Notes du mont Royal
www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

EUCLIDIS
ELEMENTA
GEOMETRIÆ PLANÆ
LIBRIS VI.
COMPREHENSA,

IN USUM INCIPIENTIUM

ADORNATA.

ALTERA EDITIO, PRIORE CORRECTIOR.

HAFNIÆ, 1756.

Typis Reg. Majest. & Universitatis Typogr.

Johan. Georgii Höpffneri.

Imprimatur.

J. F. RAMUS.

Philos. & Math. Prof.

Hist. of Sci.
Lyman
1-4-27
14330

B. L.

Geometrica, quæ hoc libello comprehenduntur, EUCLIDIS *elementa, bis mille, & ultra, annorum usus satis comprobavit laudavitqve, ut nulla jam commendatione egeant amplius: In libris antiqvissimorum Mathematicorum,* ARCHIMEDIS APOLLONII, THEODOSII, PTOLOMÆI *&c. citantur ubiq; tanqvam principia evidenter demonstrata; Recentiores etiam Matheseos cultores & Geometræ peritissimi, qvotqvot justum antiqvæ veritati ac solertiæ pretium statuere norunt, omnes in eo consentiunt, non esse alibi prima Geometriæ elementa, qvam apud* FUCLIDEM *qværenda. His enim principiis & fundamentis nituntur universæ rerum mathematicarum demonstrationes ac certitudo tota. Tironibus itaqve, qvi vastum Matheseos campum ingredi & cum fructu perlustrare cupiunt, Euclidæis ab elementis ut primum incipiant, maxime necessarium esse, nemo est Mathematicus, qvi ignoret; hæc vero prius si prorsus familiaria sibi reddiderint, non modo facilem postea felicemqve ad altiora progressum, sed etiam, qvæ aliàs horum elementorum ignaris obscura & intellectu difficilia videantur, cuncta experientur clara penitusqve perspicua.*

Ingratiam autem eorum, qvi sine duce mathematicas aggrediantur disciplinas, hoc præmittitur.

Commentariolum:

1. Mathesis *sive* Mathema *vocabula sunt Græcæ originis, in genere quidem (si vocis etymon spectes) doctrinam vel disciplinam notantia; peculiari tamen sensu, à primis jam seculis usitato, accipiuntur pro sola illa scientia, qvæ qvantitatis naturam & proprietates explicat; unde communiter invaluit hæc definitio:* Mathesis, *vel* Mathema, *est* Scientia Qvantitatis.

2. *Qvan-*

2. Qvantitas *autem vel est* discreta, *partibus scilicet ab invicem separatis constans, ut* numerus *aut* multitudo, *vel est* continua, *ut* magnitudo *sive* extensio: *Unde duæ oriuntur Matheseos partes*, Arithmetica *nempe &* Geometria, *qvantitatem altera discretam, altera continuam tractans: Hisqve duabus partibus tota absolvitur* Mathesis pura. *Huc refertur etiam* Analysis mathematica *sive* Ars analytica (Algebra *vulgo dicta*,) *qvæ ex Arithmetica & Geometria est composita, methodum ostendens per calculum qvantitatum generalem problemata mathematica resolvendi & nova inveniendi theoremata.*

3. Arithmetica *vero &* Geometria *ideo dicuntur* pura Mathesis, *qvia qvantitatem à materia sensibili & ab axiomatibus physicis penitus abstractam considerant. Reliqvæ autem scientiæ, circa qvantitatem materiæ sensibili concretam sive materiis physicis accommodatam occupatæ, appellantur* Mathesis mixta *sive applicata: cujus generis sunt* Mechanica, Optica, Astronomia, Cosmographia, Architectura *& complures aliæ; qvæ omnes ideo nominantur* scientiæ Mathematicæ mixtæ *sive* applicatæ, *qvia versantur circa portiones physicas, axiomata & experimenta auxilio Matheseos elucidanda, demonstranda atqve ad usum accommodanda: Qvantitas enim, uti observarunt perspicaciores Naturæ scrutatores, materiæ applicata veluti dosis Naturæ est & plurimorum effectuum in rebus naturalibus causativa, ideoqve multæ Naturæ partes non satis subtiliter comprehendi, nec satis perspicue demonstrari, nec satis dextre & certo ad usum accommodari possunt sine ope & interventu Matheseos puræ,* Arithmeticæ *nempe*, Geometriæ & Algebræ.

4. *Omnes porro Mathematicæ scientiæ tam puræ qvam mixtæ dividuntur in* Theoreticas & Practicas;

cas; *illa principia, naturam & proprietates rerum contemplantur; hæ vero praxes sive operationes è Theoreticis derivandas ostendunt.*

Hactenus Matheseos etymon, definitionem uti & generaliorem usitatioremqve divisionem paucis attigimus, omissis ambagibus Rhetoricis, qvæ tuto ignorari possunt. Jam vero, ut ad propositum propius accedamus, Methodum, *qvam vocant* Mathematicam, *breviter explicare haud incongruum videtur.*

5. Methodus, *qva Elementa Geometriæ tradidit* EUCLIDES, *qva etiam omnes fere rerum Mathematicarum Scriptores utuntur, dicitur* Mathematica, *rectius vero* Geometrica, *qvia, qvantum novimus, à Geometris primum usurpata atqve semper in contemplatione qvantitatis sanctè servata reperitur; cujus totus hic est tenor:*

Primo è simplicissimis rerum tractandarum notionibus qvædam constituuntur principia, *adeo clara & manifesta, ut eorum veritatem nemo sanæ mentis negare possit. Talia sunt tria, unde omnis Geometria derivatur, principiorum genera, scilicet* Definitiones, *qvæ primas rerum notiones distinctè explicant;* Postulata, (*aliis* Hypotheses *dicta*) *qvæ rem qvandam factu facilem proponunt, à nemine ratione prædito non concedendam; & deniqve* Axiomata *sive* notiones communes, *qvæ (uti vulgo definiuntur) sunt* sententiæ per se manifestæ, *vel (ut aliis placet) sunt* Propositiones, qvarum veritas è definitionibus in se consideratis immediate absqve ulla demonstratione cognoscitur.

Deinde his principiis superstruuntur Propositiones *in* Theoremata & Problemata *distincta:*

Theorema est Propositio theoretica sive speculativa, qva aliqvid sub certis conditionibus affirmatur vel negatur,

gatur. Ex. gr. Euclidis Element. Libr. Propositione IV. sub hisce conditionibus. (Si duo triangula habuerint duo latera duobus lateribus æqvalia, alterum alteri, & angulum æqvalem angulo, qvi ab æqvalibus rectis comprehenditur) *affirmatur* & basin basi, & triangulum triangulo, & reliqvos angulos reliqvis angulis æqvari. *Similiter Lib. 3. Prop. V. Sub hac conditione* (Si duo circuli se invicem secent) *negatur* idem ipsorum esse centrum.

Problema est Propositio practica, qva aliqvid sub datis conditionibus faciendum vel inveniendum enuntiatur vel docetur. Ex. gr. Eucl. Elem. Libr. 1. *Prop. I.* Triangulum æqvilaterum super data linea construendum *traditur, sed sub conditione: (Si data linea sit* recta & terminata.) *Sic qvoqve Lib.* 1. *Prop. IX.* datum angulum bifariam secare *docetur, sub præmissa nempe conditione si datus angulus sit* rectilineus, *hoc est si* lineæ, angulum comprehendentes, sint rectæ.

Omnis itaqve Propositio tam theoretica qvam practica dividitur in hypothesin & thesin. Hypothesis *includit conditiones, sub qvibus aliqvid affirmandum vel negandum faciendum vel inveniendum proponitur; Thesis vero continet id, qvod affirmatur vel negatur, qvidve faciendum vel inveniendum statuitur.*

Hic tamen notandum est hypothesin non semper manifestis verbis exprimi, sed interdum nomine vel proprio rei, de qva agitur, vocabulo involvi; qvare hoc in casu hypothesis è definitionibus petenda est. Ex. gr. Libr. 1. *Propositio V talis est:* Triangulorum Isoscelium anguli ad basin sunt inter se æqvales; *hic hypothesis involvitur vocabulis* triangulorum Isoscelium; *horum itaqve vocabulorum definitiones,* (Figuræ *scilicet* trilateræ, qvæ duo tantum latera habent

bent æqvalia) *desideratam exhibent* hypothesin, *qva reqviritur, ut sint spatia tribus lateribus terminata, atqve duo ipsorum laterum sint æqvalia; unde* thesis (anguli ad basin sunt inter se æqvales) *asseritur. Similiter in Lib.* 1. *Proposit XX.* (Omnis trianguli duo latera sunt majora reliqvo, qvomodocunqve sumpta) *hypothesis non apparet, sed petenda est è vocis trianguli definitione, ubi per* figuram tribus rectis lineis *sive* lateribus comprehensam *explicatur. Porro in Lib.* 3. *Prop. I.* (Dati circuli centrum invenire) *deesse videtur hypothesis, facile tamen eruitur ex hac circuli definitione* (Circulus est figura plana una linea comprehensa; ad qvam ab uno puncto eorum, qvæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æqvales:) *qvot enim hic recensentur circuli proprietates, tot supponuntur conditiones, sub qvibus inventio centri asseritur. Et sic de cœteris.*

Nulla vero Theoremata vel Problemata in Mathesi admittuntur, nisi eorum veritas simul certo & evidenter fuerit demonstrata; ideoqve de demonstratione nunc restat dicendum.

Duplex est omnis demonstrandi modus, alter Directus *alter* Inversus. Directus demonstrandi modus *Thesin propositionis ex ipsis principiis aliisve propositionibus evidenter antea demonstratis perpetuo nexu derivat; qvod vocatur* demonstratio *ostensiva. Ex. gr. in Lib.* 1. *Prop. V. thesin* (*Isoscel. sc. triang.* anguli ad basin sunt inter se æqvales) *subjuncta demonstratio deducit ex antecedente Definitione.* 25, *axiomate* 3, *& propositionibus* 3. *&* 4. *prius demonstratis, uti apposita citationes indicant.* Inversus demonstrandi modus *veritatem thesis evincit, deducendo ex antithesi sive contradictoria positione conclusionem,*

ſionem, principiis vel propoſitionibus antea demonſtratis repugnantem; qvod vocatur demonſtratio per impoſſibile ſive per abſurdum: Ex. gr. in Lib. 1. *Prop. VI.* Si trianguli duo anguli ſint inter ſe æqvales, latera æqvalibus angulis ſubtenſa inter ſe æqvalia erunt, *theſis veritas eo ipſo evincitur, qvod demonſtratur ex antitheſi ſive contradictoria poſitione* (ſcil. latera, æqvalibus angulis ſubtenſa, non erunt æqvalia) *abſurdam hanc ſeqvi concluſionem*: majus triangulum minori, ſive pars toti æqvabitur: *idqvod axiomati* 9. *& ſanæ rationi repugnat; qvore demum recte infertur:* dicta trianguli latera non poſſe eſſe inæqvalia; erunt igitur æqvalia: *unde conſtat theſin Propoſitionis ideo eſſe veram, qvia oſtenſum eſt, antitheſin ſive contradictoriam ejusdem eſſe falſam, impoſſibilem ſive abſurdam. Sed hæc omnia ex ipſis Elementorum Euclidæorum demonſtrationibus ſatis ſunt manifeſta.*

Ad demonſtrationes etiam referri ſolent propoſitionum Explicatio *uti &* Conſtructio *figurarum. Utraqve ſeorſim majoris perſpicuitatis ergo in his Elementis demonſtrationibus plerumqve præmittitur:* Explicatio *enim ſenſum theorematis ſingulari qvodam exemplo illuſtrat;* Conſtructio *autem deſcriptionem figurarum ita ordinat, ut earundem intuitu facilius & clarius percipiantur ratiocinia demonſtrationum.*

Qvidqvid è demonſtratione Propoſitionis cujusdam generalioris præter id, qvod ab initio proponebatur demonſtrandum, prona conſeqventia concluditur, eidem ipſi demonſtrationi ſubjungi ſolet, atqve Corollarium (*nonnullis etiam* conſectarium) *vocatur; Ex. gr. Lib.* 1. *Prop. XV. proponitur & demonſtratur,* duabus rectis ſeſe mutuo ſecantibus, angulos ad verticem eſſe inter ſe æqvales. *Qvoniam vero ex*

ipſa

ipsa hujus propositionis demonstratione simul manifesto concludi potest, qvotcunqve rectis se mutuo secantibus, angulos ad punctum sectionis æqvari qvatuor rectis: *Hac igitur conclusio, sub titulo* corollarii, *dicta demonstrationi subjungitur. De reliqvis similiter est sentiendum.*

Ut demonstratio Propositionis alicujus principalioris evadat brevior, alia qvandoqve propositio solet tanqvam subsidiaria assumi & demonstrari; talis autem subsidiaria propositio vocatur Lemma, *& propositionibus, in qvarum gratiam fuit assumpta, plerumqve præmittitur; interdum tamen & subjicitur, uti ex Lib. 6. Prop. XXII. manifestum est.*

Interdum annotationes qvædam vel breves narratiunculæ pro re nata libris mathematicis inseruntur, qvibus, qvæ videantur obscura, clarius explicantur, vel aliqvid scitu jucundum aut utile commemoratur; qvod additamenti genus vocatur Scholion. *Sed nullum Scholii exemplum in hisce prioribus VI. libris Elementorum Euclidis occurrit.*

6. *Qvæ supra de* Methodo Mathematica *diximus, probe notent Tyrones, & ubiqve ipsam Elementorom doctrinam cum legibus istius Methodi conferre assvescant: sic enim Propositionum sensum uti & vim ac evidentiam demonstrationum facilius pleniusqve percipient; atqve tunc demum experientur & cognoscent usum ac utilitatem Geometriæ Elementaris, ubi, hac ipsa prius bene perspecta, ad altiora Philosophiæ naturalis studia vel qvaslibet Matheseos mixtæ partes progrediantur; Qvisqvis vero via contraria ad usum & lucrum festinat, anteqvam diligentem disciplinæ Elementorum Geometricorum operam navaverit, certe non plus in scientiis rerum physicarum vel mixtæ Matheseos proficiet, qvàm si qvis sine notitia elemen-*

torum literalium vel sine peritia lingvarum vastas adeat Bibliothecas, librorum perlustratione eruditionem acqvisiturus.

7. *Qvid in singulis VI. prioribus Libris tradat* EUCLIDES, *ex editione* ElementorumGeometriæ *tertia Cantabrigiensi A.* 1722. *typis excusa, hic sistitur.*

LIBER PRIMUS.

Voluit Euclides in primo *Elementorum suorum Libro prima* Geometriæ *principia exponere. Qvod ut ordine fieret,* Definitiones, *sive vocum usitatissimarum explicationem præmittit: hisce vero* Postulata *superaddit nonnulla, ab omnibus sanæ mentis facile concedenda. Postea* Axiomatis *illis clarissimis, qvibus, natura atqve ratione ducibus, non possumus non assentiri omnes: propositis* Demonstrationes *sive argumenta infallibilia ubiqve adhibet, ut veritatum Mathematicarum fidem vel à pervicacissimo Adversario, maximeqve invito extorqveat. Inprimis autem de Lineis, variisqve, qvos illæ concurrendo formant,* Angulis *tractat: & propositionibus primis* 8. *de* Triangulis *planis agit: simulqve* Angulorum *planorum naturam explicat. Post propositiones istas,* Angulos *Lineasqve bisecandi, &* Perpendicula *sive excitandi sive demittendi methodum ostendit. Deinde vero alias* Triangulorum, *qvin &* linearum *æqvidistantium, sive* Parallelarum *affectiones aperit. Hisce vero peractis, Qvadrilaterorum, & speciatim* Parallelogrammor. *proprietates considerat; ostenditqve qva ratione* Polygona, *sive figuræ multangulæ & irregulares ad rectangula aut parallelogramma, aut etiam triangula, figuras nimirum magis notas atqve regulares, reduci qveant. Postremo autem agmen claudit celeberrimum illud Theorema Pythagoricum, ejusqve conversum:* In

omni

omni Triangulo Rectangulo Qvadratum Lateris qvod recto angulo opponitur æqvale esse duobus simul reliqvorum laterum qvadratis: Et, si qvadratum unius lateris æqvetur duobus simul reliqvorum laterum qvadratis, angulum illi lateri oppositum rectum esse.

LIBER SECUNDUS.

Tractat Liber secundus *de Rectarum linearum* potentiis; *hoc est* qvadratis. *Comparatqve Rectangula varia, è rectarum aut bifariam aut utcunqve divisarum partibus oriunda cum totarum linearum rectangulis & qvadratis. Pars hæc sane elementorum longe utilissima est: speciatim autem Operationum Algebraicarum præcipuarum vere fundamentum. Propositiones tres priores demonstrandæ Multiplicationi, Qvarta radicum qvadraticarum extractioni inservit. Quæ seqvuntur qvinta, secta, septima, octava Operationibus* Algebraicis; *Reliqva vero* Trigonometricis *conferunt plurimum. Prima qvidem fronte Tyronibus hic liber videtur difficillimus; eo qvod mysterii qviddam in se continere sibi imaginentur. Attamen Demonstrationes in eodem adhibitæ pleræqve omnes facillimo huic axiomati nituntur,* Totum, *nempe*, omnibus suis partibus simul sumptis æqvari. *Ne vero animum despondeant Tyrones, si prima vice perfecte neqveant comprehendere. Inter relegendum enim se tam clara non intellexisse olim mirabuntur.*

LIBER TERTIUS.

Continet liber tertius *circuli proprietates: lineasqve plurimas &* intra *ejusdem peripheriam &* extra *ad eandem ductas inter se comparat. Circulorum etiam se mutuo inter secantium, & sic mutuo, aut lineas rectas tangentium affectiones explicat. Angulos etiam* *ſive ad centrum ſive ad circumferentiam poſitos inter ſe componit. Breviter Prima* Geometriæ Practicæ *elementa, circulorum adminiculo potiſſimum innixa, exponit.*

LIBER QVARTUS.

Eſt Qvartus *Elementorum liber* Trigonometriæ *utiliſſimus. Circulo enim polygona inſcribendo, tabulas Chordarum, Tangentium, & Secantium fabricare diſcimus: qvarum ope, figurarum & corporum magnitudines menſuramur: Neqve absqve eo ſtellarum* Aſpectus, *qvos vocant, Qvartilem nempe, Sextilem, &c. rite diſtingvimus: utpote à polygonorum in circulo inſcriptione omnino pendentes. Neqve ſane Circuli aream ſive* qvadraturam *qvandam aliunde qvam ex polygonorum innumerorum circulo inſcriptorum & circumſcriptorum areis ſive* qvadraturis *colligere poſſumus. Et haud aliter circulorum ad ſe invicem rationem duplicatam, è duplicata polygonorum iisdem inſcriptorum aut circumſcriptorum ratione colligimus. Architectura vero militaris polygonis circulo inſcriptis toties utitur, ut præ aliis omnibus ſcientiis, huic libro in ſolidum fere deberi videatur.*

LIBER QVINTUS.

Qvintus *Elementorum liber demonſtrandis libri ſexti propoſitionibus omnino eſt neceſſarius. Doctrinam qvam continet frequentiſſime uſurpamus. Argumentandi vero ratio, è proportione Geometrica petita, eſt plane ſubtiliſſima, ſolidiſſima, breviſſima. Cujusmodi ratiocinandi methodo, tanqvam* Logica *qvadam* Mathematica, Geometria, Arithmetica, Muſica, Aſtronomia, Statica, *& reliqvæ omnes Matheſeos partes maxime utuntur; utpote qvæ proportionibus qvibusdam inter ſe connexis fere totæ nituntur; mo-*

dos-

dosque de proportionalibus ratiocinandi è libro hoc quinto mutuari solent Geometria *quidem* practica *quæ linearum, figurarum atque corporum mensuras complectitur, è proportionum doctrina plerumque derivatur. Regulæ* Arithmeticæ *ad unam omnes ex hujusce quinti libri propositionibus, sine septimo, octavo, nono de numeris ex professo tractantibus, demonstrari possunt. Antiquorum* Musicam *proportiones Geometricas Sonorum modulamini applicatas rite dixeris, quod idem fere de* Statica, *corporum ponderibus applicata, possis asserere. Ut rem totam paucis complectar, si proportionis doctrinam è Mathesi abstuleris, nihil fere præclarum aut egregium relinques.*

LIBER SEXTUS.

Incipit Liber Sextus *egregiam illam de proportione Geometrica Doctrinam in Lib. V. expositam, usibus variis, planeque præstantissimis applicare: & triangulis, figurarum simplicissimis exorsus, eorum latera & areas, prout ad se invicem proportione quadam respondent, investigat. Deinde lineas proportionales & figurarum augmenta aut decrementa proportionalia definit; & quo easdem modo in ratione data augeamus aut minuamus, ostendit. Regulam etiam Auream sive proportionalem, totius arithmeticæ palmariam aperit, & in rectangulo triangulo non tantum quadratum sed pentagonum, hexagonum, & universim polygonum quodcunque ab hypotenusa descriptum, æquari quadratis, pentagonis, hexagonis vel quibuscunque polygonis similibus à duobus lateribus descriptis, demonstrat. Postremo facillima certissimaque tum lineas tum superficies tum corpora mensurandi principia, in omnibus Mathematicarum scientiarum partibus utilissima proponit.*

Hæc, præfationis loco dicta, sufficiant. Vale!

EXPLI-

EXPLICATIO

Signorum abreviationum & citationum, in demonſtrationibus paſſim occurrentium:

= *Signum æqvalitatis.* Sic A = B denotat qvantitates A & B eſſe æqvales.

† *Signum additionis.* Sic A † B denotat ſummam qvantitatum A & B.

— *Signum ſubductionis.* Sic A — B denotat exceſſum qvantitatis A ſupra B.

Def. ſignificat Definitionem.

Ax. Axioma.

Poſt. Poſtulatum.

Prop. Propoſitionem.

Hypoth. Hypotheſin.

Antith. Antitheſin.

Conſtr. Conſtructionem.

Parallelogr. Parallelogrammum.

Qvadr. Qvadratum.

Rectang. Rectangulum.

Coroll. Corollarium.

In citationibus prior numerus deſignat propoſitionem, poſterior librum: Exempli gratia (*per* 18. 3.) legatur per propoſitionem decimam octavam libri tertii. Reliqvas citationes ipſe Lector per ſe facile intelliget.

EUCLI-

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES:

1. PUNCTUM eſt cujus pars nulla eſt.
2. LINEA eſt longitudo non lata.
3. Lineæ EXTREMA ſunt puncta.
4. RECTA LINEA eſt, qvæ ex æqvo ſua interjacet puncta.
5. SUPERFICIES eſt, qvod longitudinem & latitudinem tantum habet.
6. Superficiei EXTREMA ſunt lineæ.
7. PLANA SUPERFICIES eſt, qvæ ex æqvo ſuas lineas interjacet.
8. PLANUS ANGULUS eſt duarum linearum in plano ſeſe tangentium & non in directum jacentium mutua inclinatio.
9 Qvando lineæ angulum comprehendentes rectæ fuerint, angulus ipſe appellatur RECTILINEUS.

10. Cum recta linea super rectam lineam insistens angulos deinceps inter se æqvales fecerit, RECTUS est uterqve æqvalium angulorum, &, qvæ insistit, recta linea PERPENDICULARIS vocatur ad eam, cui insistit.

11. OBTUSUS angulus est, qvi major est recto.

12. ACUTUS, qvi est minor recto.

13. TERMINUS est, qvod alicujus est extremum.

14. FIGURA est, qvæ aliqvo vel aliqvibus terminis comprehenditur.

15. CIRCULUS est figura plana una linea comprehensa, qvæ CIRCUMFERENTIA appellatur, ad qvam ab uno puncto eorum, qvæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æqvales.

16. Hoc autem punctum CENTRUM circuli nuncupatur.

17. DIAMETER circuli est recta qvædam linea per centrum ducta, & ex utraqve parte circumferentia circuli terminata, qvæ etiam circulum bifariam secat.

18. SEMICIRCULUS est figura comprehensa sub diametro & ea circuli circumferentia, qvæ à diametro intercipitur.

19 SEGMENTUM CIRCULI est, qvod rectâ lineâ & circuli circumferentiâ comprehenditur.

20. RECTILINEÆ FIGURÆ sunt, qvæ rectis lineis comprehenduntur.

21. TRILATERÆ qvidem, qvæ tribus;

22. QVADRILATERÆ, qvæ qvatuor;

23. MULTILATERÆ verò, qvæ pluribus qvàm qvatuor rectis lineis comprehenduntur.

24. è Trilateris figuris ÆQVILATERUM TRIANGULUM est, qvod tria habet latera æqvalia.

25. ISOSCELES autem, qvod duo tantum æqvalia habet latera.

26. Scalenum verò, qvod tria latera habet inæqvalia.

27. Adhæc è trilitaris figuris RECTANGULUM TRIANGULUM est, qvod rectum angulum habet.

28. AMBLIGONIUM, qvod angulum habet obtusum.

29. OXIGONIUM, qvod tres angulos habet acutos.

30. è Figuris qvadrilateris QVADRATUM est, qvod & æqvilaterum est & rectangulum.

31. OBLONGUM, qvod rectangulum qvidem est, sed non æqvilaterum.

32. RHOMBUS, qvod æqvilaterum qvidem est, sed non rectangulum.

33. RHOMBOIDES, qvod nec æqvilaterum est nec rectangulum, sed habet opposita & latera & angulos æqvalia.

34. Reliqva autem qvadrilatera præter hæc vocantur TRAPEZIA.

35. PARALLELÆ deniqve rectæ lineæ sunt, qvæ in eodem jacentes plano, atqve ex utraqve parte in infinitum productæ, in neutram sibi coincidunt.

POSTULATA:

1. Postuletur à qvovis puncto ad qvodvis punctum rectam lineam ducere.

2. Item rectam lineam finitam continuè in directum produeere.
3. Item qvovis centro & intervallo circulum describere.

COMMUNES NOTIONES sive AXIOMATA:

1. Qvæ eidem æqvalia sunt, inter se sunt æqvalia.
2. Si æqvalibus æqvalia addantur, tota sunt æqvalia.
3. Si ab æqvalibus æqvalia auferantur, reliqva sunt æqvalia.
4. Si inæqvalibus æqvalia addantur, tota sunt inæqvalia.
5. Si ab inæqvalibus æqvalia auferantur, reliqva sunt inæqvalia.
6. Qvæ ejusdem sunt duplicia, inter se sunt æqvalia.
7. Qvæ ejusdem sunt dimidia, inter se sunt æqvalia.
8. Qvæ sibi mutuo congruunt, sunt æqvalia.
9. Totum sua parte majus est.
10. Omnes anguli recti inter se sunt æqvales.
11. Si in duas rectas lineas recta incidens angulos interiores & ad easdem partes duobus rectis minores fecerit; duæ illæ rectæ lineæ, in infinitum productæ, coincident inter se ex ea parte, ad qvam sunt anguli duobus rectis minores.
12. Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

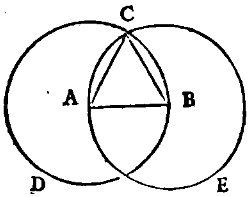
PRO-

* * * *
* *

PROPOSITIO I.
PROBLEMATA.

Super datam rectam terminatam triangulum æqvilaterum constituere.

Sit data recta linea terminata AB: oportet vero super hanc rectam AB triangulum æqvilaterum constituere.



Constructio.

1. Centro qvidem A, intervallo autem AB describatur circulus BCD; & rursus centro B, intervallo BA describatur circulus ACE. (per 3 postul.)
2. A puncto C, in qvo circuli sese mutuo secant, ad puncta A, B ducantur rectæ CA, CB. (per 1. post.)

Demonstratio.

Qvoniam recta AC = AB
& recta BC = AB } (per 15. definit.)

Est igitur recta AC = BC (per 1. axioma.)

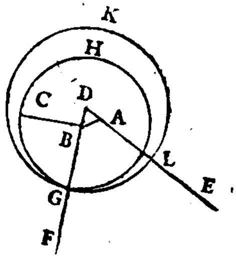
Qvare tres rectæ AB, AC, BC sunt inter se æqvales, & triangulum ABC, super datam rectam AB constitutum, est æqvilaterum (per 24 defin.). *Qvod erat faciendum.*

PROP. II. PROBL.

Ad datum punctum datæ rectæ æqvalem rectam ponere.

 Sit

Sit datum punctum A & data recta BC: oportet quidem ad punctum A rectæ BC æqvalem rectam ponere.



Constructio.

1. Ducatur ab A puncto ad punctum B recta AB (per 1 post.)
2. Super hanc rectam AB constituatur triangulum æqvilaterum ABD (per 1 propos.)
3. Linea DA in directum producatur usqve ad E, & linea DB itidem producatur usqve ad F. (per 2 post.)
4. Deinde centro B intervallo BC describatur circulus CGH; & rursus centro D intervallo DG describatur circulus GLK, (per 3 post.)

Demonstratio.

Qvoniam punctum B est centrum circuli CHG,
erit recta BC = BG;
punctum vero D est centrum (per 15. def.)
circuli GLK, ideoqve recta DL = DG

porro recta AD = BD (per construct. & 24. def.)
Qvodsi jam ab æqvalibus, sc. DL = DG
auferantur æqvales AD = BD

relinqventur æqvales, sc. AL = BG (per 3 ax.)
atqvi etiam recta BC = BG (per 15 defin.)
Ergo & AL = BC (per 1 ax.)

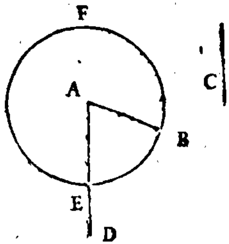
Ad datum igitur punctum A, datæ rectæ BC æqvalis posita est recta AL. *Qvod erat faciendum.*

PROP. III. PROBL.

Datis duabus rectis inæqvalibus, à majore auferre rectam æqvalem minori.

Sint

Sint data rectæ inæqvales AD & C, qvarum major sit AD: oportet a recta AD majore auferre rectam æqvalem rectæ C minori.



Conſtructio.

1. Ad punctum A ponatur recta AB æqvalis rectæ C (per 2 Pr.)
2. Centro A, intervallo AB, deſcribatur circulus BEF (per 3 poſt.)

Demonſtratio.

Qvoniam A eſt centrum circuli BEF,
erit recta AE = AB (per 15. defin.);
eſt autem recta C = AB (per conſtruct.)
Ergo etiam rectæ AE & C ſunt inter ſe æqvales (per 1 ax.),

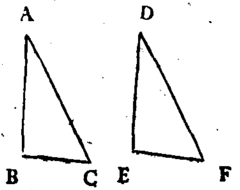
Hoc eſt: à majore AD ablata eſt recta AE æqvalis rectæ C.

Qvod erat faciendum.

PROP. IV. THEOREMA.

Si duo triangula habuerint duo latera duobus lateribus æqvalia, alterum alteri; & angulum æqvalem angulo, qvi ab æqvalibus rectis comprehenditur; habebunt & baſin baſi æqvalem, & triangulum erit triangulo æqvale, & reliqvi anguli reliqvis angulis æqvabuntur, alter alteri, qvibus æqvalia latera ſubtenduntur.

Sint duo triangula ABC, DEF, habentia duo latera AB, AC æqvalia duobus lateribus DE, DF, alterum alteri; nempe latus AB æqvale lateri DE, & latus AC lateri DF, & angulum BAC æqvalem angulo EDF: Dico & basin BC æqvari basi EF, & triangulum ABC æqvari triangulo DEF, & reliqvos angulos reliqvis angulis æqvari, alterum alteri, qvibus latera æqvalia subtenduntur; angulum nempe ABC angulo DEF & angulum ACB angulo DFE.



Demonstratio.

Si punctum D puncto A applicetur, & recta DE rectæ AB superponatur, cadet punctum E in B, qvia DE = AB, (per hypothesin)

item recta DF cadet in rectam AC, qvia angulus A = ang. D, (per hypoth.

Porro punctum F coincidet puncto C, qvia recta AC = rectæ DF (per hypoth.

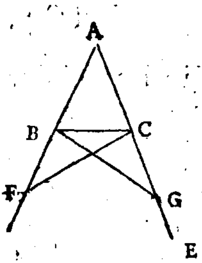
Ergo rectæ BC, EF, qvia eosdem habent terminos, sibi mutuo congruent, ac proinde æqvales erunt (per 8 ax.)

Qvare totum triangulum BAC toti triangulo EDF congruet, eiqve erit æqvale, & anguli B, E, item anguli C, F, etiam congruent & æqvabuntur. *Qvod erat demonstrandum.*

PROP. V. THEOR.

Triangulorum Isoscelium anguli ad basin sunt inter se æqvales: & productis æqvalibus rectis, anguli sub basin erunt inter se æqvales.

Sit



Sit triangulum Isosceles ABC habens latus AB aeqvale lateri AC, & producantur rectae BD, CE, in directum rectis AB, AC (per 2 post). Dico Imo angulum ABC aeqvalem esse angulo ACB; item IIdo angulum CBD aeqvalem esse angulo BCE

Constructio.

Sumatur in recta BD punctum qvodlibet F, & ab AE recta majore auferatur recta AG = rectæ AF (per 3 prop.), & ducantur rectæ FC, GB.

Demonstratio.

1. Qvoniam in duobus triangulis ACF, ABG duo latera sunt æqvalia.

& qvidem latus AC = AB (per 25. defin.)

item latus AF = AG (per construct.)

Porro angulus A est utriqve triangulo ACF, ABG communis;

Erit igitur angulus ABG = angulo ACF
& angulus AGB = angulo AFC (per 4 Prop).
Basis etiam BG = Basi CF

Qvod si jam ab æqvalibus rectis AF, AG auferantur æqvales rectæ AB, AC, relinqventur æqvales rectæ BF, CG (per 3 ax).

Cum vero & rectæ BG, CF sunt æqvales, & angulus AGB æqvalis angulo AFC (sive qvod idem est, angulus CGB æqvalis angulo BFC) uti supra ostensum est:

Erit porro angulus BCF = anguloCBG (per 4 prop.)

Atqvi totus angulus ACF = toti angulo ABG (ut supra)

Ergo angul ACF — ang.BCF = ang. ABG — ang. CBG (p.3 ax.)

hoc est angulus ACB = angulo ABC

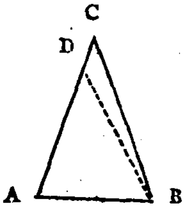
Qvod Imo erat demonstrandum.

2. Qvoniam duo triangula FCB, GBC, habent duo latera æqvalia, nempe latus FC æqvale lateri GB, & latus BF æqvale lateri CG, habent vero etiam angulum BFC æqvalem angulo CGB (uti supra ostens.)

Erunt igitur anguli CBF, BCG, vel qvod idem est, anguli CBD & BCE inter se æqvales (per 4 Prop.) *Q. IIdo e. d.*

PROP. VI. THEOR.

