æque multiplicia quæcunq; ſumpta ad 9. & 6. vel una deficiunt ab æque multiplicibus ſumptis ad 6. & 4. vel æqualia ſunt, vel una excedunt, &c.

VII.

Eandem autem habentes rationem magnitudines Proportionales vocentur.

Vt ſi magnitudinũ A, B, C, D, eadẽ ſit proportio A, ad B, quæ C, ad D: dicentur eæ magnitudines proportionales. Eadẽ ratione ſi eadẽ ſit proportio E, ad F, quæ F, ad G, dicẽtur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autem quædam magnitudines proportionales continue, inter quas reperitur proportionalitas continua, quales ſunt magnitudines E, F, G: Quædam vero proportionales ſunt non continue, ſed diſcrete, cujusmodi ſunt magnitudines A, B, C, D. In his enim interruptio fit proportionum; in illis vero nequaquam, ut dictum eſt in 4. definitione.



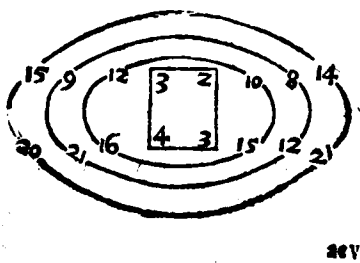
VIII.

Cum vero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis exceſſerit multiplicem ſecundæ; At multiplex

tiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ: tunc prima ad secundam majorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

Declarat hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, ut majorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, dicens. Si sumpta sint æque multiplicia primæ & tertiæ, Item alia æque multiplicia secundæ & quartæ: deprehensumq; fuerit aliquando, (licet non semper) multiplex primæ majus esse multiplice secundæ, multiplex autem tertiæ non esse majus multiplice quartæ, sed vel minus, vel æquale: dicetur major esse proportio primæ magnitudinis ad secundam, quam tertiæ ad quartam; ut perspicuum est in appositio exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertiæ C. sumpta sunt triplicia E, & F: secundæ vero B, & quartæ D, quadruplicia, G, & H. Et quoniam E, multiplex primæ majus quidem est quam H, multiplex secundæ: At F, multiplex tertiæ majus non est quam H, multiplex quartæ, immo minus; dicetur major esse proportio A, primæ magnitudinis, ad B, secundam, quam C, tertiæ ad D. quartam.

Non est autem necesse, ut quatuor magnitudinum, prima ad secundam dicatur majorem habere proportionem, quam tertia ad quartam, æque multiplicia secundum quamvis multiplicationem sic se habere, ut multiplex quidem primæ excedat multiplex secundæ, at multiplex tertiæ non excedat multiplex quartæ: sed satis est, ut secundum aliquam multiplicationem ita se habeant. Potest namque interdum fieri, ut tam multiplex primæ majus sit multiplice secundæ, quam multiplex tertiæ multiplice quartæ: Item ut & multiplex primæ minus sit multiplice secundæ, & multiplex tertiæ multiplice quartæ: Tamen quia hoc non contingit in omni multiplicatione, sed aliquando multiplex primæ superat quidem multiplex secundæ, at multiplex tertiæ vel minus est, vel æquale multiplici quartæ: propterea majorem dicetur habere proportionem prima magnitudo ad secundam, quam tertia ad quartam, non autem eandē, ut perspicuum est in appositio exemplo.



Itaque ut quatuor magnitudines dicātur proportionales, necesse est, ut æque multiplicia earum, juxta quasvis multiplicationes

æ vel

ac vel una deficiant, vel una æqualia sint, vel una excedat, ut in 6. definit. fuit expositum: Vt autem majorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, satis est, ut secundam aliquam multiplicationē, multiplex primæ excedat multiplex secundæ, multiplex verò tertiæ non superet multiplex quartæ, quāvis juxta innumeras alias multiplicationes æque multiplicia primę, at tertiæ una excedant æquè multiplicia secundæ, & quartæ.

Quod si quando è contrario multiplex primæ deficiat à multiplici secundæ, non autem multiplex tertiæ à multiplici quartæ, dicetur prima magnitudo ad secundam minorem habere proportionem, quam tertia ad quartam: quamvis secundum plurimas alias multiplicationes, æque multiplicia primæ & tertiæ una deficiant ab æque multiplicibus secundæ, & quartæ. Vt in eisdem numeris propositi exempli, minor dicetur proportio 2. ad 3. quam 3. ad 4. &c.

CVR EVCLIDES IN DEIN. IV. ET VIII. *quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æque multiplicia definierit.*

Quoniam mirum alicui videri possit, cur Euclides tum demum quatuor magnitudines eandem dixerit habere proportionem, hoc est, ita esse primam ad secundam, ut est tertia ad quartam, cum æquè multiplicia primæ ac tertiæ juxta quamcunque multiplicationem, & æque multiplicia secundæ ac quartæ juxta quamcunque etiam multiplicationem accepta ita se habent, ut quotiescunque multiplex primæ majus est quam multiplex secundæ, multiplex quoq; tertiæ majus sit quam multiplex quartæ: quotiescunque vero multiplex primæ æquale est multiplici secundæ, multiplex etiam tertiæ æquale sit multiplici quartæ: quotiescunque denique multiplex primæ minus est quam multiplex secundæ, multiplex etiam tertiæ minus sit quam multiplex quartæ: Item quare tum demum quatuor magnitudinum primæ ad secundam majorem esse proportionem voluerit, quam tertiæ ad quartam, cum aliqua æque multiplicia primæ ac tertiæ, & alia æque multiplicia secundæ ac quartæ accepta ita se habent, ut multiplex primæ sit majus quam multiplex secundæ, at multiplex tertiæ majus non sit, quam multiplex quartæ, sed vel æquale, vel minus. Quoniam, inquam, mirum alicui videri hoc possit, quod ex illo excessu, æqualitate, & defectu æque multiplicium eo ordine sumptorum non statim appareat similitudo proportionum, dissimilitudove: aperiendum videtur hoc loco, quare ita magnitudines tum proportionales, tum non proportionales definire voluerit Euclides.

Ad hanc difficultatem respondetur, Euclidem eas magnitudines voluisse appellare proportionales, quarum æque multiplicia ita se habent

habent, ut dictum est, quia non habuit quid notius per quod explicare potuisset magnitudines tam incommensurabiles, quam commensurabiles eandem proportionem, vel non eandem habentes t neq; vero opus esse, ut ratio afferatur, cur res aliqua hoc aut illo modo definiatur, sed satis esse, ut nunquam res definita asseratur alicui convenire, nisi prius, definitionem traditam eidem convenire, demonstretur. Id quod in aliis etiam definitionibus cernitur. Nam quemadmodum Euclides defin. 10. lib. 1. angulum rectum appellavit, qui fit à linea super aliam lineam ad angulos æquales cadente, ita ut nunquam ei concedendum sit, angulum quempiam esse rectum, nisi prius ostenderit, eum ab ejusmodi linea effici. Item quemadmodum definitione ultima lib. 3. definivit similia circulorum segmenta esse, in quibus anguli existentes sunt æquales, ita ut tunc solum ei concedendum sit, segmenta esse similia, cum probaverit angulos in eis existentes esse æquales: sic etiam defin. 6. & 8. hujus lib. vocavit quatuor magnitudines proportionales, & nō proportionales, quarū æque multiplicia eā conditionē habent, quā explicavit, ita ut nūquā ei credendū sit, cū quatuor magnitudines appellabit eandē habere proportionem, vel non eandem, nisi prius demonstraverit, conditionem, eam illis magnitudinibus convenire. Sed quenquam responsio hæc vera sit, ac propria, tamen quia ex illa definitione non videtur colligi posse, vere magnitudines, quarum æque multiplicia illam conditionem habent, esse proportionales, vel non proportionales; etiamsi eas solum Euclides velit appellare proportionales, vel non proportionales: explicabimus paulo accuratius, Euclidem recte eo modo definivisse magnitudines, proportionales, atq; adeo sine ulla dubitatione concedi posse à quovis, illas, quibus defin. 6. convenit, vere eandem habere proportionem: illas vero, quibus definitio 8. convenit, non eandem proportionem habere.

QVOD ut planius fiat, revocandum ad memoriam est, duplicem esse proportionē; Rationalem quæ inter quantitates incommēsurabiles existit atque adeo omnis in numeris reperiri potest Et irrationalem, quæ inter quantitates incommensurabiles existit, & nullo modo in numeris potest reperiri. Si igitur Euclides de Rationalibus duntaxat proportionibus disputationē instituisset, potuisset quatuor magnitudines proportionales definire eo modo, quo lib. 7. defin. 20 proportionales quatuor numeros definivit, nimirum: Magnitudines proportionales sunt, cum prima secundæ, & tertia quartæ, æque multiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe (ut nos ad eam defin. addidimus) cum prima secundam, & tertia quartam, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel eas dē partes. Non proportionales vero magnitudines ita definire potuisset: Magnitudines nō proportionales sunt, hoc est, prima ad secūdā habet majorē proportionē, quā tertia ad quartā, cū prima secundæ magis

magis multiplex est, vel major pars, majoresve partes quam tertia quartæ: Vel certe cum prima secundam sæpius continet, quam tertia quartam, sive eadem pars, aut partes utrobique supersint, sive non; Vel cum prima secundam toties continet, quoties tertia quartam, sed prima majorem insuper partem, majoresve partes secundæ includit, quam tertia quartæ. Potuisset, inquam, Euclides ita definire magnitudines proportionales, ac non proportionales, si de solis rationalibus proportionibus ageret: quia omnes proportiones magnitudinum exhiberi possent in numeris, ac proinde definiri ut numerorum proportiones eædem, vel diversæ, ut diximus. Nam proportio numerorum (ut ex Campano, aliisque scriptoribus, defin. 24. lib. 7. adjunximus) est habitudo quædam unius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partesve: Vel certe secundum quod illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes. Quæ omnia perspicua sunt tum ex definitionibus quinque specierum proportionis rationalis tam majoris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, de quibus supra egimus; tum exiis, quæ in defin. 20. & 24. lib. 7. scripsimus.

Quoniam vero Euclides, non solum proportiones Rationales, sed Irrationales etiam complecti voluit, non potuit eo modo quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales definire: propterea quod in proportione irrationali major magnitudo neque multiplex esse potest minoris, neque eam semel aut aliquoties, & insuper aliquam ejus partem aut partes, continere. Minor item majoris neque pars esse potest neque partes, quippe cum magnitudines irrationalem habentes proportionem incommensurabiles sint, ita ut nullam partem aliquotam communem, quamvis minimam possint habere. Quo circa coactus est se convertere ad proportiones magnitudinum rationales, hoc est, ad proportiones numerorum, cùm omnis proportio rationalis, sive magnitudinum commensurabilium sit, ut proportio numeri ad numerum, ut lib. 10. propos. 5. demonstratur: Coactus, inquam, est investigare aliquid, quod certũ sit convenire quibuslibet quatuor numeris sive magnitudinibus commensurabilibus, eandem habentibus proportionem, vel non eandem: adeo ut, si idem illud convenire demonstretur quatuor magnitudinibus, etiam incommensurabilibus jure optimo magnitudines illæ quatuor proportionales etiam dici possint, vel non proportionales: quandoquidem eandem habent proprietatem, quam quilibet quatuor numeri proportionales, vel non proportionales, immo quam quælibet quatuor magnitudines commensurabiles eandem habentes proportionem, vel non eandem, necessario habere demonstratur. Neque enim aliunde cognoscere, vel explicare aliter possumus magnitudines incommensurabiles proportionales esse, aut non proportionales, nisi per aliquid, quod certum si convenire, ut diximus, numeris quibuscunque, vel magni-

magnitudinibus commensurabilibus, eandem, vel non eandem habentibus proportionem, in quibus euidenter similitudo, dissimilitudoue proportionum cernitur. Quemadmodum quia quando in circulorum segmentis anguli æquales existentes, sunt commensurabiles quatuor rectis, hoc est, quando sunt eadem pars, vel eædem partes quatuor rectorũ, sunt quoq; ipsa segmẽta eadẽ pars, vel eædẽ partes circulorum, vt adfinem lib. 6. demonstrabimus: vt merito similia appellentur, ac propterea & omnia segmenta alia, in quibus sunt anguli æquales, etiamsi non sint commensurabiles quatuor rectis, dicantur quoque similia: quandoquidem, quando anguli quatuor rectis commensurabiles sunt, vere illa segmenta similia sunt, hoc est, eædem partes circulorum, licet hoc in segmentis, quando anguli in eis existentes quatuor rectis sunt incommensurabiles, non cernatur, quod tunc segmenta neque eadem pars, neq; eædem partes possint esse circulorum, sed ipsis circulis omnino incommensurabilia existant. Neque enim aliud indicium habere possumus, segmenta similia esse aut dissimilia, nisi angulorum in eis existentium æqualitatem, vel inæqualitatem, ex qua veram similitudinem, aut dissimilitudinem segmentorum circulis commensurabilium colligimus. Quam ob rem sicut nemo similitudinem hanc segmentorum in dubium reuocat, quanquam hæc similitudo in segmentis, quæ circulis incommensurabilia sunt, non ita euidenter appareat, vt in segmentis, quæ circulis sunt commensurabilia; ita non recte fecerit, qui similitudinem proportionum in magnitudinibus incommensurabilibus in dubium reuocet, quando comperiet, illis conuenire, quod omnibus magnitudinibus proportionem eandem rationalem habentibus conuenire certum sit, licet hæc proportionum similitudo non tam euidens sit in magnitudinibus incommensurabilibus.

Itaque quoniam propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi ac tertij æque multiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi ac quarti æque multiplicibus secundum quamuis etiam multiplicationem, semper verum est, vt mox demõstrabimus, si multiplex primi maior est multiplice secundi, multiplicem tertij maiorem quoque esse necesse est multiplice quarti; Et si ille æqualis est, hunc quoque esse æqualem; & si minor, minorem: Et contra, quia propositis quatuor numeris, sumptisque æque multiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem; item æque multiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem, si multiplice primi existente maiore, quam multiplex secundi, multiplex tertij maior quoque sit, quam multiplex quarti: Et si illo existente æquali, hic quoque æqualis sit, & illo existente minore, hic similiter minor existat, perpetuo verum est, quatuor numeros esse proportionales: Rursus quia propositis quatuor numeris, quorum primus, ad secundum maiorem proportio-

nem habeat, quam tertius ad quartum: sumptisque æque multiplicibus primi ac tertij, item æque multiplicibus secundi ac quarti, necessario interdum accidit, vt multiplex primi maior sit multiplice secundi, multiplex vero tertij non sit maior multiplice quarti: Et contra, qui quatuor propositis numeris, sumptisque æque multiplicibus primi ac tertij, item æque multiplicibus secundi ac quarti, si accidat nonnunquam, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, at multiplicem tertij non maiorem multiplice quarti, sine vlla dubitatione verum est, maiorem esse proportionem primi ad secundũ quã tertij ad quartum. Quoniã inquã, ita se res semper habet in numeris, atque adeo & in magnitudinibus commensurabilibus, ita vt contrarium nunquam inueniatur, non immerito dicentur quæcunque quatuor magnitudines, etiam incommensurabiles, eãdem habere proportionem, cum sumptis æque multiplicibus primæ ac tertiæ iuxta quamuis multiplicationem, item æque multiplicibus secundæ ac quartæ secundum quamuis etiam multiplicationem, perpetuo deprehenditur; multiplicem tertiæ maiorem esse multiplice quartæ, quotiescunque multiplex primæ maior est multiplice secundæ: multiplicem vero tertiæ æqualem esse multiplici quartæ, quando multiplex primæ æqualis est multiplici secundæ: multiplicem denique tertiæ minorem esse multiplice quartæ, hoc ipso, quod multiplex primæ minor est multiplice secũdæ. Eadem ratione iure optimo dicentur quatuor quæcunque magnitudines tam commensurabiles, quam incommensurabiles, non habere eandem proportionem, sed maiorem esse proportionem primæ ad secundam, quam tertiæ ad quartam, cum sumptis æque multiplicibus, vt dictum est, interdum contingit, multiplicem primæ esse maiorem multiplice secundæ, multiplicem vero tertiæ non maiorem multiplice quartæ: quandoquidem prior conditio in omnibus numeris proportionalibus, posterior autem in non proportionalibus perpetuo reperitur, vt iamiam demonstrabimus; nullumque aliud indicium habere possumus, quò magnitudines incommensurabiles cognoscantur esse proportionales, vel non proportionales; præsertim cum magnitudines incommensurabiles aliis magnitudinibus, quæ hoc modo proportionales esse demõstrãtur, sæpenumero alia via ostendantur eandem habere proportionem, quam numerus ad numerum, vt nullo modo dubitandum sit, quin omnes magnitudines, etiam incommensurabiles, quarum æque multiplices ita se habent, vt in 6. defin. dictum est, sint proportionales, &c. Etsi enim hoc verum esset, sequeretur haud dubie ex illa proportionalitate aliquando absurdum aliquod manifestum: quod tamen hactenus non accidit, sed potius ea, quæ ex magnitudinibus in eo sensu proportionalibus demonstrantur: verissima esse plerumque alia via, vt diximus, ostenduntur: vt postea etiam demonstrabimus. Quæ cum ita sint, liquido constare existimo, cur

Eu-

Euclides in duabus illis defin. adhibuerit (& quidem recte) magnitudinum propositarum æque multiplices magnitudines. Sed iam id, quod polliciti sumus, Geometrice demonstremus, adscitis nonnullis propositionibus lib. 7. quæ nullo modo ex 6. & 8. defin. aut ex demonstrationibus huius lib. 5. pendent, vt commodissime ante lib. 5. possint demonstrati; atque adeo hic assumi, vt iam demonstratæ. Hoc autem efficiemus quatuor propositionibus, quæ sequuntur.

I.

Propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi ac tertij æque multiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi & quarti æque multiplicibus iuxta quamcunque etiam multiplicationem; si multiplex primi maior sit multiplice secundi; erit quoque multiplex tertij maior multiplici secundi, erit & multiplex tertii æqualis multiplici quarti; si denique multiplex primi sit multiplice secundi minor, erit & multiplex tertii multiplice quarti minor.

Habeat numerus primus A, ad secundum B. eandem proportionem, quam tertius C, ad quartum D: sumanturque primi A, & tertij C, æque multiplices E, F: Item secundi B, & quarti D, æque multiplices G, H, qualiscunque hæc multiplicatio sit. Dico si E, multiplex primi A, maior est quam G, multiplex secundi B, maiorem quoque esse F, multiplicem tertij C, quam H: multiplicem quarti D. Et si E, æqualis sit ipsi G, æqualem quoque esse F. ipsi H. Si denique E, minor sit, quam G, minorem quoque esse F, quam H. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita C, ad D: [a] erit permutando etiã, vt A, ad C, ita B, ad D: [b] Vt autem A, ad C, ita est E, ad F: quod idem numerus ipsos A, C, multiplicans produxerit ipsos E, F, quippe cum E, & F. ipsorum A, & C, sumpti sint æque multiplices Et eadem de causa, vt B, ad D, ita est G, ad H. Igitur ex lemmate prop 14. lib 7. erit quoq;, vt E, ad F, ita G, ad H. [c] Et permutando, vt E, ad G, ita F, ad H. Quocirca si E, maior est quam G, erit quoq; F, maior quam H, vt in primo exemplo. Si vero F, æqualis

E, 9.	A, 3.	C, 6.	F, 18.
G, 4.	B, 2.	D. 4.	H, 8.
E, 18.	A, 3.	C, 6.	F, 36.
G, 18.	B, 2.	D, 4.	H, 36.
E, 12.	A, 3.	C, 6.	F, 24.
G, 14.	B, 2,	D, 4.	H, 28.

a 13. *septimi.*

b 17. *septimi.*

c 13. *septimi*

est ipsi G, erit quoque F, ipsi H, æqualis, vt in secundo exemplo: Si denique F, minor est quam G, erit quoque F, minor quam H, vt in tertio exemplo. Quod erat demonstrandum.

II.

Propositis quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum, si sumantur æque multiplices primi ac tertij, item æque multiplices secundi ac quarti, fieri potest, vt multiplex primi maior sit, quam multiplex secundi, multiplex autem tertij non maior, quam multiplex quarti.

Habeat primus numerus A, ad secundum B, maiorem proportionem, quam tertius C, ad quartum D. Dico fieri posse, vt sumptis æque multiplicibus primi A, & tertij C, item æque multiplicibus secundi B, & quarti D, multiplex ipsius A, primi sit maior quam multiplex ipsius B, secundi, at multiplex ipsius C, tertij maior non sit, quam multiplex ipsius D, quarti. Multiplicantes enim se mutuo numeri B, D, faciant E. Et quoniam D, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur genitum ex C, in E. ex eodem pronunciato; metietur quoque D, eundem genitum ex C, in E, ex pronunc. 11. l. 7. Metiatur D, genitum ex C, in E, per F, fietque propterea ex D, in F, numerus, quem D, per F, metitur, ex pronunc. 9. lib. 7, hoc est, numerus idem, qui fit ex C, in E. Quia igitur idem numerus gignitur ex D, primo in F, quartum, qui ex C, secundo fit in E. tertium, a erit vt D, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad F, quartum: Et conuertendo, vt C, ad D, ita F, ad E.

K, 56.		H. 7.		O, 21.		L, 28.	
F, 8.	G, 1.		A, 3.		C, 4.		
	E, 6.		B, 2.		D, 3.		
M, 54.		N, 6.		P, 20.		L, 30.	
K, 160.		H, 440.		O, 60.		I, 20.	
F, 8.	G, 22.		A, 3.		C, 1.		
	E, 80.		B, 8.		D, 10.		
M, 160.		N, 80.		P, 24.		L, 39.	

a 19. *septimi.*

Rursus quia B, metitur E. ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur procreatum ex A, in E. ex eodem pronunciato: metietur quoque B, eundem procreatum ex A, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur B, procreatum ex A, in E, per FG, fietque idcirco ex B, in FG, numerus, quem B, metitur per FG, ex pronunc. 9. lib. 7. hoc est, numerus idem, qui fit ex A, in E. Quia igitur idem numerus ex B, primo in FG, quartum & ex A, secundo in E, tertium gignitur, b erit vt B, primus ad A, secundum, ita E, tertius ad FG, quartum: Et conuertendo, vt A, ad B, ita

b 19. *septimi.*

ita FG, ad E. Quoniam ergo est, vt FG, ad E. ita A, ad B: Est autem proportio A, ad B, posita maior, quam C, ad D; erit quoque proportio FG, ad E, maior quam C, ad D: Ostensum autem est, esse vt C, ad D, ita F, ad E. Igitur proportio FG, ad E, maior quoque erit proportione F, ad E, ac proinde numerus FG, maior erit numero F: quæ omnia ex ijs, quæ in defin. 20. lib. 7 scripsimus, perspicue consequuntur. Superet igitur FG, ipsum F, numero G.

Sumantur iam ipsorum F, GC, æque multiplices K, H, I, ea lege, vt H, sit quidem maior quam E, at I, non minor quam D, eritque ex scholio propos. 5. lib. 7. totus KH, ita multiplex totius FG, vt est multiplex K, ipsius F, vel I, ipsius C. Sumantur rursus ipsorum D, E, æque multiplices LMN. ea lege. vt L, sit multiplex ipsius D, proximo maior quam I; hoc est, tales æque multiplices, vt subtracto numero D, ex L, reliquus numerus maior non sit, quam I, sed vel æqualis; vt in secundo exemplo, vel minor, vt in primo exemplo contingit. Et quoniam ostensum est ita esse D, ad C, vt E, ad F: & ita est C, ad I, vt F, ad K, ex constructione, quod I, K, sumpti sint ipsorum C, F, æque multiplices: erit quoque ex æquo, vt D, ad I, ita E, ad K.

K, 56.	H, 7.	O, 21.	I, 28.
F, 8.	G, 1.	A, 3.	C, 4.
	E, 6.	B, 2.	D, 3.
M, 54.	N, 6.	P, 20.	L, 30.
K, 160	H, 440.	O, 60.	I, 20.
F, 8.	G, 22.	A, 3.	C, 1.
	E, 80.	B, 8.	D, 10.
M, 160.	N, 80.	P, 24.	L, 30.

Præterea quoniam ostensum est esse D, ad C, vt E, ad F: erit permutando quoque, D, ad E, vt C, ad F. Vt autem D, ad E, ita est L, ad M N: quod idem numerus ipsos D, E, multiplicans fecerit L, MN, quippe cum L, MN, sumpti sint ipsorum D, E, æque multiplices: Et eadem de causa, vt C, ad F, ita est I, ad K. Igitur ex lemmate propos. 14. lib. 7. erit quoque vt L, ad MN, ita I. ad K, & permutando vt L, ad I, ita MN, ad K.

Quia ergo est, vt totus L, ad I, ita totus MN, ad K: Et vt D, ex L, ablatus ad eundem I, ita E, ex MN, ablatus ad eundem K: erit quoq; ex theor. 6. scholij prop. 22. lib. 7. vt reliquus ex L, ad I, ita reliquus ex MN, ad K: Est autem reliquus ex L, non maior, quam I, sed vel minor, vt in priori exemplo, vel æqualis, vt in posteriori: propterea quod reliquus ex L, cum D, facit ipsum L, multiplicem ipsius D, proxime maiorem ipso I, ex constructione. Igitur & reliquus ex MN, maior non erit quam K: atque idcirco si ex MN, detrahatur N, ipsi E, æqualis, erit reliquus M. vel minor ipso K, vt in priori Exemplo, vel æqualis, vt in posteriori. Cum ergo H, multiplex ipsius G, sit maior, quam E, vel N, ex constructione; erit totus KH, toto MN, maior.

Denique ſumpto O, ita multiplici ipſius A, vt KH, multiplex eſt ipſius FG, vel I, ipſius C: Item P, ita multiplici ipſius B, vt MN, multiplex eſt ipſius E, vel L, ipſius D: quoniam oſtenſum eſt, ita eſſe FG, ad E, vt A, ad B, ſumptique ſunt ipſorum FG, & A, primi ac tertij, æque multiplices KH, & O; item ipſorum E, & B, ſecundi ac quarti æque multiplices MN, & P, ſequitur ex antecedente propoſ. ſi KH, maior eſt quam MN, ipſum quoque O, maiorem eſſe quam P. Cum ergo KH, oſtenſus ſit maior quam MN, erit quoque O, maior quam P. Quocirca cum O, I, ſint æque multiplices ipſorum A, C, primi ac tertij; & P, L, æque multiplices ipſorum B, D, ſecundi ac quarti, demonſtratumque ſit, maiorem eſſe O, quam P, ſit autem I, minor quam L, ex conſtructione; fieri poteſt, vt exiſtente maiore proportione primi A, ad ſecundum B, quam tertij C, ad D, quartum, ſumptiſque æque multiplicibus, vt dictum eſt, multiplex primi, nimirũ O, maior ſit quam P multiplex ſecundi, multiplex autem tertij, nimirum I, maior non ſit quam L, multiplex quarti. Quod demonſtrandum erat.

Quod ſi minor ſit proportio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum, ſumanturque æque multiplices primi ac tertii, item æque multiplices ſecundi ac quarti, fieri quoque poteſt, vt nonnunquam multiplex primi ſit minor multiplice ſecundi, multiplex vero tertij non ſit multiplice quarti minor.

In eodem enim exemplo, minor eſt proportio C, primi ad D, ſecundum, quam A, tertij ad B, quartum, demonſtratumque eſt, I, multiplicem primi C, minorem eſſe, quam L, multiplicem ſecundi D, at O, multiplicem tertij A, maiorem eſſe quam P, multiplicem quarti B.

III.

Propoſitis quatuor numeris, ſumptiſque æque multiplicibus primi ac tertii iuxta quamuis multiplicationem, item æque multiplicibus ſecundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem, ſi multiplice primi exiſtente maiore, quam multiplex ſecundi, multiplex tertii maior quoque ſit neceſſario, quam multiplex quarti: & illo exiſtente æquali, hic quoque ſemper ſit æqualis; illo denique exiſtente minore, hic quoque perpetuo minor ſit; erit eadem proportio primi ad ſecundum, quæ tertii ad quartum.

Sint quatuor numeri A, B, C, D, ſumanturque primi A, & tertii C, æque multiplices qualeſcunque E, F. Item ſecundi B, & quarti

æque multiplices G, H, qualiscunque etiam hæc sit multiplicatio. Dico si E, F, multiplices primi ac tertij semper sint vel maiores, quam G, H, multiplices secundi & quarti, vel æquales, vel minores ita esse A, primum ad B, secundum vt C, tertium ad D, quartum. Si namq; forte maior proportio A. ad B, vel minor, quam C, ad D, fieri posset, veluti in antecedente propos. demonstratum est, vt E, multiplex primi esset aliquando maior, aut minor, quam G, multiplex secundi: at F, multiplex tertij non maior, aut minor quam H, multiplex quarti. Quod est contra hypothesin. Est ergo A, ad B, vt C, ad D. Quod erat ostendendum.

E, 9.	A. 3.	C, 6.	F, 18.
G, 4.	B, 2.	D, 4.	H, 8
E, 18.	A, 3.	C, 6.	F, 36.
G, 18.	B. 2.	D, 4.	H, 36.
E, 22.	A, 3.	C, 6.	F, 24.
G, 14.	B, 2.	D, 4.	H, 28.

IV.

Propositis quatuor numeris, sumptisque primi ac tertij æque multiplicibus: item secundi & quarti æque multiplicibus: si quando contingat, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, multiplicem vero tertij non maiorem multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum.

Sint quatuor numeri A, B, C, D, sumptisque ipsorum A, & C, primi ac tertij æque multiplicibus E, & F, item ipsorum B, & D, secundi ac quarti æque multiplicibus G, & H, sit E, multiplex primi A, maior quam G, multiplex secundi B, at F, multiplex tertij C, non maior quam H, multiplex quarti D. Dico maiorem esse proportionem primi A, ad B, secundum, quam C, tertij ad D. quartum. Quoniam enim maior est E, quam G, at F, non maior quam H, erit maior proportio E, ad G, quam F, ad H, cum illæ sit proportio maioris inæqualitatis: hæc vero vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Igitur ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. erit quoque permutando maior proportio E, ad F, quam G, ad H. a Est autem, vt E, ad F, ita A, ad C, quod idem numerus ipsos A, C, multiplicans procreauerit E, & F: quippe cum E, F, æque multiplices sint ipsorum A, C; Eademque de causa est, vt G, ad H, ita B, ad D. Maior igitur erit quoque proportio A, ad G, quam B, ad D: Et permutando ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. maior erit etiam porportio A, ad B, quam C, ad D. Quod ostendendum erat.

E, 21.	A, 3.	C, 4.	F, 28.
G, 20.	B, 2.	D, 3.	H, 30.

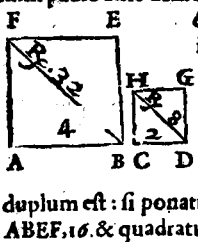
a 17. septimi.

Quod si multiplex primi sit minor multiplice secundi, sed multiplex tertij non sit minor multiplice quarti; minor erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum.

Eadem enim omnino demonstratio est, si pro maiore proportione dicatur vbique minor proportio nulla alia remutata. Vt in hoc exemplo apparet, vbi quatuor numeri sunt A, B, C, D, & E, multiplex primi A, minor est quam G, multiplex secundi B, sed F, multiplex tertij, C, minor nō est, quam H, multiplex quarti, &c.

E, 28.	A, 4.	C, 3.	F, 21.
G, 30.	B, 3.	D, 2.	H, 20.

Sed demonstremus iam, in magnitudinibus, quæ alijs incommēsurabiles sunt, & quæ ex defin. 6. proportionales sunt, eam plerunq; reperiri proportionem quæ in numeris exhiberi possit: adeo vt vere proportionales sint magnitudines, quibus definitio 6. conuenit, quandoquidem ex magnitudinibus proportionalibus in eo sensu sumptis verum consequitur; & nihil absurdi inde inferri potest. Hoc enim paulo ante demonstraturos nos etiam recepimus. Sit ergo recta AB, verbi gratia, rectæ CD, dupla, & super ipsas rectas describantur quadrata ABEF, CD, GH; cum diametris BF, DH. Et quia ex scholio propos. 47. lib. 1. tam quadratum diametri BF, quadrati lateris AB, hoc est, quadrati AB, EF, quam quadratum diametri DH, quadrati lateris CD, hoc est quadrati CDGH, duplum est: si ponatur latus AB, 4. & latus CD, 2. erit quadratum ABEF, 16. & quadratum diametri BF, eius duplum 32. ac proinde diameter ipsa BF, erit radix quadrata numeri 32. quæ numeris exprimi nequit, cum ea maior sit quam 5. minor autem quam 6. nullusque numerus inter 5. & 6. medius, hoc est, compositus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, in se ductus possit numerum integrum 32. producere vt ex Lemmate sequenti perspicuum fiet. Quadratum autem CDGH. erit 4. & quadratum diametri DH, eius duplum, 8. ac proinde diameter ipsa DH, erit radix quadrata numeri 8. quæ numeris etiam exprimi nequit, cum ea maior sit quam 2. minor autem, quam 3. &c. ita vt proportio tam AB, ad BF, quam CD, ad DH, sit irrationalis, diameterq; propterea BF, lateri AB, & diameter DH, lateri CD. incommensurabilis. Vides igitur, id quod Euclides propos. vltima lib. 10. demonstrauit ex ijs, qui lib. 6. de magnitudinibus proportionalibus per defin. 6. huius 5. lib. demonstrata sunt, Diametrum nimirum quadrati lateri eiusdem quadrati esse incommensurabilem esse reipsa verissimum, quippe cum idem nos alia via sine proportionibus hoc loco ostenderimus.



Rursus quoniam diametri BF, DH, diuidunt angulos rectos qua-

quadratorum bifariam, ut in scholio propos. 34. lib. 1. & in coroll. 2. prop. 4. lib. 2, ostendimus, erunt anguli ABF, AFB, CDH, CHD, semirecti, ideoque inter se æquales. Cum igitur & recti anguli A, C, sint æquales, æquiangula erunt triangula ABF, CDH. Quare erit, ut AB, ad BF, ita CD, ad DH: Et permutando, ut AB, ad CD, ita BF, ad DH. Est autem posita recta AB, rectæ CD, dupla Igitur & BF, ipsius DH, dupla erit. Itaq; cum ex defin. 6. hujus lib. eo deducti simus, ut credamus diametrum BF, diametri DH, esse duplam, quamvis utraq; diameter ad suum latus habeat proportionem irrationalem, (Nam propos. 4. lib. 6. ex qua ostendimus, ita esse AB, ad BF, ut CD, ad DH, pendet ex propos. 2. & hæc ex 1. ejusdem lib. 6. Prima autem propos. lib. 6. vim suam accipit ex defin. 6. hujus 5. lib. Item permutata proportio, qua hic etiam usi sumus, sine eadem defin. 6. demonstrari non potest in magnitudinibus incommensurabilibus, ut ex propos. 16. lib. 5. cōstat) videamus, an aliūde cognoscere possimus, diametrum BF, diametri DH, vere duplam esse, ut ex defin. 6. conclusum est, hoc ipso, quod latus AB, lateris CD, duplum ponitur, etiamsi proportio tam lateris AB, ad diametrum BF, quam lateris CD, ad diametrum DH, irrationalis sit. Hoc autem sine proportionibus facile ita cognoscemus. Quoniam latus AB, lateris CD, duplum est, erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum AE, quadrati CG, quadruplum. Posito ergo quadrato AE, 4. erit quadratum CG, 1. Et quia tam quadratum diametri BF; quadrati AE, quam quadratum diametri DH, quadrati CG, ex scholio propos. 47. lib. 1. duplum est; erit quadratum diametri BF, 8. & quadratum diametri DH, 2. atque idcirco illud hujus quadruplum erit. Quocirca ex scholio propos. 4. lib. 2. recta BF, rectæ DH, dupla erit. Vides ergo rursus, si procedamus per ea, quæ ex defin. 6. hujus lib. de magnitudinibus proportionalibus demonstrata sunt, nos perveniſſe ad conclusionē veram, nimirum diametros duorum quadratorum habere proportionem inter se duplam, si latus unius sit lateris alterius duplum; ut dubium non sit, quin magnitudines vere proportionales sint, quarum æque multiplicia eam conditionem habent quam definitio 6. præscribit. Porro ex regulis quoque numerorum irrationalium, quæ in Algebra traduntur, constat diametrum BF, hoc est, R. 32. habere duplam proportionem ad diametrum DH, id est, ad R. 8. Nam sive R. 32. dividatur per R. 8. Quotiens fit R. 4. hoc est, numerus 2. qui proportionem diametri BF, ad diametrum DH, denominat; sive R. 8. multiplicetur per 2. producitur R. 32. Atq; hoc modo omnia, quæ de magnitudinum incommensurabilium proportionibus demonstrantur ex defin. 6. hujus libr. explicari poterunt per regulas numerorum irrationalium. Quæ res argumento rursum est, magnitudines, quibus definitio 6. hujus lib. convenit, vere esse proportionales; quandoquidem calculus numerorum irrationalium cum

demonſtrationibus, quæ ex ea defin. pendent, perpetuo conſentire cõperitur, ut iis, qui in Algebrę præceptis verſati ſunt, notiſſimũ ſit.

LEMMA.

Quod autẽ nullus numerus compoſitus ex 5. & fractione aliqua unitatis, quãvis unitas in infinitũ ſecetur, gignere poſſit integrũ numerũ 32. hoc modo facile demonſtrabimus. Sit enim numerus 5. cum quacunque fractione $\frac{1}{3}$. hoc modo $5\frac{1}{3}$. revoceturque, ut in Arithmetica tradidimus, ad hanc unicã fractionem $\frac{16}{3}$. Certum autẽ eſt, denominatorẽ 7. non metiri numeratorem 38. Alioquin diviſis 38. per 7. fieret Quotiens numerus integer ſine fractione, quod eſt contra hypotheſin. Multiplicetur jam fractio $\frac{38}{7}$. in ſe, (quod fiet, ut in Arithmetica diximus, demonſtrabimusque ad finem lib. 9. ſi tam numerator 38. in ſe, quam denominator 7. in ſe ducatur) gignaturq; fractio $\frac{1444}{49}$. ita ut numerator huius 1444. ſit quadratus numeratoris illius 38. & denominator 49. quadratus denominatoris 7. Et quia latus 7. nõ metitur latus 38. ut oſtendimus, a nõ metietur quoq; quadratus 49. quadratũ 1444. Quare diviſo quadrato 1444. per quadratũ 49. Quotiens nõ erit numerus integer, ſed ei adhærebit fractio aliqua. Alias quadratus 49. metiretur quadratũ 1444. cuius contrarium demonſtravimus. Atque eadẽ ratione demõſtrabitur, quemcunque numerũ integrũ cum fractione qualibet in ſeipſũ ductũ gignere numerũ integrũ cũ fractione. Quod ſi fractio, cujus numerator denominatore minor ſit, in ſe ducatur, producetur ſemper fractio, cujus numerator etiã minor eſt denominatore. Nã cũ numerator fractionis productæ ſit numerus quadratus numeratoris datæ fractionis, denominator autem quadratus numerus denominatoris, ſit autẽ datæ fractionis numerator minor denominatore, erit quoq; illius quadratus numerus quadrato huius minor. Ita ex $\frac{2}{3}$. in ſe gignitur fractus numerus $\frac{4}{9}$. cuius numerator denominatore minor eſt. Itaq; quæcũq; fractio in ſe multiplicata gignit numerũ nõ integrã, niſi quãdo numerator datę fractionis à denominatore numeratur, ſed ea fractio numerus integer potius eſt; qualis eſt fractio $\frac{20}{5}$. quæ 4. integras unitates conſtituit.

a 16. octaui.

Pro-

IX.

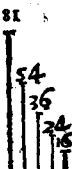
Proportio autem in tribus terminis pauciſſimis conſiſtit.

Quoniam omnis Analogia ſeu proportionalitas, quã interpres, ut dictum eſt, proportionem nominat, ſimilitudo eſt duarum, vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedentem terminum, & conſequentem, neceſſe eſt, in omni proportionalitate reperiri, ut minimum, duos terminos antecedentes, ac duos conſequentes. Quare ſi proportionalitas fuerit non continua, requirentur ſaltem quatuor termini, ſive magnitudines; At vero ſi fuerit continua, erunt cum minimum tres termini; quoniam terminus medius bis ſumitur, cum ſit conſequens terminus unius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic eſt minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuscunq; ſolum proportio, non autem proportionalitas reperitur.

X.

Cum autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam; Et ſemper deinceps, uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

Veluti ſi ſint magnitudines A, B, C, D, E, continue proportionales, ita ut ea ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C, & C, ad D; & D, ad E. proportio A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinem tertiam, dicitur duplicata ejus proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones reponũtur, quæ æquales ſũt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B, & B, ad C, ut propterea proportio A, ad C, intercipiat quodammodo proportionem A, ad B, duplicatam, id eſt, bis ordine poſitam. At proportio A, magnitudinis primæ ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata ejus proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quia inter A, & D, reperiũtur tres proportiones, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B; B, ad C, & C, ad D, atque idcirco proportio A, ad D, includit quo-



quodammodo proportionem A. ad B. triplicatam, id eſt, ter ordine poſitam: Sic quoque proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B: propterea quod quatuor proportiones interijciuntur inter A. & E. quæ æquales ſunt proportioni A. ad B. &c.

Quod ſi è contrario ea ſit proportio E. ad D. quæ D. ad C: & C. ad B: & B. ad A: dicetur proportio E, ad C. duplicata proportionis E ad D: At vero proportio E. ad B. dicetur triplicata proportionis E. ad D: ſic quoque proportio E. ad A. dicetur quadruplicata proportionis E. ad D: &c.

Interpretes nonnulli colligunt ex hac definitione, ſi proponãtur plures quantitates continue proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, eſſe duplam proportionis primæ quantitatis ad ſecundam, eo quod Euclides illam vocet duplicatam proportionem hujus. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartã, eſſe triplam proportionis, quam habet prima quantitas ad ſecundam. &c. Quod tamen nulla eſt ratione concedendum. Neque enim Euclides hoc ſignificare voluit, ſed docuit tantummodo, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, appellari duplicatam ejus proportionis, quam habet prima quantitas ad ſecundam; propterea quod inter primam quantitatem, ac tertiam reperitur quodammodo proportio primæ quantitatis ad ſecundam duplicata; quippe cum inter primam quantitatem, ac tertiam interponantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad ſecundam, & ſic de cæteris, ut diximus. Non autem intelligit, illam duplam eſſe hujus ne Theorema proponeret, quod merito quispiam concedere recuſaret. Quis enim affirmabit. in his numeris continue proportionalibus 25. 5. 1. proportionem 25 ad 1. duplam eſſe proportionis 25. ad 5. cum potius eam quis dixerit eſſe quincuplam? At vero illam dici hujus duplicatam ad ſenſum expoſitum, nemo inficiabitur, eo quod bis ſit poſita, & continue, proportio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cum illa minor ſit, hæc autem major? Nam per propoſ. 8. hujus lib. quantitas 1. ad quantitatem 5. majorem proportionem habet, quam ad quantitatem 25. propterea quod 25. major eſt quam 5. Dicetur tamen illa hujus duplicata, ob cauſam jam explicatam, licet ſit ejus quinta pars. Quare etſi proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ, tamen decupla proportio eſt ejusdem duplæ. Quemadmodum etiam proportio octupla dupla eſt proportionis quadruplæ, cum tamen quadruplæ duplicata ſit ſedecupla, ut hic patet 16. 4. 1. Denique in tribus magnitudinib⁹ æqualibus, vel in tribus æqualibus numeris, 4. 4. 4. atque adeo continue proportionalibus qui fieri poteſt, ut proportio primi ad tertium dupla ſit proportionis primi ad ſecundum, cum ſit omnino eadem? duplicata tamen dicetur illa hujus, propterea quod hæc ordine bis poſita eſt continue inter primum numerum & tertium.

Sed

Sed auctores, qui proportionem primæ quantitatis ad tertiam volunt esse duplam proportionis, quam prima quantitatis habet ad secundam, (inter quos auctores est etiam Federicus Commandin⁹ hoc loco: quod valde miror, cum alioquin Mathematicus sit præstantissimus) dicunt in hac defin. requiri terminos inæquales, primamque debere esse majorē; ita ut definitio hæc intelligenda sit necessario de proportione continua majoris inæqualitatis. Quare mirū non est, ut ajunt, neque proportionem 1. ad 25. proportionis 1. ad 5. neque proportionem 4. ad 4. proportionis 4. ad 4. duplam esse. Verum hæc expositio non solum vera non est, sed Euclidi prorsus est contraria: quippe qui assumat plerisque in locis, triplicatam proportionē reperiri in proportione minoris inæqualitatis. Locus clarissim⁹ est, ut alios omittam, in propos. 12. lib. 12. ubi demonstrat, similes conos, & cylindros in triplicata ratione esse diametrorum, quæ in basibus. Nam si referatur major conus, vel cylindrus ad majorem; necessario in secunda parte ejus demonstrationis, assumit Euclides demonstratum esse prop. 8. ejusdem lib. 12. pyramides similes, etiamsi minor ad majorem referatur, in triplicata esse homologorum laterum ratione: ut eo in loco annotavimus. Huc accedit, propositiones illas, in quibus figuræ aliquæ demonstrantur habere rationem laterum homologorum duplicatam, vel triplicatam, cujusmodi est 19. & 20 lib. 6. & 11. 12. 18. 19. lib. 8. & 33. lib. 11. & 12. 18. lib. 12, non fore universales, si solum de proportione majoris inæqualitatis essent intelligendæ. Explicanda ergo est hæc definitio, ut nos exposuimus.

Itaque hoc loco Euclides explicat tantum, quidnam intelligendum sit nomine proportionis duplicatæ, triplicatæ, &c. ut demonstrationes sequentium librorū percipiantur, rebusque possint materialibus accommodari. Non autē determinat, quænam proportio sit alterius dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. Exempli gratia, quōniā ex propositione 20. lib. 6. cōstat, proportionē quadrati ad quadratū duplicatam esse proportionis, quam habet latus prioris quadrati ad latus posterioris, colligendū erit, si cōtinuetur proportio laterum in tribus terminis, proportionē quadrati ad quadratum, esse eam, quæ est primi termini ad tertium: ita ut si prioris quadrati latus fuerit trium palmorū, posterioris autē unius palmi, prius quadratum ad posterius, habeat proportionem quam 9. ad 1. ita ut illud novies hoc cōpleatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ est nō cupla, dicitur juxta hanc definitionē, duplicata proportionis triplę, qualis est 9. ad 3. vel 3. ad 1. ut in his numeris 9. 3. 1. perspicuum est. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo esse majorem proportione lateris ad latus. Sic etiam quadratum posterius ad prius proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita ut illud sit hujus nona pars propterea quod proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. ut in eisdem his numeris 1. 3. 9. manifestum est.

Simi-

Simili ratione, quoniam lib. 12. propoſ. ultima, demõſtratur ſphæras inter ſe rationem habere ſuarum diametrorum triplicatam, colligendum erit, ſphæram illam, cujus diameter continet tres palmos ad ſphæram, cujus diameter eſt unius palmi tantum, proportionem habere quam 27. ad 1. Hæc enim triplicata dicitur triplæ propoſitionis, ut hic apparet, 27. 9. 3. 1. &c. Sic etiam propoſitis duabus ſphæris, quarum diametri proportionem habent decuplam, habebunt ſphæræ ipſæ proportionem millecuplam, cum hæc ſit decuplæ triplicata, ut hic patet, 1000. 100. 10. 1. Quis autem dixerit unquam, millecuplam proportionem eſſe triplo tantummodo majorem proportione decupla, & non potius trigecuplam decuplæ eſſe triplam?

Cæterum propoſita quæcunque proportione rationali, ſi ejus denominator in ſe ipſum multiplicetur, exurget denominator proportionis, quæ duplicata dicitur propoſitæ proportionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatore ſcilicet proportionis quadruplæ, in ſe, producuntur 16. ideo proportio ſedecupla dicetur duplicata quadruplæ proportionis, ut hic cernitur 16. 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E contrario, cum ex multiplicatione $\frac{1}{4}$ denominare videlicet proportionis ſubquadruplæ, in ſe, producatur $\frac{1}{16}$ dicetur proportio ſubſedecupla, duplicata proportionis ſubquadruplæ. Quod ſi denominator rurſus in illud productum multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicatæ; ut in priori exemplo, ex multiplicatione 4. in 16. producuntur 64. denominator proportionis, quæ quadruplæ dicitur triplicata ut hic vides, 64. 16. 4. 1. Item hic 192. 48. 12. 4. Rurſus ſi id poſterius hoc productum multiplicetur idem denominator, invenietur denominator proportionis quadruplicatæ, atque ita de cæteris. Itaque proportionis duplicatæ denominator producitur ex denominatore propoſitæ proportionis bis poſito, atque ita multiplicato. Vt numerus denominans proportionem duplicatam proportionis triplæ, producitur ex 3. denominatore triplæ proportionis bis poſito, in hunc modum 3 3. ac ſic multiplicato: Nam ter tria faciunt 9. denominatorem noncuplæ proportionis, quæ duplicata dicitur triplæ, ut hic cerni poteſt 9. 3. 1. Item hic 18. 6. 2. At vero denominator proportionis triplicatæ gignitur ex propoſitæ proportionis denominatore ter poſito, & ſic multiplicato. Vt in dato exemplo, denominator triplicatæ proportionis, nempe 27. procreatur ex 3. ter poſito ſic 3. 3. 3. atque ita multiplicato, dicendo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicata exoritur ex denominatore quater poſito: Quintuplicata ex eodem quinquies poſito, atque ita multiplicato, &c. Itaque duplicatio, triplicatio, quadruplicatio, &c. proportionis cujuslibet, de qua in hac defin. agitur, nihil aliud eſt, quam multiplicatio denominatorum proportionum intermediarum inter ſe. Ex hac enim multiplicatione procreatur denominator proportionis quã extremi termini inter ſe habent, quæ propterea illius proportionis

nis, cujus denominator multiplicatus est, duplicata, dicitur, vel triplicata, vel quadruplicata, &c. prout videlicet denominator bis positus est, vel ter, vel quater, &c. atq; sic multiplicatus fuit ut exposuimus. Verbi gratia, propositis hisce quatuor numeris cõtinue proportionalib. in proportione quadrupla, primus 192. ad quartum 3. proportionem habet denominatam à 64. quæ proportio dicitur triplicata proportionis quadruplæ; quia denominator 64. proportionis extremorum 192. & 3. producitur ex denominatore 4. proportionis quadruplæ ter positio, ob tres proportiones quadruplas inter extremos interjectas, atq; ita multiplicato, dicendo, quater quatuor sunt 16. & quater 16. sunt 64. Sic etiam inversis iisdem numeris, ut sint continue proportionales in proportione subquadrupla, primus 3. ad quartum 192. proportionem habet denominatam à $\frac{1}{64}$. quæ proportio dicitur triplicata proportionis subquadruplæ: quia denominator $\frac{1}{64}$. proportionis primi numeri 3. ad quartum 192. producitur ex denominatore $\frac{1}{4}$. proportionis subquadruplæ ter positio, & sic multiplicato, ob tres proportiones subquadruplas inter extremos interpositas. Nam ex $\frac{1}{4}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{16}$. & ex $\frac{1}{16}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{64}$. Nihil obstat ergo, quo minus proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{64}$. denominata dici possit triplicata proportionis subquadruplæ 3. ad 12. quanquam illa minor sit, quam hæc: quia videlicet denominator $\frac{1}{64}$. productus est ex denominatore $\frac{1}{4}$. ter positio, & sic multiplicato, ut diximus. Non tamen proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{64}$. denominata dici potest triplo major proportione subquadrupla 3. ad 12. quia denominator $\frac{1}{4}$. triplicatus non facit denominatorem $\frac{1}{64}$. sed $\frac{1}{3}$. atque ita proportio subsesquitertia dicetur tripla proportionis subquadruplæ: sicut etiam non proportio à 64. denominata sed proportio duodecupla, est proportionis quadruplæ tripla; propterea quod denominator 4. triplicatus non producit denominatorem 64. sed 12. Porro continuatis quotcunque numeris proportionalibus, sive majores cum minoribus, sive minores cum majoribus conferantur, denominatorem proportionis primi ad ultimum gigni ex denominatoribus intermediarum proportionũ inter se multiplicatis, demonstrabimus ad defin. 5. lib. 6. Proportionem autem aliquam tum demum esse alterius duplam, vel triplam, &c. cum illius denominator hujus denominatoris duplus est, vel triplus, &c. ita ut proportio decupla sit dupla quintuplæ, & sextupla sit tripla duplæ, &c. ostendemus ad finem lib. 9. tractatumque est hoc argumentũ copiosè à Rudolpho Volumnio in Disputatione de proportione proportionum. Nunc satis sit, hoc ipsum communi hominũ judicio ex sensibilibus rebus confirmare. Si igitur Agens aliquod

Denominatores	4	4	4
Num. proport.	192	48	12	3

Denominatores	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Num. proport.	3.	12	48	192.

aliquod ad Patiens proportionem habeat verbi gratia **decuplam** *ita* ut Agens sit 10. & Patiens 1. quis tam mente captus erit, qui non statim intelligat, si idem Agens augeatur, ut fiat 20. Patiens autem maneat 1. Agens tunc duplo majorem habere potentiam respectu ejusdem Patientis, quam prius? Quare proportio vigecupla, cujus denominator 20. duplus est denominatoris 10. dupla est proportionis decuplæ, non autem proportio centupla, ut auctores contrariæ sententiæ volunt; sed tamen hæc proportio centupla dicetur duplicata proportionis decuplæ propter multiplicationem denominatoris 10. in se, & propter duas proportiones decuplas, quæ inter numeros centuplam proportionem habentes interiiciuntur, ut hic apparet, 100. 10, 1. Sic etiam si è contrario, Agens aliquod ad Patiens habeat proportionem verbi gratia subdecuplam, ita ut Agens sit 1. & Patiens 10. quis tam hebes fuerit, ac rudis, qui non intelligat, Agens, quod sit 2. duplo esse potentius respectu ejusdem Patientis 10. quam Agens 1? Cum ergo Agens 2. ad Patiens 10. habeat proportionem subquintuplam, cujus denominator $\frac{1}{5}$. vel $\frac{2}{10}$. conflatur ex denominatore $\frac{1}{10}$. bis sumpto, erit profecto proportio subquintupla proportionis subdecuplæ dupla, non autem illa, quæ subcentupla est, ut prædicti auctores volunt, eum hæc longe minor sit, quam subdecupla. Dicetur tamen proportio subcentupla proportionis subdecuplæ duplicata, propter causam sæpius explicatam, ut hic patet, 1. 10. 100.

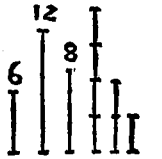
Ex his, quæ diximus, non obscure colligi potest, proportionem duarum quantitatum, quibus nullum interponitur medium, sapere naturam quodammodo lineæ, cum ex nulla alia proportione producatur. Proportionem vero, cujus quantitates intercipiunt unicum medium in continua proportionalitate, habere conditionem superficiei quadratæ, quoniam gignitur ex duabus proportionibus æqualibus, quemadmodum & quadratum ex duabus lineis æqualibus conficitur. Denique proportionem, cujus quantitatibus duo media in continua proportionalitate interiiciuntur, obtinere naturam solidi, atq; adeo cubi, cum oriatur ex tribus æqualibus proportionibus, quemadmodum etiam cubus ex tribus lineis æqualibus consurgit. Verum de his plura invenies apud Arithmeticos, qui Algebræ regulam exposuerunt.

XI.

Homologæ, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

Definivit supra proportionalitatem, proportionum esse similitudinē. Docet jam, non solum in proportionalitate quavis proportiones dici similes: Verum etiam terminos ipsos, seu quātitates, similes dici, homologasue; dicens antecedentes magnitudines appellari ho-

lari homologas, seu similes proportione inter se, nec non consequentes inter se, vt intelligeremus in quam plurimis demonstrationibus, quænam latera figuratum inter se comparata, antecedentia debeant esse proportionum, & quænam consequentia, vt in 6. lib. perspicuum fiet. Si igitur est proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicetur quantitas A, similis quantitati C; & B, similis ipsi D. Propter similitudinem enim proportionum, necesse est, vtramque magnitudinem antecedentem vel æqualem esse vtrique consequenti, vel eodem modo maiorem, aut minorem: Alias non haberet vtraque antecedens ad vtramq; consequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus propositis, in quibus antecedentes maiores sunt eodem modo consequentibus, vtpote dimidio maiores. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, FG, continue proportionalibus, vbi tam E, & F, homologæ sunt, quam F, & G, vt constat. Atque hanc ob causam Euclides in defin. 6. & 8. iussit accipi æque multiplicia primæ & tertiæ magnitudinum, hoc est, antecedentium: Item aliæ æque multiplicia secundæ, & quarta magnitudinum, nimirum consequentium. Hæ enim similes sunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione constat; in magnitudinibus vero non proportionalibus dissimiles.



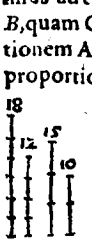
Orontius, & nonnulli alij interpretes, longe aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus varie inter se conferri posse & antecedentes magnitudines, & consequentes; veluti in sequentibus definitionibus patebit. Verum si verba definitionis diligentius ponderentur, & vsus eiusdem in 6. lib. consideretur, nostram expositionem huic anteferendam esse nemo dubitabit.

XII.

Alterna ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

Explicat hic quosdam modos argumentandi in proportionibus, quorum frequentissimus est vsus apud Geometras. Hi autem sunt numero sex. Primus dicitur proportio alterna, siue permutata: Secundus, inuersa, seu proportio è contrario: Tertius, compositio rationis, seu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuisio rationis vel disiuncta proportionalitas: Quintus, conuersio rationis siue euersa proportionalitas: Sextus denique proportio vocatur proportio ex æqualitate, seu æqua proportio. Alterna igitur seu permutata proportio, inquit, est, cum propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandem esse proportionem antecedentis prioris

proportionis ad antecedentem posterioris, quam habet consequens illius ad consequentem huius. Vt si ponamus proportionem A, ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem esse proportionem A, ad C, quæ est B, ad D, dicemur argumentari à permutata proportione. Græci scriptores in hac argumentat. vtuntur hoc fere modo loquendi: vt est A, ad B, ita C, ad D: Igitur permutando, seu vicissim, erit quoque A, ad C, vt B, ad D. Firmam autem esse huiusmodi illationem, demonstrabitur prop. 16 lib. huius. Cæterum in hoc modo argumentandi, necesse est, omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, vt inter binas vt vt assumptas proportio esse possit. Non enim recte infertur. Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D. ergo permutando, vt linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum D, cum nulla sit proportio lineæ ad numerum, aut contra, vt perspicuum est ex defin. 5. In alijs autem modis argumentandi, qui sequuntur: possunt esse priores magnitudines in vno genere magnitudinis, & posteriores in alio genere magnitudinis, vt ex demonstratione huius lib. 5. constabit



XIII.

Inuersa ratio; est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.

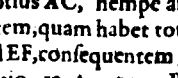
Vt si ex eo, quod est A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita esse B, ad A, vt D, ad C, hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuersa proportione. In hac argumentatione sic fere loquuntur auctores. Vt est A, ad B, ita C, ad D: Igitur conuertendo, vel è contrario, erit quoque B, ad A, vt D, ad C: Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur in coroll. propos. 4. huius lib. Porro duæ priores magnitudines possunt esse vnius generis, & posteriores alterius. Recte namque licebit inferre: vt se habet linea A, ad lineam B, ita se habet triangulum, seu numerus C, ad triangulum, seu numerum D; Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum seu numerus D, ad triangulum, seu numerum C, vt ex coroll. propos. 4. constabit.

XIV.

COMPOSITIO rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu vnius; ad ipsam consequentem.

Sit proportio AB, ad BC, quæ DE, ad EF; Si igitur ex hoc colligatur,

gatur, eam quoque esse proportionem totius AC, nempe antecedentis cum consequēte, ad BC, consequentem, quam habet tota DF, antecedens nimirum cum consequente, ad EF, consequentem; dicetur huiusmodi argumentatio compositio rationis, eo quod ex antecedente, & consequente componatur aliud nouum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos scriptores reperies in hac argumentatione; Vt AB. ad BC, ita DE, ad EF, componendo ergo erit & AC, ad BC, vt DF, ad EF. Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propos. 18.



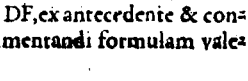
Huic modo argumentandi per compositionem rationis addi possunt alij duo. Primus dici potest, Compositio rationis conuersa; quando nimirum sumitur antecedens, & cōsequens, veluti vna, quæ cum antecedente conferatur Vt si est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimusque; Ergo vt AC, ex antecedente, & consequente conflata, ad antecedentem AB, ita est DF, ex antecedente & consequente composita, ad antecedentem DE. Quam argumentationem esse validam, demonstrabimus, ad propos. 18. huius lib. In qua quidem hoc modo dicendi vti poterimus. Ergo per compositionem rationis conuersam.

Alter modus dici potest Compositio rationis contraria; quando nimirum refertur eadem magnitudo antecedens ad antecedentem, & consequentem, ceu ad vnam. Vt si est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimusque per compositionem rationis contrariam; Igitur erit vt AB, antecedens ad totam AC, ex antecedente & consequente; cōpositam, ita DE, antecedens ad DF, ex antecedente & consequente compositam. Atque hanc argumentandi formulam valere, ad prop. 18. huius lib. ostendemus.

XV.

Diuisio rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.

Vt si dicatur, quæ proportio est totius AB, ad CB, ea est totius DE, ad FE; Igitur erit & AC, excessus, quo antecedens consequentem superat, ad CB, consequentem, vt DF, excessus, quo consequentem excedit antecedens, ad FE, consequentem. In diuisione autem hac rationis ita loquuntur auctores: ergo diuidendo, &c. Hæc porro illatio ostenditur propos. 17. huius lib.



Possunt etiam huic argumentandi modo adiungi alij duo. Primum Diuisionem rationis conuersam dicere possumus; quando nimirum consequens ad excessum, quo consequentē superat antece-

dens, refertur. Vt si est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, concludimusque per diuisionem rationis conuersam; Ergo erit, vt CB, consequens ad AC, excessum, quo antecedens consequentem superat, ita FE, consequens ad DF, excessum, quo antecedēs superat consequentem. Valere autem hanc argumentationem, ostendemus ad 17. propos. huius lib.

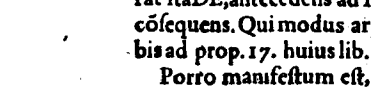
Perspicuum autem est, vt vtraque harum argumentationum per Diuisionem rationis locum habeat, nimirum & illa Euclidis, & nostra, antecedentem debere esse maiorem consequente. Alias Diuisio fieri non posset.

Alter modus appellari potest Diuisio rationis contraria; quando videlicet confertur antecedens cum excessu, quo consequens antecedentem superat. Vt cum dicimus. ita se habet AC, ad AB, vt DF, ad DE. Igitur erit quoque per diuisionem rationis contrariam vt AC, antecedens ad CB, excessum, quo consequens antecedentem superat ita DE, antecedens ad FE, excessum, quo antecedentem superat cōsequens. Qui modus argumentandi demonstrabitur etiam à nobis ad prop. 17. huius lib.

Porro manifestum est, in hac diuisione rationis contraria consequentem debere esse maiorem antecedente, vt sumi possit excessus, quo consequens antecedentem superat.

XVI.

Conuersio rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.



Quod si colligamus hoc modo. Sicut est tota magnitudo AB, ad CB, ita tota DE, ad FE; Igitur ita iam erit eadem AB, ad AC, excessum, quo consequentem superat antecedens, vt DE, ad DF; Dicemur per cōuersionem rationis argumentari. Vnde sic fere loquuntur scriptores. Igitur per conuersionem rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus in coroll. propos. 19. huius lib.

Liquido etiam cōstat, in hoc modo argumētandi per cōuersionē rationis antecedentem debere consequentem superare, vt excessus, quo antecedens consequentem superat, sumi possit.

XVII.

Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sunt magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad vltimam sese habuerit.

Vel

Vel aliter. Sumptio extremorum, per subductionem mediorum.

Sint plures magnitudines duabus A, B, C, & totidem D, E, F, sintque binæ ac binæ in eadem proportione, hoc est, A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam esse proportionem A, ad C, primæ ad vltimam in primis magnitudinibus quæ est D, ad F, primæ magnitudinis ad vltimam. In secundis magnitudinibus; dicetur huiusmodi argumentandi formula desumpta ex æquo siue ex æqualitate, in qua scilicet extremæ magnitudines, sub ductis medijs colliguntur habere vnam, eandemque inter se proportionem, vt in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus vno quidem, quando sumimus binas ac binas magnitudines in eadem proportione, ordinatæ procedendo, altero vero cum ordo inuertitur; explicat Euclides duabus sequentibus definitionibus, quid sit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.

XVIII.

Ordinata proportio est, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem: fuerit etiam, vt consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

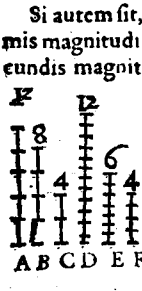
Vt quando fuerit A, ad B, vt D, ad E: Rursus vt B, consequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, consequens ad F, aliud quidpiam; dicetur talis proportio, Ordinata: quia idem ordo tam in primis tribus magnitudinibus, quam in secundis seruatur; cum vtrobique conferatur primum prima cum secunda; deinde secunda cum tertia. Quando ergo in modo argumentandi ex æqualitate seruatur Ordinata proportio, demonstratur propos. 22. huius lib. eam argumentationem esse bonam.

XIX.

Perturbata autem proportio est, cum tribus positis magnitudinibus, & alijs, quæ sint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus

antecedens ad consequentem: Vt autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

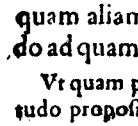
Si autem sit, quemadmodum A, ad B, ita E, ad F: Deinde vt in primis magnitudinibus B, consequens ad C, aliud quidpiam, ita in secundis magnitudinibus aliud quidpiam D. ad E, antecedentem magnitudinem, nuncupabitur huiusce modi proportio, Perturbata: quod non seruetur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe cum in primis magnitudinibus conferatur prima cum secunda at in secundis secunda cum tertia; deinde in primis secunda cum tertia, at in secundis prima cum secunda. Quando igitur in modo argumentandi ex æqualitate seruatur Perturbata proportio, demonstratur, eam argumentationem esse bonam, prop. 23. huius lib. Porro tam perturbata proportio, quam ordinata, semper infert ex æqualitate eandem extremorum proportionem etiamsi plures magnitudines ponantur, quam tres, vt ex propos. 22. & 23. huius lib. perspicuum fiet.



Vtuntur Euclidis interpretes hoc libro, & in alijs, vbi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate quodam, quod vt hic subijceremus, non inutile fore iudicauimus. Illud autem eiusmodi est.

Quam proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo proposita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamuis magnitudinem propositam.

Vt quam proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo proposita C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quæpiam alia E, ad propositam C. Quamuis enim ignoremus interdum, quænam sit quarta illa magnitudo, dubitandum tamen non est, eã esse posse in rerum natura, cum id contradictionem non implicet, vt Philosophi loquuntur, neque absurdi aliquid ex ea consequatur.



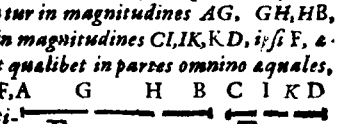
THEOR. 1. PROPOS. 1.

Si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices; quam multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudi-

num

num E,F,aque multiplices. Dico magnitudines AB,CD, ſimul,tam eſſe multiplices magnitudinum E,F,ſimul, quam eſt multiplex AB, ipſius E,vel CD,ipſius F. Cum enim AB,CD, ſint aque multiplices, ipſarum E,& F, ſi AB, diuidatur in magnitudines AG, GH,HB, ipſi E,aquales,& CD,quoque in magnitudines CI,IK,KD, ipſi F, aquales: (Diuidi autem poterit qualibet in partes omnino aquales, cum AB, CD, ſint ipſarum E,F,



aque multiplices, atque ideo toties E, in AB, perfecte contineatur, quoties F,in CD,vt ex ijs, quæ in defin. 2 huius lib. ſcripſimus,conſtat) erunt magnitudines AG,GH,HB, tot numero, quot ſunt magnitudines CI,IK,KD. Quoniam vero AE,& E,aquales inter ſe ſunt, ſi ipſis addantur aquales CI,& F,a erunt AE,CI,ſimul aquales ipſis E,& F,ſimul. Eodem modo erunt GH,& IK,ſimul aquales ipſis E,& F, ſimul: Nec non HB,& KD,eiſdem E,& F. Quoties igitur E,in AB,vel F,in CD,continetur,toties & E,F,ſimul,in AB,CD,ſimul comprehendentur: Ideoque,quam multiplex eſt AB, ipſius E, tam ſunt multiplices AB,CD,ſimul,ipſarum E,& F,ſimul, vt conſtat ex ijs, quæ in defin. 2, huius lib. ſcripſimus. Quare ſi ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum,&c Quod erat demonſtrandum.

a 2. prop. nun.

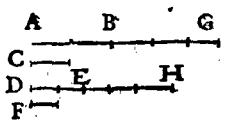
SCHOLIVM.

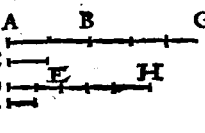
Hoc idem demonſtrabitur vniuerſe prop. 12. in omni genere proportionis, tam rationalis, quam irrationalis Neceſſarium autem fuit, idipſum prius hoc loco in proportione multiplici demonſtrare; quia ex eo aliæ propoſitiones demonſtrandæ ſunt, antequam propoſitio 12. poſſit demonſtrari.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si prima ſecundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex, atque ſexta quartæ: erit & compoſita prima cum quinta, ſecundæ æque multiplex, atque tertia cum ſexta, quartæ.

Sit magnitudo prima AB, tam multiplex ſecunda C, quam eſt multiplex DE, tertia, quarta F: Rurſus tam ſit multiplex BG, quinta ipſius C, ſecunda, quam multiplex eſt EH, ſexta ipſius F, quarta. Dico AB, primam cum BG, quinta compoſitam, tam

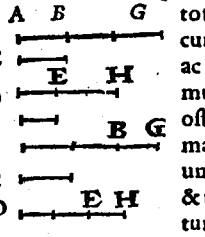




G *multiplicem esse secunda C, quam multiplex, est DE, tertia composita cum sexta EH, ipsius* F, *quarta. Cum enim AB, sint aquemultiplices ipsarum* CF, *erunt in* AB, *tot magnitudines ipsi* C, *aquales, quot sunt in* DE, *aquales ipsi* F. *Eadem ratione erunt & in* BG, *tot aquales ipsi* C, *quot sunt in* EH, *aquales ipsi* F. *Si igitur aqualibus multitudinibus* AB, DE, *addantur aquales multitudines* BG, EH, *erunt tota multitudines* AG, DH, *aquales. Quare toties comprehenditur* C, *in* AG, *quoties* F, *in* DH: *Ideoque tam multiplex est* AB, (*prima composita cum quinta*) *ipsius* C, *secunda, quam multiplex est* DH, (*tertia composita cum sexta*) *ipsius* F, *quarta. Si prima itaque secunda fuerit multiplex &c. Quod erat ostendendum.*

SCHOLIVM.