Si trianguli duo anguli ſint inter ſe æqvales, latera æqvalibus angulis ſubtenſa inter ſe æqvalia erunt.



Eſto triangulum ABC, habens angulum ABC æqvalem angulo BAC: Ajo latus AC æqvale eſſe lateri BC.

Demonſtratio.

Si latus AC eſt inæqvale lateri BC, alterum eorum erit majus: ſit vero (per anthitheſin) latus AC majus; ab hoc autem majore auferatur recta AD æqvalis lateri BC minori, ſi fieri poteſt (per 3 prop.); deinde ducatur recta DB (per 1 poſt.)

Qvoniam nunc in duobus triangulis ABC, ABD latus AD = BC (per anthitheſin)

Latus vero BA eſt utriqve triangulo ABC & ABD commune, & angulus ABC = angulo BAC (per hypoth.)

Baſis igitur DB æqvabitur baſi AC & triangulum ABD æqvabitur triangulo ABC, majus minori, ſive pars toti, qvod 9. axiomati repugnat.

Non eſt ideo latus AC inæqvale lateri BC, eſt igitur æqvale.

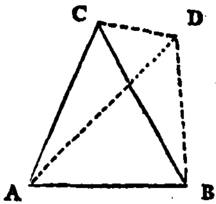
Qvare duo trianguli latera duobus æqvalibus angulis ſubtenſa inter ſe ſunt æqvalia. *Qvod erat demonſtr.*

PROP VII. THEOR.

Super eandem rectam, duabus iiſdem rectis duæ aliæ rectæ æqvales altera alteri non conſtituentur, ad aliud atqve aliud punctum in eaſdem partes, eoſdem terminos habentes cum rectis initio ductis.

Sint

Sint super eandem rectam AB, ducta duæ rectæ AC, BC; Dico, qvod non possint duæ aliæ rectæ duabus rectis AC, BC, æqvales duci ab iisdem terminis A & B in easdem partes ad aliud punctum præterqvam ad C.



Demonstratio.

Ab iisdem terminis A & B, duæ aliæ rectæ uti AD, BD in easdem partes ad aliud qvodlibet punctum D, ducantur, junganturqve C, D.

Sit jam recta AC ≍ rectæ AD (per antith.);

erit angulus ACD ≍ ang. ADC (per 5 prop.)

Qvare angulus ADC major erit angulo DCB
& angulus CDB multo major ang. DCB (per 9. ax.)

Rursus qvoniam recta BC ≍ rectæ BD (per antithesin)
erit angulus CDB ≍ ang. DCB (per 5 prop.)

Atqvi supra ostensum est angulum CDB multo majorem esse eodem angulo DCB.

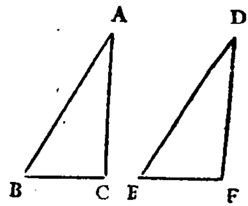
Fieri ergo neqvit, ut super eandem rectam duabus iisdem rectis duæ aliæ rectæ æqvales constituantur ad aliud atqve aliud punctum in easdem partes, eosdem terminos habentes cum rectis initio ductis. *Qvod erat demonstr.*

PROP. VIII. THEOR.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqvalia, alterum alteri; habeant etiam & basin basi æqvalem: angulum qvoqve angulo æqvalem habebunt ab æqvalibus rectis comprehensum.

Sint

Sint duo triangula ABC, DEF habentia duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF æqvalia alterum alteri, latus qvidem AB lateri DE & latus AC lateri DF; habeant etiam & basin BC æqvalem basi EF: Dico angulum BAC æqvalem esse angulo EDF.



Demonstratio.

Si triangulum ABC applicetur triangulo DEF, & punctum B ponatur super punctum E, & recta BC super rectam EF, congruet punctum C puncto F; qvia recta BC = EF (per hypoth.)

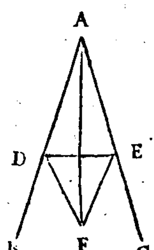
Rectâ verò BC congruente rectæ EF, etiam AB, AC, congruent rectis DE, DF; nam super iisdem, sive æqvalibus rectis BC, EF, duæ aliæ rectæ æqvales rectis AB, AC, constitui non possunt ad aliud punctum in easdem partes nisi ad A vel D (per 7 prop.)

Cum igitur basis BC congruit basi EF, & latera AB, AC, lateribus DE, DF congruunt; angulus BAC etiam angulo EDF congruet, adeoqve ei æqvalis erit (per 8 ax.) *Q. e. d.*

PROP. IX. PROBL.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

Sit datus angulus rectilineus BAC: oportet illum bifariam secare.



Constructio.

1. Sumatur in recta AB punctum qvodlibet D, & à recta AC auferatur recta AE, æqvalis rectæ AD (per 3 prop.)
2. Ducatur recta DE (per 1 post.)
3. Super rectam DE fiat triangulum æqvilaterum DEF (per 1 prop.)
4. Ducatur recta AF (per 1 post.): Dico angulum BAC bifariam secari a recta AF.

De-

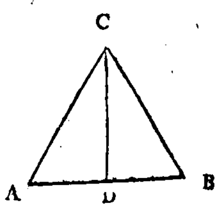
Demonstratio.

Qvoniam recta AD = AE (per Construct.)
Recta autem AF est communis;
Duo igitur triangula ADF, AEF, habent duo latera æqvalia; habent
Vero & basin basi æqvalem, sc. DF = EF (per Constr.)
Ergo angulus BAF = angulo CAF (per 8 prop)
Qvare angulus BAC sectus est bifariam. *Q. e. f.*

PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

Sit data recta terminata AB: oportet hanc bifariam secare.



Constructio.

1. Fiat super datam rectam triangulum æqvilaterum ABC (per 1 pr.)
2. Angulus ACB bifariam secetur à recta CD (per 9 prop.):

Dico rectam AB bifariam secari in puncto D.

Demonstratio.

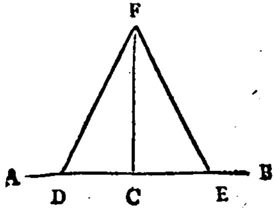
Qvoniam recta AC = rectæ BC (per const.);
Recta autem CD est communis;
Duo igitur triangula ACD, BCD habent duo latera æqvalia; habent vero & angulos inter hæc latera comprehensos æqvales, sc. angulum ACD = angulo BCD (per Constr.)
Ideoqve erit basis AD = basi DB (per 4 prop.)
Qvare recta AB bifariam in puncto D secta est.
Quod erat faciendum.

PROP.

PROP. XI. PROBL.

Datâ rectâ lineâ, à puncto in ipsa dato ad angulos rectos rectam lineam ducere.

Sit data recta AB, & punctum in ea datum C: oportet à puncto C ipsi rectæ AB ad rectos angulos lineam ducere.



Constructio.

1. Sumatur in recta AC punctum qvodlibet D & ponatur CD æqvalis rectæ CE (per 3 prop.)
2. Super rectam DE constituatur triangulum æqvilaterum FDE (per 1 prop.)
3. Ducatur recta FC (per 1 post.):

Dico qvod datæ rectæ AB ad datum in ea punctum C ad rectos angulos ducta sit recta FC.

Demonstratio.

Qvoniam duo triangula DFC, EFC habent duo latera æqvalia, latus nempe DC = lateri EC, latus vero FC utriqve commune, & basin DF = basi EF (per constr.); Angulus igitur DCF est æqvalis angulo ECF (per 8 prop.).

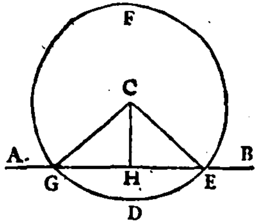
Qvare recta FC, super datam rectam AB insistens & angulos deinceps DCF, ECF, æqvales faciens à dato puncto C ad angulos rectos ducta est (per 10. defin.) *Qvod erat fac.*

PROP. XII. PROBL.

Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, qvod non est in eadem, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit

Sit data recta infinita AB & datum punctum C, qvod non est in eadem: oportet super datam rectam infinitam AB, à dato puncto C perpendicularem lineam rectam ducere.



Constructio.

1. Sumatur ex altera parte rectæ AB punctum qvodlibet D & centro C, intervallo CD describatur circulus EFG (per 3 post.)
2. Secetur recta EG bifariam (per 10. prop.);
3. Ducantur rectæ CG, CH, CE (per 1 post.):

Dico qvod super datam rectam infinitam AB, à dato puncto C, ducta est perpendicularis recta linea CH.

Demonstratio.

Duo triangula HEC, HGC habent duo latera æqvalia & basin basi æqvalem, latus nempe EH = GH (per constr.) latus vero HC est utriqve commune; basis deniqve CG = basi CE (per 15. defin.)

Est igitur angulus CHG = angulo CHE (per 8 prop.); atqve hi anguli sunt deinceps:

Cum autem recta CH super rectam AB insistens, angulos deinceps CHG, CHE, inter se æqvales facit, perpendicularis ducta est ad eandem rectam AB (per 10 defin.)

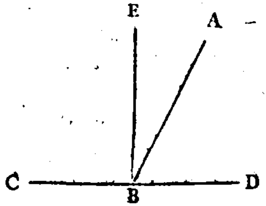
Qvod erat fac.

PROP. XIII. THEOR.

Si recta insistens in rectam faciat angulos, vel duos rectos faciet, vel duobus rectis æqvales.

Recta

Recta qvalibet AB insistens in rectam CD faciat angulos CBA, ABD: Dico qvod anguli CBA, ABD, vel erunt recti, vel duobus rectis æqvales.



Demonstratio.

Si anguli CBA, ABD sint æqvales erunt recti (per 10 defin.)

Sin autem inæqvales sint, à puncto B ad angulos rectos ducatur linea BE (per 11 prop.); Sic duo anguli deinceps CBE, EBD erunt inter se æqvales, ideoqve recti (per 10. defin.);

Cum igitur anguli CBE†EBD æqvales sunt duobus ang. rectis, angulus vero CBA†ang. ABD ∺ ang. CBE†EBD (per. 8 ax)

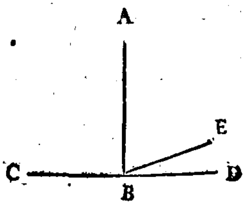
Erunt etiam CBA†ABD ∺ duobus ang. rectis (per 1 ax.)

Qvælibet igitur recta insistens in rectam, si angulos faciat, vel duos rectos faciet vel duobus rectis æqvales. *Qv. erat dem.*

PROP. XIV. THEOR.

Si ad aliqvam rectam lineam & ad punctum in ea duæ rectæ, non ad easdem partes positæ, faciant angulos deinceps duobus rectis æqvales; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt.

Ad aliqvam rectam lineam AB & ad punctum in ea B duæ rectæ BC, BD, non ad easdem partes positæ faciant angulos deinceps ABC, ABD, duobus rectis æqvales: dico rectam BD esse in directum lineæ CB.



Demonstratio.

Si recta BD non sit in directum rectæ CB supponatur aliam qvamcunqve BE in directum rectæ CB duci posse (per 2 post.)

Qvo-

Qvoniam vero rectæ CB, BE ſibi invicem in directum poſitæ ſint, (per antith.) ideoqve unam rectam ex æqvo ſua puncta C, E interjacentem conſtituant (per 4 def.)

Recta igitur AB inſiſtens in rectam CBE faciet
angulos ABC + ABE = duobus rectis (per 13 prop.)
Sunt autem ang. ABC + ABD = duobus rectis (per hypoth.)

Qvare anguli ABC + ABE = ABC + ABD (per 1 ax.)
Si jam auferatur communis ABC;

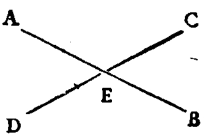
erit reliqvus angulus ABE = ABD (per 3 ax.)
Sed angulus ABE eſt pars totius ABD;

Erit ergo pars ABE = ſuo toti ABD; (qvod axiomati 9 repugnat).

Recta igitur BE non poteſt eſſe in directum rectæ lineæ CB: eadem etiam ratione oſtendetur nec ullam aliam rectam, præter BD, in directum rectæ CB duci poſſe. Qvare ipſæ rectæ CB, BD in directum ſibi invicem ſunt. *Q. e. d.*

PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ ſeſe mutuo ſecent, angulos ad verticem facient inter ſe æqvales.



Duæ rectæ AB, CD, ſeſe mutuo ſecent in puncto E: Dico angulum AEC æqvari angulo DEB, & angulum CEB æqvari angulo AED.

Demonſtratio.

Recta AE inſiſtens rectæ CD facit duos angulos CEA + AED = duobus rectis
Porro recta DE inſiſtens rectæ AB facit duos angulos AED + DEB = duobus rectis
(per 13 prop).

Ergo anguli CEA + AED = ang. AED + DEB (per 1 ax.)
Hinc communis auferatur angulus AED;

erit reliqvus ang. CEA = reliqvo DEB (per 3 ax.)

Eodem modo demonſtrabitur angulos CEB, DEA eſſe æqvales:

Si igitur duæ rectæ ſeſe mutuo ſecent, facient angulos ad verticem inter ſe æqvales. *Q. e. d.*

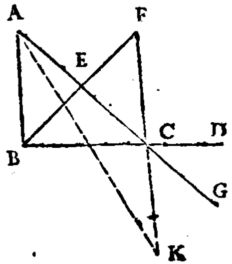
Corollarium.

Hinc manifestum est, qvotcunqve rectis se mutuo secantibus, angulos ad punctum sectionis æqvari qvatuor rectis.

PROP. XVI. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto, angulus exterior major est utrolibet interiorum & oppositorum.

Sit triangulum ABC, & producatur latus BC usqve ad D: dico exteriorem angulum ACD majorem esse utrolibet interiorum & oppositorum CBA, BAC.



Constructio.

1. Secetur AC bifariam in E (per 10 prop.)
2. Ducta recta BE producatur ad F (per 1 & 2 post.)
3. Ponatur EF æqvalis rectæ BE (per 3 prop.)
4. Ducatur recta FC (per 1 post.)
5. Producatur AC ad G (per 2 post.)

Demonstratio,

Qvoniam duo triangula AEB, CEF habent duo latera æqvalia & unum angulum uni angulo æqvalem:

sc. latus AE ≐ lateri EC, latus BE ≐ lateri EF (per constr.)
& angulum AEB ≐ angulo FEC (per 15. prop.)

habebunt igitur basin AB ≐ basi FC & angulum BAE ≐ angulo ECF (per 4 prop.)

Est autem angulus ECD major angulo ECF (per 9 ax.); proinde & angulus ECD major est angulo BAE, vel qvod idem est angulus ACD major est angulo BAG; qvia ang. ACD ≐ ECD, & BAC ≐ BAE (per 8 ax.)

Eodem modo si BC secetur bifariam, demonstrabitur angulum BCG majorem esse angulo ABC; qvare angulus ACD etiam major erit angulo ABC, qvia ACD = BCG (per 15. prop.)

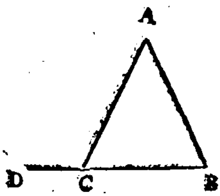
Omnis igitur trianguli, uno latere producto, angulus exterior major est utrolibet interiorum & oppositorum.

Qvod erat demonstr.

PROP. XVII. THEOR.

Omnis trianguli duo anguli sunt minores duobus rectis, qvomodocunqve sumpti.

Sit triangulum ABC: dico duos angulos trianguli ABC, qvomodocunqve sumptos, minores esse duobus rectis.



Demonstratio.

Producatur BC ad D (per 2 post.)

Sic erit exterior angulus ACD major interno ang. ABC, (per 16. prop.) addatur communis angulus ACB

Erunt anguli ACD†ACB majores angulis ABC†ACB (per 4 ax.)

Sed anguli ACD†ACB = duobus angulis rectis (per 13. prop.)

Ergo anguli ABC†ACB sunt minores duobus rectis.

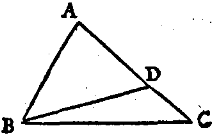
Eodem modo demonstrabitur angulos BAC†ACB, itemqve angulos CAB†ABC minores esse duobus rectis.

Omnis igitur trianguli duo anguli sunt minores duobus rectis, qvomodocunqve sumpti. *Qvod erat demonstr.*

PROP. XVIII. THEOR.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.

 Sit



Sit triangulum ABC habens latus, AC, majus latere AB: dico angulum etiam ABC majorem esse angulo ACB.

Constructio.

1. A majore latere AC auferatur recta AD æqvalis lateri minori AB (per 3 prop.);
2. Ducatur recta BD (per 1 post.)

Demonstratio.

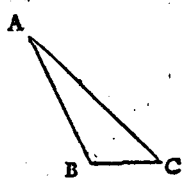
Latus BA ≍ AD (per construct.), ideoqve angulus ABD ≍ angulo ADB (per 5 prop.);
Trianguli BDC angulus exterior ADB, major est inter. & opposito DCB (per 16 prop.)

Ergo & angulus ABD major est angulo DCB, sive ACB;
Sed totus ang. ABC major est angulo ABD (per 9. ax.)

ideoqve angulus ABC multo major est angulo ACB:
Omnis igitur trianguli majus latus majorem angulum subtendit. *Qvod erat demonstr.*

PROP. XIX. THEOR.

Omnis trianguli majori angulo majus latus subtenditur.



Sit triangulum ABC habens angulum ABC majorem angulo BCA; Dico latus AC majus esse latere AB.

Demonstratio.

Si latus AC non sit majus latere AB, vel est ei æqvale vel eodem minus;
Sit jam primo latus AC ≍ lateri AB (per antithesin.)

Sic angulus ABC ≍ angulo BCA (per 5 prop.);
Atqvi angulus ABC major est ang. BCA (per hypoth);
Ergo latus AB non potest esse æqvale lateri AC.

Sit

Sit autem 2do latus AC minus latere AB (per antith.);

Sic, qvoniam angulus ABC est major angulo ACB, minus latus majorem angulum subtenderet, qvod fieri neqvit (per prop. 18.)

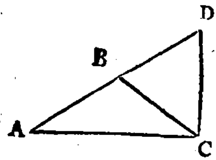
Cum vero jam ostensum est latus AC non posse esse lateri AB æqvale, nec eodem minus: Erit igitur majus.

Qvod erat. demonstr.

PROP. XX. THEOR.

Omnis trianguli duo latera sunt majora reliqvo, qvomodocunqve sumpta.

Sit triangulum ABC: Dico trianguli ABC duo latera qvomodocunqve sumta majora esse reliqvo; nempe AB† BC majora esse latere AC; & BA† AC latere BC; & AC†CB latere BA.



Constructio.

1. Producatur latus AB ad punctum D (per 1 post.);
2. Ponatur BD æqvalis rectæ BC (per 3 prop.);
3. Ducatur recta DC (per 1 post.)

Demonstratio.

Qvoniam recta DB = rectæ BC (per Constr.);

erit ang. BDC = angulo BCD (per 5 prop.);

Est autem angulus ACD major ang. BCD (per 9 ax);

Major igitur est angulus ACD angulo BDC, sive angulo ADC; ideoqve & latus AD, majori angulo subtensum, majus est latere AC (per 19. prop.)

Est vero recta AD = duobus lateribus,

AB†BC; qvia BD = BC [uti supra ostens.]

Ergo duo latera AB†BC majora sunt latere AC.

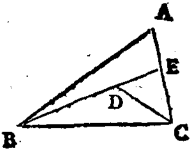
Eodem modo ostendetur latera AB†AC majora esse latere BC; & latera AC†CB majora latere AB. Qvare omnis trianguli duo latera, qvomodocunqve sumta, sunt majora reliqvo.

Qvod erat demonstr.

PROP. XXI. THEOR.

Si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ intus constituantur: hæ reliqvis duobus trianguli lateribus minores qvidem erunt, majorem vero angulum comprehendent.

Sint à terminis B, C, unius lateris BC, trianguli ABC, duæ rectæ BD, DC constitutæ: Dico rectas BD, DC minores esse duobus reliqvis trianguli lateribus BA, AC; angulum tamen comprehendere BDC majorem angulo BAC.



Demonstratio.

Producatur recta BD ad punctum E.

Imo Trianguli ABE duo latera AB+AE sunt majora latere BE (per 20 prop.)

communis addatur recta EC.

Erunt igitur latera BA+AE+EC majora rectis BE+EC (per 4 ax.)

Porro trianguli CED, duo latera CE+ED sunt majora latere DC (per 20 prop.)

communis addatur recta DB

Erunt rectæ CE+ED+DB majores rectis DC+DB (per 4 ax.);

Sed latera BA+AE+EC (sive BA+AC) majora sunt rectis CE+ED+DB (sive rectis BE+EC, ut supra ostensum est.)

Ergo latera BA+AC multo majora sunt rectis DB+DC. *Qvod Imo erat demonstrandum.*

IIdo Trianguli CDE exterior angulus BDC major est interno & opposito CED, & trianguli ABE exterior angulus CEB, sive CED, major est interno & opposito BAC (per 16 prop.)

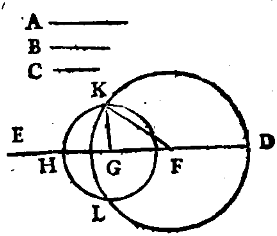
Angulus igitur BDC multo major est angulo BAC. *Qvod IIdo erat demonstrandum.*

PROP.

PROP. XXII. PROBL.

E tribus rectis, qvæ tribus rectis datis æqvales sunt, triangulum constituere; oportet autem duas utcunqve sumtas majores esse reliqva.

Sint tres datæ rectæ, A, B, C, qvarum duæ utcunqve sumtæ sint majores reliqva, nempe A†B majores qvam C; item A†C majores qvam B; deniqve B†C majores qvam A: oportet è rectis lineis, æqvalibus ipsis A, B, C, triangulum constituere.



Constructio.

1. Ponatur recta linea DE finita qvidem ad D, infinita vero versus E (per 1 & 3 post.)
2. Ponatur DF æqvalis rectæ A, & recta FG æqvalis rectæ B, recta autem GH æqvalis rectæ C (per 3 prop.)
3. Centro F, intervallo FD describatur circulus DKL, & rursus Centro G, intervallo GH describatur circulus KLH (per 3 post.)
4. Ducantur rectæ KF, KG (per 1 post):

Dico triangulum KFG fieri è tribus lineis rectis, æqvalibus ipsis rectis A, B, C.

Demonstratio.

Recta FD = rectæ FK (per 15 def.)
Atqvi FD = rectæ A (per construct.)

Ergo FK = A (per 1 ax.)

Rursus recta GH = rectæ GK (per 15. Def.;)
Est autem GH = rectæ C (per constr.)

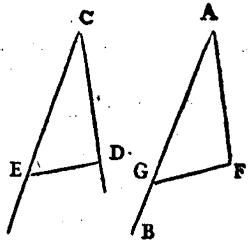
Ergo GK = rectæ C (per 1 ax.)
Recta deniqve FG = rectæ B (per construct.);

Tres igitur rectæ FK, FG, GK æqvantur tribus rectis A, B, C; ideoqve è tribus rectis, qvæ tribus rectis datis sunt æqvales, constitutum est triangulum KFG. *Q. e. f.*

PROP. XXIII. PROBL.

Ad datam rectam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo angulum rectilineum æqvalem constituere,

Sit data recta linea AB, & in ea datum punctum A, datus autem angulus rectilineus sit DCE: oportet ad datam rectam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE æqvalem angulum rectilineum constituere.



Constructio.

1. Summantur in utraq; recta CD, CE puncta qvælibet D, E & ducatur recta DE (per 1 post.)
2. E tribus rectis lineis, qvæ æqvales sint tribus CD, DE, CE, constituatur triangulum AFG, ita ut CD æqvetur rectæ AF, recta autem CE rectæ AG, recta deniqve DE rectæ FG (per 22 prop.)

Demonstratio.

Qvoniam in duobus triangulis CDE, AFG, duo latera sunt æqvalia, scil. latus CD = lateri AF; CE = AG; & deniqve basis DE = basi FG (per constr.); Erit itaqve angulus DCE = angulo FAG (per 8 prop.)

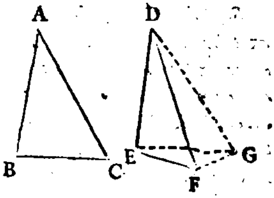
Ad datam igitur rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE constitutus est æqvalis angulus rectilineus. *Q. e. f.*

PROP. XXIV. THEOR.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqvalia, alterum alteri; angulum autem angulo majorem, qvi ab æqvalibus rectis comprehenditur; etiam basin basi majorem habebunt.

Sint

Sint duo triangula ABC, DEF, qvæ duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DF habent æqvalia, alterum alteri, latus nempe AB lateri DE, atqve latus AC lateri DF; angulus autem BAC sit major angulo EDF: Dico basin BC majorem esse basi EF.



Constructio.

1. Ad rectam DE, & ad punctum in ea D constituatur angulus EDG æqvalis angulo BAC (per 23 prop.);
2. Ponatur DG æqvalis alterutri rectarum AC, DF (per 3 prop.)
3. Ducantur GE, FG (per 1 post.)

Demonstratio.

Recta AB = rectæ DE (per hypoth.); recta vero AC = rectæ DG, & angulus BAC = angulo EDG (per construct.); ideoqve basis BC = basi EG (per 4 prop.);

Rursus recta DG = rectæ DF (per constr.); ergo angulus DFG = angulo DGF (per 5 prop.);

Est autem angulus DGF major angulo EGF (per 9 ax.); angulus igitur DFG etiam major est angulo EGF.

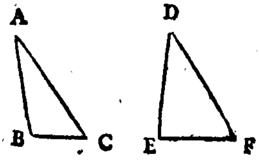
Porro angulus EFG major est angulo DFG (per 9 ax.); Ergo angulus EFG multo major est angulo EGF; ideoqve latus EG, qvod majori angulo EFG subtenditur, majus est latere EF (per 19 prop.)

Sed latus EG = lateri BC (per jam demonstrata); Ergo latus BC majus est latere EF, hoc est, trianguli BAC basis BC major est basi EF alterius trianguli DEF. *Q. e. d.*

PROP. XXV. THEOR.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqvalia, alterum alteri; basin autem habeant basi majorem; habebunt etiam ang. majorem angulo, qvi ab æqvalibus rectis comprehenditur.

Sint duo triangula ABC, DEF, qvæ habent duo latera AB, AC, æqvalia duobus lateribus DE, DF, alterum alteri; latus qvidem AB lateri DE, & latus AC lateri DF; basis autem EF sit major basi BC: Dico angulum EDF majorem esse angulo BAC.



Demonstratio.

Si angulus EDF non sit major angulo BAC, vel est ei æqvalis, vel eodem minor.

Imo sit angulus BAC = angulo EDF (per antith.); sic erit basis BC = basi EF (per 4 prop.);

Atqvi basis BC non est æqvalis basi EF (per hypothesin); ergo nec angulus BAC est æqvalis angulo EDF (per 24 prop.)

IIdo Sit vero EDF minor angulo BAC (per antith.); erit basis EF minor basi BC (per 24 prop.);

Atqvi basis EF non est minor basi BC (per hypoth.); Ergo nec angulus EDF minor est angulo BAC.

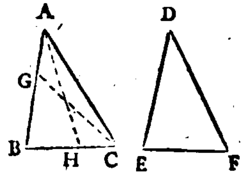
Cum autem ostensum est angulum EDF non esse æqvalem angulo BAC, nec esse minorem; erit igitur major.

Qvod erat demonstrandum.

PROP. XXVI. THEOR.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æqvales habeant, alterum alteri, unumqve latus uni lateri æqvale; vel qvod æqvalibus adjacet angulis, vel qvod uni æqvalium angulorum subtenditur: & reliqva latera reliqvis lateribus æqvalia, alterum alteri, & reliqvum angulum reliqvo angulo æqvalem habebunt.

Sint



Sint duo triangula ABC, DEF, quæ duos angulos ABC, BCA duobus angulis DEF, EFD æqvales habent; angulum sc. ABC æqvalem angulo DEF, angulum vero BCA æqvalem angulo EFD; sitqve porro unum ex lateribus trianguli ABC æqvale uni lateri alterius trianguli DEF: Dico etiam reliqva latera trianguli ABC esse æqvalia reliqvis lateribus trianguli DEF, alterum alteri, & reliqvum deniqve angulum BAC esse æqvalem reliqvo angulo EDF.

Demonstratio.

Imo Sit latus BC ≍ lateri EF (per hypoth.) Dico esse latus BA ≍ Lateri ED, & AC ≍ DF, item angulum BAC ≍ angulo EDF;

Nam si è contrario ponatur BA inæqvale esse lateri ED, eorum alterum erit majus; Sit jam AB majus (per antithesin); fiatqve latus BG ≍ lateri ED (per 3 prop), & ducatur recta GC (per 1 post.)

Qvoniam vero nunc BG ≍ lateri ED (per antith.), & BC ≍ lateri EF, item angulus ABC ≍ angulo DEF (per hypoth.); erit igitur ang. BCG ≍ ang. EFD (per 4 prop.)

Atqvi angulus BCA ≍ angulo EFD (per hypoth.); Esset itaqve angulus BCG ≍ angulo BCA (per 1 ax.); qvod tamen fieri neqvit (per 9 ax.)

Non est igitur latus BA inæqvale lateri ED; ergo est æqvale.

IIdo Sit latus AB ≍ lateri DE (per hypoth.): Dico esse latus BC ≍ lateri EF, & latus AC ≍ lateri DF, item angulum BAC ≍ angulo EDF:

Nam si ponatur contrarium, latus nempe BC inæqvale lateri EF, erit alterum eorum majus. Sit vero latus BC majus latere EF, (per antith.); fiat deinde BH æqvale lateri EF (per 3 prop.), & ducatur recta AH (per 1 post.);

Qvoniam igitur latus BH ≍ EF (per antith.); latus verò AB ≍ lateri DE, & angulus ABC ≍ angulo DEF (per hypoth.); Erit itaqve ang. BHA ≍ ang. EFD;

Atqvi angulus BCA ≍ ang. EFD (per hypoth.); ideoqve esset tandem ang. BHA ≍ ang. BCA (per 1 ax.); qvod tamen fieri non potest (per 16 prop.)

Non est igitur latus BC inæqvale lateri EF; Ergo est æqvale.

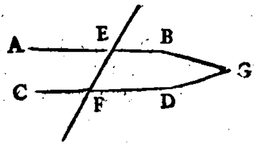
Cum

Cum autem jam oftenfum eft trianguli BAC duo latera AB, BC æqvalia effe duobus lateribus DE, EF alterius trianguli DEF; & deniqve angulus ABC eft æqvalis angulo DEF (per hypoth.); Erit porro reliqvum latus AC æqvale reliqvo lateri DF, & reliqvus angulus BAC = reliqvo angulo EDF (per 4 prop.) *Q. e. d.*

PROP. XXVII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter fe æqvales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

In duas rectas lineas AB, CD, recta linea EF incidens alternos angulos AEF, EFD æqvales inter fe faciat: Dico rectam lineam AB recta CD parallelam effe.



Demonftratio.

Si rectæ AB, CD, dicantur non effe parallelæ, productæ convenient vel ad partes BD, vel ad partes AC; Producantur ergo, conveniantqve ad partes BD in puncto G; Sic trianguli EGF, exterior angulus AEF major effet interiore & oppofito angulo GFE (per 16 prop.)

Eft autem angulus AEF non major fed æqvalis angulo GFE (per hypoth.);

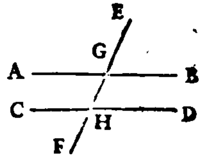
Fieri ergo neqvit, ut rectæ, AB, CD, productæ ad partes BD, conveniant; Similiter demonftrabitur easdem rectas neqve convenire ad partes AC; ideoqve inter fe funt parallelæ (per 35. def.) *Q. e. d.*

PROP. XXVIII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori & oppofito ad eas-dem

dem partes æqvalem fecerit; vel interiores & ad easdem partes duobus rectis æqvales: rectæ lineæ erunt inter se parallelæ.

In duas enim rectas lineas AB, CD, recta linea EF incidens exteriorem angulum, EGB, interiori & opposito ad easdem partes GHD æqvalem faciat; vel interiores & ad easdem partes BGH, GHD duobus rectis æqvales: Dico rectam lineam AB rectæ CD parallelam esse.



Demonstratio.

1. Angulus EGB = angulo GHD (per hypoth.); angulus AGH = angulo EGB (per 15 prop.); Ergo & angulus AGH = angulo GHD (per 1 ax.): qvoniam vero hi anguli AGH, GHD sunt alterni & inter se æqvales, erit recta AB parallela rectæ CD (per 27. prop.). *Qvod Imo erat demonstrandum.*

2. Anguli BGH + GHD = duobus angulis rectis (per hypoth.); anguli vero BGH + AGH etiam æqvales sunt duobus rectis (per 13. prop.);

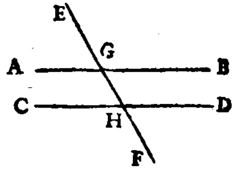
Ergo ang. BGH + GHD = BGH + AGH (per 1 ax.)
Communis auferatur angulus BGH

erit reliqvus ang. GHD = angulo AGH (per 3 ax.)
Qvoniam vero Anguli GHD, AGH, sunt alterni & æqvales, erunt rectæ AB, CD inter se parallelæ. *Qvod IIdo erat demonstrandum.*

PROP. XXIX. THEOR.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens & alternos angulos inter se æqvales, & exteriorem interiori & opposito ad easdem partes æqvalem, & interiores & ad easdem partes duobus rectis æqvales efficit.

In



In parallelas rectas lineas AB, CD, incidat recta linea EF: Dico primo illam alternos angulos AGH GHD, inter se aequales efficere; & secundo exteriorem EGB, interiori & opposito & ad easdem partes GHD, aequalem; & tertio interiores & ad easdem partes BGH, GHD *duobus rectis aequales.*

Demonstratio.

Si angulus AGH inæqvalis est angulo GHD, unus ipsorum major est;

Sit jam angulus AGH major angulo GHD (per antith.); Communis addatur BGH; sic erunt anguli AGH+BGH majores angulis GHD+BGH (per 4 ax.)

Sed anguli AGH+BGH = duobus rectis (per 13. prop.); Ergo ang. GHD+BGH sunt minores duobus rectis: Duæ igitur rectæ GB, HD, in infinitum productæ sibi mutuo coincident (per 11 ax.); Atqvi non coincidunt, qvia sunt parallelæ (per hypoth.): ideo ang. AGH non est inæqvalis angulo GHD, sed ei æqvalis. *Qvod Imo erat demonstr.*

Porro angulus AGH = angulo EGB (per 15 prop.);
Sed ang. AGH = angulo GHD (ut supra ostens.);

Ergo & angulus EGB = angulo GHD (per 1 ax.) *Qv. IIdo e. d.* Hisce demum si addatur communis BGH

Erunt anguli EGB+BGH = angulis GHD+BGH (per 2 ax.);

Sed anguli EGB+BGH = 2 rectis (per 13. prop.) ergo & anguli GHD+BGH = duobus rectis (per 1 ax.)

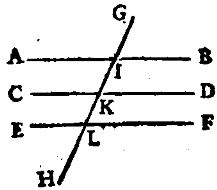
Qvod IIItio erat demonstr.

PROP. XXX. THEOR.

Qvæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se sunt Parallelæ.

Sit

Sit utraqve ipsarum AB, EF, ipsi CD parallela: Dico & AB ipsi EF, parallelam esse.



Demonstratio.

Angulus AIK = angulo alterno IKD
ang. exter. IKD = ang. int. & opp. GLF } (per 29 prop.);

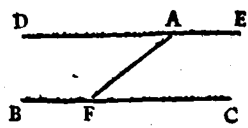
Ergo ang. AIK = ang. GLF (per 1. ax.); ideoqve Linea AB est parallela lineæ EF (per 27 prop.)

Qvod erat demonstr.

PROP. XXXI. PROBL.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam ducere.

Sit datum punctum A, data vero recta linea BC: oportet per A punctum, ipsi BC recta linea parallelam rectam ducere.



Constructio.

1. Sumatur in recta BC qvodvis punctum F, & jungatur AF (per 1 post.);
2. Ad rectam lineam AF & ad datum in ea punctum A constituatur angulus FAD æqvalis angulo AFC (per 23. prop.);
3. In directum ipsi DA recta linea AE producatur (per 2 post.) dico rectam DE esse parallelam rectæ BC.

Demonstratio.

Angulus AFC = angulo alterno FAD (per constr.); Ergo ducta recta DE est parallela rectæ BC (per 27. prop.)

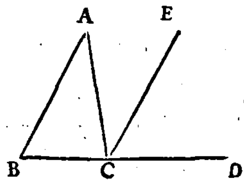
Qvod erat faciend.

PROP.

PROP. XXXII. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus & oppositis est æqvalis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis sunt æqvales.

Sit triangulum ABC, & unum ipsius latus BC producatur in D: Dico primò angulum exteriorem ACD duobus interioribus & oppositis CAB, ABC, aqvalem esse; & secundo trianguli tres interiores angulos ABC, BCA, CAB duobus rectis esse aqvales.



Constructio.

1. Producatur recta BC in D (per 2 post).
2. Ducatur per punctum C, ipsi AB rectæ parallela CE (per 31. prop.)

Demonstratio.

Recta CE est parallela rectæ BA (per constr.), ideoqve recta in ipsas incidens, AC, angulos alternos facit æqvales, angulum nempe ACE = ang. CAB (per 29 prop.)

Porro recta, BD, incidens in easdem etiam parallelas AB, EC, facit angulum exteriorem ECD = interiori & opposito ABC (per 29 prop.);

Ergo anguli ACE+ECD = angulis CAB+ABC (per 2 ax.);
Sed anguli ACE+ECD = angulo ACD (per 8 ax);

Ideo & angulus ACD = angulis CAB+ABC (p. 1 ax.) *Q. Imo e. d.*
Communis jam addatur angulus BCA,

Sic erunt ang. ACD+BCA = ang. CAB+ABC+BCA (per 2 ax.);
Sunt autem ang. ACD+BCA = duobus ang. rectis (per 13. pr.);
Ergo ang. CAB+ABC+BCA = duobus ang. rectis (per 1 ax.).

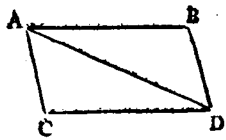
Qvod IIdo erat demonstr.

PROP.

PROP. XXXIII. THEOR.

Qvæ æqvales & parallelas lineas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, ipsæ etiam sunt æqvales & parallelæ.

Sint æqvales & parallelæ AB, CD, & ipsas conjungant ad easdem partes rectæ lineæ AC, BD: Dico Imo AC, BD æqvales esse, & IIdo etiam inter se parallelas.



Demonstratio.

1. Qvod si a puncto A ad punctum D ducatur recta AD (per 1 post), erunt anguli alterni æqvales, scil, angulus BAD = angulo CDA (per 29. prop.);

Est autem linea AB = lineæ CD (per hypoth.), & linea AD est communis utriqve triangulo BAD, CDA;

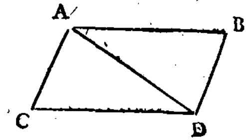
Qvare triangulum BAD habet duo latera AB, AD, æqvalia duobus lateribus CD, AD, alterius trianguli CDA; ideoqve basis AC est æqvalis basi BD, & ang. CAD = ang. BDA (per 4 prop.). *Qvod Imo erat demonstr.*

2. Qvoniam autem iidem anguli CAD, BDA, qvos recta AD incidens in duas rectas AC, BD, efficit, alterni sunt & æqvales; erunt igitur rectæ AC, BD inter se parallelæ (per 27. prop.). *Qvod IIdo erat demonstrandum.*

PROP. XXXIV. THEOR.

Parallelogrammorum spatiorum tam latera opposita, qvam anguli oppositi inter se æqvantur, & illa diameter bifariam secat.

Sit parallelogrammum ACDB, ejus autem diameter AD: Dico Imo ACDB parallelogrammi latera opposita & angulos oppositos inter se æqvari: & IIdo diametrum AD ipsum bifariam secare.



Demonſtratio.

Recta linea AD incidens in parallelas rectas AB, CD, itemqve in parallelas AC, BD, efficit angulum BAD ≍ angulo alterno CDA, & angulum BDA ≍ alterno CAD (per 29 prop.); Duo igitur triangula BAD, CDA, qvæ habent duos angulos BAD, BDA, duobus angulis CDA, CAD æqvales, & præterea unum latus, qvod æqvalibus adjacet angulis, AD æqvale ſive commune, habebunt etiam reliqva latera reliqvis lateribus æqvalia, & reliqvum angulum reliqvo angulo æqvalem: nempe latus AB ≍ oppoſito lateri CD, latus AC ≍ oppoſito lateri BD, & angulum ABD ≍ oppoſito angulo ACD (per 26 prop.);

Porro qvoniam ang. BAD ≍ ang. CDA }
& angul. CAD ≍ ang. BDA } (ut ſupra oſtenſ.)

erunt etiam ang. BAD † CAD ≍ ang. CDA † BDA (per 2 ax.);

Atqvi totus angulus BAC ≍ ang. BAD † CAD, & totus ang. BDC ≍ ang. BDA † CDA (per 8 ax.) Ergo totus angulus BAC ≍ toti angulo BDC (per 1 ax.);

Qvare parallelogrammi ACDB latera oppoſita AB, CD, & AC, BD, uti & anguli oppoſiti BAC, CDB, atqve ABD, ACD inter ſe æqvantur. *Qvod Imo erat demonſtr.*

2. Recta AB ≍ rectæ CD, recta AC ≍ rectæ BD, & angulus B ≍ angulo C (uti jam ſupra oſtendebatur); duo igitur triangula ABD & ACD ſunt æqvalia (per 4 prop.);

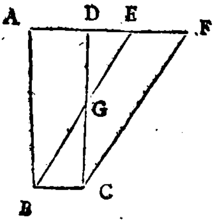
Qvare diameter AD, qvæ parallelogrammum ACDB in duo æqvalia triangula dividit, ipſum bifariam ſecat.

Qvod IIdo erat demonſtr.

PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

Parallelogramma, ſuper eadem baſi & in eisdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqvalia.



Sint parallelogramma ABCD, EBCF, ſuper eadem baſi BC & in eisdem parallelis AF, BC conſtituta: Dico ABCD parallelogrammum eſſe æqvale parallelogrammo EBCF.

Demonſtratio.

Parallelogrammi ABCD latus AD = oppoſito lateri BC, & parallelogrammi EBCF latus EF = eidem oppoſito lateri BC (per 34 prop.);

Ergo latus AD = lateri EF (per 1 ax.);
addatur recta communis DE

Erit AD + DE = EF + DE (per 2 ax.);

Porro latus AB = oppoſito lateri DC (per 34 prop.) & ang. exterior FDC = angulo interior. & oppoſ. DAB (per 29. prop.); Duo igitur triangula EAB, FDC, habent duo latera æqvalia, alterum alteri, & angulum angulo æqvalem, latus nempe AE = DF, latus AB = DC & angulum EAB = angulo FDC (ut jam ſupra oſtenſ.); ideoqve baſis EB eſt æqvalis baſi FC,

& triangulum EAB = triangulo FDC (per 4 prop.),
commune auferatur triangulum EDG

relinqvetur trapezium DABG = trapezio EGCF (per 3 ax.),
commune addatur triangulum GBC

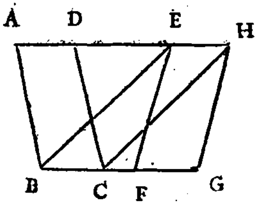
Erit totum parallelogrammum ABCD = toti parallelogrammo EBCF (per 2 ax.).

Qvod erat demonſtr.

PROP. XXXVI. THEOR.

Parallelogramma ſuper æqvalibus baſibus & in eisdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqvalia.

Sint parallelogramma ABCD, EFGH, ſuper æqvalibus baſibus BC, FG. & in eisdem parallelis AH, BG conſtituta: Dico parallelogrammum ABCD eſſe æqvale parallelogrammo EFGH.



Demonſtratio.

Conjungantur parallelæ BC, EH, ductis rectis BE, CH, (per 1 poſt.);

Qvoniam vero Baſis FG ≍ baſi BC (per hypoth.);
Latus FG ≍ lat. opp. EH (per 34. prop.);

Ergo BC ≍ EH (per 1 ax.;)

Cum autem rectæ BC, EH ſunt æqvales & parallelæ, erunt qvoqve rectæ BE, CH æqvales & parallelæ (per 33. prop.);
ideoqve parallelogrammum EBCH ≍ parallelogr. ABCD
item parallelogrammum EBCH ≍ parallelogr. EFGH (per 35. prop.)

Qvare parallelogram. ABCD æqvale eſt parallelogr. EFGH (per 1 ax.).

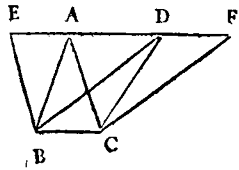
Qvod erat demonſtr.

PROP. XXXVII. THEOR.

Triangula ſuper eadem baſi & in eisdem parallelis conſtituta ſunt inter ſe æqvalia.

Sint

Sint triangula ABC, DBC super eadem basi BC, & in eisdem parallelis AD, BC constituta: Dico triangulum ABC triangulo DBC æquale esse.



Constructio.

1. Producatur AD ex utraqve parte in puncta E, F, (per 2 post.)

2. Per punctum B ipsi CA parallela ducatur BE; per punctum C vero ipsi BD parallela ducatur CF (per 31. prop.)

Demonstratio.

Parallelogrammum EBCA ≒ parallelogrammo DBCF (per 35. prop.)

Cum vero triangulum ABC est dimidium parallelogrammi EBCA, & triangulum DBC est dimidium alterius parallelogrammi DBCF (per 34. prop.);

Erunt igitur triangula ABC, DBC, æqvalium scilicet parallelogrammorum dimidia, inter se æqvalia (per 7 ax.)

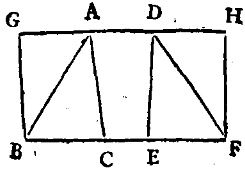
Qvod erat demonstr.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Triangula super basibus æqvalibus in & eisdem parallelis constituta sunt inter se æqvalia.

Sint

Sint triangula ABC, DEF, super æqvalibus basibus BC, EF, & in eisdem parallelis BF, AD, constituta: Dico ABC triangulum esse æqvale triangulo DEF.



Constructio.

1. Producatur AD ex utraqve parte in puncta G, H (per 2 post.).
2. Per punctum B, Ducatur BG, ipsi AC parallela; per punctum vero F, ducatur FH, ipsi DE parallela (per 31. prop.).

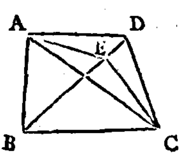
Demonstratio.

Parallelogrammum BCAG est æqvale parallelogrammo DEFH (per 36. prop.);
Est autem triangulum ABC dimidium parallelogrammi BCAG, & triangulum DEF est dimidium parallelogrammi DEFH (per 34. prop.);
Qvare triangula ABC, DEF, sunt inter se æqvalia (per 7 ax.) *Qvod erat demonstr.*

PROP. XXXIX. THEOR.

Triangula æqvalia super eadem basi & ad easdem partes constituta, sunt in eisdem parallelis.

Sint æqvalia triangula ABC, DBC, super eadem basi BC constituta & ad easdem partes: Dico lineam AD esse parallelam lineæ BC.



Demonstratio.

Si è contrario ponatur, lineam AD non esse parallelam lineæ BC, sed aliam qvandam, ex. gr. AE, per punctum A duci posse parallelam lineæ BC (per 31. prop.);

Sic

Sic erit triangulum ABC ≍ triangulo EBC (per 37 prop.);
Atqvi triangulum ABC ≍ triangulo DBC (per hypoth.);

Erit ergo triang. EBC ≍ triang. DBC (per 1 ax.);

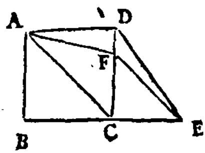
Hoc est: totum DBC erit suæ parti EBC æqvale (contra 9 ax.): Nulla igitur alia linea præter ipsam AD per punctum A duci potest parallela lineæ BC; qvare triangula super eadem basi & ad easdem partes constituta, sunt in eisdem parallelis.

Qvod erat demonstr.

PROP. XL. THEOR.

Triangula æqvalia, super basibus æqvalibus & ad easdem partes constituta, sunt in eisdem parallelis.

Sint triangula æqvalia ABC, DCE super æqvalibus basibus BC, CE, & ad easdem partes constituta: Dico rectam AD ipsi BE parallelam esse.



Demonstratio.

Si è contrario ponatur linea AD non esse lineæ BE parallela, sed alia qvævis, ex gr. AF, ipsi BE parallela duci posse (per 31 prop.);
Sic erit triangulum ABC ≍ triangulo FCE (per 38 prop.);
Atqvi idem triang. ABC ≍ triangulo DCE (per hypoth.)

Erit ergo triang. FCE ≍ triangul. DCE (per 1 ax.);

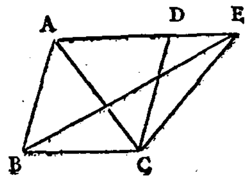
Hoc est: Totum DCE æqvale erit suæ parti FCE, qvod est absurdum (per 9 ax.); nulla igitur alia linea præter ipsam AD, per punctum A duci potest parallela lineæ BE; Qvare triangula æqvalia, super basibus æqvalibus & ad easdem partes constituta, sunt in eisdem parallelis.

Qvod erat demonstr.

PROP. XLI. THEOR.

Si parallelogrammum & triangulum eandem habeant basin, sintqve in eisdem parallelis, parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.

Sint parallelogrammum ABCD & triangulum EBC super eadem basi BC, sintqve in eisdem parallelis BC, AE: Dico parallelogrammum ABCD trianguli EBC duplum esse.



Demonstratio.

Ducta diameter AC parallelogrammum ABCD bifariam secabit (per 34. prop.), ideoqve triangulum ABC est dimidium parallelogrammi ABCD;

Sed idem triangulum ABC est æqvale triangulo EBC (per 37. prop.);

Ergo etiam triang. EBC est dimidium parallelogrammi ABCD (per 37. prop);

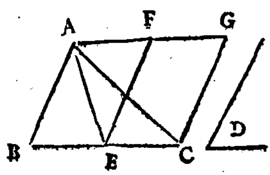
Totum igitur parallelogrammum ABC est duplum trianguli EBC.

Qvod erat demonstr.

PROP. XLII. PROBL.

Dato triangulo æqvale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum triangulum ABC, datus autem rectilineus angulus D; oportet itaqve dato triangulo ABC æqvale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi D æqvali.



Con-

Conſtructio,

1. Secetur recta BC bifariam in E (per 10. prop.);
2. Ducatur recta AE (per 1 poſt.)
3. Ad rectam EC & punctum in ea E conſtituatur angulus CEF æqvalis ipſi D (per 23. prop.);
4. Per punctum A ducatur AG parallela ipſi BC; per C vero ipſi EF, parallela ducatur CG (per 31. prop.);

Dico FECG eſſe parallelogrammum deſideratum.

Demonſtratio.

Recta BE eſt æqvalis rectæ EC (per conſtruct.) ideoqve triang. ABE = triang. AEC (per 38. prop.);

Et totum triangulum ABC eſt duplum trianguli AEC

Sed paral. FECG etiam eſt duplum triang. AEC (per 41. prop.);

Ergo parallelogr. FECG = triang. ABC. (per 6 ax.);

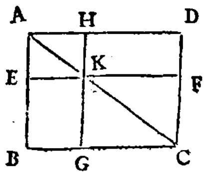
Qvoniam vero angulus FEC æqvalis eſt angulo D (per conſtr.); Dato igitur triangulo ABC æqvale parallelogrammum FECG conſtitutum eſt in angulo CEF, qvi angulo D æqvalis eſt.

Qvod erat faciendum.

PROP. XLIII. THEOR.

In omni parallelogrammo complementa eorum, qvæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum inter ſe ſunt æqvalia.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC, & circa ipsam AC parallelogrammma qvidem ſint EH, FG; qvæ vero dicuntur complementa, ſint BK, KD: Dico BK complementum complemento KD eſſe æqvale.



Demonſtratio.

Qvoniam diameter AC biſariam ſecat parallelogramma ABCD, AEKH & KGCF (per 34 prop.); erit triangulum ABC ≍ triang. ADC; triang. AEK ≍ triang. AHK, & deniqve triang. KGC ≍ triang. KFC (per 7 ax.), ideoqve triang. AEK†KGC ≍ triang. AHK†KFC (per 2 ax.);

Si jam ab æqvalibus triangulis, ſcil. ABC ≍ ADC
auferantur æqvalia ſcil. AEK†KGC ≍ AHK†KFC

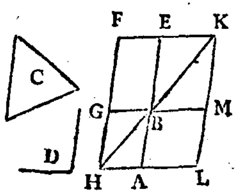
Relinqvetur complem. BK ≍ complemento KD (per 3 ax.)

Qvod erat demonſtr.

PROP. XLIV. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æqvale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

Sit data recta linea AB, datum vero triangulum C & datus angulus rectilineus D: oportet qvidem ad datam rectam lineam AB dato triangulo C æqvale parallelogrammum applicare in angulo ipſi D æqvali.



Con-

Conſtructio.

1. Conſtituatur triangulo C æqvale parallelogrammum BEFG in angulo EBG, qvi eſt æqvalis angulo D (per 42. prop.);

2. Ponatur AB in directum ipſi BE (per 2 poſt. & 3 prop.), & producatur FG verſus H (per 2 poſt.)

3. Per A alterutri ipſarum BG, EF, parallela ducatur AH (per 31. prop.);
4. Ducatur diagonalis ſive diameter HB, & prolongetur usqve dum protractæ EF occurrat in K;

5. Per K ducatur ipſi EA, vel etiam ipſi FH parallela KL, lineis GB, HA protractis occurrens in M & L.

Dico ABLM eſſe parallelogrammum qvæſitum.

Demonſtratio.

Parallelogrammum BEFG ≍ triangulo C (per conſtr.):
Idemqve parallelogr. BEFG ≍ parallelogr. ABLM (per 43 pr.)

Ergo parallelogr. ABLM ≍ triangulo C (per 1 ax.):

Porro angulus ABM eſt æqvalis angulo GBE (per 15. prop.); angulus D eſt æqvalis eidem angulo GBE (per conſtr.): Ergo angulus ABM eſt æqvalis angulo D (per 1 ax).;

Ad datam igitur rectam lineam AB dato triangulo C æqvale parallelogrammum ABLM conſtitutum eſt in angulo ABM, qvi eſt æqvalis angulo D.

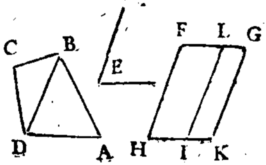
Qvod erat faciendum.

PROP. XLV. PROBL.

Rectilineo dato æqvale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

Sit

Sit datum rectilineum ABCD, datus vero angulus rectilineus E: oportet rectilineo ABCD æqvale parallelogrammum constituere.



Constructio.

1. Ducatur diagonalis sive diameter DB (per 1 post.);
2. Constituatur triangulo ADB æqvale parallelogrammum FI in angulo IHF, qvi æqvalis est angulo dato E (per 42. prop.);
3. Ad rectam lineam LI applicetur triangulo DCB æqvale parallelogrammum LK in angulo LIK, qvi angulo E est æqvalis (per 44 prop.).

Demonstratio.

Triangulum DAB = parallelogrammo FHIL,
& triangulum DCB = parallelogrammo LIKG, (per const.)

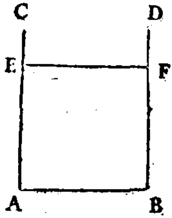
Ergo DAB + DCB = FHIL + LIKG (per 2 ax.),

Hoc est: Toti rectilineo DABC æqvale constitutum est parallelogrammum FHKG, habens angulum FHK, angulo E dato æqvalem, *Qvod erat faciendum.*

PROP. XLVI. PROBL.

A data recta linea qvadratum describere.

Sit data recta linea AB: oportet ab ipsa AB qvadratum describere.



Constructio.

1. E punctis A, B, ad angulos rectos ducantur AC, BD (per 11. prop.);
2. A recta AC auferatur AE æqvalis datæ rectæ AB (per 3 prop.);

3. Per

3. Per punctum E ducatur recta EF parallela ipsi AB (per 31. prop.). Dico qvadrilaterum AEFB esse qvadratum, qvod qværebatur.

Demonstratio.

Duo anguli interiores A & B sunt recti (per construct.), ideoqve rectæ AE, BF sunt inter se parallelæ (per 28. prop.); recta vero EF est parallela rectæ AB (per construct.) Qvare AEFB est parallelogrammum.

Est autem in hoc parallelogrammo AEFB, latus AE = lateri AB (per constr.), & latus BF = lateri AE (per 34. prop.); ideoqve idem latus BF est æqvale lateri AB (per 1 ax); latus deniqve EF est etiam æqvale lateri AB (per 34. prop.); Qvare qvadrilaterum AEFB est æqvilaterum.

Qvoniam vero anguli A, B sunt recti (per constr.), oppositi etiam anguli E, F, erunt recti (per 34. prop.), ideoqve qvadrilaterum AEFB est rectangulum.

Ostensum igitur est qvadrilaterum AEFB, super data recta AB descriptum, & æqvilaterum esse & rectangulum: Ergo est qvadratum (per 30. def.).

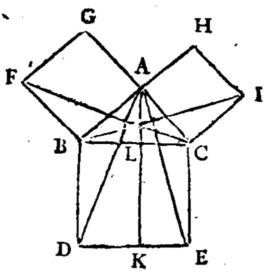
Qvod erat faciendum.

PROP. XLVII. THEOR.

In rectangulis triangulis, qvadratum, qvod à latere rectum angulum subtendente describitur, æqvale est qvadratis, qvæ à lateribus rectum angulum comprehendentibus describuntur.

Sit

Sit triangulum rectangulum ABC rectum habens BAC angulum: Dico quadratum descriptum à recta BC æqvale esse quadratis, qvæ ab ipsis BA, AC describuntur.



Constructio.

1. A latere BC describatur qvadratum BDEC; ab ipsis vero BA, AC lateribus describantur qvadrata GB, HC, (per 46. prop.)
2. Per A alterutri ipsorum laterum BD, CE ducatur parallela AK (per 31 prop;); deinde ducantur rectæ AD, CF, itemqve AE, BI (per 1 post).

Demonstratio.

Angulus BAC est rectus (per hypoth), angulus BAG etiam est rectus (per 30 def.), duæ igitur rectæ AC, AG sibi invicem in directum positæ sunt, h. e. unam rectam GC constituunt (per 14 prop.);

Porro anguli AGF, BFG sunt recti (per 30 def.); ideoqve rectæ lineæ GC, FB sunt inter se parallelæ (per 28 prop.);

1. Conclus. Qvare parallelogrammum sive qvadratum BAGF est duplum ipsius trianguli BCF, super eadem basi BF & in eisdem parallelis GC, BF constituti (per 41 prop.).

Rursus recta AK est parallela rectæ BD (per constr.);

2. Conclus. Ergo parallelogrammum BDLK est duplum ipsius trianguli BAD super eadem basi BD & in eisdem parallelis AK, BD constituti (per 41. prop.)

Cum autem latus BA sit = lateri BF, & latus BC = lateri BD (per 30 def.),

sitqve præterea rectus ang. FBA = ang. recto DBC (per 10 ax.)
His vero angulis si communis addatur ang. ABC;

Erunt anguli FBA + ABC = angulis DBC + ABC (per 2 ax.)
h. e. totus angulus FBC æqvalis erit toti angulo ABD (per 8 ax.)

3. Con-

3. Concluſ. Duo igitur triangula FBC, ABD habent duo latera BF, BC duobus lateribus BA, BD æqvalia, alterum alteri: latus nempe BA = lateri BF, & latus BC = lateri BD; habent prætereà angulum FBC æqvalem angulo ABD; ideoqve ſunt inter ſe æqvalia (per 4 prop.)

Nunc itaqve e tribus præcedentibus concluſionibus ita porro argumentari licet:

Qvadratum BAFG eſt duplum trianguli BCF (per 1 Concl.);
Parallelogr. BDKL eſt duplum trianguli BDA (per 2 Concl.);
Atqvi triangulum BCF = triangulo BDA (per 3 Concl.).

Ergo qvadratum BAFG = parallelogr. BDKL (per 6 ax.);
Eodem modo demonſtrabitur qvadratum ACIH = parall. CEKL

Duo igitur qvadrata BAFG + ACIH = duobus parallel. BDKL + CEKL (per 2 ax.).
Cum vero qvadr. BDEC = duobus parallel. BDKL + CEKL (per 8 ax.).

Ultima Concl. Erunt itaqve duo qvadrata BAFG + ACIH = qvadrato BDEC (per 1 ax.)

Hoc eſt, Qvadratum BDEC, qvod a latere BC rectum trianguli angulum ſubtendente deſcriptum eſt, æqvale eſt qvadratis BAFG, ACIH, qvæ à lateribus AB, AC, rectum angulum BAC comprehendentibus, deſcripta ſunt.

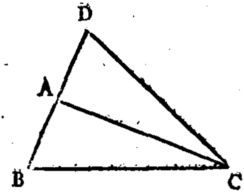
Qvod erat demonſtr.

PROP. XLVIII. THEOR.

Si qvadratum, qvod deſcribitur ab uno laterum trianguli, æqvale ſit qvadratis, qvæ à reliqvis trianguli lateribus deſcribuntur: angulus à reliqvis trianguli lateribus comprehenſus rectus erit.

Sit

Sit ABC triangulum, ſitqve qvadratum, qvod ab uno trianguli latere BC deſcribitur, æqvale qvadratis, quæ à reliqvis trianguli lateribus BA, AC, deſcribuntur: Dico angulum BAC rectum eſſe.



Conſtructio.

1. A puncto A ducatur recta AD, ipſi CA perpendicularis (per 11 prop.);
2. Ponatur AD ipſi BA æqvalis (per 3 prop.)
3. Ducatur recta DC (per 1 poſt.)

Demonſtratio.

Qvoniam latus AB = lateri AD (per conſtr.),
erit qvadratum lateris AB = qvadrato lateris AD (per 8 ax.)
Horum utriqve addatur qvadratum lateris commun. AC

Erunt qvadrat. lateris AB + qvadr. lat. AC = qvadr. lat. AD + qvadr. lat. AC (per 2 ax.);
Eſt autem qvadratum lateris BC = qvadr. AB + qvadr. AC (per hypoth.)
Porro qvoniam angulus DAC eſt rectus (per conſtruct.)
Erit qvadratum lateris DC = qvadr. AD + qvadr. AC (per 47 prop.); Sed qvadr. AD = qvadr. AB (ut ſupra);

Ergo qvadratum lateris BC = qvadrato lateris DC (per 1 ax.)
Æqvalium vero qvadratorum æqvalia ſunt latera. ideoqve latus BC = lateri DC (per 8 ax.)
Duo igitur triangula BAC, DAC habent duo latera AB, AC duobus lateribus DA, AC æqvalia, habent vero & baſin, BC, baſi DC æqvalem (uti jam ſupra oſtenſum eſt); ideoqve angulum BAC æqvalem angulo DAC habebunt, (per 8 prop.).
Rectus autem eſt angulus DAC (per conſtr.)
Ergo Angulus BAC eſt recto æqvalis, hoc eſt, ipſe angulus BAC eſt rectus. *Qvod erat demonſtrandum.*

EU-

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SECUNDUS.

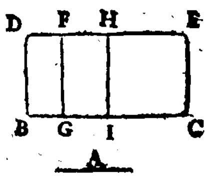
DEFINITIONES:

1. Omne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub duabus rectis lineis, qvæ rectum angulum comprehendunt.
2. Omnis parallelogrammi unumqvodqve eorum, qvæ circa diametrum ipſius ſunt, parallelogrammorum cum duobus complementis GNOMON vocetur.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si ſint duæ rectæ lineæ, altera autem ipſarum ſecta fuerit in qvotcunqve partes: rectangulum ſub duabus rectis comprehenſum æqvale eſt eis rectangulis, qvæ ſub recta linea non ſecta & ſingulis alterius ſegmentis comprehenduntur.

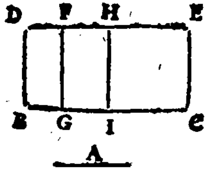
Sint duæ rectæ lineæ A, BC, & ſecta ſit BC in punctis G, I: Dico rectangulum comprehenſum ſub rectis lineis A, BC, æqvale eſſe rectangulo qvod continetur ſub A, BG, & rectangulo, ſub A, GI, & ei, qvod ſub A, IC continetur.



Conſtructio,

1. A puncto B ipſi rectæ BC ad rectos angulos ducatur BD (per 11. prop. lib. I.)

2. Ponatur BD æqvalis rectæ A (per 3. 1.)
3. Per punctum D, ipsi BC parallela ducatur DE; per puncta vero G, I, C ducantur rectæ GF, IH, CE parallelæ ipsi BD.



Demonstratio.

Rectangulum BE æqvale est rectangulis BF † GH † IE (per 8 ax.);

Atqvi rectang. BE æqvale est rectang. sub A,BC, qvia A ≍ BD (per constr.);

Ergo rectang. sub A, BC ≍ rectang. BF†GH†IE (per 1 ax.)

Rursus qvoniam BD ≍ A (per constr.); recta verò GF ≍ A, item recta IH ≍ A (per 34. I.);

Est igitur rectangulum BF ≍ rectang. sub A, BG
& rectangulum GH ≍ rectang sub A, GI.
atqve rectangulum IE ≍ rectang. sub A, IC (per 8 ax.)

Qvare rectangula BF†GH†IE ≍ rectangulo sub A, BG† rectang. sub A, GI † rectang. sub A, IC (per 2 ax.)

Supra vero ostensum est rectangulum, qvod continetur sub A, BC æqvale esse rectangulis BF†GH†IE;

Ergo & idem rectang. sub A, BC ≍ rectang. sub A, BG† rectang. sub A, GI, † rectang sub A, IC (per 1 ax.) Hoc est: rectangulum sub duabus rectis A, BC comprehensum æqvale est eis rectangulis, qvæ sub recta linea A non secta, & singulis alterius rectæ BC, segmentis BG, GI, IC comprehenduntur

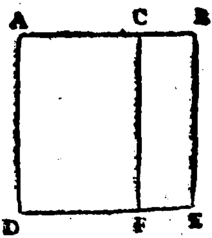
Qvod erat demonstr.

PROP.

PROP. II. THEOR.

Si recta linea secetur utcunqve, rectangula sub tota & utroqve segmento comprehensa, æqvantur qvadrato totius.

Recta linea AB secetur utcunqve in puncto C: Dico rectangulum, qvod sub rectis AB, AC comprehenditur, una cum rectangulo sub AB, BC, comprehenso aeqvari qvadrato rectæ AB.



Constructio.

1. Describatur ex AB qvadratum ABED (per 46. 1.)
2. Per C ducatur alterutri ipsarum AD, BE, parallela CF (per 31. 1.)

Demonstratio.

Rectangulum sub BA, AD æqvale est rectangulo sub AD, AC † rectang. sub AD, BC (per 1. 2.)

Recta vero AD æqvalis est rectæ AB (per 30. def. lib. 1.)

Ergo rectang. sub AD, AC † rectang. sub AD, BC = rectangul. sub AB, AC † rectang. sub AB, BC (per 8 ax.); ideoqve rectangulum sub BA, AD = rectangulo sub AB, AC † rectang. sub AB, BC (per 1. ax.);

Sed rectangulum sub BA, AD est qvadratum ex AB (per constru.)

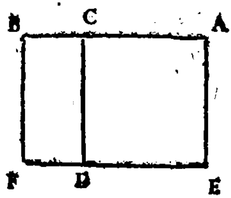
Qvare qvadratum ex AB æqvatur rectangulo sub AB, AC † rectangulo sub AB, BC (per 1 ax.): Hoc est, rectangula sub tota AB & utroqve segmento AC, BC æqvantur qvadrato totius AB.

Qvod erat demonstr.

PROP. III. THEOR.

Si recta linea secetur utcunqve, rectangulum sub tota & uno segmento comprehensum æqvatur rectangulo sub segmentis comprehenso & prædicti segmenti qvadrato.

Recta linea AB secta sit utcunqve in puncto C: Dico rectangulum sub AB, AC aqvale esse rectangulo sub AC, CB una cum qvadrato recta AC.



Constructio.

1. Describatur ex AC qvadratum ACDE (per 46. I.)
2. Producatur ED in F (per 2 post.);
3. Per B alterutri ipsarum CD, AE ducatur parallela BF (per 31. I.)

Demonstratio.

Rectangulum sub AB, AE = rectangulo sub AE, AC + rectang. sub AE, BC (per 1. 2);

Qvoniam autem qvadrati ACDE latus AC = lateri AE (per 30. def. 1.);

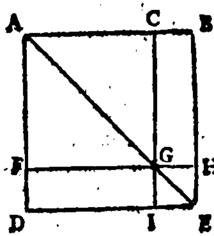
Erit igitur rectangulum sub AB, AE = rectang. sub AB, AC = rectang. sub AC, AC, + rectang. sub AC, BC (per 8. ax.) Hoc est: rectangulum, sub tota AB & uno segmento AC comprehensum, æqvatur rectangulo sub segmentis AC, BC comprehenso & prædicti segmenti AC qvadrato.

Qvod erat demonstr.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si recta linea secetur utcunqve qvadratum totius æqvatur qvadratis segmentorum & rectangulo bis comprehenso sub segmentis,



Recta enim AB secta sit utcunqve in C: Dico qvadratum, qvod fit ex AB æquale esse qvadratis ex AC, CB, & ei rectangulo, qvod bis comprehenditur sub segmentis AC, CB.