Quod si prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint secundæ, & quartæ; Quinta vero & sexta, æque multiplices secundæ & quartæ. Vel prima, & tertia æque multiplices fuerint secundæ, & quartæ: At quinta & sexta, æquales secundæ, & quartæ: Erit eadem ratione,



tota AG, (prima & quinta) tam multiplex secundæ C, quam multiplex est tota DH, (tertia ac sexta) ipsius F, quartæ. Semper enim AG, multitudo magnitudinum æqualium ipsi C, ostendetur, æqualis esse ipsi DH, multitudini magnitudinum ipsi F, æqualium, vt perspicuum est in appositis figuris. Si vero tam prima & tertia quam quinta & sexta æquales ponantur secundæ, & quartæ luce clarius est, primã & quintam simul, atque tertiam & sextam simul, æque multiplices esse, nimirum duplices, secundæ & quartæ magnitudinum.

Hoc quoque ab Euclide concludetur, in omni genere proportionis vniuersæ propos. 24. sed operæ pretium fuit, idipsum prius in proportione multiplici demonstrare, vt ea, quæ sequuntur demonstrari possint.

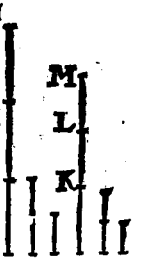
iij.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si sit prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ, & tertiæ: Erit & exæquo, sumptarum vtraq; vtriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera autem quartæ.

Sit prima magnitudo A, tam multiplex secunda B, quam multiplex est C, *tertia quarta* D; *sumanturque* E, F, *æque multiplices*

plices prima & tertia A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem esse E, ipsius B, secunda, quam est F, ipsius D, quarta. Nam cum E, & F, sint æque multiplices ipsarum A, & C: si distribuantur E, & F, in magnitudines ipsis A, & C, æquales, ut in E G, G H, H I, & F K, K L, L M, erunt tot partes in E, æquales ipsi A, quot sunt in F, æquales ipsi C. Quoniam vero E G, F K, æquales sunt ipsis A, & C: sunt autem A, & C, æque multiplices ipsarum B, & D, ex hypothesi; Erunt & E G, E K, earundem B, & D, æquè multiplices.



Pari ratione erunt G H, K L. Item H I, L M, æque multiplices earundem B, & D: Quoniam igitur E G, prima magnitudo, tam est multiplex secunda B, quam est multiplex F K, tertia quarta D: Item G H, quinta tam multiplex est ejusdem secunda B, quam multiplex est K L, sexta ejusdem quarta D, a *Erit & E H, composita ex prima & quinta, tam multiplex secunda B, quam est multiplex F L, composita ex tertia & sexta, quarta D. Rursus cum sit E H, prima tam multiplex secunda B, quam multiplex est F L, tertia quarta D, ut proxime demonstratum est: sit autem & H I, quinta tam multiplex secunda B, quam est L M, sexta multiplex quarta D:* b *Erit & E I, composita ex prima & quinta, tam multiplex secunda B, quàm est F M, composita ex tertia ac sexta, multiplex quarta D. Eademque est ratio, si plures fuerint partes in E, & F. Si sit ergo prima secunda æque multiplex, atq; tertia quarta, &c. Quod ostendendum erat.*

a 2. quinti.

b 2. quinti.

SCHOLIVM.

Ostendetur hoc theorema, propos. 22. non solum in magnitudinibus æque multiplicibus, sed etiam in omnibus, quæ binæ sumptæ eandem habent proportionem, sive rationalem sive irrationalem, sed necessarium fuit ipsum prius hic in proportione multiplici demonstrare, ut insequens propos. 4. demonstrari possit.

THEOR. 4. PROPOS. 4. IV.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices secundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

Sit proportio A, ad B, qua C, ad D, sumanturque prima A, & tertia C, æque multiplices E, & F: Item secunda B, & quarta D, æque multiplices G, & H, juxta quamvis multiplicationem:

sive E, F, ita multiplices sint ipsarum A, C, sicus G, H, ipsarum B, D, sive non. His positis, constat ex defin. 6. hujus lib. si E, deficit à G, etiam F, deficere ab H: Et si

a 3. quinti.

E: æqualis est ipsi G, etiam F, æqualem esse ipsi H: Et deniq; si E, excedit G, etiam F, excedere H. Aliquin non esset, per defin. 6. eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, si earum æque multiplicia non semper ita se haberent. Dico jam multiplicia prima ac tertia non solum una deficere à multiplicibus secunda ac quarta, aut una æqualia esse, aut una excedere, ut diximus, sed eandem quoq; inter se proportionem habere, nimirũ ita esse E. multiplicẽ primæ A, ad G. multiplicem secundæ B, ut F; multiplicem tertiæ C, ad H. multiplicem quartæ D. Hoc est, si rursus E, statuatur prima magnitudo; G, secunda: F, tertia, & H, quarta: sumanturq; ipsarum E, F, æque multiplicia qualiacunque: Item ipsarum G, H, quacunq; etiam æque multiplicia: Multiplicia ipsarũ E, F, à multiplicibus ipsarũ G, H, vel una deficere, vel una æqualia esse, vel una excedere, ut vult definitio 6. Idẽnãque est, quatuor magnitudines eandem habere proportionem, & earum æque multiplicia sumpta diximus, vel una deficere, vel una æqualia esse, vel una excedere. Capiantur enim rursus I. K. ipsarum E, F, æque multiplices: Item L, M. æque multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E. prima ipsius A, secunda quam F. tertia ipsius C. quarta: sumpta sunt autem & I, K, æque mul-

b 3. quinti. *tiplices ipsarum E, F. primæ ac tertiæ: b Erunt quoq; ex æquo I. L. æque multiplices ipsarum A, C, secundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M. ipsarum B, D. æque multiplices. Et quia ponitur proportio A, primæ ad B, secundam, quæ C. tertiæ ad D. quartam, ostensæque sunt I. K. æque multiplices primæ ac tertiæ A, C. Item*

c 6. defin. quinti. *L, M. æque multiplices secundæ & quartæ B, D. c sit ut si I. multiplex primæ deficit ab L. multiplici secundæ, etiam K. multiplex tertiæ necessario deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I. æqualis est ipsi L. etiam K, ipsi M, sit necessario æqualis: & deniq; si I, excedit ipsum L. etiam K. excedat necessario ipsum M: Idemque ostendetur in quibuscunque æque multiplicibus magnitudinum E, & F. nec non magnitudinum C, & H: quia semper hæc æque multiplicia,*

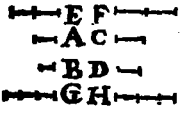
d 3. quinti. *quæcunque sint, d æque multiplicia quoq; erunt magnitudinum A, C, & B. D. Itaq; cum I, & K. sint æque multiplices primæ E, & tertiæ F. Item L & M. æque multiplices secundæ G. & quartæ H: ostensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quam L. multiplex secundæ; multiplicem tertiæ K. minorem quoque esse, quã M. multiplicẽ quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque*

multi-

multiplicatione: a *Erit, ut E, prima ad G, secundam, ita F. tertia ad H. quartam. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit ratione, &c. Quod erat demonstrandum.* a 6. def. quinti.

COROLLARIVM.

Hinc facile demonstrabitur Inversa ratio, quam Euclides defin. 13. explicavit, hoc est, si quatuor magnitudines fuerint proportionales, easdem & contra, seu inversa ratione proportionales esse. Sit enim A, ad B, ut C, ad D. Dico esse convertendo, ut B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, F, æque multiplicibus ipsarum A, C, primæ ac tertiæ; Item G, H, æque multiplicibus ipsarum B, D, secundæ & quartæ: quoniam ex eo, quod A, prima ad B, secundam se habet, ut C, tertia ad D, quartam, b necesse est, ut si E, multiplex primæ minor fuerit quam G, multiplex secundæ, vel æqualis, vel maior, etiam F, multiplicem tertiæ minorem esse, vel æqualem, vel maiorem, quam H, multiplicem quartæ; Perspicuum est, si è contrario G, maior fuerit quam E, vel æqualis, vel maior, etiam H, maiorem fore, vel æqualem, vel maiorem, quam F, secundum quamcunque multiplicationem sint sumpta hæc æque multiplicia. Nam si utraque E, F, minor est, quam utraque G, H, erit contra utraque G, H, maior quam utraque E, F, & si utraque E, F, æqualis est utrique GH, erit è contrario, utraque G, H, utrique E, F, quoque æqualis: Et denique si utraque E, F, maior est, quam utraque G, H, erit vice versa, utraque G, H, minor, quam utraque E, F. Itaque quoniam primæ B, & tertiæ D, sumptæ sunt, æque multiplicia G, H; Item secundæ A, & quartæ C, æque multiplicia E, F, ostensumque est, G, H, vel una excedere E, F, vel una æqualia esse, vel una deficere, secundum quamcunque multiplicationem ea multiplicia sumantur; c erit ut B, prima ad A, secundam, ita D. tertia ad C, quartam. Quod erat demonstrandum.



b 6. def. quinti.

c 6. def. quinti.

SCHOLIVM.

Hæc propositio cum suo corollario vera est, sive duæ magnitudines A, B, sint ejusdem generis cum duabus magnitudinibus C, D, sive non, ut ex demonstratione liquet.

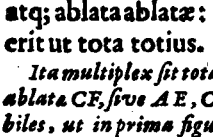
Orontius quartum hoc Theorema sic conatur demonstrare. Postquã ex 3. propositione hujus libri ostendit I, K, esse æque multiplices magnitudinũ A, C; Item L, M, esse æque multiplices magnitudinum B, D, infert statim per conversũ 6. definitionis, juxta suam expositionem, ita esse I, ad L, ut K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, ut F, ad H. Quæ quidem demonstratio admodum est vitiosa, tum quia secundum hunc sensum demonstratur idem per idem, nimirum datis quatuor magnitudinibus pro-

proportionalibus, æque multiplices primæ ac tertiæ adæque multiplices secundæ & quartæ eandem habere proportionem, ex eo, quod ex 6. defin. ut ipse explicavit, æque multiplices primę ac tertiæ ad æque multiplices secundæ & quartæ eandem habent proportionem: quod est absurdum: tum etiam, quia eodem modo statim à principio licuisset illi inferre, sic esse, per 6. defin. E, ad G, ut F, ad H, sine acceptione novarũ magnitudinũ æque multipliciũ. Non enim est major ratio in illis, quam in his. Reijcienda est ergo hujusmodi demonstratio, una cũ expositione 6. definitionis, ut supra diximus. At juxta nostram interpretationem ejusdem definitionis constat solum, si I, minor est, quam L, vel æqualis, vel major, etiam K, minorem esse, vel æqualem, vel majorem, quam M; quemadmodum & idem constat in æque multiplicibus E, F, G, H, & in quibuscunq; aliis, si sumantur, prout inter se respondent. Unde ex 6. defin. recte colligitur, ita esse E, primam ad G, secundam ut est F, tertia ad H, quartam, quandoquidem illis 6. definitio convenit.

V. THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atq; ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit ut tota totius.

Ita multiplex sit tota AB, totius CD, ut est multiplex AE, ablata ablata CF, sive AE, CF, ablatæ sint totis AB, CD, commensurabiles, ut in prima figura, sive incommensurabiles, ut in secunda figura. Item sive AE, CF, compositæ sint ex eisdem partibus ex quibus tota AB, CD, componuntur, ut in priori figura, sive non ex eisdem, ut in posteriori figura. Dico reliquam EB, ita esse multiplicem reliquæ FD, ut est tota AB, totius CD. Ponatur enim EB, ita multiplex cujuspiam magnitudinis, videlicet ipsius GC, ut est AE, multiplex ipsius CF, ut tota AB, totius CD. Quoniam igitur AE, EB,



a 1. quinti. *æque sunt multiplices ipsarum CF, GC; a erit tota AB, totius GF, ita multiplex ut AE, ipsius CF, hoc est omnes omnium, ut una unius: Sed tam multiplex etiam ponitur AB, ipsius CD, quam est multiplex AE, ipsius CF. Igitur AB, tam est multiplex ipsius GF, quam multiplex est ipsius CD; atque idcirco æquales sunt GF, CD. Ablata igitur communi CF, æquales erunt GC, FD. Tam multiplex igitur erit EB, ipsius FD, quam multiplex est ipsius GC. Sed ita multiplex*

b 6. pro- nunc.

posita

posita fuit EB, ipsius GC, ut AE, ipsius CF, hoc est, ut tota AB, totius CD. Quare tam multiplex est reliqua EB, reliqua FD, quam est tota AB, totius CD: quod est propositum.

Aliter. Sit ita multiplex tota AB, totius CD, ut ablata AE, ablata CF. Dico reliquam EB, reliquæ FD, esse sic multiplicem, ut est tota totius. Posita enim GA, ita G A E B
multiplici ipsius FD, ut est AE, ipsius C F D
CF, vel ut tota AB, totius CD: quo-
niam AE, GA, æque multiplices sunt G A E B
ipsarum CE, FD: a erit tota GE, sic C F D
multiplex totius CD, ut AE, ipsius a1. quinti.
CF: Sed ita quoque multiplex est AB, ejusdem CD, ut AE, ipsius GF, ex hypothesi. Æque multiplices sunt igitur GE, AB, ipsius CD: b atque adeo inter se æquales. Quare, demptacommu- b 6. pre-
ni AE, æquales erunt GA, EB: Ideoque æque multiplices ipsius num.
FD; cum GA, sit multiplex posita ipsius FD. Atqui ita est multiplex posita GA, ipsius FD, ut AB, ipsius CD. Igitur & EB, reliqua sic erit multiplex ipsius FD, reliquæ, ut AB, totatotius CD; quod est propositum. Si magnitudo itaque magnitudinis æque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Vniverse idipsũ demonstrabitur prop. 19. in magnitudinibus cujuscunque proportionis, & non tantum multiplicis, ut hic est factũ.

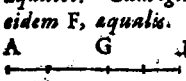
THEOR. 6. PROPOS. 6. vi.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, & detractæ quædam sint earundem æque multiplices: & reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.

Sint magnitudines AB, CD, æque multiplices ipsarum E, F; & detracta AG, CH, earundem E, F, æque multiplices. Dico reli- A F B
quas CB, HD, aut esse æquales eisdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Cum E
enim AB, sit multiplex ipsius E, & ablata que- C H D
que AG, ejusdem E, multiplex; erit reliqua F
GB, vel æqualis ipsi E, vel ejus multiplex; alias inæqualis, vel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod est absurdum. Sit igitur primum GB, æqualis ipsi E. Dico etiam HD, ipsi F, esse æqualem. Ponatur enim CF, æqualis ipsi F. Et quia prima AG, tam est multiplex secunda E, quam CH, tertia multiplex est quar-

ta F;

ta F; & quinta GB, æqualis est secunda E, sicut & CI, sexta æqua-
a 2. quinti. lis est quarta F; a erit AB, primæ cum quinta, ita multiplex se-
cunda E, ut HI, tertia cum sexta, multiplex est quarta F: Atqui
CD, ipsius F, erat quoque tam multiplex, quam AB, multiplex est
b 6. pro- ipsius E. Æque multiplices igitur sunt HI, CD, ipsius F. b Ideoque
æquales inter se. Quare demptæ CH, communi, remanebunt CI, HD,
æquales. Cum igitur CI, posita sit æqualis ipsi F, erit quoque HD,
eidem F, æqualis. Quod est propositum.



c 2. quinti. Sit deinde GB, multiplex ipsius E. Dico ita quoq; esse multiplicem HD, ipsius F. Posita namq; CI, ita multiplici ipsius F, ut est multiplex GB, ipsius E; c erit, ut prius AB, ita multiplex ipsius E, ut HI, multiplex est ipsius
d 6. pro- F. d Quare iterum æquales erunt HI, CD; atque adeo demptæ com-
mun. muni CH, & reliquæ CI, HD, æquales erunt: Sed CI, est ita multiplex ipsius F, ut GB, ipsius E, multiplex est, ex hypothesi. Igitur & HD, tam multiplex erit ipsius F, quam GB, ipsius E, multiplex est, quod est propositum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

Hoc quoq; ostendemus universe propos. 24. in omni genere proportionis.

Brevius totâ prop. ita demonstrabimus. Quoniâ AB, CD, sunt ipsarum E, F, æque multiplices; erunt in AB, tot magnitudines æquales ipsi E, quot sunt magnitudines in CD, æquales ipsi F. Rursus quia AG, CH, earundem E, F, æque multiplices sunt; erunt quoque in AG, tot magnitudines ipsi E, æquales, quod sunt magnitudines in CH, ipsi F, æquales. Si igitur ex æqualibus multitudinibus AB, CD, demantur multitudines æquales AG, CH; remanebunt multitudines GB, HD, æquales. Quare toties continebitur E, in GB, quoties F, continetur in HD: ac proinde si GB, æqualis sit ipsi E, erit quoq; HD, ipsi F, æqualis: Si autem GB, multiplex sit ipsius E: erit ita multiplex HD. ipsius F, ut GB, multiplex est ipsius E: quandoquidem toties E, in GB, continetur, quoties F, in HD, existit, ut ostensum est.

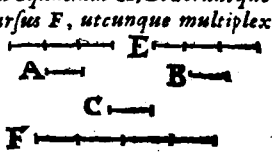
VII. THEOR. 7. PROPOS. 7.

Æquales ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

Sint duæ magnitudines A, B, æquales inter se, & tertia quævis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C, item C; vicissim ad A, & B, eandem quoque proportionem habere. Sumantur

mantur D, E, aque multiplices ipsarum aqualium A, B. a eruntque D, E. aquales inter se. Capiatur rursus F, utcunque multiplex ipsius C. Quoniam igitur D, E. aquales sunt, sit ut utraq; vel minor sit, quam F, vel aqualis, vel major, juxta quamcunq; multiplicationem ea multiplicia sumantur. Quare cum de D E, aque multiplices prima A, & B, tertia, minores sint ipsa F, multiplice secunda & quarta G. (esse enim C, instar duarum magnitudinum, &c.) vel aquales, vel majores: b erit ea proportio prima A, ad C, secundam, qua tertia B, ad C. quartam.

a 6. prop. num.



b 6. def. quinti.

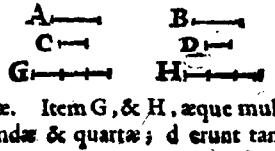
Eodem pacto ostendemus F, vel minorem esse utraque D, E. vel utriq; aqualē, vel majorē. Igitur cum F, multiplex prima & tertia C, una deficias à D, & E. aque multiplicibus secunda A, & quarta B: vel una aqualis sit, vel major: c Erit quoque ea proportio prima C, ad secundam A, qua tertia C, ad quartam B: quod est propositum. Posset brevius secunda hac pars ostendi per coroll. 4. propos. ex inversa ratione. Cum enim ostensum jam sit, esse A, ad C, ut B, ad C. erit convertendo C, ad A, ut C, ad B. Æquales ergo ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad aquales, quod erat demonstrandum.

c 6. def. quinti.

SCHOLIVM.

Perspicuum est, nihil posse in hac propos. colligi ex defin. 6. juxta expositionem Campani ac Orontii. Neque enim per demonstrationem constat, utramque multiplicem D, & E, eandem habere proportionem ad multiplicem F, sed solum, cum illæ sint æquales utramque esse vel minorem, vel æqualem, vel majorem multiplici F. Idemque cernitur in omnibus fere propositionibus, quæ per 6. definitionem propositum colligunt: Vt merito illa expositio rejecta sit à nobis.

Eodēfere modo ostendemus, æquales magnitudines ad alias inter se æquales, eandem habere rationem, si loco multiplicis F, sumantur duæ æque multiplices: quod Euclides, ob facilitatē omisit, utitur tamen eo nonnunquam in iis, quæ sequuntur, perinde ac si in hac prop. 7. esset demonstratū. Sint enim tam A, & B, inter se æquales, quam C, & D, inter se. Dico esse A, ad C, ut B, ad D. Sumptis enim E, & F, æque multiplicibus ipsarum A, & B, primæ & tertiæ. Item G, & H, æque multiplicibus ipsarum C, & D, secundæ & quartæ; d erunt tam E, &

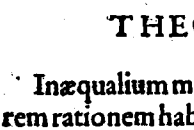


d 6. prop. num.

E. & F, inter se æquales, quam G, & H, inter se. Quare si E, multiplex primæ deficit à G, multiplice secundæ, etiam F, multiplex tertiæ, ab H, multiplice quartæ deficiet; & si æqualis, æqualis: & si
a 6. *defin. quinti.* superat, superabit. *a* Eadem ergo est proportio A, primæ ad C, secundam quæ B, tertiæ ad D, quartam. Quod est propositum.

viij. ## THEOR. 8. PROPOS. 8.

Inæqualium magnitudinum major ad eandem, majorem rationem habet, quàm minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem.



Sint magnitudines inæquales, AB, major, & C, minor. Tertia autem qualibet D. Dico proportionem AB, ad D, majorem esse proportione C, ad D. At è converso, majorem esse proportionem D, ad C, quam D, ad AB. Intelligatur enim in AB, magnitudine majore, magnitudo AE, æqualis minori C, ut sit reliqua EB. Vtraque deinde EB, AE, æqualiter multiplicetur, hac lege: ut GF, multipex ipsius EB, major quidem sit, quam D; At HG, multiplex ipsius AE, non sit minor eadem D, sed vel maior vel æqualis. In priori figura necesse fuit sumere GF, HG, triplas ipsarum EB, AE: quia dupla ipsius AE, esset minor, quam D, Loco triplarum potuissent accipi quacunque alia æque multiplices majores. In posteriori autem figura satis est, sumere ipsarum EB, AE, duplas GF, HG; quia utraq; GF, HG, major est quam D. Possent tamen pro duplis sumi quacunque alia majores æque multiplices. Quoniam igitur duæ FG, GH, æque multiplices sunt duarũ BE, EA: erit & tota FH, ita multiplex totius AB, ut HG, ipsius AE, hoc est, ipsius C, cũ æquales sint positæ C, ad AE. Capiatur quoque ipsius D, multiplex IK, quæ proxime major sit, quam HG; nempe dupla, ut in priori figura Quod si dupla major non fuerit quam HG, sumatur tripla, vel quadrupla, &c. In posteriori figura accepta est IK, ipsius D, quadrupla, quia tam dupla, quam tripla minor est, quam HG, ut quadrupla jam major est. Abscissa ergo LK, quæ æqualis sit ipsi D, non erit IL, major, quam HG, (alias IK, non esset multiplex ipsius D, proxime major quam HG: sed & IL, major quoq; esset quam HG. Quod si IK, dupla sit ipsius D, perspicuum est, IL, non esse majorem, quam HG, cum HG, posita sit non minor quam D, hoc est, quam IL,) & idcirco HG, erit vel æqualis si IL, vel major. Et quia FG, maior est posita quam D; LK, vero æqualis eidem D; erit quoq; FG, major quam LK. Cum ergo HG, non minor sit

quàm IL, ut demonstratum est, sed vel H G F
aqualis, vel major; erit tota FH, ma-
jor quàm IK. Itaque cum FH, HG, sint C A E B
aque multiplices prima AB, & tertia C; D
atque IK, multiplex ipsius D, qua instar I L K
est secunda & quarta: sit autem FH, multiplex prima, major quàm IK, multiplex secunda; At HG, multiplex tertia; non sit major quam IK, multiplex quarta, immò minor, ex hypothesi; (sumpta enim est IK, multiplex ipsius D, major quam HG,) erit major proportio AB; prima ad D, secundam, quam C, tertia ad D, quartam.

Quoniam verò è contrario IK, multiplex prima D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertia; At C, secunda & AB, quarta) major est quam HG, multiplex secunda C; At IK, multiplex tertia D, major non est, quam FH, multiplex quarta AB, immo minor, cum FH, major sit, quam IK, ut ostensum est; erit major proportio D, prima ad C, secundam, quam D, tertia ad AB, quartam: quod est propositum. Inaqualium igitur magnitudinum major ad eandem, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Recte autem animadvertit Petrus Nonius in sua Algebra de Proportione agens, per hanc propos. 9. probari non posse, angulum rectum majorem habere proportionem, ad quemvis alium angulum, quàm angulum semicirculi ad eundem illum angulum, quanquam rectus angulus major sit angulo semicirculi: quia excessus anguli recti supra angulum semicirculi, qui est angulus contingentiæ, quantumvis multiplicatus superare nequit tertium illum angulum, quod tamen in hujus propos. demonstratione requiritur. Nam FG, multiplex excessus EB, superare debet tertiam magnitudinem D, ut patuit. Neque hoc mirum cuipiam videatur. Nam angulus rectus ad angulum semicirculi non dicitur proprie habere proportionem, cum eum excedat angulo contactus, qui ejusdem naturæ non est cum utroque angulo, quod ita multiplicari non possit ut alterutrum illorum tandem excedat. Quemadmodum enim, si ad lineam unius palmi addi posset punctum, ut fieret linea uno puncto lineam unius palmi excedens, non diceretur proprie linea illi composita major, quàm linea unius palmi, propterea quod excessus est indivisibilis, & alterius naturæ. Item quemadmodum si ad figuram planam quamcũque apponeretur linea unius palmi non diceretur hæc magnitudo ex diversis magnitudinibus conflata ad figuram illam planam habere propriè proportionem majoris inæqualitatis: quod excessus non sit ejusdem naturæ cum plana illa figura; Ita quoque non habet angulus rectus pro-

prie ad angulum semicirculi proportionem majoris inæqualitatis, quippe cum angulo semicirculi adjectus sit angulus contactus, ut efficiatur angulus rectus; atque adeo rectus angulus angulum semicirculi excedat quantitate diversæ naturæ, ut dictum est. Itaque non solum eæ magnitudines proportionem proprie non habent, quarum alterutra multiplicata alteram superare nequit, ut ad defin. 5. hujus lib. diximus: sed neque eæ proprie dicentur habere proportionem, ut idem Petrus Nonius annotavit, quarum excessus diversam ab eis naturam habet, cujusmodi sunt angulus rectus, & anguli semicirculi. Adeo ut tunc solum proprie magnitudines dicantur habere proportionem inter se, quando & alterutra multiplicata alteram superare potest, & excessus earum multiplicatus superare quoque potest utramque. Fateor rem hanc esse perobscuram, & quæ vix recte intelligi possit: Verum hoc provenit ex indivisibilitate anguli contactus per lineam rectam. Hujus generis sunt alia nonnulla in rebus Geometricis, quæ verissima quidem sunt propter demonstrationem evidentem, sed alia ex parte talem inducunt difficultatem, ut ab ea non facile intellectus se expediat. Verbi gratia, Verissimum est, sphæram tangere planum in puncto, ut à Theodosio demonstratur propos. 3 lib. 1 Sed qua ratione fiat, ut hinc non sequatur, si globus continue moveatur super planum, lineam rectam describi compositam ex punctis, nemo ad hunc usque diem sic explicavit, ut omni ex parte difficultas sit sublata.

ix. ## THEOR. 9. PROPOS. 9.

Quæ ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.

Habeant primum A, & B, eandem rationem ad C: Dico A, & B, esse inter se æquales. Sit enim, si fieri potest, altera, nempe A, major, & B, minor. a *Erit igitur major proportio A, majoris ad E, quam* B, *minoris ad eandem C: quod est contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales.*

a 8. *quinti.*

A —— B ——
C ——

Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B: Dico rursus A. & B, esse æquales. Nam si altera, nempe A, esset major, & B, *minor;* b *haberet C, ad* B, *minorem, majorem proportionem, quàm ad* A, *majorem: quod est contra hypothesin. Non igitur major erit A, quam B, sed æquales. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat.*

b 8. *quinti.*

SCHOLIVM.

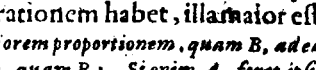
Convertit hæc propositio 9. utramque partem theorematis 7. ut manifestum est.

THEOR.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa maior est.

Habeat primum ad C, maiorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, *maiorem esse, quam* B: *Si enim* A, *foret ipsi* B, *æqualis,* a *haberent* A, *&* B, *eandem proportionem ad* C: *Si autem* A, *minor esset, quam* B, b *haberet* B, *major ad* C, *proportionem majorem, quam* A, *minor ad eandem* C, *quod est contra hypothesin. Non est igitur* A, *æqualis vel minor quam* B, *sed maior.*



a 7. quinti. b 8. quinti.

Habeat secundo C, *ad* B, *maiorem proportionem, quam ad* A. *Dico* B, *minorem esse quam* A. *Non enim æqualis erit* B, *ipsi* A: c *alioquin haberet* C, *eandem proportionem ad* A, *&* B: *quod est contra* d *hypothesin. Neq; vero* B, *maior erit quam* A, d *alias haberet* C, *ad minorem* A, *maiorem proportionem quam ad* B, *maiorem: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est* B, *quam* A, *quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.*

c 7. quinti. d 8. quinti.

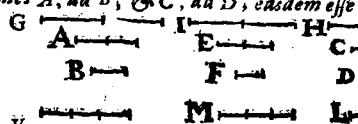
SCHOLIVM.

Hæc quoque propositio convertit utramque partem theorematis 8. ut perspicuum est.

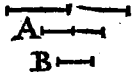
THEOR. 11. PROPOS. 11.

Quæ enim sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem.

Sint proportiones A, *ad* B, *&* C, *ad* D, *eadem proportioni* E, *ad* F. *Dico & proportiones* A, *ad* B, *&* C, *ad* D, *easdem esse inter se, secundum definitionem* 6. *hoc est, sumptis æque multiplicibus ipsarum* A, C: *Item æque multiplicibus ipsarum* B, D: *semper contingere, ut multiplices ipsarum* A, C, *à multiplicibus ipsarum* B, D, *vel una deficiant, vel una æquales sint, vel una excedant. Sumantur enim ad omnes antecedentes* A, C, E, *æque multiplices quacunque* G, H, I, *& ad omnes consequentes* B, D, F, *alia quacunque multiplices* K, L, M. *Quoniam igitur ponitur esse* A, *prima ad* B, *secundam, ut* E, *tertia ad* F, *quartam;* e *sit, ut si* G, *multiplex prima deficit à* K, *multiplice secunda, deficiat quoque* I, *multiplex tertia ab*



e 6. def. quinti.



M, multiplice quarta; Et si G, *aqualis est ipsi K, vel major, aqualis quoque sit I, ipsi M, vel major:* a *Sed (ut eodem modo ostendetur) si I, minor est, quam M, vel aqualis, vel maior est quoque H, minor quam L, vel aqualis, vel maior: propterea quod ponitur esse E, prima ad F, secundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quare si* G, *multiplex prima A, deficit à K, multiplice secunda* B, *deficiet quoque H, multiplex tertia C, ab L, multiplice quarta D. Et si* G, *aqualis est, vel maior quam K, etiam H, aqualis erit, vel maior quam L. Idemque ostendetur accidere in quibuscunq; aliis aque multiplicibus.* b *Quapropter erit* A, *prima ad* B, *secundam, ut C, tertia ad D, quartam. Qua igitur eidem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem. Quod erat ostendendum.*

a 6. def. quinti.

b 6. def. quinti.

SCHOLIVM.

Eadem ratione, Quæ eisdem sunt eædem rationes; & inter se sunt eædem. Vt si sit, ut A, ad B, ita C, ad D, sit autem E, ad F, ut A, ad B, & G, ad H, ut C, ad D: erit quoque L, ad F, ut G, ad H. Quia enim proportiones E, ad F, & C, ad D, eædem sunt proportioni A, ad B, *c* erit ut E, ad F, ita C, ad D. Rursus quia proportiones E, ad F. & G, ad H, eædem sunt proportioni C, ad D, *d* erit quoque ut E, ad F, ita G, ad H.

A, 3. B, 2. C, 6. D, 4. E, 9. F, 6. G, 12. H, 8.

c 11. quinti.

d 11. quinti.

Rursus, si sint proportiones A, ad B: C, ad D: & E, ad F, eædem inter se: sit autem ut A, ad B, ita G, ad H: & ut C, ad D, ita I, ad K: & ut E, ad F, ita L, ad M: erunt quoque proportiones G, ad H: I, ad K: & L, ad M, eædem inter se. Nam ut proxime in quatuor proportionibus ostensum est, ut G, ad H, ita est I, ad K: propterea quod hæ proportiones similes sunt proportionibus A, ad B, & C, ad D. Eodē modo erit, ut I, ad K, ita L, ad M: cum proportiones I, ad K, & L, ad M, eædem sint proportionibus C, ad D, & E, ad F, quæ æquales sunt. Item erit, ut G, ad H, ita L, ad M: cum hæ proportiones eædem sint proportionibus A, ad B, & E, ad F, quæ æquales ponuntur. Eadem ratio est de pluribus.

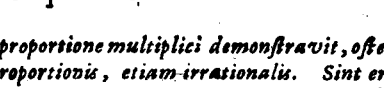
A, 3. B, 2. C, 6. D, 4. E, 9. F, 6. G, 12. H, 8. K. 12. L, 30. M, 20.

xij. THEOR. 12. PROPOS. 12.

Si sint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum se habuerit una antecedentium ad unam

nam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

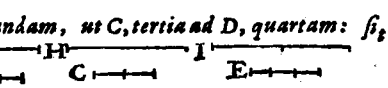
Quod in propos. 1. de proportione multiplici demonstravit, ostendit hic de omni genere proportionis, etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B; C, D; E, F, proportionales, hoc est, sit A, ad B, ut C, ad D, & E, ad F. Dico ut est una antecedentium ad unam consequentium, nimirum A, ad B, ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, aque multiplicibus antecedentium; & K, L, M, aque multiplicibus consequentium, a *erunt* a 1. *quinti. omnes G, H, I, simul omnium A, C, E, simul ita multiplices, ut una unius, nempe ut G, ipsius A: & omnes, K, L, M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, ut una unius, nimirum ut K, ipsius B. Quoniam vero ponitur esse A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam, & ut alia E, tertia ad aliam F, quartam;* b *sit ut si G, multiplex prima deficit à K, multiplice secunda,* b 6. *def. deficiat quoq; H, multiplex tertia ab L, multiplice quarta, & I, quinti. ab M: Et si G. aqualis est ipsi K, vel maior, aqualis quoq; sit H, ipsi L, & I, ipsi M, vel maior. Ac proinde si G, minor est, vel aqualis, vel maior quam K, & omnes G, H, I, simul omnibus K, L, M, simul minores sint, vel aquales vel majores* c *Quocirca ut* c 6 *def. est A, prima ad B, secundam, ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quinti. quartam. Si sint itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonstrandum erit.*



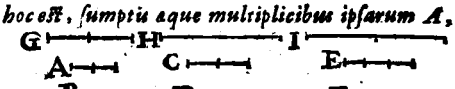
THEOR. 13. PROPOS. 13. xiij.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam majorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoq; ad secundam majorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

Sit prima A, ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam: sit autem proportio C, tertia ad D, quartam major, quam E, quinta ad F, sextam. Dico & proportionem A, prima ad B, secundam esse majorem quam E, quinta ad F, sextam, secundum



definitionem 8. hoc eſt, ſumptis æque multiplicibus ipſarum A, F:



Item æq; multiplicibus ipſarum B, F, contingere poſſe, ut multiplex ipſius A, excedat multiplicem ipſius B, at multiplex ipſius E, multiplicem ipſius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium: Et K, L, M, æque multiplicibus conſequentium, cum ſit A. prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam: a *ſit ut ſi G, multiplex prima exceſſerit K, multiplicem ſecundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipſarum L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipſam L,* b *non neceſſario I, excedit ipſam M, ſed æqualis aliquando erit, vel minor: quod maior ponatur proportio C, prima ad D, ſecundam, quam E, tertia ad F, quartam. Igitur ſi G, excedit K, non neceſſario I, excedit M.* c *Maior eſt ergò proportio A, primæ ad B, ſecundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Quam ob rem ſi prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod oſtendendũ erat.*

a 6. def. quinti.
b 8. def. quinti.
c 8. def. quinti.

SCHOLIVM.

Quod ſi proportio C, tertiæ ad D, quartam minor fuerit, quam E, quintæ ad F, ſextam: erit quoq; proportio A, primæ ad B, ſecundam minor quam E, quintæ ad F, ſextam. Si enim proportio C. ad D, minor eſt quam E, ad F, hoc eſt, proportio E, primæ ad F, ſecundam maior quam C, tertiæ ad D, quartam: *d* fit ut ſi I, excedit ipſam M, non neceſſario H, excedat ipſam L, ſed aliquando deficiat, vel ei æqualis ſit. *e* Sed ſi H, deficit ab L, vel æqualis eſt, etiam G, deficiet à K, vel ei erit æqualis, eo quod ponatur C, prima ad D, ſecundam, ut A, tertia ad B, quartam. Quare ſi I, excedit ipſam M, non neceſſario G, excedet ipſam K, *f* atq; idcirco major erit proportio E, primæ ad F, ſecundam, quam tertiæ ad B, quartam, hoc eſt, proportio A. ad B, minor erit quam E, ad F. Quod eſt propoſitum.

d 8. def. quinti.
e 6. def. quinti.
f 8. def. quinti.

Eodem modo. Si prima ad ſecundam, majorem habuerit rationẽ, quam tertia ad quartam: tertia autem ad quartam, majorem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoq; multo magis ad ſecundã, majorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

Quod ſi prima ad ſecundam, minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam, minorem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque multo magis ad ſecundam, minorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

XIV. Si prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, quam

quam tertia ad quartam: Prima vero quam tertia maior fuerit, erit & ſecunda major quam quarta. Quod ſi prima fuerit æqualis tertiæ, erit & ſecunda æqualis quartæ: Si vero minor, & minor erit.

Sit enim A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam. Dico ſi A, major fuerit quàm C, fore quoq; B, majorem quàm D. Quod ſi A, æqualis fuerit ipſi C, æqualem quoq; eſſe B, ipſi D: Si denique A, minor fuerit quam G, minorem quoq; eſſe B, ipſa D. Sit primum A, maior quam C, a *erit q; propterea proportio A, maioris ad B, maior quàm C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecundam, ut A, tertia ad B, quartam; Propoſitio autem A, tertia ad B, C quartam, maior eſt, ut oſtendimus, quam C, quinta ad B, ſextam:* b *Maior quoq; erit proportio G, prima ad D, ſecundam, quam C, quinta ad B, ſextam.* c *Minor eſt ergo D, quam B: Ideoq; B, maior erit quàm D. Quod eſt propoſitum.*

Sit deinde A, æqualis ipſi C, d *erit q; idcirco A, ad B, ut C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eadẽ ſunt proportioni A, ad B,* e *erunt quoq; inter ſe eadem proportiones C, ad D, & C, ad B:* f *Ideoq; æquales erunt B, & D. Quod eſt propoſitum.*

Sit tertio A, minor quam C, g *erit que ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quam A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecundam, ut A, tertia ad B, quartam: eſt autem proportio A, tertia ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, ſextam:* h *Minor quoque erit proportio C, prima ad D, ſecundam, quam C, quinta ad B, ſextam:* i *Ideoque B, minor erit, quam D, quod eſt propoſitum. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum.*

a 8. *quinti*

b 13 *quinti.*

c 10. *quinti*

d 7. *quinti.*

e 11. *quinti.*

f 9. *quinti*

g 8. *quinti.*

h 13. *quinti.*

i 10. *quinti.*

SCHOLIVM.

Quod ſi ſecunda major ſit, vel æqualis, vel minor, quam quarta; erit quoque eadem ratione prima major, vel æqualis, vel minor, quam tertia. Sit enim primum B, major quam D, ut in prima figura. Dico & A, majorem eſſe, quam C. Cum enim B, major ſit, quam D; k erit major proportio C, ad D, quam C, ad B. Quia igitur eſt, ut prima A, ad ſecundam B, ita tertia C, ad quartam D. Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam oſtenſa eſt maior, quam C, quinta ad B, ſextam: *l* erit quoq; proportio A, prima ad B, ſecundam major, quam C, quinta ad B, ſextam: *m* ac proinde A, major erit, quam C, quod eſt propoſitum.

k 3. *quinti.*

l 13. *quinti.*

m 10. *quinti.*

Deinde ſit B, æqualis ipſi D, ut in ſecunda figura. Dico & A, ipſi

ipsi C, esse æqualem. Cum enim B, ipsi D, sit æqualis; erit C, ad B, ut C, ad D: Est autem quoque A, ad B, ut C, ad D. *a* Igitur erit
a 11. *quinti.* quoq; ita A, ad B, ut C, ad B; *b* propterea A, ipsi C, æqualis erit, quod est propositum.

b 9. *quinti.* TERTIO sit B, minor quam D, ut in tertia figura. Dico & A, minorem esse, quam C. Cum enim B, minor sit quam D, *c* erit minor
c 8. *quinti.* proportio C, ad D, quam C, ad B. Quia igitur est, ut A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D. quartam: Proportio autem C. tertiæ
d 13. *quinti.* ad D, quartam ostensa est minor, quàm C, quintæ ad B, sextã, *d* erit quoq; proportio A, primæ ad B, secundam minor, quàm C, quintæ
e 10. *quinti.* ad B, sextam. *e* Igitur major erit C. quàm A, ac proinde A, minor erit, quam C, quod est propositum.

BREVIVS. Si B, major est, quam D, & A, dicatur non major,
f 14. *quinti.* quam C, sed vel minor, vel æqualis, *f* erit quoque B, minor, quam D, vel æqualis, quod est contra hypothesin. Eademq; ratio est in aliis casibus.

VEL sic. Si est A, ad B, ut C. ad D; erit convertendo B, ad A,
g 14. *quinti.* ut D, ad C. Ergo si B, major est, vel minor, vel æqualis ipsi D; *g* erit quoque A, major vel minor, vel æqualis ipsi C.

NON demonstravit autem Euclides, si prima major est, vel æqualis, vel minor, quàm secunda, tertiam quoque majorem esse vel æqualem, vel minorem, quam quartam; (quo tamen argumentandi modo plerique Geometrarum tum veterum, tum recentiorum utuntur) quia id perspicuum est ob similitudinem proportionum. Hinc enim fit, si utraque est proportio majoris inæqualitatis, utramque antecedentem magnitudinem, id est, primam ac tertiam, majorẽ esse utraq; magnitudine consequente, hoc est, secunda ac quarta: Si vero utraq; proportio est æqualitatis, utramq; magnitudinem antecedentem utriq; consequenti æqualem esse. Si deniq; utraq; proportio est minoris inæqualitatis, utramq; antecedentem magnitudinem utraq; consequente esse minorem.

VERBI gratia, si est ut A, ad B, ita C, ad D; erit utraq; proportio vel majoris inæqualitatis, vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Quocirca si A, prima major est quã B, secunda, erit & C, tertia major quàm D, quarta; Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. Quod est propositum. Quod tamẽ Geometrice ostendemus cum Federico Commandino, licet id non sit necessarium, ad propos. 16. hujus lib.

XV. THEOR. 15. PROPOS. 15.

Partes cum pariter multiplicibus in eadem sint ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

Sint partium A, & B, æque multiplices C D, & E F. Dico ita esse

esse CD, *ad* EF, *vt* A, *ad* B. *Cum enim* CD, *&* EF, *sint æque multiplices ipsarum* A, *&* B, *continebitur* A, *toties in* CD, *quoties* B, *in* EF. *Diuidatur ergo* CD, *in partes* CH, GH, HD. *æquales ipsi* A, *&* EF, *in partes* EI, IK, KF *æquales ipsi* B, a *eritque* CG, *ad* EI, *vt* A, *ad* B, *quod* CG, *&* A, *æquales inter se sint,* C G H D E I K F *nec non* EI, *&* B. *Eadem ratio-* A B *ne erit* GH, *ad* IK, *&* HD, *ad* KF, *vt* A. *ad* B, b *ideoque* CG, GH, HD, *ad* EI, IK, KF, *eandem habebunt proportionem. Quocirca vt* CG, *ad* EI, *hoc est, vt* A, *ad* B, c *ita erit* CD, *ad* EF, *nempe omnes* CG, GH, HD, *simul ad omnes* EI, IK, KF, *simul quod est propositum. Partes itaque cum pariter multiplicitus, &c. Quod erat demonstrandum.*

a 7. *quinti.*
b 8. *quinti.*
c 12. *quint.*

THEOR. 16. PROPOS. 16. xvj.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.

Hic demonstratur Alterna, *siue* Permutata *proportio, seu ratio, quæ defin.* 12. *explicata est. Sit enim A, ad* B, *vt* C, *ad* D. *Dico vicissim, seu permutando, esse quoque* A, *ad* C, *vt* B. *ad* D. *Sumantur enim ipsarum A,* B, *primæ ac secundæ, æque multiplices* EF. *Item ipsarum* CD, *tertiæ & quartæ æque multiplices* G, H; d *eritque* E, *ad* F, *vt* A, *ad* B, *cum* E, *&* F, *sint pariter multiplices partium A, &* B. *Eadem ratione erit:* G, *ad* H. *vt* C, *ad* D. *Cum igitur proportiones* E, *ad* F, *&* C, *ad* D, *sint eadem proportioni* A, *ad* B; *erunt & ipsæ* e *inter se eadem. Rursus quia propor-* E *tiones* E, *ad* F, *&* G, *ad* H, *eadem sunt* G *proportioni* C, *ad* D; f *erunt & ipsæ eadem inter se; hoc est, vt est* E, *prima* A C *ad* F, *secundam, ita erit* G, *tertia ad* H, *quartam.* g *Quare si* E, *prima maior est quam* G, *tertia, vel æqualis, vel minor, erit quoque* F, g *secunda maior quam* H, *quarta, vel æqualis, vel minor, in quacũq; multiplicatione accepta sint æque multiplicia* E, F, *&* *æque multiplicia* G, H. h *Est igitur A, prima ad* C *secundam, vt* B, *tertia ad* D, h *quartam (cum* E, *&* F, *sint æque multiplices primæ A, ac tertiæ* B; *At* G, *&* H, *æque multiplices* C. *secundæ, &* D, *quartæ, & illæ ab his vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant, &c.) quod est propositum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt. Quod ostendendum erat.*

d 15. *quinti.*
e 11. *quinti.*
f 11. *quinti.*
g 14. *quinti.*
h 6. *defin. quinti.*

SCHOLIVM.

Porro demonstratio huius propos. locum solum habet quando quatuor magnitudines sunt eiusdẽ generis. Nam si duæ A, B, essent,

vnius generis, & duæ C, D, alterius; essent quoque multiplices E, F, vnius generis, in quo videlicet sunt A, B, & multiplices G, H, alterius; in quo nimirum existunt C, D. Quare non posset dici E, maior quam G, vel æqualis, vel minor; ac proinde nihil colligeretur ex defin. F. huius lib. Vsurpanda igitur erit permutata proportio in solis quatuor magnitudinibus eiusdem generis. Quod nonnulli Philosophi non aduertentes in graues errores incidunt, cum eam adhibent in rebus diuersorum generum.

Ex hoc & illud demonstrabitur, quod ad finem scholij propos. 14. ex ipsa similitudine proportionem ostendimus, recepimusq; nos demonstraturos hoc loco, videlicet.

Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima vero, quam secunda, maior fuerit; Erit & tertia maior; quam quarta: Et si æqualis, æqualis: & si minor, minor.

Quanquam id, quod proponitur, per se notum sit, vt ad propos. 14. diximus, demonstrabimus tamen illud cum Federico Commandino, hoc modo. Sit vt A, prima ad B, secundam, ita C. tertia ad D. quartam. Dico, si A, prima maior est, quam B, secunda; & C, tertiam maiorem esse quarta D. & si est æqualis, æqualē, & si minor, minorē. *a* Erit enim permutando, vt A, ad C. ita B, ad D. *b* Quare si A, prima maior est quã B, tertia, erit & C, secunda maior, quam D, quarta: & si æqualis, æqualis, & si minor, minor. Quod est propositum.

a 16. *quinti.*
b 14. *quinti.*

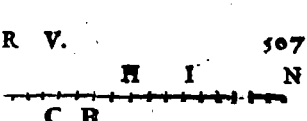
Sed & hæc demonstratio locum dunta xat habet, cum quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Quare satius est illud ex natura proportionum monstrare, vt à nobis ad propos. 14. factum est. Ita enim verum erit semper id, quod proponitur, etiamsi magnitudines A, B, in vno genere, & C, D, in alio contineantur: imo vero licet A, B, sint quantitates continuæ, & C, D, numeri, &c.

xvij. THEOR. 17. PROPOS. 17.

Si compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.

Hoc loco demonstrat Euclides Diuisionem rationis, quam defin. 15. explicauit. Sint enim compositæ magnitudines AB, CB, & DE, FE, proportionales, hoc est, sit AB, ad CB, vt DE, ad FE. Dico & diuisas eandem proportionales esse, hoc est, vt est AC, ad CB, ita esse DF, ad FE. in eo sensu, quem definitione 6. exposuimus. Ipsarum enim AC, CB, DF, FE, æque multiplices capiantur eodem ordine GH, HI, KL, LM,

LM; c erit & GI, ita multiplex ipsius AB, vt est GH, ipsius G AC, *hoc est, vt KL, ipsius* DF. A *Sed vt est multiplex KL, ipsius* DF, a *ita quoque multiplex est KM, ipsius* DE. *Æque* K



c 1. *quinti.*

a 1. *quinti.*

multiplices ergo sunt GI, KM, *ipsarum* AB, DE. *Capiantur rursus* IN, MO, *æque multiplices ipsarum* CB, FE. *Quoniam igitur sic est multiplex* HI, *prima secunda* CB, *vt* LM, *tertia quarta* FE: *Item tam est multiplex* IN, *quinta secunda* CB, *quàm multiplex est* MO, *sexta quarta* FE: b *erit & HN, sic multiplex secunda* CB, *vt* LO, *multiplex est quarta* FE. *Itaque cum sit* AB, *prima ad* CB, *secundam, vt* DE, *tertia ad* FE, *quartam: sumptæque sint æque multiplices* GI, KM, *primæ ac tertiæ* AB, DE: *Item secundæ ac quartæ* CB, FE, *æque multiplices* HN, LO, c *sit vt si* GI, *multiplex primæ* AB, *deficit ab* HN, c *multiplice secundæ* CB, *etiam* KM, *multiplex tertiæ* DE, *deficiat ab* LO, *multiplice quartæ* FE, *& si æqualis, æqualis: & si excedit, excedat. Quod si deficiat tam* GI, *ab* HN, *quam* KM, *ab* LO, *ablatis communibus* HI, LM, *deficiet quoque* GH, *ab* IN, *&* KL, *ab* MO. *Et si* GI, *æqualis fuerit ipsi* HN, *&* KM, *ipsi* LO, *ablatis communibus* HI, LM, *erit &* GH, *æqualis ipsi* IN, *&* KL, *ipsi* MO. *Et si denique* GI, *excesserit ipsam* HN, *&* KM, *ipsam* LO, *ablatis communibus* HI, LM, *excedet quoque* GH, *ipsam* IN, *&* KL, *ipsam* MO. *Quam ob rem cum* HG, KL, *sumptæ sint æque multiplices primæ* AC, *& tertiæ* DF: *Item* IN, MO, *æque multiplices secundæ* CB, *& quartæ* FE, *ostensum sit,* (*in quacunque multiplicatione illæ æque multiplices fuerint acceptæ*) *æque multiplices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus secundæ & quartæ vel vna deficere, vel æquales esse, vel vna excedere;* d *Erit* AC, *prima ad* CB, *secundam, vt* DE, *tertia ad* FE, *quartam, quod est propositum. Si compositæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c Quod ostendendum erat.*

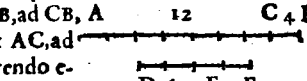
b 2. *quinti.*

c 6. *defin. quinti.*

d 6. *defin. quinti.*

SCHOLIVM.

Ex his facilè demonstrabimꝰ modũ illum argumẽtandi, quem definitione 15. Diuisionem rationis conuersam diximus: Hoc est, si est, vt AB, ad CB, ita DE, ad EF: esse quoque vt CB ad AC, ita FE, ad DF, quod ita patet. Quoniam est vt AB, ad CB, A 12 C 4 B ita DE, ad FE; e erit diuidendo, vt AC, ad CB, ita DE, ad FE Igitur conuertendo erit quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.



e 17. *quinti.*

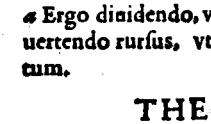
Nullo etiam negotio demonstrabitur modus ille argumentandi, quem ad eãdem defin. 15. Diuisionem rationis contrariam appellaui-

lauimus, & in quo antecedens magnitudo minor est quam consequens non autem maior, vt in Diuisione rationis, quam Euclides definiuit, & ea, quam proxime demonstrauimus. Sit enim vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico esse quoque per Diuisionem rationis contrariam, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim est, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE: erit conuertendo vt AB, ad AC, ita DE, ad DF: a Ergo dividendo, vt CB. ad AC, ita FE, ad DF: Ac proinde conuertendo rursus, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod est propositum.

a 17. quinti.

xviij. THEOR. 18. PROPOS. 18.

Si diuisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoque compositæ proportionales erunt.



Demonstrat hoc loco Euclides compositionem rationis, quam definitione 14. descripsit. Sint enim diuisæ magnitudines AB, BC, *&* DE, EF, *proportionales, hoc est,* AB, *ad* BC, *vt* DE, *ad* EF. *Dico & compositas proportionales esse, hoc est, vt est* AC, *ad* BC, *ita esse* DF, *ad* EF. *Si enim non est, vt* AC, *ad* BC, *ita* DF, *ad* EF, *habebit* DF, *ad aliquam magnitudinem minorem ipsa* EF, *vel maiorem, eandem proportionem, quam* AC, *ad* BC. *Habeat primum* DF, *ad* GF, *minorem ipsa* EF, *si fieri potest, eandem proportionem, quam* AC, *ad* BC. *Quoniam igitur est, vt* AC, *ad* BC, *ita* DF, *ad* GF: b *Erit diuidendo quoque, vt* AB, *ad* BC, *ita* DG, *ad* GF: *Sed vt* AB, *ad* BC, *ita posita quoque est,* DE, *ad* EF. c *Igitur erit etiam, vt* DG, *prima ad* GF, *secundam, ita* DE, *tertia ad* EF, *quartam. Cum ergo* DG, *prima maior sit, quam* DE, *tertia,* d *erit quoque* GF, *secunda maior quam* EF. *quarta, pars quam totum. Quod est absurdum.*

b 17. quinti.
c 11. quinti.
d 14. quinti.

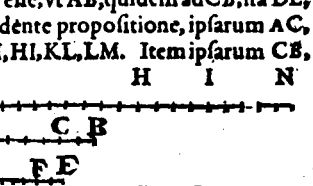
Habeat deinde si fieri potest, DF, *ad* HF, *maiorem ipsa* EF, *eandem proportionem, quam* AC *ad* BC. *Quoniam igitur est, vt* AC, *ad* BC, *ita* DF, *ad* HF: e *erit diuidendo quoque vt* AB, *ad* BC, *ita* DH, *ad* HE. *Sed vt* AB, *ad* BC, *ita posita etiam est* DE, *ad* EF. f *Igitur erit quoque, vt* DH, *prima ad* HF, *secundam, ita* DE, *tertia, ad* EF, *quartam. Cum ergo* DH, *prima minor sit quam* DE, *tertia erit quoque* HF, *secunda minor, quam* EF, *quarta, totum quam pars, quod est absurdum. Non igitur habebit* DF, *ad minorem ipsa* EF, *aut ad maiorem, eandem proportionem, quam* AC, *habet ad* BC. *Ergo* DF, *ad ipsam* EF, *erit, vt* AC, *ad* BC, *quod est propositum. Itaq; si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.*

e 17. quinti.
f 11. quinti.

SCHOLIVM.

Hanc propositionem demonstrant nonnulli cum Campano eadem ferme ratione, qua antecedentem propositionem Euclides demon-

monſtrauit hoc, hoc videlicet modo. Sint diuiſæ magnitudines AC, CB, DF, FE, proportionales, hoc eſt, AC, ad CB: vt DF, ad FE. Dico eas etiam compoſitas proportionales eſſe, vt AB, quidem ad CB, ita DE, ad FE. Sumãtur enim, vt in antecedente propoſitione, ipſarum AC, CB, DF. FE, æque multiplices GH, HI, KL, LM. Item ipſarum CB, FE, aliæ æque multiplices IN, MO, *a* eruntque rurſus GI, GK, KM, ipſarum AB, DE, æque multiplices. *b* Item HN, LO, ipſarum CB, FE, vt in præce-denti Theoremate oſtenſum eſt. Quoniam vero ponitur eſſe AC, prima ad CB, ſecundam, vt DF, tertia FE, quartam, ſumptæque ſunt, GK, KL, æque multiplices primæ ac tertiæ AC, DF. Item ſecundæ ac quartæ CB, FE, æque multiplices IN, MO, *c* fit, vt ſi GH, multiplex primæ AC, deficit ab IN, multiplice ſecundæ CB, etiam KL, multiplex tertiæ DF, deficiat ab MO, multiplice quartæ FE, & ſi æqualis, æqualis: & ſi excedit, excedat. Quod ſi deficiat tam GH, ab IN, quam KL, ab MO, additis communibus HI, LM, deficiet quoque GI, ab HN, & KM, ab LO. Et ſi GH, æqualis fuerit ipſi IN, & KL, ipſi MO: additis communibus HI, LM, erit & GI, ipſi HN, æqualis & KM, ipſi LO. Et denique ſi GH, exceſſerit ipſam IN, & KL, ipſam MO, additis communibus HI, LM, excedet quoque GI, ipſam HN, & KM, ipſa LO. Quoniã ergo ſi GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice ſecũdæ CB, etiã KM, multiplex tertiæ DE, deficit ab LO, multiplice quartæ FE, & ſi æqualis, æqualis, & ſi excedit, excedit: *d* erit AB, prima ad CB, ſecundã vt DE, tertia ad FE, quartam. Quod eſt propoſitum. Itaque ſi diuiſæ magnitudines ſint proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.



a 1. *quinti.*

b 2. *quinti.*

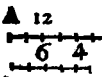
c 6. *defin. quinti.*

d 6. *defin. quinti.*

Verum hæc demonſtratio non recte colligit propoſitum ex defin. 6. propterea quod HN, LO, non ſunt ita multiplices ipſarum CB, FE, vt multiplices acceptæ ſunt IN, MO, earundem CB, FE. Vnde merito quis dubitare poſſet, an ſecundum quamcunque multiplicationem, æque multiplices ſeruent eam conditionem defectus, æqualitatis, atque exceſſus, quam Euclides in 6. defin. poſtulauit; quãdoquidem in hac demonſtratione liberum non eſt aſſumere ipſarũ CB, FE, quaſcunque æque multiplices, ſed tales duntaxat, quales conſurgunt ex HI, IN, & ex LM, MO, multiplicibus acceptis. Id quod in antecedentis propoſitionis demonſtratione obiici non poteſt: quippe cum IN, MO, ſumptæ ſint ipſarum CB, FE, æque multiplices qualeſcunque, ipſæque eædem remanent æque multiplices earundem CB, FE, in diuiſa proportionalitate. Quam ob rem præferenda eſt Euclidis demonſtratio huic demonſtrationi Campani. Libuit autem eam quoque explicare, ne eam ſtudioſus Lector, relicta illa

cta illa Euclidis, arriperet, vt bonam: præsertim cum ostensiua sit, illa vero Euclidis ducat nos ad id, quod fieri non potest.

Hinc facile etiam confirmabimus duos illos modos argumentandi, quos ad defin 14. descripsimus. Priorem diximus compositionem rationis conuersam. Sit enim vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis conuersam, esse quoque vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quoniam enim est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit conuertendo, vt BC, ad BD, ita EF, ad DE. a Igitur & componendo erit, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE, quod est propositum.



a 18. quinti.

Posteriorem modum vocauimus compositionem rationis contrariam. Sit ergo rursus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam, esse quoque vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quoniam enim est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE. b Igitur & componendo erit, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE: ac proinde conuertendo rursus erit, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

b 18. quinti.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

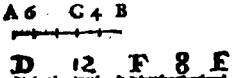
Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, se habebit.

Quod in propos. 5. demonstratum est de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonstratur. Sit enim tota AB, *ad totam* CD, *vt ablata* AE, *ad ablatam* CF. *Dico & reliquam* EB, *esse ad reliquam* FD, *vt est tota* AB, *ad totam* CD. *Cum enim sit* AB, *ad* CD, *vt* AE, *ad* CF, *erit & permutando* AB, *ad* AE, *vt* CD, *ad* CF. d *Diuidendo ergo erit* EB, *ad* AE, *vt* FD, *ad* CF. e *Quare permutando rursus erit* EB, *ad* FD, *vt* AE, *ad* CF, *hoc est, vt tota* AB, *ad totam* CD, *cum posita sit* AB, *ad* CD, *vt* AE, *ad* CF. *Si igitur quemadmodum totum ad totum &c. Quod demonstrandum erat.*

c 16. quinti.
d 17. quinti.
e 16. quinti.

COROLLARIVM.

Hinc facile demonstrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui sumitur à conuersione rationis, iuxta 16. defin.



Sit enim, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per conuersionem rationis esse quoque, vt AB, ad

AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. a erit quoque diuidendo AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur & conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: b ac propterea componendo quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum. a 17. quinti. b 18. quinti.

SCHOLIVM.

Omnes Euclidis interpretes conuersionem rationis demonstrant hac ratione. Quoniam est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; c erit permutando, vt tota AB, ad totam DE, ita CB, ablata ad ablatam FE. d Igitur vt tota AB, ad totam DE, ita erit quoq; reliqua AC, ad reliquam DF. Et proinde permutãdo rursus, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum. c 16. quinti. d 19. quinti.

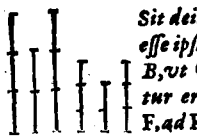
Sed quis non videt, hanc demonstrationem conuenire solum magnitudinibus eiusdem generis, cum in ea vsurpetur alterna, siue permutata proportio, quæ vim tãtum habet in eiusdẽ generis magnitudinibus, vt & in defin. 12. & in propos 19 monuimus? Quare cum Euclides & alij Geometræ modum hunc argumentandi à conuersione rationis adhibeant in omnibus magnitudinibus, etiam non eiusdem generis, reiecta hac communi interpretum demonstratione, nostram aliam excogitauimus, quæ omnibus magnitudinibus congruit. Ea enim locum habet, etiamsi priores duæ quantitates AB, CB, sint vnius generis nimirum lineæ, posteriores vero duæ DE, FE, alterius generis, nimirum vel superficies, vel anguli, vel corpora, vel denique numeri: propterea quod in ea non assumpta fuit alterna, siue permutata proportio.

THEOR. 20. PROPOS. 20. xx.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quam tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

Sint tres magnitudines A, B, C, *& totidem* D, E, F, *sitque* A, *ad* B, *vt* D, *ad* E; *&* B, *ad* C, *vt* E, *ad* F, *sit autem primum* A, *prima maior quam* C, *tertia. Dico &* D, *quartam esse maiorem* F, *sexta. Cum enim* A, *maior sit quam* C, *c erit maior proportio* A, *ad* B, *quam* C, *ad* B. *Est autem vt* A, *ad* B, *ita* D, *ad* E. *d Maior igitur proportio quoque erit* D, *ad* E, *quam* C, *ad* B. *At vt* C, *ad* B, *ita est* F, *ad* E. (*Cum enim sit* B, *ad* C, *vt* E, *ad* F, *erit conuertendo, vt* C, *ad* B, *ita* F, *ad* E:) *Maior igitur quoq; proportio erit* D, *ad* E, *quam* F, *ad* E, *e Quare* D, *maior erit, quam* F. *Quod est propositum.* c 8. quinti. d 13. quinti. e 10. quinti.

Sit



a 7. quinti. b 11. quint. c 9. quinti.

Sit deinde A, aqualis ipſi C. Dico & D, aqualem eſſe ipſi F. Cum enim A, ſit ipſi C, aqualis, a *erit A, ad B, vt C, ad B. Eſt autem vt A, ad B, ita* D, *ad E,* b *Igitur erit & D, ad E, vt C, ad B: At vt C, ad B, ita eſt F, ad E, per inuerſam rationem, vti prius. Quare erit quoq; D, ad E, vt F ad E;* c *Ideoq; aquales erunt D, & F. Quod eſt propoſitum.*

d 8. quinti. e 13. quinti. f 10. quinti.

Sit tertio A, minor quam C. Dico & D, minorem eſſe, quam F. Cum enim A, minor ſit quam C, d *erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Sed vt A, ad B, ita eſt D, ad E.* e *Minor ergo quoque proportio eſt D, ad E, quam C, ad B. Eſt autem conuertendo, vt prius, vt C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor eſt quoque proportio D, ad E, quam F, ad E,* f *propterea que D, minor erit, quam F. Quod eſt propoſitum. Si ſint itaque tres magnitudines, & alia ipſis aquales numero, &c.*

SCHOLIVM.

Porro propoſitione 22. oſtendet Euclides, A, & D, magnitudines non ſolum eſſe maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & E, vt hic demonſtrauit, ſed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem demonſtrare non poterat, niſi prius theorema hoc oſtendiſſet, vt ex eadem propoſitione 22. erit perſpicuum.

xxj. ## THEOR. 21. PROPOS. 21.

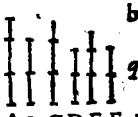
Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam ſexta maior. Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quara æqualis ſextæ: ſin illa minor, hæc quoque minor erit.

g 8. quinti. h 13. quint.

Sint tres magnitudines A, B, C; & totidem D, E, F, quæ bina, & in eadem ratione ſumantur; ſitque earum proportio perturbata, hoc eſt, ſit vt A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E; Sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam eſſe maiorem ſexta F. Cum enim A, maior ſit quã C, g *erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B: Eſt autem vt A, ad B, ita E, ad F,* h *Maior ergo quoq; proportio eſt E, ad F, quã C, ad B. Quoniã vero vt B, ad C, ita eſt D, ad E, erit*

E, erit conuertendo vt C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D, a Ideoq; maior erit D, quam F. Quod est propositum. a 10. quinti.

Sit deinde A, ipsi C, aqualis. Dico D, quoque ipsi F, esse aqualem. Cum enim A, sit aqualis ipsi, C, b erit A, ad B, vt C, ad B: Sed vt A, ad B, ita est E, ad F, c Igitur erit vt C, ad B, ita E, ad F: Est autem ex inuersa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D: velut prius. Igitur erit quoque vt E, ad F; ita E, ad D; d atque idcirco D, ipsi F, aqualis erit. Quod est propositum.



b 7. quint. c 11. quinti. d 9. quint.

Sit tertio A, minor, quam C. Dico & D, minorem esse quam F. Cum enim A, sit minor quam C, e erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Vt autem A, ad B, ita est E, ad F. Minor est ergo proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero, vt ante, ex inuersa ratione, est vt C, ad B, ita E, ad D, erit quoq; minor proportio E, ad F, quam E, ad D; g ac propterea, D, minor erit quam F, quod et propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & alia ipsis aquales numero n, &c. Quod ostendendum erat.

e 8. quinti f 13. quint. g 10. quinti.

SCHOLIVM.

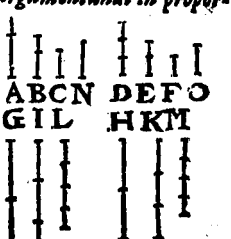
Cæterum propos. 23. ostendet Euclides duas magnitudines A, & D, non solum esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & F, sed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem sine auxilio huius theorematis demonstrare non poterat, vt ex propos. illa 23. patebit.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

xxij.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Iam hic demonstrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex aqualitate, quando proportio est ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C, & alia tres D, E, F: sitq; A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex aqualitate esse A, ad C, vt D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, D, aque multiplicibus G, H: Item ipsarum B, E, aque multiplicibus I, K: Item ipsarum C, F, aque multiplicibus L, M; cum sit A, prima ad B, secundam, vt D,



a 4. quinti.

b 4. quinti.

tertia ad E, quartam, a erit quoque G, multiplex prima A, ad I, multiplicem secunda B, vt H, multiplex tertia D, ad K, multiplicem quarta E. Eadem ratione cum sit B, prima ad C, secundam, vt E, tertia ad F, quartam: b erit I, multiplex prima B, ad L, multiplicem secunda C, vt K, multiplex tertia E, ad M, multiplicem quarta F. Quoniam igitur sunt tres magnitudines, G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione sumuntur; c sit vt si G, prima superat tertiam L, superet necessario quoque H, quarta sextam M; Et si æqualis, æqualis; Et si deficit, deficiat Itaque cum G, H, æque multiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiant vna ab L, M, æque multiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vna æquales sint, vel vna excedant: in quacunque multiplicatione sumpta sint ea multiplicia: d erit A, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad F, quartam. Quod est propositum.

c 10. quinti.

d 6. defin. quinti.

Deinde sint plures magnitudines tribus, ita vt sit etiam C, ad N, vt F, ad O. Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D. ad O. Cum enim iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt D, ad F: ponatur autem C, ad N, vt F, ad O, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione sumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, rursus erit, vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor; sicut id in quatuor demonstratum fuit per tres; Et sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

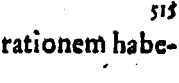
SCHOLIVM.

CÆTERVM non videtur hoc loco dissimulandum Theorema quoddam antiquis Mathematicis valde familiare, quanquam à nemine, quod sciam, sit adhuc demonstratum. Id autem eiusmodi est.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Habebunt etiam æque multiplices primæ ac tertiæ, ad secundam & quartam eandem rationem: Item æque multiplices secundæ & quartæ ad primam & tertiam, eandem rationem habebunt. Et contra, eandem rationem habebunt secunda & quarta ad æque multiplices primæ & tertiæ; Item prima ac tertia

ad

ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, rationem habebunt eandem.



Sit enim vt A, prima ad B, ſecundam, ita C, tertia ad D, quartam; ſumanturq; E, F, ipſarũ A, C, æq; multiplices: Itẽ G, H, æq; multiplices ipſarũ B, D. Dico ita eſſe E, ad B, vt F, ad D: Itẽ ita G, ad A, vt H, ad C. Et contra, ita eſſe B, ad E, vt D, ad F: Item ita A, ad G, vt C, ad H. Quoniam enim eſt, vt E, ad A, ita F, ad C, ex conſtructione, cum vtrobique ſit eadem proportio multiplex; ponaturque vt A, ad B, ita C, ad D: *a* erit ex æquo, vt E, ad B, ita F, ad D. Rurſus quia eſt, vt G, ad B, ita H, ad D, quod vtrobique ſit eadem proportio multiplex, ex conſtructione: eſtque vt B, ad A, ita D, ad C: (Cum enim ponatur, vt A, ad B, ita C, ad D, erit conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C,) *b* erit ex æquo, vt G, ad A, ita H, ad C.

a 22. quinti.

b 22. quinti.

Deinde, quia eſt vt B, ad A, ita D, ad C, per inuerſam rationem: Et vt A, ad E, ita C, ad F, quod ex conſtructione vtrobique ſit eadem prodõtio ſubmultiplex; *c* erit ex æquo, vt B, ad E, ita D, ad F. Rurſus quia ponitur, vt A, ad B, ita C, ad D: eſtque vt B, ad G, ita D, ad H, quod ex conſtructione ſit vtrobique eadem proportio ſubmultiplex: *d* erit ex æquo, vt A, ad G, ita C, ad H. Quod eſt propoſitum.

c 22. quinti.

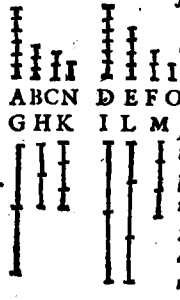
d 22. quinti.

Ex quo conſtat modus argumentandi, quod frequentiſſime vtuntur Geometræ maximæ Archimedes, Apollonius Pergæus, Theon, & alij. Videlicet, vt A, ad B, ita eſt C, ad D. Ergo vt E, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c ipſius C, ad D. Item vt A, ad B, ita eſt, C, ad D. Igitur vt A, ad duplum, vel triplum vel quadruplum, &c. ipſius B. nimirum ad G, ita erit quoque C, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipſius D, videlicet ad H.