Constructio.

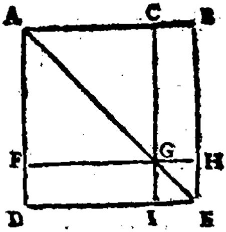
1. Ex AB describatur qvadratum ADEB (per 46. I.);
2. Ducatur recta AE; per C vero ducatur alterutri ipsarum AD, BE, parallela CI, deinde per G ducatur alterutri ipsarum AB, DE, parallela FH (per 31. I.).

Demonstratio.

Qvadrati ADEB latera AB, BE sunt æqvalia (per 30 def. I.), ideoqve in triangulo ABE, super basi AB constituto, angulus BAE = ang. BEA (per 5. I.);

In triangulo GHE, Angulus HEG = ang. BEA (per 8 ax.), ideoqve ang. HEG = angulo BAE (per 1 ax.); & qvoniam recta AE incidit in parallelas AB, , FH erit angulus HGE = angulo BAE (per 29 I.), proinde etiam = angulo HEG (per 1 ax.); duo igitur latera HE, GH, æqvalibus trianguli GHE, angulis, HEG, HGE subtensa, inter se sunt æqvalia (per 6. I.); porro qvoniam rectæ AB, FH, sunt parallelæ (per constr.), erit angulus GHE = ang. recto ABE (per 29 I.), & latus GH = rectæ CB (per 34. I.).

1. Conclusio: Qvare parallelogrammum sub rectis GH, HE, sive qvadrilaterum HGIE, & æqvilaterum est & rectangulum, & propterea etiam qvadratum = qvadrato rectæ CB (per 8 ax.)



Rursus qvoniam recta GH $\eqsim$ rectæ CB, & recta HE $\eqsim$ rectæ GH (ut supra) erit recta HE $\eqsim$ rectæ CB (per 1 ax.); recta verò FD $\eqsim$ rectæ HE (per 34. I.), ideoqve recta FD $\eqsim$ rectæ CB (per 1 ax.);

Qvod si jam ab æqvalibus qvadrati ADEB lateribus, scil. AB $\eqsim$ AD, auferantur æqvales partes, nempe CB $\eqsim$ FD, relinqvetur AC $\eqsim$ AF (per 3. ax.);

2. Concl. Qvare rectangulum sub AC, AF, hoc est parallelogrammum ACGF æqvilaterum est & æqvatur qvadrato rectæ AG (per 8 ax.)

Porro recta CG $\eqsim$ rectæ AF (per 34. I.), AF vero $\eqsim$ rectæ AC (ut supra), ideoqve recta CG $\eqsim$ rectæ AC (per 1 ax.); est præterea angulus B rectus (per 30. def. I.);

3. Concl. Erit igitur rectangulum sub CB, CG, id est parallelogr. CBHG $\eqsim$ rectangulo sub AC, CB (per 8 ax.)

Recta deniqve FG $\eqsim$ rectæ AC (per 34. I.); recta FD $\eqsim$ rectæ CB (ut supra); & angulus D rectus (per 30. def. I.);

4. Concl. Ergo rectangulum sub FD, FG, hoc est parallelogr. FGID $\eqsim$ rectangulo sub AC, CB (per 8 ax.)

Cum igitur parallelogram. rectang.

HGIE $\eqsim$ qvadrato rectæ CB (per 1 Concl.),
ACGF $\eqsim$ qvadrato rectæ AC (per 2 Concl.)
CBGH $\eqsim$ rectangulo sub AC, CB (per 3 concl.)
FGID $\eqsim$ rectangulo sub AC, CB (per 4 concl.)

Ergo parallelogr. rectang. HGIE + ACGF + CBGH + FGID $\eqsim$ qvadr. rectæ CB + qvadr. rectæ AC + rectang. sub AC, CB + rectang. sub AC, CB (per 2 ax.);

Sed qvadratum rectæ AB $\eqsim$ HGIE + ACGF + CBGH + FGID (per 8. ax);

Ergo qvadratum rectæ AB $\eqsim$ qvadr. rectæ CB + qvadr. rectæ AC + rectang. sub AC, CB, bis comprehensum (per 1 ax.) Hoc est qvadratum, qvod fit ex AB, æqvale est qvadratis ex AC, CB & ei rectangulo, qvod bis comprehenditur sub segmentis AC, CB. *Qvod erat demonstr.*

Co-

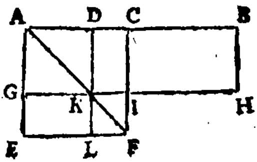
Corollarium.

Ex his manifestum est, in qvadratis parallelogramma, qvæ sunt circa diametrum, esse qvadrata.

PROP. V. THEOR.

Si recta linea secetur in æqvalia & inæqvalia, rectangulum sub inæqvalibus totius segmentis una cum qvadrato rectæ inter puncta sectionum æqvatur qvadrato dimidiæ.

Recta enim linea qvacunqve AB secta sit in partes æqvales ad punctum C & in partes inæqvales ad D: Dico rectangulum comprehensum sub rectis AD, DB una cum qvadrato, qvod fit ex CD æqvale esse ei, qvod fit ex AC, qvadrato.



Constructio.

1. Describatur ex AC qvadratum AEFC (per 46. I.)
2. Ducatur recta AF; per punctum D alterutri ipsarum AE, CF, parallela ducatur DKL; per K vero ducatur HIG parallela alterutri ipsarum AC, EF; & rursus per B ducatur alterutri CI, AG, parallela BH (per 31. I.)

Demonstratio.

Complementum KE = Complemento KC (per 43. I.), addatur commune rectang. DG

erunt KE + DG = KC + DG (per 2 ax.)

Qvoniam vero recta AB secta sit in partes æqvales in puncto C (per hypoth.)

erit rectangulum BI = KC+DG (per 36. I.) ideoqve BI = KE+DG (per 1 ax.);

& porro BI+KC = KE+DG+KC; item BI+KC+IL = KE+DG+KC+IL (per 2 ax.);

Sed BI+KC æqvantur rectang. sub rectis AD, DB comprehenso, nam DK = AD; & IL est qvadratum æqvale qvadrato rectæ CD (per 34. I. & coroll. 4. 2.); ex altera verò parte KE+DG+KC+IL æqvantur qvadrato rectæ AC.

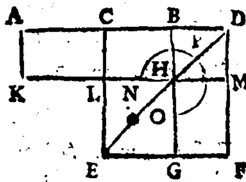
Qvare rectangulum sub rectis AD, DB comprehensum, una cum qvadrato rectæ DC, æqvatur qvadrato dimidiæ AC.

Quod erat demonstr.

PROP. VI. THEOR.

Si recta linea secetur bifariam, & illi recta qvædam in directum adjiciatur, rectangulum comprehensum sub composita ex tota cum adjecta, & adjecta, una cum qvadrato dimidiæ æqvatur qvadrato compositæ ex dimidia & adjecta tanqvam una linea.

Recta linea qvacunqve AB secetur bifariam in puncto C, adjiciaturqve ipsi in directum recta qvacunqve BD: Dico rectangulum sub AD, DB, una cum qvadrato rectæ CB, æqvale esse qvadrato rectæ CD.



Constructio.

1. A recta CD describatur qvadratum CEFD (per 46. I.);
2. Ducatur recta DE; per punctum B alterutri ipsarum CE, DF parallela ducatur BHG; per punctum H ducatur KLM parallela alterutri ipsarum AD, EF; deniqve per A alterutri CL, DM, parallela AK ducatur (per 31. I.),

Demonstratio.

Qvoniam AC = CB (per hypoth.); erit rectang. AL = rectang. CH (per 36. I.);
Sed CH = HF (per 43. I.);

Ergo AL = HF (per 1 ax.);
addatur Commune CM

Erunt AL + CM, sive totum AM, = HF + CM, sive gnomoni NPO (per 2 ax.);

Rur-

Rursus commune addatur LG, qvod æqvale est qvadrato rectæ CB (per 34.I. & coroll. 4 2.); Sic erit AM†LG= Gnomoni NPO†LG (per 2 ax.)

Est autem AM æqvale rectangulo sub AD, DB, qvia DM= DB (per 4 coroll. 2.); LG vero= qvadr. rectæ CB (ut supra);

Qvare rectang. sub AD, DB†qvadr. CB= Gnomoni NPO† rectangulo LG (per 2 ax.);

Atqvi Gnomon NPO†rect. LG= qvadr. rectæ CD (per 8 ax.)

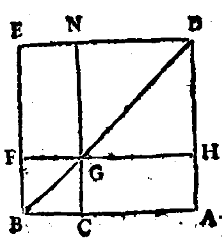
Ergo rectang. sub AD, DB†qvadrat CB= qvadrato rectæ CD (per I ax.).

Qvod erat demonstr.

PROP. VII. THEOR.

Si recta linea secetur utcunqve, qvadrata totius & unius é segmentis simul sumpta æqvantur rectangulo bis comprehenso sub tota & dicto segmento, una cum qvadrato reliqvi segmenti.

Recta linea qvacunqve AB, secta sit utcunqve in puncto C: Dico qvadrata ex AB, BC, æqvalia esse & rectangulo, qvod bis sub rectis AB, BC continetur, & ei, qvod sit ex AC, qvadrato.

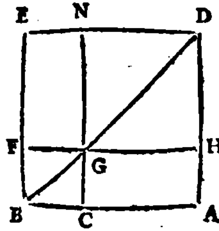


Constructio.

1. Describatur ex AB qvadratum ABDE (per 46 I.);

2. Ducatur recta BD; per punctum C ducatur CGN parallela alterutri ipsarum BE, AD; & per punctum G ducatur FGH parallela alterutri BA, ED (per 31. I.);

Demonſtratio.



Qvoniam BG eſt qvadratum (per 4 coroll. 2.), erit recta FB = rectæ BC (per 30. def. I.), ideoqve rectangulum AF = rectang. ſub AB, BC (per 8. ax.)

Porro recta BE = rectæ AB (per conſtr.); qvare rectang. BN = rectang ſub AB, BC (per 8 ax.)

Duo igitur rectangula AF†BN = rectangulo ſub AB, BC bis comprehenſo (per 2 ax.)

Rurſus qvoniam HN eſt qvadratum (per 4 coroll. 2.); recta vero ND = rectæ AC (per 34. I.); eſt igitur qvadr. HN = qvadr. AC; (per 8 ax.);

Qvare duo rectangula AF†BN†qvadr. HN = rectangulo ſub AB, BC bis comprehenſo una cum qvadrato AC (per 2 ax.);

Sed qvadratum totius AB = rectang. AF†BN — qvadr. rectæ BC†qvadr. HN (per 8 ax.)

addatur commune qvadr. rectæ BC

erit qvadr. AB†qvadr. BC = rectang. AF†rectang. BN† qvadr. HN (per 2 ax.)

Ideoqve qvadr. AB†qvadr. BC = rectangulo ſub AB, BC bis comprehenſo, una cum qvadrato rectæ AC (per 1. ax.)

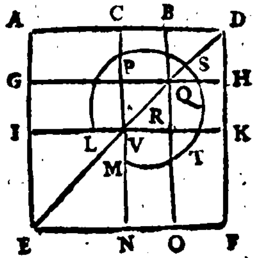
Qvod erat demonſtr.

PROP. VIII. THEOR.

Si recta linea ſecetur utcunqve, rectangulum qvater comprehenſum ſub tota & uno è ſegmentis una cum qvadrato reliqvi ſegmenti æqvatur qvadrato compoſitæ ex tota & prædicto ſegmento tanqvam ex una linea.

Recta

Recta linea AB secta sit utcunque in C: Dico rectangulum quater sub rectis AB, BC, comprehensum una cum quadrato rectæ AC æquale esse quadrato, quod ex AB, BC tanquam ex una linea describitur.



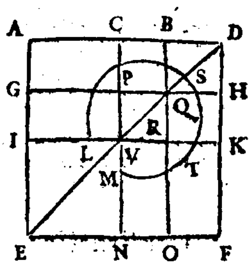
Constructio.

1. *Producatur recta AB, & ponatur* BD æqvalis rectæ CB (per 3. I.);
2. Ex AD describatur qvadratum AEFD (per 46. I.);
3. Ducatur recta DE; per puncta C, B ducantur rectæ CN, BO, alterutri ipsarum AE, DF parallelæ; per puncta verò Q, V ducantur GH, IK, alterutri ipsarum AD, EF, parallelæ.

Demonstratio.

1. Rectangulum BDHQ est qvadratum (per 4 coroll. 2); ideoqve recta BD = rectæ BQ (per 30. def. I.); Sed recta BD = rectæ BC (per constr.); Ergo recta BQ = rectæ BC (per 1 ax.); Qvare rectangulum sub AB, BQ = rectangulo sub AB, BC comprehenso (per 8 ax.)
2. Porro rectangulum PQRV est qvadratum (per 4 coroll. 2.); ideoqve recta QP = rectæ QR (per 30. def. I.); Sed recta QP = rectæ BC (per 34. I.); Ergo recta QR = rectæ BC (per 1 ax.); Recta verò GQ = rectæ AB (per 34. I.); Qvare rectangulum sub GQ, QR = rectangulo sub AB, BC (per 8 ax.)
3. Qvoniam rectangulum sub AB, BQ = rectangulo sub FH, HQ (per 43. I.); idemqve rectangulum sub AB, BQ = rectangulo sub AB, BC (ut supra); Est igitur rectangulum sub FH, HQ = rectangulo sub AB, BC (per 1 ax.)
4. Rectangulum EIVN est qvadratum (per 4 coroll. 2.); ideoqve recta VN = rectæ EN (per 30. def. I.); Sed recta EN = rectæ AC (per 34. I.); Ergo recta VN = rectæ AC (per 1 ax.); Porro recta NO = rectæ BC (per 34. I.);

Re-



Rectangulum igitur sub VN, NO= rectangulo sub AC, BC (per 8 ax.); qvoniam recta BQ= rectæ BD (ut supra); BD vero= rectæ BC (per construct.), ideo recta BQ= rectæ BC (per 1 ax.), & rectangulum sub BD, BQ= rectangulo sub BC, BQ (per 8 ax.); Qvare rectangulum sub VN, NO+ rectang. sub BD, BQ= rectang. sub AC, BC+rectang. sub BC, BQ (per 2 ax.); Est autem rectang. sub AC, BC+ rectang. sub BC, BQ= rectangulo sub AB, BQ; iterum rectang. sub AB, BQ= rectangulo sub AB, BC (ut supra); est igitur rectang. sub VN, NO+ rectang. sub BD, BQ= rectangulo sub AB, BC (per 1 ax.);

In præcedentibus itaqve ostensum est

1. Rectangulum sub AB, BQ= rectang. sub AB, BC;
2. Rectangulum sub GQ, QR= rectang. sub AB, BC;
3. Rectangulum sub FH, HQ= rectang. sub AB, BC;
4. Rectangulum sub VN, NO+rectang. sub BD, BQ= rectang. sub AB, BC;

Qvare Gnomon LSTM= rectangulo qvater sub rectis AB, BC comprehenso (per 2 def. 2 & 8 ax.); Si jam addatur commune rectang. IN, qvod est qvadratum= qvadrato rectæ AC (per 34. 1 & 4 coroll. 2.);

Sic erit gnomon LSTM+qvadr. rectæ AC= rectangulo qvater sub rectis AB, BC comprehenso+qvadr. rectæ AC (per 1 axiom.);

Atqvi Gnomon LSTM+qvadr. rectæ AC= qvadrato ex AB, BC tanqvam ex una linea; h. e. ex tota AD, descripto.

Ergo rectangulum qvater comprehensum sub rectis AB, BC una cum qvadrato rectæ AC æqvale est qvadrato ex AB, BC tanqvam ex una linea descripto

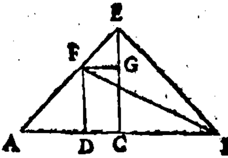
Qvod erat demonstr.

PROP.

PROP. IX. THEOR.

Si recta linea secetur in æqvalia & inæqvalia, qvadrata inæqvalium segmentorum sunt dupla qvadratorum à dimidia & à recta inter puncta sectionum.

Recta linea qvæcunqve AB secta sit in partes æqvales ad C, & in partes inæqvales ad D; Dico qvadrata ex AD, DB, qvadratorum ex AC, CD dupla esse.



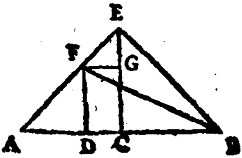
Constructio.

1. A puncto C ipsi AB ad rectos angulos CE ducatur (per 11. 1.); ponaturqve CE æqvalis alterutri ipsarum AC, CB (per 3. 1.);
2. Jungantur EA, EB; ac per D qvidem ipsi BC parallela ducatur DF, per F vero ipsi AB parallela FG (per 31. 1.); & deniqve FB jungatur.

Demonstratio.

1. Angulus ECB est rectus (per constr.); ideoqve qvadratum subtensæ BE = qvadrato lateris EC + qvadr. lateris BC (per 47. 1.); est autem recta EC = BC, vel AC (per constr.); qvare qvadratum rectæ EB, est duplum qvadrati qvod à BC, vel AC describitur (per 8 ax.);
2. Qvoniam AC = EC (per Construct.), erit ang. A = angulo AEC (per 5. 1.); sed angulus ACE est rectus (per construct.), ideoqve reliqvi anguli A + AEC = uni angulo recto (per 32. 1.), hoc est, ang. A est semirectus, & AEC etiam semirectus; Porro recta FG est parallela rectæ AC (per constr.), ergo Angulus EFG = angulo A (per 29. 1.), ac proinde ang. EFG = angulo AEC (per 1 ax.); itaqve in

tri-



triangulo EGF, angulus FEG = ang. EFG, & propterea latus EG = lateri FG (per 6. 1.); angulus autem EGF = recto ACE (per 29. 1.), eſt igitur triangulum EGF rectangulum, ideoqve qvadr. rectæ EF = qvadrat. rectæ FG + qvadr. rectæ EG (per 47. 1.); cum autem recta FG = rectæ DC (per 34. 1.) ideoqve recta EG = DC (per 1 ax.), ergo qvadr. rectæ EF eſt duplum qvadrati, qvod à recta DC deſcribitur (per 8 ax.);

3. Angulus FEC eſt ſemirectus & ang. BEC etiam ſemirectus, totus igitur angulus FEB eſt rectus, & qvadratum ſubtenſæ FB = qvadr. lateris EB + qvadr. lat. EF (per 47. 1.); Sed qvadr. lat. EB eſt duplum qvadrati ex BC, vel AC, & qvadrat. lat. EF, eſt duplum qvadrati, qvod à DC deſcribitur (ut ſupra); Qvare qvadratum rectæ FB = duplo qvadr. rectæ AC + duplo qvadr. rectæ DC (per 1 ax.)

4. Qvoniam recta DF eſt parallela rectæ CE (per conſtr.); erit angulus AFD = angulo AEC (per 29. 1.); Sed ang. AEC = ang. A (ut ſupra), ergo ang. AFD = ang. A (per 1 ax.); ideoqve Recta DF = rectæ AD (per 6. 1.); Porro angulus FDC = ang. recto ECD (per 29. 1.), rectangulum igitur eſt triangulum FDB, ideoqve qvadratum lateris FB = qvadrat. lat. FD + qvadr. lat. DB (per 47. 1.); & qvia FD = AD, erit qvadr. lat. FB = qvadr. rectæ AD + qvadr. rectæ DB (per 1 ax.)

Cum itaqve in 3tia demonſtrationis parte oſtenſum eſt; qvadratum rectæ FB eſſe duplum qvadratorum ex AC, CD; & in 4ta demonſtr. parte iterum oſtenſum eſt, qvadrat. rectæ FB eſſe æqvale qvadratis ſegmentorum inæqvalium AD, DB; Qvadrata igitur ſegmentor. inæqv. AD, DB ſunt dupla qvadratorum à dimidia AC, & a recta inter puncta ſectionum DC.

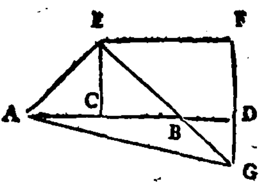
Qvod erat demonſtr.

PROP.

PROP. X. THEOR.

Si recta linea secetur bifariam & illi recta qvæcunqve linea in directum adjiciatur, qvadratum compositæ ex tota & adjecta, & qvadratum adjectæ simul sumpta sunt dupla & qvadrati ex dimidia & qvadrati compositæ ex dimidia & adjecta tanqvam una linea.

Recta AB secetur bifariam in C, & ipsi in directum adjiciatur qvæcunqve recta linea BD: Dico qvadrata ex AD, DB, qvadratorum ex AC, CD, dupla esse.



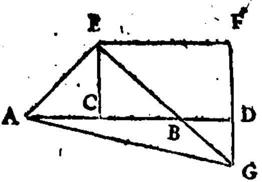
Constructio.

1. Ducatur à puncto C ipsi AB ad angulos rectos CE (per 11. 1.);
2. Ponatur CE æqvalis alterutri ipsarum AC, CB: junganturqve AE, EB; & per E qvidem ipsi AD parallela ducatur EF; per D verò ducatur DF parallela ipsi CE (per 31. 1.);
3. Producantur FD, EB, usqvedum conveniant in puncto G, & jungatur AG.

Demonstratio.

1. Recta AC = rectæ CE, & angulus ACE est rectus (per construct.); ideoqve qvadratum rectæ AE = qvadrato rectæ AC + qvadr. rectæ EC, hoc est, qvadratum ex AE est duplum qvadrati ex AC (per 47. 1.)

2. In



2. In triangulo, ECB, ang. ad C est rectus, ideoqve ang. CEB est semirectus (per 32. I.); ac propterea angulus alternus EGF est semirectus (per 29. I.); & qvoniam parallelogrammi ECDF, ang. ECD rectus est (per constr.), oppositus ang. F est etiam rectus (per 34. I.); semirectus igitur est angulus FEG (per 32. I.); qvare anguli FEG, EGF sunt inter se æqvales, & proinde his subtensæ rectæ EF, FG inter se æqvales (per 6 I.); rectæ igitur EG, recto ang. F. subtensæ qvadratum æqvale est qvadrato rectæ EF † qvadr. rectæ FG (per 47. I.) vel, qvod idem est, qvadr. ex EG est duplum qvadrati ex EF, qvia EF ⸗ FG; Est autem recta EF ⸗ rectæ CD (per 34. I.); qvare qvadratum ex EG est duplum qvadrati ex CD (per 1 ax.)

3. Angulus CEB est semirectus (ut supra), & eadem ratione ostendetur angulus CEA esse semirectus; qvare ang. AEG est rectus (per 8. ax.), & subtensæ AG qvadratum ⸗ qvadrato rectæ AE † qvadr. rectæ EG (per 47. I.); ostensum vero est in Ima demonstrationis parte, qvod qvadr. rectæ AE sit duplum qvadrati ex AC, & in 2da parte, qvod qvadr. rectæ EG sit duplum qvadrati ex CD; qvare qvadratum ex AG est duplum qvadr. ex AC & qvadrati ex CD (per I. ax.)

4. Rursus qvoniam angulus EGF est semirectus (ut supra), & ang. DBG ⸗ semirecto CBE (per 15. I.); Ergo trianguli BDG, latus DG ⸗ lateri BD (per 6. I.); & qvadratum rectæ DG ⸗ qvadrato rectæ BD (per 8. ax.): porro angulus ADG ⸗ angulo recto EFD (per 29. I); rectangulum igitur est triangulum ADG, ideoqve qvadratum subtensæ AG ⸗ qvadrato rectæ AD † qvadr. rectæ DG (per 47. I.); sed qvadratum rectæ AG est duplum qvadr. ex AC & qvadr. ex CD, (ut supra in 3tia parte ostensum fuit), ergo & duo qvadrata ex AD, DG, vel ex AD, DB (qvia DG ⸗ DB), dupla sunt duorum qvadratorum ex AC, CD.

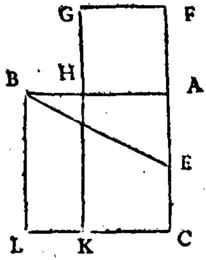
Qvod erat demonstr.

PROP.

PROP. XI. PROBL.

Datam rectam lineam ita secare ut rectangulum sub tota & altero segmento æqvetur qvadrato reliqvi segmenti.

Sit data recta linea AB: oportet ipsam AB ita secare, ut qvod sub tota & altera parte continetur rectangulum æqvale sit ei, qvod à reliqva parte fit, qvadrato.



Constructio.

1. Describatur ex AB qvadratum ABLC (per 46. 1.);
2. AC secetur bifariam in E (per 10. 1.), & BE jungatur;
3. Producatur CA in F, ponaturqve ipsi BE æqvalis EF (per 3. 1.);
4. Ex AF describatur qvadratum FH, & GH ad K producatur.

Dico rectam AB sectam esse in H ita, ut rectangulum sub tota AB & segmento BH æqvale sit qvadrato alterius segmenti AH.

Demonstratio.

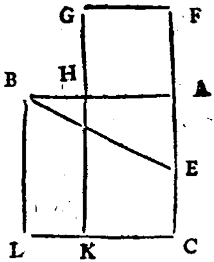
Qvoniam recta AC bifariam secta est in E, eiqve adjecta est in directum AF; rectangulum sub CF, FA, una cum qvadrato dimidiæ AE = qvadrato rectæ EF (per 6. 2.); recta verò EF = rectæ EB (per constr.); Ergo rectang. sub CF, FA, † qvadr. rectæ AE = qvadr. rectæ EB;

Sed qvadratum rectæ
EB = qvadr. rectæ BA † qvadr. rectæ AE (per 47. 1.);

Ergo rectang. sub CF, FA † qvadr. rectæ AE = qvadr. rectæ BA † qvadr. rectæ AE (per 1. ax.)
commune auferatur qvadr. rectæ AE.

Relinqvetur rect. sub CF, FA = qvadrato rectæ BA (per 3. ax.).

Atqvi rectang. ſub CF, FA ∺ rectang. CAHK+qvadr. AHGF; & qvadr. rectæ BA ∺ rectangulo CAHK+rectangulo HBKL:



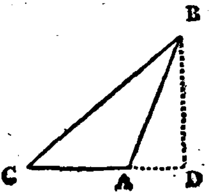
Ergo rectang.CAHK+qvadr.AHGF∺ rect.CAHK+rect.HBKL; rurſus auferatur commune rectang. CAHK

Remanet qvadratum AHGF ∺ rectang. HBKL, hoc eſt rectangulum ſub tota AB & ſegmento BH æqvale qvadrato alterius ſegmenti AH. *Qvod erat demonſtr.*

PROP. XII. THEOR.

In triangulis amblygoniis qvadratum lateris, ſubtendentis angulum obtuſum, majus eſt qvam qvadrata laterum angulum obtuſum comprehendentium, rectangulo bis comprehenſo ſub uno laterum circa angulum obtuſum, in qvod productum perpendicularis cadit, & recta extra intercepta à perpendiculari ad angulum obtuſum.

Sit amblygonium triangulum ABC, obtuſum angulum habens BAC, & ducatur a puncto B ad rectam CA productam recta perpendicularis BD: Dico qvadratum ex BC majus eſſe qvam qvadrata ex BA, AC rectangulo; qvod, bis ſub rectis CA, AD continetur.



De-

Demonſtratio.

Cum recta CD ſecta ſit utcunqve in A: Erit qvadr. rectæ CD $=$ qvadr. rectæ CA $+$ qvadr. rectæ AD $+$ rectang. ſub CA, AD, bis comprehenſo (per 4. 2.);

Commune addatur qvadrat. rectæ DB; erunt duo qvadrata ex CD, DB, æqvalia qvadratis ex CA, AD, DB $+$ rectang. ſub CA, AD bis contento.

Sed qvadratis ex CD,DB $=$ qvadratum rectæ BC (per 47.1.); rectus enim eſt angulus D: Qvadratis verò ex AD, DB $=$ qvadratum ex AB: Qvadratum igitur ex BC $=$ qvadratis ex CA, AB & rectangulo bis contento ſub rectis CA, AD.

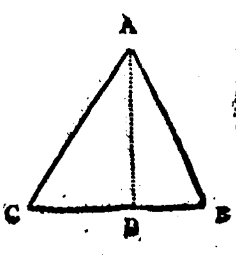
Ergo qvadratum ex BC majus eſt qvam qvadrata ex BA, AC, rectangulo qvod bis continetur ſub rectis CA, AD:

Qvod erat demonſtr.

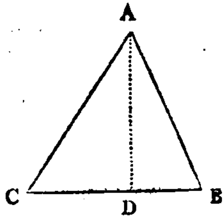
PROP. XIII. THEOR.

In triangulis oxygoniis qvadratum lateris ſubtendentis angulum acutum minus eſt qvam qvadrata laterum comprehendentium angulum acutum, rectangulo bis comprehenſo ſub uno laterum circa angulum acutum, in qvod perpendicularis cadit, & recta intus intercepta à perpendiculari ad angulum acutum.

Sit oxygonium triangulum ABC, acutum habens angulum ad B, & ducatur à puncto A ad BC perpendicularis AD: Dico qvadratum, qvod ſit ex AC minus eſſe, qvam qvadrata, qvæ fiunt ex CB, AB, rectangulo, qvod bis continetur ſub rectis CB, BD.



Demonſtratio.



Qvoniam recta linea CB ſecta eſt utcunqve in D : erunt qvadrata ex CB, BD = rectangulo bis comprehenſo ſub rectis CB, BD + qvadr. ex CD : (per 7. 2.)

Commune addatur qvadr. rectæ AD.

Qvadrata igitur ex CB, BD, AD = rectangulo bis comprehenſo ſub rectis CB, BD + qvadr. ex CD + qvadr. ex AD.

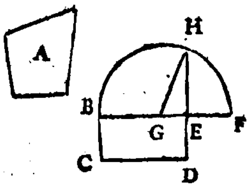
Sed qvadratis ex BD, AD = qvadr. ex AB (per 47. 1.), rectus enim eſt angulus ad D ; qvadratis vero ex CD, AD = qvadratum ex AC ;

Qvadrata igitur ex CB, AB = qvadrato ex AC + rectangulo ſub CB, BD bis comprehenſo : Qvare ſolum qvadratum ex AC minus eſt, qvam qvadrata ex CB, AB, rectangulo ſub rectis CB, BD bis contento.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XIV. PROBL.

Dato rectilineo æqvale qvadratum conſtituere.



Sit datum rectilineum A : oportet ipſi A rectilineo æqvale qvadratum conſtituere.

Conſtructio.

1. Conſtituatur rectilineo A æqvale parallelogrammum rectangulum BD (per 45. 1.) Si igitur BE eſt æqvalis ED, factum jam erit, qvod proponebatur ; ſin minus una ipſarum BE, ED major eſt. Sit BE major ;

2. Pro-

2. Producatur itaqve BE ad F ponaturqve ipſi ED æqvalis EF (per 3. 1.);
3. BF ſecetur bifariam in G (per 10. 1.);
4. Centro G, intervallo GB, vel GF, ſemicirculus BHF deſcribatur (per 3. poſt.).
5. Producatur DE in H, & jungatur GH;

Dico qvadratum rectæ HE eſſe æqvale rectilineo A.

Demonſtratio.

Qvoniam recta BF ſecta eſt in partes æqvales ad G; & inæqvales ad E; erit rectangulum comprehenſum ſub BE, EF, una cum qvadrato GE æqvale qvadrato dimidiæ BG (per 5. 2.);

Sed qvadratum rectæ GH = qvadrato rectæ BG, nam rectæ BG, GH æqvales ſunt (per 15. def. 1.); idemqve qvadratum GH = qvadrato rectæ HE + qvadrato rectæ GE (per 47. 1.):

Auferatur commune qvadratum GE; erit rectangulum ſub BE, EF, hoc eſt rectangulum BCDE = qvadrato rectæ HE:

Eſt autem rectangulum BCDE = rectilineo A:

Ergo qvadratum rectæ HE, eſt æqvale dato rectilineo A.

Qvod erat faciendum.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES:

1. Æqvales circuli ſunt, qvorum diametri ſunt æqvales, vel qvorum qvæ ex centris ſunt æqvales.
2. Recta linea circulum contingere dicitur, qvæ contingens circulum & producta ipſum non ſecat.
3. Circuli contingere ſeſe dicuntur, qvi contingentes ſe mutuo non ſecant.
4. In circulo æqvaliter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, qvando à centro ad ipſas perpendiculares ductæ ſunt æqvales.
5. Magis autem à centro diſtare dicitur ea, in qvam major perpendicularis cadit.
6. Segmentum Circuli eſt figura, qvæ recta linea & circuli circumferentia comprehenditur.
7. Angulus Segmenti eſt, qvi recta linea & circuli circumferentia comprehenditur.
8. Angulus in ſegmento eſt, qvando in circumferentia ſegmenti ſumitur aliqvod punctum, atqve ab ipſo ad terminos lineæ ejus, qvæ baſis eſt Segmenti, rectæ lineæ ducuntur; angulus à ductis lineis comprehenſus.
9. Qvando autem comprehendentes angulum rectæ lineæ aſſumunt circumferentiam, illi inſiſtere angulus dicitur.

10. Se-

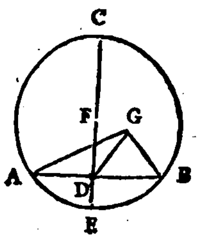
10. Sector Circuli eſt, qvando angulus ad centrum conſtiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus & circumferentia ab ipſis aſſumpta.

11. Similia circulorum ſegmenta ſunt, qvæ angulos capiunt æqvales: vel in qvibus anguli ſunt inter ſe æqvales.

PROP. I. PROBL.

Dati circuli Centrum invenire.

Sit datus circulus ABC: oportet circuli ABC centrum invenire.

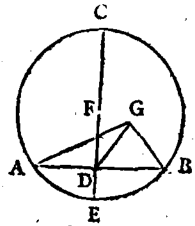


Conſtructio.

1. Ducatur in circulo qvædam recta linea AB utcunqve & in puncto D bifariam ſecetur (per 10. 1.);
2. A puncto autem D ipſi AB ad rectos angulos ducatur DC (per 11. 1.);
3. Recta CD producatur in E, & bifariam ſecetur in F: Dico punctum F eſſe centrum circuli ABC.

Demonſtratio.

Si F non eſt centrum circuli, ſit aliud punctum G centrum, & ducantur rectæ GA, GD, GB; erunt rectæ GA, GB æqvales (per 15. def. 1.); rectæ vero AD, BD ſunt æqvales (per conſtruct.); recta deniqve DG eſt utriqve triangulo ADG, BDG, commune.