THEOR. 23. PROPOS. 23. xxiij.

Si ſint tres magnitudines, aliæque ipſius æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Demonſtratur hic ratio ex æqualitate, quando proportio eſt perturbata. Sint enim tres magnitudines A, B, C, & alia tres D, E, F, ſitq; perturbata earum proportio, hoc eſt, ſit vt A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate eſſe vt A, ad C, ita D, ad F. Sumptis enim ipſarum A, B, D, æque multiplicibus G, H, I; Item ipſarum C, E, F, æque multiplicibus K, L, M; c *Erit vt A, ad B, ita G, ad H, cum G, H,* c 16. quinti.



sint ipſarum A, B, æque multiplices: At vt A, ad B, ita eſt E, ad F: a Igitur vt G, ad H, ita quoque eſt E, ad F: b Sed vt E, ad F, ita eſt quoque L, ad M; quod L, M, ſint ipſarum E, F, æque multiplices. a 11. quinti. b 15. quinti. c 11. quinti. d 4. quinti. *Igitur erit quoque vt G, ad H, ita L, ad M. Rurſus quoniam eſt B, prima ad C, ſecundam, vt D, tertia ad E, quartam; d erit quoque vt H, multiplex primæ B, ad K, multiplicem ſecundæ C, ita I, multiplex tertiæ D, ad L, multiplicem quartæ E. Quia igitur ſunt tres magnitudines G, H, K, & aliæ tres I, L, M, quæ binæ in eadem ratione ſumuntur, eſtque earum proportio perturbata; cum oſtenſum ſit eſſe vt G, ad H, ita L, ad M: Et vt H, ad K, ita I, ad L: e fit vt ſi G, prima ſuperat tertiam K, ſuperet quoque quarta I, ſextam M: & ſi æqualis, æqualis; & ſi deficit, deficiat. Itaque cum G, & I, æque multiplices primæ A, & tertiæ D, à K, & M, æque multiplicibus ſecundæ C, & quartæ F, vel vna deficiant, vel vna æquales ſint, vel vna excedant; f erit vt A, prima ad C, ſecundam, ita D, tertia ad F, quartam, quod eſt propoſitum. Itaque ſi ſint tres magnitudines &c. Quod demonſtrandum erat.* e 21. quint. f 6. def. quinti.

SCHOLIVM.

Quod ſi fuerint plures magnitudines tribus, fueritque earum proportio perturbata, nimirum ſi fuerint A, ad B, vt F, ad O: & B, ad C, vt E, ad F: & C, ad N, vt D, ad E. Dico adhuc eſſe vt A, ad N, ita D, ad O, quanquam proportio ex æqualitate quando proportio eſt perturbata, apud Geometras in vſu non ſit in pluribus magnitudinibus, quam in tribus, quæ cauſa fuit, cur Euclides antecedentem propoſitionem de quotquot magnitudinibus, hanc autem de tribus dumtaxat propoſuerit, quamuis vera etiam ſit de pluribus, quod ita probatur. Cum iam ſit oſtenſum in tribus magnitudinibus eſſe A, ad C, vt E, ad O: Ponatur autem eſſe ita C, ad N, vt D, ad E, erunt tres magnitudines A, G, N, & aliæ tres, D, E, O, quæ binæ in eadem ſumuntur proportione, & earum proportio eſt perturbata. Ergo rurſus ex æqualitate in tribus magnitudinibus oſtenſa, erit vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem oſtendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, ſicut id in quator fuit demonſtratum, per tres. Et ſic de pluribus. Quod eſt propoſitum.

XXI. THEOR. 24. PROPOS. 24.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, buam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad ſecundam eandem rationem, quam ſexta ad quartam: Et-

iam

iam compoſita prima cum quinta, ad ſecundam eandem habebit rationem, quam tertia cum ſexta, ad quartam.

Quod propoſitione 2. demonſtrauit Euclides de ſola proportione multiplici, demonſtrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim AB, prima ad C, ſecundam, vt DE, tertia ad F, quartam; Item BG, quinta ad C, ſecundam, vt EH, ſexta ad F, quartam. Dico ita eſſe AG, compoſitam ex prima A B G D E H
ac quinta ad ſecundam C, *vt eſt,*
DH, compoſita ex tertia & ſexta C F
ad quartam F. *Cum enim ſit vt* BG, *ad* C, *ita EH, ad* F: *erit conuertendo vt* C, *ad BG, ita* F, *ad EH. Quoniam igitur eſt AB, ad* C, *vt* DE, *ad* F: *&* C, *ad BG, vt* F, *ad EH: a erit ex æquali* AB, *ad* BG, *vt DE, ad EH. b Componendo igitur erit vt tota* AG, *ad BG, ita tota* DH, *ad EH. Itaque cum rurſus ſit* AG, *ad BG, vt* DH, *ad EH: &* BG, *ad* C, *vt* EH, *ad* F; *c erit ex æquali* AG, *ad* C, *vt DH, ad* F. *quod eſt propoſitum. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum.*

a 22. quinti.
b 18. quinti.
c 22. quinti.

SCHOLIVM.

Hæc propoſitio vera eſt, ſiue magnitudines AB, BG, & C, ſint eiuſdem generis cum magnitudinibus DE, EH, & F, ſiue non, vt ex demonſtratione conſtat.

Eodem fere modo oſtendetur in omni genere proportionis id, quod Theoremate ſexto huius lib. demonſtratum eſt in multiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet.

Si duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habeant ad eaſdem eandem proportionem: & reliquæ ad eaſdem eandem proportionem habebunt.

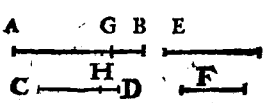
*H*abeant enim AG, DH, ad C, & F, eandem proportionem, hoc eſt, ſit AG, ad C, vt DH, ad F. Item detractæ AB, DE, ad eaſdem C, F, eandem habeant proportionem: ita vt ſit quoque AB, ad C, vt DE, ad F. Dico ad reliquas BG, EH, eandem habere proportionem ad eaſdem C, F, hoc eſt, eſſe BG, ad C, vt EH, ad F. Cum enim ſit vt AB, ad C, ita DE, ad F, erit conuertendo vt C, ad AB, ita F, ad DE. Quoniam igitur eſt AG, ad C, vt DH, ad F, & C, ad AB, vt F, ad DE: *d* erit ex æqualitate AG, ad AB, vt DH, ad DE. *e* Diuidendo ergo erit quoque vt BG, ad AB, ita EH, ad DE. Itaque rurſus ſit BG, ad AB, vt EH, ad DE: & AB, ad C, vt DE, ad F: *f* erit ex æquali BG, ad C, vt EH ad F. Quod eſt propoſitum.

d 22. quinti.
e 17. quinti.
f 12. quinti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

XXV.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.



Sit enim AB, *ad* CD, *vt* E, *ad* F, *sitque* AB, *omnium maxima, &* F, *minima. Dico duas* AB, & F, *simul esse maiores duabus* CD, & E, *simul. Auferatur enim ex* AB, *magnitudo* AG, *aequalis ipsi* E: *& ex* CD, *alia* CH, *aequalis ipsi* F. *Erit igitur* AG *ad* CH, *vt* E, *ad* F, *hoc est vt* AB, *ad* CD. *Quare cum sit tota* AB, *ad totam* CD, *vt ablata* AG, *ad ablatam* CH: *a* erit *quoque vt tota* AB, *ad totam* CD, *ita reliqua* GB, *ad reliquam* HD: *Est autem* AB, *(cum sit omnium maxima) maior, quam* CD. *Igitur &* GB, *maior erit quam* HD. *Quoniam vero* AG, & E, *aequales sunt: si ipsis addantur aequales* F, & CH, *nimirum* F, *ipsi* AG, & CH, *ipsi* E: *fient* AG, & F, *simul aequales ipsis* E, & CH, *simul. Additis igitur inaequalibus* GB, & HD, *fient* AB, & F, *simul maiores quam* E, & CD, *simul cum* GB *sit maior quam* HD. *Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.*

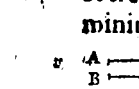
a 19. quinti.

SCHOLIVM.

Necessario autem sequitur, si antecedens magnitudo vnius proportionis fuerit omnium maxima, consequentem alterius esse omnium minimam; vt in proposito exemplo cernere licet. Cum enim sit vt AB, ad CD, ita E, ad F: & AB, prima maior quam tertia E: b erit quoque CD, secunda maior quam F, quarta. Item quia maior est AB, quam CD, erit quoque E, maior quam F, ob eandem proportionem AB, ad CD, & E, ad F, vt in scholio propos. 14. ostendimus. Quod si è contrario antecedens vnius proportionis fuerit omnium minima, erit consequens alterius omnium maxima, vt constat, si dicatur esse F, ad E, vt CD, ad AB. Debent quoque omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, alias non posset vna magnitudo componi ex maxima & minima; imo neque ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non multum dissimile, videlicet,

b 14. quinti.

Si tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt quam dupla reliquæ.



Sit vt A, ad B, ita B, ad C, sitque A, maxima, & C, minima. Dico A, & C, simul maiores esse dupla ipsius B. Sumpta enim

D ipsi

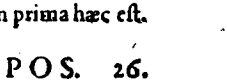
D, ipsi B, æquali, erit, vt A ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, simul maiores erunt, quam B, & D, simul a vt proxime demonstratum est, hoc est, quam dupla ipsius B. Quod est propositum. a 25. quinti.

Hic finem Euclides imponit quinto libro. Verum quia Campanus, & nonnulli alij adijciunt alias quasdam propositiones, quibus sæpenumero grauissimi Scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, easque quasi essent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, qua fieri potest, breuitate demonstrare, nec non in numerum ac seriem propositionum Euclidis referre. Omnes autem traduntur de magnitudinibus improportionalibus, quarum prima hæc est.

THEOR. 26. PROPOS. 26. xxvj.

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

Habeant enim A. ad B. maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B. ad A. minorem esse proportione D, ad C. Intelligatur enim esse E. ad B. vt C. ad D; eritque proportio A ad B maior quoque quam E, ad B: b ac propterea A. maior erit quam E. c Quare minor erit proportio B. ad A. maiorem, quam B. ad E. minorem: Sed vt est B, ad E. ita est conuertendo D. ad C. Igitur proportio B, ad A. minor est quoque, quam D. ad C. Quod est propositum.



b 10. quinti. c 6 quinti

SCHOLIVM.

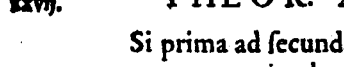
Eodem fere modo demonstrabimus, si prima ad secundam habuerit minorē proportionem, quam tertia ad quartam conuertendo maiorem esse proportionem, secundæ ad primam, quam quartæ ad tertiam; dummodo vocem, maioris, mutemus in vocem, minoris & contra.

Sit enim minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico conuertendo *B*, ad A, maiorem habere proportionem, quam D, ad C, Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritque proportio A, ad B, etiam minor, quam E, ad B, *d* ac propterea A, minor erit quam E. *e* Quare maior erit proportio B, ad A, minorem, quam *B*, ad E, maiorem: Sed vt B ad E, ita est conuertendo D, ad C. Igitur & proportio *B*, ad A, maior est, quam D, ad C. Quod est propositum. d 10. *quinti.* e 8. *quinti.*

Aliter. Quoniam minor est proportio A, ad B, quam C, ad D; erit
a 26. quinti. maior proportio C, ad *D*, quam B, ad A. *a* Igitur conuertendo minor erit proportio D, ad C, quam B, ad A, ac proinde maior erit proportio *B*, ad A, quam D, ad C. Quod est propositum.

xxvij. ## THEOR. 27. PROPOS. 27.

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam secunda ad quartam.

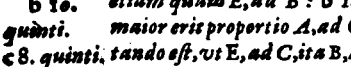


Habeat enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque esse E, *ad* B, *vt C, ad* D, *erit que proportio A, ad B, maior*
b 10. quinti. *etiam quam E, ad B:* b *Ideoque A, maior erit quam* E. c *Quare*
c 8. quinti. *maior erit proportio A, ad* C, *quam* E, *ad* G. d *Quoniam vero permutando est, vt* E, *ad C, ita* B, *ad D, (cum posita sit E, ad* B, *vt* C, *ad D.)*
d 26. quinti. *Igitur proportio* A, *ad C, maior quoque erit quam B, ad* D. *Quod est propositum.*

SCHOLIVM.

Similiter ostendemus, si prima ad secundam minorem habuerit proportionem, quam tertia ad quartam, vicissim primæ ad tertiam minorem esse proportionem, quam secundæ ad quartam.

Sit namque minor proportio A, ad *B*, quam C, ad D. Dico permutando, minorem quoque esse proportionem A, ad C, quam B, ad D.



Intelligatur enim esse D, ad *B*, vt *C*, ad D, Eritq; proportio A, ad B, minor quoque, quam E, ad B; *e* Ac propterea A, minor erit, quam E. *f* Quare minor erit proportio A, ad C, quam E, ad C. *g* Sed permutando, vt E, ad C, ita *B*, ad D, (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, minor quoque erit, quam B, ad D. Quod erit propositum.

e 10. quinti.
f 8. quinti.
g 16. quinti.

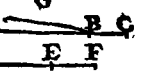
Aliter quoniam minor est proportio A, ad B, quam C, ad D, erit maior proportio C, ad D, quam A, ad B. *h* Ergo permutando maior etiam erit proportio C, ad A, quam D, & *B*: *i* ac proinde conuertendo, minor erit proportio A, ad C, quàm *B*, ad D. Quod est propositum.

h 27. quinti.
i 26 quinti.

xxviij. ## THEOR. 28. PROPOS. 28.

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem

tionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque compoſita prima cum ſecunda: ad ſecundam maiorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam.



Sit maior proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo majorem eſſe proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF. Intelligatur enim eſſe GB, ad BC. ut DE, ad EF: eritque proportio AB, ad BC, maior quoque, quam GB, ad BC: a ideoq; AB, maior, quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, maior quam GC: b maiorq; propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, c ut eſt GC, ad BC, ita eſt DF, ad EF. (quod poſita ſit GB, ad BC, ut DE, ad EF.) Maior ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod eſt propoſitum.

a 10. quinti. b 8. quinti. c 18. quinti.

SCHOLIVM.

Eadem ratione oſtendemus, ſi proportio primę ad ſecundam minor fuerit, quam tertiæ ad quartam, minorem quoque eſſe proportionem primæ & ſecundæ ſimul, ad ſecundam, quam tertiæ & quartæ ſimul, ad quartam.

Sit enim minor proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo minorem eſſe proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF. Intelligatur enim eſſe GB, ad BC; ut DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, minor quoque, quã GB, ad BC; *d* ideoq; AB, minor erit, quàm GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, minor, quam GC; *e* minorq; propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, ut GC, ad BC, ita eſt DF, ad EF. (quod poſita ſit GB, ad BC, ut DE, ad EF,) Minor ergo etiã erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod eſt propoſitum.

d 10. quinti. e 8. quinti.

Aliter. Quoniam minor eſt proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF; erit major proportio DE, ad EF, quam AB, ad BC. *f* Igitur componendo, maior quoque proportio erit DF, ad EF, quam AC, ad BC ac propterea, minor erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF, quod eſt propoſitum.

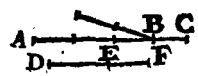
f 28. quinti.

THEOR. 29. PROPOS. 29. XXIX.

Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam maiorem habuerit proportionem, quàm compoſita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque dividendo prima ad ſecundam maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam.

Sit major proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & dividendo maiorem esse proportionem AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GC, ad BC, ut DF, ad EF, eritque proportio AC, ad BC, maior quoque proportione GC, ad BC: a *ideoque maior erit AC, quam GC. Ablata ergo communi BC: maior erit AB, quam GB:* b *Ac propterea maior erit proportio AB, ad BC, quam GB, ad BC.* c *Sed dividendo, ut est GB, ad BC, ita est DE, ad EF. (Posita namque est GC, ad BC, ut DF, ad EF.) Igitur maior quoque erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.*

a 10. quinti.
b 8. quinti.
c 17. quinti.

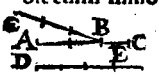


SCHOLIVM.

Quod si prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem habuerit, quam tertia cum quarta, ad quartam; habebit & dividendo prima ad secundam, proportionem minorem, quàm tertia ad quartam.

Sit enim minor proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico dividendo quoque minorem esse proportionem AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim GC, ad BC, ut DF, ad EF. eritq; proportio AC, ad BC, minor quoq; quam GC, ad BC: *d* ideoq; minor erit AC, quam GC. Ablata etgo communi BC: minor erit AB, quam GB: *e* Ac propterea minor erit proportio AB, ad BC, quam GB, ad BC: *f* Sed dividendo est, ut GB, ad BC, ita DE, ad EF. (Posita namque est GC, ad BC, ut DF, ad EF.) Igitur minor quoq; proportio erit AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.

d 19. quinti.
e 8. quinti.
f 17. quinti.
g 29. quinti.

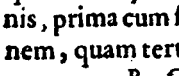


Aliter. Quoniam minor proportio est AC, ad BC, quam DF, ad EF; erit major proportio DF, ad EF, quam AC, ad BC. *g* Igitur & dividendo, major erit proportio DE, ad EF, quam AB, ad BC, atque idcirco minor erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.

xxx.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

Si composita prima cum secunda, ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conversionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.



Sit maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico per conversionem rationis, minorem esse proportionem AC, ad AB, quam DF, ad DE. Cum enim sit AC, ad BC, maior

proportio, quam D F, ad E F: a erit & dividendo, maior proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. b Quare convertendo minor erit proportio B C, ad A B, quam E F, ad D E: c Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius A C, ad A B, quam totius D F, ad D E. Quod eſt propoſitum.

a 29. quinti. b 26. quinti. c 28. quinti.

SCHOLIVM.

Non diſſimili ratione oſtendemus, ſi compoſita prima cum ſecunda minorem habuerit proportionem ad ſecundam, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam, per converſionem rationis, majorem proportionem primæ & ſecundæ ad primam, quam tertiæ & quartæ ad tertiam.

Sit enim minor proportio A C, ad B C, quam D F, ad E F. Dico per converſionem rationis majorem eſſe proportionem A C. ad A B. quam D F. ad D B. Cum enim minor ſit proportio A C, ad B C, quam D F, ad E F, *d* erit & dividendo minor proportio A B, ad B C. quam D E ad E F. Quare *e* convertendo, erit major proportio B C. ad A B. quam E F. ad D E: *f* Ac proinde & componendo major proportio erit A C, ad A B, quam D F, ad D B. Quod eſt propoſitum.

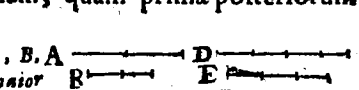
d 29. quinti. e 26. quinti. f 30. quinti.

Aliter. Quoniam minor eſt proportio A C, ad B C, quam D F. ad E F; erit major proportio D F. ad E F, quam A C, ad B C. *g* Ergo per converſionem rationis minor erit proportio D F. ad D B. quam A C. ad A B: Hoc eſt, major proportio erit A C. ad A B, quam D F, ad D E. Quod eſt propoſitum.

g 30. quinti.

THEOR. 31. PROPOS. 31. xxxi.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quam primæ poſteriorum ad ſecundam; Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ poſteriorum ad tertiam.



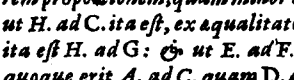
Sint tres magnitudines A, B, C. & aliæ tres D E F ſitq; maior proportio A. ad B. quam D. ad E: Itē maior B. ad C. quā E. ad F. Dico ex æqualitate maiorē quoque eſſe A, ad C. quam D, ad F. Intelligatur enim eſſe G, ad C. ut E, ad F; erit q; propterea proportio B, ad C: maior, quam G, ad C: h Ideoque E, maior erit quam G. Quare i maior erit proportio A, ad G, minorē quam

h 10. quinti. i 8. quinti.

quam A. ad B, majorem: Ponitur autem proportio A, ad B, major, quam D, ad E. Multo ergo major erit proportio A, ad G, quam D. ad E. Intelligatur rursus esse H. ad G. ut D. ad E: erit que propterea maior proportio A. ad G. quam H. ad G: a *Ideoq; A. major erit, quam H.* b *Quare major quantitas A, ad C, habebit majorem proportionem, quam minor quantitas H. ad eandem C:* c *Atqui ut H. ad C. ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam ut D. ad E. ita est H. ad G: & ut E. ad F. ita G. ad C.) Major ergo proportio quoque erit A. ad C. quam D. ad F. Quod est propositum.*

a 10. *quinti.*
b 8. *quinti.*
c 22. *quinti.*

SCHOLIVM.



Eadem ratione ostendemus, si fuerit proportio A, ad B, quæ D, ad E: At B, ad C, major quam E. ad F. Vel contra, si proportio A. ad B. fuerit major quam D. ad E: At B. ad C. eandem, quæ E ad F. ex æqualitate majorem esse quoque proportionem A. ad C. quam D. ad F.

Sit enim primum A. ad B. ut D. ad E. sed major proportio B. ad C quam E. ad F. Intelligatur esse G. ad C. ut E. ad F. eritq; propterea proportio B. ad C. major, quam G. ad C: *d* Ideoque B. major erit quam G. *e* Quare major erit proportio A. ad G. quam A. ad B. Ponitur autem A. ad B. ut D. ad E. Igitur & proportio A. ad G. major erit, quam D. ad E. Intelligatur rursus esse H. ad G. ut D. ad E. eritque propterea major proportio A. ad G. quam H. ad G. *f* Ideoq; A. major erit, quam H. *g* Quare major erit proportio A. ad C. quã H. ad C. *h* Atqui ut H. ad C. ita est, ex æqualitate, D. ad F. (quoniam ut D. ad E. ita est H. ad G: & ut E. ad F. ita G. ad C.) Major ergo proportio quoq; erit A. ad C. quam D. ad F. Quod est propositum.

d 10. *quinti.*
e 8. *quinti.*
f 10. *quinti.*
g 8. *quinti.*
h 22. *quinti.*

Deinde sit major proportio A. ad B. quam D. ad E. sed B. ad C. ut E. ad F. Intelligatur esse C. ad C. ut E. ad F. eritq; propterea etiam B. ad C. ut G. ad C: *i* ideoque B. ipsi G. æqualis erit. *k* Quare erit A. ad G. ut A. ad B. Ponitur autem proportio A. ad B. major quam D. ad E. Igitur & proportio A, ad G. major erit quam D. ad E. Intelligatur rursus esse H. ad G. ut D. ad E. eritq; propterea major proportio A. ad G. quam H. ad G *l* Ideoq; A. major erit, quã H. *m* Quare major proportio erit A. ad C. quam H. ad C: *n* Atqui ut H. ad C. ita est ex æqualitate, D. ad F. (quoniam ut D. ad E. ita est H. ad G: & ut E. ad F. ita G. ad C.) Major erit quoq; proportio A. ad C. quam D, ad F. Quod est propositum.

i 9. *quinti.*
k 7. *quinti.*
l 10. *quinti.*
m 8. *quinti.*
n 22. *quinti.*

Non dissimiliter demonstrabimus, si proportiones priorũ magnitudinũ minores fuerint, etiam proportionem extremarum esse minorem. Idemque eveniet, si fuerit A. ad B. ut D. ad E: sed minor sit proportio B. ad C. quam E. ad F: Aut contra, si proportio A ad B.

fuerit

fuerit minor, quam D, ad E, at B, ad C, ſit, ut E, ad F. Eadem namque ſemper erit demonſtratio, ſi modo vocem, majoris, ubique permutes in vocem, minoris, ut patet.

Quod ſi plures fuerint magnitudines tribus, ſive omnes proportiones in uno ordine magnitudinum ſint majores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum, ſive una tantum major, quam una, vel duæ, &c. oſtendemus majorem vel minorem quoque eſſe proportionem primæ priorum ad ultimam, quam primæ poſteriorum ad ultimam, ea methodo, quam propoſ. 22. tradidimus: adhibendo propoſ. 12. loco hujus propoſ. 31. quando tres magnitudines unius ordinis proportionales ſunt tribus magnitudinibus alterius ordinis. Item uſurpando hoc ſcholium, quando una tantum proportio in tribus magnitudinibus æqualis eſt unitatum proportioni in tribus magnitudinibus alterius ordinis.

Nam ſi major eſt proportio A, ad B, quam E. ad F: & major B. ad C, quam F, ad G, & major C, ad D, quam G, ad H: *a* erit ex æquo major proportio A, ad C, quam E, ad G, Quia igitur rurſus major proportio eſt A, ad C, quam E, ad G; & major C, ad D, quam G, ad H: *b* erit quoq; ex æquo major proportio A, ad D, quam E, ad H.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

a 31. *quinti.*

b 31. *quinti.*

Quod ſi tres magnitudines A, B, C, tribus E, F, G, proportionales ſint, ſed major ſit proportio C, ad D, quam G, ad H: *c* erit ex æquo A, ad C, ut E, ad G. Ergo ex hoc ſcholio, major proportio erit A, ad D, quam E, ad H.

c 22. *quinti.*

Si vero major proportio ſit A, ad B, quam E, ad F: ſed tres B, C, D, proportionales ſint tribus F, G, H, erit hoc ſcholio, major proportio A, ad C, quam E, ad G: Et rurſus major A, ad D, quam E. ad H.

Si autem major ſit proportio A, ad B, quam E, ad F; ſed B, ad C, ut F, ad G: at major proportio C, ad D, quam G, ad H. Vel A, ad B, ut E, ad F, ſed major proportio B, ad C, quam F, ad G: at C, ad D, ut G, ad H, erit ſemper ex hoc ſcholio, major proportio A, ad C, quam E, ad G: ac proinde rurſus major A, ad D, quam E, ad H. &c.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

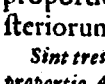
Idem Euclides, ſi omnes proportiones unius ordinis ſint minores omnibus proportionibus alterius ordinis, vel una vel duæ. Item ſi ſint plures magnitudines, ut propoſitione 22. diximus.

THEOR. 32. PROPOS. 32. XXXII.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam; Item ſecundæ priorum ad tertiam major; quam primæ poſteriorum ad ſecundam: Erit quoque ex æqualitate, major propor-

proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque major proportio A, ad B, quam E. ad F Item major B, ad C, quam D, ad E. Dico esse quoque maiorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, ut D, ad E, eritque

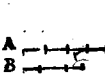


a 10. quinti. b 8. quinti.

propterea proportio B, ad C, maior quam G, ad C. a *Ideoq; maior erit B, quam G.* b *Quare maior erit proportio A, ad G, minorem, quam ejusdem A, ad B, majorem; Est autem proportio A, ad B, major quam E, ad F. Multo ergo major est proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, ut E, ad F; eritque propterea major proportio A, ad G, quam H, ad G;* c *ideoq; major erit A, quam H.* d *Quocirca A, major ad C, majorem habebit proportionem, quam H, minor ad eandem C:* e *At ut H, ad C, ita est ex æqualitate, D, ad F. (Quoniam ut D, ad E, ita est G, ad C: & ut E, ad F: ita est H, ad G.) Maior ergo etiam est proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.*

c 10. quinti. d 8. quinti. e 23. quinti.

SCHOLIVM.



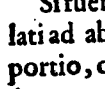
Eadem ratione, si fuerit proportio A, ad B. quæ E, ad F. At B, ad C, major quam D, ad E. Vel contra, proportio A, ad B. major, quam E, ad F. At B, ad C, eadē, quæ D. ad E. ostēdemus, ex æqualitate majorem esse proportionem A. ad C. quam D, ad F, ut in proposita figura perspicitur.

Haud secus ostendemus, si proportiones priorum magnitudinū minores fuerint, etiam extremorum proportionē esse minorē, &c.

Quod si fuerint plures magnitudines tribus, demonstrabimus, majorem quoque vel minorem esse proportionem primæ priorum ad ultimam, quam primæ posteriorum ad ultimam, ea arte, qua usi sumus propos. 23. &c. Quæ omnia perspicua sunt, si diligenter demonstrationes scholij præcedentis propos. considerentur.

XXXIII. THEOR. 33. PROPOS. 33.

Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.



Sit major proportio totius AB, ad totam CD, quam ablatæ AE, ad ablatam CF. Dico & proportionem reliquæ EB, ad reliquam FD, majorem esse, quam totius AB, ad totam CD. Cum enim major sit

pro-

proportio AB, ad CD, quam AE, ad CF; a erit quoq; permutando, maior proportio AB, ad AE, quam CD, ad CF; b ac propterea per conversionem rationis, minor erit proportio AB, ad EB, quam CD, ad FD, c Permutando igitur, minor quoque erit proportio AB, ad CD, quam EB, ad FD, hoc est, EE, reliqua ad reliquam FD, maiorem habebit proportionem, quam tota AB, ad totam CD. Quod est propositum.

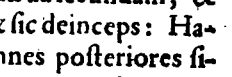
a 27. quinti.
b 30. quinti.
c 27. quinti.

SCHOLIVM.

Quod si tota ad totam habuerit minorem proportionem, quam ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam majorem proportionem, quam tota ad totam, ut ex modo demonstrandi liquet ponendo semper vocem, minoris, pro voce majoris: & vocem, majoris, pro voce, minoris.

THEOR. 34. PROPOS. 34. XXXIV.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam; & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem: quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima, minorum autem, quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem deniq; etiam, quàm ultima priorum ad ultimam posteriorum.



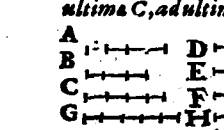
Sint primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F. Sit autem maior proportio A, ad D; quam B, ad E: Item maior B, ad E, quam C, ad F. Dico proportionem ipsarum A, B, C, simul ad ipsas D, E, F, simul maiorem esse proportione ipsarum B, C, simul ad ipsas E, F; simul: minorem vero, proportione A, ad D: maiorem denique etiam proportione C, ad F. Cum enim maior sit proportio A, ad D, quam B, ad E; d erit permutando maior A, ad B, quam D, ad E. e Igitur componendo, maior erit proportio ipsarum A, B, simul ad B, quam ipsarum D, E, simul ad E. f Permutando ergo rursus, maior erit proportio A, B, simul ad D, E, simul, quam B, ad E. Itaque cum tota AB, ad totam DE, maiorem habeat proportionem, quam ablata B, ad ablatam E: g habebit quoque reliqua A, ad reliquam D, maiorem proportionem, quam tota A, B, ad totam D, E. Eadem ratione, maior erit proportio

d 27. quinti.
e 28. quinti.
f 27. quinti.
g 33. quinti.

tio B, ad E, quam totius B, C, ad totam E, F: Multò ergo maior erit
a 27. quinti. proportio A, ad D, quam B, C, totius ad totam E, F. a Permutando igitur, major erit proportio A, ad B, C, quam D, ad E. F: b & com-
b 28. quinti. ponendo ergo major erit proportio totius A, B, C, ad B, C, quam totius D, E, F, ad E, E. c Et rursus permutando, major proportio
c 27. quinti. omnium A, B, C, simul ad omnes D, E, F, simul quam B, C, ad E, F, quod est primum.

Itaque cum sit major proportio totius A, B, C, ad totam D, E, F, quam ablata B, C, ad ablatam E, F, d erit & major proportio reli-
d 33. quinti. qua A, ad reliquam D, quàm totius A, B, C, ad totam, D, E, F, quod est secundum.

Quoniam verò major est proportio B, ad E, quàm C, ad F; e erit
e 27. quinti. permutando major quoq; B, ad C, quam E, ad K. f & componendo,
f 27. quinti. major totius BC, ad C, quàm totius E, F, ad F; g & rursus permu-
g 27. quinti. tando, major B, C, ad E, F, quàm C, ad F. Est autem major proportio A, B, C, ad D, E, F, ut ostendimus, quam B, C, ad E, F. Multo ergo major erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D, E, F, quam ultima C, ad ultimam F, quod est tertium.



Deinde sint quatuor magnitudines utrobique cum eadem hypotheſi, hoc est, sit quoq; maior proportio tertiæ C, ad F, tertiam, quàm G, quartæ ad H, quartam. Dico eadem consequi. Vt enim jam in tribus est ostensum, major est proportio B, ad E, quam B, C, G, ad E, F, H. Multo ergo major
h 27. quinti. erit A. ad D. quam B. C. G. ad E. F. H. h Permutando ergo minor
i 28. quinti. erit A. ad B. C. G. quam D, ad E. F. H. i & componendo maior A,
k 33. quinti. B. C. G. ad B, C, G, quam D, E, F, H, ad E. F. H. k & permutando A, B. C. G. ad D. E. F. H. maior quàm B. C. G. ad E. F. H. quod est primum.

Itaque cum sit maior proportio totius A. B. C. G. ad totam D. E, F, H, quam ablatæ B. C. G. ad ablatam E. F. H. l erit & reliqua A. ad reliquam D. maior proportio, quam totius A. B. C. G. ad totam D. E. F. H quod est secundum.

Quoniam vero, ut in tribus est demonstratum, major est proportio B. C. G. ad E. F. H. quam G. ad H. & major A. B. C. G. ad D. E. F. H. quam B. C. G. ad E, F, H. ut fuit ostensum; multo maior erit proportio A, B, C, G. ad D, E, F, H, quam ultima G, ad ultimam H. quod est tertium.

Eadem ante concludes, eadem consequi in quinque magnitudines per quatuor, & in sex, per quinque, & in septem per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. Constat ergo totum Theorema, &c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM SEXTVM.

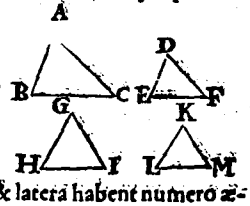
DEFINITIONES.

I.

Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atq; etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

VT triangula ABC, DEF, similia dicentur, si fuerint æquiangula, ita ut angulus A, angulo D; & B, ipsi E; & C, ipsi F, æqualis sit: Item latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF, & ut AB, ad BC, ita DE, ad EF, & ut AC, ad CB, ita DF, ad FE.

Quod si anguli unius æquales fuerint angulis alterius, singuli singulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut cõtra; non dicentur tales figuræ similes: cujusmodi sunt quadratum, & figura altera parte longior. Hæ etenim figuræ habent quidem angulos æquales, utpote rectos, at latera unius lateribus alterius proportionalia non sunt, quippe cum latera quadrati circa quemvis angulum rectum habeant proportionem æqualitatis, latera vero figuræ altera parte longioris circa quemvis angulum rectũ, proportionem inæqualitatis. Ex quibus cõstat, omnes figuras rectilineas æquiangulas, & æquilateras, quæ & angulos & latera habent numero æqualia, esse similes, quanquam, inter se maxime sint inæquales. Cujusmodi sunt triangula æquilatera GHI, KLM. Propter laterum enim æqualitatem, erit GH, ad GI, ut KL, ad KM, Item GH, ad HI, ut

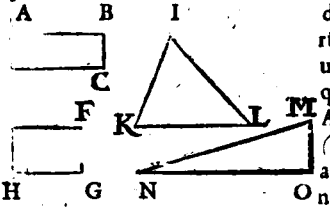


HI, ut KL, ad LM, & GI, ad IH, ut KM, ad ML, cum semper sit proportio æqualitatis. Idem dicendum est de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis; nec non, de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de aliis id genus figuris rectilineis æquiangulis, atq; æquilateris.

II.

Reciprocæ autem figuræ sunt, cum in utraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

Vt si in parallelogrammis ABCD, EFGH, latera AB, BC, ita proportionalia fuerint lateribus EF, FG, ut utrobiq; sit & antecedens, & consequens diversarum proportionum, hoc est, ut sit ea proportio AB, ad EF, quæ FG, ad BC, seu eadem AB, ad FG, quæ EF, ad BC: (utroque enim modo AB, est antecedens unius proportionis & BC, consequens alterius,

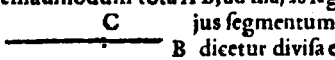


in figura ABCD, quemadmodum & primo modo EF, est consequens unius, & FG, antecedens alterius; vel secundo modo FG, consequens, & EF, antecedens, in figura EFGH) dicentur hujusmodi parallelogramma reciproca, quamvis similia non sint. Similiter erunt triangula IKL, MNO, reciproca, si fuerit ut IK, ad MN, ita MO, ad IL, vel ut IK, ad MO, ita MN, ad IL. Neque memini me inveniſſe apud Geometras usum reciprocarum figurarum in aliis figuris, quam in parallelogrammis & triangulis.

III.

Secundum extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cum ut tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.

Si linea recta quævis AB, ita dividatur in C, inæqualiter, ut sit quemadmodum tota AB, ad majus segmentum AC, ita AC, majus segmentum ad CB, minus segmentum:



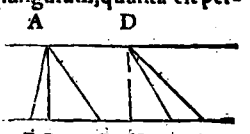
dicetur divisa esse secundum extremam, & mediam rationem. Quam quidem divisionem docebit Euclides propos. 30. hujus lib. eamq; sub aliis verbis jam docuit lib. 2. propos. 11. ut fiet perspicuum propos. 30. hujus lib. Sunt autem pene innumeræ dignitates, atq; utilitates lineæ hoc modo divisæ, ut ex libris Stereometriæ constabit, præsertim lib. 13 ut non immeritò à quibusdam dicta sit divina proportio, in quam linea eo modo est divisa.

Alia

IV.

Altitudo cuiusque figuræ est linea perpendicularis à vertice ad basin deducta.

Si à vertice A, trianguli A B C, ad basin BC, perpendicularis ducatur AG, dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli A B C; ità ut tantum dicatur habere altitudinem triangulum, quanta est perpendicularis AG. Sic etiam perpendicularis D H, ducta à D, vertice trianguli D E F, ad basin E F, ad partes E, protractam, appellabitur altitudo trianguli DEF. Itaq; si duarum figurarum perpendiculares à verticibus ad bases, (sive hæ protractæ sint, sive non) demissæ, fuerint æquales, eandem dicētur hujusmodi figuræ habere altitudinem. Tunc autem hujusmodi perpendiculares erunt æquales, cum baſes figurarum, ac vertices in eisdem constituti fuerint parallelis, cujusmodi sunt perpendiculares AG, DH, triangulorum ABC. DEF, in eisdem parallelis constitutorum. Cum enim anguli A G H, DHG, interni ex eadem parte sint duobus rectis æquales, immo duo recti; *a* erunt rectæ A G, à 28. *primi* DH, parallelæ; Sunt autem & A D, G H, parallela; eo quod ponantur triangula in eisdem esse parallelis constituta. Igitur parallelogrammum erit A D H G: *b* ac propterea latera oppoſita A G, D H, æqualia erunt. Eandem igitur dicentur ea triangula habere altitudinem. Quod si in eisdem triangulis vertices ponantur C, & F, baſes vero A B, & D E; non habebunt eā eandem altitudinē. Perpendicularis enim ducta ex F. ad basin D E, protractam æqualis non est perpendiculari ex C. ad basin A B, deductæ, cum nec triangula ipſa in eisdem parallelis poſſint constitui, ut manifeſtum est.



b 34 *primi*

Recte vero ab Euclide altitudo figuræ cujusvis definita est per lineam perpendicularem, quæ à vertice ad basin deducitur: quoniam, ut scribit Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente Simplicio, in libro de dimenſione, menſura cujuscunque rei debet esse ſtata, determinataq;, & non indefinita: Inter omnes autem rectas lineas penes quas merito Geometræ, ſicut & vulgus, omnia metiuntur, ſola linea perpendicularis certa est, determinatæque longitudinis, aliæ autem omnes incertæ indeterminatæq;. Qua de re plura ſcripſimus ad initium commentariorū, quos in ſphæram Ioan. de ſacro boſco edidimus.

V.

Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter ſe multiplicatæ, aliquam effecer in rationem.

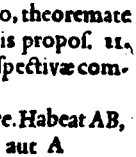
Quoniam denominator cujuslibet proportionis ex primit, quãta sit magnitudo antecedens ad consequentem; (ut denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. ostendit, in quavis proportione quadrupla antecedentem magnitudinem quater continere consequentẽ; denominator vero proportionis subquadruplæ, videlicet ¼. indicat antecedentem esse partem quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominator à Geometris, quãtitas proportionis; ut idem significet quantitas alicujus proportionis, quod denominator. Vult igitur hæc definitio, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicatæ effecerint illã proportionem, seu (ut vertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, sive denominatorem. Vt proportio duodecupla componi dicitur ex dupla & sextupla; quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirũ 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem sextuplæ, hoc est, in 6. Sic eadẽ proportio duodecupla dicitur componi ex tripla & quadrupla. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producitur idem denominator 12. duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecupla componi dicitur ex dupla, tripla, & quintupla. Nam harũ denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 30. denominatorẽ illius. Sic etiam proportio dupla dicetur componi ex sesquialtera, & sesquitertia: quia sesquialteræ denominator 1½. ductus in 1⅓. denominatorem sesquitertiæ gignit 2. denominatorem duplæ. Rursus eadem proportio dupla componetur ex sesquiseptima, & supertripartiente quartas. Nam harũ proportionum denominatores 1⅛. 1¼. inter se multiplicati procreant 2. denominatorem duplæ. Item eadẽ dupla proportio componi dicetur ex subsesquiquarta, & dupla sesquialtera; propterea quod harum denominatores ⅘. 2 ½. inter se multiplicati producunt quoq; eundem denominatorem 2. proportionis duplæ. Atque ita ex infinitis aliis proportionibus componi dicetur dupla proportio: quod etiam de quavis alia proportione dici potest, ut paulo post patebit.

Porro quemadmodũ in magnitudinibus continue proportionalibus, proportio primæ ad ultimam componi dicitur ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. cum illa ex his intermedijs constet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter se multiplicatis producatur, ut 5. libro defin. 10. exposuimus: ita ut si fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, ex quibus dicitur componi, dicatur proportio primæ magnitudinis ad ultimam duplicata proportionis primæ ad secundam; & tres, triplicata, &c. Sic etiã in magnitudinibus quibuscunq; ordine positis, proportio primæ ad ultimam dicetur componi ex proportione primæ ad secundam & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. donec extiterit proportio; quoniam denominator

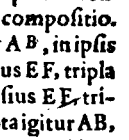
propor-

proportionis primæ magnitudinis ad ultimam consurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter se multiplicatis. Quod quidem proximum inductione quadam Theonis Alexandrini, quam hoc loco adducit, confirmabimus: Deinde vero idem duabus demonstrationibus, quarum una traditur ab Eutocio Ascalonita lib. 2. Archimedis de sphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1. lib. Apollonii Pergæi de conicis elementis propos. 11. Altera autem à Vitellione lib. 1. propos. 13. suæ Perspectivæ comprobabimus.

Theon igitur rem propositam ita conatur absolvere. Habeat AB, ad CD, rationem datam, veluti duplam, aut triplam, aut quamlibet aliam; & CD, ad EF, eandem quoque datam. Dico quod ipsius AB, ad EF, ratio constat ex AB, ad CD, & ex CD, ad EF, ratione, vel quod ipsius AB, ad CD, rationis quantitas multiplicata in ipsius CD, ad EF, rationis quantitatem efficit ipsius AB, ad EF, rationis quantitatem. Sit enim primum AB, quam CD, major; & CD, quam EF: & sit quidem AB, ipsius CD, dupla, & CD, ipsius EF, tripla. Quoniam igitur CD, ipsius EF, tripla est, ipsius autem CD, dupla est AB: erit AB, ipsius EF, sextupla. Quoniam si triplum alicujus duplicamus, fit sextuplum; hoc enim est proprie compositio. Vel sic. Quoniam AB, dupla est ipsius CD, dividatur AB, in ipsis CD, æqualia, hoc est, AG, & GB: & quoniam CD, ipsius EF, tripla est; æqualis autem est AG, ipsi CD; & AG, igitur ipsius EF, tripla est: Id propterea & GB, ipsius EF, tripla est. Tota igitur AB, ipsius EF, sextupla est. Ipsius igitur AB, & EF, ratio connectitur per CD, medium limitem, composita ex ipsius AB, ad CD, & CD, ad EF, ratione.



Similiter autem, & si minor fuerit CD, utraque ipsarum AB, & EF, idipsum colligitur. Sit enim rursus AB, ipsius CD, tripla, At CD, ipsius EF, sit dimidia. Et quoniam CD, ipsius EF, dimidia est, ipsius autem CD, tripla est AB, erit AB, sesquialtera ipsius EF. Si enim alicujus dimidium triplicamus, habebit ipsum semel, & dimidium. At quoniam AB, ipsius CD, tripla est & CD, ipsius EF, dimidia: qualium AB, æqualium ipsi CD, trium, talium est EF, duorum. Quare sesquialterum est AB, ipsius EF. Igitur ratio ipsius AB, ad EF, connectitur per CD, medium limitem, compositam, ex ipsius AB, ad CD, & CD, ad EF, ratione.



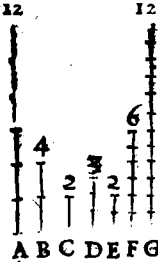
Sed jam rursus sit CD, utraque ipsarum AB, & EF, major, & sit quidem AB, ipsius CD, dimidium, & CD, ipsius EF, sesquitertium. Quoniam igitur, qualium est AB, duorum, talium est CD, quatuor, qualium autem CD, quatuor, talium EF, trium. Et qualium igitur AB, duorum

talium EF, trium. Connectitur igitur rursus ratio ipsius A B, ad E F, per CD, medium limitem, quæ duorum est ad tria. Similiter quoq; & in pluribus, & in reliquis casibus. Et manifestum est, quod si a composita ratione quævis una compositarum auferatur, uno simplicium ejecto, reliqua compositarum assumetur.

Hæc ad verbum desumpsimus ex Theone, juxta interpretationem Zamberti.

Eutocii verò demonstratio ita se habet.

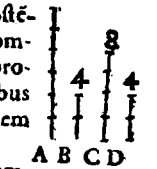
Sint tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Quod quidem facile demonstrabitur, assumpto prius hoc principio, Quantitatem, seu denominatorem cujusvis proportionis multiplicatum in consequentem magnitudinem proportionis ejusdem producere antecedentē. Cū enim denominator indicet habitudinē antecedentis ad consequentem, necesse est, consequentem sumptam secundum denominatorem, hoc est, multiplicatam in denominatorem, restituere antecedentem. Vt quia 12. ad 3. habent proportionem quadruplam, idcirco 3. multiplicata in 4. producunt 12. Item quia 4. ad 20. habent proportionem subquintuplam, cujus denominator est $\frac{1}{5}$. fit, ut $\frac{1}{5}$ in consequentem 20. efficiat 4. &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D, proportionis vero B, ad C, denominator sit E, & D, multiplicans E, producat F. Dico F, esse quantitatem, sive denominatorem proportionis A, ad C, hoc est, si multiplicetur F, in C. produci A. Producatur namque G, ex multiplicatione F, in C. Dico G, ipsi A, æqualem esse, ac proinde & A, fieri ex F, in C. Cum enim D, sit denominator proportionis A, ad B, si multiplicetur D, in B, producetur A. Eadem ratione si E, multiplicetur in C, producetur B. Quoniam igitur F, & E, multiplicantes C, producunt G, & B, (nam ex F, in C, fit G, & ex E, in C, fit B. ut dictum est) a erit ut F, ad E, ita G, ad B. Rursus quia D, multiplicans E, & B, producit F, & A, b erit ut E, ad B, ita F, ad A, & permutando ut E, ad F, ita G, ad B, & convertendo rursus, ut F, ad E, ita A, ad B: Vt autem F, ad E, ita ostensum est esse G, ad B. Igitur ut A, ad B, ita G, ad B; Ideoque æquales erunt quantitates A, & G. Quam ob rem cum G, producatur ex F, in C, producetur quoq; A, ex F, in C: propterea; F, quantitas erit proportionis A, ad C. Quod est propositum.



a 18. *septimi.*
b 17. *septimi.*

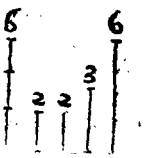
Similis ratio est in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio primæ ad ultimam componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. Vt si fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, componetur proportio A, ad D,

ad D. ex proportionibus A. ad B: B. ad C: & C. ad D. Nam si intelligantur tres magnitudines A. C. D. componetur proportio A. ad D. ex proportionib⁹ A. ad C. & C. ad D. ut ostensum est. At vero eadem ratione proportio A. ad C. componitur ex proportionibus A. ad B. & B ad C. Igitur proportio A. ad D. componitur quoque ex proportionibus A. ad B & B. ad C; & C. ad D. Quod est propositū. Idem cernes in 5. 6. 7. vel quotcunq; magnitudinibus.



Vitellio deniq; hujusmodi affert demonstrationem.

Sint tres magnitudines A. B. C. Dico proportionem A. ad C. componi ex proportionibus A. ad B. & B. ad C. Hoc autem demonstrabitur, assumpto eodem principio Eutocii. Denominatorem videlicet proportionis multiplicatum, in magnitudinem consequentem proportionis producere antecedentem magnitudinem. Sit namque D. denominator proportionis A. ad B. & E. denominator proportionis B. ad C. At F. denominator proportionis A. ad C. Demonstrandum est igitur F. produci ex D. in E. quod ita fiet. Quoniam quod ex F, prima quantitate in C, quartam producitur, æquale est ei, quod ex D, secunda in B. tertiam gignitur, cum semper producatur A; (nam ex F, denominatore in C. consequentem producitur A, antecedens; similiter ex D. denominatore in B, consequentem producitur antecedens A.) a erit ut F. prima ad D. secundam, ita B. tertia ad C. quartam. Cum igitur E. sit denominator proportionis B. ad C; erit quoque E, denominator proportionis F. ad D. Quare E, multiplicans consequentem D. producet antecedentem F. Quod est propositum. Hæc Vitellio.



A. 100. B. 20. C. 5.
D. 5. E. 4.
F. 20.

a 19. septimi.

Idem ostendatur in pluribus magnitudinibus, ut prius ex Eutocio. Veluti, datis 6. magnitudinibus A. B. C. D. E. F. componetur proportio A. ad F. ex proportionibus A. ad B; B. ad C. C. ad D; D. ad E. & E. ad F. Nam ut ostensum est, proportio A, ad F. componitur ex proportione A ad B. & B. ad F. Hæc autem proportio B. ad F. componitur ex proportione B. ad C. & C. ad F. Et hæc proportio C. ad F. cōponitur ex proportione C. ad D & D. ad F: Atq; hæc tandem proportio D. ad F; componitur ex proportione D. ad E. & E. ad F. Igitur proportio A. ad F. ex omnibus proportionibus intermediis componitur; hoc est, denominator proportionis A. ad F, gignitur ex quinque denominatoribus quinque proportionum intermediarum inter se multiplicatis.

A. B. C. D. E. F.
12. 6. 3. 2. 1. 4.

Ex his liquido constat id, quod ad defin. 10. lib. 5. docuimus: nimirum, Continuatis quotlibet quantitatibus continue proportionalibus, proportionem primæ ad ultimam componi ex omnibus proportionibus intermediis æqualibus, hoc est, denominatorem proportionis, quam prima ad ultimã habet, produci ex denominatore proportionis, quam prima habet ad secundam, in seipsum multiplicato, & ex eodem in numerũ productum, & sic deinceps, donec tot multiplicationes fiant una minus, quot proportiones inter primam quantitatem, & ultimam sunt interpositæ: Adeo ut duplicata proportio alicujus proportionis consurgat, cum hujus proportionis denominator bis ponitur, (propter duas æquales proportiones inter primam quantitatem, & tertiam positas) atque ita in se multiplicatur; triplicata verò, quando idem denominator ter ponitur, (propter tres proportiones æquales inter primam quantitatem, & tertiam positas) atque ita multiplicatur, primum in se, deinde iterum in numerum productum. Et sic de quadruplicata, quintuplicata, & de aliis dicendum est in infinitum. Est enim eadem demonstratio in magnitudinibus continuè proportionalibus, & in magnitudinibus non proportionalibus: Solum in illis denominatores æquales erunt. Vt si A, B, C, ponantur continue proportionales, æquales erunt denominatores D, E; & F, erit denominator proportionis duplicatæ, &c.

Etsi autem demonstratio tam Eutocii, quam Vitellionis propriè quadrat in proportiones tantum rationales, cum utraq; propositionibus lib. 7. Euclidis nitatur: quia tamen, quæ de numerorũ proportionibus demonstrantur, conveniunt quoque magnitudinibus incommensurabilib⁹, hoc est, proportionibus irrationalibus, dici potest utraq; demonstratio omnibus proportionibus convenire.

Verum etiamsi non constaret, propositis pluribus magnitudinib⁹, denominatorem proportionis, quam primã ad ultimã habet, produci ex multiplicatione denominatorũ intermediarum proportionum inter se, ut demonstravimus, non tamen propterea demõstrationes, in quibus compositio proportionum adhibetur: minus certæ erunt: quippe cum in illis hęc denominatorũ multiplicatio non usurpetur. Nam quemadmodũ, propositis pluribus magnitudinibus continuè proportionalibus, primã ad tertiam dixit Euclides defin. 10. lib. 5. habere proportionem duplicatam ejus, quam prima habet ad secũdam; nimirum compositam ex duabus proportionib⁹ intermediis, æqualibus: primam verò ad quartam habere proportionem triplicatam ejus, quam prima ad secundam habet, hoc est, compositam ex tribus intermediis proportionib⁹ æqualibus, & sic deinceps, nulla facta mentione multiplicationis denominatorum: Ita quoq;, si ponãtur ordine plures magnitudines, ejusdẽ generis nõ continue proportionales, dicetur prima ad ultimã habere proportionem compositã ex omnibus proportionibus intermediis, licet inter se nõ sint omnes

æqua-

æquales, siue aliquæ sint maioris inæqualitatis, & aliquæ æqualitatis, & aliquæ minoris inæqualitatis, siue omnes eiusdem generis sint, solum eam ob causam, quod illæ proportiones intermediæ sint inter extremas duas magnitudines interiectæ; quemadmodum defin. 10. lib. 5. proportio primæ ad tertiam dicebatur duplicata, hoc solo nomine, quia duæ proportiones æquales interpositæ sunt inter extremas duas magnitudines. Adeo vt non sit aliud discrimen inter hanc compositionem proportionum & illam duplicationem, triplicationem, &c. quæ lib. 5. explicata est, quam quod in duplicatione, triplicatione, &c. proportionum interijciuntur proportiones omnes æquales, in compositione vero proportionum non necesse est, interpositas proportiones æquales esse. Multiplicatio tamen denominatorum vtilis est, vt sciamus, quænam sit illa proportio, quæ alterius dicitur duplicata, triplicata, &c. vel quæ ex propositis proportionibus composita esse dicitur.

Verbi gratia. Vt sciamus, quæ proportio sit illa, quæ dicitur duplicata proportionis decuplæ, ponemus 10. denominatorem decuplæ proportionis bis hoc modo, 10. 10. & vnum in alterum ducemus. Numerus enim genitus 100. denominator est proportionis, quæ decuplæ est duplicata. Vt autem habeamus denominatorem proportionis, quæ eiusdem decuplæ triplicata dicitur ponemus 10. denominatorem ter hoc modo 10. 10. 10. & primum in secundum ducemus, & numerum productum 100. in tertium. Nam numerus hic procreatus 1000. denominat proportionem decuplæ triplicatam. Quod de alijs quoque proportionibus dicendum est. Sed hoc etiam discemus absque denominatorum multiplicatione. Nam si continuentur tres numeri in proportione data, vt in tractatu proportionum, cum de proportionalitate Geometrica agebamus, docuimus, habebunt duo extremi numeri proportionem datæ proportionis duplicatam: si vero continuentur quatuor numeri, habebunt extremi duo triplicatam proportionem datæ proportionis. Conferendus autem est maior cum minore, quando data proportio est maioris inæqualitatis; minor vero cum maiore, cui data proportio minor inæqualitatis est; Veluti si desideretur proportio decuplæ proportionis duplicata, continuabimus tres numeros in proportione decupla hoc modo, 1. 10. 100. Vel 3. 30. 300. Nam proportio 100. ad 1. vel 300. ad 3. quę cętupla est, dicetur decuplæ duplicata. Eodē modo proportio 1. ad 100. vel 3. ad 300. quæ subcętupla est, dicitur duplicata proportionis subdecuplæ 1. ad 10. vel 3. ad 30.

Eadem ratione vt cognoscamus, quænam sit proportio illa, quæ verbi gratia componi dicitur ex tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia, statuemus ordine harum denominatores hoc modo, 3. 2. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{3}$. eosque inter se multiplicabimus, primum 3. in 2. deinde productum numerum 6. in $1\frac{1}{2}$ & hunc rursus numerum procreatum 9. in $1\frac{1}{3}$ & sic deinceps, si plures esset denominatores. Vltimus enim

productus 12. est denominator proportionis, quæ ex datis proportionibus componi dicitur; ita vt proportio duodecupla componi dicatur ex tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia. Hoc autem intelligemus etiam sine hac multiplicatione denominatorum. Si namque proportiones componentes continuentur in numeris, ita vt primus ad secundum habeat primam proportionem componentem, secundus ad tertium secundam, tertius ad quartum tertiam, quartus ad quintum quartam & ita deinceps; erit proportio, quam primus numerus habet ad vltimum, composita ex datis proportionibus. Vt in proximo exemplo proportiones datæ, videlicet tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia continuantur in his numeris 36.12. 6.4.3. Vel in his 108.36 18.12.9. vel in his 12,4.2.1$\frac{1}{3}$.1. Vbique enim primus numerus ad secundum proportionem habet triplam, secundus ad tertiam duplam, tertius ad quartum sesquialteram, & quartus ad quintum sesquitertiam. Proportio ergo primi ad vltimum, quæ duodecupla est, componi dicitur ex quatuor illis proportionibus, vt prius. Quo pacto autem quotuis proportiones continuandæ sint in numeris integris minimis, docet Euclides lib. 8. propos. 4.

Itaque cum Euclides demonstrat hoc lib. propos. 23. æquiangula parallelogramma habere proportionem compositam ex duabus proportionibus, quas duo latera circa vnum angulum vnius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, nihil aliud intelligit, quàm si duæ illæ proportiones laterum continentur in tribus quantitatibus, eam proportionem parallelogramma inter se habere, quã prima quantitas ad tertiam habet. Vt si proportio vnius lateris primi parallelogrammi ad vnum latus secundi fuerit, vt 8. ad 3. proportio vero alterius lateris ad alterum latus, vt 1. ad 2. nihil aliud est intelligendum, quam sumantur tres numeri, 24.9.18. quorum primus ad secundum est, vt 8. ad 3. & secundus ad tertium, vt 1. ad 2. proportionem parallelogrammi primi ad secundum esse eandem, quam habet primus numerus 24. ad tertium 18. quæ est sesquitertia. Proportio enim 24. ad 18. componitur vt dictum est, ex proportionibus 24 ad 9. & 9. ad 18. hoc est, ex proportionibus 8. ad 3. & 1. ad 2. quas inter latera esse diximus.

Porro quemadmodum interpretes nonnulli Euclidis volebant in defin. 10. lib. 5 duplicatam proportionem, & triplicatam, &c. vere esse maiorem illa, cuius duplicata, vel triplicata dicitur nimirum duplam, vel triplam, &c. ac propterea eam definitionem esse intelligendam de magnitudinibus continue proportionalibus in proportione maioris inæqualitatis; quod tamen falsum esse ibi indicauimus: ita iidem volunt etiam in hac compositione proportionum, extremorum proportionem, qua ex proportionibus intermedijs componi dicitur, vere esse maiorem qualibet intermediarum componentium, vtpote conflatam ex additione omnium intermediarum proportio-

portionũ inter ſe, ac proinde omnes intermedias proportiones debere eſſe minores extremorum proportione. Verum hoc falſum eſt, & Euclidi omnino repugnans, vt ex proximo exemplo quod ex propoſ. 23. huius lib. protulimus, perſpicuum eſt. Nam propoſitis tribus hiſce numeris 24. 9. 18. qui habent eaſdem proportiones ordine inter ſe, quas latera vnius parallelogrammi ad latera alterius parallelogrammi habent; erit proportio parallelogrammi ad parallelogrammum eadem, quæ 24. ad 18. nimirum ex laterum proportionibus compoſita, vt Euclides demonſtrat. Quis autem non videt, proportionem 24. ad 18. quæ ſeſquitertia eſt, multo minorem eſſe proportione 24. ad 9. quæ dupla eſt ſuperbipartiens tertias? Sed de hac re plura ſcribemus ad finem lib. 9.

Hæc cum ita ſint, ſi quis velit habere quotlibet proportiones datam proportionem componentes, id eſt, quarum denominatores inter ſe multiplicati gignant datæ proportionis denominatorem, ſtatuendi erunt inter duos numeros datæ proportionis quoſcunq; tot numeri medij quicunque, quot proportiones componentes deſiderantur, minus vno. Vt ſi quis velit tres proportiones, ex quibus centupla proportio componatur, ſatisfiet quæſtioni, ſi inter 100. & 1. duos numeros ponamus medios, hoc modo, 100. 50. 10. 1. Nam extremorum proportio 100. ad 1. componitur ex intermedijs tribus, hoc eſt ex dupla, quintupla, & decupla. Ita quoque ſi alios numeros ſtatuas medios, hoc modo 100. 10. 3. 1. componetur eadem proportio 100. ad 1. ex decupla, tripla, ſeſquitertia, & tripla. Sic etiam vides hic, 2. 3 1. 10. 1. duplam proportionem compoſitam ex quatuor, nimirum ex ſubſeſquialtera, tripla, ſubdecupla & decupla. Quod ſi quis petat quotuis proportiones datam proportionem componentes, quæ etiam omnes datæ ſint præter vnam, continuabimus ab vno extremo datæ proportionis omnes datas proportioes componentes ordine. Hæ enim cum proportione, quam vltimus medius ad alterum extremum datæ proportionis habet, component datam proportionem. Vt ſi quis dicat, da mihi quinque proportiones, quarum quatuor ſint, dupla, tripla, ſeſquialtera & quintupla ſeſquitertia, componentes proportionem ſeſquialteram inter 9. & 6. ſtatuemus hos quatuor numeros medios $9. 4\frac{1}{2}. 1\frac{1}{2}. 1\frac{1}{10}. 6.$ ita vt 9. ad $4\frac{1}{2}.$ habeant proportionem duplam, & $4\frac{1}{2}.$ ad $1\frac{1}{2}.$ triplam, & $1\frac{1}{2}.$ ad 1. ſeſquialteram: & 1. ad $\frac{1}{10}.$ quintuplam ſeſquitertiam. Ex his etenim quatuor, vna cum proportione $\frac{1}{10}.$ ad 6. quæ eadem eſt, quæ 1. ad 32. componitur proportio ſeſquialtera 9. ad 6. Idem eueniet, ſi datæ quatuor proportiones continuentur à minori extremo 6, hoc modo, 6 12. 36. 54. 288 9. ita vt 12. ad 6 habeant proportionem duplam; & 36. ad 12. triplam; & 54. ad 36. ſeſquialteram & 288. ad 54. quintuplam ſeſquitertiam. Nam quinta proportio 9. ad 288. eadem eſt, quæ prius $\frac{1}{10}.$ ad 6. qualis eſt 1 ad 32

Ex his nullo negotio ſatisfaciemus quæſtioni, qua quiſpiã poſtu-

lat

Jat ſibi dari quotuis numeros, qui inter ſe multiplicati procreent datum quemcunque numerum. Si namque ſumantur duo numeri habentes proportionem à dato numero denominatam, & inter eos ſtatuantur tot numeri quicunque minus vno, quot numeri deſiderantur, erunt denominatores proportionum intermediarum, quæ quæruntur. Nam ij inter ſe multiplicati producunt denominatorem proportionis extremorum, vt demonſtratum eſt, hoc eſt, numerum datum. Veluti ſi quis petat tres numeros, ex quorum mutua multiplicatione gignantur 100. ſtatuemus inter duos numeros 500. 5. centuplam proportionem habentes, duos medios numeros quoſcunque hoc modo 500. 250. 50. 5. eruntque tres quæſiti numeri 2. 5. 10. nimirum denominatores proportionum 500. ad 250. & 250. ad 50. & 50. ad 5. Nam ex 2. in 5 fiunt 10. & ex 10. in 10. fiunt 100. Quod ſi quis poſtulet vnum numerum, qui vna cum quotlibet alijs datis, ſi inter ſe multiplicentur, producat datum quemcunque numerum: Sumendi erunt rurſus duo numeri proportionem habentes à dato numero, qui produci debet, denominatam, & ab alterutro eorum continuandæ proportiones à datis alijs numeris denominatæ. Denominator enim proportionis inter alterum numerum, & vltimũ continuatorum erit numerus, quem quærimus. Vt ſi dentur hi quatuor numeri, 2. 3. $1\frac{1}{2}$. 5. $\frac{1}{3}$ quæraturque quintus alius, qui in numerũ ex illorum mutua multiplicatione productum ductus gignat datũ hunc numerũ $1\frac{1}{2}$ accipiemus duos numeros 9. & 6. proportionem ſeſquialteram habentes à dato numero $1\frac{1}{2}$. denominatam: & à 9. continuabimus quatuor proportiones à 2. 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. denominatas, hoc modo, 9. $4\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. $1_{\frac{3}{16}}$. 6. Quintus enim numerus quæſitus erit denominator proportionis $\frac{3}{16}$. ad 6. nimirum $\frac{1}{32}$. Nam quinque hi numeri 2. 3. $1\frac{1}{2}$. 5. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{32}$. quorum priores quatuor dati ſunt, quintus autem inuentus, inter ſe multiplicati procreant datum numerum $1\frac{1}{2}$. Idem quintus numerus $\frac{1}{32}$. inuenietur, ſi quatuor proportiones à datis numeris denominatæ continuentur à numero 6. hoc modo, 6. 12. 36. 54. 288. 9. Denominator enim proportionis 9. ad 288. eſt $\frac{1}{32}$. vt prius. Sic etiam ſi quærendi ſint quatuor numeri, qui inter ſe multiplicati procreent 1. ſtatuemus inter quoſuis duos numeros æquales proportionem æqualitatis ab 1. denominatam habentes, tres medios numeros quoslibet, vt hic vides 4. 2. 1. 3. 4. Nam denominatores proportionum 4. ad 2. & 2. ad 1. & 1. ad 3. & 3. ad 4. nimirum, 2, $2\frac{1}{3}$. $\frac{3}{4}$ ſunt quatuor numeri, qui quæruntur, quippe cum inter ſe multiplicati gignant 1.

Facilius huiuſmodi quæſtiones ſoluuntur, ſi tot numeri quicunque minus vno, quot petuntur, inter ſe multiplicentur, & per vltimum numerum productum, diuidatur datus numerus qui gigni debet. Quotiẽs enim & aſſumpti numeri, qui multiplicati inter ſe ſunt, erunt quos quærimus. Vt in proxima quæſt. ſi hi tres numeri,

vel-

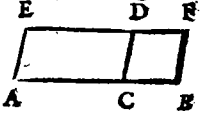
verbi gratia, 4.5.6. inter se multiplicentur & per numerum productum 120. diuidatur 1. qui produci debet, fiet Quotiēs $\frac{1}{120}$. Quatuor ergo numeri quæsiti sunt 4.5.6. $\frac{1}{120}$. Nam ex 4. in 5 fiunt 20. & ex 20. in 6. fiunt 120. & ex 120. in $\frac{1}{120}$ fit 1.

Postremo neque hoc prætermittendum est, videlicet: Quemadmodum, ordine positis quotcunque numeris, denominator proportionis extremorum producitur ex omnibus denominatoribus intermediarum proportionum, vt demonstrauimus; ita positis quotcunque numeris ordine, ita tamen, vt quilibet insequens sit suo antecedente maior, differentia extremorum coaceruatur ex omnibus differentijs intermediorum numerorum. Vt hic 3.7.12. 20.30.100. 713. differentia inter 3 & 713. est 710. At differentia inter 3. & 7. est 4. Inter 7. & 12. est 5. Inter 12. & 20. est 8. Inter 20. & 30. est 10. Inter 30. & 100. est 70. Inter 100 denique & 713. est 613. quæ omnes differentiæ 4.5.8.10.70.613. conficiunt 710. differentiam extremorum.

Atque hæc dicta sint de quinque definitionibus ab Euclide hoc 6. lib. positis, quibus addendum esse cēsemus sequentem sextā, quæ multum conducet, vt facilius intelligantur 27.28.29. & 30. propositiones huius libri, & quam plurimæ aliæ decimi libri. Ea autem est iusmodi.

VI.

Parallelogrammum secundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat maiorem lineam, quam sit ea secundum quam applicatur: ita tamen, vt parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, constituatque cum eo totum vnum parallelogrammum.



Sit data recta linea *AB*, supra quam constituatur parallelogrammum *ACDE*, quod non occupet totam lineam *AB*, sed desit *CB*; & ducta *BF*, parallela ipsi *CD*, donec cum *ED*, protracta conueniat in *F*, compleatur totum parallelogrammum *ABFE*. Parallelogrammum igitur *AD*, applicatum secundum rectam *AB*, deficere dicitur parallelogrammo *DB*, ita vt *DB*, appelletur defectus.

Rursus sit data recta linea *AC*, supra quam constituatur parallelogrammum *ABFE*, quod habeat latus *AB*, maius recta data *AC*; & ducatur *CD*, ipsi *BF*, parallela. Parallelogrammum igitur *AF*, applicatum secundum rectam *AC*, excedere dicitur parallelogrammo *DB*, ita vt *DB*, vocetur excessus.

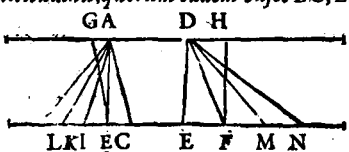
Hic

Hic autem defectus DB, vel exceſſus, in rectangulis quidem eſſe poteſt vel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem vel Rhombus, vel Rhomboides, vt perſpicuum eſt.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

Triangula & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe, vt baſes.

Sint duo triangula ABC, DEF, eandem habentia altitudinem, quorum baſes BC, EF. Item duo parallelogramma CG, EH, eiuſdem altitudinis, quorum eadem baſes BC, EF. Dico ita eſſe triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH, vt eſt baſis BC, ad baſin EF. Hoc eſt, ſi baſis BC, ſtatuatur prima magnitudo, & baſis EF, ſecunda: At triangulum ABC, vel parallelogrammum CG, tertia, & triangulum DEF, vel parallelogrammum EH, quarta, aque multiplicia primæ ac tertiæ ab aque multiplicibus ſecundæ & quartæ vel vna deficere, vel vna æqualia eſſe, vel vna excedere, vt definitio 6 lib. 5. exigit. Collocentur enim tam triangula, quam parallelogramma inter eaſdem parallelas GH, LN. (Nam vt in defin. 4. dictum eſt, triangula & parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter eaſdem fuerint conſtituta parallelas: ſic enim perpendiculares à verticibus ad baſes demiſſæ æquales erunt,) & ex BL, ſumantur quotcunque rectæ BI, IK, KL, ipſi BC, æquales; Item ex FN, abſcindantur quotcunque rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ AL, AK, AL; DM, DN.



a 38. primi. *a Erunt igitur triangula ABC, AIB, AKI, ALK, ſuper æquales baſes, & inter eaſdem parallelas conſtituta, inter ſe æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula DEF, DFM, DMN. Quam multiplex eſt ergo recta CL, rectæ BC, tam multiplex quoque erit triangulum ACL, trianguli ABC: & quam multiplex eſt recta EN, rectæ EF, tam quoque multiplex erit triangulum DEN, trianguli DEF, quia in tot triangula æqualia ſunt diuiſa tota triangula ACL, DEN, in quot rectas æquales ſectæ fuerunt totæ rectæ CL, EN. Quoniam vero ſi baſis CL, æqualis fuerit baſi EN,* b *neceſſario triangulum ACL, æquale eſt triangulo DEN, ac proinde ſi CL, maior fuerit quam EN, neceſſario ACL, maius eſt quam DEN, & ſi minor, minus: deficient propterea vna CL, recta, & triangulum ACL, aque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ ABC, ab EN, rectæ triangulo DEN, aque multiplicibus ſecundæ EF, & quartæ DEF, vel*

b 38. primi.

vna æqualia erunt, vel vna excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. a *Quare quæ proportio est primæ BC, ad secundam BF,* a 6. *def. quinti.*
basis ad basim, ea est tertiæ ABC, ad quartam DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad basin, ita est triangulum ad triangulum, quod est propositum.