Duo igitur triangula ADG, BDG habent duo latera æqvalia, latus nempe AD = lateri DB, & DG commune, habent præterea & basin AG = basi BG; Ergo & angulus ADG erit = angulo BDG (per 8. 1.); cum autem hi anguli deinceps sint & æqvales, rectus est uterqve æqvalium angulorum: ergo Angulus ADG est rectus (per 10. def. 1.); sed & angul. FDA est rectus (per construct.):

Ergo angulus GDA = angulo CDA, pars scilicet toti æqvalis foret, qvod fieri neqvit (per 9 ax:). Ergo G non est Centrum. Similiter ostendetur neqve aliud esse præter ipsum F.

Ergo punctum F centrum est circuli ABC.

Qvod erat Invenienudum.

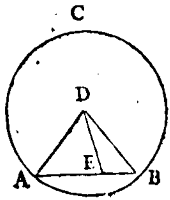
Corollarium.

Ex hoc perspicuum est, si in circulo recta linea rectam bifariam & ad angulos rectos secet, circuli centrum esse in secante.

PROP. II. THEOR.

Si in circumferentia circuli duo qvælibet puncta sumantur, qvæ ipsa conjungit, recta linea intra circulum cadet.

Sit circulus ABC, & in circumferentia ipsius sumantur duo qvalibet puncta A, B: Dico rectam lineam, qvæ a puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere.



Constructio.

1. Inveniatur circuli ABC centrum D (per 1. 3.);
2. Ducantur rectæ AD, BD, & ad qvodvis aliud punctum E rectæ AB ducatur recta DE.

Demonstratio.

Recta AD = BD (per 15. def. 1.): Erit igitur angulus DAB = angulo DBA (per 5. 1.);

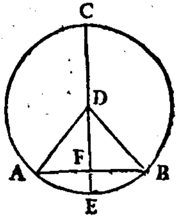
Est autem angulus DEA major qvam ang. DBA (per 16. 1.);

Ergo etiam ang. DEA major est qvam ang. DAB, ideoqve recta DE minoribus angulis A & B subtensa minor est rectis AD, BD (per 19. 1.): Hoc est recta DE à centro circuli in qvodvis punctum, qvod in recta linea intra puncta A & B sumitur, cadens minor est qvam circuli semidiameter AD, vel BD, ac proinde recta, à puncto A ad punctum B ducta, intra circulum cadit.

Qvod erat demonstr.

PROP. III. THEOR.

Si in circulo recta qvædam linea per centrum ducta rectam lineam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos eam secabit: qvod si ad angulos rectos ipsam secet, & bifariam secabit.



1. *Sit circulus ABC, & in ipso recta linea per centrum ducta CE rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam secet in puncto F: Dico quod etiam ad angulos rectos ipsam secat.*

2. *Quod si recta CE rectam AB ad rectos angulos secet: Dico quod etiam bifariam ipsam secat, hoc est, quod AF ipsi FB aequalis est.*

Constructio.

Sumatur circuli ABC, centrum D (per 1. 3.); & jungantur DA, DB.

Demonstratio.

1. Sit latus AF ≍ lateri BF (per hypoth.), & DF commune; basis vero AD ≍ basi BD (per 15. def. 1.): ergo angulus DFA ≍ angulo DFB, (per 8. 1.); cum autem anguli DFA, DFB deinceps sunt & æqvales, uterqve eorum rectus erit (per 10. def. 1.).

Quod Imo erat demonstr.

2. Sint anguli DFA, DFB recti (per hypoth.); cum vero rectæ DA, DB sint æqvales, etiam Anguli A & B æqvales erunt (per 5 1.); latus præterea DF est commune utriqve triangulo DFA, DFB; duo igitur hæc triangula habent duos angulos duobus angulis æqvales, & unum latus uni lateri æqvale, commune scilicet DF, qvod utriqve angulorum æqvalium subtenditur:

Ergo & reliqva latera reliqvis lateribus æqvalia habebunt (per 26. 1.); æqvalis igitur est AF ipsi BF.

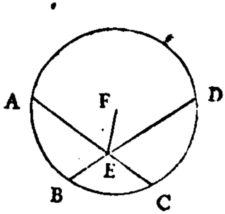
Quod IIdo erat demonstr.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ, non ductæ per centrum, ſe invicem ſecent; ſeſe bifariam non ſecabunt.

Sit circulus ABCD; & in ipſo duæ rectæ lineæ AC, BD, non ductæ per centrum ſe invicem ſecent in puncto E: Dico eas ſeſe bifariam non ſecare.



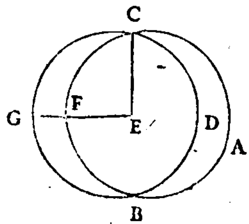
Demonſtratio.

Si enim AC, BD, ſectæ eſſent bifariam in E, recta FE, ducta ex centro F eſſet perpendicularis ad utramqve, & anguli FEA, FEB eſſent æqvales, hoc eſt, pars FEA eſſet toti FEB æqvalis; qvod eſt abſurdum (per 9. ax.). Non igitur AC, BD ſeſe bifariam ſecant. *Qvod erat demonſtr.*

PROP. V. THEOR.

Si duo circuli ſe invicem ſecent, non erit ipſorum idem centrum.

Secent ſe mutuo duo circuli ABC, CDG, in punctis B, C: Dico ipſorum idem centrum non eſſe.



Demonſtratio.

Si fieri poteſt, ſit punctum E, commune utriusqve circuli centrum, jungaturqve EC, & EFG ducatur utcunqve.

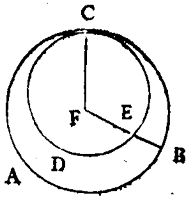
Qvoniam igitur E eſt centrum circuli ABC, erit recta EC $=$ rectæ EF; rurſus qvoniam E eſt centrum circuli CDG, erit recta EC $=$ rectæ EG (per 15. def. 1.): Ergo recta EF $=$ rectæ EG, hoc eſt, pars toti æqvalis eſt, qvod eſt abſurdum (per 9. ax.). Qvare, ſi duo circuli ſe invicem ſecent, non erit ipſorum idem centrum. *Qvod erat demonſtr.*

PROP.

PROP. VI. THEOR.

Si duo circuli ſeſe intra contingant, ipſorum idem centrum non erit.

Duo circuli ABC, CDE ſeſe intra contingant in puncto C: Dico ipſorum non eſſe idem centrum.



Demonſtratio.

Sit F commune utriusqve circuli centrum, ſi fieri poteſt; jungaturqve FC, & ducatur utcunqve FEB.

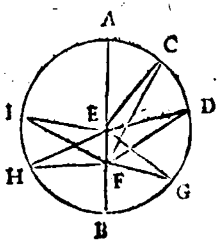
Qvoniam igitur F eſt centrum circuli ABC, erit recta FB = rectæ FC; & qvoniam F eſt centrum circuli CDE, erit recta FE = rectæ FC (per 15. def. 1.); ideoqve recta FB = rectæ FE (per 1. ax.): hoc eſt tota FB ſuæ parti FE æqvalis erit, qvod fieri non poteſt (per 9 ax.). Qvare ſi duo circuli ſeſe intra contingant, non eſt ipſorum idem centrum.

Qvod erat demonſtr.

PROP. VII. THEOR.

Si in circuli diametro aliqvod punctum ſumatur, qvod non ſit centrum circuli, & ab eo in circulum cadant qvædam rectæ lineæ; maxima qvidem erit in qva centrum, reliqva vero minima: aliarum autem ſemper propinqvior ei, qvæ per centrum, major eſt remotiore; duæqve tantum æqvales ab eodem puncto in circulum cadent ex utraqve parte minimæ.

Sit



Sit circulus ADBI, ejus autem diameter sit AB, & in ea sumatur aliqvod punctum F, qvod non sit centrum circuli; Sit autem circuli centrum E, & à puncto F in circulum cadant rectæ lineæ FC, FD, FG:

Dico 1. maximam esse AF, qvæ per centrum E transit; 2. reliqvam diametri partem FB esse minimam; 3. aliarum vero majorem esse eam, qvæ maximæ AF propior; 4. neqve plures, qvam duas ex dicto puncto F ad circumferentiam duci posse æqvales.

Demonstratio.

1. Ducatur ex E centro recta EC. Qvoniam EC, EA æqvales sunt, addita communi EF, erunt EC+EF, & EA+EF (hoc est AF) æqvales, Sed EC+EF sunt majores qvam CF (per 20. 1.): Ergo etiam AF major qvam CF. Eodem modo ostendetur AF major qvavis alia FD, FG, FH, FI, & sic porro.

2. è Centro ducta EG æqvalis est rectæ EB; Sed EG minor est, qvam EF+FG:

   Ergo EB etiam minor est qvam EF+FG;
   Cummune auferatur EF

   Relinqvetur FB (sive EB − EF) minor qvam FG (per 5. ax.); Eodem modo ostendetur FB, minor qvavis aliâ.

3. In triangulis FGE, FDE, latera DE, EF æqvantur lateribus GE, EF; angulus vero DEF major est angulo GEF: Ergo basis FD major est basi FG (per 24. 1.)

   Eadem ratione qvævis alia recta, qvæ maximæ AF propior est, semper major erit remotiore.

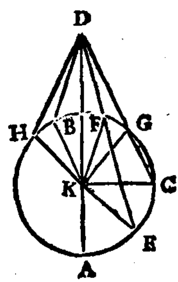
4. Duæ rectæ FH, FG, è puncto F ductæ sint æqvales: cum verò aliæ qvævis rectæ, qvæ ab eodem puncto F in circumferentiam ducuntur, vel sint propiores maximæ AF, vel ab eadem remotiores, erunt itaqve vel majores vel minores duabus illis rectis FH, FG, ut patet ex præcedente 3tia parte hujus demonstrationis: Qvare non plures qvam duæ rectæ æqvales ab eodem puncto F in circulum cadent ex utraqve parte minimæ. *Qvod erat demonstr.*

PROP

PROP. VIII. THEOR.

Si extra circulum aliqvod punctum sumatur, atqve ab eo ad circulum ducantur qvædam rectæ lineæ, qvarum una per centrum transeat, reliqvæ vero utcunqve. Earum qvidem, qvæ in concavam circumferentiam cadunt, maxima est, qvæ per centrum transit: aliarum autem semper propinqvior ei, qvæ per centrum, major est remotiore: earum autem, qvæ in convexam circumferentiam cadunt, minima est, qvæ inter punctum & diametrum interjicitur: aliarum autem semper qvæ propinqvior minimæ minor est remotiore, duæqve tantum æqvales a puncto in circulum cadunt ex utraqve parte minimæ.

Sit circulus ABC, & extra circulum sumatur aliqvod punctum D; ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ DA, DE; sitqve DA per centrum ducta;



Dico: 1. Earum qvidem, qvæ in AEC concavam circumferentiam cadunt, maxima est DA, qvæ per centrum transit.

2. *Et qvæ propinqvior est ei, qvæ per centrum, semper erit major remotiore, videlicet DE qvam DC;*

3. *Earum autem, qvæ in convexam circumferentiam cadunt, minima est DI, qvæ inter punctum D & diametrum BA interjicitur.*

4. *Qvæ minimæ DI propinqvior DF, minor est remotiore DG.*

5. *Duæqve tantum æqvales a puncto D cadunt in circulum ab utraqve parte minimæ DI;*

De-

Demonſtratio.

1. E Centro K ducta KE = KA, additâ communi DK, erunt KE+DK = DA; ſed KE+DK majores ſunt qvam DE (per 20. 1.): Ergo etiam DA major eſt qvam DE.
Eodem modo erit DA major qvavis alia à puncto D in concavam circumferentiam ducta.

2. E centro K ducta KC = KE; ideoqve trianguli DKC duo latera DK, KC, æqvalia ſunt duobus lateribus DK, KE alterius trianguli DKE; Angulus vero DKE major eſt angulo DKC: Ergo DE major eſt qvam DC (per 24. 1.)

3. E centro K ductâ rectâ KF; erunt DF+KF majores qvam DI+KI, hoc eſt qvam DK (per 20. 1.): ablatis igitur æqvalibus KF, KI, relinqvetur DI minor, qvam DF.
Eodem modo DI minor erit qvavis aliâ.

4. Ducta rectâ KG; erunt rectæ DF+FK minores rectis DG+GK (per 21. I.): Ablatis ergo æqvalibus FK, GK, relinqvitur DF minor qvam DG.

5. Si ad punctum K conſtituatur angulus DKB = angulo DKF (per 23. 1.); erunt trianguli DBK, duo latera BK, DK æqvalia duobus lateribus FK, DK, alterius trianguli DFK; & qvoniam angulus DKB eſt æqvalis angulo DKF, erit DB = DF (per 4. 1.); omnes vero rectæ, qvæ ſunt à minima DI, remotiores, qvam DB, DF, erunt eisdem majores; qvæ autem minimæ propiores, erunt minores, (ut patet ex præcedent. 2da & 4ta parte demonſtrationis. Non igitur plures qvam duæ rectæ ex puncto D in circuli circumferentiam, ſive concavam ſive convexam, duci poſſunt æqvales.

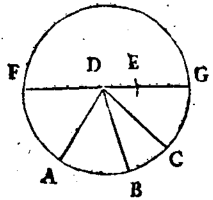
Qvod erat demonſtr.

PROP. IX. THEOR.

Si intra circulum ſumatur aliqvod punctum, atqve ab eo in circulum cadant plures, qvam duæ rectæ lineæ æqvales, punctum, qvod ſumitur, erit centrum circuli.

Sit

Sit circulus ABC & intra ipsum sumatur punctum D; ab hoc autem puncto D in circulum cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales DA, DB, DC: Dico assumptum punctum D centrum esse circuli ABC.



Demonstratio.

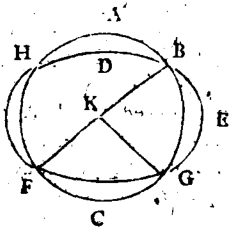
Si D non sit centrum, fieri si potest sit E, & juncta DE producatur utrinqve in F, G: Ergo FG est diameter circuli ABC, Itaqve qvoniam in FG, diametro circuli ABC sumptum est aliqvod punctum D, qvod non est centrum circuli; maxima qvidem erit DG, major autem DC qvam DB, & DB major qvam DA (per 7. 3.): Sed DC, DB, DA æqvales sunt (per hypoth.): non est igitur E centrum circuli ABC.

Similiter ostendetur neqve aliud punctum centrum esse præter ipsum D: Erit igitur D centrum circuli ABC. *Q. e. d.*

PROP. X. THEOR.

Circulus circulum in pluribus qvam duobus punctis non secat.

Demonstratio.



Si enim fieri potest, circulus ABC circulum DEF secet in pluribus punctis qvam duobus, nempe in B, H, F; & circuli ABC centrum sumatur, qvod sit K; & KF, KG, KB jungantur.

Qvoniam igitur intra circulum DEF sumptum est punctum K, à qvo in circulum DEF incidant plures qvam duæ rectæ lineæ æqvales KB, KF, KG, punctum K erit centrum circuli DEF (per 9. 3.);

Est autem K centrum circuli ABC (ut supra); duorum igitur circulorum, qvi sese secant, erit idem centrum K, qvod fieri non potest (per 5. 3.).

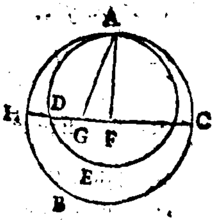
Qvare circulus circulum in pluribus qvam duobus punctis non secat. *Qvod erat demonstr.*

PROP.

PROP. XI. THEOR.

Si duo circuli ſeſe intus contingant, & ſumantur centra ipſorum; recta linea ipſorum centra conjungens, ſi producatur, in circulorum contactum cadet.

Duo circuli ABC, ADE ſeſe intus contingant in puncto A, & ſumatur circuli quidem ABC centrum, quod ſit F, circuli vero ADE centrum G: Dico rectam lineam a puncto F ad punctum G ductam, ſi producatur, in punctum A cadere.



Demonſtratio.

Si negas, fieri ſi poteſt, cadat ut GFC, & producatur in directum CFG ad punctum H, junganturqve AG, AF.

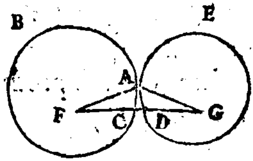
Qvoniam igitur AG+GF majores ſunt, qvam AF (per 20. 1.), & AF = CF = FH (per 15. def. 1.); communis ſi auferatur FG: reliqva AG erit major reliqvâ GH; ſed GD = AG (per 15. def. 1.): Ergo GD major erit qvam GH; hoc eſt, pars toto major, qvod fieri non poteſt (per 9 ax.). Non igitur à puncto F ad G ducta recta linea extra contactum A cadet: qvare in ipſum cadat neceſſe eſt.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XII. THEOR.

Si duo circuli ſeſe extra contingant, recta linea ipſorum centra conjungens per contactum tranſibit.

Duo circuli ABC, ADE sese extra contingant in puncto A; & sumatur circuli qvidem ABC centrum, qvod sit F: circuli vero ADE centrum G: Dico rectam lineam, qvæ à puncto F ad G ducitur per contactum A transire.



Demonstratio.

Si negas, fieri si potest, cadat ut FCDG, & AF, AG jungantur.

Qvoniam igitur F centrum est circuli ABC, erit FA = FC, rursus qvoniam G centrum est ADE circuli erit AG = GD, Ostensa est autem & FA = FC; sunt igitur FA, AG ipsis FC, DG æqvales: ergo tota FG major est qvam FA, AG, qvod tamen fieri non potest (per 20. 1.).

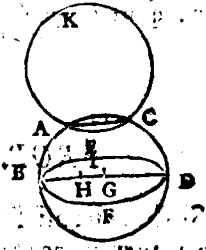
Qvare recta linea à puncto F ad punctum G ducta per punctum contactus A transeat, necesse est.

Qvod erat demonstr.

PROP. XIII. THEOR.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis qvam uno sive intus sive extra contingat.

Demonstratio.



Si enim fieri potest, circulus ABDC, circulum EBFD contingat primum intus in pluribus punctis qvam uno, videlicet in B, D.

Et sumatur circuli qvidem ABDC centrum G, circuli vero EBFD centrum H (per 1. 3.).

Ergo recta linea, qvæ à puncto G ad H ducitur, utrinqve producta cadet in puncta B, D (per

(per 11. 3.); & qvoniam G est centrum circuli ABDC, erit BG ipsi GD æqvalis: Major est igitur DG qvam HB, & DH qvam HB multo major; Rursus qvoniam H centrum est circuli EBFD, æqvalis est DH ipsi HB. Atqvi ostensa est ipsa multo major: Fieri ergo non potest, ut circulus circulum intus contingat in pluribus punctis qvam uno.

Dico etiam secundò, qvod circulus circulum neqve extra in pluribus qvam uno puncto contingat: Si enim fieri potest, circulus ACK circulum ABDC extra contingat in duobus punctis, videlicet in A, C.

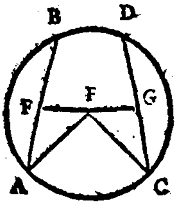
Qvoniam igitur in circumferentia circulorum ABDC, ACK sumpta sunt duò qvælibet puncta, A, C; recta linea, qvæ ipsa conjungit, intra utrumqve ipsorum cadet (per 2. 3.); Sed qvæ intra circulum qvidem ABDC cadit, extra circulum ACK cadet, qvod absurdum: Circulus igitur circulum neqve extra contingit in pluribus punctis qvam uno.

Qvod erat demonstr.

PROP. XIV. THEOR.

In circulo æqvales rectæ lineæ æqvaliter distant à centro, & qvæ æqvaliter distant à centro, sunt inter se æqvales.

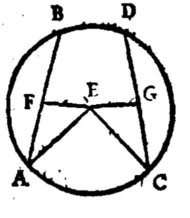
Sit circulus ABDC, & in ipso æqvales rectæ lineæ AB, CD: Dico primò eas à centro æqvaliter distare.



Constructio.

1. Sumatur circuli centrum, qvod sit E:
2. À Centro E ad AB, CD perpendiculares ducantur EF, EG, & jungantur AE, EC.

Demonstratio.



1. Rectæ AB, CD per lineas perpendiculares è centro ductas EF, EG bifariam secantur (per 3. 3.); sed AB = CD (per hypoth.): Earum igitur dimidiæ sunt æqvales, scil. AF = CG (per 7. ax.) ideoqve qvadr. rectæ AF = qvadr. rectæ CG. Porro recta AE = rectæ CE (per 15. def. 1.); ideoqve qvadratum rectæ AE æqvatur qvadrato rectæ CE: & qvoniam qvadratum rectæ AE = qvadr. rectæ AF + qvadr. rectæ EF; qvadratum verò rectæ CE = qvadr. rectæ CG + qvadr. rectæ EG (per 47. 1.): Ergo qvadr. rectæ AF + qvadr. rectæ EF = qvadr. rectæ CG + qvadr. rectæ EG.

Est autem qvadr. rectæ AF = qvadr. rectæ CG (ut supra); his igitur ablatis, relinqvetur qvadr. rectæ EF = qvadr. rectæ EG; ac propterea recta EF æqvalis est rectæ EG.

Ostensum itaqve est, qvod rectæ EF, EG à centro E, ad ipsas AB, CD perpendiculares ductæ, sint æqvales, qvare rectæ AB, CD æqvaliter à centro distant. (per 4. def. 3.)

2. *A centro æqvaliter distent duæ rectæ AB, CD, hoc est, sit EF æqvalis ipsi EG: Dico AB ipsi CD æqvalem esse.*

Iisdem, ut supra, constructis, similiter ostendetur AB duplam esse ipsius AF, & CD duplam ipsius CG: & qvoniam AE = ipsi EC, erit & qvadratum rectæ AE = qvadrato rectæ EC; sed qvadratum rectæ AE = qvadr. rectæ EF + qvadr. rectæ FA, qvadratum autem EC = qvadrato rectæ EG + qvadr. rectæ GC (per 47. I.): Ergo qvadr. rectæ EF + qvadr. rectæ FA = qvadr. rectæ EG + qvadr. rectæ GC.

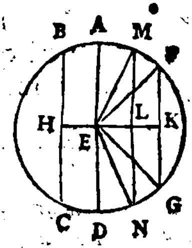
Qvoniam vero qvadr. rectæ EF = qvadrato rectæ EG (qvia EF = EG per hypoth.); reliqvum igitur qvadratum rectæ FA = reliqvo qvadr. rectæ GC; ergo recta FA = rectæ GC; Sed recta BA est dupla ipsius FA, & CD est dupla ipsius CG: Qvare AB ipsi CD æqvalis est (per 6. ax.). *Qvod erat demonstr.*

PROP-

PROP. XV. THEOR.

In circulo maxima qvidem est diameter: aliarum verò, semper propinqvior centro est major remotiore.

Sit circulus ABCD, ejus diameter AD, centrum E; & propinqvior qvidem centro E sit BC, remotior vero FG: Dico primò AD maximam esse; & secundò BC majorem qvam FG.



Constructio.

1. Ducantur à centro ad BC, FG perpendiculares EH, EK;

2. Ponatur ipsi EH æqvalis EL, & per L ipsi EK ad rectos angulos ducta LM producatur in N, & jungantur EM, EN, EF, EG.

Demonstratio.

1. Recta EH = EL, ideoqve BC = MN (per 14. 3.).

Rursus Qvoniam AE = EM, & ED = EN; erit AE+ED, hoc est, AD = EM+EN; Sed EM+EN majores sunt qvam MN; Ergo & AD major est qvam MN; at MN = BC: est igitur AD major qvam BC.

2. Qvoniam duæ ME, EN duabus FE, EG sunt æqvales, angulusqve MEN major angulo FEG; Basis igitur MN basi FG major erit (per 24. 1.);

Ostensa autem est MN = BC; ergo & BC major est qvam FG.

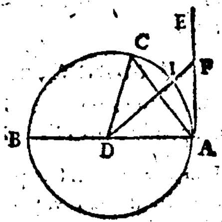
Qvare maxima est diameter AD, & qvæ centro propinqvior BC major est remotiore FG.

Qvod erat demonstr.

PROP. XVI. THEOR.

Recta diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducta cadit extra circulum: & in locum, qvi inter rectam lineam & circumferentiam interjicitur, altera recta non cadet: & semicirculi angulus major est qvovis angulo rectilineo acuto, reliqvus autem minor.

Sit circulus ABC cujus centrum D: Dico



1. *Rectam lineam AE, quæ à puncto A ipsi AB ad angulos rectos ducitur extra circulum cadere;*

2. *In locum, qui inter rectam lineam AE & circumferentiam interjicitur, alteram rectam lineam non cadere.*

3. *Præterea angulum semicirculi, qui à recta linea BA & circumferentia CIA comprehenditur, quovis angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum verò comprehensum à circumferentia CIA & recta linea AE quovis angulo acuto rectilineo esse minorem.*

Demonstratio.

1. Ex centro D ad qvodvis punctum F in recta AE si ducatur recta DF, erit DF subtendens angulum rectum DAF major qvam DA, acuto angulo DFA subtensa (per 19. 1.); Sed DA tantum pertingit ad circumferentiam: Ergo DF ultra circumferentiam porrigitur, adeoqve punctum F extra circulum est.

Eadem ratione ostendetur qvodvis aliud punctum rectæ AE extra circulum esse. Tota igitur AE extra circulum cadit.

2. Si

2. Si in circumferentia præter punctum A sumatur aliud qvodvis punctum C, recta hæc duo puncta conjungens AC intra circulum cadet (per 2. 3.); qvare in locum, qvi inter rectam lineam AE & circumferentiam CIA interjicitur, altera recta non cadet.

3. Itaqve seqvitur, angulum semicirculi, qvi à recta BA & circumferentia CIA comprehenditur, qvovis angulo acuto rectilineo BAC majorem esse; reliqvum vero angulum, comprehensum à circumferentia CIA & recta linea AE, qvovis angulo acuto rectilineo esse minorem.

Qvod erat demonstr.

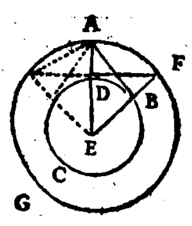
Corollarium.

Ex his manifestum est, qvod recta linea, qvæ ad rectos angulos ducitur diametro circuli ab extremitate ejusdem, circulum contingit: & qvod recta linea circulum contingit in unico tantum puncto. Qvoniam qvæ circulo in duobus punctis occurrit intra ipsum cadere ostendebatur (per 2. 3.).

PROP. XVII. PROBL.

A dato puncto rectam lineam ducere, qvæ datum circulum contingat.

Sit datum punctum A, datus autem circulus BCD: oportet à puncto A rectam lineam ducere, qva circulum BCD contingat.



Constructio.

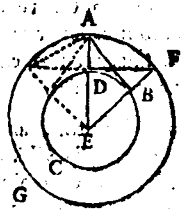
1. Sumatur centrum circuli E & jungatur AE;

2. Centro E, intervallo EA circu-

 lus

lus AFG describatur; & à puncto D ipsi EA ad angulos rectos ducatur DF, junganturqve EBF, AB:

Dico à puncto A ductam esse AB, qvæ circulum BCD contingit.



Demonstratio.

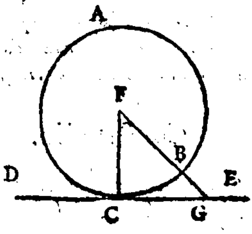
Qvoniam E est centrum circulorum BCD, AFG, erit EA = EF, & ED = EB, duæ igitur EA, EB, duabus EF, ED sunt æqvales, & angulum communem continent qvi est ad E; ideoqve DF est æqvalis basi AB, triangulum DEF æqvale triangulo EBA, & reliqvi anguli reliqvis angulis æqvales (per 4. 1.): Angulus itaqve EBA = angulo EDF; rectus autem est EDF, qvare & EBA est rectus. Porro recta EB ex centro ducta est, ejusqve extremitati insistens recta AB rectum facit angulum ABE: Ergo circulum contingit recta AB (per coroll. 16. 3.): A dato igitur puncto A ducta est recta linea AB, qvæ circulum BCD contingit.

Qvod erat faciend.

PROP. XVIII. THEOR.

Si recta linea circulum contingat, à centro autem ad contactum recta linea ducatur, ea perpendicularis erit tangenti.

Sit recta linea DE contingens circulum ABC in puncto C, & sumatur circuli centrum F à qvo ad C ducatur FC: Dico FC perpendicularem esse ad ipsam DE.



Demonstratio.

Si FC non sit perpendicularis, ducatur à puncto F alia qvævis ad DE perpendicularis FG.

Qvo-

Qvoniam angulus FGC rectus est, erit GCF acutus (per 17. 1.), major igitur est FC qvam FG (per 19. 1.); Sed FC = FB; Ergo FB major qvam FG, hoc est, tota FG sua parte BF minor erit, qvod fieri non potest (per 9. ax.).

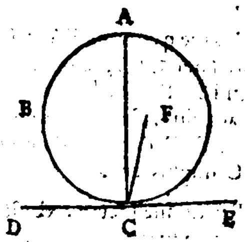
Similiter ostendetur neqve aliam qvampiam esse præter ipsam FC; Qvare FC ad DE est perpendicularis.

Qvod erat demonstr.

PROP. XIX. THEOR.

Si recta linea circulum contingat, à contactu autem recta linea ducatur ad angulos rectos tangenti, centrum circuli erit in eadem.

Sit recta linea DE circulum ABC contingens in C, & à puncto C ipsi DE ad angulos rectos ducatur CA: Dico circuli centrum esse in ipsa AC.



Demonstratio.

Si centrum circuli non sit in recta CA, ponatur extra, si fieri potest in puncto F & jungatur FC.

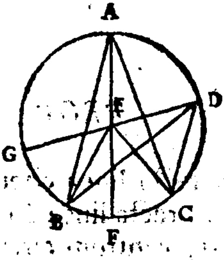
Qvoniam recta DE circulum contingit in C, à centro autem ad contactum ducta sit FC; erit igitur FC perpendicularis tangenti DE (per 18. 3.), ideoqve angulus FCE rectus; est vero angulus ACE rectus (per construct.): Ergo angulus FCE est æqvalis angulo ACE, minor majori, qvod fieri non potest. Non est igitur F centrum circuli ABC.

Similiter ostendetur neqve aliud aliqvod esse præterqvam in ipsa AC.

Qvod erat demonstr.

PROP. XX. THEOR.

In circulo, angulus qvi ad centrum duplus eſt ejus qvi ad circumferentiam, qvando circumferentiam eandem habent pro baſi.



Sit circulus ABC, ad cujus centrum ſit angulus BEC, ad circumferentiam vero angulus BAC, & eandem circumferentiam BC habeant pro baſi: dico angulum BEC anguli BAC duplum eſſe.

Demonſtratio.

Jungatur AE, & ad F producatur.

Itaqve qvoniam EA = EB; erit & angulus EAB = angulo EBA (per 5. 1.): anguli igitur EAB, EBA dupli ſunt ipſius anguli EAB. Sed angulus BEF = angulo EAB + aug. EBA: Ergo angulus BEF duplus eſt anguli EAB. Eadem ratione & angulus FEC duplus eſt ipſius EAC; totus igitur BEC totius BAC duplus erit.

Rurſus inclinetur, & ſit alter angulus BDC, junctaqve DE ad G producatur. Similiter oſtendetur angulum GEC anguli GDC duplum eſſe, è qvibus GEB duplus eſt ipſius GDB: Ergo reliqvus BEC reliqvi BDC eſt duplus.

In circulo igitur angulus qvi ad centrum duplus eſt ejus, qvi ad circumferentiam, qvando eidem circumferentiæ inſiſtunt.

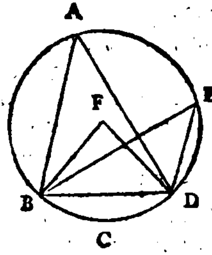
Qvod erat demonſtr.

PROP. XXI. THEOR.

Anguli in eodem circuli ſegmento ſunt inter ſe æqvales.

Sit

Sit circulus ABCD, & in eodem segmento BAED anguli sint BAD, BED: Dico eos inter se esse æqvales.



Constructio.

1. Sumatur circuli ABCD centrum F (per 1 3.);
2. Jungantur BF, FD.

Demonstratio.

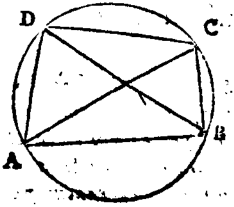
Qvoniam angulus BFD est ad centrum, angulus vero BAD ad cumferentiam, & hi duo anguli circumferentiam eandem BCD habent pro basi, erit angulus BFD duplus anguli BAD. Eadem ratione angulus BFD duplus est etiam anguli BED; Ergo angulus BAD angulo BED æqvalis erit (per 7. ax.)

Qvod erat demonstr.

PROP. XXII. THEOR.

Qvadrilaterorum, qvæ circulis inscribuntur, anguli oppositi sunt duobus rectis æqvales.

Sit circulus ABCD, & in ipso qvadrilaterum ABCD: Dico angulos ipsius oppositos duobus rectis esse aqvales.

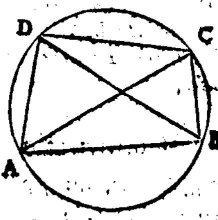


Demonstratio.

Jungatur AC, BD.

Qvoniam igitur omnis trianguli tres anguli sunt duobus rectis æqvales (per 32. 1.), erunt trianguli ABC tres anguli CAB + ABC + BCA æqvales duobus rectis.

Sed



Sed anguli CAB, BDC in eodem circuli segmento BADC sunt inter se æqvales (per 21. 3.), & angulus ACB æqvalis ipsi ADB, qvod sint in eodem ADCB segmento:

Totus igitur angulus ADC angulis BAC+ACB est æqvalis.

Communis apponatur ABC angulus: sunt igitur anguli ABC+BAC+ACB angulis ABC+ADC æqvales.

Sed ABC+BAC+ACB sunt duobus rectis æqvales: Ergo & anguli ABC+ADC sunt duobus rectis æqvales.

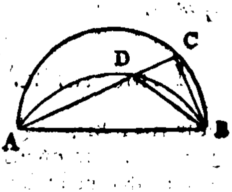
Similiter ostendetur angulos qvoqve BAD, DCB duobus rectis esse æqvales.

Qvadrilaterorum igitur, qvæ circulis inscribuntur, anguli oppositi sunt duobus rectis æqvales.

Qvod erat demonstr.

PROP. XXIII. THEOR.

Super eadem recta linea duo circulorum segmenta similia & inæqvalia ex eadem parte non constituentur.



Sit recta AB; super hac constitutum sit circuli segmentum ACB: Dico super eadem recta AB aliud segmentum simile & æqvale segmento ACB ex eadem parte non constitui.

De-

Demonstratio.

Si fieri potest, super eadem recta AB aliud qvodvis segmentum ADB ex eadem parte constituatur, qvod sit simile & inæqvale segmento alteri ACB; ducaturqve ADC & jungantur CB, DB.

Qvoniam igitur segmentum ACB simile est segmento ADB, similia autem circulorum segmenta sunt, qvæ angulos capiunt æqvales (per 11. def. 3.); erit angulus ACB = angulo ADB exterior interiori, qvod fieri non potest.