Quoniam autem b *vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita* b 15. *quinti.*
*est parallelogrammum CG, (*c *quod duplum est trianguli ABC,) ad parallelogrammum EH: (*d *quod est duplum trianguli DEF,) per-* c 34. *pri.*
spicuum est, e *ita quoque esse parallelogrammum ad parallelo-* d 34. *pri.*
grammum, vt est basis ad basin. Quod tamen eodem argumento con- e 11. *quinti.*
firmari potest, quo vsi sumus in triangulis, si prius ex punctis K, L, educantur rectæ parallelæ ipsi BG; nec non ex punctis M, N, parallelæ ipsi FH, &c. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo; ita se habent inter se, vt bases. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Sed & conuersum huius demonstrabimus. Videlicet.

Triangula, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt bases, æquales habent altitudines vel eandem.

Sit triangulum ABC, ad triangulum DEF: & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum, DEFH, vt basis BC, ad basin EF. Dico eorum altitudines, nimirum perpendiculares AI, DK, esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit AI, si fieri potest, maior, quã DK. Abscissa igitur IL, ipsi DK, æquali, ductaque LM, ipsi BC, parallela, quæ latus AC, secet in N, coniunctaque recta BN: *f* erit NBC, triangulum ad triangulum DEF, vt basis BC, ad basin EF; cum altitudines LI, DK, ponantur æquales: Sed fuit etiam ABC, ad DEF, vt BC, ad EF; *g* Igitur triangula NBC, ABC, ad triangulum DEF, eandem habent proportionem: *h* Ac proinde æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt altitudines AI, DK, sed æquales. Eadem est ratio in parallelogrammis. Similienim argumento ostendemus parallelogramma NMBC, AGBC, æqualia esse, si altitudines AI, DK, inæquales dicantur, & LI, DK, æquales.

f 1. *sex.*

g 11. *quinti.*
h 9. *quinti.*

Addit hoc loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuius demonstrabimus. Videlicet.

Trian-

Triangula, & parallelogramma quorum æquales sunt bases, vel eadem, ita se habent inter se, vt altitudines.

Sint duo triangula ABC, DEF: & parallelogramma AGBC, DEFH, habentia bases æquales BC, EF. Dico esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt altitudo AI, est ad altitudinem DK. Si enim sumantur rectæ IL, KM, basibus BC, EF, æquales ducanturque rectæ LA, MD: *a* erit triangulum ALI, triangulo ABC, æquale, cum sint super bases æquales LI, BC, & inter easdem parallelas AG, IB. Eodem modo æquale erit triangulum DKM, triangulo DEF. *b* Quare erit, vt ABC, ad DEF, ita ALI, ad DKM. *c* Est autem, vt ALI, ad DKM, ita AI, ad DK. (Nam si bases ponantur AI, DK, erunt rectæ æquales LI, KM, altitudines.) Igitur & ABC, ad DEF, erit, vt AI, ad DK. Quod est propositum.

a 38. primi.
b 7. quinti.
c 1. sex.

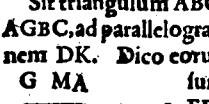
Quoniam vero est, *d* vt ABC, ad DEF, ita parallelogrammum AGBC, *e* quod trianguli ABC, duplum est, ad parallelogrammum DEFH, *f* quod trianguli DEF, est duplum. *g* Erit quoque AGBC, ad DEFH, vt AI, ad DK. Quod tamen eodem modo confirmari potest, si rectæ ducantur LG, MH. Idem sequetur, si triangula, & parallelogramma eandem habuerint basin.

d 15. quinti.
d 34. pri.
f 34. pri.
g 11. quinti.

Hoc vero conuertemus etiam, ad hunc modum.

Triangula, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt altitudines, æquales habent bases, si vnam & eandem non habeant.

Sit triangulum ABC, ad triangulum DEF: & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt altitudo AI, ad altitudinem DK. Dico eorum bases BC, EF, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit BC, si fieri potest, maior, quam EF. Abscissa igitur BL, ipsi EF, æquali, ductaque recta LA; erit, vt proxime demonstratum est, ABL, ad DEF, vt AI, ad DK. Sed vt AI, ad DK, ita ponitur esse ABC, ad DEF, *h* Igitur ABL, ABC, ad DEF, eadem habent proportionem: *i* Ac proinde inter se æqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases BC, EF, sed æquales. Eademque est ratio de parallelogrammis. Simili enim argumento ducta LM, ipsi GB, parallela, ostendemus.



h 11. quinti.
i 9. quinti.

demus parallelogramma MGBL, AGBC, æqualia esse, si bases BC, BF, dicantur inæquales, & BL, EF, æquales.

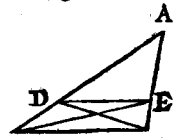
In omnibus autem his non variabitur demonstratio, etiamsi triangula, & parallelogramma sint rectangula, ita vt altitudines sint ipsorum latera, vel vnum fuerit rectangulum, alterum vero non. Non assumpsimus casum difficiliorem, quando scilicet neutrum est rectangulum. Ita enim demonstratio maiore indiget nonnunquam constructione.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

ij.

Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

In triangulo ABC, ducatur primum recta DE, *parallela lateri* BC. *Dico latera* AB, AC, *secta esse proportionaliter in* D, *&* E, *hoc est, esse vt* AD, *ad* DB, *ita* AE, *ad* EC. *Ductis enim rectis* CD, BE, a *erunt triangula* DEB, DEC, *super eandem basin* DE, *& inter easdem parallelas* DE, BC, *constituta, inter se aequalia.* b *Quare vt triangulum* ADE, *ad triangulum* DEB, *ita est triangulum idem* ADE, *ad triangulum* DEF: c *Atqui vt triangulum* ADE, *ad triangulum* DEB, *ita est basis* AD, *ad basin* DB: (*cum hæc triangula sint eiusdem altitudinis, vt constat, si per* E, *agatur parallela rectæ ipsi* AB,) *& eadem ratione, vt triangulum* ADE, *ad triangulum* DEC, *ita est basis* AE, *ad basin* EC. d *Vt igitur* AD, *ad* DB, *ita est* AE, *ad* EC, (*cum hæ duæ proportiones eadem sint proportioni trianguli* ADE, *ad triangulum* DEC,) *quod est propositum.*



a 37. pri.
b 7. quinti.
c 1. sexti.
d 11. quinti.

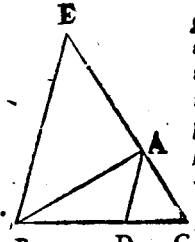
Secet deinde recta DE *latera* AB, AC, *proportionaliter. Dico* DE, *parallelam esse reliquo lateri* BC. *Ductis enim rursum rectis* CD, BE, e *erit vt basis* AD, *ad basin* DB, *ita triangulum* ADE, *ad triangulum* DEB, *cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autem vt* AD, *ad* DB, *ita* AE, *ad* EC. f *Igitur erit vt triangulum* ADE, *ad triangulum* DEB, *ita* AE, EC: *Sed rursus* g *vt basis* AE, *ad basin* EC, *ita est triangulum* ADE, *ad triangulum* DEC, *cum sint altitudinis eiusdem.* h *Igitur vt triangulum* ADE, *ad triangulum* DEB, *ita est triangulum idem* ADE, *ad triangulum* DEC, i *Aequalia ergo sunt triangula* DEB, *&* DEC. *Ac propterea, cum eandem habeant basin* DE, k *inter easdem erunt collocata parallelas.*

e 1. sexti.
f 11. quinti.
g 1. sexti.
h 11. quint.
i 9. quint.
k 39. pri.

Igitur parallela eſt DE, ipſi BC, quod eſt propoſitum. Si itaque ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.

iij. THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea ſecuerit & baſin: baſis ſegmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera. Et ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera: recta linea, quæ à vertice ad ſectionem producitur, bifariam ſecat trianguli ipſius angulum.



In triangulo ABC, *recta* AD, *ſecet primo angulum* BAC, *bifariam. Dico eſſe vt* EA, *ad* AC, *ita* BD, *ad* DC, *Agatur enim per* B, *recta* BE, *parallela ipſi* AD, *donec cum* CA, *producta conueniat in* E; *(coibunt autem omnino* BE, CA, *propterea quod anguli* C, & CBE, *minores ſunt duobus rectis. Cum enim* C, & CDA, a *minores duobus rectis ſint;* b *ſit autem angulus* CDA, *angulo* CBE, *externus interno, æqualis: erunt quoque* C, & CBE; *duobus rectis minores)* c *eritque angulus* EBA, *æqualis alterno* BAD: & *angulus* E, *externo* DAC, *Cum igitur duo anguli* BAD, DAC, *æquales ponantur; erunt &* anguli EBA, & E, *inter ſe æquales;* d *Ideoque &* recta BA, EA, *inter ſe æquales.* e *Vt igitur* EA, *ad* AC, *ita* BA, *ad eandem* AC. f *Atqui vt* EA, *ad* AC, *ita eſt* BD, *ad* DC, *cum in triangulo* BCE, *recta* AD, *ſit parallela lateri* BE. g *Igitur vt* BA, *ad* AC, *ita eſt* BD, *ad* DC. *Quod eſt propoſitum.*

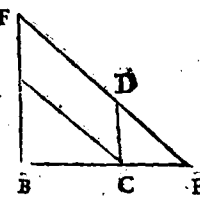
Sit deinde vt BA, *ad* AC, *ita* BD, *ad* DC. *Dico rectam* AD, *bifariam ſecare angulum* BAC. *Agatur enim rurſus per* B, *recta* BE, *ipſi* AD, *parallela coiens cum* CA, *protracta in* E. *Quoniam igitur vt* BA, *ad* AB, *ita ponitur* BD, *ad* DC. h *Vt autem* BD, *ad* DC, *ita eſt* EA, *ad* AG; *(quod in triangulo* BCE, *recta* AD, *ſit lateri* BE, *parallela)* i *Erit vt* BA, *ad* AC, *ita* EA, *ad eandem* AC. k *Æquales igitur ſunt* BA, & BB, *inter ſe,* l *ac propterea anguli* ABE, & E, *æquales quoque erunt.* m *Cum igitur angulus* ABE, & E, *æqualis ſit alterno* BAD, & *angulus* E, *externo* DAC, *erunt & duo anguli* BAD, DAC, *inter ſe æquales, quod eſt propoſitum. Itaque ſi trianguli angulus bifariam ſectus ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.*

a 17. primi.
b 29. primi.
c 29. primi.
d 6. pri.
e 7. quinti.
f 2. ſexti.
g 11. quinti.
h 2. ſexti.
i 11. quinti.
k 9. quinti.
l 5. pri.
m 29. primi.

THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 4. IV.

Æquiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

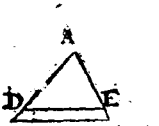


Sint æquiangula triangula ABC, DCE, *sintque æquales anguli* ABC, DCE, & ACB, DEC, & BAC, CDE. *Dico esse* AB, *ad* BC, *vt* DC, *ad* CE, & BC, *ad* CA, *vt* CE, *ad* ED: & AB, *dentq; ad* AC, *vt* DC, *ad* DE: *ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos & consequentia similiter. Constituantur latera* BC, CE, *secundum lineam rectam, ita vt angulus* DCE, *externus sit æqualis interno* ABC, *parsterque externus* ACB, *interno* DEC. *Et quia duo anguli* ABC, ACB, *a minores sunt duobus rectis: est autem angulo* ACB, *æqualis angulus* DEC, *erunt & anguli* B, & E, *duobus rectis minores.* b *Quare rectæ* BA, & ED *productæ ad partes* A, D, *coibunt. Producantur ergo, & conueniant in* F. *Quoniam vero angulus externus* DCE, *æqualis est interno opposito* ABC: c *parallelæ erunt* CD, & BF. *Eadem ratione parallelæ erunt* CA, & EF: *quod angulus externus* ACB, *sit æqualis interno* DEC. *Parallelogrammum est igitur* ACDF, d, *propterea quæ recta* AF, *æqualis rectæ* CD; & *recta* CA, *rectæ* DF. *Quoniam igitur in triangulo* BEF, *recta* AC, *parallela est lateri* EF, e *erit* AB, *ad* AF, *hoc est, ad* DC, (*quæ æqualis est ipsi* AF,) *vt* BC, *ad* CE. *Permutando* f *igitur erit* AB, *ad* BC, *vt* DC, *ad* CE. *Rursus quia in eode triangulo* BEF, *recta* CD, *parallela est lateri* BF, *erit* BC, *ad* CE, *vt* FD, *hoc est, vt* CA, (*quæ æqualis est ipsi* FD,) *ad* ED. *Permutando* g *igitur erit* BC, *ad* CA, *vt* CE, *ad* ED. *Cum igitur sit* AB, *ad* BC, *vt* DC, *ad* CE, & BC, *ad* CA, *vt* CE, *ad* ED: h *erit & ex æquali* AB, *ad* CA, *vt* DC, *ad* ED. *Quod est propositum. Æquiangulorum ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.*

a 17. *pri.*
b 13. *pronunc.*
c 28. *primi.*
d 34. *prim*
e 2. *sexti.*
f 16. *quinti.*
g 2. *sexi.*
h 16. *quinti.*

COROLLARIVM.

Hinc fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Ducatur enim in triangulo ABC, lateri BC, parallela DE. Dico triangulum ADE, toti triangulo ABC, esse simile. Æquiangula namque sunt, *k* cum anguli ADE, AED, æquales sint angulis ABC, ACB, externis & angulus A, communis. Quare vt demonstratum est, *l* habent latera circa æquales angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.



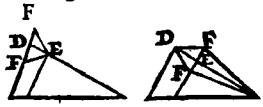
k 29. *pri.*
l 4. *sexti*

SCHOLIVM.

Non alienum à noſtro inſtituto eſſe puto, ſi hic demonſtremus duo theoremata, quorum primum Federicus Commandinus demonſtrat in libello Archimedis de ijs, quæ vehuntur in aqua: Secundum vero in commentarijs in Apollonij Conica. Horum primum eſt.

Si ex duobus punctis cuiuſuis rectæ, quorum alterum ſit extremum, alterum vero intra lineam, duæ parallelæ inter ſe ad eaſdem partes educantur, ita proportionem habeant eandem, quam rectæ inter ipſas, & alterum extremum punctum includſæ: Recta coniungens extremum vnius earum cum extremo prioris lineæ tranſibit per extremum alterius lineæ.

Sit recta AB, & ex punctis A, & C, educantur duæ parallelæ AD, CE, proportionem habentes, quam AB, BC, ita vt ſit AD, ad CE, ſicut AB, ad BC, vel CE, ad AD, vt BC, ad AB. Dico rectam, quæ coniungit extrema B, & E, tranſire per punctum D. Item rectam, quæ coniungit extrema B, & D, tranſire per punctum E. Si enim recta BE, non tranſit per D, coeat cum AD, in F, puncto, quod ſit vel ſupra D, vel infra, vt in prima figura. Quoniam igitur per coroll. hujus propoſ. triangula AF, BCE, ſimilia ſunt: *a* erit, vt AB, ad AF, ita BC, ad CE: Et permutando,



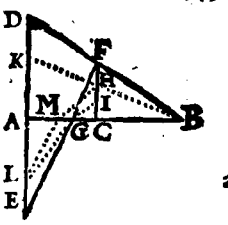
b vt AB, ad BC, ita AF, ad CE: Vt autem AB, ad BC, ita erat quoque AD, ad CE. *c* Igitur erit vt AF, ad CE, ita AD, ad CE: *d* Ac propterea æquales erunt rectæ AF, AD, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſit ergo recta BE, per punctum D. Quod eſt primum.

Rurſus ſi recta BD, non tranſit per E, tranſeat per F, punctum, quod ſit vel ſupra E, vel infra, vt in ſecunda figura. Quoniam ergo per coroll. huius prop. triangula BAD, BCF, ſimilia ſunt: *e* erit, vt AB, ad AD, ita BC, ad CF: *f* & permutando, vt AB, ad BC, ita AD, ad CF: Vt autem AB, ad BC, ita quoque erat AD, ad CE, *g* Igitur erit, vt AD, ad CF, ita AD, ad CE: *h* Ac proinde æquales erunt rectæ CF, CE, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſit ergo recta BD, per E Quod eſt ſecundum.

Hoc etiam verum eſt, quando duæ parallelæ in diuerſas partes ducuntur, habentes eandem proportionem, quam ſegmenta rectæ inter parallelas conterminas, & punctum idem intra datam rectam. Vt in figura problematis 7. ſcholij propoſ. 17. ſi fuerint parallelæ AE, FC, in diuerſas partes ductæ, fuerintque vt AE, ad CF, ita AG, ad CG,

a 4. *ſexti.*
b 16. *quinti.*
c 11 *quinti.*
d 9. *quinti.*
e 4. *ſexti*
f 16. *quinti.*
g 11 *quinti.*
h 9. *quinti*

CG, transibit recta EF per G, hoc est, duæ rectæ EG, FG, vnam rectam constituent. Cum enim sit, vt AE, ad CF, ita AG, ad CG: erit permutando quoque, vt AE, ad AC, ita CF, ad CG. Cum ergo anguli alterius A, C, æquales sint: *a* erunt quoque anguli AGE, CGF, æquales. Cum ergo AC, sit linea recta, constituent EG, FG, lineam quoque rectam ex ijs, quæ ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. demonstrauimus.

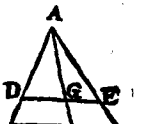


a 6. *sexti.*

Alterum vero est.

Si in triangulo quovis vni lateri parallela recta agatur; & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppositum recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus illud, in easdem rationes.

In triangulo ABC, ducta sit DE, lateri BC, parallela, & ex puncto F, quocunque ad angulum A, recta extendatur FA, secans DE, in *G*. Dico esse, vt BF, ad FC, ita DG, ad GE. Quoniam enim triangula AFB, AGD, ex coroll. huius propos. similia sunt: *b* erit vt AF, ad BF, ita AG, ad DG, *c* & permutando, vt AF, ad AG, ita BF, ad DG. Atque eodem argumento concludemus esse, vt AF, ad AG, ita FC, ad GE. *d* Igitur erit vt BF, ad DG, ita FC, ad GE, & permutando: vt BF, ad FC, ita DG, ad GE. Quod est propositum.



b 4. *sexti.* c 16. *quinto.* d 11 *quinti.*

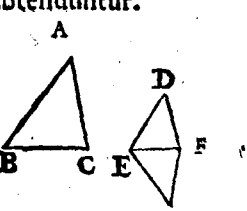
Aliter. Quoniam triangula ABE, ADG, similia sunt, nec non triangula AFC, AGE, per coroll huius propos. *e* erit vt BF, ad FA, ita DG, ad GA: Item vt FA, ad FC, ita GA, ad GE. *f* Ex æquo igitur, vt BF, ad FC, ita erit DG, ad GE. Quod erat demonstrandum.

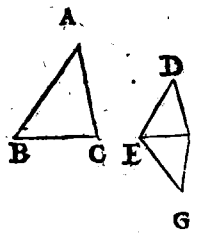
e 4. *sexti.* f 22. *quinti.*

THEOR. 5. PROPOS. 5. V.

Si duo triangula latera proportionalia habeant: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

Habeant triangula ABC, DEF, *latera proportionalia, sitque* AB, *ad* BC, *vt* DE, *ad* EF, *&* BC, *ad* CA, *vt* EF, *ad* FD, *&* AB, *denique ad* AC, *vt* DE, *ad* DF. *Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo* D, *& angulum* B, *angulo* E, *&* C, *angulo* F. *Sic enim anguli æqua-*





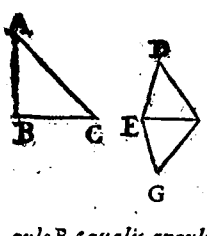
a 32. pri.
b 4. sext.
c 11. quinti.
d 9. quinti.
e 4. sexti.
f 11 quinti.
g 9. quinti.
h 8. pri.
i 4. pri.

les respiciunt homologa latera. Fiat angulus FEG, æqualis angulo B: *& angulus* EFG, *angulo* C, *conueniantque rectæ* EG, FG, *in* G: *eritque reliquus angulus* G, *reliquo angulo* A, *æqualis. Æquiangula igitur sunt triangula* ABC, GEF. *Quare* b *vt* AB, *ad* BC, *ita est* GE, *ad* EF: *Vt autem* AB, *ad* BC, *ita ponitur* DE, *ad* EF. c *Igitur vt* GE, *ad* EF, *ita est* DE, *ad* EF, d *eandem, propterea quæ æquales erunt* GE, DE. *Rursus,* e *quoniam vt* BC, *ad* CA, *ita est* EF, *ad* FG: *Vt autem* BC, *ad* CA, *ita ponitur* EF, *ad* FD: *erit vt* EF, *ad* FG, *ita eadem* EF, *ad* FD: f *quæ æquales erunt* EG, FD. *Itaque cum latera* EG, FG, *æqualia sint lateribus* DE, DF, *vtrumque vtrique: & basis communis* EF: h *erunt anguli* G, *&* D, *æquales:* i *ac propterea & reliqui anguli* GEF, GFE, *reliquis angulis* DEF, DFE, *æquales erunt. Quamobrem cum angulus* G, *æqualis sit angulo* A: *erit & angulus* D, *eidem angulo* A, *æqualis, eodemque modo angulus* DEF, *angulo* B, *angulus* DFE, *angulo* C, *æqualis erit, quod est propositum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendum erat.*

vj.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.



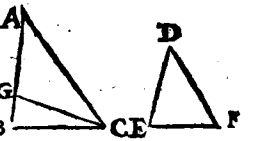
k 4. sexti.
l 11 quinti.
m 9. quinti.

Sit angulus B, *trianguli* ABC, *æqualis angulo* E, *trianguli* DEF, *sintque latera* AB, BC, *proportionalia lateribus* DE, EF, *hoc est sit* AB, *ad* BC, *vt* DE, *ad* EF. *Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulum scilicet* A, *angulo* D, *& angulum* C, *angulo* F: *Ita enim æquales anguli homologa latera respiciunt. Fiat angulo* B, *æqualis angulus* FEG: *& angulo* C, *angulus* EFG: *eritque, vt in præcedenti propositum est, triangulum* GEF, *triangulo* ABC, *æquiangulum. Quare* k *vt* AB, *ad* BC, *ita est* GE, *ad* EF: *Sed vt* AB, *ad* BC, *ita ponitur* DE, *ad* EF: l *Igitur vt* DE, *ad* EF, *ita est* GE, *ad eandem* EF: m *atque idcirco* DE, GE, *æquales erunt. Itaque cum latera* DE, EF, *æqualia sint lateribus* GE, EF, *& anguli ipsis contenti æquales quoque: (nam angulo* B, *cui factus est æqualis angulus* FEG,

FEG, æqualis est positus angulus DEF, propterea quæ æquales ad inuicem erunt anguli DEF, GEF) a erunt reliqui anguli D, EFD, reliquis angulis G, EFG, æquales. Cum ergo angulus G, sit æqualis angulo A, & angulus EFG, angulo C; erunt etiam anguli A, & C, æquales anguli D. EFD, & ob id æquiangula erunt triangula ABC, DEF. quod est propositum. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod erat demonstrandum. a 4. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorũ vero simul vtrumq; aut minorem, aut non minorem recto: Æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.



Sit angulus A, trianguli ABC, æqualis angulo D, trianguli DEF, & latera AC, CB, circa angulum ACB, proportionalia lateribus DF, FE; circa angulum F, hoc est, sit vt AC, ad CB, ita DF, ad FE, hac tamen lege, vt quilibet reliquorum angulorum B, & E, sit vel minor recto, vel non minor. Dico æquiangula esse triangula, angulos scilicet ACB, & F, circa quos sunt latera proportionalia, & angulos B, & E, æquales esse. Sic enim primum tam B, quam E, recto minor: Quo posito, si anguli ACB, & F, non sunt æquales sit ACB, maior quam F, fiatque ipsi F, æqualis ACG. Cum igitur & angulus A, angulo D, ponatur æqualis, a erit & reliquus AGC, reliquo E, æqualis: ideoq; triangula AGC, DEF, æquiangula erunt. Quare b vt AC, ad CG, ita erit DF, ad FE: Sed vt DF, ad FE, ita ponitur AC, ad CB. c Vt igitur AC, ad CG, ita erit eadem AC, ad CB, d ac propterea æquales erunt CG, CB, & anguli CBG. CGB, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & CGB, minor recto. ideoque ei deinceps AGC, recto maior: f cum AGC, CGB, sint duobus rectis æquales: Est autem ostensus angulus AGC, angulo E, æqualis. Maior igitur recto est quoque angulus E, : Sed positus est etiam recto minor. Quod est absurdum. a 32. primi. b 4. sexti. c 11. quinti. d 9. quinti. e 5. primi. f 18. primi.

Sit deinde tam B, angulus, quam E, recto non minor, eritque vt prius, angulus B, angulo CGB, æqualis, ideoque & CGB, recto non minor erit: ac propterea anguli CBG, CGB, in triangulo BCG, non minores erunt duobus rectis, sed vel maiores, vel

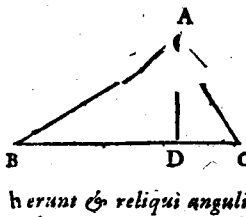
a 17. primi. aquales duobus rectis, quod eſt abſurdum. a Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales ſunt anguli ACB, & F, ſed æquales, atque b 32. primi. b idcirco reliqui etiam anguli B, & E, æquales erunt, quod eſt propoſitum. Si duo itaque triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

Addidit Euclides, vtrumque angulum reliquorum B, & E, debere eſſe vel minorem recto, vel non minorem. Nam alias manente tota hypotheſi, non ſequeretur, triangula eſſe æquiangula. Si enim in eodem triangulo ABC, ſit CG, æqualis ipſi CB, (quod fieri poteſt, c 19. primi. quando angulus B, acutus eſt, & maior angulo A. Sic enim c erit latus CA, latere CB, maius. Si igitur ex C, ad interuallum CB, circulus deſcribatur, ſecabit is rectam AB, priuſquam rectam AC, quæ longior eſt, quam CB, ſecet. Secabit autem ille circulus neceſſario rectam AB, propterea quod ob acutum angulum B, recta AB, intra eum circulum cadit: quippe cum infra contingentem lineam ducatur, quæ ad B, angulum rectum conſtituit cum CB, vt patet ex propoſ. 16. lib. 3.) habebunt duo triangula ABC, AGC, vnum angulum vni angulo æqualem, imo angulum A, communem; & circum d 7. quinti. alios angulos ACB, ACG, latera proportionalia, hoc eſt, d vt AC, ad CB, ita erit eadem AC, ad CG, cum æquales ponantur rectæ CB, CG, & tamẽ non ſunt vllo modo æquiangula triangula ABC, AGC, e 5. pri. vt conſtat. Quod ideo euenit, quia non vterque angulorum ABC, f 17. vel 32. primi. AGC, minor eſt recto, vel non minor. Imo ABC, eſt quidem recto minor. AGC, verò recto maior. Cum enim CG, CB, latera æqualia g 13 primi. ſint, e & ideo anguli CBG, CGB, æquales; f erit vterque eorum recto minor, g ac propterea AGC, recto maior.

viij. ## THEOR. 8. PROPOS. 8.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt.



In triangulo ABC, *angulus* BAC, *ſit rectus, à quo ad baſin perpendicularis agatur* AD. *Dico triangula* ADB, ADC, *ſimilia eſſe & toti triangulo* ABC, *& inter ſe. Cum enim in triangulis* ABC, DBA, *anguli* BAC, & ADB, *ſint recti, & angulus* B, *communis,* h 32. prim. h *erunt & reliqui anguli* ACB, & DAB, *æquales.* Æquian- i 4. ſexti. *gulum igitur eſt triangulum* DBA *triangulo* ABC, i *ac propterea*

ha-

habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, &c. hoc est, erit ut CB, ad BA, ita BA, ad BD; & ut BA, ad AC, ita BD, ad DA; & ut BC, ad CA; ita BA, ad AD. Ita enim latera homologa æqualibus angulis opponuntur, ut vult propos. 4. hujus lib. Quare simile est triangulum ADB, toti triangulo ABC. Eodem modo ostendetur triangulum ADC, simile eidem triangulo ABC. Nam anguli BAC, & ADC, sunt recti, & angulus C, communis a *ac propterea reliqui anguli ABC, & CAD, æquales. Quare* b *ut BC, ad CA, ita est CA, ad CD: & ut CA, ad AB, ita CD, ad DA: & ut CB, ad BA, ita CA; ad AD. Sic enim opponuntur quoque homologa latera angulis æqualibus, ex præscripto propos. 4. hujus lib. Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangula ADB, & ADC, cum anguli ADB, ADC, sint recti, & anguli ABD, CAD, ostensi æquales, nec non anguli BAD, ACD: Atq; idcirco sit* c *ut BD, ad DA, ita DA, ad DC: & ut DA, ad AB, ita DC, ad CA, & ut AB, ad BD, ita CA, ad AD. Si igitur in triangulo, rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit, &c. Quod erat demonstrandum.*

a 32. primi
b 4. sexti.
c 4. sexti.

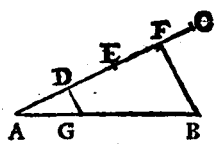
COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basin demittitur, esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta: Item utrumlibet laterum angulum rectum ambientium, medium proportionale inter totam basin, & illud segmentum basis, quod ei lateri adjacet.

Ostensum est enim, esse ut BD, ad DA, ita DA, ad DC: ac propterea DA, esse mediam proportionalem inter BD; & DC; Item esse ut CB, ad BA, ita BA, ad BD; & idcirco BA, mediam esse proportionalem inter CB, & BD: Denique esse ut BC; ad CA, ita CA, ad CD; ideoque CA, esse proportionalem mediam inter BC, & CD. Quod est propositum.

PROBL. 1. PROPOS. 9. IX.

A data recta linea imperatam partem auferre.



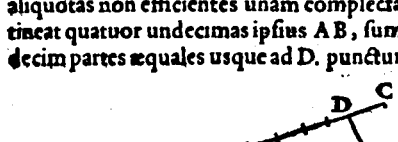
Imperetur, ut ex linea AB, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta AC, utcunque faciens angulum CAB; & ex AC, abscindantur tot partes æquales cujuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda est ex AB, ut in proposito exemplo tres AD, DE, EF. Deinde ex F, ad B recta ducatur FB, cui per D, parallela agatur DG. Dico AG, esse partem tertiam imperatam rectæ AB. Nam cum in triangulo ABF, lateri FB, parallela sit recta DG: d *erit ut FD, ad DA, ita BG, ad GA,* c *Componendo igitur, ut FA, ad DA, ita BA, erit ad GA: Sed FA, ipsius AD, est tripla, ex constructione. Igitur & BA, ipsius AG, erit tripla;*

d 2. sexti.
c 18. quinti

pla; ideoque AG, tertia pars erit ipsius AB, qua imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat.

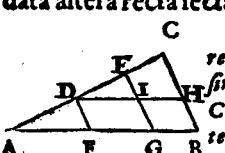
SCHOLIVM.

Quod si ex AB, auferenda sit pars non aliquota, sed quæ plures aliquotas non efficientes unam complectatur, nimirum quæ contineat quatuor undecimas ipsius AB, sumendæ erunt ex AC, undecim partes æquales usque ad D. punctum, ex quo ad B, recta ducatur DB; & huic parallela EF, ex E, termino quatuor partium. Nam AF, erit pars imperata. Erit enim rursus ut DA, ad AE, ita BA, ad AF, Quare, & convertendo ut AE, ad AD, ita AF, ad AB: Est autem AE, pars continens quatuor undecimas ipsius AD, ex constructione. Igitur & AF, eadem pars rectæ AB. Quod est propositum. Non aliter detrahetur ex AB, pars complectens quotcunque partes ipsius aliquotas non facientes unam.



XII. PROBL. 2. PROPOS. 10.

Datam rectam lineam insectam similiter secare, ut data altera recta secta fuerit.

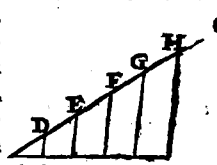


Sit recta AB, secanda similiter, ut secta est recta AC, in D. & E, hoc est, in partes, quæ sint partibus AD, DE, EC. proportionales. Conjungantur data duæ lineæ ad A, facientes angulum quemcunq; BAC, & connectatur recta BC. Deinde ex D, E, agantur DF, EG, parallelæ ipsi BC. Dico rectam AB, similiter esse sectam in a 2. sexti. *F, & G, ut est secta AC, in D, & E. Nam a ut AD, ad DE, ita est AF, ad FG. Proportionales ergo sunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod si ducatur DH, ipsi FB, parallela, secans EG, in* b 2. sexti. *I;* b *erit rursus, ut DE, ad EC, ita DI, ad IH, hoc est, ita FG, ad* c 34. primi. *GB;* c *quod FG, ipsi DI, & GB, ipsi IH, æqualis sit. Quare proportionales; quoq; erunt partes FG, GB, partibus DE, EC. Eademque ratio est de pluribus partibus, si ex E, & C, ipsi AB, parallelæ agantur, &c. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, ut data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.*

SCHOLIVM.

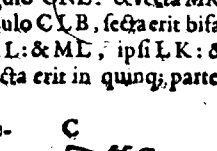
Ex hoc problemate colligi potest facilis admodum via, ac ratio dividendi lineam rectam datam in partes quotcunque æquales: id, quod

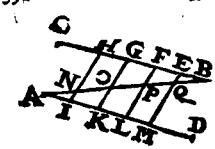
quod nos ad propoſ. 10. lib. 1. facturos recipimus, & alia jam via idem ad propoſ. 40. lib. 1. demonſtravimus. Sit enim data recta AB, dividenda in quinq; partes æquales. Ducta recta AC, faciente cum AB, quemcunque angulum CAB, ſumantur ex ea quinque partes æquales AD, DE, EF, FG, GH. Quia igitur linea recta AH, utcunque eſt diviſa, ſi ex H, ad B, ducatur recta HB, & huic ex punctis, D, E, F, G, parallelæ agantur DI, EK, FL, GM: erit AB, ſimiliter diviſa, ut AH, ut conſtat ex demonſtratione hujus problematis. Cum igitur AH, ſit diviſa in quinque partes æquales, erit & AB, in totidem æquales partes diviſa. Haud aliter in plures partes æquales dividetur eadem recta AB.



Huic rationi dividendæ lineæ rectæ in quotcunque partes æquales, adjungi poſſunt aliæ non injucundæ, ut propoſ. 10. lib. 1. ſumus polliciti, atq; ad propoſ. 40. lib. 1. demonſtravimus. Sit enim rurſus data linea recta AB, dividenda in quinq; partes æquales. Ducatur ex B, recta BC, utcunque faciens angulum cum AB: Deinde ex aſſumpto puncto D, ſive ſupra B, ſive infra agatur DE, parallela ipſi AB, ex qua abſcindantur quinque æquales partes DF, FG, GH, HI, IE, ea lege tamen, ut ſi D, eſt ſupra B, recta DE, ex quinque partibus æqualibus conſtans, minor ſit, quam AB, major vero, ſi D, exiſtit infra B. Poſtremo ex A, per E, recta ducatur AC, occurrens ipſi BC, in G, puncto, à quo per puncta F, G, H, I, rectæ ducantur CK, CL, CM, quas dico dividere rectam AB, in quinq; partes æquales. Cum enim DE, ſit parallela ipſi AB, dividentur EH, & AM, in triangulo CAM, proportionaliter, ex ſcholio propoſ. 4. hujus lib. Cum ergo EH, ſecta ſit bifariam in I, ſecta quoq; erit AM, bifariam in N. Eadem ratione recta NL, in triangulo CNL: & recta MK, in triangulo CMK: & recta LB, in triangulo CLB, ſecta erit bifariam. Eſt ergo AN, ipſi NM: & NM, ipſi ML: & ML, ipſi LK: & LK, ipſi KB, æqualis: ac proinde AB, ſecta erit in quinq; partes æquales. Quod eſt propoſitum.

Aliter. Ab extremis punctis A, & B, educantur duæ rectæ BC, AD, inter ſe parallelæ: hoc eſt, conſtituentes angulos AB, æquales: Et ex BC, abſcindantur quatuor partes æquales BE, EF, FG, GH, ut ſint tot partes, una minus, in quot eſt linea dividenda: His autem ex AD, totidem æquales reſecentur AI, IK, KL, LM. Ductis igitur rectis EM, FL, GK, HI,

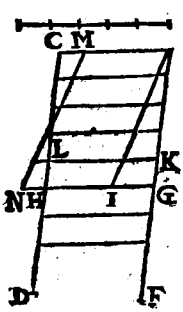




GK, HI, secantibus rectam AB, in N. O. P. Q. dico ipsam AB, sectam esse in quinque partes æquales. Cum enim æquales sint, & parallelæ GH, IK, *a* erunt & HI, GK, parallelæ: Eademque ratione parallelæ erunt GK, FL, EM. Quare cum AM, secta sit in quatuor æquales partes, erit & AQ similiter in quatuor partes æquales divisa, ut constat ex demonstratione hujus 10. propos. Eadem ratione divisa erit & BM, in quatuor partes æquales, eo quod BH, in totidem est partes æquales divisa. Quare cum tam AN, quam BQ. æqualis sit singulis partibus NO. OP. PQ: erunt omnes quinque partes AN. NO. OP, PQ. QB. inter se æquales. Quod est propositum.

a 33. primi.

Aliter. Præparetur prius instrumentum huic rei accommodatum, in hunc modum: Ductis duabus rectis inter se parallelis utcunque CD, EF: ex utraque abscindantur partes inter se æquales quotcunque, saltem tot, in quot partes dividenda proponitur linea, & bina puncta correspondentia lineis rectis jungantur. Deinde beneficio circini capiatur longitudo rectæ AB, dividendæ, eaque ex aliquo puncto lineæ CF, ut ex E, transferatur in instrumentum ad punctum I: illius lineæ transversæ, quæ tot spatia terminat, in quot partes linea proponitur dividenda, qualis in exemplo est recta GH: ea enim includit quinque spatia. Postremo ex E. ad I. recta ducatur EI. quam dico divisam esse in quinque æquales partes. Cum enim GK. HL. æquales sint & parallelæ: *b* erunt quoque GH. KL. parallelæ. Eodem que modo omnes lineæ inter rectas CD, EF. inter se parallelæ ostendentur. Quare ut ex demonstratione hujus 10. propos. liquet, quemadmodum EG. divisa est in quinque partes æquales, ita similiter in totidem divisa erit EI. Nam si punctum E. sumptum non fuerit idem quod E. vel C. producenda est IE, donec cum FE. vel DC. coeat. Tunc enim ut in hac 10. propos. probatum est erunt rectæ, EI. EG. similiter divisæ. Quod si forte IE, nec cum FE, nec cum DC. concurrat, sed utrique sit parallela, *c* erunt singulæ partes rectæ EI. singulis partibus rectæ EG, æquales, ob parallelogramma inter parallelas inclusæ. Cum ergo omnes partes rectæ EG, sint æquales, erunt quoque omnes partes rectæ EI, æquales. Si igitur beneficio circini singulæ partes lineæ EI. transferantur in rectam propositam AB, ipsi EI, æqualem, divisa erit & AB, in quinque partes æquales. Quod est propositum.



b 33. primi

c 34. primi.

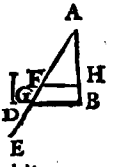
Est autem nonnunquam necesse lineas parallelas extra instrumen-

mentum producere. Vt si eadem linea transferatur ab M. usque ad N. punctum lineæ GH. protractæ, erit quoq; MN, divisa in quinque partes æquales. Vt constat, si ducatur ex M. ipsi E G, parallela, usque ad rectam GH; Vel si NM. producatur, donec cum GE, producta conveniat. Quod si linea dividenda fuerit admodum brevis, accipiendæ erunt partes parallelarũ CD. EF. minores, &c. Si vero linea sit longiuscula, & dividenda in paucas partes æquales; transferri poterit in duplo plura spatia, vel in triplo plura, vel ni quadruplo plura, &c. Nam duo, vel tria, vel quatuor spatia, &c. dabunt unam partem. Vt si dividenda sit in tres partes, transferaturque in sex spatia, dabunt duo spatia unam partem: si transferatur in quindecim spatia, dabunt quinque spatia unam partem, propterea quod quinque spatia conficiunt tertiam partem quindecim spatiorum. Sic si linea dividenda in duas æquales partes transferatur in octodecim spatia, dabunt novem spatia unam partem: quippe cum novem spatia constituant semissem octodecim spatiorum: & sic de cæteris.

Eodem modo, ad similitudinem hujus propositionis, licebit nobis facili negotio sequens problema, quod non rarò à Geometris adhibetur, demonstrare, quod est ejusmodi.

Datam rectam secare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunque datam.

Sit secanda recta A B, in duas partes, quæ habeant proportionem inter se, quam rectæ C. & D. Ex A. ducatur linea A E, faciens angulum A. quemcunque, ex qua abscindatur recta AF, ipsi C, & FG, ipsi D, æqualis: Ducta deinde G B, ducatur ei per F. parallela FH. Dico AB. sectam esse in H. secundum proportionem C. ad D. Hoc autem manifestũ est, a cum sit, ut A F. ad F G. atque adeo, ut C, ad D. ita AH, ad HB,

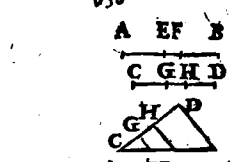


a 2. *sext.*

Postremo inseremus huic loco theorema quoddam ad linearum sectiones pertinens, desumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de iis, quæ vehuntur in aqua. Nimirum.

Si duæ rectæ lineæ secentur in binis pũctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ sectiones in eadem proportione cum quibuslibet segmentis duobus.

Secentur rectæ A B, C D. proportionaliter in binis punctis E, F. & G, H. ita ut sit A E. ad E B. sicut C G. ad G D: Item A F. ad F B, ut C H. ad H D. Dico sectiones intermedias E F, G H. proportionales quoque esse cum duobus segmentis F B, H D: vel cum duobus



bus AE, CG, hoc est, esse FB, ad EF, ut HD, ad GH, Item AE, ad EF, ut CG, ad GH. Cum enim sit, ut AE, ad EB, ita CG, ad GD, erit componendo, ut AB, ad EB, ita CD, ad GD. Item cum sit, ut AF, ad FB, ita CH, ad HD, erit componendo, ad AB, ut FB, ita CD, ad HD, & convertendo, ut FB, ad AB, ita, HD, ad CD. Itaq; cum sit; ut FB, ad AB, ita HD, ad CD: Et ut AB, ad EB, ita GD, ad GD. * Erit ex æquo, ad FB, ad EB, ita HD, ad GD. Et convertendo, ut EB, ad FB, ita GD, ad HD: Et per conversionem rationis, ut EB, ad EF, ita GD, ad GH, & dividendo, ut FB, ad EF, ita HD, ad GH. Quod est primum.

* 22. quinti.

Rursus, quia est, ut AE, ad EB; ita CD, ad GD. Et ut EB, ad EF, ita GD, ad GH, ut ostensum est: erit ex æquo, ut AE, ad EF, ita CG, ad GH. Quod est secundum.

Brevius idem demonstrabitur hoc modo. Conveniant duo puncta A, & C, in unum, ut fiat angulus BCD, vel BAD, jungãturq; rectæ DB, HF, GE. Quia igitur ponitur, ut AE, ad EB: ita CG, ad GD, b Parallela erit GE, ipsi DB. Rursus, cum ponatur, ut AF, ad FB, ita CH, ad HD: c Parallela erit quoq; HF, ipsi DB. d Quare GE, HF, inter se parallelæ erunt: Ac propterea e erit, ut AE, ad EF, ita CG, ad GH. Quod est secundum.

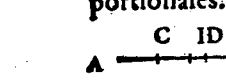
b 2. sexti. c 2. sexti. d 30. primi e 2. sexti.

Eodem modo, si puncta extrema B, D, conveniant in unum, &c. ostendemus esse, ut BF, ad EF, ita HD, ad GH, & convertendo, ut EF, ad FB, ita GH, ad HD. Quod est primum.

Idem verum est, si magnitudines AB, CD: sint diversæ, ut v. g. AB, superficies, & CD, linea, vel corpus, ut ex priori demonstratione constat.

Sed neque omittendum videtur hoc loco theorema quod sequitur.

Si linea recta sit secta in quotcunq; partes Arithmetice proportionales, & alia recta secetur in totidem partes, quæ easdem inter se, quæ illæ proportiones habeant; erunt quoque partes huius lineæ Arithmetice proportionales.



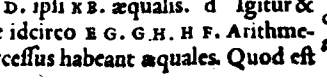
Recta linea AB, secta sit in partes AC. CD. DB. Arithmetice proportionales, hoc est habentes eundē excessū: f Secetur autem recta EF, in partes EG. GH. HF illis proportionales. Dico has partes eundē quoque habere excessum, hoc est, Arithmetice esse proportionales. Sit enim CI, ij sa

f 10. sext.

C I. ipsi A C. & D K. ipsi C D. æquales: ut I D, sit excessus inter C D, A C; & K B. excessus inter D B. C D. atq; adeo ipsi I D, æqualis. Sit quoque G L. ipsi E G. & H M. ipsi G H. æqualis; ut L H. excessus sit inter G H. E G, & M F, excessus inter H F. G H. Probandū est, excessus L H. M F. æquales esse. Quoniam igitur est, ut A C, ad C D. ita E G. ad G H. erit permutando quoque ut A C. ad E G. ita C D. ad G H. Item quoniam est, ut C D. ad D B. ita G H. ad H F. erit quoque permutando, ut C D. ad G H. ita D B. ad H F. Atq; ita si plures fuerint partes, habebunt semper partes lineæ A B. ad partes lineæ E F. singulæ ad singulas, eandem proportionem, quamvis partes unius lineæ non sint continue proportionales. Itaque cum sit, ut C D, ad G H. ita A C. ad E G, hoc est, ita C I. ad G L. *a* erit quoque reliqua I D. ad reliquam L H. ut tota C D. ad totam G H. Rursus quia est ut D B, ad H F, ita C D. ad G H. hoc est, ita D K. ad H M. *b* erit quoque reliqua K B, ad reliquam M F, ut tota D B. ad totam H F, vel ut ablata D K. ad ablatam H M. hoc est, ut C D. ad G H. Erat autem quoq; I D. ad L H. ut C D, ad G H. *c* Igitur erit ut I D, ad L H, ita K B. ad M F. Est autem I D. ipsi K B. æqualis. *d* Igitur & L H, ipsi M F. æqualis erit: atque idcirco E G. G H. H F. Arithmetice proportionales erunt, cum excessus habeant æquales. Quod est propositum.

a 19. quinti.
b 19. quinti.
c 11. quinti.
d 14. quinti.

Hoc theorema nullo modo converti potest. Nō enim sequitur, si duę lineæ sectę sint in partes Arithmetice proportionales, partes unius habere easdem proportiones, quas partes alterius habent. Nam si lineæ E F. secunda pars statuatur G M. ut excessus inter E G. G M. sit L M. Deinde ipsi G M. post M. sumatur proportio ipsi G M. æqualis eiq; adiiciatur idem excessus L M, fient tres partes Arithmetice proportionales in linea E F. & tamen non habent easdem proportiones inter se, quas habent partes lineæ A B: *e* quippe cum minor sit proportio E G. ad G M, quam E G. ad G H. hoc est, quam A B, ad C D.



e 8. quinti.

Infertur hinc aliud hoc theorema.

Si duæ lineæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad majorem, erit quoq; excessus priorum ad excessum posteriorum, ut priorum una ad unam posteriorum.

Vt in superiori figura, quoniam erat, ut A C, ad E G. hoc est, ut C I. ad G L. ita C D. ad G H; ostensum est, ita quoq; esse excessum I D, ad excessum L H. ut C D. ad G H. Itaque si A C, C D, sint duplæ, aut dimidiatæ partes ipsarum E G. G H. erit quoq; I D. dupla vel pars dimidiata ipsius L H, &c.

Ex his quoq; hoc problema absoluemus.

Lineam

Lineam rectam datam in quotuis partes Arithmeticè proportionales secare.

Sit enim recta EF. secanda in tres partes Arithmetice proportionales. Sumantur tres rectæ AC. CD. DB. quomodocunq; Arithmetice proportionales componentes rectam lineam AB. Si igitur data recta EF. a secetur similiter in G, H, ut AB, in CD, secta est, erunt partes EG, GH, HF, Arithmetice proportionales, ut demonstratum est.

a 10. sexti.

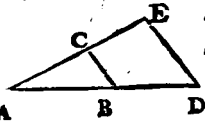
Hæc omnia vera etiam sunt, in numeris, & in quibusvis aliis magnitudinibus, cum semper eadem sit demonstratio. Atq; ex his desumpsimus in 10. regula proportionalitatis Arithmeticæ postremam rationem distribuendi datum numerum in quotuis partes Arithmetice proportionales. Nam per eam dividitur datus numerus in partes, quæ easdem habent proportiones, quas assumpti numeri proportionalitatis Arithmeticæ, cum semper fiat ut summa assumptorum numerorum, ad datum numerum, ita singuli numeri assumpti ad aliud. Hinc enim fit, numeros assumptos cum partibus dati numeri inventis eandem habere proportionem. Quare ut hic ostensum est, partes inventæ sunt Arithmetice proportionales.

x.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem adinvenire.

Sint duæ rectæ AB, AC. ita dispositæ, ut efficiant angulum A, quemcunque, sitque inveniendæ illis tertiæ proportionalis, sicut quidem AB, ad AC, ita AC. ad tertiam. Producatur AB. quam volumus esse antecedentem, & capiatur BD, æqualis ipsi AC, quæ consequens esse debet, sive media. Deinde ducta recta BC, agatur illi ex D, parallela DE, occurrens ipsi AC, productæ, in E. Dico CE. esse tertiam proportionalem, hoc est, esse ut AB, ad AC. ita AC. ad CE. Cum enim in triangulo ADE, lateri DE, parallela sit recta BC, b *erit ut AB, ad BD, ita AC, ad CE.* c *Sed ut AB, ad BD. ita eadem AB, ad AC, æqualem ipsi BD. Vt igitur AB, ad AC, ita AC. ad CE: quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinvenimus. Quod erat faciendum.*

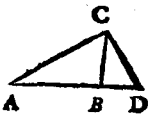


b 2. sexti.
c 7. quinti.

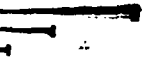
SCHOLIVM.

Aliter idem demonstrabimus, hoc modo. Duæ rectæ datæ AB, BC. constituantur ad angulum rectum ABC, & conjungatur recta AC. Producta autem AB, antecedente, ducatur ex C, ad AC, per-

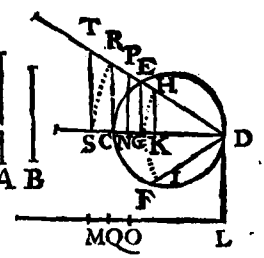
AC, perpendicularis CD, occurrens ipsi AB, productæ in D. Dico BD, esse tertiam proportionalem. Cum enim in triangulo ACD, angulus ACD, sit rectus, & ab eo ad basin AD, deducta perpendicularis CB; erit per coroll. propos. 8. huius lib. BC, media proportionalis inter AB, & BD, hoc est, vt AB, ad BC, ita erit BC, ad BD. Quod est propositum.



Inuenta autem tertia linea continue proportionali, si primam omiseris: & alijs duabus tertiam inueneris, habebis quatuor lineas continue proportionales, vt si lineis A, & B, adinueniatur tertia proportionalis C, & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis, sexta, septima, octaua: & sic in infinitum.

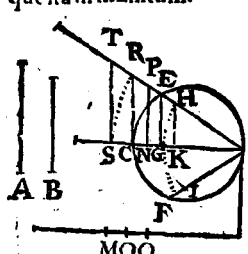


Expeditius reperiemus quotlibet lineas continue proportionales in data proportione hoc modo. Sit primū data proportio lineæ A, maioris ad minorem B. Circa rectam CD, ipsi A, æqualem describatur circulus CEDF, in quo applicentur DE, DF, ipsi B, æquales. Applicata autem regula punctis E, F. ducatur recta EG, quæ ad CD, perpendicularis erit. Cum enim recta DC, per centrum transiens secet arcum ECF, bifariam, (ablatis enim æqualibus arcubus DE, DF, ex semicirculis æqualibus DEC, DFG, reliqui arcus CE, CF, æquales erunt) secabit eadem & rectam ductam BF, bifariam per ea, quæ in scholio propos. 27. lib. 3. ostendimus. *a* Igitur & ad angulos rectos. Et quoniam, si ducere- *a* 3. *tertij.*
tur recta EC, *b* angulus ad E, in semicirculo rectus esset; erit ex co- *b* 31. *tertij.*
roll. propos. 8. huius lib. DE, media proportionalis inter CD, DG: ac proinde DG, erit tertia proportionalis ipsis CD, DE, hoc est, datis duabus A, & B. Quod si ex D, per G, arcus describatur secans rectas DE, DF, in H, I; applicataque regula ad puncta H, I, ducatur recta HK, erit DK, quarta proportionalis. Nam propter angulos HDG, IDG, (qui *c* ob æquales arcus EC, FC; æquales sunt) *d* arcus HG, *c* 27. *tertij.*
IG, æquales erunt: ac propterea ex scholio propos. 27. lib. 3. recta du- *d* 26. *ter-*
cta HI, bifariam secabitur in K: *e* ideoque & ad angulos rectos. *f* *tij.*
Parallelæ ergo sunt EG, HK, *g* Vt igitur recta ED, ad DG, ita erit DH, *e* 3. *tertij.*
hoc est, DG, ad DK. Sunt ergo quatuor lineæ CD, DE, DG, DK, con- *f* 28. *pri-*
tinue proportionales. Quod si ex D, per K, alius arcus describatur *mi.*
secans rectas DE, DF, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, *g* 2. *vel*
atque ita in infinitum. 4 *sexti.*



Deinde sit data proportio lineæ B, minoris, ad maiorem A. Ductis duabus rectis DC, LM, ad DL, perpendicularibus abscindantur rectæ DN, LO, minori B, æquales, applicataque regula ad puncta O, N, ducatur recta NP, *a* quæ ad DC, perpendicularis erit, *b*, cum sit parallela ipsi DL. Sumpta deinde recta DC, æqualis ipsi A, maiori describatur ex D, per C, arcus secans rectam NP, in P, extendaturque ex D, per P, recta DPT, eritque DP, ipsi DC, hoc est ipsi A, æqualis. Abscissa quoque LQ, ipsi DC, æqualis, applicataque ad puncta QC, regula, ducatur recta CR, quæ eadem ratione ad DC, perpendicularis erit, & ipsi NP, parallela. *c* Et quoniam est, vt ND, ad DP, hoc est, vt B, ad A, (quod ND, DP, ipsis B, A, acceptæ sint æquales) ita CD, ad DR, hoc est, ita DP, & DR: erunt tres rectæ ND, DP, DR, continue proportionales; ideoque DR, ipsis B, A, tertia proportionalis erit. Quod si ex D, per R, arcus describatur secans DC, in S, & rectæ DS, æqualis auferatur LM, applicataque regula ad puncta M, S, recta ducatur ST, erit DT, quarta proportionalis. Nam eadem ratione erit ST, ipsi CR parallela, & ad DC, perpendicularis. *d* Quare erit vt CD, ad DR, hoc est vt A, ad DR, ita SD, id est, DR, ad DT. Sunt ergo quatuor lineæ ND, DP, DR, DT, continue proportionales. Quod si ex D, per T, alius arcus describatur secans rectam DC, protractam, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atque ita in infinitum.

a 1. primi.
b 35. primi.
c 2. vel 4. sexti.
d 2. vel 4. sexti.



Ex his fine magno labore inter duas rectas datas reperiemus duas medias proportionales, nõ quidem Geometrice omnino, sed quasi attentando, & praxin ipsarum iterum atque iterum repetendo, donec id, quod quærimus, assequamur. Vt si inter CD, DK, inueniendæ sint duæ mediæ proportionales, descripto circa maiorem CD, circulo CEDF, erigemus ex K, ad CD, perpendicularem KH, ducémusque DH, ea lege, vt ex puncto E, (vbi DH, circumferentiæ occurrit) perpendicularis ad DC, demissa EG, auferat rectam DG, recta DH, æqualem, hoc est, vt arcus ex D, per H, descriptus transeat per punctum G. Hoc enim facto, erunt DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales. Nam vt ostendimus, est vt CD, ad DE, ita DE, ad DG, ex coroll. propos 8. huius lib. *e* Et vt DE, ad DG, ita DH, hoc est, DG, ad DK. Sunt ergo quatuor rectæ CD, DE, DH, DK, continue proportionales, ac proinde DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales sunt. Quod si rectæ DH, DG, comperiantur non esse æquales, siquidem DH, fuerit minor, eleuanda erit DH, magis: si vero maior, magis deprimenda, donec deprehendantur æquales DH, DG.

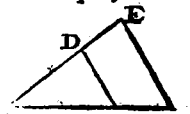
e 7. vel 4. sexti.

PROBL.

PROBL. 4. PROPOS. 12.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

Sint tres lineæ rectæ AB, BC, AD, quibus inuenienda sit quarta proportionalis; sicut quidem AB, ad BC, ita AD, ad quartam. Disponantur primæ duæ AB, BC, secundum lineam rectam, quæ sit AC: Tertia vero AD, cum prima AB, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrens rectæ AD, productæ, in E, puncto. Dico DE, esse quartam proportionalem. Cum enim in triangulo ACE, lateri CE, acta sit parallela BD: a erit vt AB, ad BC, ita AD, ad DE. Quare DE, quarta est proportionalis; ac propterea tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat.



a 2. sexti.

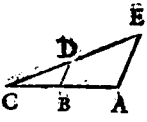
SCHOLIVM.

Hinc facile elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri possint. Si enim datæ sint duæ rectæ lineæ A, B, in quacunque proportione, si tertia quælibet accipiatur C, & ei quarta proportionalis inueniatur D, vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur sex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarum binæ semper eandem habeant proportionem.

Ostendemus etiam cum Pappo sequens problema. Videlicet.

Tribus datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam.

Sint tres rectæ AB, BC, CD, oporteatque inuenire quartam, quæ ad CD, tertiam sit, vt AB, prima ad BC, secundam. Disponantur primæ duæ AB, BC, in directum vt faciant rectam AC: Tertia vero CD, cum secunda BC, faciat angulum C, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per A, parallela ducatur AE, occurrens rectæ CD, productæ in E. Dico ED, esse quartam, hoc est, esse ED, ad DC, tertiam vt est, AB, prima ad BC, secundam. Hoc autem manifestum est, b cum AC, EC, proportionaliter secentur in B, & D, punctis.



b 2. sexti.

Aliter. Ex secunda CB, fiat prima, & ex prima AB, fiat secunda, c atque inueniatur tribus CB, BA, CD, quarta proportionalis DE: Vt sit secunda CB, ad primam BA, vt tertia CD, ad quartam. c 12. sexti.

tam, DE. Erit enim & conuertendo AB, prima ad BC, ſecundam, vt DE, quarta ad CD, tertiam.

PROBL. 5. PROPOS. 13. 11.

Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

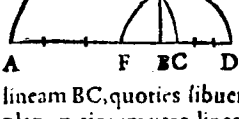
Sint duæ rectæ AB, BC, *quibus media inuenienda eſt proportionalis, diſpoſitæ ſecundum lineam rectam* AC. *Diuiſa* AC, *bifariam in* E, *ex* E, *centro, & interuallo* EA, *vel* EC, *ſemicirculus deſcribatur* ADC; *Deinde ex* B, *ad* AC, *perpendicularis educatur* BD, *ad circumferentiam vſque. Dico* BD, *eſſe mediam proportionalem inter* AB, & BC. *Ductis enim rectis* AD, CD, *erit angulus* ADC, *rectus in ſemicirculo. Cum igitur ex angulo recto* ADC, *trianguli rectanguli* ADC, *deducta ſit ad baſin* AC, *perpendicularis* DB; *erit per corollarium prop.* 8. *huius lib.* BD, *media proportionalis inter* AB, & BC. *Duabus ergo datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.*

a 31. *tertij.*

SCHOLIVM.

Perſpicuum hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipſi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam vſque, mediam eſſe proportionalem inter duo diametri ſegmẽta, quæ à perpendiculari facta ſunt. Detur enim ſemicirculus ABC, & ex puncto D, diametri AC, ducatur ad circumferentiam recta DB, perpendicularis ipſi AC. Dico DB, eſſe proportionalem mediam inter AD, & DC: Id quod liquido conſtat ex demonſtratione huius problematis. Si enim ducantur rectæ AB, CB: *b* fiet angulus ABC, rectus. Quare per coroll. prop. 8. conſtat propoſitum. Eadem ratione erit perpendicularis EF, media proportionalis inter AE, & EC. Item GH, inter AG, & GC, atque eodem modo de alijs quibuſcunque dicendum eſt, quæ ex quibuſvis punctis diametri ad ipſum diametrum perpendiculares ducentur.

b 31. *tertij.*



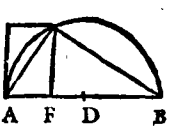
Quando minor data linea eſt valde exigua, ſecabit perpendicularis BD, nimis oblique circumferentiam in D. Quare vt exquiſitius tunc punctum D, inueniatur; multiplicabimus minorem lineam BC, quoties libuerit v. g. ſumemus B, E, ipſius BC, quadruplam, maiorem vero lineam AB, in tot partes æquales ſecabimus quotu-

quotuplex est BE, ipsius BC: sitque vna pars BF: ita vt eandem proportionem habeat AB, ad BF, quam BF, ad BC, ac tandem circa EF, circulus describatur secans BD, in D: eritque BD, media proportionalis inter BF, BE, vt in hoc scholio demonstrauimus. Dico eandem esse mediam proportionalem inter AB, BC. Cum enim sit vt prima AB, ad secundam BF, ita tertia BE, ad quartam BC; *a* erit rectangulum sub AB, prima & BC, quarta, æquale rectangulo sub BF, secunda, & BE, tertia. *b* Sed hoc æquale est quadrato BD. Igitur & illud. *c* Quapropter BD, media proportionalis est inter AB, BC. Non autem te moueat, quod citauerimus prop. 16. & 17. huius, quæ nondum sunt demonstratæ: quia hæc demonstratio cum sua constructione differri potest post propos. 17. huius, ita vt nullum periculum sit petitionis principij, vt Philosophi loquuntur.

a 16. *sex.*
b 17. *sex.*
c 14 *sex.*

EX PELETARIO.

Data recta linea, aliam rectam, (quæ minor non sit quam dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.



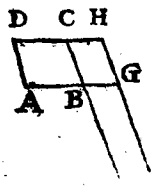
Sit data recta AC, & diuidenda proponatur recta AB, (quæ minor non sit, quam dupla ipsius AC, sed vel dupla vel maior) ita vt inter huius segmenta, media proportionalis sit AC. Disponantur rectæ AB, AC, ad angulum rectum BAC, & Diuisa AB, bifariam in D, ex D, centro, interuallo autē DA, vel DB, semicirculus describatur AEB. Deinde per C, ducatur ipsi AB, parallela CE, secans, vel tangens circumferentiam in E, puncto: (Secabit autem necessario CE, circumferentiam. vel tanget. Nam si minor sit quam dimidium rectæ AB, hoc est, minor, quam semidiameter ad angulos rectos erecta ex D, secabit circumferentiam; tanget autem eandem circumferentiam, si æqualis sit dimidio rectæ AB, hoc est, æqualis semidiametro ex D, ad angulos rectos eductæ. Cum ergo positum sit, AC, non esse maiorem dimidio rectæ AB, secabit necessario AC, circumferentiam, aut tanget) à quo demittantur ad AB, perpendicularis EF. Dico AC, esse mediam proportionalem inter segmenta AF, FB. Ductis enim rectis AE, BE, erit vt iam est demonstratum, ex coroll. propos. 8 huius lib. EF, media proportionalis inter AF, & FB. *d* Cum igitur EF, æqualis sit ipsi AC, eo quod parallelogrammum sit ACEF: (Est enim CE, ipsi AF, parallela per constructionem, *e* & AC, ipsi EF, propter angulos rectos CAF, & EFA,) erit & AC, media proportionalis inter AF, & FB.

d 34 *primi.*
e 28 *primi.*

Quod est propositum.

xiii. THEOR. 9. PROPOS. 14.

Æqualium & vnum vni æqualem habentium angulum parallelogrammum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.



Sint duo parallelogramma æqualia A B C D, B E F G, *habentia angulos* A B C, E B G, *æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt* A B, *ad* B G, *ita* E B, *ad* B C. *Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt* A B, & B G, *vnam efficiant lineam rectam. Quo facto cum anguli* A B C, E B G, *sint æquales, erunt & E B, B C, vna recta linea, vt ad prop. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur iam D C, & F G, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia sint parallelogramma D B, B F; a erit vt D B, ad B H, ita B F, ad idem B H: Sed vt D B, ad B H, b ita est A B, basis ad basin B G, quod parallelogramma sint eiusdem altitudinis: & similiter vt B E, ad B H, ita ast basis E B, ad basin B C. Igitur vt A B, ad B C, ita est E B, ad B C. Quod est propositum.*

a 7. quinti.

b 1. sext.

E contrario sint iam latera circa æquales angulos A B C, E B G, *reciproca hoc est, vt* A B, *ad* B G, *ita* E B, *ad* B C. *Dico parallelogramma* D B, B F, *esse æqualia. Facta enim eadem constructione: cum sit, vt* A B, *ad* B G, *ita* E B, *ad* B C: c *Vt autem* A B, *ad* B G, *ita ita* D E, *ad* B H; & *vt* E B, *ad* B C, *ita* B F, *ad idem* B H: *erit quoque vt* D B, *ad* B H, *ita* B F, *ad idem* B H. d *Atque idcirco æqualia erunt parallelogramma* D B. B F *Æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonstrandum.*

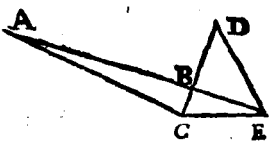
c 1. sext.

d 9. quinti.

XIV. THEOR. 10. PROPOS. 15.

Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

Sint duo triangula æqualia A B C, D B E, *habentia angulos qui ad* B *æqua-*



B, æquales. Dico latera circa hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt, eſſe vt AB, ad BE, ita DB, ad BC. Coniungantur enim triangula ad angulos æquales, ita vt AB, BE, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto cum anguli ABC, DBE, ſint æquales: erunt & DB, BC, vna recta linea, vt demonſtratum eſt ad propoſ. 15. lib. 1. ex Procl. Ducta igitur recta CE, quoniam æqualia ſunt triangula ABC, DBE, a erit vt ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE. Sed vt triangulum ABC, ad triangulum BCE, b ita eſt baſis AB, ad baſin BE, quod hæc triangula eiuſdem ſint altitudinis: & ſimiliter vt DBE, ad BCE ita eſt baſis DB, ad BC. Quare vt AB, ad BE, ita eſt DB, ad BC. Quod eſt propoſitum.

a 7. quinti.
b 1 ſext.

Iam vero contra, ſint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc eſt, vt AB, ad BE, ita DB, ad BC. Dico triangula ABC, DBE, eſſe æqualia. Facta enim conſtructione eadem cum ſit vt AB, ad BE, ita DB, ad BC. vt autem AB, ad BE, c ita triangulum ABC, ad triangulum BCE: & vt DB, ad BC, ita triangulum DBE, ad triangulum idem BCE: Erit vt ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE, d propterea que æqualia ſunt triangula ABC, DBE. Æqualium igitur & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod oſtendendum erat.

c 1. ſext.
d 9. quinti.

THEOR. 11. PROPOS. 16. XV.

Si quatnor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod ſub extremis comprehenditur rectangulum æquale eſt ei, quod ſub medijs comprehenditur, rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

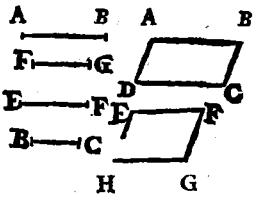
Sint quatuor recta proportionales AB, FG, EF, BC, vt quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC: Sitque rectangulum ABCD, comprehenſum ſub extremis AB, BC: rectangulum vero EFGH, comprehenſum ſub mediis EF, FG: Dico rectangula AC, EG, eſſe æqualia. Cum enim anguli recti B, & F, ſint æquales, & ſit vt AB, ad FG, ita EF, ad BC; erunt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca. Quare parallelogramma AC, EG æqualia erunt. Quod eſt propoſitum.

e 14. ſexti.

Contra vero, ſint iam æqualia rectangula AC, EG. Dico quatuor rectas lineas AB, FG, EF, BC, eſſe proportionales, hoc eſt, eſſe vt AB, ad FG, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia ſint rectangula AC, EG, habeantque angulos æquales, nempe rectos B, & F, f erunt latera circa hoſce angulos reciproca: ſic vt quidem AB ad FG: ita EF, ad BC. Itaque ſi quatuor recta linea, proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

f 14. ſexti.

SCHOLIVM.

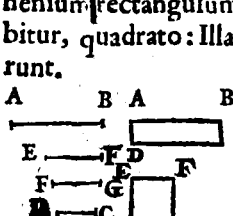


Idem verum est, etiamsi parallelogramma AC, EG, non sint rectangula dummodo sint æquiangula, ita vt anguli dictis rectis lineis comprehensi sint æquales. Veluti manifestum est in hac figura. Eadem enim prorsus est demonstratio.

xvj.

THEOR. 12. PROPOS. 17.

Si tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: Illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.



Sint tres lineæ rectæ AB, EF, & BC, proportionales: vt quidem AB, *ad* EF, *ita* EF, *ad* BC: *sitque rectangulum ABC D, contentum sub extremis AB, BC, & quadratum mediæ EF, sit* EFG H. *Dico æqualia esse rectangulum* AC, *& quadratum* EG. *Sumptæ enim rectæ FG, quæ æqualis sit ipsi* EF *erunt quatuor lineæ* AB, EF, FG, BC, *proportionales: vt quidem AB, ad* EF, *ita FG, ad BC: eritque quadratum* EG, *comprehensum sub mediis* EF, FG, *propter æqualitatem rectarum* EF, FG. a *Quare rectangulum* AC, *comprehensum sub extremis AB, BC, æquale est quadrato* EG, *hoc est, rectangulo sub mediis* EF, FG, *comprehenso. Quod est propositum.*

a 16. *sexti.*

Sed sint iam æqualia rectangulum AC, *& quadratum* EG. *Dico esse vt AB, ad* EF, *ita* EF, *ad* BC. *Cum enim æqualia sint rectangula* AC, *&* EG, b *erit vt AB, ad EF, ita* FG, *ad BC:* c *Vt autem* FG, *ad* BC, *ita est* EF, *ipsi* FG, *æqualis ad eandem* BC. *Quare vt* AB, *ad EF, ita est* EF, *ad* BC. *Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales. &c. Quod erat demonstrandum.*

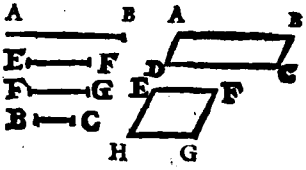
b 16. *sexti.*
c 7. *quinti.*

COROLLARIVM.