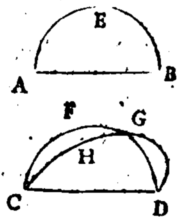
Non igitur super eadem recta linea duo circulorum segmenta similia & inæqvalia ex eadem parte constituentur.

Qvod erat demonstr.

PROP. XXIV. THEOR.

Super æqvalibus rectis lineis similia circulorum segmenta sunt inter se æqvalia.

Sint super æqvalibus rectis lineis AB, CD similia circulorum segmenta AEB, CFD: Dico segmentum AEB segmento CFD esse æqvale.



Demonstratio.

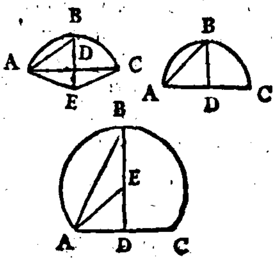
Posita recta linea AB super recta linea CD, ita ut punctum A puncto C congruat, sic punctum B etiam congruet puncto D, propterea qvod AB = CD (per hypoth.); Congruente autem recta linea AB rectæ CD, congruet & AEB segmentum segmento CFD. Si enim AB congruat ipsi CD, segmentum verò AEB segmento CFD non congruat, situm mutet ut CHGD. Sed circulus circulum in pluribus qvam duobus punctis non secat: at vero circulus CHGD circulum CFD secat in pluribus punctis qvam duobus videlicet in punctis C, G, D, qvod fieri non potest. Congruente igitur recta linea AB rectæ CD, non potest non congruere AEB segmento CFD: qvare congruet, ac proinde ipsi æqvale erit. *Qv. e. dem.*

PROP.

PROP. XXV. PROBL.

Dato circuli ſegmento deſcribere circulum, cujus eſt ſegmentum.

Sit datum circuli ſegmentum ABC: oportet autem circulum deſcribere, cujus ABC eſt ſegmentum.



Conſtructio.

1. Secetur AC bifariam in D (per 10. 1.);
2. A puncto D ipſi AC ad angulos rectos ducatur DB (per 11. 1.);
3. Jungatur AB;

Demonſtratio.

Sit primò ABC ſegmentum ſemicirculo minus, & ad rectam BA, atqve ad datum in ea punctum A conſtituatur angulus BAE æqvalis angulo ABE (per 23. 1.), & BD producatur ad E, jungaturqve EC.

Qvoniam igitur angulus ABE = angulo BAE, erit recta BE ipſi EA æqvalis (per 6. 1.): & qvoniam AD = DC, communis autem DE, duæ AD, DE, duabus CD, DE ſunt æqvales altera alteri; & angulus ADE æqvalis angulo CDE, rectus enim eſt uterqve: ergo & baſis AE baſi EC eſt æqvalis (per 4. 1.).

Sed oſtenſa eſt AE = EB, qvare & EB ipſi EC eſt æqvalis, ac propterea tres rectæ lineæ AE, EB, EC inter ſe ſunt æqvales; Centro igitur E intervallo autem æqvali uni ipſarum AE, EB, EC circulus deſcriptus etiam per reliqva tranſibit puncta, ejusqve circuli erit ABC ſegmentum (per 9. 3.).

Sit ſecundò ABC ſegmentum ſemicirculo æqvale, erunt tres rectæ lineæ DA, DB, DC inter ſe æqvales, atqve erit *D* cen-

centrum circuli, intervallo DA, vel DB, vel DC describendi (per 9. 3.).

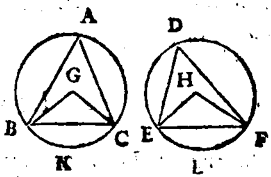
Sit deniqve tertiò segmentum ABC semicirculo majus, & constituatur ad rectam lineam BA & ad punctum in ea datum A angulus BAE æqvalis angulo ABD, intra segmentum in ipsa BD erit centrum E circuli, intervallo EA vel EB describendi.

Dato igitur circuli segmento, descriptus est circulus, cujus est segmentum. *Qvod erat faciendum.*

PROP. XXVI. THEOR.

In æqvalibus circulis æqvales anguli æqvalibus insistunt circumferentiis sive ad centra sive ad circumferentias insistant.

Sint æqvales circuli ABC, DEF, & in ipsis æqvales anguli, ad centra qvidem BGC, EHF, ad circumferentias verò BAC, EDF: Dico BKC circumferentiam circumferentiæ ELF æqvalem esse.



Demonstratio.

Jungantur BC, EF.

Qvoniam circuli ABC, DEF sunt æqvales, erunt & rectæ è centris ductæ æqvales: duæ igitur BG, GC duabus EH, HF sunt æqvales; angulus verò ad G æqvalis est angulo ad H (per hypoth.): Ergo & basis BC basi EF est æqvalis. (per 4. 1.)

Qvoniam autem angulus ad A angulo ad D æqvalis est, segmentum BAC simile erit segmento EDF (per 11. def. 3.); sed hæc similia segmenta super æqvalibus rectis BC, EF sunt constituta; itaqve inter se sunt æqvalia (per 24. 3.): Sed & totus ABC circulus æqvalis est toti DEF: auferantur vero segmenta BAC, EDF, erunt etiam reliqva segmenta BKC, ELF inter se æqvalia (per 3. ax): circumferentia igitur BKC circumferentiæ ELF æqvalis erit.

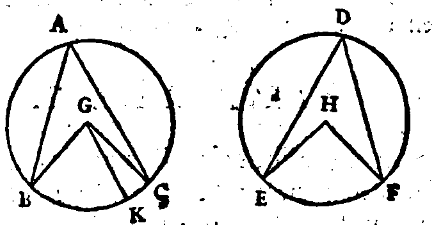
Qvod erat demonstr.

PROP.

PROP. XXVII. THEOR.

In æqvalibus circulis, anguli, qvi æqvalibus insistunt circumferentiis sunt inter se æqvales sive ad centra sive ad circumferentias insistant.

Sint æqvales circuli ABC, DEF eorumqve æqvalibus circumferentiis BC, EF, insistant anguli ad centra qvidem BGC, EHF, ad circumferentias verò BAC, EDF: Dico angulum BGC angulo EHF, & angulum BAC angulo EDF æqvalem esse.



Demonstratio.

Si angulus BGC æqvalis sit angulo EHF manifestum est angulum qvoqve BAC angulo EDF esse æqvalem. (per 20. 3. & 7. ax.). Sin minus unus ipsorum est major.

Sit angulus BGC major, & ad rectam lineam BG & ad punctum in ipsa G constituatur angulus BGK = angulo EHF (per 23. 1.); æqvales autem anguli æqvalibus insistunt circumferentiis, qvando ad centra fuerint (per 26. 3.): Ergo circumferentia BK = circumferentiæ EF.

Sed circumferentia EF = BC (per hypoth.): Ergo & BK ipsi BC est æqvalis, minor majori, qvod fieri non potest.

Non est igitur inæqvalis angulus BGC angulo EFH; Ergo est æqvalis.

Est autem angulus ad A dimidius anguli BGC; anguli vero EHF dimidius qvi ad D; angulus igitur qvi ad A angulo qvi ad D est æqvalis (per 7. ax.).

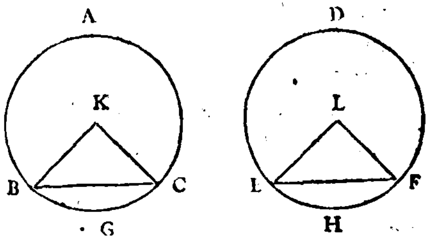
In æqvalibus igitur circulis anguli qvi æqvalibus insistunt circumferentiis sunt inter se æqvales, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. *Qvod erat demonstrandum.*

PROP.

PROP. XXVIII. THEOR.

In æqvalibus circulis æqvales rectæ lineæ circumferentias æqvales auferunt, majorem qvidem majori, minorem verò minori.

Sint æqvales circuli ABC, DEF, & in ipsis æqvales rectæ lineæ BC, EF, qvæ circumferentias qvidem auferant majores BAC, EDF, minores vero BGC, EHF: Dico circumferentiam BAC majorem majori circumferentiæ EDF, & minorem circumferentiam BGC minori EHF æqvales esse.



Constructio.

1. Sumantur centra circulorum K, L, (per 1. 3.).
2. Jungantur BK, KC, EL, LF.

Demonstratio.

Qvoniam circuli sunt æqvales, erunt & rectæ à centris ad peripheriam ductæ æqvales: scilicet duæ rectæ BK, KC æqvales duabus rectis EL, LF (per 1. def. 3.)

Basis vero BC æqvalis est basi EF (per hypothesin);

Ergo angulus B K C = angulo ELF (per 8 1.)

Æqvales autem anguli ad centra constituti æqvalibus insistunt circumferentiis, ideoqve circumferentia BGC = circumferentiæ EHF (per 26. 3.);

Sed & totus circulus ABC = toti circulo DEF, (per hypoth.):

Reliqva igitur circumferentia BAC reliqvæ EDF æqvalis erit (per 3. ax.)

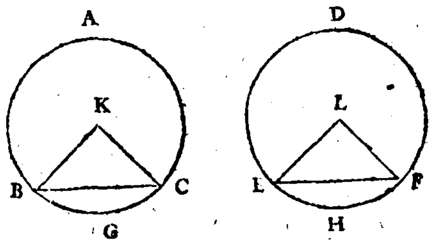
Ergo in æqvalibus circulis æqvales rectæ lineæ circumferentias æqvales auferunt. *Qvod erat demonstrandum.*

G PROP.

PROP. XXIX. THEOR.

In æqvalibus circulis æqvales circumferentias æqvales rectæ lineæ subtendunt.

Sint æqvales circuli ABC, DEF, & in ipsis æqvales circumferentias BGC, EHF subtendant rectæ BC, EF: Dico rectam lineam BC rectæ EF æqvalem esse.



Constructio.

1. Sumantur centra circulorum K, L (per 1. 3.)
2. Jungantur BK, KC, EL, LF.

Demonstratio.

Qvoniam circumferentia BGC æqvalis est circumferentiæ EHF (per hypoth.): Erit & angulus BKC = angulo ELF (per 27. 3.):

Porro qvoniam circuli ABC, DEF sunt æqvales (per hypoth.) erunt & rectæ è centris ductæ æqvales (per 1. def. 3)

Duæ igitur BK, KC sunt æqvales duabus EL, LF, & æqvales angulos continent: Qvare basis BC = basi EF (per 4. 1.)

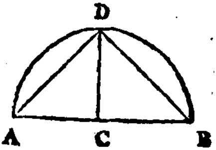
In æqvalibus igitur circulis æqvales circumferentias æqvales rectæ lineæ subtendunt.

Qvod erat demonstr.

PROP. XXX. PROBL.

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit



Sit data circumferentia ADB bifariam secanda.

Constructio.

1. Ducatur recta AB, & bifariam secetur in C (per 10. 1.).
2. A puncto C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD (per 11. 1.).
3. Jungantur AD, DB.

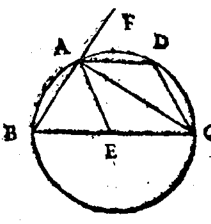
Demonstratio.

Qvoniam in duobus triangulis ACD, BCD duo latera AC, CB sunt æqvalia (per construct.); latus autem CD commune; & præterea anguli ACD, BCD æqvales, qvia uterqve rectus est: Basis igitur AD æqvalis est basi DB (per 4. 1.); ideoqve circumferentia AD æqvalis est circumferentiæ DB (per 28. 3) Qvare data circumferentia ADB bifariam secta est in puncto D.

Q. e. faciendum.

PROP. XXXI. THEOR.

In circulo, angulus, qvi in semicirculo, rectus est: qvi vero in majori segmento, minor est recto: & qvi in minori, major recto: & insuper majoris qvidem segmenti angulus recto major est; minoris vero segmenti angulus recto minor.



Sit circulus ABCD, cujus diameter BC, centrum autem E, & jungantur BA, AC, AD, DC: Dico (1.) angulum quidem, qui est in semicirculo BAC, rectum esse; (2.) qui vero in segmento ABC majori semicirculo, videlicet angulum rectilineum ABC minorem esse recto; & (3.) qui in segmento ADC minore semicirculo, (hoc est, angulum rectilineum ADC) recto majorem esse.

Demonſtratio.

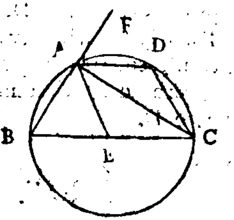
Jungatur AE, & BA ad F producatur.

1. Qvoniam angulus EAB = angulo EBA
& angulus EAC = angulo ECA } (per 5. 1.).

Ergo ang. EAB + EAC = ang. EBA + ECA (hoc eſt totus angulus BAC æqvalis eſt duobus angulis ACB & ABC ſimul ſumptis; (per 2. ax.).

Eſt autem & angulus exterior FAC = duobus ang. ACB + ABC (per 32. 1.)

Ergo angulus BAC = angulo FAC (per 1. ax.) ac propterea uterqve ipſorum rectus eſt (per 10. def. 1.): qvare in ſemicirculo BAC angulus BAC rectus eſt. *Qvod primo erat demonſtrandum.*



2. Qvoniam trianguli ABC duo anguli ABC, BCA ſunt minores duobus rectis (per 17. 1.), angulus autem BAC rectus eſt; Ergo angulus ABC recto minor eſt, & qvidem in ſegmento ABC majore ſemicirculo. *Qvod ſecundo erat demonſtrandum.*

3. Qvadrilaterum ABCD, circulo inſcriptum, habet angulos oppoſitos ABC, ADC, duobus rectis æqvales (per 22. 3.); Sed angulus ABC minor eſt recto; reliqvus igitur ADC recto major eſt, & qvidem in ſegmento ADC minore ſemicirculo. *Qvod tertio erat demonſtrandum.*

Dico præterea majoris ſegmenti angulum, comprehenſum a circumferentia ABC & recta linea AC, recto eſſe majorem; angulum vero minoris ſegmenti, comprehenſum à circumferentia ADC & recta linea AC, recto minorem: qvod qvidem perſpicue apparet. Qvoniam enim angulus à rectis lineis BA, AC comprehenſus rectus eſt, erit & comprehenſus à circumferentia ABC & recta linea AC major recto. Rurſus, qvoniam angulus comprehenſus a rectis lineis CA, AF rectus eſt; erit angulus, qvi comprehenditur à recta CA & ADC circumferentia, minor recto. *Qvod ultimo erat demonſtrandum.*

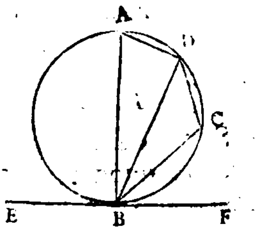
Co-

Corollarium.

Hinc manifestum est, qvod, si unus angulus trianguli sit æqvalis duobus reliqvis, est rectus: propterea qvod ejus angulus deinceps iisdem est æqvalis; qvando autem anguli deinceps sunt æqvales, recti erunt (per 10. def. 1.).

PROP. XXXII. THEOR.

Si recta linea circulum contingat, à contactu autem ducatur recta linea circulum secans, anguli qvos hæc cum contingente facit, æqvales erunt iis, qvi in alternis circuli segmentis consistunt.



Sit circulus ABCD, qvem recta linea EF contingat in B, & à puncto B per circulum ABCD ducatur recta linea BD secans illum utcunqve: dico angulos, qvos BD cum contingente EF facit, æqvales esse iis, qvi in alternis circuli segmentis consistunt; hoc est angulum FBD esse æqvalem angulo, qvi constituitur in DAB segmento, angulum verò EBD æqval. angulo, qvi in segmento DCB constituitur.

Constructio.

1. A puncto B ipsi EF ad rectos angulos ducatur BA (per 11. 1.).
2. In circumferentia BD sumatur qvodvis punctum C, junganturqve AD, DC, CB.

Demonstratio.

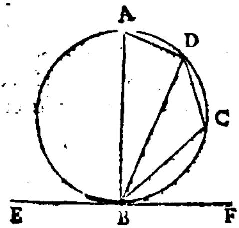
Qvoniam recta EF circulum contingit in B, à puncto autem contactus recta BA ducta est ad angulos rectos tangenti, erit in ipsa BA centrum circuli (per 19. 3.):

Angulus igitur ADB in semicirculo est rectus (per 31. 3.); reliqvi vero anguli BAD†ABD uni recto sunt æqvales (per 32 1.).

Est autem ang ABF rectus (per constr.): Ergo angulus ABF = ang BAD † ABD (per 10. ax.).

Communis auferatur ang. ABD.

Erit Reliqvus DBF = reliqvo BAD angulo; Qvi in alterno circuli segmento consistit.



Porro, qvoniam in circulo qvadrilaterum est ABCD, anguli ejus oppositi BAD†BCD æqvales sunt duobus rectis (per 22. 3.); Sed anguli DBF†DBE etiam æqvales sunt duobus rectis (per 13. 1.):

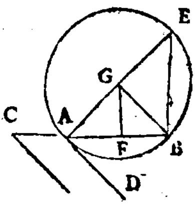
Ergo ang. DBF†DBE ≍ ang BAD†BCD (per 10 ax.);
Est autem ang. DBF ≍ ang. BAD (ut supra ostens.)

Reliqvus igitur ang. DBE ≍ ang. BCD (per 3 ax.).

Qvod erat demonstr.

PROP. XXXIII. PROBL.

Super data recta linea describere segmentum circuli, qvod capiat angulum dato angulo rectilineo æqvalem.



Sit data recta AB: super hac describendum est circuli segmentum, qvod capiat angulum æqvalem dato angulo rectilineo C.

Cum vero datus angulus vel sit acutus, vel rectus, vel obtusus; de unoqvoqve sigillatim agemus.

1. *Sit datus angulus ad C acutus.*

Constructio.

1. Ad datam rectam AB & ad punctum in ea A constituatur angulus DAB æqvalis dato angulo C (per 23. 1.).
2. Ex eodem puncto A erigatur ad rectam AD perpendicularis AE (per 11. 1.);
3. Ad alterum datæ rectæ AB punctum B fiat angulus ABG æqvalis angulo BAG; cujus latus BG secet perpendicularem AE in puncto G.

4. Cen-

4. Centro G, intervallo GA describatur circulus AEB (per 3. post.);

Dico quod Segmentum AEB capiat angulum dato angulo C acuto aeqvalem.

Demonstratio.

Qvoniam angulus GBA ≃ angulo GAB (per constr.)
erit recta GB ≃ rectæ GA (per 6. 1.)

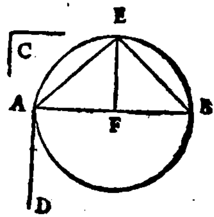
Ergo centro G intervallo GA descriptus circulus transibit per punctum B (per 15. def. 1.):

Circulus igitur AEB per rectam AB sectus est in punctis A & B; & angulus BAD, ex linea circulum contingente DA & secante AB constitutus, æqvalis ei, qvi in alterno segmento constituitur, angulo AEB; (per 32. 3.).

Sed angulus BAD ≃ angulo C (per constr.):

Ergo angulus AEB ≃ angulo C, super data igitur recta linea AB descriptum est circuli segmentum AEB, qvod capiat angulum rectilineum AEB dato angulo acuto C æqvalem.

2. *Sit datus angulus ad C rectus:*



Constructio.

1. Ad datam rectam AB & ad punctum in ea A constituatur angulus DAB æqvalis angulo recto C (per 23. 1.);

2. Secetur AB bifariam in F (per 10. 1.);

3. Centro F intervallo autem æqvali alterutri ipsarum AF, FB circulus describatur AEB (per 3. post.):

Dico qvod circuli segmentum AEB, super datam rectam AB constitutum, capiat angulum dato recto angulo C aeqvalem.

Demonstratio.

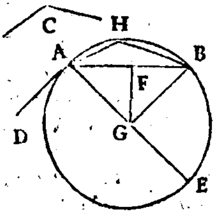
Qvoniam recta linea DA ad extremitatem A diametri AB rectum angulum constituit (per construct.) & circulum AEB in puncto A contingit (per Coroll. 16. 3.); angulus igitur, qvi in alterno circuli segmento AEB constituitur, æqvalis est angulo DAB (per 32. 1.)

 Sed

Sed recto angulo dato C æqvalis eſt idem DAB (per conſtr.); ergo & angulus, qvi in ſegmento AEB deſcribitur recto angulo C eſt æqvalis (per 1. ax.).

Deſcriptum igitur eſt ſuper data recta linea AB circuli ſegmentum AEB, qvod capiat angulum dato angulo C æqvalem. *Qvod ſecundò erat faciendum.*

3. *Sit deniqve angulus ad C obtuſus.*



Conſtructio.

1. Ad datam rectam lineam AB & ad punctum A conſtituatur angulus DAB æqvalis ipſi angulo C. (per 23. 1.);

2. Ex eodem puncto A erigatur perpendicularis AE (per 11. 1.).

3. Ad alterum datæ rectæ AB punctum B fiat angulus ABG æqvalis angulo BAG, cujus latus BG ſecet diametrum AE in puncto G.

4. Centro G intervallo GA, deſcribatur circulus AEBH (per 3. poſt.)

Dico qvod ſegmentum AHB capiat angulum dato obtuſo angulo C æqvalem.

Demonſtratio.

Qvoniam angulus ABG æqvalis eſt angulo BAG (per conſtr.); erit recta AG æqvalis rectæ BG (per 6. 1.); ideoqve centro G, intervallo GA deſcriptus circulus tranſibit per punctum B (per 15. def. 1.): Circulus igitur AEBH per rectam AB ſectus eſt in punctis A, B, & angulus DAB ex linea circulum contingente AD & ſecante AB conſtitutus æqvalis eſt ei, qvi in alterno ſegmento conſtituitur angulo AHB (per 32. 3.);

Sed & idem angulus DAB æqvalis eſt dato obtuſo angulo C (per conſtr.): Ergo angulus AHB etiam angulo C æqvalis eſt (per 1. ax.);

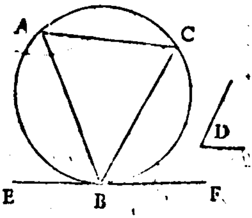
Super data igitur recta AB deſcriptum eſt circuli ſegmentum AHB qvod capiat angulum dato angulo obtuſo C æqvalem. *Qvod tertiò erat faciendum.*

PROP.

PROP. XXXIV. PROBL.

A dato circulo ſegmentum abſcindere, qvod capiat angulum dato angulo rectilineo æqvalem.

Sit datus circulus ABC, datus autem angulus rectilineus D, oportet à circulo ABC ſegmentum abſcindere, qvod capiat angulum angulo D æqvalem.



Conſtructio.

1. Ducatur recta linea EF, contingens circulum ABC in puncto B (per 17. 3.);

2. Ad rectam lineam EF & ad punctum in ea B conſtituatur angulus FBC, qvi eſt angulo D æqvalis (per 23. 1.).

Demonſtratio.

Angulo FBC = angulus BAC (per 32. 3.);
Eidem ang. FBC = angulus D (per conſtr.);
Ergo angulus BAC = angulo D (per 1. ax.);

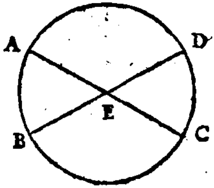
A dato igitur circulo ABC abſciſſum eſt ſegmentum BAC, qvod capiat angulum dato angulo rectilineo D æqvalem.

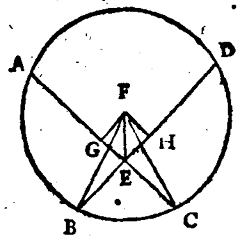
Qvod erat faciendum.

PROP. XXXV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, rectangulum ſub ſegmentis unius comprehenſum æquale eſt ei, qvod ſub alterius ſegmentis comprehenditur.

In circulo enim ABCD duæ rectæ lineæ AC, BD sese mutuo secent in puncto E:





Dico rectangulum comprehensum sub AE, EC æquale esse ei quod comprehenditur sub DE, EB.

Demonstratio.

1. Si rectæ AC, BD per centrum E transeant (*ut in Fig.* 1.) manifestum est, rectangulum comprehensum sub AE, EC, æqvale esse rectangulo comprehenso sub DE, EB: qvia rectæ omnes è centro ad peripheriam ductæ sunt æqvales (per 15. def. 1.).

2. Sin autem rectæ AC, DB non transeant per centrum (*uti in Fig.* 2); sumatur circuli centrum F (per 1. 3.); atqve à centro F ad rectas AC, BD ducantur perpendiculares FG, FH (per 12. 1.); junganturqve FC, FB, FE.

Qvoniam igitur recta FG per centrum ducta rectam AC non ductam per centrum ad angulos rectos secat, ideòqve ipsam bifariam in puncto G secabit (per 3. 3.); porro qvoniam eadem recta AC etiam in duas partes in puncto E secta est: erit rectangulum sub rectis AE, EC + qvadr. rectæ GE = qvadrato rectæ GC (per 5. 2.); commune addatur qvadr. rectæ FG; Erit rectangulum sub AE, EC + qvadr. GE + qvadr. FG = qvadr. GC + qvadr. FG (per 2. ax.):

Sed qvadr. GE + qvadr. FG = qvadr. FE; & qvadr. GC + qvadr. FG = qvadr. FC (per 47. 1.);

Rectang. igitur sub AE, EC + qvadr. FE = qvadrato FC.

Eadem

Eadem ratione ostendetur rectang. sub DE, EB † qvadr. FE ≍ qvadr. FB;

Est autem qvadr. FC ≍ qvadr. FB.

Ergo rectang. sub AE, EC † qvadr. FE ≍ rectang. sub DE, EB † qvadr. FE (per 1. ax.); commune auferatur qvadr. FE.

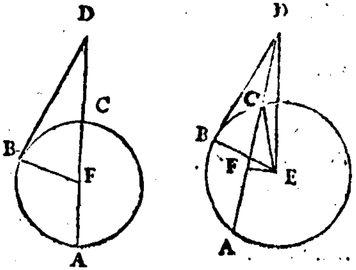
Relinqvetur rectang. sub AE, EC ≍ rectang. sub DE, EB.

Qvod erat demonstr.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si extra circulum aliqvod punctum sumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, qvarum altera circulum secet, altera verò contingat: rectangulum comprehensum sub tota secante & exteriore segmento inter punctum & convexam circumferentiam, æqvale erit ei, qvod à contingente fit, qvadrato.

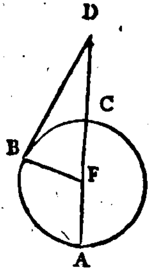
Extra circulum enim ABC sumatur aliqvod punctum D, & ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA, DB; & DCA qvidem circul. ABC secet DB vero contingat: Dico rectang. sub AD, DC æqvale esse qvadrato, qvod fit ex DB.

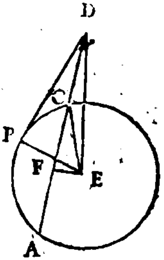


Demonstratio.

1. Si recta DCA transeat per circuli centrum F (vide Fig. 1.), angulus FBD rectus erit (per 18. 3.); & qvoniam recta AC bifariam secta est in F, ipsiqve adjecta DC, erit rectangulum sub AD, DC † qvadratum rectæ FC ≍ qvadrato rectæ FD (per 6. 2.);

Sed





Sed recta FC = rectæ FB (per 15. def. 1.); ergo rectangulum ſub AD, DC † qvadratum rectæ BF = qvadrato rectæ FD;

Porro qvadr. rectæ FD = qvadratis BD † BF (per 47. 1.);

Rectangulum igitur ſub AD, DC † qvadr. BF = qvadr. BD † qvadr. BF (per 1. ax.). Auferatur commune qvadr. BF.

Relinqvetur rectangulum Sub AD, DC = qvadrato BD (per 3. ax.).

Qvod Imo erat demonſtr.

2. Si recta linea DA non tranſeat per centrum circuli (vide Fig 2.); ſumatur centrum E, & ab ipſo E ad AC perpendicularis agatur EF (per 12. 1.), junganturqve EB, EC, ED.

Qvoniam igitur recta EF ad rectam AC perpendicularis eſt (per conſtr.) erit AC ſecta in duas partes æqvales, videlicet AF = FC (per 3. 3.).

Rurſus qvia ipſi AC etiam adjecta eſt linea CD, erit rectangulum ſub AD, DC † qvadr. FC = qvadrato FD (per 6. 2.) commune addatur qvadratum EF.

Sic rectang. ſub AD, DC † qvadr. FC † qvadr. EF = qvadratis FD † EF. (per 2. ax);

Porro qvoniam angulus EFD eſt rectus (per conſtr.); erit qvadratum rectæ ED = qvadratis FD † EF (per 47. 1.);

Ergo rectang. ſub AD, DC † qvadr. FC † qvadr. EF = qvadr. ED (per 1. ax.).

Atqvi qvadratum EC = qvadr. FC † qvadr. EF (per 47. 1.)

Ergo rectang. ſub AD, DC † qvadrat. EC = qvadr. ED. (per 1. ax.);

Recta autem EC = rectæ EB (per 15. def. 1.), ideoqve rectang. ſub AD, DC † qvadr. EB = qvadrato ED,

Cumqve rectus eſt angulus EBD (per 18. 3.), erunt qvadrata EB † BD = qvadr. ED (per 47. 1.);

Qva-

Qvare rectang. sub AD, DC + qvadr. EB = qvadratis EB + BD, auferatur commune qvadr. EB,

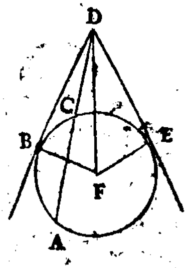
Relinqvetur rectang. sub AD, DC = qvadrato BD (per 3. ax.) Hoc est rectangulum sub tota AD, & ejus parte DC comprehensum æqvale est qvadrato lineæ circulum tangentis BD.

Qvod 2do erat demonstr.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si extra circulum sumatur aliqvod punctum, atqve ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, qvarum altera qvidem circulum secet, altera verò in eum incidat, sit autem rectangulum comprehensum sub tota secante & exteriore segmento inter punctum & convexam circumferentiam æqvale ei, qvod ab incidente fit, qvadrato; incidens linea circulum continget.

Extra circulum sumatur aliqvod punctum D, atqve ab hoc puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA, DB; & DCA qvidem circulum secet, DB vero in illum incidat, sitqve rectangulum sub AD, DC æqvale qvadrato qvod fit ex DB: Dico ipsum DB circulum ABC contingere.



Constructio.

1. Ducatur recta linea DE circulum ABC contingens (per 17. 3.);
2. Sumatur circuli ABC centrum F. (per 1. 3.).
3. Junganturqve FE, FB, FD.

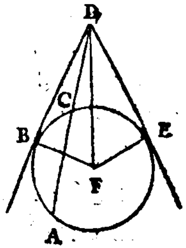
Demonstratio.

Rectangulum sub AD, DC = qvadr. tangentis DE (per 36. 3.);
Idem vero rectang. sub AD, DC = qvadrato rectæ DB (per hypoth.);

Ergo qvadratum DE = qvadrato DB (per 1. ax.) ac propterea linea DE = lineæ DB (per 8. ax.).

Porro

Porro recta FE = rectæ FB (per 15. def. 1.); in triangulis igitur DEF, DBF, duo latera DE, EF, duobus DB, BF sunt æqvalia & basis ipsorum FD communis, angulus igitur DBF = angulo DEF (per 8. 1.);



Rectus autem est DEF angulus (per 18. 3.),

Ergò & angulus DBF est rectus

Et qvoniam recta FB per circuli centrum transit, ideoqve est circuli semidiameter (per 15. def. 1.), recta DB ab extremitate semidiametri FB ad angulos rectos ducta circulum ABC contingit (per cor. 16. 3.).

Qvod erat demonstr.

EU-

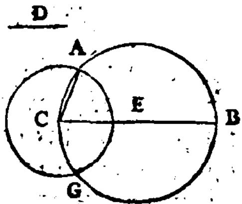
EUCLIDIS ELEMENTORUM
LIBER QVARTUS.
DEFINITIONES:

1. Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, qvando unusqvisqve figuræ inscriptæ angulus contingit unumqvodqve latus ejus, in qva inscribitur.
2. Figura rectilinea circa figuram rectilineam circumscribi dicitur qvando unumqvodqve latus circumscriptæ contingit unumqvemqve angulum ejus, qvæ inscribitur.
3. Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, qvando unusqvisqve inscriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.
4. Figura rectilinea circa circulum circumscribi dicitur, qvando unumqvodqve latus circumscriptæ circuli circumferentiam contingit.
5. Circulus similiter in figura rectilinea inscribi dicitur, qvando Circuli circumferentia unumqvodqve latus ejus, in qva inscribitur, contingit.
6. Circulus circa figuram rectilineam circumscribi dicitur, qvando circuli circumferentia unumqvemqve angulum ejus, circa qvam circumscribitur, contingit.
7. Recta linea in circulo aptari dicitur, qvando ejus termini in circuli circumferentia fuerint.

PROP. I. PROBL.

In dato circulo datæ rectæ lineæ, qvæ diametro ejus non major sit, æqvalem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus ABC, data autem recta linea D non major circuli diametro: oportet in circulo ABC recta linea D æqualem rectam lineam aptare.



Constructio.

1. Ducatur circuli ABC diameter;
Si igitur BC sit æqvalis ipsi D,
factum jam erit qvod proponebatur. Etenim in circulo ABC aptata est BC rectæ lineæ D æqvalis;
2. Sin autem major est BC qvam D, ponatur ipsi D æqvalis CE (per 3. 1.); deinde centro qvidem C intervallo autem CE describatur circulus AEG (per 3. postul.), & CA jungatur (per 1. post.).

Demonstratio.

Qvoniam punctum C est centrum circuli AEG, erit
CA = CE (per 15. def. lib. 1.)
Sed D = CE (per constr.)

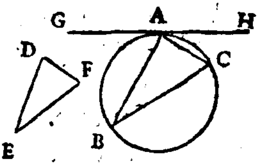
Ergo recta D = rectæ CA (per 1. ax.).
In dato igitur circulo ABC datæ rectæ lineæ D, qvæ non major est circuli diametro, æqvalis aptata est CA. *Qvod erat faciendum & demonstrandum.*

PROP. II. PROBL.

In dato circulo inscribere triangulum æqviangulum dato triangulo.

Sit

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF: oportet in circulo ABC inscribere triangulum triangulo DEF æqviangulum.



Constructio.

1. Ducatur recta linea HAG contingens circulum ABC in puncto A;
2. Ad rectam lineam HG & ad punctum in ea A constituatur angulus HAC = angulo DEF (per 23. 1.);
3. Ad rectam lineam HG & ad punctum in ea A rursus constituatur angulus GAB = angulo DFE & BC jungatur.

Demonstratio.

Qvoniam circulum ABC contingit recta GH, à contactu autem ducta est AC, erit angulus HAC æqvalis ei, qvi in alterno circuli segmento consistit, angulo, videlicet ipsi ABC (per 32. 3.);

Sed angulus HAC = angulo DEF (per construct.);

Ergo & angulus ABC = angulo DEF (per 1. ax).