Ex posteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem inter quasuis alias duas rectas, quæ comprehendunt, rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ AB, BC, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ EF, ostensum fuit, esse ut AB, ad EF, ita EF, ad BC. Quare EF, media est proportionalis inter AB, & BC.

SCHO-

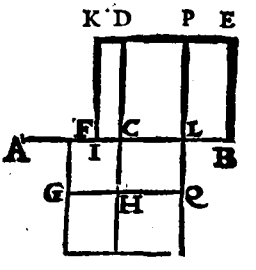
SCHOLIVM.



Eadem omnino cõsequuntur, etiamsi parallelogramma non sint rectangula, dummodo sint equiangula, ita ut EG, sit Rhombus, & AC. Rhomboides. Non enim dissimilis erit in his demonstratio, ut figura indicat.

Libet hoc loco cum Peletario demonstrare problema non inutile ad lineas proportionales spectans: quod est ejusmodi.

Secta linea recta in duas partes utcunque, alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, ut omnes tres partes sint continue proportionales.

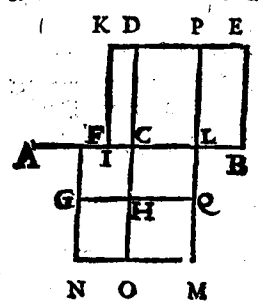


Sit recta AB, divisa in C, utcunq;, oporteatq; partem CB, ita secare in duas alias partes, ut omnes tres partes continue proportionales sint. Secetur AC, bifariam in F, & FC, iterum bifariam in I, ut CI, quarta pars sit primæ partis AC: & ex BI, erigantur duæ perpendiculares BE, IK, primæ parti AC, æquales, ducaturq; recta EK, ita ut rectangulum IE, comprehensum sit sub AC, prima parte, & rectæ IB, composita ex altera parte BC, & ex CI, quarta parte primæ partis. Et quoniam AC, divisa est bifariam in F, eiq; addita in rectum CB, *a* erit rectangulum sub AB, BC, una cum quadrato ex CF, æquale quadrato ex BF: Est autem rectangulum IE, minus rectangulo sub AB, BC, una cum quadrato ex CF. (Ducta enim CD, ad AB, perpẽdiculari erit rectãgulũ CE, cõtentum sub AC, CB, minus rectangulo sub AB, BC: At rectangulum CK, quadrato ex CF, æquale, cum utrumque quarta pars sit quadrati ex AC; rectangulum quidem CK. *b* quia sic est rectangulum CK, ad quadratũ ex AC, hoc est, ad rectangulum sub AC, CD, ut CI, ad CA; ac proinde cum CI, sit quarta pars rectæ AC, erit & CK, quarta pars quadrati ex AC: At vero quadratum ex CF, quarta pars est ejusdem quadrati ex AC, ex scholio propos. 4. lib. 2.) Igitur minus quoque erit quadrato ex BF. Si igitur *c* fiat quadratũ rectãgulo IE, æquale erit ejus latus min⁹ recta FB, majus autem quam FC, quippe cum quadratum ex FC, æquale sit ostensum rectangulo CK, ac propterea minus rectangulo IE. Sit ergo latus illud FL. Dico partem CB, ita sectam esse in L, ut tres partes AC, CL. LB. sint continue proportionales. Descri-

a 6 *secundi.*

b 1. *sex.*

c 14. *secundi.*



batur enim ex 𝔏, quadratum FM, rectaq; DC. extendatur ad O. & latus ML, ad P; sumptisq; duabus FG, IQ, ipsi CF. æqualibus, ducatur recta GQ. secans CO. in H. Eritq; CG, quadratum rectæ CF, ob æqualitatem rectarum CF, FG. Et quia ablatis æqualibus FC, FG. ex æqualibus FL, FN, reliquæ CL, GN. æquales sunt; a & est CL. ipsi HQ. & GN. ipsi HO, æqualis: æquales quoque erunt HQ, HO; ideoq; HM, quadratum erit rectæ CL. Rursus quia tam rectangulum CQ. comprehenditur sub CL. & CH, sive CF. semisse ipsius AC, quam rectangulum GO, sub GN. sive CL, & GH, sive CF, semisse ejusdem AC, sive CD. b erunt duo rectangula CQ. GO. simul æqualia rectangulo CP, comprehenso sub eadem CL. & CD, quæ ipsis CH. GH. simul æqualis est. Itaq; cum rectangulum IE. quadrato FM. æquale sit: & rectangulum CK, quadrato CG; & rectangulum CP, duobus rectangulis CQ. GO, simul: erit reliquum rectangulum LE, comprehensum sub BE, sive AC, & BL. reliquo quadrato HM, æquale. Quocirca, cum datis tribus rectis AC. CL. LB. rectangulum LE, sub extremis AC. BL. comprehensum æquale sit quadrato HM. mediæ CL; c erunt ipsæ tres lineæ AC, CL, LB, continue proportionales. Quod est propositum.

a 34. primi.

b 1. secundi.

c 17. sexti.

In numeris idem problema ita perficietur. Posteriori parti numeri propositi adjiciatur prioris partis pars quarta, & conflatus numerus in priorem partem ducatur. Hujus deinde producti numeri quadrata radix eruatur. Nam si ex radice inventa dematur semissis prioris partis, reliqua fiet secunda pars proportionalis, quam si ex posteriori parte dati numeri subtrahas, reliqua erit tertia pars. Veluti si linea AB, ponatur 76. pars autem AC, 36, & CB, 40. adjiciemus CI, hoc est, 9. quartam partem prioris partis 36. ad CB, id est, ad 40. posteriorem partem, & conflatum numerum 49. lineam scilicet IB, in priorem partem 36. sive in lineam AC, ducemus, atq; ex producto numero 1764 hoc est, ex rectangulo IE, radicem quadratam eruemus 42. pro linea FL, ex qua si detrahemus CF. semissem partis AC, nimirum 18. reliqua erit pars CL, 24. Hæc ablata ex tota posteriori parte CB, 40. remanebit tertia pars LB, 16 Sunt ergo tres partes AC, CL, LB, numeri AB, 76 hæ tres, 36. 24. 16. continue proportionales. Ex quo constat, quando radix quadrata extrahi nequit ex eo producto, problema effici non posse in numeris. Atque hinc intelligentur ea, quæ lib. 5. in tractatione proportionum prope finē scripsimus, cum de ortu proportionalitatis Geometricæ ex Arithmetica proportionalitate ageremus.

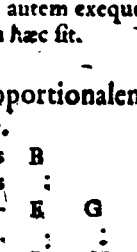
Sed

Sed quando hactenus cum Euclide de lineis proportionalibus disputavimus, non alienum erit à nostro instituto, de eisdem quoque cum Pappo Alexandrino differere, qui datis duobus terminis & tribus cujuscunque Medietatis, sive Arithmeticæ, sive Geometricæ sive Harmonicæ, tertium inquirit: Et in Geometrica proportionalitate aliter quam ab Euclide factum est. Hoc autem exequemur sequentibus propositionibus, quarum prima hæc sit.

I.

Datis duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Arithmetica proportionalitate invenire.

Sint datæ duæ rectæ AB, & C, (quæ per unitates in longū dispositas hic repræsentantur) inter quas media proportionalitate Arithmetica sit inveniēda. Minori C, ponatur æqualis FH, & ex majore AB, abscindatur alia æqualis AD: Diviso autem segmento BD, bifariam in E, sumatur ipsi DE, æqualis HG. Dico FG, esse mediam Arithmetice proportionalem inter AB, & C. Excedit enim AB, ipsam FG, excessu BE: & FG, ipsam C, excessu GH, sive DE. Cum ergo duo excessus BE, DE, sint æquales, ex constructione, liquido constat rectas AB, FG. & C, Arithmetice proportionales esse.



Hinc efficitur, mediam lineam FG, esse semissem summæ ex extremis conflatæ. Cum enim tam AD, quam C, ipsi FH, sit æqualis, erit summa ex AD, & C, ipsius FH, dupla: Est autem & DB, ipsius HG, dupla. Igitur & summa ex AB, & C. totius FG, dupla erit; ac proinde FG, semissis erit summæ extremarum. Quod est propositū. a 1. quinti

II.

Datis duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate invenire.

Sint in eadem figura, datæ duæ rectæ AB, & FG, quibus inveniēda sit tertia minor in Medietate Arithmetica. Ex minore FG, detrahatur recta GH, excessui BE, quo AB, ipsam FG, superat, æqualis: & ipsi FH, ponatur æqualis, C. Dico C, esse tertiam proportionalē minorem. Excedit enim AB, ipsam FG, excessu BE: & FG, ipsam C, excessu GH: qui quidem duo excessus BE, GH, ex constructione, æquales sunt.

III.

Datis duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica invenire.

Sint in eadem figura datæ duæ rectæ C, & FG, quibus inveniēda sit tertia major in Medietate Arithmetica. Sumatur AE, ipsi FG, æqualis, eique addatur EB, excessui GH, quo FG, ipsam C, superat,

æqualis. Dico AB, esse tertiam proportionalem majorem; ita t
tres AB, FG, & C. sint proportionales Arithmetice. Nam AE
excedit ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C. excessu GH
Cum ergo duo excessus BE, GH, ex constructione, sint æquales
patet propositum.

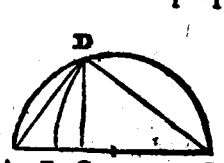
Itaque datis duobus numeris inæqualibus 30. 16. si semissis ex
cessus nimirum 7. minori 16. adijciatur, conflabitur medius propo
tionalis Arithmetice, 23. ut hic apparet. 30. 23. 16. Vel medius te
minus habebitur, si summæ extremorum semissis sumatur; uti
eodem exemplo patet. Summa enim extremorum est 46. & ejus
semissis 23. medium terminum constituit.

Si vero ex minore 16. detrahatur excessus 14. reliquum erit mi
nus extremum 2. in Medietate Arithmetica, ut hic vides, 30. 16. 2.

Si denique majori 30. adijciatur excessus 14. cõficietur majus ex
tremũ 44. in proportionalitate Arithmetica, ut hic patet, 44. 30. 16.

IV.

Datis duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate invenire.



Sint datæ rectæ AB, BC, eundem terminum B, habentes, inter quas inveniendа sit media Geometrice proportionalis. Descripto circa majorem AB, semicirculo ADB, excitetur ex C, ad AB, perpendicularis CD; & ex B, per D, arcus describatur secans AB, in E. Dico BE, mediam proportionalẽ esse inter AB, BC, in proportionalitate Geometrica:

a 31. ter. Ductis enim rectis AD, BD; a erit angulus ADB, rect⁹. Igitur ex coroll. propos. 8. hujus lib. recta BD, hoc est, ipsi æqualis BE, media proportionalis erit inter AB, BC. Quod est propositum.

V.

Datis duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportionalitate Geometrica invenire.

Sint in eadem figura datæ rectæ AB, BE, eundem possidentes terminum B, quibus invenienda sit minor tertia Geometrice proportionalis. Descripto circa majorem AB, semicirculo ADB, describatur ex B, per E, arcus secans circumferentiam ADB, in D, puncto, ex quo ad AB, perpendicularis demittatur DG. Dico BC, tertiam

b 21. tertii. proportionalem esse ipsis AB, BE. Ductis enim rectis AD, BD; b erit angulus ADB, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. hujus lib. erit BD, hoc est, ipsi æqualis BE, media proportionalis inter AB, BC: Id est, erit AB, ad BE, ut BE, ad BC. Quod est propositum.

Datis

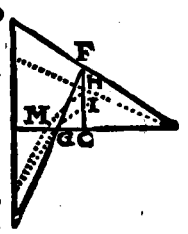
VI.

Datis duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate invenire.

Sint in eadem figura datæ rectæ C B, B E, eundem terminum B, poſſidentes, quibus invenienda ſit major tertia Geometrice proportionalis. Ex C, termino minoris excitetur ad B E, perpendicularis C D, quam arcus ex B, per E, deſcriptus ſecet in D. Ducta autem recta B D, excitetur ad eam in D, perpendicularis D A, ſecans B E, productam in A. Dico A B, tertiam proportionalem eſſe ipſis C B, B E. Quoniam enim angulus A D B, rectus eſt; erit ex coroll. propoſ. 8. hujus lib. B D, hoc eſt. B E. ipſi æqualis, media proportionalis inter B C, & A B: Hoc eſt, erit C B, ad B E, ut B E, ad A B. Quod eſt propoſitum.

VII.

Datis duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate invenire.

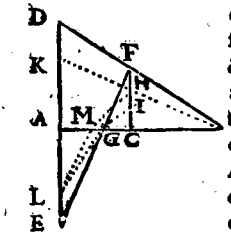


Sint datæ rectæ A B, B C, eundem terminum B, poſſidentes, inter quas invenienda ſit media Harmonice proportionalis. Ducta per A, ad A B, perpendiculari D E, ponantur æquales A D, A E, quantæcunque. Excitetur quoque ex C, ad A B, perpendicularis C F, ſecans ductam rectam B D, in F, puncto ex quo ad E, recta ducatur F E, ſecans A B, in G, Dico B G, eſſe mediam Harmonice proportionalem inter A B, B C Hoc eſt, eſſe A B, primam ad tertiam B C, ut A G, exceſſum inter primam A B, ac mediam B G, ad G C, exceſſum inter mediam B G. & tertiam B C. [a] Quoniam enim C F, parallela eſt ipſi D E, ob rectos angulos A, C, erit ex ſcholio propoſ. 4. hujus lib. triangulum B C F, triangulo B A D, ſimile: hoc eſt, erit ut A B, ad A D, ita B C, ad C F, & permutando, ut A B, ad B C, ita A D, ad C F, hoc eſt ita A E, ad C F. Rurſus ob ſimilitudinem triangulorum A E G, C F G, erit ut A E, ad A G, ita C F, ad C G; & permutando ut A E, ad C F, ita A G, ad G C. Erat autem ut A E, ad C F, ita A B, ad B C. Igitur erit [b] quoque A B, ad B C, prima linea ad tertiam, ut A G, exceſſus inter primam A B, & mediam B G, ad G C, exceſſum inter mediam B G, & tertiam B C. Quod eſt propoſitum.

[a] 28. quinti.

[b] 4. ſexti.

Non determinantur autem magnitudines rectarum A D, A E, quia utcunque ſumantur ſive majores, ſive minores, eadem media G, invenietur. Sint enim aliæ æquales A K, A L. Ducta autem recta B K, ſecet perpendicularem C F, in M, jungaturque recta L H: quam



quam dico per *G*, transire. Si enim trãsecat per aliud punctum, ut per M. inter *A*, & *G*, ostendemus eodem modo esse ut AB, ad BC, ita AM, ad MC. Fient enim rursus trinaugula æquiangula ALM, MHC; si recta est HML. Est autem ut AB, ad BC, ita AG, ad GC, ut ostensum est. Igitur erit quoque AM, ad MC, ut AG, ad AC, quod est absurdum. Nam [a] minor est proportio AM, ad GC, quam *AG*, ad GC: Sed adhuc minor est proportio *AM*, ad MC, quam ad *GC*. Multo ergo minor erit proportio *AM*, ad MC, quam *AG*, ad *GC*. Non ergo ita est AM, ad MC, ut AG, ad GC: ac propterea HL, non secabit *AG*, in M. Eodem modo non secabit *GC*. Transit igitur per G: atq; ideireo eadem media BG, invenietur per rectas *AK*, *AL*, æquales.

a 8. quinti.

VIII.

Datis duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Harmonica Medietate invenire.

Sint in eadem figura datæ rectæ *AB*, BG, eundem possidentes terminum B, quibus invenienda sit minor tertia Harmonice proportionalis. Ducta DE, ad *AB*, perpendiculari, ponãtur æquales *AD*, *AE*, quantæcunque: juncta autem recta BD, ducatur ex E, per G, recta secans BD, in F, puncto, ex quo ad *AB*, perpendicularis demittatur FC. Dico BC, ipsis *AB*, BG, esse Harmonice proportionalem. Hoc est, esse *AB*, primam ad BC. tertiam, ut est, *AG*, excessus inter primam & secundam ad *GC*, excessum inter secundam ac tertiam. Quod quidem demonstrabitur, ut in præcedenti propositione.

Non determinantur etiam hic magnitudines rectarum *AD*. *AE*. quia utcunque sumantur sive majores, sive minores, eadem tertia BC, reperietur. Sint enim aliæ æquales *AK*, *AL*: Ducta autem recta BK, secet perpendicularem CF, in H, jungaturque recta LG, quam dico cadere in H. Si enim cadat infra, ut in I. ostendemus eodem modo, esse ut *AB*, ad BC, ita *AK*, ad CH, hoc est, ita *AL*, ad CH. Vt autem *AB*. ad BC, ita erat *AG*, ad GC. Erit igitur quoque ut *AG*, ad GC, ita AL, ad *CH*. Et quia si recta linea est LGI, ob similitudinem triangulorum *ALG*, *CIG*, [b] est ut *AL*, ad *AG*, ita CI, ad *GC*, erit permutando, ut *AL*, ad CI, ita *AG*, ad *GC*, Cum ergo ostensum sit esse ut *AG*, ad *GC*, ita *AL*, ad CH, erit *AL*, ad CH, ut ad CI. [c] Æquales sunt igitur CH, CI; totum & pars, quod est absurdum. Non ergo cadet LG, infra H: eodemque modo ostendemus non cadere supra. Cadit ergo in H, ubi BK, perpendicularem CF, secat; ac proinde ex H, demissa perpendicularis HC, ad *AB*, ex-

b 4. sex.

c 9. quinti.

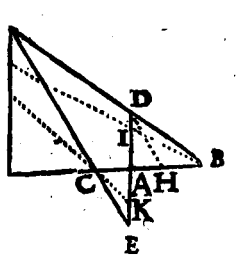
AB, exhibebit eandem tertiam minorem BC, proportionalem Harmonice.

Hinc sequitur, datis tribus rectis Harmonice proportionalibus, minimam esse majorem excessu, quo media minimam superat. Cum enim sit, ut AB, ad BC, ita AG, ad GC: sit autem AB, prima major quam AG, excessus inter primam AB, & mediam BG: a erit a 14. quinquoque BC, tertia major quam GC, excessus inter mediam BG, & ti, minimam BC.

IX.

Datis duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica invenire.

Sint datæ rectæ AB, BC, eundē habentes terminū B, quibus invenienda sit major tertia Harmonice proportionalis. Ducta per A, ad BC, perpendiculari DE, ponantur æquales AD, AE, quantacunq;, ducaturq; recta BD, quam productam secet EG, productæ in F. pūcto, (quod autem conveniant BD, FC, mox demonstrabimus) ex quo ad BC, productam demittatur perpendicularis FG Dico GB, ipsis CB, BA. Harmonice proportionalē esse: Hoc est, esse GB, primam ad BA, tertiam, ut GC, excessum inter primam GB, & mediam BC, ad CA, excessū inter mediam CB, & tertiam BA.



b 28. primi

b Quoniam enim GF, ipsi AD, parallela est, ob angulos rectos G, A; ex scholio propos. 4. hujus lib. triangulum BAD, triangulo BGF, simile; id est, erit ut GB, ad CF, ita BA, ad AD: & permutando, ut GB, ad BA, ita GF, ad AD, hoc est, ad AE. Rursus ob similitudinē triangulorum, FGC, EAC, c erit ut FG, ad GC, ita EA, ad CA, & permutando ut FG, ad AE, ita GC, ad CA. Erat autem ut FG, ad AE, ita GB, ad BA. Igitur erit quoque ut GB, prima, ad BA, tertiam, ita GC, excessus inter primam GB, & mediam BC, ad CA, excessum inter mediam BC, & tertiam BA. Quod est propositum.

c 4. sexti

Quod autem BD, EC, conveniant, sic probabitur. Quoniam BC, ponitur media, & BA, tertia sive minima, major erit BA, tertia quam CA, excessus, quo media BC, minimam BA, superat, ut ad finem antecedentis problematis ostēdimus. Nisi enim major esset, AB quam AC, non posset reperiri tertia major; cum ea inventa, semper demonstraretur tertia AB, major excessu AC, quo media tertiam superat. Abscindatur ergo AH, ipsi AC, æqualis, connectaturque recta HD. Quoniam igitur latera AE, AC, lateribus AD, AH, æqualia sunt, angulosque cōprehendunt æquales, utpote rectos sive ad verticem A; d erunt & anguli ACE, AHD, æquales: qui cum alterni

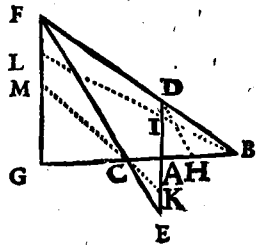
d 4. primi

a 27. primi. alterni ſint; a erunt rectæ E C, H D, parallelæ; b ac proinde anguli interni DHC, HCF, duobus rectis æquales erunt. Cum ergo c angulus DHC, major ſit interno angulo B. erunt duo anguli BCF, CBF, duobus rectis minores. d Quocirca CD, EC, coibunt. Quod eſt propoſitum.

b 29. primi.

c 16. primi.

Non determinantur quoq; hic magnitudines rectarum AD, AE: quia utcunq; ſumantur ſive majores ſive minores, eadem tertia BG, reperietur. Sint enim aliæ æquales AI, AK: Ducta autem recta BI, quæ producta ſecet perpendicularē FG, in L, ducatur KC, quam productam dico cadere in L. Si enim cadat infra, ut in M, oſtendemus eodem modo, eſſe ut GB, ad BA, ita GL, ad AI, id eſt, ad AK. Vt autem CB, ad BA, ita erat GC, ad CA. Erit igitur, ut GC, ad CA, ita GL, ad AK. Et quia, ſi recta linea eſt KCM, ob ſimilitudinem triangulorum GMC. AKC. e eſt ut GM. ad GC, ita KA, ad AC. erit permutando, ut GM. ad KA, ita GC. ad CA. Cum ergo oſtenſum ſit, eſſe ut GL, ad AK. ita GC. ad CA. erit quoque GM. ad AK. ut GL, ad AK. f Æquales ſunt igitur GM. GL. pars & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo cadet KC. infra L: eademq; ratione neq; ſupra cadet. Cadit ergo in L. ubi BI, producta perpendicularem FG. ſecat: ac proinde ex L. demiſſa perpendicularis LG. à GB. cadet in G. exhibebitq; eandem tertiam GB. majorem, Harmonice proportionalem.



d 13. primi.

e 4. ſex.

f 9. quinti.

Ex his perſpicuum eſt, quando duo numeri proportionē habent duplam, vel dupla majorem, illis non poſſe adjungi tertium majorē in proportionalitate Harmonica, ut in tractatione proportionum in 3. regula proportionalitatis Harmonicæ diximus. Quia enim oſtendimus, BA, minimam lineam eſſe majorem exceſſu AC, quo media BC, minimam AB, ſuperat; erit AB, major ſemiſſe ipſius BC; ac proinde BC. ad AB, media ad minimam, minorem proportionem habebit, quam duplam. Quod ſi BC, ad AB. eſſet dupla, vel major quam dupla, eſſet AB. vel æqualis ipſi AC. vel minor. Quare ut oſtenſum eſt, non poſſet reperiri tertia major in Harmonica proportionalitate: quia BC, cum BD. non coiret.

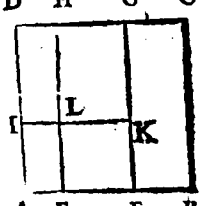
Sed demonſtremus etiam cum Ioh. Baptiſta Benedicto, qua ratione iidem termini proportionalitatis Harmonicæ in numeris reperiantur. Hinc enim patebit ratio quarundam praxium, quas in tractatione proportionū in lib. 5. explicavimus. Vtemur autem nonnullis propoſitionibus libri 7. cum eæ ex lib. 5. & 6. non pendeant, atque idcirco ante hos libros demonſtrari poſſint. Hinc igitur exordium ſumemus.

Ex datis

X.

EX datis quibusſuis duobus numeris, tres numeros Harmonice proportionales, quorum extremi eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri, reperire.

EX qualibet recta AB, deſcribatur quadratum ABCD. Sumptis que duabus partibus æqualibus BE. EB. in latere AB. ducantur EG. FH. ipſis AD. BC. parallelæ. Item ſumpta recta AI. æquali ipſi BE, vel EF. agatur IK. ipſis AB. DC. parallela ſecans FH. in L. Erit rectãgulũ AG, contentũ ſub AB. (id eſt, ſub ſumma rectarum AE. EB. *a* cum EG. ſit ipſi BC. ideoque ipſi AB. æqualis) & AE. (majore ſcilicet parte ſummæ AB) Rectangulum verò EG. continebitur ſub AB, (hoc eſt, ſub eadem ſumma rectarum AE. EB;) & EB. (minore videlicet parte ejusdem ſummæ AB.) Tam deniq; rectangulum AK. quam GL. ſub partibus AE. EB. comprehendetur; propterea quod AI. ſumpta eſt ipſi EB, æqualis; & HL LK. ipſis AE. EB. æquales. *b* Cum enim FH, ipſi AD. hoc eſt, ipſi AB; & FL. ipſi AI. hoc eſt, ipſi EB. ſit æqualis: erit reliqua HL. reliquæ AE. æqualis: at *c* KL. ipſi EF. ſive ipſi EB; æqualis eſt. Ex quo fit, duo rectangula AK. KH. ſimul continere duplum ejus, quod ſub partibus AE. EB. continetur. Dico rectangulum AC; & ſummam duorum rectangulorum AK. KH: & rectangulum EC. conſtituere proportionalitatem Harmonicam: hoc eſt, ut eſt AG, primum. ad EC. tertium ita eſſe IH. exceſſum inter primum AG. & ſecundum HLIAEG ad AL, exceſſum inter ſecundum HLIAEG. & tertium EC. ſive FG. *d* quod ipſi EC. æquale eſt. Nam cum HL. ipſi AE: & LF. ipſi EB. æqualis ſit, ut oſtendimus: *e* erit AE. ad EB. ut HL. ad LF. ut autem AE. ad EB, *f* ita eſt AG. ad EC: Et ut HL. ad LF. ita eſt HI. ad AL. Igitur erit quoque AG primum ad EC. tertium ut HI. exceſſus inter primum ac medium, ad AL, exceſſum inter medium ac tertium. Quod eſt propoſitum.



a 34. primi.

b 34. primi.

c 34. primi.

d 36. primi.

e 7. quinti.

f 1. sext.

ITAQVE ſi AE. ponatur 6 & EB. 4. erit ſumma AB. 10. quam ſi ducamus in AE. & EB, fiet AG. 60. & EC. 40. Duplum autem ejus, quod fit ex AE, EB. hoc eſt, HLIAEG, fiet 48. medium Harmonicum. Tres igitur numeri Harmonicè proportionales erunt 60. 48. 40. quorum extremi eandem proportionem habent, quam dati numeri 6. 4. Cum enim eadem ſumma 10. ex 6. & 4. collecta multiplicans utrumq; 6. 4. produxerit extremos 60. 40. *g* erit 60. ad 40. ut 6. ad 4. Quod etiam patet ex figura. *h* Eſt enim AG, id eſt, 60. ad EC. id eſt, ad 40. ut AE. id eſt, 6. ad EB. id eſt, ad 4.

g 17. septimi.

h 1. sext.

HAC arte, si summa quorumlibet duorum numerorum datorū ducatur in vtrumque seorsum, gignētur extremi termini proportionalitatis Harmonicæ eandem habentes proportionē, quam dati duo numeri: Medius autem terminus erit numerus duplus eius, qui fit ex multiplicatione datorum duorum numerorum inter se.

EX his facile etiam inueniemus tres numeros Harmonicè proportionales, quorum extremi proportionē habeant datam, & medius sit dato numero æqualis. Vt si extremi debeant habere proportionē quintuplam, mediusque sit 30. sumendi sunt 5. & 1. in data proportione, & eorum summa 6. in utrumque ducenda, ut fiant 30, & 6. inter quos statuatur medius 10. qui duplus est producti ex multiplicatione datorum numerorū 5. & 1. unius in alterū: eruntq; 30. 10. 6. Harmonicè proportionales, ut dictum est. Deinde datus medius 30. dividatur per medium inventum 10. & Quotiens 3. per tres inventos 30. 10. 6. multiplicetur. Ita enim fient tres numeri quæsiti 90. 30. 18.

ALITER.

INTER datos duos numeros 6. 4. statuatur medius Arithmeticè proportionalis, 5. nimirum semissis eorum summæ hoc modo 6. 5. 4. Deinde medius 5. in extremos 6. & 4. ductus gignat 30. & 20. inter quos statuatur medius 24. quem extremi inter se multiplicati producunt hoc modo, 30. 24. 20. Dico hos tres esse Harmonicè proportionales. Quoniam enim tres numeri 60. 48. 40. qui fiunt ex summa 10. datorum numerorum 6. 4. in datos numeros 6. & 4. & ex 4. in 6. his dupli sunt trium numerorū hic inventorum, quod hi producti sint ex semisse summæ datorum numerorum in datos numeros, & ex 4. in 6. semel, ut 60. 48. 40. perspicuum est: erit quoque tam excessus inter 60. & 30. 24. 20. 48. duplus excessus inter 30. & 24. quam excessus inter 48. & 40. ipsius excessus inter 24. & 20. ut ad propos. 10. ostendimus. Cum ergo tres numeri 60. 48. 40. sint Harmonicè proportionales, ut in præcedenti problemate demonstravimus; erunt quoque eorum semisses 30. 24. 20. easdem habentes proportiones, Harmonicè proportionales: quandoquidem & excessus eandem proportionem habent, quam excessus numerorum, 60. 48. 40. quippe cum excessus numerorum 30. 24. 20. semisses sint horum numerorum 60. 48. 40. excessum, ut dictū est,

a 15 *quinti.*

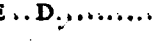
XI.

DATIS duobus numeris, medium Harmonicè proportionalem invenire.

SINT duo numeri dati AB, 15. & BC, 10. inter quos inveniendus sit medius proportionalis Harmonicè. Dematur ex majore AB, 15 numerus BD, minori BC, 10. æqualis, & reliquus numerus AD, 5. nimirum differentia datorum numerorum, ducatur in minorem BC, 10.

BC, 10. productusque numerus 50. divisus per AC, 25. summam datorum numerorū, faciat Quotientem DE, 2 qui additus minori BD; 10. faciat DE, 12. Dico BE, esse medium proportionalem Harmonicè inter AB, BC, hoc modo 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex AD, in BC, fit divisō per AC. Quotiens est DE, producetur idem numerus divisus ex DE, Quotiente in divisorem AC, ut constat ex defin. Divisionis. Quia igitur idem numerus fit ex AC, primo, in DE, quartum, qui ex BC, vel BD, secundo in AD, tertium; *a* erit AC, primus ad BC, secundum ut AD, tertius ad DE, quartum: Et dividendo, AB, ad BC, primus datus ad tertium datum, ut AE, excessus inter primum AB, & medium inventum BE, ad DE, excessum inter medium BE, & BD, sive tertium BC. Sunt ergo AB, BE, BC, nimirum 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod est propositum.

a 19. *septimi.* *vel* 16. *sexti.*



ITAQVE si differentia datorum numerorum ducatur in minorem, numerusque productus dividatur per datorum numerorum summam, ac denique Quotiens minori adjiciatur, constabitur medius terminus Harmonicæ proportionalitatis.

XII.

DATIS duobus numeris, minorem extremum in proportionalitate Harmonica invenire.

SINT duo numeri dati AB, 15. & AC: 12 quibus inveniendus est minor Harmonicè proportionalis. Addatur BD, æqualis ipsi BC, excessui inter datos numeros. Per hanc summā AD, 18. collectam ex majore numero, & differentia datorum numerorum, dividatur numerus 30 factus ex minore dato AC, in BC, differentiam datorum numerorum: & Quotiens CE, ex minore dato AC, detrahatur. Dico reliquum AE, 10. esse terminum tertium minorem quæsitum, hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero qui ex AC, in BC, fit divisō per AD, Quotiens est CE, producetur idem numerus divisus ex CE, Quotiente in divisorē AD, multiplicato, ut ex Divisionis defin. manifestum est. Quia igitur idem numerus gignitur ex AD, primo, in CE, quartum, qui ex BC, secundo in AC, tertium: *b* erit AD, primus ad BC, secundum, hoc est, ad BD, ut AC, tertius ad CE, quartum Et dividendo, AB, ad BD, hoc est, ad BC, ut AE, ad CE: Et permutando, AB, primus datus ad AE, tertium inventum, ut BC, excessus inter primum AB, & medium AC, ad CE, ex-

b 19. *septimi.* *vel* 16. *sexti.*

ceſſum inter medium AC, & tertium AE. Sunt igitur tres numeri. AB, AC, AE, id eſt, 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod eſt propoſitum.

ITAQVE, ſi per ſummam ex majore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam dividatur numerus ex minore numero in differentiam eandem datorum numerorum procreatus. Quotiensque ex minore dato detrahatur, reliquus fiet minor extremus in proportionalitate Harmonica.

ALITER.

SINT rurſum dati duo numeri AB, 15. & AC, 12. quibus inveniendus ſit major in Harmonica Medietate. Majori AB, addatur BD, æqualis *differentiæ BC*, 3. datorum numerorum. Et per ſummam AD, 18. dividatur numerus 180. ex multiplicatione datorum numerorum AB, AC, hoc eſt, 15. 12. inter ſe procreatus, ſitque Quotiens AE, 10. Dico AE, minorem extremum eſſe in Medietate Harmonica. Quoniam enim numero, qui ex AB, in AC, gignitur, diviſo per AD, Quotiens fit AE, producetur idem numerus diviſus ex AE, Quotiente in diviſorem AD, multiplicato, ut ex defin. Diviſionis conſtat. Quia igitur idem numerus fit ex AD, primo in AE, quartũ, qui ex AB, ſecundo in AC, tertium; *a* erit AD, primus ad AB, ſecundum, ut AC, tertius ad AE, quartum; ac proinde cum AD, major ſit, quam AB, erit quoque AC, major quam AE. Quare erit & dividendo BD, id eſt, BC, ad AB, ut CE, ad AE; Et convertendo AB, ad BC, ut AE, ad CE; Et permutando AB, primus ad AE, tertium inventum, ut BC, exceſſus inter primum AB, & medium AC, ad CE, exceſſum inter medium AC, & tertium AE, Sunt igitur tres numeri AB, AC, AE, hoc eſt, 15. 12. 10. Harmonice proportionales. Quod eſt propoſitum.

a 19. *ſep. vel* 16. *ſexti.*

ITAQVE ſi per ſummam ex majore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam dividatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter ſe procreatus, erit Quotiens minor terminus extremus Harmonicæ Medietatis.

XIII.

DATIS duobus numeris, maiorem extremum in Harmonica proportionalitate invenire.

SINT dati duo numeri AB, 10. & AC, 12. quibus inveniendus ſit tertius major in Medietate Harmonica. Ex minore AB, detrahatur BD, æqualis differentiæ BC. 2. datorum numerorum. Et per reliquum numerum AD, 8. dividatur numerus 24. factus ex majore numero AC, 12. in differentiam datorũ numerorum BC, 2. vel BD.

Quo-

Quotiens autem CE, 3. majori numero AC, 12. adijciatur. Dico summam AE, 15. esse terminum majorem in proportionalitate, sive Medietate Harmonica, hoc est, tres numeros AE, AC, AB, nimirum 15. 12. 10. esse Harmonice proportionales. Quoniam enim numero, qui ex AC, in BD, fit diviso per AD, Quotiens fit CE, producetur idem numerus divisus ex CE. Quotiente in divisorem AD, multiplicato. Quia igitur idem numerus gignitur ex AC, primo in BD, quartum, qui ex CE, secundo in AD, tertium, *a* erit AC, primus ad CE, secundum, ut AD, tertius ad BD, quartum; Et componendo AE, ad CE, ut AB, ad BD, hoc est, ad BC; Et permutando AE, primus ad AB, tertium ut CE, excessus inter primum AE, & medium AC, ad excessum BC, inter medium AC, & tertium AB. Sunt ergo tres numeri AE AC, AB; nimirum 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod est propositum.

A ..... D .. B .. C ... E

a 19 *sep.* *vel* 16. *sexti.*

ITAQVE datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum dividatur numerus ex majore numero in differentiam datorum numerorum procreatus; Quotiensq; majori numero adijciatur, conflabitur major terminus extremus Medietatis Harmonicæ.

ALITER.

SINT rursum duo dati numeri AB, 10. & AC, 12. quibus inveniendus sit major in Harmonica Medietate. Ex minore AB, dematur BD, æqualis excessui BC, datorum numerorum: Et per reliquum numerũ AD, 8. dividatur numerus. 120. factus ex multiplicatione datorum numerorum AB, 10. & AC, 12. procreatus, Quotiensque sit AE, 15. Dico AE, esse terminum majorem in proportionalitate Harmonica. Quoniam enim numero, qui fit ex AB, in AC, diviso per AD. Quotiens est AE, producetur idem numerus divisus ex AE, Quotiente in divisorem AD, ex defin. Divisionis. Quia igitur idem numerus gignitur ex AB, primo in AC, quartum, qui ex AD, secundo in AE, tertium; *b* erit AB, primus ad AD, secundum, ut AE, tertius ad AC, quartum; ac proinde cum AB, major sit quam AD, erit & AE, major quam AC. Et cum sit, ut AE, ad AC, ita AB, ad AD, erit per conversionem rationis AE, ad CE. ut AB. ad BD, hoc est, ad BC: Et permutando AE, primus inventus ad AB, tertium, ut CE, excessus inter primum AE. & medium AC. ad BC. excessum inter medium AC, & tertium AB. Igitur tres numeri AE. 15. AC. 12. AB. 10. Harmonice proportionales sunt. Quod est propositum.

A ..... D .. B .. C ... E

b 19. *sep.* *vel* 16. *sexti.*

ITAQVE datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum dividatur numerus ex multi-

plicatione datorum numerorum inter se genitus, dabit Quotiens majorem terminum extremum Medietatis *Harmonicæ*.

POSTREMO libet quoque ex Pappo praxes illas demonstrare, quibus ad finem tractationis proportionem ex æqualitatis proportione omnes proportiones rationales, & viciſſim ex inæqualitatis proportione qualibet æqualitatem, ac deniq; ex quavis proportionalitate Geometrica & Geometricam, & Arithmeticam, & *Harmonicam* oriri docuimus. Sic ergo ex proportionalitate Geometrica tam æqualium terminorum, quam inæqualium, gignitur proportionalitas alia Geometrica inæqualium terminorum.

XIV.

PROPOSITIS tribus terminis Geometricè proportionalibus ſive æqualibus, ſive inæqualibus: Summa ex primo ſemel, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta: ac ſumma conflata ex ſecundo & tertio ſemel: ac tertius ſemel, ſunt Geometricè proportionales.

SINT tres termini continuè proportionales Geometricè A B C: ſitque D, ſumma ex A, ſemel, & B, bis, & C, ſemel collecta: At E, ſumma ex B, & C, ſemel conflata, ac denique F, ipſi C, æqualis Dico

A, 1.	B, 1.	C, 1.	A, 12.	B, 6.	C, 3.
D, 4.	E, 2.	F. 1.	D, 27.	E 6.	F. 3.

DEF, Geometrice quoque proportionales eſſe. Cum enim ſit *A*, ad E, ut B, ad C; erit quoque componendo *A*, B, ſimul ad B, ut BC, ſimul ad C. *a* Igitur omnes antecedentes ſimul, nimirum A, *B*, & B, C, ad omnes conſequentes ſimul, nimirum ad B, C, ut una antecedens, hoc eſt, B, C, ad unam conſequentem C. Eſt autem D, æqualis ipſis *A*, B, & *B*, C: Et E, ipſis B, C: ac denique F, ipſi C. Igitur erit quoque *D*, ad *E*, ut E, ad F: ac proinde D, *E*, F, Geometricè ſunt proportionales. Quod eſt propoſitum.

a 12. quinti.

HINC manifeſtum eſt, ſi termini A, B, C, ſint æquales; D, E, F, eſſe duplos, Nam B, C, ſimul dupli erunt ipſius C; ac propterea & *E*, ipſius F; quod E, ipſis B, C; & F, ipſi C, ſit æqualis. Cum ergo D, *E*, F, ſint continuè proportionales, ipſi erunt in dupla proportione. Quod ſi termini æquales *A*, B, C, ſint unitates, generabitur dupla proportionalitas D, E, F, in minimis terminis 4. 2. 1. propterea quod F, æqualis eſt ipſi C, hoc eſt, unitati.

A.	*B*.	C.
1.	1.	1.
D.	*E*.	F.
4.	2.	1.

SI verò,

SI verò *A*, B, C, sint dupli erunt geniti D, E, F, tripli. Nam si B, ipsius C, duplus est, erit summa ex B, C, collecta, id est, *E*, ipsius C, hoc est, ipsius F, triplus: ac proinde D, *E*, F, continuam proportionem tripla habebunt. *Atq*; eodē modo ex triplis orientur quadrupli, ex quadruplis quintupli & sic in infinitū

A, B, C.	
4. 2. 1.	
D, E, F.	
9. 3. 1.	

AT si termini *A*, B, C, sint dupli inverso ordine, erunt D, E, F, geniti, sesquialteri. Nam cum B, sit semissis ipsius C: erit summa ex B, C, collecta, hoc est, *E*, ipsius C, sive ipsius F, sesquialtera Eodem modo si *A*, *B*, C, sint converso ordine tripli, erunt procreati D, *E*, F, sesquitertii. Nam B, erit ipsius C, tertiæ pars. Igitur summa ex B, C, conflata, id est, *E*, continebit C, sive F, semel, & insuper ejus partem tertiam: ac propterea D, *E*, F, habebunt continuam proportionem sesquitertiam. Pari ratione ex quadruplis inversis nascentur sesquiquarti, & ex inversis quintuplis sesquiquinti atque ita in infinitum.

A. B. C.	
1. 2. 4.	
D, E. F.	
9. 6. 4.	
A. B. C.	
1. 3 9.	
D. *E*. F.	
16. 12. 9.	

Non aliter monstrabimus aliarum proportionum generationes ex aliis proportionibus rectè esse præscriptas in tractatione proportionum. Item rectè quamcunque proportionem inæqualitatis ad æqualitatem revocari: quippe cum in ea reductione retexamus quodam modo operationem qua inæqualitatis proportionem ex æqualitate gigni tradidimus.

XV.

PROPOSITIS tribus terminis sive æqualibus, sive inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta: ac summa ex primo, secundo, & tertio semel conflata: ac deniq; tertius semel, sunt Arithmeticè proportionales.

SINT tres termini Geometricè proportionales *A*, B, C: sitque D, summa collecta ex A, bis, ex B, bis, & ex C, semel: *At* E, summa conflata ex A, B, C, semel: *Ac* denique F, ipsi C, æqualis. Dico D, E, F, esse Arithmetice proportionales. Quoniam enim summa ex A, bis, & B, bis & C, semel, hoc est, terminus D, superat summam ex *A*, B, C, semel, hoc est, terminum E, aggregato ex *A*, B, semel collecto. Item summa ex A, B, C, hoc est, terminus E, superat terminū C, sive F, eodem aggregato ex *A*, B, semel collecto; erit idem excessus inter D, & E, qui inter E, & F, ac propterea D, E, F,

A, 1.	B, 1.	C. 1.
D, 5.	E, 3.	F, 10.
A, 12,	B, 6.	C, 3.
D, 39.	*E*, 21	F, 3.

A. B. C.	
3, 20. 1,	
D. E. F.	
47. 24, 1,	

Arithmeticam proportionalitatem, sive Medietatem constituent. Quod est propositum.

EADEM prorsus ratione orietur proportionalitas Arithmetica ex tribus terminis quibuscunque, etiamsi non sint proportionales: ut in hoc exemplo perspicuum est.

XVI.

PROPOSITIS tribus terminis sive æqualibus, sive inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa collecta ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel: ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel: & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coacervata, Harmonicè proportionales sunt.

Sint tres termini Geometrice proportionales A, B, C. sitque D, summa collecta ex A, bis, ex B. ter, & ex C. semel: At E, summa ex B, bis, & C, semel conflata: Ac denique F, summa ex B, semel, & C, semel collecta. Dico D, E, F. constituere proportionalitatem sive Me-

A,	1.	B,	1.	C,	1.	A,	12.	B, 6. C, 3.
D,	6.	E,	3.	F.	2.	D,	45.	E 15. F, 9.

dietatem Harmonicam. Quoniam enim est, ut A, ad B, ita B, ad C; erunt ex scholio propos. 22. lib. 5. ut A, bis ad B, ita B, bis, ad C. Igitur componendo, ut A, bis, & B, semel, ad B, ita B, bis, & C. semel ad C. *a* Igitur ut omnes antecedentes simul nimirum A, bis, & B. ter, & C, semel, hoc est, terminus D, ad omnes consequentes simul, nimirum ad summam ex B, C, id est, ad F, ita unum antecedens, nimirum A, bis, & B, semel ad B. Est autem A, bis & B, semel excessus, quo A, bis & B, ter, & C, semel, superant B, bis, & C. semel, hoc est, excessus inter D, primum terminum, & medium: E: At B, excessus, quo B, bis & C, semel, superant summam ex B, C, hoc est, excessus inter E, medium, & F, tertium. Igitur erit ut D, primus ad F, tertium, ita excessus inter primum & medium ad excessum inter medium ac tertium; ideoque D, E, F, Harmonicè proportionales erunt Quod est propositum.

a 12. *quinti.*

SEMPER autem minimi termini procreantur D, E, F, quando dati termini A, B. C. sunt unitates; ut in exemplis prolatis manife-

A,	9.	B.	6.	C.	4.	A.	1.	B. 4. C, 16.
D,	40.	E.	16.	F,	10.	D.	30.	E, 24. F. 20.
A.	9.	B,	12.	C.	16.			
D.	70.	E,	40.	F,	28.			

stum est. Quando autē A, B. C. non sunt unitates, etiam si in sua proportione minimi sint non semper creantur minimi termini D, E. F.

Id quod

Id quod liquidò constat in his exemplis. In primo enim exemplo, ex minimis terminis proportionis sesquialteræ & in secundo ex minimis terminis subquadruplæ proportionis, & in tertio ex minimis terminis subsesquitertiæ proportionis, gignuntur tres in proportionalitate Harmonica non minimi. Quod si termini inuertantur, tum demum, (quod mirum est) minimi termini medietatis Harmonicæ procreabuntur, vt hæc exempla demonstrant.

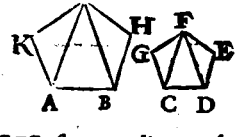
A, 4. B, 6. C, 9. | A, 16. B, 4. C, 1. | A, 16. B, 12. C, 9.

D, 35. E, 21, F, 15. | D, 45. E, 9. F, 5. | D, 77. E, 33. F, 21.

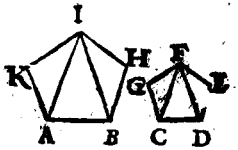
PROBL. 6. PROPOS. 18. XVIII.

A DATA rectæ linea dato rectilineo simile, similiterque positum rectilineum describere.

SIT data recta AB, *super quam describendum sit rectilineum rectilineo* CDEFG, *simile similiterque positum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex* F, *ad singulos angulos oppositos rectæ lineæ, quæ rectilineum resoluant in triangula* CDF, DEF, FGC. *Deinde angulo* DCF, *æqualis fiat angulus* BAI, *& angulo* CDF, *angulus* ABI, *coeant q3 rectæ* AI, BI, *in puncto* I; *(coibunt enim omnino, propterea quòd duo anguli* IAB, IBA, *duobus rectis minores sint, cum æquales sint duobus angulis* FCD, FDC, *a qui duobus rectis sunt minores) b eritque reliquo angulo* CFD, *reliquus angulus* AIB, *æqualis; totumq3 triangulum* AIB, *toti triangulo* CFD, *æquiangulum. Rursus angulo* FDE, *æqualis fiat angulus* IBH: *& angulo* DFE, *angulus* BIH: *Et c quia duo anguli* EDF, EFD, *minores sunt duobus rectis; erunt quoque duo anguli* HBI, HIB, *duobus rectis minores; ac proinde rectæ* BH, IH, *coibunt. Coeant ergo in puncto* H, *eritque eadem ratione triangulum* BHI, *triangulo* DEF, *æquiangulum. Præterea angulo* CFG, *fiat æqualis angulus* AIK; *& angulo* FCG, *angulus* IAK: d *Et quia duo anguli* GCF, GFC, *minores sunt duobus rectis: erunt & duo anguli* KAI, KIA, *duobus rectis minores; atque idcirco rectæ* AK, IK, *conuenient in aliquo puncto. Conueniant ergo in* K: *eritque triangulum quoque* AKI, *triangulo* CGF, *æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absoluantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura extiterint. Dico igitur, rectilineum* ABHIK, *rectilineo* CDEFG, *simile esse, similiterque positum. Cum enim angulus* IAB, *constitutus sit æqualis angulo* FCD,



a 17. primi.
b 32. primi.
c 17. primi.
d 17. primi.

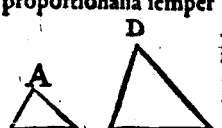


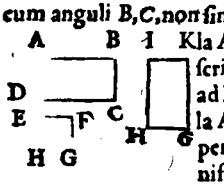
& angulus IAK, angulo FCG, erit totius angulus BAK, toti angulo DCG, æqualis: Eademque ratione angulus ABH, angulo CDE, æqualis erit; & reliqui reliquis, vt constat ex constructione; cum singula partes vnius singulis partibus alterius facta sint æquales. Quare æquiangulum erit rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG. Quoniam vero a ita est AB, ad BI, vt CD, ad DF: & ita BI, ad BH, vt DF, ad DE: b erit ex æquo ita AB, ad BH, vt CD, ad DE. Quare latera circa æquales angulos ABH, CDE, proportionalia sunt, c quemadmodum & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia sunt, ob triangula æquiangula BHI, DEF. d Rursus ita est HI, ad IB, vt EF, ad FD: & ita IB, ad IA, vt FD, ad FC: & ita IA, ad IK, vt EC, ad FG. e Igitur ex æquo erit ita HI, ad IK, vt EF, ad FG, & ideo latera quoque circa æquales angulos HIK, EFG, proportionalia erunt, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum sint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterque descripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 4. sexti.
b 22. quinti.
c 4. sexti.
d 4. sexti.
e 22. quinti.

SCHOLIVM.

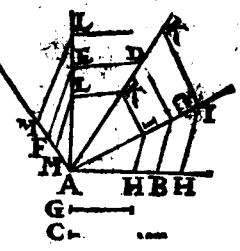
DICVNTVR autem rectilinea super lineas rectas descripta, esse similia & similiter posita, quando anguli æquales constituuntur super ipsas rectas lineas, & tam reliqui æquales anguli, quàm latera proportionalia semper ordine sese consequuntur. Vt triangula ABC, DEF, non solum erunt similia sed etiam super rectas BC, EF, similiterque descripta, si anguli B, C, æquales fuerint angulis E, F; & ita sit AB, ad BC, vt DE, ad EF, &c. At supra rectas BC, DE, non dicentur similiter esse descripta (quanquam similia sint,) cum anguli B, C, non sint æquales angulis D, E. Similiter rectangula AC, EG, similia, dicentur similiter esse descripta super rectas DC, HG, quoniam vt AD, ad DC, ita est EH, ad HG, &c. At vero rectangula AC, IG, non dicentur similiter descripta super rectas DC, HG, quamuis sint similia vt manifestum est. Eadem tamen similiter erunt descripta super rectas DC, IH, vel super rectas AD, HG.





CÆTERVM omnes figuræ secundum constructionem huius problematis descriptæ, sunt necessario similiter positæ, vt patet in rectilineis, ABHIK, CDEFG, super lineas AB, & CD, descriptis. Item omnes æquilateræ figuræ, & æquiangulæ, sunt quoque positæ similiter super quælibet earum latera.

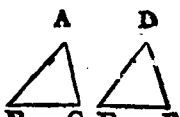
FOR-



FORTASSIS autem expeditius Problema propositum cõficiemus ad hunc modum. Sit dato rectilineo ABCDEF, super datam rectam G, vel aliam ei æqualem, describendum simile rectilineum similiterque positum. Productis duobus lateribus AB, AF, circa angulum A, educentur ex A, per omnes alios angulos rectæ AC, AD, AE, quantumlibet. Deinde ex AB, abscindatur AH, æqualis datæ rectæ G, vel certe ex ipsa AB, vlterius producta, si forte G, fuerit maior, quam AB. Posthæc per H, agatur recta HI, lateri BC, parallela & per I, recta IK, lateri CD, parallela, & sic deinceps, donec omnia latera suas habeant parallelas, demptis duobus lateribus productis AB, AF, factumque erit quod proponitur: hoc est, figura AHIKLM, super rectam AH, datæ rectæ G, æqualem, similis erit similiterque posita figuræ propositæ ABCDEF, super rectam AB, constitutæ. Cum enim angulus HAM, sit communis: & anguli ABC, AFE, æquales sint anguli AHI, AML: Item anguli ACB, ACD, æquales sint anguli AIH, AIK, hoc est, toti angulo BCD, æqualis sit angulus totus HIK: Eodemque modo anguli CDE, DEF, æquales sint anguli IKL, KLM: Æquiangula erunt rectilinea ABCDEF, AHIKLM. Sed & latera circum æquales angulos habent proportionalia. Cum enim triangula AHI, AIK, AKL, ALM, similia sint per coroll. propos. 4 huius lib. triangulis ABC, ACD, ADE, AEF: Erit *vt* AB, ad BC, ita AH, ad HI. Rursus vt BC, ad CA, ita HI, ad IA. Et vt CA, ad CD, ita IA, ad IK: ac proinde ex æquo, vt BC, ad CD, ita HI, ad IK, &c. Igitur ex definitione similia sunt rectilinea ABCDEF, AHIKLM, atque adeo similiter posita, per ea quæ proximè hoc scholio scripsimus. a 29. primi. b 4. sexti.

THEOR. 13. PROPOS. 19. xvi.

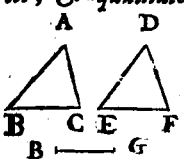
SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.



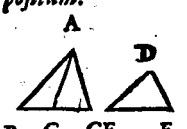
SINT triangula similia ABC, DEF, *habentia angulos æquales* B, & E: *Item* C, & F, &c. *Et sit vt* AB, *ad* BC, *ita* DE, *ad* EF, &c. *Dico triangula inter se rationem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa* BC, & EF, *vel* AB, & DE, *vel* AC, & DF. *Hoc est si homologis lateribus* BC, EF, *inueniatur tertia proportionalis* BG: *ita esse triangulum* ABC, *ad triangulum* DEF, *vt rectam* BC, *ad rectam* BG: *ac proinde cum ex defin.* 10. *lib.* 5. *proportio* BC, *ad* BG, *dicatur duplicata proportionis* BC, *ad* EF, *proportionem*

tionem trianguli ad triangulum dici quoque duplicatam proportionis laterum homologorum BC, EF. *Ita vt nihil aliud sit triangula duo, vel duas quaslibet figuras similes similiterque posítas, habere proportionem duorum laterum homologorum duplicatam, quam ita esse triangulum ad triangulum, vel figuram ad figuram, vt est prima linea ad tertiam, cum tres linea fuerint continue proportionales in proportione duorum laterum homologorum: quales hic sunt tres lineæ rectæ* BC, EF, BG, *continue proportionales in proportione homologorum laterum* BC, EF. *Sint ergo primùm latera* BC, EF, *æqualia, ac proinde & tertia proportionalis* BG, *illis æqualis: ita vt proportio* BC, *ad* BG, *qua duplicata dicitur proportionalis lateris* BC, *ad latus* EF, *sit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula* ABC, DEF, *habent quoque proportionem æqualitatis, a quod ipsa inter se æqualia sint, ob angulos* B, C, *angulis* E, F, *æquales, & æqualitatem laterum* BC, EF, *quibus adiacent: erit tri-*

a 26. primi



angulum ad triangulum, vt recta BC, *ad rectã* BG. *Cũ ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum* BC, EF; *dicetur quoque proportio trianguli* ABC, *ad triangulum* DEF, *proportionis, quam latus* BC, *ad latus* EF, *habet duplicata. Quod etiam hinc constare potest. Quoniam vt dictum est, triangula* ABC, DEF *æqualia sunt, hoc est proportionem æqualitatis habent. sicut & latera homologa* BC, EF: *Proportio autem æqualitatis duplicata solùm efficit proportionem æqualitatis:* (*Positis enim tribus magnitudinibus æqualibus dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad secundam, vt constat ex definitione 10. lib. 5. cùm tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, sicuti & prima ad secundam,*) *habebit triangulum* ABC, *ad triangulum* DEF, *proportionem duplicatam eius, quam habet latus* BC, *ad latus* EF. *Quod est propositum.*



b 11. sexti.

SIT deinde BC, *latus latere* EF, *maius; & ex* BC, b *abscindatur rectis* BC, EF, *tertia proportionalis* BG, *ducaturque recta* AG. *Quia igitur est vt* AB, *ad* BC, *ita* DE, *ad* EF; *erit permutando vt* AB, *ad* DE, *ita* BC, *ad* EF. *Vt autem* BC, *ad* EF, *ita est per constructionem* EF, *ad* BG. *Vt ergo* AB, *ad* DE, c *ita erit* EF, *ad* BG.

c 11. quinti.
d 15. sexti.
e 7. quinti.
a 1. sext.

Quare cum triangula ABG, DEF, *habeant latera circa angulos* B, E, *æquales reciproca,* d *ipsa inter se æqualia erunt; & propterea vt triangulum* ABC, *ad triangulum* DEF, e *ita erit idem triangulum* ABC, *ad triangulum* ABG. *Vt autem triangulum* ABC, *ad triangulum* ABG, *eiusdem altitudinis,* a *ita est basis* BC, *ad basin* BG. *Igitur*

tur vt triangulum ABC, *ad triangulum* DEF, *ita est* BC, *ad* BG. *Atqui cum tres lineæ* BC, EF, BG, *sint continuè proportionales, proportio prima* BC, *ad tertiam* BG, *duplicata dicitur proportionis* BC, *primæ ad* EF, *secundam. Igitur & triangulum* ABC, *ad triangulum* DEF, *proportionem habet duplicatam proportionis lateris* BC, *ad latus* EF. *Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum.*

COROLLARIVM.

(HINC manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; vt est prima ad tertiam, ita esse triangulum super primam descriptum ad triangulum supra secundam simile similiterque descriptum.)

SINT enim tres rectæ proportionales A, B, C; & super primam A, & secundam B, cõstituta triangula A, & B, similia, similiterque

descripta. Dico, vt est recta *A*, prima ad rectam *C*, tertiam, ita esse triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, est, per definitionem, duplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. *b* Cum igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit vt recta *A*, ad rectam C, ita triangulum *A*, ad triangulum B. b 19. *sexti.*

EODEM modo ostendes, ita esse triangulum supra secundam ad triangulum supra tertiam simile similiterque descriptum, vt est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B, secundam, & A, tertiam constituantur triangula similia similiterque posita B, & A. Dico, vt est recta C, ad rectam A, ita esse triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata est proportionis C, ad B, hoc est, rectæ B, ad rectam A. *c* Cùm igitur & triangulũ B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa: erit vt C, recta ad rectam A, ita triangulum *B*, ad triangulum A. c 19. *sexti.*

SCHOLIVM.

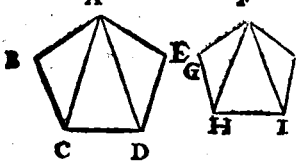
ITAQVE si proportio lateris BC, ad latus EF, nota sit in numeris, nimirum vt 6. ad 5. cognoscemus quoque ex hac propos. 19. in numeris, quam proportionem habeat triangulum ABC, ad triangulum DEF. Si enim proportio 6. ad 5. continuetur in tribus numeris hoc modo 36. 30. 25. erit triangulum ad triangulum vt 36. ad 25. hoc est, habebit proportionem, cuius denominator est, $\frac{11}{25}$. Quia enim proportio 36. ad 25. est duplicata proportionis 36. ad 30. siue 6. ad 5. quam latera homologa ponuntur habere: Habent autem

tem & triangula proportionem laterum homologorum duplicatam vt hoc theoremate oſtenſum eſt ; erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. Eandem proportionem triangulorum cognoscemus, ſi denominatorem proportionis laterum homologorum ſemirum $1\frac{1}{5}$. in ſe multiplicemus. Productus enim numerus $\frac{36}{25}$. id eſt, $1\frac{11}{25}$. erit denominator proportionis; quæ duplicata eſt proportionis laterum, ac proinde & denominator proportionis triangulorum, quod hæc etiam duplicata ſit eiuſdem proportionalis laterum.

SIC etiam, ſi latera homologa habeant proportionem, quam 10. ad 1. habent triangula proportionem, quam 100. ad 1. cum hæc illius ſit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator decuplæ proportionis, id eſt 10. in ſe multiplicatus gignit 100. denominatorem proportionis, quæ decuplæ duplicata eſt.

xviij. ## THEOR. 14. PROPOS. 20.

SIMILIA polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter ſe rationem, quam latus homologum ad homologum latus.



SINT polygona ſimilia ABCDE, FGHIK, *habentia ãgulos æquales* KBAE, GFK; *Item angulos* B, G, *& ſic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales, vt quidem* AB, *ad* BC, *ita* FG, *ad* GH, *& vt* BC, *ad* CD, *ita* GH, *ad* HI, *&c. Dico primũ, hæc polygona diuidi in triãgula ſimilia, quæ ſint numero æqualia. Ab angulis enim* BAE, GFK, *rectæ ducantur ad ſingulos angulos oppoſitos, quæ ſint* AC, AD, FH, FI; *diuiſaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam vero angulus* B, *æqualis eſt angulo* G, *ex hypotheſi, & circa ipſius latera proportionalia*; a *æquiangula erunt triangula* ABC, FGH, *habentia angulos* BAC. GFH, *æquales*; *Item angulos* ACB, FHG, *lateribus homologis oppoſitos*: b *Ideoq; latera habebunt circa æquos angulos proportionalia, ac propterea inter ſe ſimilia erunt*: *Eadem ratione erunt ſimilia triangula* AED, EKI, *habentia angulos* EAD, KFI, *& angulos* ADE, FIK, *æquales. Deinde* c *quia eſt vt* AC, *ad* CB, *ita* FH, *ad* HG, *ob ſimilitudinem triangulorum* ABC, FGH, *vt autem* CB, *ad* CD, *ita eſt, ex hypotheſi,* HG, *ad* HI, *ob ſimilitudinem polygonorum*: d *erit ex æquo vt* AC, *ad* CD, *ita* FH, *ad* HI. *Et quoniam an-*

a 6. *ſexti.*
b 4. *ſex.*
c 4 *ſexti.*
d 2. *quinti.*

um angulus BCD, æqualis ponitur angulo GHI; est autem & ablatus ACB, ostensus æqualis ablato FHG: erit & reliquus ACD, reliquo FHI, æqualis. a Quare triangula ACD, FHI, cum habeant latera circa æquales angulos ACD, FHI, proportionalia, æquiangula erunt ideoque similia. Eademque ratio est de alijs omnibus triangulis, si plura fuerint. a 6. sexti.

DICO præterea triangula hæc esse homologa totis polygonis, hoc est, ita esse quodlibet triangulum in vno polygono ad suum correspondens triangulum in altero polygono, vt polygonum ad polygonum. Quoniam enim similia sunt triangula ABC, FGH, erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum AC. FH. Atque eodem argumento proportio triangulorum ACD, FHI, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum AC. FH. Quare vt triangulum ABC, ad triangulum FGH: ita erit triangulum ACD, ad triangulum FHI: cum vtraque hæc proportio triangulorum sit duplicata eiusdem proportionis lateris AC, ad latus FH. Neque dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum ADE, ad triangulum FIK, vt ACD, ad FHI: Atque ita deinceps, si plura fuerint triangula. Sunt igitur proportionalia triangula vnius polygoni cum triangulis alterius, ita vt triangula vnius sint antecedentia, & triangula alterius consequentia proportionum. Vt autem vnum antecedens ad vnum consequens, b ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia. Igitur vt quodlibet triangulum vnius polygoni ad sibi respondens triangulum alterius ita erit totum polygonum, ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis. b 12. quinti.

DICO postremò, polygona inter se proportionem habere duplicatã eius quam habent latera homologa, hoc est, si homologis lateribus, verbi gratia, AB, FG, inueniatur tertia linea proportionalis, ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt est prima linea AB, ad tertiam inuentam: ac proinde, cùm proportio AB, ad illam tertiam, dicatur duplicata proportionis AB, ad FG, dici quoque proportionem polygoni ad polygonum duplicatam proportionis laterum homologorum AB, FG. Cùm enim sit vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, Triangulum vero ABC, ad triangulum FGH, c habeat proportionem duplicatam eius, quam habent latera homologa AB, FG, hoc est, eandem quam habet AB, ad illam tertiam inuentam: habebunt quoq; polygona inter se proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG, hoc est, eandem quam habet AB, ad illam tertiam inuentam. Itaque similia polygona in similia triangula diuiduntur, &c. c 19. sexti.

Quod demonstrandum erat.

COROL-

COROLLAIRVM.

(HINC manifestum est, si fuerint tres rectæ proportionales, vt est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum ad polygonum super secundam simile similiterque descriptum: Vel ita esse polygonum super secundam descriptum ad polygonum super tertiam simile similiterque descriptum.

HOC non aliter demõstrabitur ex hoc theoremate, quam ostensum fuit corollarium præcedentis theorematis ex suo theoremate. Vt perspicuum est in hac figura opposita.

SCHOLIVM.

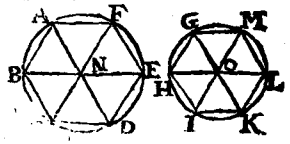
QVANDO polygona similia sunt pentagona, vt in figura demonstrabitur etiam hoc modo triangula media *ACD*, *FHI*, similia esse. Quoniam anguli *ACB*, *FGH*, æquales sunt, ob similitudinem triangulorum *ABC*, *FGH*; si auferantur er angulis *BCD*, *GHI*, qui æquales etiam sunt ob similitudinem polygonorum: æquales erunt & reliqui anguli *ACD*, *FHI*: Eademque ratione æquales ostendentur anguli *ABC*, *FIH*: ac propterea *a* & reliquis *CAD*, *HFI*, æquales erunt. Igitur cùm æquiangula sint triangula *ACD*, *FHI*, *b* habebunt latera circa angulos æquales proportionalia, ac proinde similia erunt.

a 32. *pri.*
b 4. *sexti.*

AT vero quando polygona habent plures angulos, demonstrandum est, triangula media similia esse, ex æqualitate, & propos. 6. huius lib. vt in propositione factum est: quia non possunt probari anguli æquales præter vnum, qui videlicet propè præcedens triangulum simile existit, qualis est angulus *ACD*, & *FHI*. Nam angulus *ADC*, ostendi non potest æqualis angulo *FIH*; quod tunc alia adhuc triangula supersint vsque ad triangula similia *AED*, *FKI*, &c. Hoc ideo dixerim, ne quis existimet, frustra in propos. nos dixisse, ita esse *AC*, ad *CB*, vt *FH*, ad *HG*: Et ita *CB*, ad *CD*, vt *HG*, ad *HI*: ac proinde ex æqualitate ita *AC*, ad *CD*, vt *FH*, ad *HI*; ideoque cùm anguli *ACD*, *FHI*, sint æquales, similia esse triangula *ACD*, *FHI*. Hæc enim demonstratio est omnino necessaria, conuenitq; omnibus polygonis quotcunque angulorum; cùm omnia triangula media eo modo ostendantur esse similia, vt perspicuum est. Nam si triangula *ADE*, *FIK*, non essent vltima, demonstrarentur similia hoc modo. Quoniam est vt *AD*, ad *DC*, ita *FI*, ad *IH*, ob similitudinem triangulorum *ACD*, *FHI*: Item vt *DC*, ad *DE*, ita *IH*, ad *IK*, ob similitudinem polygonorum; erit ex æquo, vt *AD*, ad *DE*, ita *FI*, ad *IK*: Et quia angulus *CDE*, æqualis ponitur angulo *HIK*: Est autem & ablatus *ADG*, ostensus ablato *FIH*,

FIH, æqualis, erit & reliquus ADE, reliquo FIK, æqualis. a Quare triangula ADE, FIK, similia erunt, cum habeant latera circa æquales angulos ADE, FIK, proportionalia. Atque ita deinceps, si fuerint plura triangula. a 6. sexti.

Quod si polygona similia, fuerint æquilatera, & æquiangula diuidentur quoque in similia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; Ductis è centris circulorum ipsa circumscribentium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona similia, æquilatera, & æquiangula ABCDEF, GHIKLM, quæ circumscribãtur à circulis circa centra NO, ex quibus rectæ ducantur NA, NB, &c. Dico triangula NCD, OIK, similia esse, & homologa totis polygonis. Quoniam enim anguli CND, IOK, æquales sunt: (quod æque submultiplices sint quatuor rectorum. Nam vtrumque spatium N, & O, quatuor rectis æquiualens, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. diuiditur in angulos & numero, & magnitudine æquales. Cum enim anguli in centro N, insistant æqualibus arcubus, b ipsi inter se æquales erunt: eademque ratione anguli in centro O, æquales erunt. Sunt autem & latera circum ipsos proportionalia, cum vtrobique sit proportio æqualitatis: c Similia erunt triangula NCD, OIK. Eademque est ratio de cæteris. At vero hæc triangula esse homologa totis polygonis, nullo negotio demonstrabitur. Cum enim tota polygona sint ipsorum triangulorum æque multiplicia, vt patet, d habebunt vtique eandem cum ipsis proportionem,



b 27. tertij. c 6. sexti. d 15. quinti.

Porro ex hoc theoremate perfacile demonstrabimus theorema illud, quod iam aliter in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus. Nimirum.

Si linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius: Et contra, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.

Sit primum recta A, dupla rectæ B. Dico quadratum A, quadruplum esse quadrati B. Cum enim omnia quadrata sint similia, vt constat ex defin. 1. huius lib. erit per hanc propos. proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & E: quæ cum inter se proportionem habeant duplam, erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, vt hic apparet 1. 2. 4.

Sit deinde quadratum A, quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum esse lateris B. Cum enim proportio quadratorum, quæ ponitur

nitur quadrupla, duplicata ſit proportionis laterum homologorum, vt dictum eſt; habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata eſt proportionis duplæ, vt in exemplo adducto ſuperius apparet.

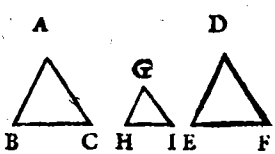
Itaque ſi proportio lateris AB, ad latus FG, in polygonis, quæ in propoſ. deſcripſimus, nota ſit in numeris, nimirum vt 5. ad 4. cognoſcemus quoque ex hac propoſ. 20. in numeris, quam proportionem habeat polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK. Si enim proportio 5. ad 4. continuetur in tribus numeris, hoc modo 25. 20. 16. erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. hoc eſt, habebit proportionem, cuius denominator eſt $1\frac{9}{16}$. Quia enim proportio 25. ad 16. eſt duplicata proportionis 25. ad 20. ſiue 5. ad 4. quam homologa latera AB, FG, ponuntur habere: demonſtratumq; eſt hoc theoremate, polygona quoque habere duplicatam proportionem eius, quam latera homologa habent, erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. Idem denominator proportionis polygonorum, cognoſcetur, ſi denominator proportionis laterum homologorum nimirum $1\frac{1}{4}$ in ſe multiplicetur. Productus enim numerus $\frac{25}{16}$. id eſt, $1\frac{9}{16}$. erit denominator proportionis, quæ duplicata dicitur eius, quam latera homologa habent, ex ijs quæ in defin. 10. lib. 5. ſcripſimus; ac proinde & denominator proportionis polygonorum, cum hæc ſit etiam duplicata eiuſdem proportionis laterum homologorum.