Eadem ratione & angulus ACB est æqvalis angulo DFE.

Reliqvus igitur angulus BAC, reliqvo angulo EDF æqvalis erit (per 32. 1.).

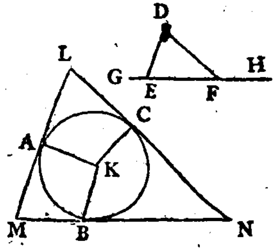
Ergo triangulum ABC triangulo DEF est æqviangulum, & in circulo ABC inscriptum est (per 3. def. 4.)

Quod erat fac. & demonstr.

PROP. III. PROBL.

Circa datum circulum circumscribere triangulum, æqviangulum dato triangulo.

 Sit



Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF: oportet circa circulum ABC circumscribere triangulum æquiangulum triangulo DEF.

Constructio.

1. Protrahatur EF ex parte utraque ad puncta H, G, (per 2. post.);
2. Sumatur circuli ABC centrum K (per 1. 3.);
3. Recta linea KB utcunqve ducatur, constituaturqve ad lineam KB, & ad punctum in ea K angulus BKA = angulo DEG, angulo autem DFH = angulus BKC (per 23. 1.);
4. Per puncta A, B, C, ducantur rectæ lineæ LAM, MBN, NCL, circulum ACB contingentes (per 17. 3.).

Demonstratio.

Qvoniam rectæ LM, MN, NL circulum contingunt in punctis A, B, C; (per construct.) à centro autem K ad puncta A, B, C, ductæ sunt rectæ KA, KB, KC, erunt anguli ad puncta contactûs A, B, C, recti (per 18. 3.);

Porro qvoniam AMBK (qvod in duo triangula dividi potest) anguli qvatuor æqvales sunt qvatuor angulis rectis (per 32. 1.), è qvibus anguli KAM, KBM sunt recti; erunt reliqvi AKB, AMB duobus rectis æqvales;

Sunt autem & DEG & DEF duobus rectis æqvales (per 13. 1.): Anguli igitur AKB, AMB angulis DEG, DEF sunt æqvales, è qvibus AKB ipsi DEG est æqvalis (per construct.); ergò reliqvus AMB reliqvo DEF æqvalis erit (per 3. ax.).

Similiter demonstrabitur angulus LNM ipsi DFE æqvalis; Ergo & reliqvus MLN est æqvalis reliqvo EDF (per 32. 1.).

Est igitur LMN triangulum æqviangulum triangulo DEF, & circa circulum ABC circumscribitur (per 4. def. 4.)

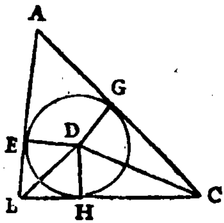
Qvod erat faciend.

PROP.

PROP. IV. PROBL.

In dato triangulo circulum inscribere.

Sit datum triangulum ABC: oportet in triangulo ABC circulum inscribere.



Constructio.

1. Secentur anguli ABC, BCA bifariam per rectas CD, BD, productas usqve dum conveniant in puncto D (per 9. 1.);
2. A puncto D ad rectas lineas AB, BC, CA ducantur perpendiculares DE, DG, DH (per 12. 1.).

Demonstratio.

Qvoniam angulus ABC bifariam sectus est, erit ang. ABD = angulo CBD (per construct.), & porro rectus angulus BED = recto ang. BHD (per ax. 10.); duo igitur triangula DEB, DHB habent duos angulos duobus angulis æqvales & unum latus DB utriqve commune, qvod scilicet uni æqvalium angulorum subtenditur; Qvare reliqva latera reliqvis lateribus æqvalia habebunt, scilicet latus EB = lateri BH, & lat. DE = lat. DH. (per 26. 1.). Eadem ratione erit etiam DG = DH = DE: Ideoqve centro D, intervallo autem DG, vel DE vel etiam DH descriptus circulus transibit per puncta E, H, G, atqve in his punctis rectas AB, BC, CA continget (per coroll. 16. 3.); propterea etiam circulus in triangulo ABC inscriptus est (per 5. def. 4.)

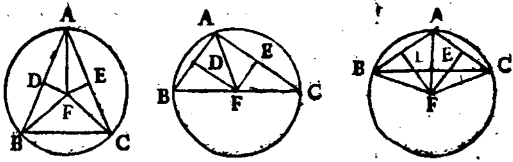
Qvod erat faciendum.

PROP. V. PROBL.

Circa datum triangulum circulum circumscribere.

 Sit

Sit datum triangulum ABC: oportet circa datum triangulum ABC circulum circumscribere.



Constructio,

1. Rectæ AB, AC bifariam secentur in punctis D, E (per 10. 1.);
2. A punctis D, E, ipsis AB, AC ad rectos angulos ducantur DF, EF (per 11. 1.).

Demonstratio.

Lineæ DF, EF, ad rectos angulos ductæ, vel intra triangulum ABC, vel in trianguli latere BC, vel extra triangulum ABC convenient in puncto F.

1. *Conveniant DF, EF intra triangulum in puncto F (vide Fig. 1.), & BF, CF, AF jungantur:*

Qvoniam igitur AD est æqvalis rectæ DB; bifariam enim secta est AB (per construct.), recta autem DF utriqve triangulo ADF, BDF communis, & angulus ADF æqvalis angulo BDF (per 10. ax.); erit basis AF = basi FB (per 4. 1.); Similiter ostendetur & CF æqvalis AF: ergo & BF = CF: tres igitur FA, FB, FC inter se sunt æqvales.

Qvare centro F, intervallo autem æqvali uni ipsarum FA, FB, FC, circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit; atqve erit circulus circa triangulum ABC circumscriptus (per 6. def. 4.).

2. *DF, EF, conveniant in recta linea BC, in puncto F (ut in 2. Fig.), & AF jungatur:* Similiter demonstrabimus punctum

ctum F centrum esse circuli circa triangulum ABC circumscripti.

3. *DF, EF conveniant extra triangulum ABC rursus in puncto F (ut in Fig. 3.)*; & jungantur AF, BF, CF;

Qvoniam igitur AD = DB (per constr.); communis autem & ad angulos rectos DF; basis AF basi BF aeqvalis erit (per 4. 1.).

Similiter demonstrabimus & CF ipsi AF aeqvalem esse, qvare & BF est aeqvalis CF, rursus igitur centro F, intervallo autem aeqvali uni ipsarum AF, BF, CF, circulus descriptus etiam per reliqva transibit puncta; atqve erit circa triangulum ABC circumscriptus.

Qvod erat faciendum.

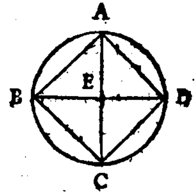
Corollarium.

Ex his manifestum est, qvod, si centrum circuli intra triangulum ceciderit, angulus BAC existens in segmento semicirculo majore minor est recto: Si autem ceciderit in recta linea BC, angulus in semicirculo rectus erit: & si extra triangulum ABC, angulus in segmento minore semicirculo erit major recto. Qvare si datum triangulum sit oxygonium, DF, EF intra triangulum convenient: Sin in eo sit angulus rectus BAC in ipsa AC; & si sit major recto, extra ABC.

PROP. VI. PROBL.

In dato circulo qvadratum inscribere.

Sit datus circulus ABCD: oportet in circulo ABCD qvadratum inscribere.

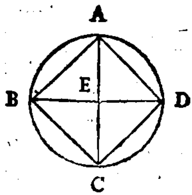


Constructio.

1. Ducantur Circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter se AC, BD (per 11. 1.);
2. Jungantur AB, BC, CD, DA (per post. 1.).

 De-

Demonſtratio.



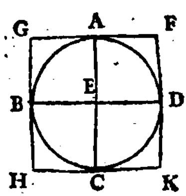
Qvoniam E eſt centrum circuli, qvatuor autem anguli ad centrum, E conſtituti, ſcil. AEB, AED, DEC, CEB ſunt recti (per conſtruct.); ideoqve omnes inter ſe æqvales (per 10. ax.); porro rectæ EA, EB, EC, ED ſunt æqvales (per 15. def. 1.):

Triangula igitur BEA, AED, DEC, CEB ſunt inter ſe æqvalia, ac baſes BA, AD, DC, CB ſunt æqvales (per 4. 1.); Qvare qvadrilaterum ABCD eſt æqvilaterum.

Rurſus qvoniam recta BD eſt diameter circuli ABCD; erit BAD ſemicirculus; qvapropter angulus BAD rectus eſt (per 31. 3.); Cum vero eadem ratione demonſtretur reliqvos angulos ADC, DCB, CBA etiam eſſe rectos, rectangulum igitur eſt ABCD qvadrilaterum; oſtenſum autem eſt æqvilaterum eſſe: igitur qvadratum eſt (per 30. def. 1.) & inſcriptum eſt in circulo ABCD (per 3. def. 4.). *Qvod erat faciendum.*

PROP. VII. PROBL.

Circa datum circulum qvadratum circumſcribere.



Sit datus circulus ABCD: oportet circa ABCD circulum qvadratum deſcribere.

Conſtructio.

(1) Ducantur circuli ABCD duæ diametri AC, BD ad rectos inter ſe angulos; & (2) per puncta A, B, C, D, ducantur rectæ FG, GH, HK, KF contingentes circulum ABCD (per 17. 3.).

Demonſtratio.

Qvoniam recta FG circulum contingit, à centro autem E; ad punctum contactûs A ducta eſt recta EA; erunt anguli ad A recti (per 18. 3.).

Eadem

Eadem ratione & anguli ad puncta B, C, D sunt recti.

Porro qvoniam angulus AEB est rectus, & EBG etiam rectus; erit (per 28. 1) GH ipsi AC parallela; eadem ratione & AC parallela est rectæ FK; qvare GH & FK inter se sunt parallelæ (per 30. 1.).

Similiter demonstrabitur & utramqve ipsarum GF, HK ipsi BED parallelam esse; ideoqve GF, HK etiam inter se parallelas.

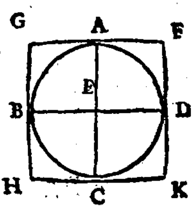
Parallelogramma igitur sunt GK, GC, AK, FB, BK; ac propterea GF ≍ HK; GH vero ≍ FK (per 34. 1.).

Et qvoniam AC ≍ BD (per 15. def. 1.) sed & AC qvidem utriqve ipsarum GH, FK est æqvalis, BD vero æqvalis utriqve, GF, HK, utraqve igitur GH,FK utriqve GF,HK, æqvalis erit. Qvare æqvilaterum est FGHK qvadrilaterum. Dico & rectangulum esse; qvoniam enim parallelogrammum est GBEA atqve angulus AEB est rectus, & ipse AGB angulus rectus erit, (per 34. 1.). Similiter demonstrabimus angulos etiam, qvi ad puncta H, K, F sunt constituti, rectos esse: Rectangulum igitur est qvadrilaterum FG HK; demonstratum autem est & æqvilaterum; igitur qvadratum est; & circumscriptum præterea est circa circul. ABCD.

Qvod erat faciendum.

PROP. VIII. PROBL.

In dato qvadrato circulum inscribere.



Sit datum qvadratum ABCD: oportet in ABCD qvadrato circulum inscribere.

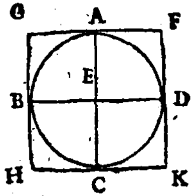
Constructio.

1. Utraqve ipsarum GH, GF secetur bifariam, in punctis A, B (per 10. 1.).
2. Per punctum A alterutri ipsarum GH, FK, parallela ducatur AC, per punctum vero B ducatur BD parallela alterutri GF, HK (per 31. 1.).

Dico:

Dico: circulus centro E intervallo EA descriptus qvadrato inscribetur.

Demonstratio.



Qvadrati FGHK latus FG = lateri GH; ergo lateris FG dimidium GA æqvatur lateris GH, dimidio GB (per 7. ax.), & qvoniam recta AC est parallela rectæ GH, recta autem BD parallela rectæ GF; est igitur AGBE parallelogrammum habens opposita latera æqvalia,

latus nempe AG = lateri BE
& lat. GB = lateri AE } (per 34. 1.).

Sed latus AG, & GB sunt ejusdem magnitudinis (ut supra ostensum est); ergo & BE, AE sunt æqvales (per 1. ax.):

Eadem ratione demonstrabitur parallelogramma esse BHEC, AEDF, eorumqve opposita latera esse æqvalia.

latus nempe BH = lateri EC
& latus AF = lateri ED } (per 34. 1.).

Qvoniam autem BH = GB, & AF = AG (per constr.);

erit etiam GB = EC
& AG = ED } (per 1. ax.).

Sed GB = AG (ut supra); ergo & EC = ED.

Et rursus, qvoniam ostensum est, iisdem æqvalibus AG, GB lateribus, etiam æqvalia esse latera BE, AE, qvatuor igitur latera EC, ED, BE, AE erunt inter se æqvalia. Qvare centro E, intervallo EA si describitur circulus, per reliqva puncta B, C, D qvoqve transibit, & unumqvodqve qvadrati latus in punctis A, D, C, B tanget; datoqve igitur qvadrato inscriptus erit.

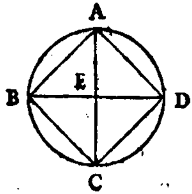
Qvod erat faciendum.

PROP. IX. PROBL.

Circa datum qvadratum circulum circumscribere.

Sit

Sit datum quadratum ABCD: Oportet circa quadratum ABCD circulum circumscribere.



Constructio.

Jungantur AC, BD, qvæ se invicem in puncto E secent.

Demonstratio.

Triangulorum ADC, ABC, duo latera sunt æqvalia, latus scil. AD = lateri AB; latus autem AC utriqve est commune; & qvoniam basis BC etiam æqvatur basi DC, erit angulus BAC = angulo DAC; angulus igitur DAB bisariam sectus est à recta linea AC.

Similiter demonstrabimus unumqvemqve angulorum ABC, BCD, CDA, bisariam secari à rectis lineis AC, BD.

Qvoniam igitur angulus DAB angulo ABC est æqvalis; erit etiam anguli DAB dimidium EAB = EBA, dimidio nempe anguli ABC (per 7. ax.); ideoqve æqvalibus hisce angulis opposita latera EA, EB inter se sunt æqvalia (per 6. 1.).

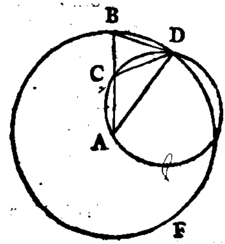
Eadem ratione demonstrabimus & utramqve rectarum EC, ED utriqve EA, EB, æqvalem esse: ergo qvatuor rectæ lineæ EA, EB, EC, ED inter se sunt æqvales.

Centro igitur E intervallo autem æqvali uni ipsarum EA, EB, EC, ED circulus descriptus etiam per reliqva puncta transibit, atqve erit circumscriptus circa qvadratum ABCD.

Qvod erat faciendum.

PROP. X. PROBL.

Isosceles triangulum constituere, habens alterutrum angulorum, qvi sunt ad basin, duplum reliqvi.



Isosceles triangulum ABD est construendum, cujus anguli ad basin ABD & BDA singuli sint dupli ejus ad verticem DAB.

Constructio.

1. Ponatur recta qvædam linea AB, & secetur in puncto C ita, ut rectangul. comprehensum sub AB, BC, æqvale sit qvadrato ex CA (per 11. 2.):
2. Centro A intervallo AB circulus describatur, BDF, (per 3. post.);
3. In circulo BDF aptetur recta linea BD æqvalis ipsi AC (per 1. 4.);
4. Jungantur DA, DC; & circa triangulum ACD circumscribatur circulus ACD (per 5. 4.).

Demonstratio.

Qvoniam rectangulum sub AB, BC æqvale est qvadrato rectæ AC (per constr.), æqvalis autem est AC ipsi BD; erit rectangulum sub AB, BC æqvale qvadrato rectæ BD.

Porro, qvoniam extra circulum ACD sumptum est punctum B, ab hoc autem puncto cadunt duæ rectæ lineæ BCA, BD, qvarum altera qvidem circulum secat, altera vero in eum incidit, & qvia rectangulum sub AB, BC æqvale est qvadrato rectæ BD; recta igitur linea BD circulum ACD in puncto D continget (per 37. 3.);

Rursus qvoniam BD circulum contingit, & à contactu D ducta est recta DC, erit angulus BDC æqvalis ei, qvi in alterno circuli segmento constituitur, videlicet angulo DAC (per 32. 3.);

Cum autem angulus BDC æqvalis sit ipsi DAC, communis addatur CDA: totus igitur BDA est æqvalis duobus angulis CDA, DAC. Sed his ipsis duobus angulis CDA, DAC etiam æqvalis est exterior angulus BCD (per 32. 1): ergo & angulus BDA æqvalis est ipsi angulo BCD (per 1. ax.).

Iterum

Iterum angulus BDA est æqvalis angulo DBA (per 5. 1.); nam latus AB æqvale est lateri AD (per 15. def. 1.) ergo & DBA ipsi BCD æqvalis erit.

Tres igitur anguli BDA, DBA, BCD inter se sunt æqvales.

Qvoniam vero angulus DBA, vel (qvod idem est) angulus DBC æqvalis est angulo DCB; erit latus BD æqvale lateri DC (per 6. 1.).

Sed recta BD æqvalis est rectæ CA (per construct.): ergo & DC æqvatur rectæ CA: qvare & angulus CDA æqvalis est angulo CAD (per 5. 1.): anguli igitur CDA, CAD simul sumpti ipsius anguli CAD dupli sunt.

Est autem & angulus BCD æqvalis angulis CDA, CAD simul sumptis: ergo & ang. BCD duplus est ipsius CAD.

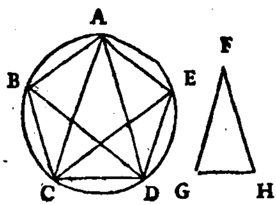
Sed angulus BCD est æqvalis alterutri ipsorum BDA, DBA: qvare & alteruter ipsorum BDA, DBA ipsius DAB (vel CAD) est duplus.

Isosceles igitur triangulum ADB constitutum est, habens alterutrum eorum angulorum, qvi sunt ad basin BD duplum reliqvi. *Qvod erat faciend.*

PROP. XI. PROBL.

In dato circulo pentagonum æqvilaterum & æqviangulum inscribere.

Sit datus circulus ABCDE: oportet in ABCDE circulo pentagonum æqvilaterum & æqviangulum inscribere.



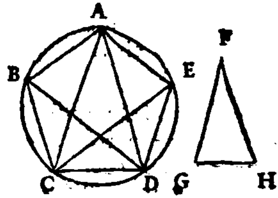
Constructio.

1. Ponatur triangulum isosceles FGH habens alterutrum angulorum ad G, H duplum anguli, qvi est ad F (per 10. 4.).
2. In circulo dato inscribatur triangulum ACD, triangulo FGH æqviangulum (per 2. 4.);

3. An-

3. Anguli ad Basin ACD, ADC secentur bifariam rectis CE, DB, occurrentibus circumferentiæ in punctis B, E; (per 9. 1.);
4. Ducantur rectæ AB, BC, DE, EA.

Demonstratio.



1. Quoniam uterque angulorum ACD, CDA duplus est anguli CAD, & secti sunt bifariam à rectis lineis CE, DB (per constr.); quinque anguli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA sunt inter se æquales. Æquales autem anguli æqualibus circumferentiis insistunt (per 26. 3.); quinque igitur circumferentiæ AB, BC, CD, DE, EA æquales sunt inter se. Sed æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt (per 29. 3.): ergo & quinque rectæ lineæ AB, BC, CD, DE, EA inter se sunt æquales: æquilaterum est igitur ABCDE pentagonum.

Quod primo erat demonstr.

Quoniam circumferentia AB æqualis est circumferentiæ DE (ut supra ostens.), communis addatur circumf. BCD, tota igitur ABCD circumferentia toti circumferentiæ EDCB est æqualis.

Circumferentiæ quidem ABCD insistit angulus AED, circumferentiæ vero EDCB insistit angulus BAE: ergo & BAE angulus est æqualis angulo AED (per 27. 3.).

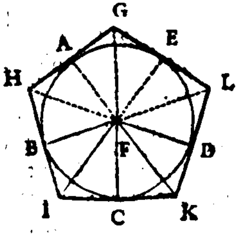
Eadem ratione & unusquisque angulorum ABC, BCD, CDE alterutri ipsorum BAE, AED est æqualis; æquiangulum igitur est ABCDE pentagonum. *Quod 2do erat dem.*

In dato igitur circulo inscriptum est pentagonum æquilaterum & æquiangulum. *Quod erat faciendum.*

PROP. XII. PROBL.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum & æquiangulum circumscribere.

Sit



Sit datus circulus ABCDE: oportet circa circulum ABCDE pentagonum æqvilaterum & æqviangulum circumscribere.

Constructio.

1. Intelligatur circumferentia tota circuli in qvinqve partes æqvales divisa per puncta A, B, C, D, E pentagoni circulo inscripti (per 11. 4.);
2. Per puncta A, B, C, D, E ducantur rectæ circulum contingentes GH, HI, IK, KL, LG (per 17. 3.);
3. Sumatur circuli centrum F (per 1. 3.);
4. Jungantur FB, FI, FC, FK, FD (per 1. post.).

Demonstratio.

1. Qvoniam recta IK contingit circulum in puncto C, & à centro F ad contactum ducta est FC; erit FC ad ipsam IK perpendicularis (per 18. 3.): rectus igitur est uterqve angulorum, qvi sunt ad C.

Eadem ratione & anguli, qvi ad puncta B, D sunt recti.

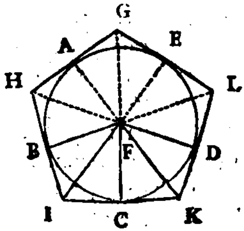
Cum autem rectus est angulus FCI, erit qvadratum rectæ FI æqvale qvadrato rectæ FC † qvadr. rectæ CI (per 47. 1.).

Eandem ob causam qvadrato rectæ FB † qvadr. rectæ BI æqvale est qvadratum rectæ FI: qvare qvadratum rectæ FC † qvadrat: rectæ CI æqvalia sunt qvadrato rectæ FB, † qvadrato rectæ BI (per 1. ax.).

Sed recta FC æqvalis est rectæ FB, ideoqve qvadratum rectæ FC æqvale qvadrato rectæ FB: qvare qvadratum reliqvum rectæ BI æqvale est reliqvo qvadrato rectæ CI (per 3. ax); æqvalis igitur est recta BI ipsi rectæ CI (per 8. ax.).

Qvoniam vero in duobus triangulis FBI, FCI duæ rectæ FB, BI duabus FC, CI sunt æqvales, Communis autem utriqve FI; erit angulus BFI æqvalis angulo IFC, & angulus BIF æqvalis angulo FIC (per 8. 1.). Duplus igitur est BFC anguli IFC, & angulus BIC duplus ipsius FIC.

Eadem ratione & angulus CFD duplus est anguli CFK, angulus vero CKD duplus anguli CKF.



Et qvoniam circumferentia BC circumferentiæ DC, est æqvalis (per constr.), & angulus BFC angulo CFD æqvalis erit (per 27.3.).

Atqvi angulus BFC duplus est anguli IFC, angulus vero CFD duplus ipsius CFK (ut supra): æqvalis igitur est angulus IFC angulo CFK (per 7. ax.).).

Sunt igitur duo triangula FIC, FCK habentia duos angulos duobus angulis æqvales, alterum alteri, & unum latus uni lateri æqvale, qvod ipsis commune est nempe FC, ergo & reliqva latera reliqvis lateribus æqvalia habent, & reliqvum angulum reliqvo angulo æqvalem (per 26. 1.): recta igitur IC est æqvalis rectæ CK, & angulus FIC æqvalis angulo FKC.

Qvoniam autem IC est æqvalis rectæ CK, erit IK ipsius IC dupla.

Eadem ratione & HI ipsius BI dupla ostendetur.

Rursus qvoniam BI ostensa est æqvalis ipsi IC, atqve est IK qvidem dupla rectæ IC, HI vero dupla ipsius BI; erit HI ipsi IK æqvalis (per 6. ax.).

Similiter & unaqvæqve ipsarum GH, GL, LK ostendetur æqvalis alterutri HI, IK: æqvilaterum igitur est GHIKL pentagonum. *Qvod primo erat demonstrandum.*

2. Qvoniam angulus FIC est æqvalis angulo FKC, & ostensus est ipsius qvidem FIC duplus angulus HIK; ipsius vero FKC duplus IKL, erit & HIK angulus angulo IKL æqvalis (per 6. ax.).

Simili ratione ostendetur & unusqvisqve ipsorum IHG, HGL, GLK, alterutri HIK, IKL æqvalis: Qvinqve igitur anguli GHI, HIK, IKL, KLG, LGH inter se sunt æqvales. Ergo æqviangulum est GHIKL pentagonum. *Qvod 2do erat demonstrandum.*

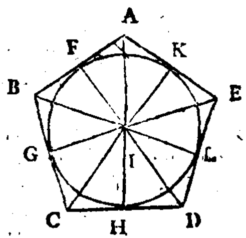
Qvare circa circulum ABCDE datum circumscriptum est pentagonum æqvilaterum & æqviangulum. *Qvod erat faciend.*

PROP. XIII. PROBL.

In dato pentagono æqvilatero & æqviangulo circulum inscribere.

Sit

Sit datum pentagonum æqvilaterum & æqviangulum ABCDE: oportet in ABCDE pentagono circulum inscribere.



Constructio.

1. Uterqve angulorum BCD, CDE à rectis CI, DI bifariam secetur (per 9. 1.);
2. A puncto I, in qvo conveniunt inter se CI, DI, ducantur rectæ IB, IA, IE.

Demonstratio.

Qvoniam pentagoni latus BC æqvale est lateri CD (per hypoth.), & latus IC commune, duo igitur triangula IBC, ICD habent duo latera æqvalia, alterum alteri, habent vero & angulos BCI, DCI inter æqvalia latera BC, CI & CD, CI comprehensos æqvales: qvare basis BI basi DI est æqvalis, & triangulum BIC æqvale triangulo DIC, & reliqvi anguli reliqvis angulis æqvales, qvibus æqvalia latera subtenduntur (per 4. 1.): angulus igitur CBI angulo CDI æqvalis erit.

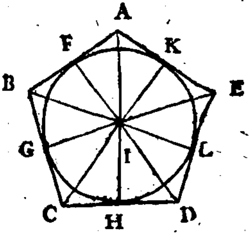
Cum autem angulus CDE anguli CDI est duplus (per constr.), & angulus qvidem CDE angulo ABC æqvalis, angulus vero CDI angulo CBI æqvalis; erit & CBA angulus duplus anguli CBI; ac propterea angulus ABI angulo IBC æqvalis: angulus igitur ABC bifariam secatur à recta linea BI.

Similiter demonstrabitur & unumqvemqve angulorum BAE, AED à rectis lineis IA, IE bifariam secari. Itaqve à puncto I ad rectas lineas AB, BC, CD, DE, EA ducantur perpendiculares IF, IG, IH, IL, IK.

Rursus, qvoniam angulus GCI est æqvalis angulo HCI (per constr.), & rectus IGC recto IHC æqvalis (per 10. ax.): erunt IGC, IHC duo triangula duos angulos duobus angulis æqvales habentia & unum latus uni lateri æqvale, commune scilicet IC, qvod utriqve æqvalium angulorum subtenditur: ergo & reliqva latera reliqvis lateribus æqvalia habebunt, atqve erit perpendicularis IG perpendiculari IH æqvalis (per 26. 1.).

Simi-

Similiter ostendetur & unaqvæqve ipsarum IL, IK, IF, æqvalis alterutri IH, IG, qvinqve igitur rectæ lineæ IF, IG, IH, IL, IK inter se sunt æqvales,



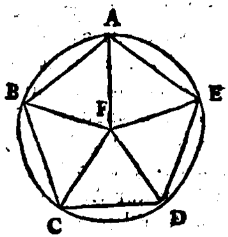
Qvare centro I intervallo autem æqvali uni ipsarum IF, IG, IH, IL, IK circulus descriptus etiam per reliqva transibit puncta, & rectas lineas AB, BC, CD, DE, EA continget, propterea qvod anguli ad F, G, H, L, K sunt recti.

In dato igitur pentagono æqvilatero & æqviangulo circulus est inscriptus. *Qvod erat faciendum.*

PROP. XIV. PROBL.

Circa datum pentagonum æqvilaterum & æqviangulum circulum circumscribere.

Sit datum pentagonum æqvilaterum & æqviangulum ABCDE, oportet circa pentagonum ABCDE circulum circumscribere.



Constructio.

1. Uterqve BCD, CDE angulorum bifariam a rectis lineis CF, DF secetur (per 9. 1.);
2. A puncto F, in qvo conveniunt rectæ CF, DF, ad puncta B, A, E, ducantur FB, FA, FE,

Demonstratio.

Similiter, ut in antecedente prop. 13., demonstrabitur unumqvemqve angulorum CBA, BAE, AED, à rectis lineis BF, FA, FE bifariam secari,

Et qvoniam angulus BCD angulo CDE est æqvalis, atqve est anguli BCD dimidius angulus FCD, anguli vero CDE dimidius CDF; erit FCD angulus æqvalis angulo FDC (per 7. ax.): qvare & latus FC lateri FD est æqvale,

Eadem

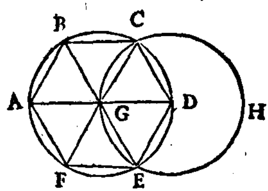
Eadem ratione demonstrabitur unaqvæqve ipsarum FB, FA, FE æqvalis alterutri FC, FD: qvinqve igitur rectæ lineæ FA, FB, FC, FD, FE sunt inter se æqvales. Ergo centro F & intervallo æqvali uni ipsarum FA, FB, FC, FD, FE circulus descriptus etiam per reliqva transibit puncta, eritqve circumscriptus circa pentagonum æqvilaterum & æqviangul. ABCDE,

Qvod erat faciendum.

PROP. XV. PROBL.

In dato circulo hexagonum æqvilaterum & æqviangulum inscribere.

Sit datus circulus ABCDEF: oportet in circulo ABCDEF hexagonum æqvilaterum & æqviangulum inscribere.



Constructio.

1. Sumatur circuli ABCDEF centrum G (per 1. 3.);
2. Ducatur circuli ABCDEF diameter AD; & centro D intervallo autem DG describatur circulus EGCH (per 3. post.);
3. A punctis E, C per centrum G ducantur rectæ EB, CF; & jungantur AB, BC, CD, DE, EF, FA:

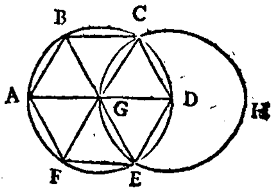
Dico hexagonum ABCDEF æqvilaterum esse & æqviangulum.

Demonstratio.

1. Qvoniam G est centrum circuli ABCDEF, D vero est centrum circuli EGCH erit Recta GE ≍ GD, & recta DE ≍ GD (per 15. def. 1.), ideoqve recta GE ≍ rectæ DE (per 1. ax.): æqvilaterum igitur est GED triangulum tresqve ipsius anguli EGD, GDE, DEG sunt inter se æqvales (per 5. 1.).

Sunt autem & hi tres anguli simul sumpti æqvales duobus angu-

angulis rectis (per 32. 1.); unusqvisqve igitur ipsorum trium angulorum EGD, GDE, DEG, est tertia pars duorum rectorum.



Similiter ostendetur triangulum GCD esse æqvilaterum, ejusqve tres angulos inter se esse æqvales, & unumqvemqve horum angulorum DGC, GCD, CDG esse tertiam partem duorum rectorum: qvare duo anguli EGD, DGC sunt inter se æqvales.

Qvoniam recta CG insistens rectæ EB angulos, qvi sunt deinceps CGE, CGB, duobus rectis æqvales efficit; angulus autem CGE æqvatur angulis EGD, DGC, qvorum unusqvisqve est una tertia pars duorum rectorum; reliqvus igitur angulus CGB erit etiam una tertia pars duorum rectorum: qvare anguli EGD, DGC, CGB, sunt inter se æqvales.

Cum vero anguli BGA, AGF, FGE ipsis EGD, DGC, CGB angulis ad verticem sint oppositi & propterea æqvales (per 15. 1.); sex igitur anguli EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE sunt inter se æqvales: & sex proinde circumferentiæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, qvibus isti æqvales anguli insistunt, inter se sunt æqvales (per 26. 3.).

Qvæ autem circumferentias ipsas æqvales subtendunt rectæ lineæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, etiam æqvales sunt (per 29. 3.): qvare æqvilaterum est hexagonum ABCDEF. *Qvod primo erat demonstr.*

2, Qvoniam circumferentia AF æqvalis est circumferentiæ ED, communis addatur circumferentia ABCD: tota igitur circumferentia FABCD æqvalis est toti circumferentiæ EDCBA (per 2. ax.); & propterea, qvi æqvalibus ipsis circumferentiis insistunt anguli AFE, DEF æqvales sunt (per 27. 3.).

Similiter ostendentur & reliqvi anguli hexagoni ABCDEF sigillatim æqvales alterutri ipsorum AFE, DEF: est igitur æqviangulum ABCDEF hexagonum.

Qvod 2do erat demonstr.

In dato igitur circulo inscriptum est hexagonum æqvilaterum & æqviangulum. *Qvod erat faciendum.*

Co-

Corollarium.

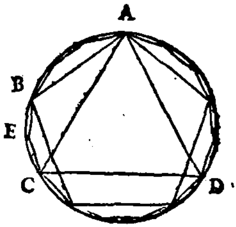
Ex hoc manifeſtum eſt hexagoni latus circuli ſemidiametro æqvalé eſſe.

Et ſi per puncta A, B, C, D, E, F ducamus contingentes circulum, circa circulum circumſcribetur hexagonum æqvilaterum & æqviangulum, ad modum eorum qvæ de pentagono dicta ſunt. Ad qvorum modum etiam dato hexagono circulum inſcribemus & circumſcribemus.

PROP. XVI. PROBL.

In dato circulo qvindecagonum æqvilaterum & æqviangulum inſcribere.

Sit datus circulus ABCD oportet in circulo ABCD qvindecagonum æqvilaterum & æqviangulum inſcribere.



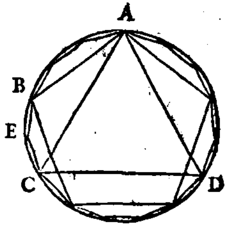
Conſtructio.

1. Circulo ABCD inſcribatur triangulum æqvilaterum ACD (per 2. 4.);
2. Eidem circulo inſcribatur etiam pentagonum æqvilaterum (per 11. 4.).
3. Circumferentia BC dividatur bifariam in puncto E (per 30. 3.);

Dico utrumqve rectarum BE, EC eſſe latus qvindecagoni circulo inſcribendi.

Demonſtratio.