Sic etiam, ſi latera homologa haberent proportionem decuplam, haberent polygona proportionem centuplam, cum hæc illius ſit duplicata, vt hic apparet 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator 10. proportionis decuplæ in ſe multiplicatus gignit denominatorem 100. proportionis centuplæ, quæ decuplæ duplicata dicitur.

THEOR. 15. PROPOS. 21.

xx.

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia.



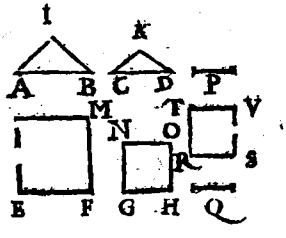
Sint rectilinea ABC, DEF, rectilineo GHI, ſimilia. Dico & ipſa inter ſe eſſe ſimilia. Cum enim propter ſimilitudinem, anguli rectilinei ABC, æquales ſint angulis rectilinei GHI; item eadem de cauſa anguli rectilinei DEF, æquales angulis eiuſdem rectilinei GHI; a

2 1. pro- *erunt anguli rectilinei ABC; æquales angulis rectilinei DEF. Rurſus*
xum. *cum ob eandem ſimilitudinem, latera rectilinei ABC, proportionalia ſint lateribus rectilinei GHI, ea videlicet ijs, quæ circum æquales ſunt angulos; Item eandem ob cauſam, latera rectilinei DEF, proporti-*

portionalia lateribus eiusdem rectilinei GHI: b erunt quoque late- b 11. quinti.
ra rectilinei ABC, lateribus rectilinei DEF, proportionalia, ea nimi-
rum ijs, quæ angulos ambiunt æquales. Atque adeo per definitionem,
similia existent rectilinea ABC, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo sunt
similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

THEOR. 16. PROPOS. 22. xxij.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.



Sint primum quatuor rectæ AB, CD, EF, GH, *proportionales, vt quidem* AB, *ad* CD, *ita* EF, *ad* GH; *Constituantur que super* AB, CD, *duo quacunque rectilinea similia similiterque descripta* ABI, CDK: *item super* EF, GH, *alia duo quacunque rectilinea similia similiterque descripta* EFML, GHON. *Dico & hæc rectilinea esse proportionalia, vt quidem* ABI, *ad* CDK, *ita* EM, *ad* GO. *a Inueniatur enim rectia* AB, CD, *tertia proportionalis* P: *& rectis* EF, GH, *tertia proportionalis* Q: b *eritque ex æquo vt* AB, *ad* P, *ita* EF, *ad* Q: *Vt autem* AB, *ad* P, *ita est rectilineum* ABI, *ad rectilineum* CDK, *simile similiterque descriptum ex corollario propositionis* 20. *huius lib. vel si fuerint triangula, ex coroll. propos.* 19. *Et eadem ratione vt* EF, *ad* Q, *ita rectilineum* EM, *ad rectilineum* GO. c *Igitur vt* AB, *ad* CDK, *ita erit* EM, *ad* GO. *Quod est propositum.*

a 11. sexti.
b 22. quinti.
c 11. quinti.

Deinde sint ABI, CDK, EM, GO, *rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas* AB, CD, EF, GH, *esse quoque proportionales, vt quidem* AB, *ad* CD, *ita* EF, *ad* GH. d *Inueniatur enim tribus rectis* AB, CD, EF, *quarta proportionalis* RS, *super quam describatur rectilineum* RSVT, *simile rectilineo* EM, *similiterque positum*: e *& ob id rectilineo* GO. *Quoniam igitur est vt* AB, *ad* CD, *ita* EF, *ad* RS: *erit quoque, vt iam est ostensum, vt* ABI, *ad* CDK, *ita* EM, *ad* RV. *Vt autem* ABI, *ad* CDK, *ita quoque ponitur* EM, *ad* GO. f *Igitur erit vt* EM, *ad* RV, *ita* EM, *ad* GO: g *Atque idcirco æqualia erunt* RV, GO. *Quæ cum sint similia similiterque posita, consistent necessario, vt mox ostendemus super rectas* RS, GH, *æquales.* h *Quare erit vt* EF, *ad* RS, *ita* EF, *ad* GH. *Ponitur autem* EF, *ad* RS, *vt* AB, *ad* CD. i *Igitur erit quoque vt* AB, *ad* CD, *ita* EF, *ad* GH. *Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.*

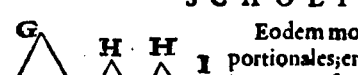
d 12. sexti.
e 21. sexti.
f 11. quinti.
g 9. quinti.
h 7. quinti.
i 11. quinti.

LEMMA.

Quod autem æqualia rectilinea ſimilia ſimiliterq; deſcripta, qualia ſunt GO, RV, conſiſtant ſuper rectas æquales, ita oſtendetur. Si enim inæquales ſunt GH, RS; ſit GH, maior. Cum igitur ob ſimilitudinem rectilineorum: ſit vt GH, ad HO, ita RS, ad SV, ponatur autem GH, maior quam RS, erit quoque HO, maior quam SV, & propterea rectilineum GO, maius rectilineo RV, cum hoc intra ipſum poſſit conſtitui; quod eſt abſurdum, cum ſit contra hypotheſin. Non ergo inæquales ſunt rectæ GH, RS. Quod eſt propoſitum.

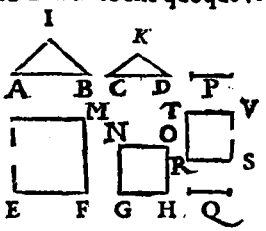
Aliter. Sint duo rectilinea ABC, DEF, æqualia, & ſimilia ſimiliterq; poſita. Dico latera homologa, cuiuſmodi ſunt rectæ AB, DE, eſſe æqualia. Si enim non credantur æqualia, ſit AB, maius, quam DE, inueniaturque rectis AB, DE, tertia proportionalis G. Quoniam ergo eſt, vt AB, ad DE, ita DE, ad G. Eſt autem AB, maior quam DE. Erit quoque DF, maior, quam G, ac propterea multo maior AB, quam G. Vt vero AB, ad G, ita eſt rectilineum ABC, ad rectilineum CEF, per coroll. propoſ. 19. vel 20. huius lib. Igitur cum AB, maior ſit, quam G, erit quoque rectilineum ABC, maius rectilineo DEF, quod eſt abſurdum, cum poſitum ſit æquale. Non ergo maior eſt, AB, recta quam recta DE. Sed neque maior erit eadem ratione; quia & rectilineum ABC, minus oſtenderetur rectilineo DEF, quod eſt contra hypotheſin. Quare æquales ſunt rectæ AB, DE.

SCHOLIVM.



Eodem modo, ſi fuerint tres rectæ proportionales; erunt & rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta ab eis, proportionalia. &c. Si enim ſumatur linea media, eiuſque rectilineum bis habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, vt hic Euclides demonſtrauit. Cum igitur id, quod à ſecunda eſt deſcriptum, æquale ſit ei, quod à tertia, immo idem; manifeſtum eſt, quod proponitur. Bre-

Breuius tota hæc propositio demonstrabitur, hoc modo. Ponatur primum esse vt *AB*, ad *CD*, ita *EF*, ad *GH*. Dico esse quoque vt *ABI*, ad *CDK*, ita *EM*, ad *GO*. *a* Cum enim sit proportio rectilinei *ABI*, ad *CDK*, duplicata proportionis *AB*, ad *CD*. Item proportio rectilinei *EM*, ad rectilineum *GO*, duplicata proportionis *EF*, ad *GH*, erunt proportiones *ABI*, ad *CDK*, & *EM*, ad *GO*, æquales; quandoquidem duplicatæ sunt proportionum æqualium *AB*, ad *CD*, & *EF*, ad *GH*. Quod est primum.



a 19. vel 20. sexti.

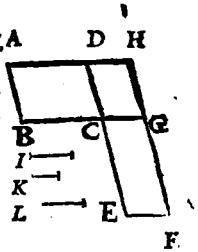
Ponatur deinde esse vt *ABI* ad *CDK*, ita *EM*, ad *GO*. Dico esse quoque vt *AB*, ad *CD*, ita *EF*, ad *GH*. *b* Cum enim sit proportio *ABI*, ad *CDK*, duplicata proportionis *AB*, ad *CD*: Item proportio *EM*, ad *GO*, duplicata proportionis *EF*, ad *GH*; Erunt proportiones *AB*, ad *CD*, & *EF*, ad *GH*, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ *ABI*, ad *CDK*, & *EM*, ad *GO*, æquales ponuntur. Quod est secundum.

b 19. vel 20. sexti.

THEOR. 17. PROPOS. 23. XXIV.

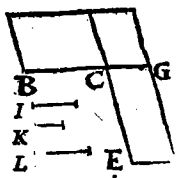
Æquiangula parallelogrammma inter se rationem habent eam, quæ ex laterihus componitur.

Sint parallelogramma æquiangula AC, CF, habentia angulos BCD, ECG, æquales. Dico proportionem eorum esse compositam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera vnius circa angulum æqualem ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita vt antecedentia proportionum sint in vno parallelogrammo & consequentia in altero; hoc est proportionem AC, parallelogrammi ad parallelogrammum CF, compositam esse ex proportionibus rectæ BC, ad CG, rectam, & rectæ DC, ad rectam CE; Vel etiam ex proportionibus rectæ BC, ad rectam CE, & rectæ DC, ad rectam CG. Id est, si sumantur tres lineæ I, K, L, ita vt I, ad K, sit sicut BC, latus ad latus CG, & K, ad L, vt latus DC, ad latus CE; ita esse parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, vt est recta I, ad rectam L: ac proinde cum ex defin. 5. huius lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; proportionem quoque parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, dici compositam esse ex eisdem proportionibus, hoc est, ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt BC, CG, efficiant vnam lineam rectam: Quo posito, cum anguli BCD, ECG, sint æquales, e-



runt & DC, CE, vna recta linea, vt ad propoſ. 15. lib. 1. ex Proclo demonſtrauiuimus. Producántur deinde AD, FG, *donec conueniant in*

a 12. *ſexti.*



H; Sumptaque recta I, *quacunque, ſit Inueniatur tribus* BC, CG, *&* I, *quarta proportionalis* K. *Item tribus* DC, CE, *&* K, *quarta proportionalis* L. *Quoniam igitur eſt,* b *vt* BC, *ad* CG, *ita* AC, *ad* CH. *Vt autem* BC, *ad* CG, *ita poſita eſt* I, *ad* K, c *erit quoque vt* AC, *ad* CH, *ita* I, *ad* K. *Eodemque argumento oſtendes eſſe, vt* HC, *ad* CF, *ita* K, *ad* L. *Nam vt* DC, *ad* CE, d *ita eſt* HC, *ad* CF. *Cum ergo poſita ſit* K, *ad* L, *vt* DC, *ad* CE,

b 1. *ſexti.*

c 11. *quinti.*

d 1. *ſexti.*

e 22. *quinti.*

erit quoque HC, *ad* CF, *vt* K, *ad* L: e *Ex æquo igitur erit vt* AC, *ad* CF, *ita* I, *ad* L. *Sed proportio* I, *ad* L, *per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionibus* BC, *ad* CG, *&* DC, *ad* CE. *Ex his eiſdem ergo proportionibus componetur quoque proportio parallelogrammi* AC, *ad parallelogrammum* CF. *Eademque ratione oſtendemus, proportionem* AC, *ad* CF, *componi ex proportionibus* BC, *ad* CE, *&* DC, *ad* CG, *dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos æquales. vt* BC, CE, *efficiant vnam rectam lineam, &c. Æquiangula itaque parallelogramma inter ſe rationem habent, &c. Quod erat oſtendendum.*

SCHOLIVM.

Expeditius idem demonſtrabitur hoc modo. Coniunctis parallelogrammis vt prius; *f* Cum ſit vt AC, ad CH, ita BC, ad CG, & vt CH, ad CF, ita DC, ad CE; Proportio autem AC, ad CF, componatur per definitionem, ex intermedijs proportionibus AC, ad CH, & CH, ad CF, componetur quoque eadem proportio AC, ad CF, ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE, quæ illis intermedijs ſunt æquales. Quod eſt propoſitum.

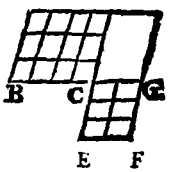
f 1. *ſexti.*

Hanc porro prop. demonſtrat Euclides in numeris lib. 8. prop. 5.

Itaque ſi proportiones laterum, nimirum BC, ad CG, & DC, ad CE, notæ ſint in numeris, veniemus quoque ex hac propoſ. 23. in cognitionem proportionis parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, in numeris hoc modo: Sit proportio BC, ad CG, eadem, quæ 11. ad 5. & DC, ad CE, eadem, quæ 7. ad 11. atque hæ duæ proportiones continentur in tribus numeris 77, 35, 55. ita vt ſit 77. ad 35. ſicut 11. ad 5. & 35. ad 55. vt 7. ad 11. Et quia proportio 77. ad 55. componitur ex proportionibus 77. ad 35. & 35. ad 55. hoc eſt, ex proportionibus laterum erit vt 77. ad 55. ita parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, *g* quod proportio parallelogrammorum iit etiam compoſita ex eiſdem proportionibus laterum: hoc eſt, proportio parallelogrammorum denominabitur à $1\frac{22}{35}$. Continuabuntur autem duæ datæ proportiones in tribus numeris vel ex iis, quæ

g 23. *ſexti.*

quæ propos. 4. lib. 8. demonstrãtur, vel certe hoc modo. Posita priore proportione 11. ad 5. fiat vt 7. ad 11. (quæ est posterior proportio) ita 5. ad aliud inuenieturque numerus $7\frac{5}{7}$. Ita ergo stabunt tres numeri habentes duas illas proportiones 11. 5. $7\frac{5}{7}$. Quod si tertius reuocetur ad hanc vnicam fractionem $\frac{5}{7}$. & alij duo numeri per donatorem 7. multiplicentur, erunt duo producta numeri 77. 35. & numerator 55. tres numeri integri in eisdem proportionibus.



Sic etiam si proportiones laterum sint vt 4. ad 2. & 3. ad 3. continuabuntur duæ hæ proportiones in hisce tribus numeris 4. 2. 2. Vel in hisce minimis 2. 1. 1. Et quia primus ad tertiũ est duplus, erit quoque parallelogrammorum proportio dupla. Id quod ex hac figura perspicuum est. Nam si latus BC, diuidatur in 4. partes æquales, & CG, in 2. At DC. in 3. & CE, in 3. ita vt BC, ad CG, proportionem habeat duplam, at DC, ad CE, proportionem æqualitatis, vt positum est: ducantur autem per puncta diuisionum lateribus parallelæ, continebit parallelogrammum AC. 12. rhombos æquales, at CF, solum 6. atque adeo parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, duplam proportionem habebit, vt dictum est.

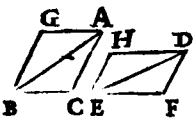
Perspicuum autem est, alteram proportionum componentium posse esse maiorem proportione compositã, & æqualem. In priori enim exemplo proportio lateris BC, ad CG, est vt 11. ad 5. hoc est, cuius denominator est $2\frac{1}{5}$. quæ maior est proportione parallelogrammorum, cum huius denominator sit $1\frac{2}{55}$. In posteriori vero exemplo proportio lateris BC ad CG, est dupla, quemadmodum & proportio parallelogrammorum. Vt vel hinc etiam constare possit, hanc proportionum compositionem non esse additionem, vt nonnulli interpretes volunt: Item proportionem maioris inæqualitatis posse componi tum ex proportione minoris inæqualitatis: tum ex æqualitatis proportione, quod ijdem interpretes negant. In exemplo namque priori proportio lateris DC, ad CE, est minoris inæqualitatis, in posteriori verò æqualitatis. Sed hac de re plura scribemus ad finem libri 9.

Demonstrat hoc loco Federicus Commandinus nonnulla alia, quæ vel ad compositionem proportionum pertinent, vel ex ea demonstrantur, nõ inutilia, quæ nos quoque afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonstrationibus; Sunt autem ea quæ sequuntur.

I.

Triangula, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositam.

Sint triangula ABC, DEF, angulum C, angulo F, habentia æqualẽ.



Dico proportionem trianguli ABC, ad triangulum DEF, compositam esse ex lateribus, hoc est, ex proportione BC, ad EF, & ex proportione AC, ad DF: Vel ex proportione BC, ad DF, & ex proportione AC, ad EF. Completis enim parallelogrammis CG, FH, erunt ea æquiangula; *a* atque adeo eorum proportio ex lateribus componetur. Cum ergo triangula ABC, DEF, cum ipsis, *b* quorum sunt dimidia, *c* eandem habeant proportionem; Erit quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, composita ex proportionibus laterum BC, AC, ad latera EF, DF.

a 23. *sexti.*

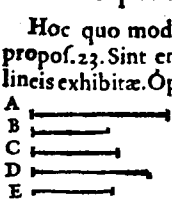
b 34. *primi.*

c 15. *quinti.*

II.

Proportionem ex duabus proportionibus, vel pluribus componere.

Hoc quo modo fiat, facile colligitur ex demonstratione huius propos. 23. Sint enim tres proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, in lineis exhibitæ. Oportet iam ex ipsis vnam proportionem componere, *d* fiat vt A, ad B, ita G, ad H: & vt C, ad D, ita H, ad I: & vt E, ad F, ita I, ad K. Dico proportionem G, ad K, compositam esse ex tribus datis proportionibus. Cum enim ea composita sit ex proportionibus G, ad H: H, ad I: & I, ad K, per defin. 5. huius lib. composita etiam erit ex proportionibus A, ad B: C, ad D: & E, ad F: quod his illæ sumptæ sint æquales.

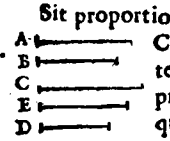


d 12. *sexti.*

III.

Proportionem minorem ex maiore auferre.

Sit proportio A, ad B, minor auferenda ex proportione maiore C, ad D. *e* Fiat vt A, ad B, ita C, ad E: statuaturque E, terminus medius inter C, & D. Dico ablatam esse proportionem A, ad B, ex proportione C, ad D, reliquamque esse proportionem E, ad D. Cum enim proportio C, ad D, componatur ex proportionibus C, ad E, & E, ad D: Si proportio C, ad E, hoc est, A, ad B, auferatur, relinquetur proportio E, ad D.



e 12. *sexti.*

Verum hæc compositio, & detractio proportionum non est additio, & subtractio proprie, quia alias totum esset æquale parti, & minus, & maior proportio posset detrahi ex minore, vt ad finem lib. 9. ostendemus.

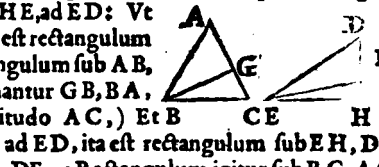
IV.

Triangula, quæ vnum angulum vni angulo æqua-

lem

lem habent, eandem proportionem habeant, quam rectangula, quæ sub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.

Sint triangula ABC, DEF, angulum A, angulo D, habentia æqualem. Dico esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, ut rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Ductis enim ad AC, DF, perpendicularibus BG, EH, erunt triangula ABG, DEH, æquiangula, ut constat ex coroll. 2. propos. 32. lib. 1. cum duo anguli A, AGB, duobus angulis D, DHE, sint æquales. *a* Igitur erit, ut GB, ad BA, ita HE, ad ED: Vt autem GB, ad BA, *b* ita est rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub AB, AC. (Nam si bases ponantur GB, BA, erit eorum eadem altitudo AC,) Et eadem ratione, ut HE, ad ED, ita est rectangulum sub EH, DF, ad rectangulum sub DE, DF. *c* Rectangulum igitur sub BG, AC, ad rectangulum sub AB, AC, est ut rectangulum sub EH, DF, ad rectangulum sub DE, DF, & permutando, rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF, ut rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Sed ut rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF. *d* ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF, *e* quod hæc triangula sint rectangulorũ illorũ dimidia. (Habent enim easdem cum illis bases AC, DF, altitudinesq; easdem BG, EH: ac proinde inter easdẽ cũ illis parallelas sunt constituta.) Igitur erit quoque triangulum ABC, ad triangulum DEF, ut rectangulum AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Quod est propositum.



a 4. *sext.*
b 1. *sext.*
c 11. *quinti.*
d 11. *quinti.*
e 41. *primo*

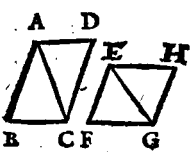
Aliter & facilius. Ex theoremate 1. hujus scholii, proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, composita est ex proportionibus AB, ad DE, & AC, ad DF: *f* Sed & proportio rectanguli sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF, ex eisdem proportionibus AB, ad DE, & AC, ad DF, composita est. Igitur erit triangulum ABC, ad triangulum DEF, ut rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF, quod est propositum.

f 23. *sexti.*

V.

PARALLELOGRAMMA inter se æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulũ continentibus comprehensa.

Sint parallelogramma ABCD, EFGH, æquiangula inter se quorum anguli B. & F, sint æquales. Dico esse, ut parallelogram-



mum BD, ad parallelogrammum FH, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Ductis enim diametris AC: EG, quæ angulos æquales B, F. subtendant; habebunt triangula ABC, EFG, angulum B, angulo F, æqualem. Quare, ut jam demonstravimus, erit ut triangulum ABC, ad triangulum EFG, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG,

a 15. *quinti.* a Cum ergo parallelogramma BD, FH, eandem habeant proportionem, quam triangula ABC, EFG; b quod hæc ipsorum sint dimidia; c Erit quoque ut parallelogrammum BD, ad FH, parallelogrammum, ita rectangulum sub AB, EC, ad rectangulum sub EF, FG. Quod est propositum.

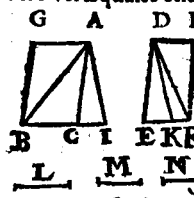
b 34. *primi*

c 11. *quinti.*

VI.

Triangula, & parallelogramma inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

Sint triangula ABC, DEF, & parallelogramma CG, EH, quorum altitudines AI, DK. Dico eorum proportionem compositã esse ex proportione basis BC, ad basin EF, & proportione altitudinis AI, ad altitudinem DK. Sint enim primum altitudines æquales, bases vero vel æquales etiam, vel inæquales: Fiatque, ut BC, ad EF, ita



L, ad M: Vt autem AI, ad DK, ita M, ad N. Quo facto erit M. ipsi N, æqualis, quod & AI, ipsi DK, æqualis ponatur; d Ac proinde erit L, ad N, ut L, ad M, hoc est, ut BC, ad EF. e At vero, ut BC, ad EF, ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH. f Igitur quoque erit, ut L, ad N. ita triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH. Sed proportio L, ad N. composita est ex proportione L, ad M. hoc est, ex proportione basis BC, ad basin EF, & ex proportione M, ad N. hoc est, altitudinis AI, ad altitudinem DK. proportio ergo trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi CG, ad parallelogrammum EH, ex eisdem proportionibus est composita. Quod est propositum.

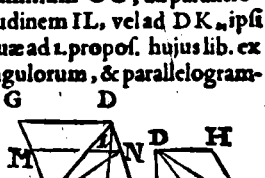
d 7. *quinti.*

e 1. *sext.*

f 11. *quinti.*

Sint jam altitudines AI, DK, inæquales, & AI, major; bases vero BC, EF, vel æquales, vel etiam Inæquales, Fiat, ut AI, ad DK, ita O, ad P; & ut BC, ad EF, ita P. ad Q. Abscissa deinde IL, æquali ipsi DK; ducatur per L. ipsi BC, parallela LM, secans AC, in N, jungaturque recta BN. Quoniam igitur est triangulum ABC, ad tri-

ad triangulum NBC; & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum CM, ut altitudo AI, ad altitudinem IL, vel ad DK, ipsi IL, æqualē, hoc est, ut O ad P, per ea, quæ ad 1. propos. hujus lib. ex Commandino ostendimus; quod triangulorum, & parallelogrammorum eadem sit basis BC: Et ut triangulū NBC, ad triangulū DEF, & parallelogrammū CM, ad parallelogrammū EH, *a* ita est basis BC, ad basin EF, (cū eadē sit altitudo) hoc est ita P, ad Q; *b* erit ex æquo ABC, ad DEF, & CG, ad EH, ut O, ad Q.



a 1. *sexti.*
b 22. *quinti.*

Quare cū proportio O, ad Q. componatur ex proportione O. ad P. hoc est, ex proportione altitudinis AI, ad altitudinem DK: & ex proportione P, ad Q. hoc est, ex proportione basis BC, ad basin EF. Ex eisdem proportionibus componetur proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi CG, ad parallelogrammum EH. Quod est propositum.

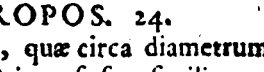
Eodem pacto ostendetur proportio trianguli DEF, cujus altitudo minor est, ad triangulum ABC, & parallelogrammi EH, ad parallelogrammum CG, composita esse ex proportione basis EF, ad basin, BC, & proportione altitudinis DK, ad altitudinē AI. Si enim fiat, ut EF. ad BC, ita Q. ad P; & ut DK, ad AI, ita P, ad O, & reliqua fiant, ut prius: *c* erit triangulum DEF, ad triangulum NBC, & parallelogrammum EH, ad parallelogrammum CM, ut EF, ad BC, hoc est, ut Q. ad P. Item triangulum NBC, ad triangulum ABC, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammum CG, ut LI, seu DK, ad AI, hoc est, ut P, ad O; ex ijs quæ ad propos. 1. hujus lib. ex Commandino demonstravimus. *d* Ex æquo igitur erit, ut DEF, ad ABC, & EH. ad CG, ita Q. ad O. Quo circa cum proportio Q. ad O. componatur ex proportione Q. ad P, hoc est, ex proportione basis EF, ad basin BC: & ex proportione P, ad O, id est, ex proportione altitudinis DK, ad altitudinem AI: componetur etiam proportio DEF, ad ABC, & EH, ad CG, ex eisdem proportionibus. Quod est propositum.

c 1. *sexti.*
d 22. *quinti.*

THEOR. 18. PROPOS. 24. XXIII.

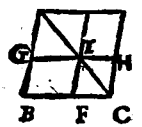
In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.

Esto parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet eius punctum I, ducātur duæ rectæ EF, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma FG, FH, circa diametrum, similia esse & toti parallelogrammo, & inter sese. Quod enim æquiangula sint toti,



facile

facile oſtendetur. Nam angulus GAE, idem eſt, qui angulus BAD; a & angulus externus AEI, æqualis interno ADC; & angulus AGI, externus interno ABC. & angulus EIG, externus interno BFI; & hic externus interno BCD. Quare æquiangulum eſt EG, parallelogrammum parallelogrammo BD: Et eadẽ ratione eidem BD, æquiangulum erit FH. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonſtrabimus. Cum triangulum AGI, æquiangulum ſit triangulo ABC, & triangulum AEI. triangulo ADC, ut perſpicuum eſt ex 29. propoſ. lib. 1. vel etiam ex coroll. propoſ. 4. hujus lib. b erit ut AB, ad BC, ita AG, ad GI, atque ita latera circa æquales angulos B, & G, proportionalia ſunt. Rurſus c erit, ut BC, ad CA, ita GI, ad IA; Item ut CA, ad CD, ita IA, ad IE. d Ex æquo igitur, ut BC, ad CD, ita eſt GI, ad IE, ac propterea & latera circa æquales angulos BCD, GIE, proportionalia exiſtunt. Non aliter demonſtrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, eſſe proportionalia. Quare per definitionem ſimile erit parallelogrammum EG, toti parallelogrammo BD. Eadem arte oſtendemus parallelogrammum FH, ſimile eſſe eidem parallelogrammo BD; e atque adeo & ipſa inter ſe ſimilia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, &c. Quod erat oſtendendum.

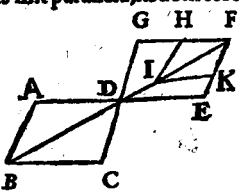


a 29. primi.
b 4. ſext.
c 4. ſext.
d 22. quinti.
e 21. ſext.

SCHOLIVM.

Intelligenda autem ſunt parallelogramma circa diametrum totius eſſe talia, quæ habeant unum angulum cum toto parallelogrammo communem, ut manifeſtum eſt ex forma demonſtrationis.

Quod ſi circa diametrum alicujus parallelogrammi productam conſiſtat parallelogrammum aliud, ita ut duo hujus latera rectas duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, vel certe illa his ſint parallela, iisdem fere mediis oſtendetur, hoc illi eſſe ſimile.



Parallelogrammi enim ABCD, diameter BD, ſit producta ad F, circa quam conſiſtat parallelogrammum DEFG, cujus duo latera DE, DG, rectas lineas efficiant cum AD, DC, lateribus parallelogrammi AC. Dico parallelogrammum GE, ſimile eſſe parallelogrammo AC. Quod enim ambo inter ſe ſint æquiangula, facile oſtendetur, f Nam quia angulus A, æqualis eſt angulo alterno ADG, huic autem æqualis quoque eſt alternus angulus G; a erunt æquales anguli A, & G. a Quare his oppoſiti C, & E, æqua-

f 29. primi.
a 34 primi

les

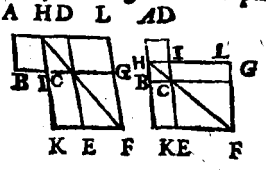
les quoque erunt. *b* Rursus quia anguli A D C. G D E. ad verticem, *b* 15. pri. sunt æquales, *c* erunt his quoq; oppositi A B C. G F E, æquales. Igi- *c* 34. pri. tur æquiangula sunt G E, A C. parallelogramma. Quod autē latera habeant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perspicuum. Cum triangulum B A D, æquiangulum sit triangulo D G F, & triangulum B C D, triangulo D E F. ut constat ex propos. 29. lib. 1. *d* Erit ut B A, ad A D. ita D G, ad G F. Rursus ut A D, ad *d* 4. sexti D B, ita G F. ad F D, & ut D B, ad D C, ita F D, ad F E. *e* ac propte- *e* 22 quinrea ex æquo ut A D, ad D C, ita G F, ad F E. Sunt igitur latera cir- ti. ca angulos A, A D C, proportionalia lateribus circa angulos G, G F E. qui illis æquales sunt. Non secus ostendes, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia esse. Quare similia sunt parallelogramma A C, G E.

Quod si circa eandem diametrum consistat parallelogrammum H I K F, habens latera parallela lateribus parallelogrammi A C, idem demonstrabitur. Nam productis A D, C D. donec occurrant rectis F K, F H, productis in E, & G; erit H K, simile ipsi G E, fut Eucli- *f* 24. sext. des demonstravit: At qui eidem G E, simile est quoque A C, ut nunc *g* 21. sexti. ostendimus. *g* Igitur & H K, A C, inter se similia sunt. Quod est propositum.

Sed & absoluemus cum Peletario sequens problema.

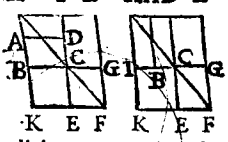
Datis duobus parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus: ex quovis illorum alteri simile resecare.

Duo parallelogramma æquiangula, sed non similia, sint A B C D, C E F G, & ex A B C D, abscindendum sit parallelogrammum ipsi C E F G, simile. Conjungantur am- A H D L A D
bo ad angulos æquales E C D, B C G, ita ut sit una linea recta B C G, & propterea, ut ad propos. 15. lib. 15. lib. 1. demonstratum est, E C D, quo que una recta linea. Deinde ducta diameter F C, producatur, donec in H. secet vel latus A D, vel latus A B. (Neque enim in punctum A. cadet: quia A G, esset simile ipsi C F, ut demonstratum est quod est contra hypothesin) & per H, ducatur H I, parallela ipsi A B, vel ipsi A D. Dico parallelogrammū abscissum H C, simile esse ipsi C F. Si enim totum parallelogrammum K L, compleatur, erunt H C, C F, circa diametrum. Quare inter se similia erunt, ut Euclides demonstravit in hac propositione.



Eadem autem arte fere alterutrum ipsorum augeri poterit, ut fiat simile alteri. Sit enim augendum A B G D, ut fiat ipsi C E F G, simile. Conjungantur uti prius, & diameter F C, extendatur, donec in H. secet vel latus B A, protractum, vel latus D A, protractum.

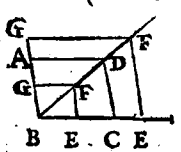
Neque



Neque enim in punctum A, cadet: quia AC, esset ipsi CF, simile, ut demonstratum est, quod non ponitur. Deinde per H, ducatur HI. parallela ipsi AD, vel ipsi AB, donec secet vel latus CD, protractum, vel CB, protractum in I. Dico parallelogrammum auctum HC. simile esse parallelogrammo CF. Nam si compleatur totum parallelogrammum KL, consistent HC. CF. circa diametrum: a Quare similia inter se erunt.

a 24. sext.

Perspicuum autē est ex demonstratione hujus theorematis facta ab Euclide, & ex probatione theorematis à nobis propositi in hoc scholio, parallelogramma circa eandem diametrum non solum esse similia, verum etiam similiter posita. Vnde proposito quovis parallelogrammo ABCD. si majus debeat describi illi simile similiterq; positū, producendum erit latus unum, nempe BC; Aut ex E, quolibet puncto ultra C. ipsi CD. parallela EF. ducenda, secans diametrum BD. productam in F. & per F. ducenda FG, parallela ipsi AD. occurrens rectæ BA, productæ in G. b Erit enim parallelogrammum GE. simile similiterque positum ipsi AC. & majus eodem. Quod si minus debeat describi, sumendum erit punctum E, citra C, & reliqua peragenda, ut prius, ut figura indicat.



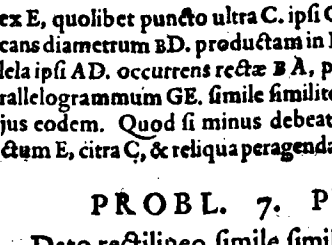
b 24. sext.

XXV. PROBL. 7. PROPOS. 25.

Dato rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituere.

Sint data duo rectilinea A. & B: sitque constituendum aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A. æquale vero ipsi B. Super CD, unum latus rectilinei, cum simile debet constitui, c constituatur parallelogrammum CE, in quovis angulo, æquale rectilineo A: Et super rectam DE. in angulo EDG qui æqualis sit angulo DCF. parallelogrammum DH, æquale ipsi B. eritque tam CDG, quam FEH. linea una recta, ut demonstratum est propos. 45. lib. 1. d Inveniatur jam inter rectas CD. DG. media proportionalis IK: e super quam constituatur rectilineum L. simile ipsi A. similiterq; positum. Dico L. æquale esse alteri rectilineo B.

c 44. vel 45. primi.



d 13. sext.

e 18. sext.

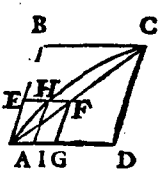
Cum

Cum enim ſint proportionales tres recta CD, IK. DG: erit per co-roll. propoſ. 19. vel 20. hujus lib. ut CD. prima ad DG. tertiam, ita A. rectilineum ſuper primam CD. ad rectilineum L. ſuper IK. ſecundam ſimile ſimiliterq; deſcriptum: a *Vt autem CD. ad DG. ita eſt parallelogrammum CE, ad parallelogrammum DH, eiusdem altitudinis.* b *Igitur erit ut CE, ad DH. ita A. ad L.* c *Vt autem CE. ad DH. ita eſt A. ad B: propterea quod parallelogrammũ CE. rectilineo A: & parallelogrammum DH. rectilineo B. conſtructum eſt æquale.* d *Quare erit ut A. ad B, ita A. ad L:* e *propterea q; æqualia erunt rectilinea B. & L. Eſt autem & L. ſimile ipſi A, ſimiliterq; poſitum per conſtructionem; Dato igitur rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum & alteri dato æquale idem conſtituimus. Quod erat faciendum.*

a 1. ſext.
b 11. quinti.
c 7. quinti.
d 11. quinti.
e 9. quinti.

THEOR. 19. PROPOS. 26. XXIII.

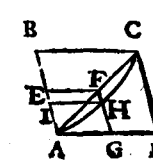
Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum eſt, & ſimile toti, & ſimile poſitum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum conſiſtit.



Ex parallelogrammo BD. abſciſſum ſit parallelogrammum EG. ſimile ei ſimiliterque poſitum, habens cum ipſo angulum commũnem EAG. Dico EG, conſiſtere circa diametrum totius BD. Ducãtur enim recta AF, CF, quaſi fuerint una linea recta, perſpicuum eſt, cùm AF, ſit diameter ipſius EG, & AC, diameter ipſius BD, parallelogrammum EG, conſiſtere circa diametrum AFC. totius parallelogrammi. Quod ſi AF. CF. non dicantur efficere lineam rectã, ducatur totius parallelogrammi diameter AC. ſecans latus EF. in H. puncto per quod ipſi FC, parallela agatur HI. Quoniam igitur parallelogramma BD. EI. ſunt f *circa eandem diametrum AHC: ſi ipſa erunt ſimilia, ſimililiterque* g *poſita. Quare erit ut BA. ad AD. ita EA. ad AI. Sed ut BA. ad AD. ita quoque eſt EA. ad AG. quod parallelogrammma BD. EG.* h *ponantur etiam ſimilia, ſimiliterque poſita. Igitur erit ut EA. ad AI. ita EA. ad AG.* i *Ac propterea æquales erunt rectæ AI, AG. pars, & totum: quod eſt abſurdum.*

f 24. ſext.
g 1. def. ſexti.
h 11. quinti.
i 9. quinti.

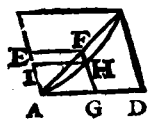
Quod ſi dicatur recta AHC. ſecare alterum latus FG. Tunc ducta HI. parallela ipſi EF. k *erunt rurſus ſimilia parallelogramma BD, IG, ſimiliterq; poſita.* l *Quare erit ut DA, ad AB, ita GA; ad AI; Sed ut DA, ad AB. ita quoq; eſt GA. ad AE. ob ſimilitudinem parallelogram-*



k 24. ſext.
l 1. def. ſexti.

morum

a 21. quinti.

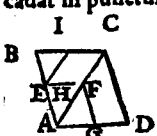


b 9. quinti.

morum BD, EG, a Igitur erit ut GA, ad AI, ita GA, ad AE. b ideoque æquales erunt rectæ AI, AE, pars & totum: Quod est absurdum. Constituunt ergo rectæ AF, FC, unam rectam lineam; hoc est, dicta diameter AC, transit per punctum F; & ducta diameter AF, cadit in punctum C. Itaq; si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstrandum.

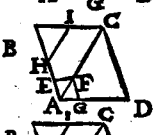
SCHOLIVM.

Aliter idem theorema demonstrabimus ostensive, hoc modo. Divisis lateribus AB, BC. bifariam in punctis H, I, sive punctum H, cadat in punctum E. sive supra sive infra, ducanturrectæ HI, AF.

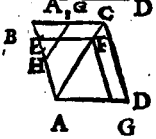


c 15. quinti.

d 11. quinti.



e 30 primi.



f 6. sext.

g 28. primi.

Quoniam igitur, propter similitudinem parallelogrammorum, est ut AB, ad BC, ita AE, ad EF. Vt autē tota AB, ad totam BC, *c* ita est dimidia HB, ad dimidiam BI: *d* Erit ut HB, ad BI, ita AE,, ad EF. Triangula igitur HBI, AEF, cum habeant circa angulos B, E, (qui æquales sunt, ob similitudinem parallelogrammorum BD, EG. Vel quia unus est internus, & alter externus in parallelis BC, EF, *e* quæ parallelæ sunt, cum utraque parallela sit ipsi AD,) latera proportionalia, *f* erunt æquiangula, habebuntq; æquales angulos BHI, EAF, externum, & internum inter rectas HI, AF. *g* Quare parallelæ erūt rectæ HI, AF. Quoniam vero recta,

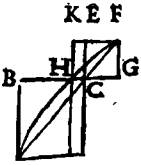
h 2. sext.

quæ ex puncto A, ad punctum C, duci concipitur, *h* parallela quoque est rectæ HI, propterea quod latera AB, BC, trianguli tunc constituti ABC, proportionaliter essent secta in H, & I. utpote bifariam: efficitur ut ducta recta AC, eadem fiat, quæ AF, transeatque per punctum F, cum ex puncto A, solum una linea parallela rectæ HI, possit duci, ut manifestum est. Consistunt ergo BD, EG, parallelogramma similia, similiterque posita circa eandem diametrum AFC. Quod est propositum.

Quod si duo parallelogramma similia similiterq; posita non habeant angulum communem, sed unum sit extra aliud, hac tamen lege, ut ita sint connexa interse secundū duos eorum angulos æquales, ut duo latera unius eum duobus lateribus alterius duas rectas lineas constituant: demonstrabimus iisdem fere mediis, ea circa, eandem consistere diametrum. Sint enim duo parallelogramma similia similiterq; posita BD, EG, quæ ad angulos æquales BCD, GCE, ita conjungantur, ut lineæ BC, CG, in directum jaceant, & ob id, per ea, quæ ad propos. 15. lib. 1. ostendimus, lineæ DC, CE, unam

quoque

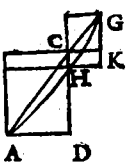
quoque lineam rectã componant. Dico parallelogrammaBD, EG, circa eandem consistere diametrum hoc est, diametrum AC, cum diametro FC, unam rectam lineam conficere. Si enim AC, FC, non faciunt unam lineam rectam, ducatur ex A, ad F, linea recta secans BC, in H, puncto, per quod agatur HI, parallela ipsi CD. occurrens rectæ FE. productæ in K. Quoniam igitur parallelogrammaBI, KG: circa eandem diametrum AHF, producta consistunt, efficiuntq; duæ rectæ BH. HI. cum duabus rectis HG. HK. duas lineas rectas, ipsa erunt similia similiterq; posita, per ea, quæ ad propos. 24. hujus lib. demonstravimus. Quare erit ut HB, ad BA, ita FA, ad KH. *a* Habet autem CB. majorad BA, proportionem majorem, quam HB. minor ad eandem BA. & est ut CB. ad BA. ita FE. ad EC. eo quod parallelogramma BD. EG. ponuntur similia similiterque descripta. Igitur & FE: ad EC. hoc est, ad sibi æqualem KH, majorem habebit proportionem, quam HB, ad BA, hoc est, quam FK, ad KH. Quam ob rem si FE, ad KH, majorem habeat proportionem, quam FK. ad KH. ad eandem KH; *b* erit EF, major quam FK; pars quam totum. Quod est absurdum.



a 8. quinti

b 10. quinti.

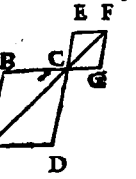
Quod si quis dicat, rectam AHF, secare latus CD: Tunc per H; ducta recta BC, parallela HI, qua occurrat rectæ FG. protractæ in K: erunt rursus similia similiterq; parallelogrammaI D, EK, per ea quæ ad propos. 24. hujus lib. ostendimus. Quare erit ut HD. ad DA, ita FK, ad KH. *c* Habet autem CD. ad DA. majorem proportionem, quam HD, ad DA: Et est ut CD, ad DA. ita FG, ad CG: propterea quod parallelogramma BD, EG. similia similiterq; posita sunt concessa. Igitur & FG. hoc est, ad sibi æqualem KH, majorem habebit proportionem, quam FK, ad KH; *d* ideoque FG. major erit, quam FK; pars quam totum: Quod est absurdum.



c 8. quinti.

d 1. quinti.

Ostensive idem hac ratione ostenderur. Quoniam propter similitudinem parallelogrammorum BD. FG. anguli, B. E. sunt æquales, estque ut AE, ad BC. ita CE. ad EF, habebunt triangula ABC, CEF. circa angulos æquales B, & E, latera proportionalia: *e* atque idcirco æquiangula erũt, habebuntq; angulos BCA, EFC, æquales. Addito ergo communi angulo BCF, erunt duo anguli BCD, BCF. duob' anguliis EFC, BCF. æquales: *f* Sed hi inter parallelas BC, EF, æquales sunt duobus rectis. Igitur & BCA, BCF, duobus erunt rectis æquales;



e 6. sext.

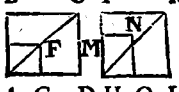
f 29. primi.

g 14. primi

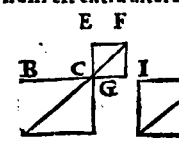
quales; g Ac propterea A C, FC. unam component rectam lineam. Quod eſt propoſitum.

Recte autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum à toto ablatum non ſolum eſſe toti ſimile, verum etiam ſimiliter poſitum, ut oſtendatur circa eandem eſſe cum toto diametrum. Nam ſi ex altera parte longiori BD. abſcindatur altera parte longius EG, circa eandem cum toto diametrum conſiſtens, a erit EG, ſimile, ſimiliterq; poſitum. At vero ſi in rectangulo IL, quod ſit æquilaterum, & æquiangulum, ipſi BD, ſumatur *H* M, æqualis ipſi E F, & MN. æqualis ipſi A E, &c. erit quidem rectangulum M O. æquale & ſimile rectangulo FG, propter æqualitatem laterum, & angulorum, qui ſunt recti: & ob id ſimile rectangulo I L; ſed tamen quia non eſt ſimiliter poſitum, non conſiſtit circa eandem cum toto I L, diametrum.

a 24. ſexti.



Idem quoq; hic perſpicitur in rectangulis ſimilibus, quorum unum eſt extra alterum, ſecundum tamen angulos eorum ita inter ſe connexa, ut duo latera unius in directum jaceant cum duobus lateribus alterius, qualia ſunt parallelogramma rectangula BD; EG, & IL. MO; in quibus E G, quidem conſiſtit circa eandem diametrum cum rectangulo B D, quoniam eſt ſimiliter poſitum: At vero M O. minime conſiſtit circa eandem diametrum cum rectangulo IL, quia non eſt ſimiliter poſitum, quamvis ſimile ſit, cum prorſus ſit æquale ipſi F G. Nam K M, æqualis eſt ipſi EF, & MN. ipſi F C, &c.



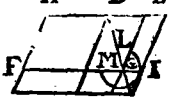
THEOR. 20. PROPOS. 27.

xxvi.

Omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis ſimilibus ſimiliterque poſitis, ei, quod à dimidia deſcribitur; maximum id eſt, quod ad dimidiam applicatur parallelogrammum ſimile exiſtens defectui.

Detur recta A B, *diviſa bifariam in* C, *ſuperq; ejus dimidiam* B C. *conſtituatur quotcunq; parallelogrammum* C D E B, *cujus diameter* B D. *Si igitur compleatur totum parallelogrammum* A B E H, *erit parallelogrammum* A D, *ſuper dimidiam* A C, *conſiſtens, applicatum ſecundum* A B, *deficiens parallelogrammo* C E, *& exiſtens ſimile defectui* C E. *Dico parallelogrammum* A D, *ad dimidiam* A C, *applicatum deficiensq; parallelogrammo* C E, *maximum eſſe omnium,*

omnium, quæ secundum AB, *rectam applicantur, deficiunt figuris parallelogrammis similibus similiterq; positis ipsi* CE. *Sumpto enim puncto* G. *utcunq; diametro* BD. *& ducta per* G. *rectis* FGI. KG. *quæ sint parallelæ rectis* AB. BE; *erit parallelogrammum* FK. *secundam rectam* AB, *applicatum, deficiens parallelogrammo* KI, a *quod ipsi* CE. *simile est, similiterq; positum, cum sit circa eandem cum* CE. *diametrum.* b *Quoniam vero complementa* CG. GE. *æqualia sunt; si addatur commune* KI, *erunt quoq; æqualia* CI, KE. c *Est autem* CI, *æquale ipsi* CF, *propter bases æquales* AC, CB. *Igitur &* CF, KE, *æqualia erunt; additoq; communi* CG, *æqualia erunt parallelogrammum* AG. *& gnomon* LM. *Quare cum* CE, *majus sit gnomone* LM, (*continet enim* CE, *propter gnomonem, parallelogrammum adhuc* DG.) *erit quoque* AD, d *æquale existens ipsi* CE. *propter bases æquales* AC, CB, *maius quam parallelogrammum* AG, *eodem parallelogrammo* DG. *Eodemq; modo ostendetur* AD. *maius esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum rectam* AB, *applicantur, ut punctum* G, *sit inter puncta* B, *&* D, *hoc est, quæ occupant majorem lineam semisse* AC, *habentque minorem altitudinem, quam* AD; *dummodo defectus similes sint ipsi* CE.



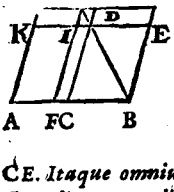
a 24. *sexti.*
b 43. *primi*
c 36. *primi*
d 36. *primi*

Aliter demonstrabitur AD, *majus esse parallelogrammo* AG; *hoc modo* e *Parallelogramma* FD, DI, *sunt æqualia, cum bases* HD, DE, *sint æquales: Est autem* DI, *majus quam* GE, *hoc est, quam complementum* CG, (f *quod ipsi* GE, *æquale est,*) *parallelogrammo* DG. *Igitur &* FD, *majus erit, quam* CG; *parallelogrammo eodem* DG. *Atque idcirco addito communi* CF; *majus erit* AD, *quam* AG, *parallelogrammo eodem* DG.

e 36. *primi.*
f 43. *primi,*

Quod si punctum G, *sumatur in diametro* BD, *producta extra parallelogrammum* CE. *Tunc ducta per* G. *recta* HM; *quæ sit parallela ipsi* AB, *occurratque rectis* AK, BE, *protractis in* H, *&* M. *Item ducta* GF. *parallela ipsi* AH. *erit parallelogrammum* AC; *applicatum secundum rectam* AB; *deficiens parallelogrammo* FM, g *quod ipsi* CE; *est simile similiterque positum, cum sit circa eandem diametrum cum* CE. *Dico adhuc maius esse* AD, *ipso* AG. *Protracta enim* CD, *ad* L. *erunt æquales rectæ* HL. LM. h *cum æquales sint æqualibus* AC. CB; i *ideoque æqualia parallelogramma* HD. DM. k *Cum igitur* DM. *sit æquale complemento* DF; *erit & HD. æquale ipsi* DF. *Est autem HD, maius quam HI, parallelogrammo* IL. *Quare & DF. maius erit quam HI. eodem parallelogrammo* IL. *Ac propterea communi addito* AI, *maius erit* AD. *quam* AG, *eodem parallelogrammo*

g 4. *sexti.*
h 34. *primi*
i 36. *primi.*
k 43. *primi*



IL, Iisdem argumentis concludes AD, majus esse quocunq; parallelogrammo, ita applicato secundum rectam AB, ut punctum G, sit ultra D, in diametro BC, producta: hoc est, quod occupat minorem lineam semisse AC, habetque majorem altitudinem, quam AD, dummodo defectus similis existat parallelogrammo CE. *Itaque omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, &c. Quod erat demonstrandum.*

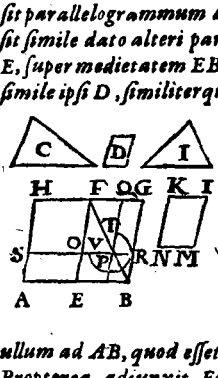
SCHOLIVM.

Manifestum autem est, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, esse vel majorem dimidiata AC; qualis est AK, in priori figura, vel minorem; cujusmodi est AF, in figura posteriori: prout punctum G, sumitur vel in diametro BD, vel in ea producta ad partes D.

xxvii. ## PROBL. 8. PROPOS. 28.

Ad datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus, & eius, quod ad dimidiam applicatur, & ejus, cui simile deesse debet.

Ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo, quod sit simile dato alteri parallelogrammo D. Secta AB, bifariam in
a18. *sexti.* *E, super medietatem EB, describatur parallelogrammum EFGB, simile ipsi D, similiterque positum; & compleatur totum parallelogrammum AHGB. Si igitur AF, æquale est ipsi C: cum sit applicatum ad AB, deficiens parallelogrammo EG, simili ipsi D; factum erit, quod jubetur. Si autem AF, maius est quam C. (Neque enim minus esse debet. Nam cum per propos. precedentem, ipsum sit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus sint similes, non posset applicari ullum ad AB, quod esset ipsi C, æquale, sed omnia essent minora. Propterea adjunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoque sibi æquale EG, majus quam C. Sit igitur*



igitur majus rectilineo I. (Qua vero ratione excessus duorum rectilineorum sit inquirendus, docuimus ad propos. 45. lib. 1.) a *& constituatur parallelogrammum* K L M N, *simile quidem similiterque positum ipsi* D, *seu ipsi* E G, *aquale vero excessui invento I: ut sit* E G, *aquale rectilineo* C, *& parallelogrammo* K M, *simul: & ob id majus quam* K M. *Cum igitur ob similitudinem sit ut* E F, *ad* F G. *ita* N K, *ad* K L: *erunt quoq; latera* E F, F G, *majora lateribus* N K, K L. *Si enim his illa forent aqualia, vel minora, esset etiam* E G, *aquale ipsi* N L, *vel minus, ut constat. Quare abscissis rectis* F O, F Q. *qua sint aquales ipsis* K N, K L, *& completo parallelogrammo* F Q P O: *erit hoc ipsi* L N, *aquale, & eidem simile similiterque positum, & propterea ipsi* E G: b *atque adeo circa eandem diametrum cum* E G, *consistet, que sit* B F. *Productis jam rectis* Q P. O P, *erit parallelogrammum* A P, *ad rectam* A B, *amplicatum deficiens parallelogrammo* P B, c *quod simile est ipsi* E G, *similiterque positum, & propterea ipsi* D. *Dico igitur* A P, *aquale esse ipsi* C, *rectilineo.* d *Nam cum* P G, *aquale sit complemento* P E: *si addatur commune* P B, *erit &* B Q, *aquale ipsi* E R, *hoc est, ipsi* E S, e *quod aquale est ipsi* E R, *propter bases aquales* E A, E B, *Quare si aqualibus* A O, B Q. *commune addatur* E P, *erit* A P, *aquale gnomoni* T V. *Sed gnomon* T V, *aqualis est rectilineo* C, *(Nam cum* E G, *parallelogrammum aquale sit ipsi* C, *una cum* L N; *si auferantur aqualia* Q O, L N, *remanebit gnomon* T V, *ipsi* G, *aqualis.) Igitur &* A P, *eidem* C, *aquale erit. Ad rectam ergo* A B, *applicatum est parallelogrammū* A P, *deficiens parallelogrammo* P B, *quod simile est dato parallelogrammo* D, *& aquale existens rectilineo dato* C. *Quod faciendum erat.*

a 25. sexti.

b 26. sexti.

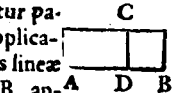
c 24. sexti.

d 43. pri.

e 36. pri.

SCHOLIVM.

Movent hoc loco dubium quoddam Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod juxta nostram constructionem locum non habet cum super E B, constituerimus E G, parallelogrammum non solum simile ipsi D, verum etiam similiter positum quod ipsi minime fecerunt. Quade re, si placeat, consule eorum commentarios.

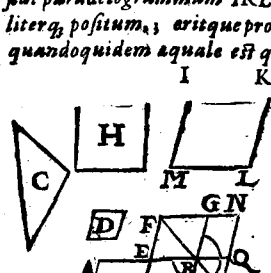


Perspicuum autem est, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipsum applicatum æquale esse rectangulo, quod sub segmentis lineæ per applicationem factis continetur. Vt si ad D B, applicetur A C, deficiens quadrato C B. erit A C, applicatum, rectangulum contentum sub A D, & D C. Cum ergo D C, æqualis sit ipsi D B, propter quadratum C B: continebitur quoque A C, sub segmentis A D, D B, per applicationem factis. Quod est propositum.

XXVIII. **PROBL. 9. PROPOS. 29.**

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

Ad datam rectam lineam A B, *dato rectilineo* C, *applicandum sit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo* D. *Divisa* AB, *bifariam in* a 18. *sexti.* E: a *super dimidiam* EB, *construatur parallelogrammum* EFGB, b 14. *sec.* *simile ipsi* D, *similiterq; positum.* b *Deinde rectilineo* C. & *paralle-* c 25. *sexti.* *logrammo* EG. *constituatur quadratum* H, *æquale*; c *cui quidem fiat parallelogrammum* IKLM, *æquale, simile vero ipsi* EG, *similiterq; positum*; *eritque propterea* IKLM, *majus quam* EFGB, *quandoquidem æquale est quadrato* H, *quod constructum est rectilineo* C, *una cum parallelogrammo* EG, *æquale. Cum igitur ob similitudinem* MK, EG, *sit ut* ML, *ad* IK, *ita* EF, *ad* FG, *erunt quoque latera* ML, IK, *lateribus* EF, FG, *majora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, esset quoque* MK, *vel æquale*; *si* EG, *vel minus, ut perspicuum est. Productis igitur* FE, FG, *ut recta* FO, FN, *æquales sint rectis* IM, IK, & *com-*



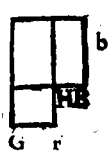
pleto parallelogrammo ON; *erit hoc simile, similiterque positum* d 26 *sexti.* *ipsi* EG, *cum sit æquale ipsi* MK, & *simile, similiterque positum.* d *Quare* ON, EG, *circa eandem diametrum consistent, quæ sit* FP. *Productis jam* AB, GB. *ad* Q, R; & PO, *donec cum* AS, *ipsi* FO, *parallela conveniat in* S, *erit parallelogrammum* AP, *applicatum* e 24. *sexti.* *ad rectam* AB, *excedens parallelogrammo* QR, e *quod simile est ipsi* f 36. *primi.* EG, *ac propterea ipsi* D. *Dico igitur* AP, *æquale esse rectilineo* C, g 43. *primi* f *Nam cum* AO, ER, *sint æqualia,* g & ER, *æquale complemento* BN, *erit* & AO, *ipsi* BN, *æquale. Addito ergo communi* OQ, *fiet* AP, *æquale gnomoni* EPG. *At qui gnomon* EPG, *æqualis est rectilineo* C. (*Nam cum* MK, *hoc est*, ON, *æquale sit rectilineo* C, *una cum* EG; *si auferatur commune* EG, *remanebunt æqualia gnomon* EPG, & *rectilineum* C) *Igitur* & AP, *æquale erit rectilineo* C. *Ad datam ergo rectam* AB, *dato rectilineo* C, *æquale parallelogrammum applicatum est* AP, *excedens parallelogrammo* RQ, *quod simile est alteri dato* D. *Quod faciendum erat.*

PRO-

PROBL. 10. PROPOS. 30. XXIX.

Propositam rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.

Sit recta AB, secanda extrema ac media ratione. Descripto super eam quadrato ABCD; a ad latus DA, applicetur rectangulum a 29. sexti.
DF, aquale quadrato AC, & excedens parallelogrammo AF, simili ipsi quadrato, ita ut sit AF, quod quadratum eum quadrato solum quadratum sit simile. Secet autem recta EF, rectam AB, in H. Dico AB, in H. sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim aqualia sint DF, & AC, si demantur commune AE, remanebunt aqualia GH, HC, qua cum habeant angulos aquales AHF, BHE, utpote rectos, b erunt latera circa illes reciproca, hoc est erit ut EH, hoc est, ut AB, ipsi EH, aqualis, ad HF, hoc est, ad AH. ipsi HF, aqualem, ut AH. ad HB. Quare cum sit, ut tota AB, ad segmentum AH, ita segmentum AH, ad segmentū HB, secta est AB, extrema ac media ratione, per definitionem. Propositam ergo rectam lineam terminatam, &c. Quod erat faciendum.



b 14. sexti.

Aliter quoque ostendemus AB, esse sectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres linea dentur AB, AH, HB, sitque rectangulum HC, comprehensum sub prima AB. & tertia HB, aquale quadrato media AH: c erunt ipsa proportionales: ut AB. quidem prima ad AH. secundam: ita AH. secunda ad HB, tertiam. Quare per definitionem secta est AB, in H, extrema ac media ratione. c 17. sexti.

Aliter totum problema conficiemus. C
d *Dividatur AB, in C, ita ut rectangulum sub tota AB, & segmento CB, aquale sit quadrato alterius segmenti AC.* A ——— B d 11. secundi.
Dico AB, in C. esse sectam extrema ac media ratione. e *Erunt enim, ut prius, tres linea AB, AC, CB, continue proportionales. Constat ergo propositum.* e 17. sexti

SCHOLIVM.

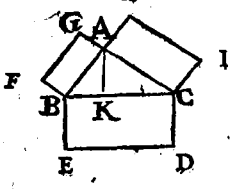
Praxis divisionis lineæ rectæ extrema ac media ratione instituenda est, ut ad propos. 11. lib. 2. tradidimus.

Habet autem admiranda hæc sectio lineæ extrema ac media ratione insignes utilitates, proprietatesq; ut in libris Stereometriæ manifestum erit, ut non sine causa à plerisque Mathematicis linea ita divisa divinam quodammodo, ob admirabilem ejus vim, ac naturam, dicatur habere proportionem: ab aliis vero simpliciter vocetur divisa proportionaliter.

THEOR. 21. PROPOS. 31.

In rectangulis triangulis, figura quævis à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus rectum angulum continentibus describantur.

Triangulum rectangulum sit ABC, habens angulum BAC rectum: describaturque super BC, quæcunque figura rectilinea a 18. *sexti.* *ECDE. a cui similes similiterq; posita super AB, AC, constituantur ABFG, ACIH. Dico figuram BD, æqualem esse duabus figuris AF, AI. Demissa enim A, ad BC perpendiculari AK, erit per corollarium propos. 8. hujus lib. ut BC, ad CA, ita CA, ad CK; Quare ut BC, ad CK, prima linea ad tertiam, ita figura BD, super primam, ad figuram CH, super secundam, similem similiterq; positam, per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. & convertendo, ut CK, ad BC, ita figura CH, ad figuram BD. Non secus ostendetur, esse quoq; ut BK, ad BC, ita figuram BG, ad figuram BD: cum tres lineæ BC, BA, BK, sint quoq; proportionales, &c. Quoniam igitur est ut CK. prima quantitas ad BC. secundam. ita CH, tertia ad BD. quartam; Item ut BK, quinta* b 24. *quinti.* *quantitas ad BC, secundam, ita BG, sexta BD. quartam:* b *erit ut prima CK, cum quinta BK, ad BC, secundã, ita tertia CH, cum sexta BG, ad BD. quartam: Sunt autem primæ CK, & quintæ BK. simul æquales secundæ BC. Igitur tertia CH. & sextæ BG. simul æquales quoq; erunt quartæ BD. Quod est propositum.*



c 2. *sext.* *Aliter.* c *Cum triangulo ABC; simile sit triangulum KAC, sintque homologa latera ipsorum BC. CA; (Nam est ut BC, ad* d 19. *sext.* *CA. in triangulo ABC. ita CA. ad CK. in triangulo KAC.)* d *habebit triangulum KAC, ad triangulum ABC, duplicatam proportionem ejus, quam habet CA, ad BC.* e *Habet autem & figura CH, ad figuram BD, proportionem duplicatam proportionis CA, ad BC.* f *Quare erit ut triangulum KAC, ad triangulum ABC, ita figura CH, ad figuram BD, Eadem ratione ostendetur esse, ut triangulum KBA, ad triangulum ABC, ita figuram BG, ad figuram BD. Quoniam ergo rursus est, ut KAC, prima quantitas ad ABC, secundam, ita CH, tertia ad BD, quartam: Item ut KBA, quinta ad ABC, secundam, ita BG, sexta* g 24. *quinti.* *ad BD, quartam;* g *erit & prima KAC, composita cum quinta KBA, ad secundam ABC, ita composita tertia CH, cum sexta BG, ad quartam BD; Sunt autem KAG, KBA, primæ &*

quintæ

quinta simul, aquales secundæ ABC. *Igitur* CH, BG, *tertia & sexta simul, æquales quoque erunt quartæ* BD. *Quod est propositum.*

Aliter. Vt quadratum rectæ AC, *prima quantitas, ad quadratum rectæ* BC, *secundam quantitatem, ita est figura* CH, *tertia quantitas ad figuram* BD, *quartam quantitatem;* a *cum vtraque proportio sit duplicata proportionis* AC, *ad* BC. *Similiter erit vt quadratum rectæ* AB, *quinta quantitas, ad quadratum rectæ* BC, *secundam quantitatem, ita figura* BG, *sexta quantitas, ad figuram* BD, *quartam quantitatem.* b *Quocirca erit, vt prima quantitas cum quinta, nimirum quadratum rectæ* AC, *cum quadrato rectæ* AB, *ad secundam, hoc est, ad quadratum rectæ* BC, *ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura* CH, *cum figura* BG, *ad quartam, videlicet ad figuram* BD: c *Sunt autem quadrata rectarum* AC, AB, *simul æqualia quadrato rectæ* BC. *Igitur & figura* CH, BG, *figura* BD, *æquales erunt: Quod est propositum. In rectangulis igitur triangulis, figura quauis, &c. quod erat ostendendum.*

a 19. vel 20. sexti.

b 24. quinti.

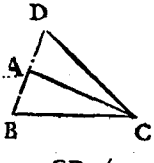
c 47. primi.

SCHOLIVM.

Vides igitur, longe esse vniuersalius theorema hoc Euclidis, quod sese ad omnes figuras similes similiterque descriptas extendit, quam illud Pythagoræ inuentum, quod sola quadrata includit, vt propos. 47. primi libri monuimus. Videtur tamen & theorema illud, quod ibi ex Pappo demonstrauimus, aliqua ex parte adhuc esse vniuersalius quam hoc, cum illud de omni triangulo, parallelogrammisque etiam non similibus; Hoc vero de triangulo tantummodo rectangulo, figurisque similibus, & similiter positis, proponatur.

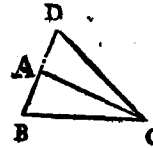
Conuertemus etiam theorema hoc ex Campano non aliter, quã 47. propositionem primi libr. in hunc modum.

Si figura, quæ ab vno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, figuris similibus similiterque positis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.



Detur triangulum *ABC*, sitque figura quæuis super latus BC, descripta æqualis duabus figuris sibi similibus similiterque descriptis super reliqua latera AB, AC. Dico angulum BAC, esse rectum. Ducatur enim AD, ad AC, perpendicularis, quæ sit ipsi AB, æqualis, & connectatur recta CD. Quoniam igitur angulus CAD, rectus est, d erit figura super CD, (quæ similis

d 13. sexti.



similis sit ei, quæ super BC, similiterque posita) descripta æqualis figuris super AD, AC, descriptis, quæ ei similes sint, similiterque positæ. Est autem figura super AD, æqualis figuræ super AB, ob æqualitatem laterum. Igitur figura super CD, æqualis erit figuris super AB, AC. Cum igitur figura super BC, eisdem figuris super AB, AC, æqualis ponatur, erunt figuræ super CD, BC, inter se æquales, ac propterea rectæ CD, BC, æquales erunt, vt constat ex lemmate propos. 22. huius lib. Quoniam igitur latera AD, AC, trianguli ADC, æqualia sunt lateribus AB, AC, trianguli ABC; & basis DC, ostensa est quoque æqualis basi BC; a erunt anguli DAC, BAC, æquales. Quare cum DAC, rectus sit, ex constructione, rectus quoque erit BAC. Quod est propositum.

a 8. primi.

XXX.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum vnum angulum composita fuerint, ita vt homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

Habeant triangula ABC, DCE, *latera* AB, AC, *lateribus* DC, DE, *proportionalia, vt quidem* AB, *ad* AC, *ita* DC, *ad* DE, *componanturque ad angulum* ACD, *ita vt latera homologa* AB, DC. *Item* AC, DE, *inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua* BC, CE, *rectam componere lineam. Cum enim parallela sint* AB, DC, b *erit angulus* A, *alterno* ACD, *æqualis: Eadem quoque ratione angulus* D, *eidem* ACD, *æqualis erit: ac propterea* A, & D, *inter se quoque existent æquales. Quoniam igitur trianguli* ABC, DCE, *habent latera circa* c *æquales angulos* A, & D, *proportionalia: ipsa* c *erunt inter se* c *æquiangula, habebuntque* c *æquales angulos* B, & DCE. *Additis ergo* c *æqualibus* A, & ACD, *erunt duo anguli* B, & A, *duobus angulis* DCE, ACD, *hoc est angulo* ACE, *æquales. Rursus addito communi* ACB, *fient tres anguli trianguli* ABC, *duobus angulis* ACE, ACB, *æquales:* d *Sed illi tres æquales sunt duobus rectis. Ergo* & *duo* ACE, ACB, *duobus erunt rectis æquales:* e *Atque idcirco* BC, CE, *vnam rectam lineam constituent. Itaque si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum,*

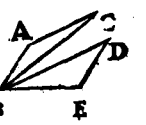
b 29. primi.
c 6. sexti.
d 32. primi.
e 14. primi.

SCHOLIVM.

Debent autem prædicta duo triangula ita secundum vnum an-

gu-

gulum esse composita, ut vterque angulorum à lateribus proportionalibus cõprehẽsus, alternus sit illi angulo, secundum quem triangula cõponũtur; veluti in figura theorematis factum esse vides. Nam angulo ACD, secundum quem triangula sunt composita, alternus est tam angulus *A*, quam angulus D, quorum vterque lateribus *proportionalibus continetur*. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, esse æquales, & propterea triangula esse æquiangula: atque adeo ex BC, CE, vnam rectam lineam componi, vt ex demonstratione liquet.

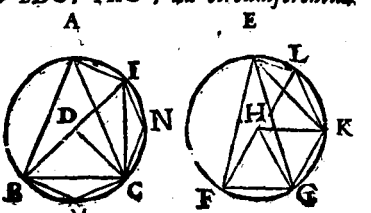


Quod si vterque angulorum lateribus proportionalibus comprehensus non fuerit alternus angulo, secundum quem triangula componuntur, licet reliquæ hypotheses theorematis seruentur, non colligitur necessario conclusio. Nam duo triangula ABC, DBE, habent duo latera AB, AC, duobus lateribus DB, DE, proportionalia, ut quidem AB, ad AC, ita DB, ad DE, compositaque sunt ad angulum CBD, ita ut tam homologa latera AB, DE, quam AC, DE, sint parallela: Nihilominus reliqua duo latera CB, BE, non constituunt unam lineam rectam; propterea quod angulo CBD, non sit alternus uterq; angulorum A, & D. immo neuter eorum, ut perspicuum est, quamobrem demonstratio theorematis locum non habet.

THEOR. 23. PROPOS. 33. xxxij.

In æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus insistunt, siue ad centra siue ad peripherias constituti insistant: Insuper vero & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

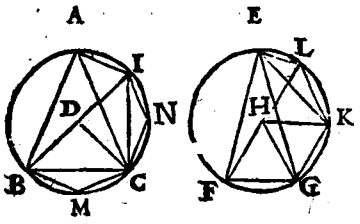
Sint duo circuli æquales ABC, EFG, *quorum centra* D, H; *sumantur*que *ex circulis duo arcus quicunque* BC, FG, *quibus ad centra quidem insistant anguli* BDC, FHG; *ad circumferentias verò anguli* BAC, EFG. *Dico esse ex sententia definition. 6. lib. 5. vt arcum* BC, *ad arcum* FG, *ita angulum* BDC, *ad angulum* FHG, *& angulum* BAC, *ad angulum* EFG; *& sectorem insuper* BDC, *qui rectis* BD, DC, *& arcu* BC, *continetur ad sectorem* FHG: *quem comprehendunt rectæ* FH, HG, *& arcus* FG. *Ductis enim rectis* BC, FG, *a applicẽtur ipsis in circulis æquales rectæ*; CI, *quidẽ ipsi* BC. *At vero* GK, KL, *ipsi* FG: *ducanturque rectæ* ID, KH, LH. *Quoniam igitur æquales sunt rectæ* BC, CI, *b erunt quoque æquales arcus* BC, CI



a 1. quinti.

b 28. tertii.

a æ



a 27. tertij.

a *ac propterea & anguli* BDC, CDI, *æquales erunt. Eadem ratione æquales erunt & arcus* FG, GK, KL, *& anguli* FHG, GHK, KHL. *Quam multiplex ergo est arcus* BCI, *ipsius arcus* BC, *tã multiplex erit angulus* BDI, *seu aggregatum angulorum prope centrum* D. *insistentium ei, cui* BCI, *anguli* BDC: *Et quam multiplex est arcus* FGKI, *ipsius arcus* FG, *tam multiplex erit angulus* FHL, *seu aggregatum angulorum prope centrum* H, *arcui* FGKL, *insistentium, anguli* FHG, *quia in tot angulos æquales diuisi sunt anguli* BDI, FHL, *in quot arcus æquales secti sunt arcus* BCI, FGKL. *Quoniam vero si*

b 27. tertij.

arcus BCI, *æqualis fuerit arcui* FGKL, b *necessario angulus* BDI, *angulo* FHL, *æqualis est: Ac proinde si arcus* BCI, *maior fuerit arcu* FGKL, *necessario angulus* BDI, *maior est angulo* FHL, *& si minor, minor: Deficient propterea vna arcus* BCI, *& angulus* BDI, *æque multiplicia primæ magnitudinis* BC, *& tertiæ* BDC, *ab* FGKI, *arcu, & angulo* FHL, *æque multiplicibus secundæ magnitudinis* FG, *& quartæ* FHG, *vel vna æqualia erunt, vel vna excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent.*

c 6. defin. quinti.

c *Quare quæ proportio est arcus* BC, *primæ magnitudinis, ad arcum* FG, *secundam magnitudinem, eam erit anguli* BDC, *tertiæ magnitudinis ad angulum* FHG, *quartam magnitudinem.*

Atque hoc verum etiam est de spatijs circa centra, hoc est, ita erit arcus BAC, *ad arcum* FEG, *vt spatium ad centrum* D, *insistens arcui* BAC, *ad spatium ad centrum* H: *insistens arcui* FEG, *vt ex demonstratione patet. Nam & hæc spatia, si æqualia sunt, insistunt æqualibus arcubus, & si inæqualia, inæqualibus, &c.*

d 15. quinti.

Quoniam vero vt angulus BDC, *ad angulum* FHG, d *ita est angulus* BAC, *ad angulum* FEG, e *eum illi horum dupli, perspicuum est,*

e 20. tertij. f 11 quinti.

f *ita esse quoque angulum* BAC, *ad angulum* EFG. *Quod tamen eisdem argumentis demonstrari potest, quibus vsi sumus in angulis ad centra constitutis, si primum ducantur rectæ* IA, KL, LE, *&c.*

Quod si ad circumferentias constituti sint anguli eiusmodi BAC, FEG, *vt rectæ ductæ* BD, CD; FH, GH, *non constituant angulos in centris versus arcus* BMC, FG: *sumenda erunt spatia* BDC, FHG, *quæ dupla etiam sunt angulorum ad circumferentias, ex scholio propos. 20. lib. 3.*

g 24. tertij.

Constituantur iam in segmentis BC, CI, *anguli* BMC, CNI, g *qui æquales erunt, cum insistant arcubus æqualibus* BAC, CBM. *Quare simi-*

re similia erunt segmenti BMC, CNI: atque adeo inter se æqualia, h *propterea quod sunt super rectas* BC, CI *æquales. Additis igitur* h 24. *tertij.*
angulis BDC, CDI, *quæ æqualia quoque sunt, fient sectores* BDC, a 4. *primi.*
CDI, *æquales. Quapropter tam multiplex erit sector* BDI, *sectoris* BDC, *quam est multiplex arcus* BCI, *ipsius arcus* BC. *Similiter ostendemus sectorem* FHL, *tam multiplicem esse sectoris* FHG, *quam multiplex est arcus* FGKL, *ipsius arcus* FG. *Quoniam vero si arcus* BCI, *æqualis fuerit arcui* FGKL, *sector quoque* BDI, *sectori* FHL, *æqualis est: (vt in sectoribus* BDC, CDI, *ostensum fuit,) & si maior, maior. & si minor, minor: Deficient propterea vna arcus* BCI, *& sector* BDI, *æque multiplicia primæ magnitudinis* BC, *& tertiæ* BDC, *ab arcu* FGKL, *& sectore* FHL, *æque multiplicibus secundæ magnitudinis* FG, *& quartæ* FHG; *vel vna æqualia erunt: vel vna excedent: si ea sumantur, quæ inter se respondent.* b *Quamobrem quæ* b 6. *defin.*
proportio est arcus BC, *primæ magnitudinis, ad arcum* FG, *secundæ* *quinti.*
magnitudinem, ea erit sectoris BDC, *tertiæ magnitudinis, ad sectorem* FHG, *quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, &c. Quod demonstrandum erat.*

Commodius fortasse instituetur demonstratio hoc modo. Sumantur (saltem cogitatione) quotuis circuli æquales circulo ABC, *atq; in singulis capiantur singuli arcus arcui* BC, *æquales, quibus insistant anguli tam ad centra, quam ad circumferentias. Erunt enim omnes hi anguli æquales angulis* BDC, BAC, *ob æqualitatem arcuum quibus insistunt: ac proide eorum aggregata ita multiplicia erunt angulorum* BDC, CAC, *vt est multiplex aggregatum omnium arcuum ipsius arcus* BC. *Deinde sumantur etiam quotuis circuli æquales circulo* EFG, *& in singulis accipiantur singuli arcus arcui* FG, *æquales, &c. Hac enim ratione vitabitur confusio linearum, & angulorum in circulis* ABC, EFG, *quæ necessario oritur, quando arcus* BC, FG, *sunt magni, & eorum multiplices accipiendi sunt, vt perspicuum est. Nam si arcus essent* BDI, FGL, *quibus insistunt anguli* BDI, FHL, *ad centra, &* BAI, FEL, *ad circumferentias non poterunt eorum multiplices sumi sine confusione, vt patet. Hæc autem confusio vitatur, si plures circuli æquales adhibeantur, vt diximus.*

COROLLARIVM. I.

Hinc manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, vt est angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem est proportioni arcus ad arcum c Quare & inter se eædem erunt. c 11. *quinti.*

COROLLAIRVM. II.

Perspicuum quoque est, vt est angulus in centro ad quatuor rectos, ita esse arcum subtensum illi angulo ad totam circumferentiam.

Et

Et contra, vt sunt quatuor recti ad angulum in centro ita esse totam circumferentiam ad arcum illi angulo subtensum.

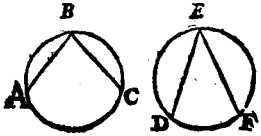
a 35. sext. Nam vt est angulus in centro ad angulum rectum in centro, a ita est arcus illi angulo subtensus ad quadrantem angulo recto subtensum. Quamobrem erit vt angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circumferentiam; per ea quæ ad 22. propos. lib. 5. demonstrauimus. Quod est primum. Quoniam igitur, est vt angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad totam circumferentiam; erit & conuertendo, vt quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circumferentia ad arcum angulo in centro subtensum. Quod est secundum. Verum hoc etiam ita demonstrabitur. b Cum sit vt angulus rectus

b 33. sexti in centro ad angulum in centro, ita quadrans angulo recto subtensus ad arcum illi angulo subtensum; erit quoque per ea, quæ ad propos. 22. lib. 5. ostendimus, vt quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita quadruplum quadrātis, nimirum tota circumferentia, ad arcum illi angulo subtensum. Quod est propositum.

Idem verum est de spatio in centro: hoc est, vt est spatium in centro ad quatuor rectos, ita est arcus subtensus illi spatio ad totam circumferentiam, &c. vt ex demonstratione patet.

SCHOLIVM.

Cæterum ex theoremate hoc luce clarius colligitur, angulum qui circumferentiæ alicui insistit, referendum esse ad arcum, qui basis est ipsius anguli, non autem ad arcum, in quo existit. Non enim eadem est proportio anguli ad angulū, quæ arcus ad arcum, si sumantur arcus, in quibus anguli existunt, vt vult Euclides in proposito hoc theoremate. Sint enim circuculi æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentiam constituti sint BE: maior quidem B, minor autem E. Quo posito, erit arcus AC, maior arcu DF, ex scholio propos. 26. lib. 3. ac propterea reliquus arc° ABC, minor reliquo arcu DEF. Quare proportio anguli B, ad angulum E, est maioris inæqualitatis, proportio vero arcus ABC, ad arcum DEF, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcū. Quod si sumamus arcus, super quos anguli ascenderunt, quales sunt arcus AC, DF, tum demum erit angulus B, ad angulū E, vt arcus AC. ad arcum DF, vt recte demonstrauit Euclides. Quocirca cum dicimus angulum esse in segmento, aliud intelligere debemus, quam cum dicimus, angulum insistere segmento seu arcui. Id quod in expositione definitionis 8 lib. 3. monuimus.



Non

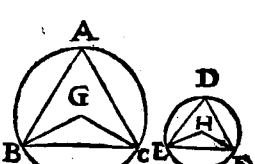
Non obscure quoque ex hoc theoremate demonstrari potest, similitudinem segmentorum in circulis similium, quæ Euclides definitione 10. lib. 3. definiuit per angulos æquales in ipsis segmentis existentes, consistere in eo, quod segmenta, seu circumferentiæ similes, ad integras circumferentias circulorum eandem habeant proportionem, & propterea quando segmenta totis circulis commensurabilia sunt, qualis pars est vna circumferentia totius suæ circumferentiæ; talis quoque sit alia circumferentia similis totius suæ circumferentiæ: veluti in expositione prædictæ definitionis docuimus. Sint enim primum duo circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias constituantur æquales BAC, EDF. Quo posito, segmenta BAC, EDF, iuxta Euclidis definitionem præfatam dicentur similia. Manifestum autem est,

eorum circumferentias habere eandem proportionem ad integras circulorum circumferentias. Cum enim circulorum æqualitatem, *a* arcus BC, EF, quibus anguli æquales insistunt, sint æquales; efficitur reliquas circumferentias BAC, EDF, esse quoque æquales. Quare ad totas circumferentias, quæ æquales etiam ponuntur, *b* eandem proportionem habebunt; Atque idcirco, quæ pars est arcus BAC, totius circumferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circumferentiæ DEFD.

a 26. tertij.

b 7. quinti.

Sint deinde duo circuli inæquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias constituantur æquales BAC, EDF: Quo posito dicentur segmenta BAC, EDF, ex Euclidis sententia similia. Dico rursus arcus BAC, EDF, eandē habere proportionem ad integras suas circumferentias. Ducantur enim ad centra G, H, rectæ BG, CG, EH, FH. Quoniam igitur anguli A, & D, æquales ponuntur, erunt quoque ad centra anguli G, & H, æquales, *c* cum hi illorum dupli existant: Vel erunt spatia ad centra æqualia, cum hæc quoque sint angulorum ad circumferentias dupla, ex scholio propos. 20. lib. 3. *d* Quare quatuor recti ad angulum, vel spatium G, eandem habebunt rationem, quam ad angulum, vel spatium H. Atqui vt quatuor recti ad angulum, vel spatium G, ita est tota circumferentia ABCA, ad arcum BC; Et vt quatuor recti ad angulum vel spatium H, ita est tota circumferentia DEFD, ad arcum EF, ex coroll. 2. huius propos. 33. *e* Igitur vt tota circumferentia ABCA, ad arcum BC, ita erit tota circumferentia DEFD, ad arcum EF. Per conuersionem ergo rationis erit quoq; vt tota circumferentia ABCA, ad arcum BAC, ita tota circumferentia DEFD, ad arcū EDF. Et conuertendo vt arcus BAC ad to-



c 20. tertij.

d 7. quinti.

e 11. quinti.

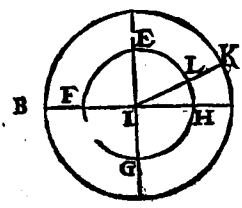
ad totam circumferentiam ABCA, ita arcus ADF, ad totam circumferentiam DEFD. Quocirca quæ pars est arcus BAC, totius circumferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circumferentiæ DEFD. Quod est propositum.

Constat igitur, recte Euclidem vocasse ea circulorum segmenta similia, in quibus anguli existentes inter se sunt æquales; quandoquidem huiusmodi segmenta eandem habent proportionem ad circulos suos integros.

Facile ex his demonstrabitur theorema illud, quod & ad calcem cap. 1. in sphæram, & ad prop. 22. lib. 3. sine proportionibus ostendimus, videlicet.

Si duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duæ aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas interceptí similes.

Sint duo circuli ABCD, EFGH, circa idem centrum I, descripti. Si igitur egrediantur è centro I, duæ rectæ IB, ID, efficientes vnam lineam rectam BD, manifestum est, arcus BAD, FEH, similes esse cum sint semicirculi. Rursus si ex I, egrediantur duæ rectæ IA, IC, constituentes angulum rectum AIC, perspicuum quoque est arcus AD, EH, similes esse, cum ex scholio propos. 27. lib 3. sint Quadrantes suorum suorum circulorum.



Emittantur iam ex I, duæ rectæ ID, IK, facientes quemcunq; angulum non rectum DIK. Dico adhuc arcus DK, HL, similes esse, hoc est, ita esse arcum DK, ad totam circumferentiam ABCD, vt est arcus HL, ad totam circumferentiã EFGH. Quoniã enim vt angulus DIK, ad quatuor rectos, ita est ex coroll. huius propos. tam arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, quam arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH; erit vt arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, ita arcus HL, ad totam circumferentiam EFGG, ac proinde arcus DK, HL, similes erunt. Quod est propositum.

11. quinti.

Breuius idem confirmabitur hoc modo. Quoniam arcubus DK, HI, insistunt in centro I, anguli æquales, immo idem; erunt ex scholio propos. 22. lib. 3. arcus DK, HL, similes: ac proinde ad totas circumferentias eandem proportionem habebunt, vt paulo ante ostensum est.

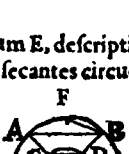
Eadem ratione ostendemus arcus BAK, FEL, similes esse, id est, habere ad totas circumferentias eandem proportionem.

Sed

Sed placet etiam hic demonſtrare lemma, quod ad propoſ. 6. lib. 3. Theodoſii propoſuimus, cum ad multa alia conducat. Illud autem eſt ejusmodi.

Æquales rectæ lineæ ex circulis inæqualibus auferunt, arcus inæquales, maiorq; eſt arcus minoris circuli, quàm ut ſimilis ſit arcui circuli maioris.

Sint circuli inæquales AB, CD, circa idem centrum E, deſcripti. Ducantur autem ex E, duæ rectæ utcunque EA, EB, ſecantes circulos in A, B, & C, D, punctis: eruntque arcus AB, CD, ſimiles, ut proxime demonſtravimus. Et quoniam rectæ EA, EB, ſectæ ſunt in C, D, proportionaliter, quod tam EA, EB, quam EC, ED, inter ſe æquales ſint; *a* erunt duæ rectæ AB, CD, parallelæ; atque ideo triangula EAB, ECD, ex coroll. propoſ. 4. hujus lib. ſimilia erunt. *b* Erit igitur ut EA, ad AB, ad EC, ad CD. Eſt autem EA, major quam EC. *c* Igitur & AB, major erit quam CD. Accommodetur ergo ipſi CD, in circulo AB, æqualis BF: eritque ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. arcus AB, major arcu FB. Quare cum arcus CD, arcui AB, ſimilis ſit; erit arcus CD, major, quam ut ſimilis ſit ipſi FB. Æquales igitur rectæ CD, BF, ex circulis inæqualibus AB, CD, arcus inæquales auferunt, majorq; eſt arcus CD. circuli minoris, quam ut ſimilis ſit arcui FB, circuli majoris. Quod eſt propoſitum.



a 2. ſexti.

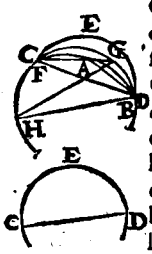
b 4. ſexti.

c 14. quinti.

Hinc perſpicuum eſt, multo magis majorem lineam ex circulo minore auferre arcum majorem, quam ut ſimilis ſit ei, quem ex circulo majore aufert linea major. Cum enim recta CD, æqualis ipſi BF, auferat arcum CD, majorem, quam ut ſimilis ſit arcui FB; multò magis linea major quam CD, auferat majorem arcũ, quam ut ſimilis ſit arcui FB, cum illa majorem arcum abſcindat, quam CD, ut in ſcholio propoſ. 28. lib. 3. oſtendimus.

Hæc autem demonſtratio propoſitum tantum colligit, quando arcus abſciſſi ſunt ſemicirculo minores, quales ſunt BF, CD, ut ex ipſa demonſtratione conſtat. Nam alias non conſtitueretur angulus in E. centro communi: quod tamen ad demonſtrationem requiritur. Verum nihilominus erit, ſi arcus ſemicirculo minor circuli minoris major eſt, quam ut ſimilis ſit arcui ſemicirculo minori circuli majoris, multo majorem eſſe arcum ſemicirculo majorem circuli minoris, quam ut ſimilis ſit arcui ſemicirculo minori circuli majoris. Quod ſi quando contingat, rectam CD, ex minori circulo auferre ſemicirculum, ut quando eſt diameter circuli: liquido conſtat, ſemicirculum minoris circuli majorem eſſe, quàm ut ſimilis ſit arcui ſemicirculo minori circuli majoris; neq; opus tunc erit alia demonſtratione.

Hinc etiam nullo negotio oſtendemus, æquales rectas lineas ex circulis inæqualibus auferre arcus ſimpliciter, & abſolute inæquales, ita ut arcus minoris circuli ſimpliciter major ſit arcu circuli majoris, & non ſolum major, quam ut ſimilis ſit. Sint enim rectæ lineæ, CD, BF, æquales, auferatq; CD, arcum minoris circuli CED, & FB, arcum circuli majoris FGB. Dico ſimpliciter arcum CED, majorem eſſe arcu FGB, Congruente enim recta CD, rectæ FB, cadet neceſſario arcus CED, extra arcum FGB; atq; idcirco arcus CED, major erit arcu FGB, cum ille hunc totum intra ſe contineat, ſintq; ambo arcus in eandē partem cavi, atq; eadem extrema puncta habeant, ut vult Archimedes in ſuppoſitionibus ante lib. 1. de ſphæra & cylindro. Neq; vero arcus CED, arcui FGB, congruet, aut intra ipſum cadet. Nam ſi dicatur congruere, congruet etiam tota circumferentia circuli CED, toti circumferentiæ circuli FGB, atq; adeo æquales erunt circuli, quod eſt abſurdum, cum inæquales ponantur. Si vero arcus CED, dicatur cadere intra arcum FCB, cujusmodi eſt arcus CAD; quoniam ut paulo ante oſtendimus, arcus CED, id eſt CAD, major eſt, quam ut ſimilis ſit arcui FGB, ſumatur arcus BFH, arcui CAD, ſimilis, atque ideo maior arcu FGB: Aſſumpto autem in arcu CAD, puncto A, utcunque ducantur rectæ AF, AB, productaq; recta FA, donec arcum FGB, ſecet in G. ducantur rectæ GH, GB. (In figura per incuriam recta GB, ducta non eſt: Igitur ſtudioſus lector eam ducat, oportet.) Itaq; quoniam arcus CAD. HFB, ſimiles ſunt: erunt anguli CAD. HGB. in illis ſegmentis exiſtentes æquales. a Quia vero angulus CAD. angulo CGB, major eſt, externus interno; & angulus CGB, angulo HGB, major quoque, totum parte; erit multo major angulus CAD, angulo HGB, quod eſt abſurdum. Oſtenſus enim eſt æqualis. Non ergo arcus CED, cadet intra arcum FGB; ſed neq; ei congruit, ut demonſtratum eſt. Cadet ergo extra; atq; ideo maior erit arcus CED, arcu, FGB, ut dictum eſt. Quod eſt propoſitum.



a 16. primi

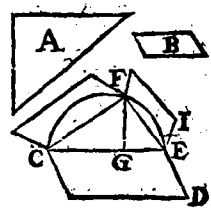
Ex quo liquido conſtat, multo magis majorem lineam ex circulo minore auferre arcum majorem ſimpliciter eo, quem minor linea ex circulo majore abſcindit.

Quoniam vero Euclides multa dixit de inventione linearum proportionalium, nihil vero de ſuperficierum, vel planorum proportionalium inveſtigatione nobis præſcripſit: non abs re me facturum exiſtimo, ſi nonnulla problemata, atq; theoremata, quorum multa circa inventionem ſuperficierum proportionalium verſantur, ſcitu non injucunda, loco appendicis, partim ex peritis Geometris, partim ex inventis propriis huic ſexto libro annectam, quippe quæ ex demonſtratis ab Euclide facili negotio deducantur. Hinc autem exordium capiemus.

A dato

I.

A dato rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, ut ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterque positum.



Sit ex rectilineo A, auferenda tertia pars, quæ similis sit, similiterq; posita rectilineo B, relinquatq; rectilineum eidem B, simile, & similiter positum. *a* Constituatur rectilineum CD, æquale quidem ipsi A, simile vero, & similiter positum ipsi B: superque unum ejus latus CE, semicirculus describatur CFE. *b* Deinde ablata parte tertia GE, imperata videlicet; ex CE, agatur GF, ad CE, perpendicularis, connectanturq; rectæ CF. EF. *c* super quas constituantur rectilinea FH, FI. similia similiterq; posita ipsi CD. Dico igitur factum esse, quod jubetur. *d* Cum enim angulus CFE, rectus sit, quippe qui in semicirculo existat; *e* erit rectilineum CD, æquale rectilineis HF. FI. atq; adeo, si auferatur rectilineum *FI.* simile similiterq; positum ipsi B. ex rectilineo CD, hoc est, ex æquali A, relinquetur rectilineum HF. simile quoq; ipsi B, similiterq; positum. Quod autē rectilineum ablatum FI. sit tertia pars rectilinei CD, ita ostendetur. *f* Quoniam est, ut recta CG, ad GF, ita recta CF. ad FE; *g* quod triangula CGF, CFE. sint similia: Habet autem CG, ad GE, proportionem duplicatā proportionis CG, ad GF, propterea quod proportionales sūt tres rectæ CG, GF, GE, ex coroll. propos. 8. hujus lib. *h* Item rectilineum HF, ad rectilineum FI, proportionem quoque habet duplicatam proportionis laterum homologorum CF, FE: Erit ut recta CG, ad GE, ita rectilineum HF, ad rectilineum FI; quandoquidem hæ proportiones duarum æqualium proportionum duplicatæ sunt. Componendo igitur erit, ut CE, ad GE, ita duo rectilinea HF, FI, simul, hoc est, rectilineum CD, quod est illis æquale, ad rectilineum *FI*: Est autem CE, ipsius GE, tripla, per constructionem. Igitur & rectilineum CD, triplum erit rectilinei FI: Ac propterea hoc illius tertia pars existet. Quod est propositum.

a 25. *sexti*
b 9. *sexti.*
c 18. *sexti.*
d 31. *ter.*
e 31. *sexti.*
f 4. *sexti.*
g 8. *sexti.*
h 19. *vel* 20. *sexti.*

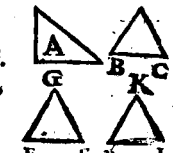
Quod si pars imperata, nēpe tertia, simpliciter sit auferēda, fiet id brevissime, hac arte *i* Rectilineum datum *A*, revocetur ad parallelogrammum GD, æquale; & ex latere BD. auferatur DE, tertia pars imperata: & per E, agatur ipsi *BG*, parallela *EF.* Dico DF. tertiam esse partem ipsius DG. hoc est, rectilinei dati A. Cum enim sit *k* ut DE, ad DB. ita *DF.* ad DG. Sit autem per constructionem DE. ipsius DB. pars tertia; erit & DF. ipsius DG, tertia pars. Quod est propositum.

i 45. *pri.*
k 1. *sexti.*

II.

Duobus datis rectilineis, tertium proportionale invenire.

Sint data duo rectilinea A, & BCD, quibus inveniendum sit tertium proportionale. *a* Constituatur ipsi A, rectilineum æquale EFG, simile vero similiterq; positum ipsi BCD. Deinde lateribus homologis EF, BC, *b* inveniatur tertia linea proportionalis HI; *c* super quam constituatur rectilineum HIK, simile similiterq; positum ipsis EFG, BCD. Dico HIK, esse tertium proportionale. Cum enim proportionales sint rectæ EF, BC, HI; *d* erunt & rectilinea EFG, BCD, HIK, ab illis descripta (cum sint similia, similiterque posita) proportionalia. Cum ergo EFG, per constructionem, æquale sit ipsi A; erunt & rectilinea A, BCD, HIK, proportionalia. Quod est propositum.

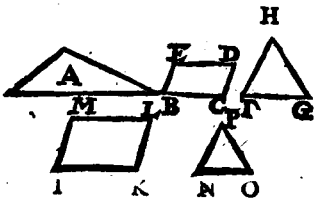


a 25. *sexti.*
b 11. *sexti.*
c 18. *sexti.*
d 22. *sexti.*

III.

Tribus datis rectilineis, quartum proportionale invenire.

Tria rectilinea data sint A, BCDE, FGH, quibus quartum sit inveniendum proportionale. *e* Constituatur rectilineum IK, LM, æquale quidem ipsi A, simile vero similiterque positum ipsi BCDE. Tribus deinde rectis IK, BC, FG, *f* inventa quarta proportionali NO; *g* constituatur super NO, rectilineum NOP, ipsi FGH, simile similiterq; positum. Dico NOP, rectilineum esse quartum proportionale. Cum enim quatuor rectæ IK, BC, FG, NO, sint proportionales; *h* erunt & rectilinea similia similiterq; posita ab ipsis descripta IL, BD, FGH, NOP, proportionalia. Cum igitur IL, constructum sit æquale ipsi A; erunt & quatuor rectilinea A, BD, FGH, NOP, proportionalia. Quod est propositum.



e 25. *sexti.*
f 12. *sexti.*
g 28. *sexti.*
h 22. *sexti.*

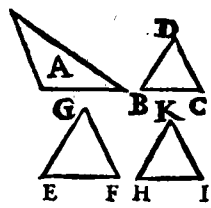
IV.

Duobus datis rectilineis, medium proportionale invenire.

Sint duo rectilinea A, BCD, quibus medium inveniendum est proportionale. *i* Constituatur rectilineum EFG, æquale ipsi A, & simile similiterque positum ipsi BCD. Duabus deinde rectis EF, BC, *k* inventa media proportionali HI; *l* constituatur super HI, recti-

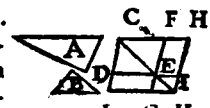
i 25. *sexti.*
k 13. *sexti.*
l 22. *sexti.*

rectilineum HIK, ſimile ſimiliterque poſitum ipſis EFG, BCD. Dico HIK. medium eſſe proportionale quæſitũ. Cum enim proportionales ſint tres rectæ EF, HI, BC, a erunt quoq; rectilinea ab ipſis deſcripta EFG, HIK, BCD. proportionalia, cũ ſint ſimilia ſimiliterq; poſita. Cũ ergo EFG, conſtructũ ſit æquale ipſi A; erunt quoq; rectilinea A, HIK, BCD, proportionalia; hoc eſt erit ut A, ad HIK, ita HIK, ad BCD; ac proinde HIK. medium proportionale erit inter A. & BCD. Quod eſt propoſitũ



a 22. ſe. 1

Aliter. Sit rurſus inter rectilinea A. & B. perquirendum medium proportionale. b Cõſtituatur ipſi A, æquale parallelogrammum quodcunq; CDEF, c ipſi vero B, æquale parallelogrammum FGHI, ſimile vero ſimiliterque poſitum ipſi CDEF. Connectanturq; hæc parallelogramma ad angulos æquales, ut DE. EI. efficiant unam lineam rectam, ac propterea per ea, quæ ad propoſ. 15. lib. 1. demonſtravimus, una quoq; linea recta componatur ex FE. FG; perficiaturq; totum parallelogrammum KL. Dico utrumlibet EK. vel EL. medium eſſe proportionale inter DF. GI hoc eſt, inter A. & B. Cum enim ſimilia ſint ſimiliterq; poſita DF. GI; erit ut DE. ad EF. ita GH. ad HI. hoc eſt, ita EI. ad EG. d quod rectæ EI. EG. rectis GH. HI. æquales ſint. Permutando ergo ut DE, ad EI, ita FE, ad EG. e Vt autem DE, ad EI, ita eſt, DF. ad EK. & ut FE. ad EG. ita EK. ad GI. Igitur ut DF. ad EK, ita EK. ad GE; ac proinde EK. medium proportionale erit inter DF. GI, hoc eſt, inter A., & B. Quod eſt propoſitum.



b 45. pri.
c 25. pri.
d 34. pri.
e 1. ſexti.

Quod etiam in hunc modum confirmari poteſt. Cum DE, GI. ſimilia ſint, ſimiliterq; poſita, f conſiſtent ea circa eandem diametrum. Quare complementa EK. EL. æqualia erunt. Vt autem DF. ad EK. ita eſt EL. ad GI. g quod utraq; proportio eadem ſit proportioni DE. ad EI. Igitur erit, ut DF. ad EK. ita EK. ad GI. Quod eſt propoſitum.

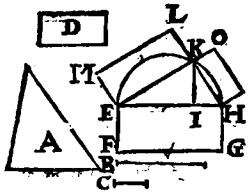
f 26. ſexti.
g 1. ſexti.

V.

Dato rectilineo duo rectilinea æqualia conſtituere, quæ ſimilia ſint, ſimiliterq; deſcripta cuicunque rectilineo, habeantque inter ſe proportionem propoſitam quamcunque.

Sit datum rectilineum A, dataque proportio rectæ B. ad C. oporteatque conſtituere duo rectilinea, quæ ipſi A, æqualia ſint, habeantque proportionẽ, quã B. & C. ac ſimilia ſimiliterque poſita ſint rectilineo cuiuis D. h Conſtituatur rectilineum EFGH. æquale ipſi A. & ſimile ſimiliterq; poſitum ipſi D. Diviſo deinde latere eius

h 25 ſexti.



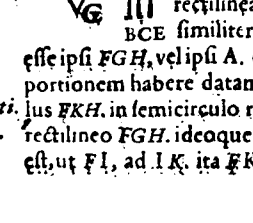
EH, in *I*, secundū proportionē B, ad C. ex iis, quæ ad propos. 10. hujus lib. demōstravimus: describatur circa EH, semicirculus E K H. & ex I. ducatur ad EH, perpendicularis IK, connectanturque rectæ E K. H K. *a* Describantur jam super EK. KH. rectilinea EKLM. KHNO. ipsi E G. vel ipsi D. similia, similiterq; posita; quæ dico æqualia etiam esse ipsi EG. seu ipsi A, habereque proportionem datam B. ad C. *b* Cum enim angulus E K H. in semicirculo existens rectus sit; *c* erunt rectilinea E L. H O. æqualia rectilineo E G, cum sint similia inter se, similiterq; descripta. *d* Quoniam verò est, ut E I. ad IK ita E K. ad KH. cum triangula EIK. EKH. similia sint: Est autem EI, ad IH, in proportione duplicata proportionis E I. ad I K, quod tres E I. IK. IH. sint, ex coroll. propos 8. hujus lib. proportionales. *e* Item EL, ad HO, in proportione duplicata ejus, quam habet latus *EK* ad latus homologum *KH*: erit ut EI. ad IH, hoc est, ut B. ad C. ita E L. ad HO. Dato ergo rectilineo A. exhibemus duo simul æqualia E L. *H* O. quæ similia sunt, similiterq; posita dato rectilineo D. habentq; proportionem inter se datam B. ad C. Quod est propositum

a 18. sexti.
b 21. ter.
c 31. sexti.
d 4. sexti.
e 19. vel 20. sexti.

VI.

Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia sint similiterq; descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se proportionē datā.

Detur rectilineum A, & proportio rectæ *B*. ad rectam C; oporteatq; constituere duo rectilinea ipsi A. æqualia, & similia ipsi *D*, proposito, similiterque posita, quorum latera homologa proportionem habeant, quam B. ad C. *f* Inventa ipsis B*G*. tertia proportionali E, *g* fiat rectilineum *FGH*, æquale ipsi A, & simile similiterq; positum ipsi *D*. Divisoq; latere *FH*. in I. secundum proportionē B. ad E. ut ad prop. 10. hujus lib. ostēdimus: describatur circa *F H*. semicirculus *FKH*: & ex I. ducatur ad *FH*. perpendicularis IK. connectāturq; rectæ *FK. HK*. *h* Describāturjā super *FK. HK*. rectilinea *FKL. HKM*. ipsi *FGH*. vel ipsi D. similia, similiterque posita. Dico hæc rectilinea æqualia esse ipsi *FGH*, vel ipsi A. eorumq; latera homologa *FK. HK*. proportionem habere datam rectæ B. ad rectam C. *i* Cum enim angulus *FKH*. in semicirculo rectus sit: *k* erunt rectilinea *FK L. HK M*. rectilineo *FGH*. ideoque & rectilineo A. æqualia. *l* Quoniam verò est, ut *F I*, ad *I K*. ita *F K*. ad *H K*. ob similitudinem triangulorum



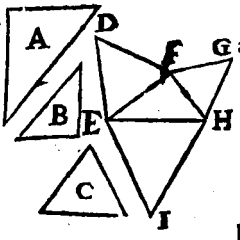
f 11. sexti.
g 25. sexti.
h 18. sexti.
i 21. 4er.
k 31. sexti.
l 4. sexti.

FKL

FIK. FK: Est autem F I. ad I H. in proportione duplicata proportionis F I. ad I K: (quod tres F I. I K. I H. proportionales sint: ex coroll. propos. 8. huius lib. ac propterea in proportione duplicata proportionis laterum homologorum F K. H K. Item & proportio B, ad E. (æqualis proportioni F I. ad I H. ex constructione) in duplicata est proportione proportionis B. ad C. ex defin. Igitur eadem erit proportio F K, ad H K. quæ B. ad G. quandoquidem ipsarum duplicatæ proportionis F I. ad I H. & B. ad E. æquales sunt. Constat ergo propositum.

VII.

Duobus datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuivis rectilineo dato.



Duo rectilinea data sint A, & B, quibus æquale sit constituendum, simile, similiterq; positum ipsi C. *a* Fiat ipsi A, æquale D E F. simile autem similiterq; positū ipsi C. Item ipsi B. æquale constituatur G F H. simile vero eidem C. similiterq; positū. *Deinde* rectilinea D E F. G F H. ita inter se connectantur, ut latera eorū homologa E F, F H. constituant angulum E F H, rectum, cui subtēdantur recta E H. *b* super quam describatur rectilineum I H E, simile similiterq; positum ipsis *D E F, G F H*, hoc est, ipsi *G*. *c* Perspicuum autem est *E H I*. æquale esse duobus *D E F. G F H*. atq; idcirco duobus A. & *B*. Quod est propositum

a *25. sexti.*

b *18. sexti.*

c *31. sexti.*

Brevius. Constituatur parallelogrammum æquale duobus rectilineis A. & B. per ea, quæ ad propos. 45. lib. 1. docuimus. *d* Si enim huic parallelogrammo construxerimus æquale rectilineum *E H I*, quod simile sit similiterq; positum alteri dato rectilineo, C: Constitutum erit rectilineum *E H I*. æquale duobus rectilineis A. B. & simile similiterq; positum rectilineo C. Quod erat faciendum.

d *25. sexti.*

VIII.

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint: erunt segmenta unius segmentis alterius reciproca.

In circulo *A B C D*. se mutuo secent rectæ A C. B D. in E. Dico segmenta *A E, E C*. esse reciproca segmentis *B E. E D*: Hoc est, esse ut A E, ad B E. ita *E D*, ad E C: Vel ut *A E*. ad E *D*. ita B E. ad E C. *e* Cum enim rectangulum sub A E, E C, comprehensum æquale sit rectangulo sub *B E, E D*, contento: *f* erunt latera circa æquales angulos reciproca. Quod est propositum.

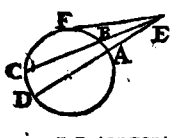
e *25. tertii.*

f *14. sexti.*

IX.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab

eoq; in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum secantes; Erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulũ tangat: Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam: quæ circulum secet, & eius segmentum exterius.

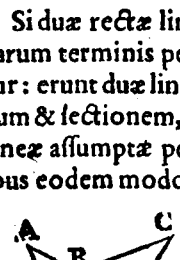


Extra circulum A B C D. sumatur punctum E, à quo cadant rectæ E C. E D. secantes circulum in A. & B. Dico rectas E C. E B. esse reciprocas rectis E D, E A: Hoc est, esse, ut E C. ad E D. ita E A. ad E B. Vel ut E C. ad E A. ita E D. ad E B. Ducta enim E F. tangente circulum in F. *a* erit rectangulum sub E C, E B. quadrato rectæ F F. æquale; Item rectangulum sub E D, E A, eidem quadrato rectæ E F. æquale. Quare & rectangula sub E C. E B, & sub E D. E A. æqualia erunt. *b* Ac propterea latera eorum circa angulos æquales reciproca. *c* Quoniam autem quadrato rectæ E F. æquale est tam rectangulum sub E C. E B. quam rectangulum sub E D. E A. *d* erunt tam tres rectæ E C. E F. E B. quam tres E D. E F. E A. proportionales, atq; adeo E F. media proportionalis inter quamlibet lineam, quæ circulum secet, & segmentum eius exterius. Quod est propositum.

a 36. tertii.
b 14. sexti.
c 36. tertii.
d 17. sexti.

X.

Si duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint, & à duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarum una inter unum terminorum & sectionem, altera vero inter sectionem, & prioris lineæ assumptæ perpendicularem interiicitur, aliis duabus eodem modo inclusis reciprocæ.



Duæ rectæ, A B. C B. se mutuo secent in B. & ex terminis A. C. ad ipsas demittantur perpẽdiculares: A D, quidem ad C B. at vero C E. ad A B: quæ perpendiculares cadent in A B, C B, protractas ultra B, si angulus A B C, fuerit obtusus: in ipsas verò introrsum, si idem angulus acutus fuerit, ut figuræ indicant. Dico rectas A B, B E. (quarum prior interiicitur inter terminũ A, & sectionẽ B. posterior vero inter sectionem B & perpendicularẽ C E. quæ nimirum ad ipsam A B, assumptam ducitur) reciprocas esse duabus C B. B D. (quæ inter similes terminos includuntur) hoc est, esse ut A B ad B C. ita B D. ad B E. Vel ut A B. ad B D. ita B C. ad B E. Cum enim anguli A B D. A D B. trianguli A B D. æquales sint angulis C B E, C E B, trianguli C B E. Nam A D B, C E B, recti sunt; *a* & A B D, C B E, ad ver-

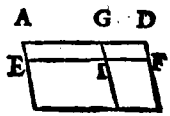
a 15. primi.

ad verticem in priori figura æquales; in posteriori autem vnus & idem angulus) erunt triangula ABD, CBE, æquiangula. *b* Quare erit vt AB, ad BD, ita CB, ad BE: Ac propterea permutando quoque, vt AB, ad BC, ita BD, ad BE. Quod est propositum. *b* 4. *sexti.*

Porro eadem ratione segmenta perpendicularium AD, CE, in posteriori figura se mutuo secantium in F, erunt reciproca. Cum enim triangula AFE, CFD, sint æquiangula: *c* erit vt AF, ad FE, ita CF, ad FD. Et permutando quoque, vt F, ad CF, ita FE, ad FD. Quod est propositum. *c* 4. *sexti.*

XI.

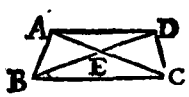
In parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelæ se mutuo secantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.



In parallelogrammo ABCD, duæ rectæ EF, GH, lateribus AD, DC, parallelæ se mutuo secent in I. Dico quatuor parallelogramma EG, GF, BI, IC, esse proportionalia. *d* Cum enim sit vt EI, ad IF, ita EG, ad GF. Item vt EI, ad IF, ita BI, ad IC, erit quoque vt EG, ad GF, ita BI, ad IC. Quod est propositum. *d* 1. *sexti.* *e* 11. *quinti.*

XII.

Omne quadrilaterum à duabus diametris se mutuo secantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.



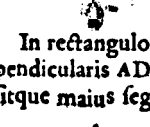
Diuidant diametri AC, BD, se mutuo secantes in E, quadrilaterum ABCD, Dico quatuor triangula AED, CED, AEB, CEB, esse proportionalia. *f* Erit enim vt AE, ad FC, ita triangulum AED, ad triangulum CED, & triangulum AEB, ad triangulum CEB. *g* Quare vt triangulum AED, ad triangulum, CED, ita triangulum AEB, ad triangulum CEB. Eademque ratione ostendes esse vt BEA, ad DEA, ita BEC, ad DEC; *h* cum vtraque proportio eadem sit proportioni BE, ad ED, constat ergo propositum. *f* 1. *sexti.* *g* 11. *quinti.* *h* 1. *sexti.*

XIII.

In triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto dimissa secat basim extrema ac media ratione, tria latera sunt continue proportionalia. Et si tria latera trianguli rectanguli sunt continue proportionalia

perpendicularis ad baſim ex angulo recto demiſſa ſecat baſim extrema ac media ratione.

In rectangulo triangulo ABC, ex angulo recto A, demiſſa perpendicularis AD, ſecet baſim BC in D, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum BD: ac propterea ex theoremate 9. ad propoſ. 47. lib. 1. latus AB, latere AC, maius. Dico tria latera BC, BA, AC, eſſe continue proportionalia. Quoniam enim per hypotheſin eſt vt BC, ad BD, ita BD, ad DC: *a* erit quadratum ex BD, rectangulo ſub BC, CD, æquale. Rurſus quia ex coroll. propoſ. 8. huius lib. AC, media proportionalis eſt inter BC, CD: *b* erit quoque quadratum ex AC, eidem rectangulo, ſub BC, CD, æquale. Quare quadrata ex BD, AC, æqualia inter ſe erunt, ac proinde & rectæ ipſæ æquales erunt. Eſt autem ex coroll. propoſ. huius lib. AB, inter BC, BD, media proportionalis. Igitur eadem AB, media proportionalis erit inter BC, AC, hoc eſt, erit, vt BC, ad AB, ita AB, ad AC, quod eſt propoſitum.



a 17. ſexti.

b 17. ſexti.

Sint deinde tria latera BC, AB, AC, in triangulo rectangulo ABC, continue proportionalia, hoc eſt, ſit BC, ad AB, vt AB ad AC, demiſſaturque perpendicularis AD, ad baſim BC. Dico BC, ſectam eſſe in D, extrema ac media ratione. Quoniam enim eſt, vt BC, ad AB, ita AB, ad AC: Eſt autem vt BC, ad AB, ita quoque AB, ad BD: quod AB, media proportionalis ſit inter BC, BD, ex coroll. propoſ. 8. huius libr. *c* erit vt AB, ad AC; ita AB, ad BD: *d* ac proinde æquales erunt AC. & BD. *e* Vt igitur AC, ad CD, ita erit BD, ad CD. Sed vt AC, ad CD, ita eſt BC, ad AC, quod ex coroll. propoſ. 8. huius lib. AC, ſit media proportionalis inter BC, & CD. *f* Igitur erit quoque BC, ad AC, hoc eſt, ad BD, vt AC, hoc eſt, vt BD, ad CD: ac propterea BC, in D, ſecta erit extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.

c 11. quinti.
d 9. quinti.
e 7. quinti.
f 11. quinti.

Itaque ſi ſuper datam rectam BC, conſtruendum ſit triangulum rectangulum, cuius tria latera continue proportionalia ſint, ſecanda erit data recta BC, extrema ac media ratione in D. Deſcripto deinde ſemicirculo BAC, circa eandem datã BC, erigenda erit ad BC, perpendicularis DA, iungendæque rectæ BA, CA. Triangulum enim ABC, rectangulum erit, *g*, cum angulus BAC, in ſemicirculo rectus ſit; ac proinde cum perpendicularis AD, ſecet baſim extrema ac media ratione: tria latera continue proportionalia erunt, vt proxime demonſtratum eſt.

g 31. tertij.

XIV.

A dato puncto in latere trianguli lineam rectam duce-

re, quæ

re, quæ triangulum diuidat in duo ſegmenta ſecundum proportionem datam.

Sit triangulum ABC, oporteatque à dato puncto D, in eius latere BC, lineam rectam ducere, quæ triangulum ſecet in duo ſegmenta ſecundum proportionem datam E, ad F.

Diuidatur BC, in G, ſecundum proportionem E, ad F, cadatque primo punctum G, in datum punctum D, vt in prima figura, ducaturque recta DA. *a* Quoniam igitur eſt vt BD, ad DC, ita triangulum BDA, ad triangulum CDA, ſecabit recta *DA*, triangulum datum ſecundum proportionem datam BG, ad GC, hoc eſt, E. ad F. Quod erat faciendum. a 1. *ſexti.*

Cadat deinde punctum G, inter C, & D, vt in ſecunda figura. Ducatur ergo recta DA, cui per *G*, parallela agatur GH, coniungaturque recta DH. Dico rectam DH, ſecare triangulum datum ſecundũ proportionem datam, hoc eſt, eſſe trapezium *BD*, HA, ad triangulum CDH, vt E, ad F, ſeu vt BG, ad GC. Ducta enim recta GA, *b* erunt triangula HGA, GHD, æqualia, cum ſint ſuper eandem baſin GH, & inter eaſdem parallelas, GH. DA. Additoigitur communi triangulo CGH, fient æqualia triangula CGA, CDH: *c* Ac proinde triangulum ABC, eandem habebit proportionem ad *CGA*, & ad CDH. *d* Diuidendo igitur, erit vt triangulum *BGA*, ad triangulum CGA, ita trapezium *BDHA*, ad triangulum CDH. *e* Eſt autem BGA, ad CGA: vt BG, ad GC. Igitur erit & trapezium *BDHA*, ad triangulum CDH, vt BG, ad GE, hoc eſt, vt E, ad F. Quod eſt propoſitum. b 37. *primi.* c 7. *quinti.* d 17. *quinti.* e 1. *ſexti.*

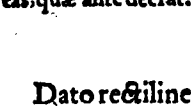
Cadat tertio punctum G, inter B, & D, ducaturque recta DA, cui rurſus per G, agatur parallela GH. Dico igitur rurſus, rectam ductam DH, ſecare triangulum ABC, ſecundum proportionem datam E, ad F, hoc eſt, eſſe triangulum cum *BDH*, ad trapezium *CDHA*, vt E, ad F. Ducta enim recta GA, *f* erunt, vt prius, triangula HGA, GHD, æqualia; additoque communi BGH, æqualia fient BGA, BDH. *g* Quare erit ABC, ad BGA, vt ad BDH. *h* Diuidendo ergo erit vt CGA, ad BGA, ita trapezium CDHA, ad triangulum BDH, & conuertendo, vt *BGA*, ad CGA, ita *BDH*, ad trapezium CDHA. *i* Eſt autem BGA ad CGA, vt BG, ad GC. Igitur & BDH, ad trapezium CDHA, erit vt BG. ad GC, hoc eſt, vt E, ad F. Quod eſt propoſitum. f 37. *primi.* g 7. *quinti.* h 17. *quinti.* i 1. *ſexti.*

Hinc perſpicuum eſt, quonam modo imperata pars ex triangulo ſit auferenda per lineam rectam, quæ à quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineã à dato puncto ductam diuidatur triangulũ ſecundum proportionem multiplicẽ, cuius denominator

vnitate minor sit denominatore partis imperatæ, (vt secundum proportionem triplam, si quarta pars imperetur, &c.) factum erit, quod inquetur, vt manifestum est. Habebit enim tunc totum triangulum ad segmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator æqualis est denominatori partis propositæ, cum priori denominatori proportionis multiplicis assumptæ addatur vnitas, quæ ante deerat.

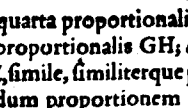
XV.

Dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere, maius, vel minus, secundum proportionem datam.



Sit rectilineum datum A, cui simile similiterque positum sit describendum maius, secundum proportionem datam B, ad C. Tribus rectis B, C, & DE, (sit autem DE, vnum latus rectilinei dati quodcunque) a inueniatur quarta proportionalis F. Deinde duæ DE, & F, b inueniatur media proportionalis GH; c super quam ipsi A, describatur rectilineum I, simile, similiterque positum. Dico I, maius esse quam A, secundum proportionem datam B, ad C. Cum enim proportionales sint tres rectæ DE, GH, & F, erit per coroll. propos. 19. vel 20. libri huius, vt DE, prima ad F, tertiam, hoc est, per constructionem, vt B, ad C, ita rectilineum A, super primam ad rectilineum I, super secundam, illi simile similiterque positum. Quod erat faciendum.

a 12. sexti.
b 13. sexti.
c 18. sexti.

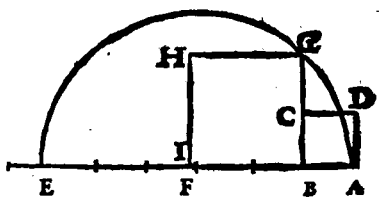


Non secus dato rectilineo A, minus rectilineum I, describemus, illi simile similiterque positum, secundum proportionem datam B, ad C, Veluti in hac figura factum esse cernis. Eadem enim prorsus est constructio, atque demonstratio.

Facile igitur ex his quadratum quodcunque vel aliud rectilineum duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus, &c. Atque aliud constituemus, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, vel quinta, &c. seruata nihilominus semper eadem rectilineorum similitudine, quemadmodum quadratorum eadem remanet similitudo. Si namque proportio B, ad C, sumatur vt 1. ad 2. vel 1. ad 3. vel 1. ad 4. &c. Item vt 2. ad 1. vel 3. ad 1. vel 4. ad 1. &c. reliqua vero perficiantur, vt prius; habebitur rectilineum simile similiterque descriptum, quod propositi rectilinei duplum existet, vel triplum, vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertia pars, vel quarta, &c. eius, quod proponitur.

Non videtur autem omittenda praxis Alberti Dureri, qua ipse facile duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, seu parallelogram-

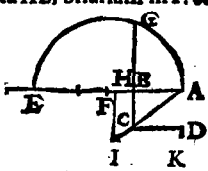
logrammum quodcunque oblatum. Ex hac enim conſtruemus quoq; rectilineum ſimile, ſimiliterque deſcriptum cuicunque rectilineo dato; maius, aut minus, ſecundum datam proportionem quamcunque. Tametſi autem Albertus huius praxis nullam affert rationem, ſed eam ſimiliter proponit; non multum tamen eius demonſtratio à præcedenti differt, vt mox oſtendemus.



Sit igitur quadratum ABCD, quintuplicandũ. Producto latere AB, ad partes B, quantumlibet, ſumantur quinque partes ipſi AB, æquales, à puncto B, incipiendo, vſque ad E, vt ſit BE, quintupla ipſius AB. Diuiſa deinde tota AE, bifariam in F, deſcribatur ex F, ad interuallum FA, vel FE, ſemicirculus AGE, producaturque latus BC, ad circumferentiam vſque in G. Dico quadratum BGHI, ex BG, deſcriptum, quintuplum eſſe quadrati ABCD. Erit enim per coroll. propoſ. 13. huius lib. BG, media proportionalis inter EB, BA. Igitur erit vt EB, prima ad BA, tertiam, ita BH, quadratum ſecundæ, ad AC, quadratum tertiæ, ex coroll. propoſ. 20. huius lib. Eſt autem EB, per conſtructionem, ipſius AB, quintupla. Igitur & quadratum, BH, quadrati AC, quintuplum erit. Quod eſt propoſitum.

Quod ſi recta BE, ſumatur ſextupla lateris AB, erit & quadratum rectæ BG, quadrati ABCD, ſextuplum: Si autem BE, fuerit tertia pars ipſius AC, erit & quadratum BH, tertia pars quadrati AC. Denique in quacunque proportione ſumatur BE, ad AB, eandem habebit quadratum BH, ad quadratum AC.

Sit rurſus rectangulum ABCD, cui inueniendum ſit ſimile ſimiliterque poſitum, quod duplum ſit ipſius. Ex latere AB, producta ſumatur BE, dupla ipſius AB. Diuiſa deinde tota AE, bifariam in F: & ex F, deſcripto ſemicirculo, vt prius, & producta CB, ad G; erit BG, vnum latus rectanguli quæſiti. Quare ſi abſcindatur AH, æqualis ipſi BG, & per H, agatur ipſi BC, parallela HI, occurrens diametro AC, protractæ in I, perficiaturque parallelogrammum HK; erit HK, ipſi BD, ſimile ſimiliterque poſitum; quod etiam aio duplum eſſe ipſius BD. Cum enim proportionales ſint tres rectæ EB, BG, BA, ex corollario propoſ. 13. huius lib. Erit vt prius, ſicut EB, prima ad BA, tertiam; ita rectangulum HK, ſupra AH, ſecundam (ſumpta enim fuit AH, ipſi BG, ſecundæ æqualis) ad rectangulum BD, ſupra tertiam AB quod eſt ſimile ſimiliterque deſcriptum. Quod eſt propoſitum.



224. ſexti.

Eodem

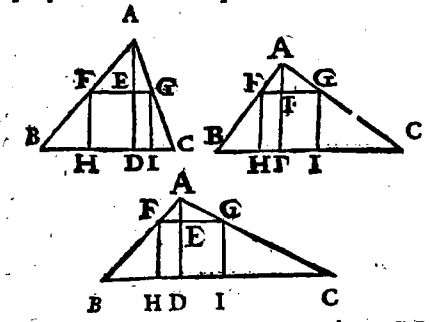
Eodem modo, si supra AB, constitutum fuerit quodcunque rectilineum, erit quod ex BG, illi simile, similiterque positum describitur, ipsius duplum. Atque in hunc modum semper eam proportionem habebit rectilineum ex BG, ad rectilineum simile ex AB, quam habere ponetur recta EB, ad rectam BA, ex constructione.

Perspicuum autem est, hanc praxim vna cum eius demonstratione à nostra antea tradita non differre, nisi quod hæc simul tradit inuentionem lineæ mediæ proportionalis. Hanc enim ob causam Albertus coniungit in rectum, & continuum lineas EB, BA, quæ proportionem habent datam, vt statim, vna operatione, medium proportionalem obtineat, &c.

XVI.

In dato triangulo quocunq; quadratum describere.

Sit datum triangulum ABC, acutangulum. Ex angulo quocunque A, ad BC, perpendicularis demittatur AD, quæ intra triangulum cadet, ex scholio propos. 13. lib. 2. Hæc autem in E, ita secetur, per ea, quæ in scholio propos. 10. huius libri docuimus, vt eadem sit proportio AE, ad ED, quæ AD, ad BC. Deinde per E, agatur FG, ipsi BC, parallela. Postremo ex F, & G, ipsi DE, parallelæ ducantur FH, GI. Dico FGIH, rectilineum triangulo ABC, inscriptum esse quadratum. Cum enim FG, ipsi BC, sit parallela; erit vt BD, ad DC, ita FE, ad FG, ex scholio propos. 4. huius lib. & componendo, vt BC, ad DC, ita FG, ad EG. a Sed vt DC, ad AD, ita est FG, ad AE, quod per coroll. prop. 4. huius lib. triangula ADC, AEG, sint similia. b Igitur erit ex æquo, vt BC, ad AD: ita FG, ad AE. Quia vero per constructionem est vt AD, ad BC, ita AE, ad ED, c erit rursus ex æquo, vt BC, ad BC, ita FG, ad ED: Est autem BC, ipsi BC, æqualis, imo eadem. Æqualis igitur est & FG, ipsi ED. d Quare cum FG, ipsi HI: & ED, ipsis EH, GI, æqualis existat: Erunt quatuor latera FG, GI, IH, HF, æqualia inter se. e Et quia anguli EDH, FHD, duobus rectis æquales sunt: Est autem EDH, per constructionem, rectus; erit & FHD, rectus. Quocirca per ea, quæ ad defin. 1, lib. 2. demonstrauimus, & re-



a 4. *sexti.*
b 22. *quinti.*
c 22. *quinti.*
d 34. *primi.*
e 29. *primi.*

& reliqui anguli HFG, FGI, GIH, recti sunt in parallelogrammo FGIH; Ac propterea FI, quadratum est. Quod est propositum.

Non secus idem problema absoluemus, si datum triangulum fuerit rectangulum, vel obtusangulum, dummodo ex angulo recto vel obtuso perpendicularem demittamus, vt in posterioribus duobus triangulis apparet. Ita enim semper cadet perpendicularis AD, intra triangulum, ex scholio propos. 13. lib. 2.

Quod si in triangulo rectangulo quadratum describere libeat, ita vt duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulum rectum nitantur; diuidemus perpendicularem AB, in D, ita vt eadem sit proportio AD, ad DB, quæ AB, ad BC, & per D, quidem ipsi BC, parallelam ducemus DE; per E, vero ipsi AB, aliam parallelam EF. a Quoniam igitur est, vt BC, ad AB, ita DE, ad AD, quod triangula ABC, ADE, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. Est autem per constructionem, vt AB, ad BC, ita AD, ad DB, b erit ex æquo, vt BC, ad BC, ita DE, ad DB. Est autem BC, sibi ipsi æqualis, imo eadem. Æqualis igitur est & DE, ipsi DB. Quare vt prius, DEFB, quadratum est. Quod est propositum.

a 4. sexti.

b 22. quinti.

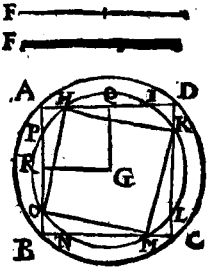
Verum hoc problemate Commandini multo ingeniosius est id, quod sequitur.

XVII.

Intra datum quadratum, aliud quadratum describere in data proportione maioris inæqualitatis. Oportet autem proportionem dupla non esse maiorem.

Sit quadratum ABCD, intra quod describendum sit quadratum, ad quod habeat quadratum ABCD, proportionem eandem maioris inæqualitatis, quam recta E, ad rectam F, quæcunque ea sit, dummodo maior non sit, quam dupla. Nam si latera quadrati secentur bifariam, punctaque diuisionum rectis iungantur lineis, inscriptum erit quadratum intra aliud, vt ad finem lib. 4. demonstrauimus idem cum eo centrum habens. Et quia circulus intra quadratum ABCD, descriptus est quadrato illi inscripto circumscriptus, vt in hac figura perspicuum est, erit quadratum ABCD, illius quadrati inscripti duplum, ex scholio propos. 9 lib. 4. Cum ergo minus quadratum intra quadratū ABCD. describi nequeat, quam illud, cuius circulus circumscriptus latera quadrati ABCD, tangit, vt patet: liquido constat quadratum ABCD, ad nullum quadratum inscriptum proportionem posse habere dupla maiorem. Sit igitur data proportio E, ad F, minor quam dupla; nimirum sesquialtera. Inueniatur ex

propos.



propoſ. 15. huius ſcholii quadratum, ad quod habeat datum quadratum ABCD, proportionem datam E, ad F. Eritque eius ſemidiameter maior, quam ſemidiameter quadrati, cuius circulus circumſcriptus latera quadrati ABCD, tangit, quod nimirum quadrati ABCD, ſubduplum eſt, vt diximus, minor vero ſemidiametro quadrati ABCD. Igitur ſi ex centro G, quadrati dati deſcribatur circulus æqualis ei, qui circa inuentum quadratum deſcribitur, ſecabit is latera quadrati ABCD, in punctis H, I, K, L, M, N, O, P. Iungantur rectæ HK, KM, MO, OH, relictis quatuor punctis I, L, N, P, in medio. Dico HKMO, eſſe quadratum in circulo HIKLMNOP, deſcriptum, atque adeo æquale ei, quod inuentum eſt, ita vt quadratum ABCD, ad quadratum HKMO, habeat datam proportionem, E, ad F. Deſcripto enim circulo circa datum quadratum ABCD, ex centro G, ductiſque ex G, ad latera AD, AB, perpendicularibus GQ, GR, a ſectæ erunt tam rectæ AD, AB, quam rectæ HI, OP, bifariam in Q, R. Et quia AD, AB, æquales ſunt. b æqualiter diſtabunt centro G, propterea que & HI, OP, æqualiter ab eodem centro diſtabunt. c Quare æquales erunt HI, OP, ideoque & earum ſemiſſes QH, QI, RO, RP, inter ſe erunt æquales. Sunt autem & ſemiſſes QD, RA, RB, æqualium laterum æquales. Igitur ſi illæ ab his demantur, reliquæ erunt æquales HA, ID, PA, OB. Eademque ratione ſi ducantur aliæ perpendiculares ad latera BC, CD, oſtendentur æquales NB, MC, LC, KD, & inter ſe, & illis quatuor HA, ID, PA, OB. Item quia æquales ſunt HI, OP, ſi addantur æquales ID, PA, ſient totæ æquales HD, AO. Atque eadem de cauſa æquales erunt BM, KC, & inter ſe, & illis duabus HD, AO. Itaque quia duo latera AO, AH, duobus lateribus DH, DK, æqualia ſunt, angulosque continent æquales, nimirum rectos; d erunt & baſes HK, HO, æquales. Eodemque modo demonſtrabuntur KM, MO, æquales & inter ſe, & duabus HK, HO. Æquilatera ergo eſt figura HK, MO. Dico & rectangulum eſſe. Cum enim latera HK, KM, MO, OH, æqualia ſint, e erunt & quatuor arcus, quos ſubtendunt, æquales, ac proinde Quadrantes erunt. Semicirculi ergo ſunt OHK, HKM, KMO, MOH, f ac proinde quatuor anguli H. KM O in illis ſemicirculis recti erunt. Igitur HKMO, quadratum eſt, atque adeo inuento quadrato æquale, cum idem circulus vtrumq; circumſcribat. Circulus enim HKMO, deſcriptus eſt ad interuallum ſemidiametri circuli inuento quadrato circumſcripti. Quod eſt propoſitum.

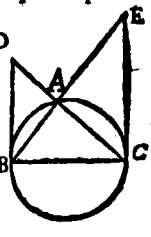
a 3. tertij.
b 14. tertij.
c 14. tertij.
d 4. pri.
e 28. tertij.
f 31. tertij.

Si ad

XVIII.

Si ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eisdem extremis per vnum idemque punctum circumferentiæ duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus; erit rectangulum comprehensum sub vtralibet secantium, & eius segmento interiore; quadrato diametri æquale.

Hæc propositio est Cardani lib. 16. de Subtilitate cap. 1. sicut & quæ sequitur. Vtramque autem demonstrauit Io. Baptista Benedictus. Sit ergo circulus ABC, cuius diameter BC, ad quam in B, C, excitentur duæ perpendiculares BD, CE, ac per assumptum quoduis punctum A, in circumferentia exeisdem punctis B, C, eductæ rectæ BA, CA, secent perpendiculares in E, D. Dico tam rectangulum sub EB, BA, quam sub DC. CA, quadrato diametri BC, æquale esse. Quoniam enim in triangulo rectangulo BCE, ex angulo recto C, demissa est CA, ad basin BE, perpendicularis: a quod angulus BAC, in semicirculo rectus sit: erit ex coroll. propos. 8. huius lib. BC, media proportionalis inter EB, BA. Quare b rectangulum sub extremis EB, BA, æquale erit quadrato mediæ BC. Eademque ratione eidem quadrato æquale erit rectangulum sub DC, CA: ac propterea quod BC, media quoq; proportionalis est inter DC, CA, ex eodem coroll. propos. 8. huius lib. Constat ergo id, quod proponitur.



a 8. tertij.

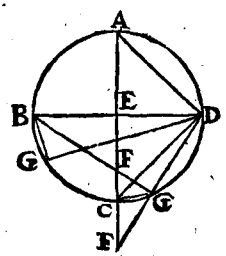
b 17. sexti.

XIX.

Si in circulo duæ diametri sese ad rectos angulos secent, & ab vnus extremo puncto recta ducatur vtcunque secans circumferentiã & alteram diametrum siue productam, siue non productam: erit rectangulum comprehensum sub duobus segmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum punctum prioris diametri, & secundam diametrum, alterum vero inter idem punctum extremum, & circumferentiam interijcitur, æquale quadrato intra circulum descripto.

In circulo ABCD, cuius centrum E, secent se ad angulos rectos diametri AC, BD, ducaturque ex puncto D, recta vtcunque DF,

secans diametrum AC, in F, & circumferentiam in G. Dico rectangulum sub FD, DG, quadrato intra circulum descripto esse æquale. Ductis enim rectis DC, CG. erunt triangula DCF, DCG, æquiangula inter se. Nam angulus CDF, communis est, & angulus DCF, angulo DGC, æqualis: *a* ac proinde & reliquus DFC, reliquo DCG, æqualis. Quod autem anguli DCF, DGC, æquales sint, ita ostendemus. Si punctum quidem F, est intrà circulum: *b* erunt anguli DCF, DGC, insistentes quadrantibus æqualibus AD, DC, æquales. Si vero punctum F, est extra circulum, ducta recta AD, *c* erunt Anguli DAC, DCA, insistētes quadrātibus æquales: *d* Sed tam DAC, DGC, quam DCA, DCF, æquales sunt duobus rectis. Igitur ablatis æqualibus DAC, DCA, reliqui DGC, DCF, æquales quoque erunt. Quamobrem, cum triangula DCF, DCG, æquiangula sint: *f* erit vt DF, ad DC: ita DC, ad DG: hoc est, tres lineæ DF, DC, DG, continue proportionales erunt. *g* Igitur rectangulum sub extrémis DF, DG, æquale est quadrato mediæ DC, hoc est, quadrato intra circulum descripto, cum DC, latus sit quadrati circulo inscripti, vt constat ex propos. 6. lib. 4. Quod est propositum.



a 32. primi.

b 27. tertij.

c 27. tertij.

d 22. ter.

e 13. pri.

f 4. sexti.

g 17. sexti.

Aliter. Ducta recta *BG*, *h* erit angulus BGD, in semicirculo rectus: atque idcirco duo triangula BGD, DEF, cum habeant angulos rectos BGD, DEF, & angulum BDG, vel EDF, communem, *i* æquiangula erunt. *k* Igitur erit, vt DF, ad DE, ita DB, ad DG. *l* Rectangulum ergo sub DF, DG, æquale erit rectangulo sub DB, DE. *m* Sed rectangulo sub DB, DE, æquale est quadratum rectæ AD, hoc est, quadratum circulo inscriptum; propterea quod ex coroll. propos. 8. huius lib. AD, media proportionalis est inter DB, DE, vt patet, si ducatur recta AB. *n* Fiet enim triangulum rectangulum BAD, & ex angulo recto perpendicularis demissa erit AE. Igitur & rectangulum sub DF, DG, eidem quadrato rectæ AD, æquale erit. Quod est propositum.

h 11. ter.

i 32. pri.

k 4. sexti.

l 16 sexti.

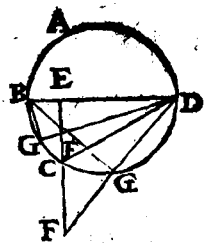
m 17. sext.

n 31. ter.

Vniuersalius hoc ita proponetur.

Si in circulo à quouis puncto diametri ad diametrum perpendicularis excitetur, ad quam ex alterutro terminorum diametri duæ rectæ ducantur, vna ad eius interfectionem in circumferentia, altera vero vt libet, secans circumferentiam in alio puncto: Erit triangulum sub segmentis huius posterioris linea, quorum vnum sit inter præfictum terminum, & perpendicularem, alterum vero inter eundem terminum, & circumferētiam, æquale quadrato prioris rectæ inter eundem terminum, & circumferentiam, seu perpendicularem intercepta.

In



In circulo enim ABCD, ad diametrũ BD, ſit perpendicularis EF, ſecans circumferentiam in C, iungãturque rectæ DC, DF, quarum poſterior perpendicularem EF, ſecet in F, & circumferentiam in G. Dico rectangulum ſub DF, DG, æquale eſſe quadrato DC. Iuncta enim recta BG, erunt triangula BGD, FDE, æquiangula, propter angulos rectos G, E, & communem angulum FDE, a Igitur erit, vt FD, ad DE, ita BD, ad DG. b Quare rectangulum ſub FD, DG, rectangulo ſub DE, BD, æquale erit: c Sed hoc æquale eſt quadrato DC, quod ex coroll. propoſ. 8. huius DC, ſit media proportionalis inter BD, DE: quia ducta recta BC, d angulus BCD, fortet rectus in ſemicirculo. Igitur & rectangulum ſub FD, DG, quadrato DC, æquale erit. Quod eſt propoſitum.

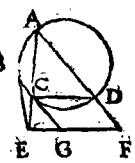
a 4. ſexti.
b 16. ſexti.
c 17. ſexti.
d 31. tert.

COROLLARIVM.

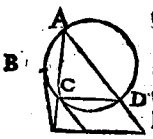
Hinc fit, priorem lineam DC, eſſe mediam proportionalem inter poſterioris ſegmenta FD, DG, quorũ vnum eſt inter terminum D, & perpendicularem, alterum vero inter eundem terminum, & circumferentiam.

XX.

Dato circulo, & duobus punctis ſiue extra circulum ſiue intra, dummodo neutrum ſit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam ſecant, parallela ſit rectæ data duo puncta connectenti.



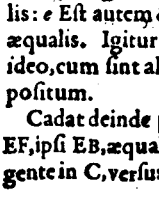
Hoc problema non minus acutum quam curioſum in tres proportiones Pappus diſtribuit: quod nos in vnam redigentes multo clarius demonſtrabimus. Sit ergo circulus ABCD, & primum duo data puncta E, F, extra circulum, quæ per rectam EF, coniungantur. Si igitur ex E, F, ducendæ ſint rectæ ad aliquod punctum concauæ circumferentiæ, &c. ita agemus. Ex E, ducatur recta EB, tangens circulum in B, & duabus EF, EB, tertia proportionalis inueniatur, cui æqualis EG, cadatque primum G, punctum inter E, & F, quod fit, quando EF, maior eſt, quam EB. Ducta igitur GC, recta circulum



tangente in C, versus priorem tangentem EB, ducatur ex E, per C, recta secans concauam peripheriam in A, iungaturque recta AF, secans circumferentiam in D. Dico ductam rectam CD, ipsi EF, parallelam esse. Quoniam enim tres rectæ EF, EB, EG, continue proportionales sunt, *a* erit rectangulum sub EF, EG, quadrato ex EB, æquale: *b* Est autem eidem quadrato ex EB, æquale rectangulum sub EA, EC, igitur rectangulum sub EA, EC, æquale erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, G, F, circulus describi potest. *c* Duo ergo anguli CAF, CGF, oppositi in quadrilatero ACGF, intra eum circulum descripto æquales sunt duobus rectis, ideoque duobus angulis ad G. *d* qui duobus etiam rectis æquales sunt, æquales. Dempto igitur communi CGF, erit reliquus CGE, reliquo A, æqualis: *e* Est autem & angulus DCG, angulo A, in alterno segmento æqualis. Igitur anguli DCG, CGF, inter se æquales erunt: atque ideo, cum sint alterni, *f*, rectæ CD, EF, parallelæ erunt. Quod est propositum.

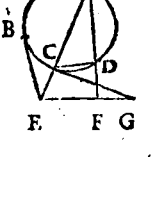
a 17. *sexti.*
b 36. *ter.*
c 32. *ter.*
d 13. *pri.*
e 32. *ter.*
f 27. *pri.*

Cadat deinde punctum G, in punctum F, quod accidit, quando EF, ipsi EB, æqualis est. Ducta igitur rursus recta GC, circulum tangente in C, versus priorem tangentem EB, ducatur ex E, per C, recta concauam peripheriam secans in A, iungaturque recta AF, secans circumferentiam in D. Dico rursus ductam rectam CD, ipsi EF, esse parallelam. Quoniam enim æquales sunt EB, EF: estque rectangulum sub AE, EC, quadrato ex EB, æquale: erit quoque idem rectangulum quadrato sub EF. Quare *h* si circa triangulum ACF, circulus describatur, cum eum secet recta EA, recta autem EF, eidem applicetur, *i* tanget recta EF, eum circulum. *k* Angulus ergo EFC, angulo A, in alterno segmento illius circuli æqualis erit: *l* Est autem & angulus FCD, eidem angulo A, in alterno segmento circuli ABCD, æqualis. Igitur æquales inter se erunt anguli EFC, FCD: quicum sint alterni, *m* erunt rectæ CD, EF, parallelæ. Quod est propositum.



g 36. *ter.*
h 5. *quarti.*
i 37. *ter.*
k 32. *tert.*
l 32. *ter.*
m 27. *primi.*

Cadat tertio punctum G, vltra F, quod contingit, quando EF, minor est quam EB. Facta igitur eadem constructione, quoniam tres rectæ EF, EB, EG, continue proportionales sunt, *n* erit rectangulum sub EF, EG, quadrato ex EB, æquale: *o* Est autem eidem quadrato ex EB, æquale rectangulum sub AE, EC. Igitur rectangulum sub EF, EG, hoc est, sub EG, EF, rectangulo sub EA, EC, æquale erit:



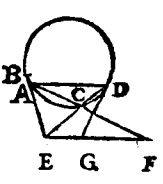
n 17. *sexti.*
o 36. *ter.*

erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, F, G, circulus describi poterit. *a* Duo ergo anguli A, G, in eodem segmento CAGF, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta CF, inter se æquales erunt: *b* Est autem angulus GCD, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur idem angulus GCD, angulo G, æqualis erit: ac proinde, cum duo hi anguli sint alterni, *c* parallelæ erunt CD, EF. Quod est propositum.

a 21. tert.
b 32. ter.
c 27. pri.

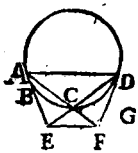
Quod si à principio ex puncto F, ducta fuisset linea circulum tangens, & reliqua fierent, vt prius, inueniretur idem omnium punctum A: quia nullum aliud punctum absoluere potest problema. Concipiatur enim mente quodcunque aliud punctum H, prope A, inter A, & D, (*si illud punctum H, atramento signaueris, facilior erit demonstratio, quod etiam de aliis punctis H, mente concipiendis intelligatur, nec non de puncto I, in vltima figura*) Igitur recta FH, secabit circulum supra D, at vero recta EH, eundem infra C, secabit, ac propterea recta coniungens puncta sectionum rectam CD, secabit. Producta ergo secabit quoque illius parallelam EF. Non igitur ipsi EF, parallela erit. Contrarium accidet, si punctum H, sumatur inter A, & C. Nam recta FH, cadet infra D, & EH, supra C, &c.

Si vero ex eisdem punctis datis E, E, ducendæ sint duæ rectæ ad aliquod punctum conuexæ circumferentiæ, quæ productæ secent concauam peripheriam in duobus punctis, ita vt recta per ea transiens, sit parallela rectæ puncta E, F, connectenti, hoc modo procedemus. Ducta recta EB, circulum tangente in B, inueniatur duabus rectis EF, FB, tertia proportionalis FG, cadatque primum G, punctum inter E, F. Ducta igitur ex G, recta GD, tangente circulum in D, non tamen versus priorem tangentem EB, ducatur ED, secans circumferentiam in C, puncto, per quod recta ejiciatur ex F, secans circumferentiam in A. Dico rectam AD, ductam esse rectæ EF, parallelam: Quoniã enim tres rectæ EF, EB, EG, continue sunt proportionales, *d* erit rectangulum sub EF, EG, quadrato ex EB, æquale: *e* Est autem & rectangulum sub DE, EC, eidem quadrato ex EB, æquale. Igitur æqualia inter se erunt rectangula sub EF, FG, & sub ED, EC: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta C, D, F, G, circulus describi potest. *f* Duo ergo anguli C, D, G, & F, in eodem segmento CD, FG, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta CG, inter se erunt æquales *g* Est autem angulus CDG, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus F, angulo A, alterno æqualis erit, *h* ideoque parallelæ erunt AD, EF. Quod est propositum.



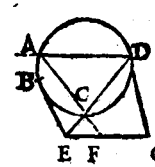
d 17. sexti.
e 36. ter.
f 21. ter.
g 32. ter.
h 27. pri.

Cadat deinde punctum G, in F. Ducta igitur rursus recta GD, tangente circulum in D, non tamen versus priorem tangentem EB, ducatur recta ED, secans circumferentiam in C, puncto, per quod recta ducta ex F, secet circumferentiam in A. Dico ductam rectam AD, rectæ EF, parallelam esse. Cum enim æquales sint EB, EF, (quod sit EF, ad EB, vt EB, ad EF,) erunt earum quadrata æqualia: Est autem rectangulum sub ED, EC, quadrato ex EB, æquale. Igitur & quadrato ex EF. Quia ergo, *a* si circa triangulũ CDF, circulus describatur, recta ED, eum secat, & EF, applicata est, *b* tanget EF, eum circulum. *c* Angulus ergo EFC, angulo FDE, in alterno segmento eius circuli æqualis erit: *d* Est autem angulus FDE, angulo A, in alterno segmento circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus EFC, eidem angulo A, alterno æqualis erit. *e* Quare parallelæ erunt AD, EF. Quod est propositum.



a 35. quarti.
b 37. ter.
c 32. ter.
d 32. ter.
e 27. pri.

Cadat tertio punctum G, vltra F. Facta ergo eadem constructione, cum tres rectæ EF. EB. EG, sint continue proportionales, *f* erit rectangulum sub EF. EG. siue sub EG. EF. æquale quadrato ex EB: *g* Est autem eidem quadrato æquale rectangulum sub ED EC. Igitur rectangulum sub EG. EF. rectangulo sub ED. EC. æquale erit, propterea que ex scholio propos. 36. lib. 3. circa quatuor puncta C. D. G. F. circulus potest describi. *h* Duo ergo anguli EDG. CFG. oppositi in quadrilatero CDGF. intra eum circulum descripto æquales erunt duobus rectis, ac proinde æquales duobus angulis ad F. *i* qui etiam duobus sunt rectis æquales. Dempto ergo communi CFG. reliquus CDG. reliquo CFE. æqualis erit: *k* Est autem angulus GDC. angulo A. in alterno segmento dati circuli ABCD. æqualis. Igitur & angulus CFE. eidem angulo CAD. alterno æqualis erit: *l* atque idcirco parallelæ erunt AD. EF. Quod est propositum.

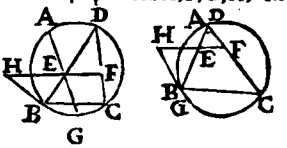


f 17. sexti.
g 36. ter.
h 22. ter.
i 13. pri.
k 32. ter.
l 27. pri.

Quod si à principio ex F. duceretur linea circulum tangens, & alia fierent, vt prius, inueniretur idem omnino punctum C. eo quod nullum aliud possit problema conficere. Nam sit aliud punctum H. quodcunque iuxta C. mente conceptum inter A. & C. Cadet ergo recta FH. infra A. & recta EH. supra D. Recta igitur connectens puncta sectionum secabit rectam AD; ac proinde, vt supra dictum est ipsi EF. parallela esse nõ potest. Si punctum H. sumptum foret inter D. & C. caderet FH. recta supra A. & recta EH, infra D, &c.

Sed sint iam data puncta E, F, intra circulum ABCD. Ducta re-

cta recta AG, per E, vtcunque, inueniatur tribus rectis EF, EA, EG, quarta proportionalis, cui æqualis sit EH, (cadetque necessario punctum H, extra circulum. a Quoniam enim rectangulum sub AE, EG, secunda & tertia, æquale est rectangulo sub EF, FH, prima & quarta: describi poterit circulus circa 4. puncta A, F, G, H, ex scholio propos. 35. lib. 3. secans circulum ABCD, in A, G. Cum ergo eius arcus per F, transiens sit intra hunc circulum, erit alter arcus per H, transiens, extra: b quando quidem circulus circulum in duobus tantum punctis secat, ac proinde circulus per A, F, G, descriptus post puncta AG, extra circulum cadet: ideoque punctum H, in eo circulo existens extra circulum cadet) ducaturque HB, circulum tangens in B. Ducta enim recta ex B, per E, secante circumferentiam in D, & ex D, per F, recta secante circumferentiam in C: dico ductam rectam BC, parallelam esse rectæ EF. Quia enim ita est EF, ad EA, vt EG, ad EH: c erit rectangulum sub EF, EH, æquale rectangulo sub EA, EG: d Est autem rectangulum sub EA, EG, æquale rectangulo sub ED, EB. Igitur & rectangulum sub EF, EH, eidem rectangulo sub ED, EB, æquale erit: ac propterea ex scholio propos. 35. lib. 3. circa quatuor puncta B, H, D, E, circulus poterit describi. e Quare duo anguli HBD, & DFH, in eodem segmento DFBH, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta DH, æquales erunt. f Est autem angulus HBD, angulo C, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus DFH, angulo eidem C, æqualis erit, externus interno. g Parallelæ ergo sunt rectæ BC, EF. Quod est propositum.



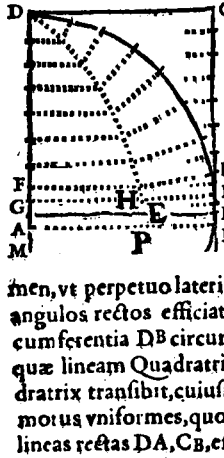
a 16. sexti.
b 10. tertij.
c 16. sexti.
d 35.
e 21. tertij.
f 14. tertij.
g 23. primi.

Quod si contingat, tangentem HB, cadere in punctum G, non erit ducenda alia linea BD, sed AG, quæ in principio ducta est, propositum concludet, vt perspicuum est in secunda figura.

Iam si solutio problematis inciperet à puncto F, non autem ab E, reperiretur idem omnino punctum D: quod nullo alio problema confici possit. Si enim sumatur quodcunque aliud punctum I, prope D, inter D, & C, cadet recta FI, infra C, & EI, supra B. Recta ergo connectens sectionum puncta rectam BC, secabit. Igitur vt supra dictum est, rectæ EF, parallela non erit. Si punctum I, sumeretur inter D, & B, caderet recta FI, supra C, & EI, infra B, &c.

DE *MIRABILI NATVRA LINEÆ CVIVSDAM inflexa, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium inscribitur, & circulus quadratur, & plura alia scitu iucundissima perficiuntur.*

Forte superiori anno incidi in librum 4. Pappi Alexandrini, vbi lineam quandam inflexam explicat, quam, vt ait, Dinostratus, & Nicomedes, & nonnulli iuniores excogitarunt ad circuli quadraturam, ideoque ab officio τετραγωνίζουσα ab eisdem appellata est, à nobis eadem de causa Quadratrix dicetur. Quanquam autem prædicti authores huiusmodi lineam conentur describere per duos motus imaginarios duarum rectarum, qua in re principium petunt, vt propterea à Pappo reijciatur tanquam inutilis, & quæ describi non possit; nos tamen eam sine illis motibus Geometrice describemus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat, quèadmodum in descriptionibus conicarum sectionum fieri solet. Hanc inuentionem epilogi loco huic sexto libro adiungendam esse censuimus; propterea quod beneficio huius lineæ problemata Geometrica scitu periucunda, & quæ ad hunc vsque diem desiderata sunt, summa facilitate conficiuntur. Id quod ad finem lib. 4. facturos nos hoc loco recepimus, reijciendo tamen pleniorem Quadraturæ tractationem in nostram Geometriam Practicam. Sic ergo descriptio lineæ Quadratricis fiet.



In quadrato ABCD, describatur quadrans BD. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam semidiameter AD, æquabiliter ferri intelligatur circa centrum A, quam latus supremum CD, deorsum versus æquabiliter quoque, ita vt quo tempore punctum D, circumferentiam DB, vniformi semper motu percurrit, eodem recta DC, vniformi etiam motu N descendens ad latus AB, perueniat, sic tamen, vt perpetuo lateri AB, sit parallela, & cum lateribus AD, BC, angulos rectos efficiat; secabunt se continue semidiameter in circumferentia DB circumacta, & recta DC, deorsum lata, in punctis, quæ lineam Quadratricem describent, hoc est, per quæ linea Quadratrix transibit, cuiusmodi est linea inflexa DE. Sed quia duo isti motus vniformes, quorũ vnus per circumferẽtiã DB, fit, & alter per lineas rectas DA, CB, effici non possunt, nisi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, merito à Pappo descriptio hæc reprehenditur: quippe cum ignota adhuc sit ea proportio, & quæ per hanc

lineam

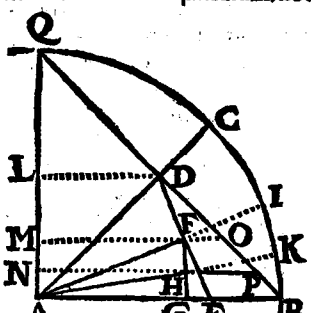
lineam inveſtiganda proponatur. Quare nos Geometrice eandem lineam Quadratricem deſcribemus hoc modo. Arcus B, D, in quotvis partes æquales dividatur, & latus utrumque AD, BC, in totidem æquales partes. Facillima diviſio erit, ſi & arcus DB, & utrumque latus AD, BC, ſecetur primum bifariam, deinde utraque ſemiſſis iterum bifariam, & ſingulæ rurſum partes iterum bifariam atq; ita deinceps, quantum libuerit. Quo autem plures extiterint diviſiones, eò accuratius Quadratrix linea deſcribetur. Nos ad confuſionem vitandam ſecuimus tam arcum DB, quàm duo latera AD, BC, in 8. partes æquales.

Deinde bina puncta laterum AD, BC, æqualiter diſtantia à latere DC, vel AB, conjungantur lineis rectis occultis, atq; ex centro A, aliæ rectæ occultæ ad ſingula diviſionum puncta Quadrantis DB, extendantur. Vbi enim hæ rectæ priores rectas interſecabunt, prima primam, ſecunda ſecundam, &c. per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda eſt, ita ut non ſit ſinuoſa, ſed æquabiliter ſemper progrediatur nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi; qualis eſt linea inflexa DE, ſecans ſemidiametrum AB, in E.

Sed quia punctum E, in latere AB, inveniri Geometrice non poteſt, cum ibi omnis ſectio rectarum ceſſet; ut illud ſine notabili errore, qui ſcilicet ſub ſenſum cadat, reperiamus, utemur hoc artificio. Infimam partem AF, lateris AD, ſi ſatis exigua non ſit ſecabimus bifariam continue, donec infima particula ſit perexigua: Eodemq; modo infimam partem BI, arcus DB, bifariam continue dividemus, donec tot fiant ſubdiviſiones, quot in parte AE, factæ ſunt, ut particula BK, talis pars ſit totius arcus DB, qualis pars eſt AG, totius lateris AD, Particulæ deinde AG, æquales abſcindemus BL, BN, AM, ducemusq; rectas occultas GL, MN. Ducta vero ex A, centro recta occulta AK, quæ ſecet GL, in H, puncto, quod accuratiſſime notetur, ſumemus ipſi GH, æqualem MP. Si enim Quadratricem, usq; ad H, deſcriptam continuabimus æquabili atq; uniformi extenſione usq; ad P, ſecabit Quadratrix linea latus AB, in E, puncto, quod quæritur. Nam propter parvam rectarum GH, AE, MP, inter ſe diſtantiam, efficitur, ut ferme ſint æquales, licet Geometrice loquendo, recta AE, ſemper major ſit aliquanto, quantumvis parum eæ rectæ inter ſe diſtent: ſed exceſſus ille circino deprehendi nō poteſt. Id quod etiam in circumferentia circuli contingit. Rectæ namque GL, AB, MN, ſi parum inter ſe diſtent, in circulo omnino æquales judicabuntur, quamvis vere AB, aliquanto major ſit. Itaq; ſi tres illæ rectæ GH, AE, MP, perexiguam habeant diſtantiam inter ſe, dubitari non poteſt, punctum E, in quo Quadratrix linea ſemidiametrum AB, ſecat, ab eo, quod vere in Quadratrice ibi exiſtit, non differre: dummodo puncta H, P, exquiſite, & ſumma adhibita diligentia, inventa ſint.

Rectam porrò AD, vocabimus latus Quadratricis, & rectam AE, ejusdem basin, ac deniq; pactum A, centrum.

Verum puncta Quadratricis prope basim certius inveniemus, sine intersectionibus linearum, hoc modo. Ducta chorda BQ. in quadrante secetur in D, bifariam, quod fiet, si ex A, ad C. punctũ medium quadrantis recta ducatur AC. Hæc enim ex scholio propos. 27, lib. 3. rectam BQ. secabit bifariam. Deinde rectæ AD, sumatur æqualis AE: junctaq; recta DE, secetur bifariam in F, quod etiam fiet, si ex A, ad I, punctum medium arcus BC, ducatur AI. Hæc enim chordam BC, (si duceretur) secaret bifariam, ex scholio propos. 27.



a 2. *sexti.* lib. 3. ac proinde & rectam DE, ex scholio propos. 4. hujus, *a* cum chorda BC, sit parallela: propterea quod latera AB, AC, proportionaliter secantur in D, E. quippe cum tam AB. AC, quam AE, AD, æquales sint. Rursus rectæ AF, sumatur æqualis AG; junctaque FG, secetur bifariam in H. quod etiam fiet per rectam AK, ductam ad K. punctum medium arcus BI. Atq; hoc modo si rectæ AH, æqualis sumatur, & reliqua fiant, ut prius, invenietur aliud punctum inter H. & G. Et sic deinceps quotuis alia puncta reperiemus viciniora ipsi AB, per lineas perpendiculares, non autem

b 3. *tertij.* per obliquas sectiones. *b* Est enim AD, ad DB, perpendicularis: & AF, ad DE, & AH, ad FG, &c. Omnia vero hæc puncta inventa D, F, H. &c. sunt in Quadratrice, quod ita ostendo. Du-

c 2. *sexti.* ctis DL. FM, HN, ipsi AB, parallelis secantibus BD, in O, P. *c* erit ut BD, ad DQ, ita AL, ad LQ: ideoq; & AQ. secta erit in L. bifariam. Sectus autem est & arcus BQ. in C, bifariam. Igitur, ut ostensum est, punctum D, est in Quadratrice. Rursus quia DE,

d 2. *sexti.* secta est bifariã in F. *d* erit quoque DB, secta bifariam in O: *e* ideo-

e 2. *sexti.* que erit ut EF. ad FD, ita BO, ad OD. Sed ut BO, ad OD: ita est AM, ad ML: Et ut EF, ad FD, ita arcus BI, ad IC: quod utrobiq; proportio sit æqualitatis: erit igitur quoque ut AM, ad ML, ita BI, ad IC. Ergo, ut ostendimus, secabunt sese AI, MO, in puncto Quadratricis. Eademque ratio est de aliis punctis hac arte inventis.

Esse autem hanc lineam inflexam DE. à nobis per puncta descriptam Geometrice eandem, quam Dinostratus & Nicomedes per duos illos motus imaginarios describi concipiebant, perspicuum est. Nam si semidiameter AD, circa centrum A, per arcum DB,

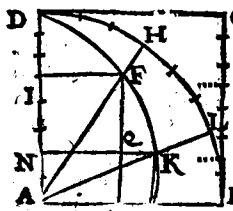
eodem

eodem tempore moveatur uniformi motu, quo latus DC, deorsum fertur motu quoque uniformi; fit, ut quando semidiameter AD, pertransivit quamcunque partem arcus DB, tunc latus DC, similem partem laterum DA, CB, percurrerit: Alias aut duo illi motus non essent uniformes, aut non eodem tempore ad latus AB, tam semidiameter AD, quam latus DC, perveniret. Cum ergo rectæ ex centro A, per partes arcus DB, emissæ, & lineæ parallelæ per partes laterum DA, CB. ductæ, abscindant semper ex arcu DB, & ex lateribus DA, CB, partes similes, ex constructione, liquido constat, puncta lineæ inflexæ DE, à nobis Geometrice inventa à punctis, quæ à duobus illis motibus reperirentur, non differre. Hæc igitur est descriptio lineæ Quadratricis, quæ Geometrica quodammodo appellari potest, quemadmodum & conicarum sectionum descriptiones, quæ per puncta etiam fiunt, ut ab Apollonio traditur, Geometricæ dicuntur, cum tamen magis errori sint obnoxiæ, quam nostra descriptio, propter inventionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quæ ad earum descriptiones sunt necessariæ, quibus in Quadratricis descriptione opus non est. Quare nisi quis totam sectionum conicarum doctrinam, quâ tanto ingenii acumine Apollonius Pergæus perfecutus est, ut propterea Magnus Geometra appellatus sit, reijcere velit tanquam inutilem, & non Geometricam, (quod neminem facturum existimo, cum sectiones conicas ad demonstrationes habuerint præstantissimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola usus est in duarũ linearũ mediarũ proportionalium inter quasuis duas rectas inventione: & Archimedes ipse multa præclare de eisdẽ sectionibus conicis demonstravit: ac denique ejusmodi sectiones insignem usum habent in re Gnomonica, ut ex nostra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur descriptionem hanc nostram Quadratricis lineæ, esse quodammodo Geometricam. Adde quod linea conchilis, qua Nicomedes duas medias lineas proportionales acutissime investigat, per puncta etiam describitur, ut in libro de mensurationibus dicemus. Sed jam lineæ Quadratricis usum nonnullis propositionibus exponamus.

I.

Si ex centro per quævis puncta lineæ Quadratricis rectæ ducantur usq; ad circumferentiam Quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basin demittantur perpendiculares; & aliæ rectæ, eidem basi paral-

parallelæ; erunt arcus Quadrantis inter ſemidiametros interiecti perpendicularibus, vel ſegmentis ſemidiametri inter parallelas poſitis, proportionales.



Ex centro A, per puncta F, K, in Quadratrice utcunque accepta ducantur rectæ occurrentes arcui Quadrantis in H, L. demittanturque ad baſin AE, perpendicularis F G, K M: & ducantur F I, K N, eidem AE. parallelæ. Dico, ut eſt totus arcus DB, ad arcum H B. ita eſſe totum latus D A, ad perpendicularem F G, vel ad ſegmentum I A, &c. Quia enim eadem pars eſt arcus DH. totius arcus DB, quæ pars eſt recta DI, totius lateris DA, ut ex deſcriptione lineæ Quadratricis manifeſtum eſt, ſive ea cogitetur deſcripta duobus illis motibus proportionalibus Dinoſtrati, & Nicomedis, ſive ea ratione, quam nos præſcripſimus, cum in ea ſemper arcus D H, tot particulas totius arcus DB, complectatur, quot partes totius rectæ DA, recta D I, continet, propterea quod rectæ A H, I F. ſe interſecant in puncto F. Quadratricis: Neque hæc ſimilitudo impeditur, etiamſi tam arcus D H. toti arcui DB, quam recta DI, toti lateri D A, ſit incommenſurabilis, cum perpetuo Quadratrix eadem uniformitate progrediatur per omnia ſua puncta. Si enim recta DI, non eſt talis pars ſive commenſurabilis, ſive incommenſurabilis, totius lateris DA, qualis pars eſt arcus DH, totius arcus D B, ſi cogitetur talis pars minor quam DI. vel major, ſecabit parallela ex puncto ejus extremo ducta rectã AH. vel ſupra F. vel infra, in puncto, per quod Quadratrix deſcribenda eſt, ac proinde ea non tranſibit per F. quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Quia, inquam, eadem pars eſt arcus DH, totius arcus DB. quæ pars eſt recta DI: totius lateris DA: erit quoque reliquus arcus HB, eadem pars totius arcus D B. quæ pars eſt reliqua recta IA. totius lateris DA. Quocirca erit, ut totus arcus DB, ad arcum HB. ita totum latus DA, ad rectam I A, hoc eſt, ad rectam F G, *a* quæ ipſi IA. æqualis eſt, ac proinde & tam dividendo erit, ut arcus DH, ad arcum HB. ita recta DI, ad rectam I A, vel F G, quam convertendo, ut arcus HB. ad arcum D B. ita recta F G, vel I A. ad rectam DA, &c.

a 34. pri.

Eadem ratione erit, ut arcus D B, ad arcum L B, ita recta D A. ad rectam N A, ſive ad K M. *b* quæ ipſi N A, æqualis eſt: Et ut arcus D L. ad arcum L B. ita recta D N. ad rectam N A. ſive K M: Et ut arcus L B. ad arcum D B. ita recta K M, vel N A, ad rectam D A. Quoniam igitur eſt, ut L B, ad D B, ita K M, ad D A: Et ut D B,

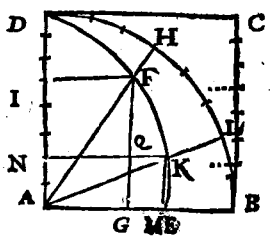
b 34. primi.

ut DB, ad HB, ita DA, ad F G. erit ex æquo, ut LB, ad HB, ita KM, ad FG: Et convertendo, ut HB, ad LB, ita FG, ad KM, hoc est, ita IA, ad NA: Et dividendo ut HL, ad LB, ita IN, ad NA, vel ita FQ. ad QG.

Rursus quia est ut DH, ad HB, ita DI, ad IA: Et ut HB, ad LB, ita IA, ad NA: erit ex æquo, ut DH. ad LB. ita DI. ad NA, sive ad KM. Semper ergo arcus inter semidiametros intercepti perpendicularibus, sive segmentis semidiametri inter parallelas positis proportionales sunt. Quod est propositum.

II.

Datum arcum circuli in datam proportionem dividere.



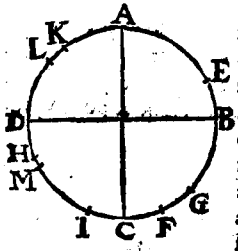
Sit primum arcus HB, in figura antecedente dividendus in proportionem datam rectæ O, ad rectā P. Ducta ex puncto H, ad centrum A, recta HA, secante Quadratricem in F, ducatur FI, basi AF, parallela. Deinde recta IA, ita secetur in N, ex scholio propos. 10. hujus lib. ut sit IN, ad NA, quemadmodum O, ad P. ductaque NK, basi AE, parallela secante Quadratricem in K, emittaturque ex centro A, per K, recta secans arcum HB. in L. Dico arcum HB, in L. sectum esse in proportionem datam O, ad P. Quoniam enim ut propos. 1. ostendimus, ut HL. ad LB. ita est, IN, ad NA: Est autem IN, ad NA. ex constructione, ut O, ad P: erit quoque HL, ad LB, ut O, ad P. *ex 11. quinti.*

Deinde totus quadrans DB, secandus sit in proportionem R. ad S. Divisa semidiametro DA, in I, ut sit DI, ad IA, sicuti R. ad S. ducatur IF, ipsi AF, parallela secans Quadratricem in F. Ducta igitur recta AFH. erit ex propos. 1. DH, ad HB, ut DI, ad IA, hoc est, ut R, ad S.

O — 3
P — 2
R — 3
S — 5
T — 8
V — 2

Tertio sit idem Quadrans DB, secandus in duos arcus, ita ut totus Quadrans ad unum eorum habeat proportionem datam T, ad V. Tribus rectis T, V, DA, inveniatur quarta proportionalis, cui æqualis abscindatur AN. Ducta autem NK, ipsi

ipsi AE. parallela secante Quadratricem in K, ducatur ex A, per K, recta AKL. Dico Quadrantem in L. sectum esse, ut proponitur. Est enim ex propos. 1. DB. ad LB, ut DA, ad NA. hoc est, ut T. ad V.



Quarto semicirculus ABC, dividendus sit in datam proportionem, videlicet in triplam. Secetur uterque Quadrans AB, BC, secundum datam proportionem triplam in E. F. & arcui AE, vel BF, æqualis abscindatur arcus EG. Si igitur ex arcu communi ABC, æqualia demantur, nimirum duo arcus AE. BF. simul, & arcus AG; reliqua æqualia fient, nimirum duo arcus EB, FC, simul, & arcus GC. Et quoniam est, ut AE, ad EB. ita BF. ad FC. *a* erunt AE. BF. simul ad EB. FC. simul, hoc est arcus AG. ad arcum GC. ut AE. ad EB: Habet autem AE, ad EB, datam proportionē triplam. Igitur & arcus AG, ad arcum GC, eandem proportionem datam habebit.

a 12. quinti.

Quinto in eandem proportionem secandus sit arcus ACD, tres Quadrantes continens. Divisis tribus Quadrantibus AB, BC, CD, in eam proportionem in E. F. H. sumatur arcus EG, ipsi BF, & arcus GI. ipsi CH. æqualis. Si igitur ex communi arcu ACD. demantur æqualia, nimirum tres arcus AE. BF. CH. simul, & arcus AI. reliqua fient æqualia, nimirum tres arcus EB. FC. HD. simul, & arcus ID. Et quia tres arcus AE. BF. CH. ad tres arcus EB, FC. HD, eandem habent proportionem; *b* habebunt omnes tres simul ad omnes tres simul, hoc est, arcus AI. ad arcum ID, eandem proportionem, quam unus arcus AE, ad unum arcum EB, videlicet datam.

b 12. quinti.

Postremo sit eodem modo dividendus arcus AGK. Divisis rursus tribus quadrantibus, & arcu DK. ut proponitur, in E. F. H: L. sumatur arcus EG, arcui BF. & arcus GI. arcui CH. & arcus LM. arcui DL. æqualis. Si igitur ex communi arcu AGK. æqualia auferantur, videlicet quatuor arcus AE. BF. CH. DL. simul, & arcus AB M. reliqua æqualia fient, quatuor scilicet arcus EB, FC, HD. LK, simul, & arcus MK. Et quia quatuor arcus AE. BF. CH. DL. ad quatuor arcus EB, FC. HD. LK. eandem proportionem habent: *c* habebunt omnes quatuor simul ad omnes quatuor simul, id est, arcus ABM. ad arcum MK. eandem proportionem, quam unus AE. ad unum EB, eam videlicet, quæ data est. Constat ergo id, quod proponitur.

c 12. quinti.

COROLLARIVM.

Ex his facile quemvis angulum rectilineum in duos angulos datam habentes proportionem partiemur, atque adeo & quemlibet arcum, & angulum in quotuis partes æquales.

Descri-

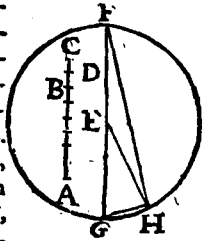
Descripto namque arcu ex angulo dato, eoque arcu diviso, ut jubetur, si ex angulo ad punctum divisionis recta ducatur, erit angulus divisus, ut arcui: *a* cum sit ut arcus ad arcum, ita angulus ad angulum in centro. *a* 33. *sexti.*

Quod si arcus, vel angulus secandus sit in quotuis æquales partes, dividendus erit in duas partes proportionem habentes multiplicem denominatam à numero, qui una unitate minor sit numero partium propositarum. Vt si arcus BC. vel angulus BAC, dividendus sit in quinque partes æquales, secandus erit arcus BC, in G. in proportionem quadruplam. Nam GC. arcus erit quinta pars arcus BC, cui si quatuor æquales abscindantur GF. FE. ED. DB. divisus erit arcus BC, in quinque partes æquales. Et si ex A. ducantur rectæ AG. AF. AE. AD. sectus quoque erit angulus BAC, in quinque angulos æquales. Quod est propositum.

III.

ISOSCELES triangulum constituere, cuius uterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam.

Sit data proportio rectæ AB, ad rectam EC. Divisa BC. in D. bifariam, & descripto ex centro E, circulo quantocunque FGH, ductaq; in eo diametro FG; secetur ita semicircumferentia FHG, in H, ut eadem sit proportio arcus FH, ad arcum HG. quæ rectæ AB, ad rectam BD, jungunturque rectæ HE. HG. Dico Isosceli trianguli EGH, utrumque angulorum æqualium ad basin GH, habere ad reliquum angulum GEH, proportionem datam AB. ad BC. Cum enim sit ut AB, ad BD. ita arcus FH, ad arcum HG: Et ut arcus FH, ad arcum HG: *b* ita angulus FGH. ad angulum GFH, *c* erit ut AB, ad BD, ita angulus FGH, ad angulum GFE. Vt autem BD. ad BC. ipsius BD. duplam, ita est angulus GFH. ad angulum GEH. *d* qui duplus est anguli GEH. Igitur ex æquo erit, ut AB, ad BC, ita angulus EGH, ad angulum GEH, Quod est propositum.



b 33. *sexti.* *c* 11. *quinti.* *d* 10. *tertii.*

COROLLARIVM.

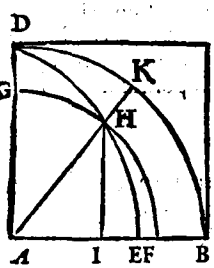
Itaque si construantur triangula Isoscelia, in quibus anguli æquales ad basin, ad reliquum proportiones habeant tum multiplices sesquialteras, tum multiplices ordine, describentur per priora omnes figuræ

guræ æquilaterę parium laterum, per posteriora vero figurę æquilaterę laterum imparium in circulo, ut ad finem lib. 4. ostendimus.

Idem efficiemus sine hujusmodi triangulis, si totam circumferentiam in tot æquales partes secemus, ut in coroll. proxime antecedente docuimus, quot latera angulosue figura inscribenda habere debet, &c.

IV.

Si Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit, erunt arcus Quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis continue proportionales.

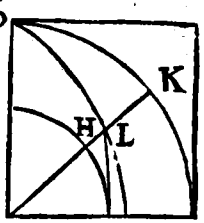


Sit Quadrans & Quadratrix ex eo descripta, ut supra. Dico arcum BD, semidiametrum DA, & Quadratricis basin AE, continuo esse proportionales, hoc est, esse BD, ad DA, ut DA, ad AE. Si minus, sit ut BD, ad DA, ita DA, ad AF, majorem ipsa AE, minoremve, sitque primum AF, major quàm AE. Descripto ex centro A, quadrante FG, per F. secante Quadratricem in H, ducatur per H semidiameter AHK. demittaturque perpendicularis HI. Quoniam igitur ponitur arcus BD, ad rectam DA ut DA. hoc est, ut AB, ad AF. estque ut AB. semidiameter ad semidiametrum AF. ita arcus BD. ad arcum FG; (Cum enim sit ex Pappi demonstrationibus, ut & nos in libro de mensurationibus ostendemus, diameter ad diametrum, ut circumferentia circuli ad circumferentiā circuli; a erit quoque semidiameter AB, ad semidiametrum AF. ut eadem circumferentia ad eandem circumferentiam; b ac proinde etiam ut quarta pars circumferentiæ ad quartam partem circumferentiæ, hoc est, ut arcus BD. ad arcum FG.) c Erit quoque arcus BD. ad rectam DA. ut idem arcus BD. ad arcum FG. d ac propterea æquales erunt rectę DA. & arcus FG. Quia vero ex theor. 1. est, ut arcus BD, ad arcum BK. ita recta DA. ad rectam HI: & ut arcus BD, ad arcum BK, ita arcus FG. ad arcum FH. quod arcus BD, BK, arcubus FG. FH, similes sint, ut supra in hoc scholio ostensum est: e Erit quoque recta DA, ad rectam HI, ut arcus FG, ad arcum FH. Cum ergo recta DA, ostensa sit arcui FG, æqualis: f erit quoque recta HI, arcui FH, æqualis, quod est absurdum. Est enim recta AI. minor arcu FH, cum ea sit semissis chordæ subtendentis arcum duplum arcus FH (Nam recta AF, g secat eam chordam bifariam, ac proinde & arcum, ex scholio propos. 27. lib. 3. chorda autem semper suo arcu minor

a 15. quinti.
b 15. quinti.
c 11. quinti.
d 9. quinti.
e 11. quinti.
f 14. quinti.
g 3. tertii.

minor sit. Non ergo est arcus BD, ad semidiametrum DA, ut DA, ad rectam majorem basem AE, Quadratricis.

Sit deinde, si fieri potest, AF, minor quam AE. Descripto igitur ex centro A, per F, Quadrante FG. erigatur ex F, ad AE, perpendicularis FL, secans Quadratricem in L, puncto, per quod semidiameter ducatur ALK. secans arcum FH, in H. Ostendemus ergo, ut prius, arcum FG, rectæ DA, æqualem esse: Item ita esse arcum BD, ad arcum BK, hoc est, arcum FG, ad arcum FH. ut est recta DA, ad rectam LF. Quare cum arcus FG. ostensus sit æqualis rectæ DA, erit quoque arcus FH, æqualis rectæ LF. Quod est absurdum. Est enim recta LF, major arcu FH: Nam si ex L. duceretur versus G. alia recta tangens circulum FG. sicut LF. eundem tangit in F, essent hæ tangentes æquales, ex schol. propos. 36. lib. 3. arcusque inter eas intercceptus secaretur bifariam in H, propterea quod ex scholio propos. 37. lib. 3. angulus ab eis comprehensus bifariam divideretur, [a] ac proinde & angulus in centro A, si ad alterum punctum contactus recta adjungeretur: [b] ideoq; & arcus quibus insistunt, æquales forent. Igitur cum ex Archimede ad initium de Sphæra & Cylindro, duæ illæ tangentes simul majores sint arcu ab eis comprehenso, erit & earum semissis LF, major semisse FH, illius arcus. Non est ergo arcus BD, ad semidiametrum DA, ut DA, ad rectam minorem basem AE, Quadratricis: Sed neq; ut DA, ad majorem, ut ostensum est. Igitur ut DA, ad ipsam basin AE. Quod est propositum.



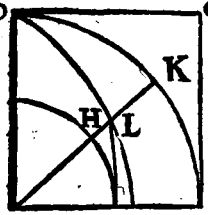
a 4. vel 8 primi.
b 26. tertii.

COROLLARIVM. I.

Hinc facile reperiemus rectam cuilibet arcui circuli, cuius quadrans est BD, ex quo Quadratrix descripta est, æqualem.

Quoniam enim est arcus BD, ad DA, ut DA, ad AE: erit convertendo quoq; AE, ad DA, ut DA, ad arcũ Quadrantis BD, Ei igitur duabus rectis AE, AD, inveniatur tertia proportionalis; [c] erit AD, ad eam tertiam, ut ad arcum BD, cum utraque proportio sit eadem, quæ AE, ad AD. [d] Quare tertia illa proportionalis arcui Quadrantis BD, æqualis erit: Et si duplicetur, fiet recta æqualis semicircumferentiæ ejusdem circuli; si vero quadruplicetur, fiet recta toti circumferentiæ æqualis. Quod si arcui BK, qui minor est. Quadrante, invenienda sit recta æqualis; fiet ut DA, ad perpendicularem LF. ex L, ad AB. demissam, ita tertia illa proportionalis ad aliud, inventaque erit quarta hæc recta æqualis arcui BK. Nam cum sit ex theor. 1. ut DA, ad perpendicularem LF, ita arcus DB, ad arcum

c 11. quinti.
d 9. quinti.



a 11. *quinti.* cum BK; *a* erit quoque tertia illa proportionalis ad quartam lineam inventam, ut arcus DB, ad arcum BK; est autem tertia illa proportionalis æqualis arcui Quadrantis DB. *b* Igitur & quarta linea inventa æqualis erit arcui BK. Si vero arcui, qui major sit quadrante, invenienda sit recta æqualis, reperienda primum erit recta æqualis Quadranti, vel semicirculo, vel tribus Quadrantibus, prout arcus datus includit unum, aut duos, aut tres quadrantes: Deinde alia recta æqualis reliquo arcui, qui minor Quadrante est. Nam duæ hæ rectæ cõjunctæ erunt toti arcui proposito æquales.

b 14. *quinti.*

COROLLARIVM. II.

Sequitur quoq; ex his, si basis Quadratricis AE, statuatur semidiameter alicuius circuli, eius latus AD, Quadrami eiusdem circuli esse æquale, & lineam lateris duplam esse æqualem semicircumferentiæ eiusdem circuli; & lineam quadruplam toti circumferentiæ esse æqualem.

Cum enim ut supra ex Pappo diximus, semidiametri semicircumferẽtiis circulorum, atque adeo & quadrantibus sint proportionales; erit ut DA, ad AE, hoc est, ut tertia illa proportionalis ad DA, ita Quadrans BD, ad Quadrantem semidiametri AE. Est autem tertia illa proportionalis æqualis Quadranti BD, ut ostensum est: *c* Igitur & recta DA, Quadranti semidiametri AE, æqualis erit. Dupla linea ergo ipsius DA, semicircumferentiæ circuli, cujus semidiameter AE, & quadrupla toti circumferentiæ erit æqualis.

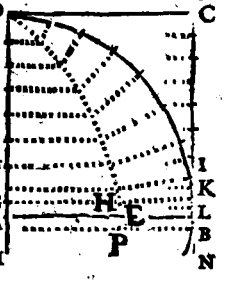
c 14. *quinti.*

Eadem ratione, si duæ rectæ eandem proportionem habeant, B------ quam DA, AE, & minor ponatur semidiameter ali-C---- cujus circuli, ostendetur major æqualis quadranti illius circuli, &c. Sit enim ut DA, ad AE, ita recta aliqua B, ad rectam C. Eritque permutando, ut DA, ad B, ita AE, ad C. Vt autem AE, ad C, ita est quadrans semidiametri AE, ad quadrantem semidiametri C, ut supra ex Pappo dictum est. Igitur erit quoque ut DA, ad B, ita quadrans semidiametri B, ad quadrantem semidiametri C. Cum ergo DA, æqualis sit, ut ostensum est, quadranti semidiametri AE, *d* Erit quoque B, æqualis quadranti semidiametri C. Quod est propositum.

d 14. *quinti.*

Sed si lubeat per numeros explorare, quamnam proportionem plus minus, habeat ex hoc præclaro invento circumferentia circuli ad ejus

ad eius diametrum, vel (quod idem est) semicircumferentia ad semidiametrum, *a* cum sit ut circumferentia ad diametrum, ita semicircumferentia ad semidiametrum, efficiemus id hoc modo. Cogitemus Quadrantem DB, in figura, in qua Quadratricem descripsimus, divisum esse in grad. 90. & singulos gradus in Min. 60. ut totus DB, complectatur 5400. particulas æquales. Si igitur latus DA, concipiamus in totidem æquales particulas divisum esse, erit parallela ex ultima particula usque ad Quadratricem educta ferme æqualis basi AE, ob exiguam distantiam illius parallelæ, & basis AE, cum in ea figura parallela quoq; GH, auferens AG, particulam sexram decimam, quæ $\frac{1}{7\frac{1}{2}}$. multo major est quam $\frac{1}{7\frac{1}{400}}$. vix à basi AE, superetur: ita ut sine errore notabili eam parallelam pro basi accipere possimus. Quia vero ultima illa particula lateris DA, est sinus arcus Min. 1. & parallela illa sinus cõplementi, nimirum arcus grad. 89. Min. 59. ut constat, si ponatur AG, ultima particula, & arcus BK, ultimum Minutum, ducaturque recta AH Nam GH, erit sinus anguli GAH, grad. 89. Min. 56. ac proinde AG, sinus anguli AHG. Min. 1. posito sinu toto AH, ut in tractatione Sinuum ostendimus. Si igitur sinus totus AH, statuatur 10000000. (Ita enim exquisitius proportio optata invenietur, quam si sinus totus ponatur tantum 100000 cum in hoc sinus grad. 89. Min. 59. à sinu toto non differat,) erit AG, 2909. & GH. 9999999. at totum latus DA, earundem partium erit 15708600. ut constat, si 5400. particulæ lateris DA, ducantur in unam AG, quam diximus esse 2909. Duplum ergo lateris DA, erit 31417200. Et quoniam ex coroll. 2. huius propos. 4. duplum lateris DA, æquale est semicircumferentiæ, cujus semidiameter AE: erit proportio semicircumferentiæ illius ad semidiametrum AE, eadem fere, quæ numeri 31417200. ad 9999999. denominata à $3\frac{14172\,03}{9999999}$, hoc est, in minimis terminis, à $3\frac{157467}{1111111}$, quæ proportio minor est, quam tripla sesquiseptima, sive tripla superdecupartiens septuagesimas, maior autem, quam tripla superdecupartiens septuagesimas primas: inter quas duas proportiones vera proportio circumferentiæ ad diametrum consistit, ut ab Archimede demonstratum est.



a 15. quinti.

Itaque ut rectalinea circumferentiæ circuli inveniatur æqualis, satis est punctum E, invenire, etiamsi tota linea Quadratrix non sit descripta. Vt autem arcus, vel angulus in datam proportionem secetur, non indigemus puncto E, ut perspicuum est.

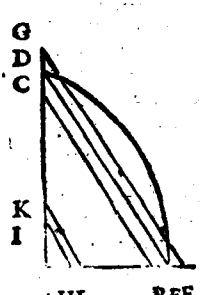
V.

Dato circulo quadratum æquale constituere.

Quoniam Archimedes demonstravit circulum quemcunq; æqualem esse triangulo rectangulo, cujus unum latus circa angulum rectum semidiametro circuli, alterum vero circumferentiæ ejusdem æquale est: atque hinc nos propos. 4. figurarum lsoperimetrarum in commentariis in sphæram ostendimus, eundem circulum rectangulo comprehenso sub semidiametro, & semicircumferentia, æqualem esse: si ex coroll. præcedentis propos. inveniatur linea recta æqualis semicircumferentiæ dati circuli, & rectangulo
a 14. sec. contento sub illa recta, & semidiametro *a* constituatur quadratum æquale, erit idem hoc quadratum dato circulo æquale.

Invenietur autem recta æqualis semicircumferentiæ, vel Quadranti, vel toti circumferentiæ, *b* si fiat ut basis Quadratricis descriptæ ad ejusdem latus, ita semidiameter dati circuli ad aliud. Inventa enim quarta linea, æqualis erit Quadranti circuli, ut in coroll. 2. præcedentis propos. diximus, atq; adeo duplicata efficiet lineam semicircumferentiæ æqualem, quadruplicata autem rectam toti circumferentiæ æqualem exhibebit.
b 12. sec.

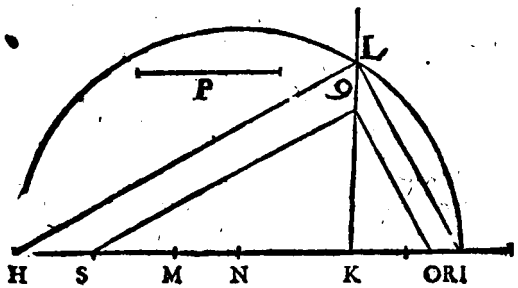
Verum ut expeditius quilibet circulus possit quadrari, construendæ erunt duæ figuræ quadrandis circulis aptissimæ, hoc modo. Constituatur angulus rectus DAE, sitque AD, æqualis semidiametro Quadrantis, ex quo Quadratrix descripta est, & A E, basi ejusdem Quadratricis æqualis: Vel ex centro A, nova Quadratrix describatur DE, cujus latus AD, & basis AE. Ducta autem recta D E, constructum erit unum instrumentum circulis quadrandis aptissimum. Si enim circuli quadrandi semidiameter æqualis sit rectæ A E, erit recta A D, circumferentiæ Quadrantis ejusdem circuli æqualis, ut ex coroll. 2. antecedentis propos. liquet. Si autem semidiameter minor sit, quam A E, abscindemus ei æqualem A B, parallelamq; ipsi D E, agemus B C. Si denique semidiameter sit major, quam A E, abscindemus ei æqualem AF, ex A E producta, & per F. ipsi D E, parallelam agemus FG. Erit enim ex coroll. 2. præcedentis propos. recta AC, æqualis circumferentiæ Quadrantis, cujus semidiameter A B. Recta vero AG circumferentiæ Quadrantis æqualis erit, cujus semidiameter A F: *c* propterea quod est, ut AE, ad A D. ita tam AB, ad AC quam A F, ad *A G*.
c 2. vel 4. sexti.



Deinde ducta recta HI, cujuscunque longitudinis, excitetur ad eam

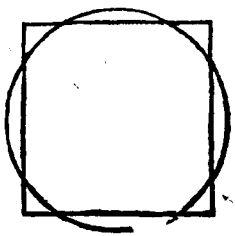
eam perpendicularis quantacunque KL: parabitur erit alterum inſtrumentum quadrandis circulis accommodatum.

Per duo hæc inſtrumenta nullo negotio quemcunque circulum quadrabimus hac ratione. Sit quadrandus circulus, cujus ſemidiametro in priori inſtrumento æqualis ſit recta AB, & per B, ipſi DE,



parallela agatur BC. In poſteriori vero inſtrumento ſumantur duæ KM MH ipſi AC, æquales, & recta KI, ſemidiametro AB, æqualis. Diviſa autem tota recta HI, bifariam in N. deſcribatur ex N, ad intervallum NH, vel NI, ſemicirculus ſecans perpendicularem KL, in L. Dico quadratum ex KL, circulo dato, cujus ſemidiameter AB, in priori inſtrumento, vel KI, in poſteriori æquale eſſe. Quoniã enim KL, media proportionalis eſt inter KH. KI. ex ſcholio prop. 13. hujꝰ lib. 4 erit quadratum ex KL. rectangulo ſub KH, KI æquale. Cum ergo hoc rectangulũ circulo dato ſit æquale, ut ad initium huius poſt diximus, quod KH ſit æqualis ſemicircumferentiæ, & KI, ſemidiametro: erit quoq; idem quadratum ex KL, dato circulo, cujus ſemidiameter AB, vel KI, æquale. Si igitur quadratum rectæ KL, deſcribatur, & ex ejus centro ad intervallum AB, in priori inſtrumento, vel KI, in poſteriori circulus deſcribatur, habebitur quadratum æquale circulo, ut in appoſita figura apparet.

4 27. ſeptimi.



Cæterum diviſio rectæ HI, in poſteriori inſtrumento in duas partes æquales facile ſic fiet. Diviſa ſemidiametro KI, bifariam in O, (hæc enim quia minor eſt, quam HI, facile bifariam ſecabitur.) accipiatur rectæ KO, æqualis MN. Nam N, punctum erit medium rectæ HI. Cum enim æquales ſint MN, OI: addita communi NO,

erit N I, ipſi MO. æqualis. Eſt autem M O, ipſi H N, æqualis, (quia enim æquales ſunt HM. MK. additis æqualibus M N. K O, totæ æquales fient HN, MO.) Igitur & NI, ipſi HN, æqualis erit.

VI.

Dato quadrato circulum æqualem deſcribere.

Sit datum quadratum, cujus latus P. Huic in poſteriori inſtrumento antecedentis propoſ. ex perpendiculari K L. abſcindatur æqualis KQ. Propoſito autem quovis circulo, cujus ſemidiameter KI, inveniatur per antecedentem propoſ. ei quadratum æquale, cujus latus KL. Deinde ducta recta L I, agatur ei parallela QR. Dico circulum, cujus ſemidiameter K R. æqualem eſſe quadrato cujus latus K Q. vel P. Inventa namq; per propoſ. antecedentem recta KH, quæ ſemicircumferentiæ circuli, cujus ſemidiameter K I, ſit æqualis, ductaq; recta I. H. agatur ei parallela Q S. Quoniam igitur, ob triangulorum ſimilitudinem, eſt ut NK. ad K L. ita S K. ad KQ: & ut K I. ad K. I. ita K Q. ad K R: erit ex æquo, ut H K. ad KI. ita SK. ad KR. Cum ergo H K, æqualis ſit ſemicircumferentiæ circuli, cujus ſemidiameter KI. erit quoq; ex coroll. 2. propoſ. 4. SK, æqualis ſemicircumferentiæ circuli, cujus ſemidiameter K R. Quia vero KQ. ex coroll. propoſ. 8. hujus lib. media proportionalis eſt inter SK, K. R. quod angulus RQS. rectus ſit, *a* quippe cum *b* ejus partes R Q K. SQK. partibus I L K. H L K. recti anguli H L I *c* æquales ſint: (Nam *b* angulus HLI. rectus eſt, cum ſit in ſemicirculo, ut patet ex praxi antecedentis propoſ. qua K L. media proportionalis inter HK. KI. reperitur.) *c* erit quadratum ex KQ. æquale rectangulo ſub SK. KR. hoc eſt, circulo, cujus ſemidiameter KR, hoc eſt, circulus ſemidiametri KR. æqualis eſt quadrato lateris KR. vel P. Quod eſt propoſitum.

a 29. *pri.* *b* 31. *tertii.* *c* 17. *ſexti.*

COROLLARIVM.

Ex his quæ demonſtrata ſunt, conſtruemus circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem: & contra, cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem conſtituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunq; ſimilis ſit. Nam ſi datæ figuræ rectilineæ *d* deſcribamus quadratum æquale, & huic quadrato circulum æqualem conſtituamus, ex propoſ. 6. erit hic idem circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis.

d 14. *ſec.*

Rurſus ſi per propoſ. 5. dato circulo quadratum æquale conſtruamus, huic autem quadrato *e* conſtituamus figuram rectilineam æqualem & ſimilem alteri datæ rectilineæ figuræ, erit eadem hæc figura rectilinea conſtituta, dato circulo æqualis. Quod eſt propoſitum.

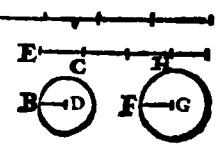
e 25. *ſexti.*

VII.

Datæ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

Quo pacto recta linea reperiatur circumferentiæ dati circuli æqualis

qualis, docuimus propos. 5. nunc autem, ut viciſſim rectæ datæ lineæ circumferentia circuli æqualis inveniatur, ita agendum erit. Sit data recta A, cui circumferentia æqualis invenienda eſt. Deſcripto quovis circulo B C, ex centro D. inveniatur ei recta æqualis E. quod facile ita fiet. In priori inſtrumento propoſ. 5. ſumatur A H. æqualis ſemidiametro B D, deſcripti circuli, & per H, agatur ipſi D E, parallela H I. Nam A I, quadruplicata dabit rectam E, circumferentiæ circuli B C, qualem, ut propoſ. 5. diximus. Deinde tribus rectis E, A, B D, inveniatur quarta proportionalis F G, atq; ex G, ad intervallum G F, circulus deſcribatur F H. Dico ejus circumferentiam datæ rectæ A, æqualem eſſe. Cum enim ſit, ut E, ad A, ita B D, ad F G; hoc eſt, *a* ita tota diameter circuli B C, ad totam diametrum circuli F H: Sit autem ut diameter ad diametrum, ita circumferentia B C, ad circumferentiam F H, ut Pappus *b* demonſtravit: *b* erit quoq; ut E, ad A, ita circumferentia B C, ad circumferentiam F H. Cum ergo E, facta ſit æqualis circumferentiæ B C; *c* erit & recta A, circumferentiæ F H. æqualis, hoc eſt, *c* circumferentia circuli F H, inventa eſt datæ rectæ A, æqualis. Quod *ti*, eſt propoſitum.



a 15. *quinti.*

b 11. *quinti.*

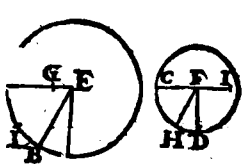
c 14. *quinti.*

Aliter, & facilius Quartæ parti rectæ datæ A, accipiatur æqualis A K, in priori inſtrumento propoſ. 5. & per K, agatur K L, ipſi D E, parallela. Nam circumferentia circuli, cujus ſemidiameter A L, æqualis erit datæ rectæ A; propterea quod ejus circumferentiæ quadrans æqualis eſt rectæ A K, quartæ parti datæ rectæ A, ut propoſ. 5. declaravimus.

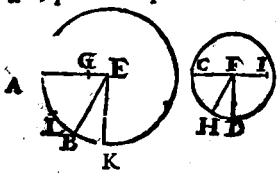
VIII.

Datis duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in uno eorum, ex altero arcum æqualem abſcindere. Oportet autem arcum in majore circulo datum non eſſe maiorem circumferentia minoris circuli.

Sint duo circuli inæquales A B, C D, quorum centra E, F, & ſemidiametri A E, C F, ſitque A B, major, & C D. minor, Datus autem primum ſit in minori circulo arcus C D, cui æqualis abſcindendus ſit ex majore. Quoniam circulus A B, circulo C D, major eſt, erit & ſemidiameter A E, ſemidiametro C F, major. Abſcindatur ergo



AG, ipsi CF, æqualis, secetur que arcus CD. ita in H. ex propos. 2. ut eadem sit proportio arcus CH. ad arcum DH, quæ rectæ AG. ad rectam GE; arcuique CH, similis auferatur arcus AB, quod facile fiet, si ducta recta FH. angulo CFH. æqualis fiat angulus AEB. Dico arcum AB, dato arcui CD, æqualem esse. Quoniam enim est, ut AG, ad GE, ita arcus CH, ad arcum HD. Et convertendo, ut EG. ad AG, ita arcus DH, ad arcum CH; erit componendo quoque AE, ad AG. hoc est, ad CF. ipsi AG, æqualem, ut arcus CD, ad arcum CH: Est autem, ut AE, semidiameter ad semidiametrum CF, *a* hoc est, ut tota diameter ad totam diametrum, ita circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD. ut Pappus demonstravit, hoc est, ita arcus AB, ad similem arcum CH. *b* Igitur erit quoque ut arcus CD, ad arcum CH, ita arcus AB, ad eundem arcum CH; ac proinde arcus CD. AB, *c* æquales inter se erunt. Quod est propositum.



a 15. quinti.
b 11. quinti.
c 9. quinti.

Datus deinde sit in majore circulo arcus AB, non major, quam circumferentia circuli CD, minoris, ex quo arcui AB, æqualis arcus abscindendus est. Quoniam circulus AB, major est circulo CD, erit & semidiameter AE, semidiametro CF. major. Producta ergo CF, ad I, ut CI, ipsi AE, sit æqualis, secetur per propos. 2. arcus AB, in L. ut eadem sit proportio AB, ad BL. quæ CF, ad FI; arcuiq; BL, sumatur æqualis arcus BK, ac toti arcui AK, similis auferatur CD, quod facile fiet, si ducta recta BK, angulo AEK, angulus CFD, æqualis fiat. Dico arcum CD, arcui dato AB, æqualem esse. Quoniam enim est, ut CF, ad FI, ita arcus AB, ad arcum BL, id est, ad arcum BK, ipsi BL, æqualem; erit componendo quoque, ut CI, ad FI, ita arcus AK. ad arcum BK: Et per conversionem rationis, ut CI, ad CF, hoc est, ut AE, ad CF, ita arcus AK, ad arcū AB. Est autem, ut semidiameter AE, ad semidiametrum CF, *d* hoc est: ut tota diameter ad totam diametrum, ita, ex demonstratis à Pappo, circumferentia circuli AB. ad circumferentiam circuli CD, id est, ita arcus AK, ad arcum similem CD. *e* Igitur erit etiam, ut arcus AK, ad arcum AB, ita idem arcus AK, ad arcum CD. propterea q; arcus AB, CD, *f* æquales erunt inter se. Quod est propositum.

d 15. quinti
e 11. quinti.
f 9. quinti.

Brevius. Arcui CD, reperiatur æqualis recta, per coroll. 1. propos. 4. Quadratricis; & huic rectæ æqualis arcus AB, ut in sequenti coroll. 1. dicetur. Eodem pacto arcui AB, reperiatur recta æqualis, & huic rectæ æqualis arcus CD: factumque erit, quod iubetur.

COROL-

COROLLARIVM. I.

Ex his, quæ demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, cuiuis datæ rectæ abſcindi poſſe ex circulo quouis, cuius circumferentia minor non ſit, quam recta data, circumferentiam æqualem, quemadmodum ſupra oſtenſum eſt in coroll. 1. propoſ. 4. datæ cuilibet circumferentiæ inueniri poſſe rectam æqualem: hoc modo. Inueniatur per ea, quæ paulo ante in coroll. 1. propoſ. 4. oſtendimus, recta linea quadranti dati circuli æqualis; & ſiquidem hæc linea inuenta æqualis fuerit rectæ lineæ datæ, erit circumferentia quadrantis datæ rectæ lineæ æqualis.

Si vero illa recta quadranti circuli inuenta æqualis, fuerit maior, quam data recta linea ſecetur quadrantis circumferentia in duas partes, ex propoſ. 2. ita vt quadrans ad vnam partem habeat eandem proportionem, quam inuenta recta linea ad lineam rectam datam: Pars enim illa quadrantis datæ rectæ lineæ erit æqualis. Nam cum ſit, vt inuenta recta ad datam rectam, ita quadrans ad illum arcum abſciſſum; ſit autem recta inuenta quadranti æqualis, *a* erit quoque data linea recta arcui abſciſſo æqualis. *a* 14. quinti.

Si denique recta illa inuenta æqualis quadranti, fuerit minor, quam recta linea data; ſumatur illius dupla, quæ nimirum circumferentiæ ſemicirculi ſit æqualis. Nã ſi hæc æqualis fuerit datæ rectæ lineæ, erit circumferentia ſemicirculi eidem datæ rectæ æqualis.

Si autem dupla illa recta linea fuerit maior, quam data linea recta, ſecetur ſemicirculi circumferentia in duos arcus, ita vt ſemicircumferẽtia ad vnum eorum eandẽ habeat proportionem, quam dupla illa recta linea ad datam rectam, quod quidem facile fiet, ſi datæ rectæ ex dupla illa linea recta abſcindatur æqualis, & ſemicircumferentia ſecetur, per propoſ. 2. vt ſecta eſt recta illa dupla. Erit enim componendo, vt tota illa recta dupla ad partem abſciſſam, hoc eſt, ad datam rectam, ita tota ſemicir-

cumferentia ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille datæ rectæ æqualis erit. Cum enim ſit, vt dupla illa recta ad rectam datam, ita ſemicircumferentia ad eum arcum; ſit autem recta illa dupla æqualis ſemicircumferentiæ; *a* erit quoque data recta illi arcui æqualis.

a 14. *quinti.*

Si denique dupla illa recta linea fuerit minor, quam data linea recta, addatur ei prior linea inuenta, quæ nimirum quadranti circuli eſt æqualis, vt tota recta compoſita æqualis ſit circumferentiæ trium quadrantum, & tripla prioris lineæ inuentæ. Nam ſi hæc linea tripla fuerit datæ rectæ æqualis; erit arcus trium quadrantum eidem datæ rectæ æqualis.

Si vero tripla illa linea recta fuerit maior, quam recta linea data, ſecetur circumferentia trium quadrantum in duos arcus, ex propoſ. 2. ita vt ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam tripla illa recta ad rectam datam, quod facile etiam fiet, ſi datæ rectæ ex tripla illa linea recta abſcindatur recta æqualis, & circumferentia trium quadrantum ſecetur, per propoſ. 2. vt recta illa tripla ſecta eſt. Nam componendo erit, vt tota illa recta tripla ad partem abſciſſam, id eſt, ad datam rectam, ita tota circumferentia trium quadrantum ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille datæ rectæ lineæ erit æqualis. Quoniam enim eſt, vt tripla illa recta ad rectam datam, ita circumferentia trium quadrantum ad arcum abſciſſum: eſtque tripla illa recta circumferentiæ trium quadrantum æqualis: *b* erit quoque data linea recta æqualis illi arcui abſciſſo.

b 14. *quinti.*

Denique ſi tripla illa linea recta fuerit minor, quam data recta linea, addatur ei rurſus prior linea inuenta quadranti æqualis, vt tota recta compoſita fiat æqualis toti circumferentiæ circuli, & prioris lineę inuentæ quadrupla. Si namque linea hæc quadrupla fuerit æqualis datæ rectæ lineæ, erit tota circumferentia dati circuli datæ lineæ rectæ æqualis.

At vero ſi illa linea quadrupla maior fuerit, quam data recta linea, (minor eſſe non poteſt: alioquin data re-

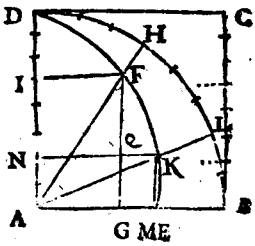
cta

cta esset maior, quam circumferentia dati circuli, quod est contra hypothesin) secetur tota circumferentia duos arcus, ex prop. 2. vt ad vnum eorum eandem proportionem habeat, quam quadrupla illa linea ad datam rectam, quod facile etiam fiet. si ex quadrupla illa recta auferatur recta æqualis datæ rectæ, & tota circumferentia circuli secetur, vt quadrupla illa recta est secta. Erit namque componendo, vt tota illa quadrupla recta ad partem abscissam, id est, ad datam rectam, ita tota circumferentia circuli ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ erit æqualis. Cum enim sit, vt quadrupla illa linea ad rectam lineam datam, ita tota circumferentia ad arcum abscissum; sit autem illa linea quadrupla toti circumferentiæ æqualis; *a* erit quoque data recta linea arcui abscisso æqualis. a 14. quinti.

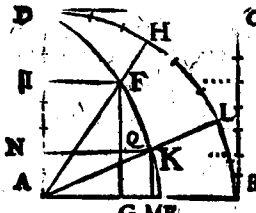
Aliter, & breuius. Inuenta ex coroll. 1. prop. 4. Quadratricis, vel ex propos. 5. eiusdem, recta æquali circumferentiæ dati circuli, abscindatur ex ea datæ rectæ lineæ æqualis, & tota circumferentia per propos. 2. secetur, vt secta est inuenta illa recta in duas partes. Nam componendo erit, vt tota illa recta ad eius partem ablatam, hoc est, ad datam rectam, ita tota circumferentia ad arcum abscissum. Cum ergo tota illa recta sit æqualis toti circumferentiæ, *b* erit quoque data recta arcui abscisso æqualis. Quod est propositum. b 14. quinti.

COROLLARIVM II.

Ex ijs quoque, quæ dicta sunt, inferri potest, tam arcus, quam angulos rectilineos reperiri incommensurabiles inter se. Sit enim arcus HB, & angulus rectilineus HAB. Dico tam arcum HB, secari posse in duos arcus inter se incommensurabiles, quàm



angu-



angulum HA*B*, in duos angulos incommensurabiles inter se. Descripta enim Quadratrice DE, quæ rectam HA, secet in F, ducatur per F, basi AE, parallela FI, deinde inuentis duabus rectis inter se incommensurabilibus, vt libro 10. docetur, diuidatur recta IA, in N, ex scholio propos. 10. huius lib. ita vt IN, NA, eandem proportionem habeat, quam duæ rectæ inuentę: atque adeo & IN, NA, incommensurabiles quoque sint. Ducta autem recta *N*K, ipsi AE, parallela, quæ Quadratricem secet in K, ducatur ex centro *A*, per K, recta secans arcum H*B*, in L. Dico tam arcus HL. *LB*, quam angulos HA*L*, LAB, inter se esse incommẽsurabiles. Quoniam enim per propos. 1. est, vt IN, ad NA, ita arcus HL, ad arcum LB: sint autem I*N*, NA, incommensurabiles; erunt & arcus HL, LB, incommensurabiles. Cum ergo sit quoque, *a* vt arcus H*L*, ad arcum LB, ita angulus HAL ad angulum LAB: erunt etiam anguli HAL, LAB, incommensurabiles inter se. Quod est propositum.

a 33. sexti.

FINIS ELEMENTI SEXTI.

QVID

QVID IN SINGVLIS XV. LIbris agat Euclides.

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN primo libro disputat de rectilineis figuris, videlicet de triangulis, ac parallelogrammis. Et primum triangulorum ortus, proprietatesque tradit, tum iuxta angulos, tum iuxta latera, ipsa inter se comparans. Deinde parallelarum proprietates interijciens ad parallelogramma transit, eorumque ortum declarat: & symptomata, quæ in ipsis sunt, demonstrat. Postea triangulorum, parallelogrammorumq; communicationem ostendit, & quonam pacto parallelogrammum fiat æquale triangulo. Denique de ijs, quæ in triangulis rectangulis à lateribus describuntur, quadratis: quam habeat proportionem, quod à subtendente rectum angulum describitur, ad ea, quæ à comprehendentibus ipsum fiunt.

In secundo libro parallelogrammum rectangulum, & gnomon definitur. Deinde parallelogrammorum rectangulorum, & quadratorum, quæ ex rectarum linearum sectionibus fiunt proportiones declarantur. Postea de quadratis, quæ à lateribus obtusangulorum, & acutangulorum triangulorum describuntur, quam habeant proportionem, quæ à sub-

subtendentibus obtusum, & acutum angulum fiunt, ad ea quæ à comprehendentibus describuntur. Denique qua ratione dato rectilineo æquale quadratum constituatur.

In tertio libro agitur de ijs, quæ circulis accidunt, & de rectis lineis in circulo vel ad circulum ductis: itemque de angulis, qui ad circulorum centra, vel ad circumferentias consistunt.

In quarto libro de figurarum planarum inscriptionibus, & circumscriptionibus.

In quinto de analogis.

In sexto de proportionibus figurarum inter se: de figuris similibus, & reciprocis: de rectis lineis proportionalibus: de parallelogrammorum applicationibus ad rectas lineas, quæ vel deficiant parallelogrammis similibus, vel excedant: quomodo recta linea terminata, extrema ac media ratione secetur: de proportionibus circumferentiarum, & angulorum, itemque Sectorum, in circulis æqualibus.

In septimo agitur de numeris primis, & compositis, & quo pacto numerorum non primorum maxima communis mensura inueniatur: de numerorum parte & partibus: de numeris multiplicibus: de proportionalibus: & quæcunque in quinto libro de magnitudinibus generatim, eadem fere & de numeris particulatim hic demonstrantur.

In octauo de numeris deinceps proportionalibus: de numeris planis: de quadratis: de cubis, & solidis: de similibus planis, & similibus solidis.

In nono item de similibus planis: de cubis, & solidis: & de numeris deinceps proportionalibus siue ab vnitate, siue simpliciter. de numeris primis: de nu-

numeris paribus, de imparibus, de pariter paribus, de pariter imparibus, de pariter paribus & pariter imparibus: de numeris perfectis.

In decimo de commensurabilibus, & incommensurabilibus magnitudinibus, itemque de rationalibus, & irrationalibus.

In vndecimo primum agitur de rectis lineis, quatenus ad solida corpora referuntur, videlicet quando sint in vno plano; quando rectæ, seu perpendiculares aa planum; quando parallelæ: quomodo à puncto in sublimi dato ad planum perpendicularis ducatur. Deinde vero de planis simul disserit, tum de solidis angulis. Postremo de solidis parallelepipedis, & nonnulla de Prismatibus.

In duodecimo de pyramidibus, & prismatibus: postea de conis, & cylindris: demum de sphæris.

In tertio decimo de constitutione quinque figurarum mundanarum, quas copora regularia appellant: videlicet tetraedri vel pyramidis, hexaedri vel cubi, octaedri, dodecaedri, & icosaedri; ad quorum euidentiam præmittit nonnulla de ijs, quæ accidunt rectæ lineæ extremæ ac mediæ ratione sectæ: de pentagono æquilatero, de hexagoni, & decagoni lateribus, & de triangulo æquilatero.

In quarto decimo de dodecaedri; & icosaedri in eadem sphæra descriptorum comparatione.

In quinto decimo & vltimo de inscriptione quinque figurarum iam dictarum, & de earundem lateribus, & angulis.

EVCLI-