Si tota circuli circumferentia in qvindecim partes æqvales ſecta concipiatur, trianguli æqvilateri latus AC ab ipſis æqvalibus qvindecim partibus auferet partes qvinqve æqvales,



Pentagoni vero æqvilateri latus AB earundem partium tres partes æqvales auferet, circumferentia igitur AB lateris pentagoni a circumferentia ABC lateris trianguli ablata, relinqvetur circumferentia BC, duas partes decimas qvintas totius circuli circumferentiæ comprehendens: qvare, ipsa BC circumferentia in puncto B bifariam secta, erit utraqve circumferentiarum BE, EC undecima qvinta pars totius circumferentiæ ABCDA.

Si igitur dato circulo ABCD in continuum aptentur rectæ lineæ æqvales uni ipsarum BE, EC (per 1. 4.); erit in ipso inscriptum qvindecagonum æqvilaterum, & simul æqviangulum (per 27. 3.). *Qvod erat faciendum.*

Ad modum autem eorum, qvæ dicta sunt de pentagono, si per circuli divisiones ducamus rectas lineas circulum contingentes, circa ipsum circumscribetur qvindecagonum æqvilaterum & æqviangulum. Et insuper ad modum eorum, qvæ dicta sunt de pentagono, dato qvindecagono æqvilatero & æqviangulo circulum inscribemus & circumscribemus.

EU-

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES:

1. *Pars* eſt magnitudo magnitudinis, minor majoris, qvando minor majorem metitur.
2. *Multiplex* eſt major minoris, qvando minor majorem metitur.
3. *Ratio* eſt duarum magnitudinum ejusdem generis ſecundum qvantuplicitatem mutua qvædam habitudo.
4. *Rationem inter ſe magnitudines* habere dicuntur, qvæ multiplicatæ ſe invicem ſuperare poſſunt.
5. *In eadem ratione magnitudines* eſſe dicuntur, prima ad ſecundam & tertia ad qvartam; qvando primæ & tertiæ æqve multiplices, ſecundæ & qvartæ æqve multiplices, juxta qvamvis multiplicationem, utraqve utramqve vel una ſuperant, vel una æqvales ſunt, vel una deficiunt inter ſe comparatæ.
6. Magnitudines, qvæ eandem rationem habent, *proportionales* vocentur,
7. Qvando autem æqve multiplicium multiplex primæ ſuperaverit multiplicem ſecundæ, multiplex autem tertiæ non ſuperaverit multiplicem qvartæ: tunc prima ad ſecundam *majorem* habere dicitur *rationem*, qvam tertia ad qvartam.
8. *Proportio* eſt rationum ſimilitudo.

9. Proportio in tribus ad minimum terminis consistit.

10. Si tres magnitudines sint proportionales, prima ad tertiam *duplicatam* habere dicitur *rationem* ejus, qvam habet ad secundam.

11. Si qvatuor magnitudines sint proportionales, prima ad qvartam *triplicatam* habere dicitur *rationem* ejus, qvam habet ad secundam; & sic deinceps uno amplius, qvamdiu proportio exstiterit.

12. *Homologa magnitudines* dicuntur antecedentes qvidem antecedentibus, conseqventes vero conseqventibus.

13. *Alterna ratio* est sumptio antecedentis ad antecedentem, & conseqventis ad conseqventem.

14. *Inversa ratio* est sumptio conseqventis ut antecedentis, ad antecedentem, ut ad conseqventem.

15. *Compositio rationis* est sumptio antecedentis una cum conseqvente tanqvam unius ad ipsam conseqventem.

16. *Divisio rationis* est sumptio excessus, qvo antecedens superat conseqventem ad ipsam conseqventem.

17. *Conversio rationis* est sumptio antecedentis ad excessum, qvo antecedens ipsam conseqventem superat.

18. *Ex æqvalitate ratio* est, qvando pluribus existentibus magnitudinibus & aliis ipsis numero æqvalibus, fuerit, ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam. VEL ALITER: Sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

19. *Or-*

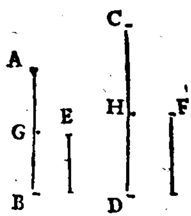
19. *Ordinata proportio* est, qvando fuerit ut antecedens ad conseqventem, ita antecedens ad conseqventem; ut autem conseqvens ad aliam qvampiam, ita conseqvens ad aliam qvampiam.

20. *Perturbata* vero *proportio* est, qvando, tribus existentibus magnitudinibus, & aliis ipsis numero æqvalibus, fuerit, ut in primis magnitudinibus antecedens ad conseqventem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad conseqventem: ut autem in primis magnitudinibus conseqvens ad aliam qvampiam, ita in secundis magnitudinibus alia qvæpiam ad antecedentem.

PROP. I. THEOR.

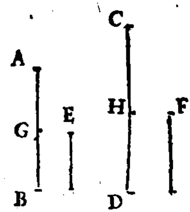
Si fuerint qvotcunqve magnitudines qvotcunqve magnitudinum æqvalium numero, singulæ singularum æqve multiplices; qvam multiplex est una magnitudo unius, tam multiplices erunt & omnes omnium.

Sint qvotcunqve magnitudines AB, CD, qvotcunqve magnitudinum E, F, æqvalium numero singulæ singularum æqve multiplices: Dico qvam multiplex est AB ipsius E, tam multiplices esse & AB, CD ipsarum E, F.



Demonstratio.

Qvoniam AB æqve multiplex est ipsius E, atqve CD ipsius F (per hypoth.); qvot magnitudines sunt in AB æqvales ipsi E, tot erunt & in CD æqvales ipsi F.



Dividatur AB in partes ipsi E æqvales, qvæ sint AG, GB; CD vero dividatur in partes æqvales ipsi F, videlicet CH, HD: erit igitur multitudo partium CH, HD æqvalis multitudini ipsarum AG, GB.

Rursus qvoniam AG est æqvalis E, & CH æqvalis F, erunt & AG † CH æqvales ipsis E † F (per 2. ax.):

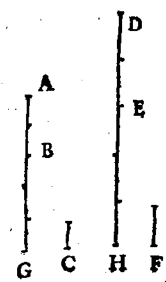
Eadem ratione GB est æqvalis E, & HD ipsi F; erunt igitur & GB † HD æqvales ipsis E † F (per 2. ax.).

Qvot igitur sunt in AB æqvales ipsi E, tot sunt & in AB † CD æqvales ipsis E † F: qvare qvam multiplex est AB ipsius E, tam multiplices erunt & AB † CD ipsarum E † F.

Qvod erat demonstr.

PROP. II. THEOR.

Si prima secundæ æqve multiplex fuerit atqve tertia qvartæ, fuerit autem & qvinta secundæ æqve multiplex atqve sexta qvartæ, erunt etiam prima & qvinta, simul sumptæ, secundæ æqve multiplices atqve tertia & sexta qvartæ.



Sit prima AB secunda C æqve multiplex atqve tertia DE qvarta F, & qvinta BG secunda C æqve multiplex atqve sexta EH qvarta F: Dico primam AB & qvintam BG simul sumptas secunda C æqve multiplices esse, atqve tertiam DE & sextam EH, simul sumptas, qvarta F,

Demonstratio.

Qvoniam AB æqve multiplex est ipsius C atqve DE ipsius F (per hypoth.); qvot magnitudines sunt in AB æqvales C, tot erunt & in DE æqvales F.

Eadem

Eadem ratione & qvot sunt in BG æqvales C, tot & in EH erunt æqvales F.

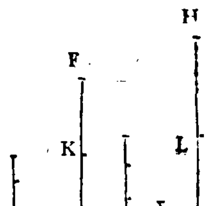
Qvot igitur sunt in tota AG æqvales C, tot erunt & in tota DH æqvales F, ergo qvam multiplex est AG ipsius C, tam multiplex est DH ipsius F.

Sed toti AG æqvales sunt prima AB & qvinta BG simul sumptæ, toti autem DH æqvales sunt tertia DE & sexta EH simul sumptæ; Qvare prima & qvinta AB † BG. secundæ C æqve multiplices erunt, atqve tertia & sexta DE † EH qvartæ F. *Quod erat demonstrandum.*

PROP. III. THEOR.

Si prima secundæ æqve multiplex fuerit atqve tertia qvartæ, sumantur autem æqve multiplices primæ & tertiæ; erit & ex æqvo sumptarum utraqve utriusqve æqve multiplex, altera qvidem secundæ, altera vero qvartæ.

Sit prima A secunda B æqve multiplex, atqve tertia C qvartæ D: & sumantur ipsarum A, C æqve multiplices EF, GH: Dico EF æqve multiplicem esse ipsius B, ac GH ipsius D.



Demonstratio.

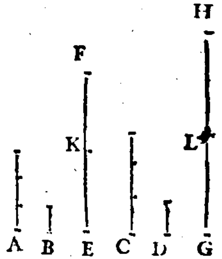
Qvoniam EF æqve multiplex est ipsius A, atqve GH ipsius C; qvot magnitudines sunt in EF æqvales A, tot erunt & in GH æqvales C.

Dividatur EF qvidem in magnitudines ipsi A æqvales EK, KF; GH vero dividatur in magnitudines æqvales ipsi C, videlicet GL, LH: erit igitur ipsarum EK, KF multitudo æqvalis multitudini ipsarum GL, LH.

Et, qvoniam æqve multiplex est A ipsius B atqve C ipsius D, æqvalis autem EK ipsi A & GL ipsi C, erit EK æqve multiplex ipsius B atqve GL ipsius D.

Eadem ratione æqve multiplex erit KF ipsius B, atqve LH ipsius D. Cum igitur prima EK (sive A) secundæ B æqve mul-

multiplex est atqve tertia GL (sive C) qvartæ D; est autem & qvinta KF secundæ B æqve multiplex atqve sexta LH qvartæ D: erit & composita e prima & qvinta EF secundæ B æqve multiplex atqve tertia & sexta GH qvartæ D (per 2. 5.).

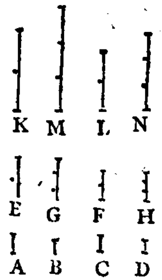


Si igitur prima secundæ æqve fuerit multiplex atqve tertia qvartæ, sumantur autem æqve multiplices primæ & tertiæ; erit & ex æqvo sumptarum utraqve utriusqve æqve multiplex, altera qvidem secundæ, altera vero qvartæ. *Q. e. demonstr.*

PROP. IV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem qvam tertia ad qvartam, & æqve multiplices primæ & tertiæ ad æqve multiplices secundæ & qvartæ, juxta qvamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt inter se comparatæ.

Prima A ad secundam B eandem rationem habeat qvam tertia C ad qvartam D, & sumantur ipsarum qvidem A, C utcunqve æqve multiplices E, F, ipsarum vero B, D alia utcunqve æqve multiplices G, H: Dico E ad G ita esse ut F ad H.



Demonstratio.

Sumantur ipsarum qvidem E, F æqve multiplices K, L, & ipsarum G, H æqve multiplices M, N.

Qvoniam igitur E æqve multiplex est ipsius A atqve F ipsius C, sumtæ sunt autem ipsarum E, F æqve multiplices K, L, erit K æqve multiplex ipsius A atqve L ipsius C (per 3. 5.).

Eadem ratione M æqve multiplex erit ipsius B atqve N ipsius D. Et qvoniam est ut A ad B ita C ad D, sumptæ autem sunt ipsarum A, C æqve multiplices K, L, & ipsarum B, D

aliæ

aliæ utcunqve æqve multiplices M, N; Si K superat M, superabit & L ipsam N; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor erit (per 5. def. 5.).

Suntqve K, L, qvidem ipsarum E, F æqve multiplices; M, N vero ipsarum G, H aliæ utcunqve æqve multiplices: ut igitur E ad G, ita erit F ad H (per 5. def. 5.).

Qvare si prima ad secundam eandem habeat rationem qvam tertia ad qvartam, æqve multiplices primæ & tertiæ ad æqve multiplices secundæ & qvartæ, juxta qvamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt inter se comparatæ.

Qvod erat demonstr.

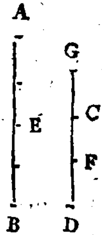
Corollarium.

Qvoniam igitur demonstratum est, si K superat M, & L ipsam N superare; & si æqvalis, æqvalem esse; & si minor, minorem: constat etiam si M superat K, & N superare ipsam L; & si æqvalis, æqvalem esse; & si minor minorem: ac propterea ut G ad E, ita erit H ad F. Ex hoc manifestum est, si qvatuor magnitudines sint proportionales, & inverse proportionales erunt.

PROP. V. THEOR.

Si magnitudo magnitudinis æqve multiplex sit atqve ablata ablatæ; erit & reliqva reliqvæ æqve multiplex atqve tota totius.

Sit magnitudo AB magnitudinis CD æqve multiplex atqve ablata AE ablatæ CF: dico & reliqvam EB reliqvæ FD æqve multiplicem esse atqve totam AB totius CD.



Demonstratio.

Qvam multiplex enim est AE ipsius CF, tam multiplex fiat & EB ipsius CG.

Et qvoniam AE æqve multiplex est ipsius CF, atqve AB ipsius GF (per 1. 5.); ponitur autem AE æqve multiplex

CF

CF atqve AB ipsius CD; æqve multiplex est AB utriusqve GF, CD: ac propterea GF ipsi CD est æqvalis. Communis auferatur CF: reliqva igitur GC æqvalis est reliqvæ DF.

Itaqve qvoniam AE æqve multiplex est CF atqve EB ipsius GC, estqve GC æqvalis DF; erit AE æqve multiplex CF atqve EB ipsius FD.

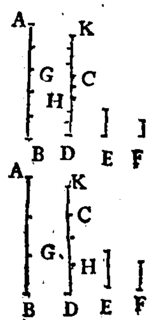
Æqve multiplex autem ponitur AE ipsius CF atqve AB ipsius CD: Ergo EB est æqve multiplex ipsius FD atqve AB ipsius CD: & reliqva igitur EB reliqvæ FD æqve multiplex est atqve tota AB totius CD.

Qvod erat demonstr.

PROP. VI. THEOR.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æqve multiplices sint, & ablatæ qvædam sint earundem æqve multiplices: erunt & reliqvæ vel eisdem æqvales, vel ipsarum æqve multiplices.

Sint duæ magnitudines AB, CD, duarum magnitudinum E, F æqve multiplices, & ablatæ AG, CH earundem E, F, æqve multiplices: Dico & reliqvas GB, HD vel ipsis E, F, æqvales esse, vel ipsarum æqve multiplices.



I. *Sit enim primum GB æqvalis E: (vid. Fig. 2): dico & HD ipsi F esse æqvalem.*

Demonstratio.

Ponatur ipsi F æqvalis CK.

Qvoniam AG æqve multiplex est ipsius F atqve CH ipsius F, estqve GB qvidem æqvalis E, KC vero æqvalis F (per construct.) erit AB æqve multiplex ipsius E atqve HK ipsius F (per 2. 5.).

Æqve

Æqve autem multiplex ponitur AB ipsius E atqve CD ipsius F; (per hypoth.) ergo KH æqve multiplex est ipsius F atqve CD ipsius F.

Qvoniam igitur utraqve ipsarum KH, CD est æqve multiplex ipsius F, erit KH æqvalis CD: communis auferatur CH; ergo reliqva KC reliqvæ HD est æqvalis.

Sed KC est æqvalis F, HD igitur ipsi F est æqvalis.

Si igitur GB ipsi E æqvalis fuerit, etiam HD ipsi F æqvalis erit.

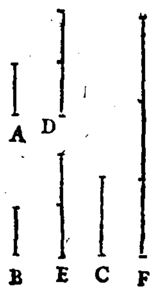
2. Similiter demonstrabimus si GB (ut in fig. 1.) multiplex fuerit ipsius E, & HD ipsius F æqve multiplicem esse.

Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æqve multiplices sint, & ablatæ qvædam sint earundem æqve multiplices: erunt & reliqvæ vel iisdem æqvales, vel ipsarum æqve multiplices. *Qvod erat demonstr.*

PROP. VII. THEOR.

Æqvales magnitudines eandem habent rationem ad eandem, & eadem ad æqvales.

Sint æqvales magnitudines A, B, alia autem qvavis magnitudo C: dico utramqve ipsarum A, B, ad C eandem habere rationem; & etiam C ad utramqve A, B eandem habere rationem.



Constructio.

Sumantur ipsarum A, B, æqve multiplices D, E, & ipsius C alia utcunqve multiplex F.

Demonstratio.

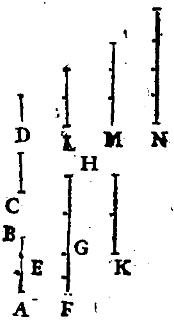
Qvoniam D ipsius A æqve multiplex est atqve E ipsius B, estqve A ipsi B æqvalis; erit & D æqvalis E (per 6. ax); alia autem est F utcunqve multiplex ipsius C: ergo si D superat F, & E ipsam F superabit; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor. erit igitur (per defin. 5. 5.) ut A ad C ita B ad C; & præterea inverse etiam ut C ad A ita C ad B (per coroll. 4. 5.). *Qvod erat demonstr.*

PROP.

PROP. VIII. THEOR.

Inæqvalium magnitudinum major ad eandem majorem habet rationem qvam minor: & eadem ad minorem majorem habet rationem, qvam ad majorem.

Sint inæqvales magnitudines AB, C, & sit AB major, C vero minor, & sit alia qvæcunqve D: Dico AB ad D majorem habere rationem qvam C ad D; & D ad C majorem habere rationem, qvam ad AB.



Constructio.

Qvoniam AB major est qvam C, ponatur ipsi C æqvalis BE (per 3. 1.); minor igitur ipsarum AE, EB multiplicata major aliqvando erit qvam D, (per 4. def. 5.).

Sit AE minor qvam EB, & multiplicetur AE, qvoad fiat major qvam D: sitqve FG ipsius AE multiplex, qvæ ipsa D est major; qvam multiplex autem est FG ipsius AE, tam multiplex fiat & GH ipsius EB, & K ipsius C: sumaturqve ipsius D dupla qvidem L, tripla vero M, & deinceps una major, qvoad ea, qvæ sumitur, multiplex fiat ipsius D, & primo major qvam K sumatur, sitqve N ipsius D qvadrupla, & primo major qvam K.

Demonstratio.

Qvoniam igitur N primo major est qvam K, non erit K minor qvam M; & cum æqve multiplex sit FG ipsius AE, atqve GH ipsius EB, erit & FG æqve multiplex ipsius AE atqve FH ipsius AB (per 1. 5.); æqve autem multiplex est FG ipsius AE atqve K ipsius C: ergò FH æqve multiplex est ipsius AB atqve K ipsius C; ac proptetea FH, K ipsarum AB, C sunt æqve multiplices.

Rur-

Rurſus, qvoniam GH æqve multiplex eſt ipſius EB atqve K ipſius C, eſtqve EB æqvalis C (per conſtr.), erit & GH ipſi K æqvalis. Sed K non eſt minor quam M: non eſt igitur GH minor qvam M.

Major autem eſt FG qvam D (per conſtr.): ergo tota FH utrisqve ſimul D, M major erit; Sed utræqve ſimul D, M ſunt æqvales ipſi N. qvare FH ſuperat N; K vero ipſam N non ſuperat: & ſunt FH, K æqve multiplices ipſarum AB, C; & N ipſius D alia qvædam multiplex: ergo AB ad D majorem rationem habet qvam C ad D (per 7. def. 5.).

Dico præterea & D ad C majorem habere rationem qvam D ad AB. Iisdem enim conſtructis, oſtendemus N ſuperare K, ipſam N vero FH non ſuperare; atqve eſt N multiplex ipſius D, & FH, K aliæ qvædam ipſarum AB, C æqve multiplices; ergo D ad C majorem rationem habet, qvam D ad AB, (per 7. def. 5.). *Qvod erat demonſtr.*

PROP. IX. THEOR.

Qvæ eandem rationem habent ad eandem, ſunt inter ſe æqvales: & ad qvas eadem eandem habet rationem, ipſæ etiam ſunt inter ſe æqvales.

Demonſtratio.

1. *Habeat enim utraqve ipſarum A, B ad C eandem rationem: Dico A ipſi B æqvalem eſſe.*

A B C

Si enim non eſſet æqvalis, non haberet utraqve ipſarum A, B ad C eandem rationem (per 8. 5.); habet autem: æqvalis igitur eſt A ipſi B.

2. *Habeat rurſus C ad utramqve ipſarum A, B eandem rationem: Dico A æqvalem eſſe ipſi B.*

Si enim non ſit A ipſi B æqvalis, non haberet C ad utrumqve A, B eandem rationem, (per 8. 5.); habet autem: Ergo A ipſi B eſt æqvalis.

Qvæ

Qvæ igitur eandem rationem habent ad eandem, ſunt inter ſe æqvales: & ad qvas eadem eandem habet rationem, ipſæ etiam ſunt inter ſe æqvales.

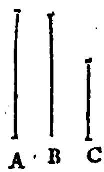
Qvod erat demonſtr.

PROP. X. THEOR.

Magnitudinum rationem habentium ad eandem, qvæ majorem habet rationem, eſt major; ad qvam vero eadem majorem habet rationem, illa eſt minor.

Demonſtratio.

1. *Habeant enim A ad C majorem rationem qvam B ad C: Dico A majorem eſſe qvam B.*



Si enim non eſt major, vel æqvalis erit vel minor; æqvalis autem non eſt A ipſi B, ſic enim utraqve ipſarum A, B ad C eandem haberet rationem (per 7. 5.): Atqvi eandem non habet: non eſt igitur A æqvalis ipſi B. Sed neqve minor eſt A qvam B, haberet enim A ad C minorem rationem qvam B ad C (per 8. 5.); atqvi non habet minorem: non eſt igitur A minor qvam B; Oſtenſum autem eſt, neqve eſſe æqvalem: ergo A qvam B major erit.

Qvod primo erat demonſtr.

2. Habeat rurſus C ad B majorem rationem, qvam C ad A: dico B minorem eſſe qvam A.

Si enim non eſt minor, vel æqvalis eſt, vel major, æqvalis utiqve non eſt B ipſi A, enim C ad utramqve ipſarum A, B eandem rationem haberet (per 7. 5.); non habet autem: ergo A ipſi B non eſt æqvalis.

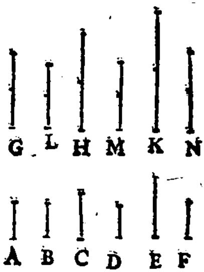
Sed neqve major eſt B qvam A, haberet enim C ad B minorem rationem qvam ad A; Atqvi non habet: non eſt igitur B major qvam A; Oſtenſum autem eſt neqve æqvalem eſſe; ergo B minor erit qvam A. *Qvod 2do erat demonſtrandum.*

PROP.

PROP. XI. THEOR.

Qvæ eidem eædem sunt rationes & inter se sunt eædem.

Sint enim ut A ad B ita C ad D, ut autem C ad D ita E ad F: dico ut A ad B ita esse E ad F.



Constructio.

1.) Sumantur ipsarum A, C, E æqve multiplices G, H, K.

2.) Ipsarum B, D, F sumantur aliæ utcunqve æqve multiplices L, M, N.

Demonstratio.

Qvoniam igitur est ut A ad B ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A, C æqve multiplices G, H, & ipsarum B, D aliæ utcunqve æqve multiplices L, M: Si G superat L & H ipsam M superabit; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor (per 5. def. 5.).

Rursus qvoniam est ut C ad D ita E ad F & sumptæ sunt ipsarum C, E æqve multiplices H, K, ipsarum vero D, F aliæ utcunqve æqve multiplices M, N: si H superat M, & K ipsam N superabit; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor. Sed si H superat M, & G superabit L & si æqvalis, æqvalis, & si minor, minor: qvare si G superat L, & K ipsam N superabit; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor. Et sunt G, K qvidem ipsarum A, E æqve multiplices, L, N vero ipsarum B, F aliæ utcunqve æqve multiplices; Ergo ut A ad B ita erit E ad F (per 5. def. 5.).

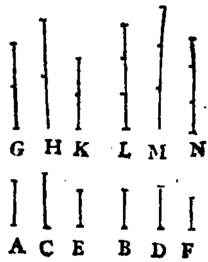
Qvod erat demonstr.

PROP. XII. THEOR.

Si qvotcunqve magnitudines proportionales fuerint; ut est una antecedentium ad unam conseqventium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes conseqventes.

 Sint

Sint qvotcunqve magnitudines proportionales A, B, C, D, E, F; & ut A ad B ita sit C ad D, & E ad F: Dico ut A ad B, ita esse A, C, E ad B, D, F.



Constructio.

1. Sumantur ipsarum A, C, E æqve multiplices G, H, K;
2. Ipsarum B, D, F sumantur aliæ utcunqve æqve multiplices L, M, N.

Demonstratio.

Qvoniam ut A ad B, ita est C ad D, & E ad F; & sumptæ sunt ipsarum qvidem A, C, E æqve multiplices G, H, K ipsarum vero B, D, F aliæ utcunqve æqve multiplices L, M, N: Si G superat L, & H ipsam M superabit, & K ipsam N; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor (per 5. def. 5.).

Qvare si G superat L, superabunt & G, H, K ipsas L, M, N; & si æqvalis, æqvales; & si minor, minores. Suntqve G & G, H, K ipsarum A & A, C, E æqve multiplices: nam si fuerunt qvotcunqve magnitudines qvotcunqve magnitudinum æqvalium numero, singulæ singularum æqve multiplices, qvam multiplex est una magnitudo unius, tam multiplices erunt & omnes omnium (per 1. 5.).

Eadem ratione L & L, M, N ipsarum B & B, D, F sunt æqve multiplices: est igitur ut A ad B ita A, C, E ad B, D, F. (per def. 5. 5.). *Qvod erat demonstr.*

PROP. XIII. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem qvam tertia ad qvartam; tertia autem ad qvartam majorem habeat rationem qvam qvinta ad sextam: & prima ad secundam majorem habebit rationem qvam qvinta ad sextam.

Prima

Prima enim A ad secundam B eandem rationem habeat quam tertia C ad quartam D, tertia autem C ad quartam D majorem habeat rationem, quam quinta E ad sextam F: Dico & primam A ad secundam B majorem habere rationem, quam quintam E ad sextam F.

Demonstratio.

Qvoniam C ad D majorem habet rationem, qvam E ad F, sumantur qvædam ipsarum C, E æqve multiplices, & ipsarum D, F aliæ qvædam æqve multiplices: & multiplex qvidem ipsius C superet multiplicem ipsius D, multiplex vero ipsius E non superat multiplicem ipsius F (per 7. def. 5.).

Sumantur, & sint ipsarum C, E æqve multiplices G, H, & ipsarum D, F aliæ qvædam æqve multiplices K, L, ita ut G qvidem superet K, H vero ipsam L non superet: & qvam multiplex est G ipsius C, tam multiplex sit & M ipsius A; qvam multiplex autem K ipsius D, tam multiplex sit & N ipsius B.

Et qvoniam est ut A ad B ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A, C, æqve multiplices M, G, & ipsarum B, D aliæ æqve multiplices N, K: Si M superat N, & G ipsam K superabit, & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor (per 5. def. 5.). Sed G superat K, ergo & M ipsam N superabit; H vero non superat L; suntqve M, H ipsarum A, E æqve multiplices, & N, L ipsarum B, F aliæ qvædam æqve multiplices: Ergo A ad B majorem rationem habebit qvam E ad F (per 7. def. 5.).

Quod erat demonstr.

PROP. XIV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem, qvam tertia ad qvartam, prima autem major sit qvam tertia: & secunda qvam qvarta major erit, & si æqvalis, æqvalis, & si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem rationem habeat, qvam tertia C ad qvartam D, major autem sit A qvam C: Dico & B qvam D majorem esse.

Demonstratio.

Qvoniam enim A major est qvam C, & alia utcunqve magnitudo B; habebit A ad B majorem rationem qvam C ad B (per 8. 5.). Sed ut A ad B ita C ad D: Ergo & C ad D majorem habebit rationem qvam C ad B (per 13. 5.).

Ad qvam vero eadem majorem habet rationem, illa minor est (per 10. 5.); Qvare D est minor qvam B: ac propterea B qvam D major erit. Similiter demonstrabimus & si A æqvalis sit ipsi C; & B ipsi D esse æqvalem; & si A sit minor qvam C, & B qvam D minorem esse. Si igitur prima ad secundam eandem habeat rationem, qvam tertia ad qvartam, prima autem major sit qvam tertia: & secunda qvam qvarta major erit; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor.

Qvod erat demonstrandum.

PROP. XV. THEOR.

Partes inter se comparatæ eandem habent rationem, qvam habent earum æqve multiplices inter se.

Sit enim AB æqve multiplex ipsius C atqve DE ipsius F; Dico ut C ad F ita esse AB ad DE.

Demonstratio.

Qvoniam æqve multiplex est AB ipsius C atqve DE ipsius F; qvot sunt magnitudines in AB æqvales ipsi C, totidem erunt & in DE æqvales F: Dividatur AB in magnitudines ipsi C æqvales, qvæ sint AG, GH, HB; & DE dividatur in magnitudines æqvales F, videlicet DK, KL, LE: erit igitur

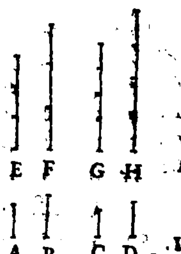
igitur ipsarum AG, GH, HB multitudo æqvalis multitudini ipsarum DK, KL, LE. Et qvoniam æqvales sunt inter se AG, GH, HB, suntqve DK, KL, LE etiam inter se æqvales, erunt ut AG ad DK ita GH ad KL & HB ad LE (per 7. 5.); & erit ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conseqventes (per 12. 5.): est igitur ut AG ad DK, ita AB ad DE. Sed AG ipsi C est æqvalis, F; ergo ut C ad F ita erit AB ad DE.

Qvod erat demonstr.

PROP. XVI. THEOR.

Siqvatuor magnitudines proportionales fuerint, & alterne proportionales erunt.

Sint qvatuor magnitudines A, B, C, D proportionales, sitqve ut A ad B ita C ad D: Dico & alterne proportionales esse; videlicet ut A ad C ita esse B ad D.



Constructio.

1. Sumantur ipsarum A, B æqve multiplices E, F;
2. Ipsarum vero C, D sumantur aliæ utcunqve æqve multiplices G, H.

Demonstratio.

Qvoniam æqve multiplex est E ipsius A atqve F ipsius B; partes autem inter se comparatæ eandem habent rationem, qvam habent earum æqve multiplices inter se (per 15. 5.); erit ut A ad B ita E ad F.

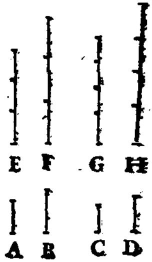
Ut autem A ad B ita C ad D: ergo ut C ad D ita E ad F (per 11. 5.).

Rursus, quoniam G, H sunt ipsarum C, D, æqve multiplices: erit ut C ad D, ita G ad H; ergo ut E ad F ita G ad H (per 11. 5.).

Qvod si qvatuor magnitudines proportionales sint, prima autem major sit qvam tertia; & secunda qvam qvarta major erit; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor (per 14. 5.).

Si igitur E superat G, & F ipsam H superabit; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor.

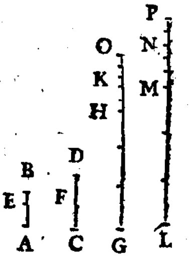
Sunt autem E, F, ipsarum A, B, æqve multiplices, & G, H ipsarum C, D, aliæ utcunqve æqve multiplices: ergo ut A ad C ita B ad D (per 5. def. 5.). *Quod erat demonstr.*



PROP. XVII. THEOR.

Si compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines AB, BE, CD, DF proportionales, sitqve ut AB ad BE ita CD ad DF: Dico etiam divisas proportionales esse; videlicet ut AE ad EB ita esse CF ad FD.



Constructio.

1. Sumantur ipsarum AE, EB, CF, FD æqve multiplices GH, HK, LM, MN.
2. Sumantur ipsarum EB, FD aliæ utcunqve æqve multiplices KO, NP.

Demonstratio.

Qvoniam GH æqve multiplex est ipsius AE atqve HK ipsius EB (per constr.) erit GH ipsius AE æqve multiplex atqve GK ipsius AB (per 1. 5.).

Æqve autem multiplex est GH ipsius AE atqve LM ipsius CF: Ergo GK æqve multiplex est ipsius AB, atqve LM ipsius CF.

Rursus qvoniam æqve multiplex est LM ipsius CF atqve MN ipsius FD; erit LM æqve multiplex ipsius CF atqve LN ipsius CD.

Sed

Sed æqve multiplex erat LM ipsius CF atqve GK ipsius AB: æqve igitur multiplex est GK ipsius AB atqve LN ipsius CD: qvare GK, LN ipsarum AB, CD æqve multiplices erunt.

Rursus qvoniam æqve multiplex est HK ipsius EB atqve MN ipsius FD; est autem & KO ipsius EB æqve multiplex, atqve NP ipsius FD: etiam composita HO ipsius EB æqve multiplex est atqve MP ipsius FD (per 2. 5.).

Cum autem sit ut AB ad BE, ita CD ad DF, & sumptæ sint ipsarum qvidem AB, CD æqve multiplices GK, LN, ipsarum vero EB, FD aliæ utcunqve æqve multiplices HO, MP: igitur si GK superat HO, & LN superabit MP; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor (per 5. def. 5.).

Superet igitur GK ipsam HO communiqve ablata HK, & GH ipsam KO superabit.

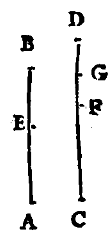
Sed si GK superat HO, & LN superat MP: superet itaqve LN ipsam MP; communiqve MN ablata & LM superabit NP: Qvare si GH superat KO & LM ipsam NP superabit.

Similiter demonstrabimus & si GH sit æqvalis KO, & LM ipsi NP esse æqvalem; & si minor minorem.

Sunt autem GH, LM, ipsarum AE, CF æqve multiplices, & ipsarum EB, FD aliæ utcunqve æqve multiplices KO, NP: Ergo ut AE ad EB, ita erit CF ad FD. *Qvod erat demonstr.*

PROP. XVIII. THEOR.

Si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt.

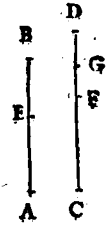


Sint divisæ magnitudines AE, EB, CF, FD proportionales, & ut AE ad EB ita FC ad FD: Dico etiam compositas proportionales esse; videlicet ut AB ad BE ita CD ad FD.

Demonstratio.

Si enim non est ut AB ad BE ita CD ad FD; erit ut AB ad BE ita CD vel ad minorem qvam FD, vel ad majorem.

Sit primum ad minorem nempe ad DG, & qvoniam est ut AB ad BE ita CD ad DG, compositæ magnitudines sunt proportionales: Ergo & divisæ proportionales erunt (per 17. 5.): est igitur ut AE ad EB ita CG ad GD.



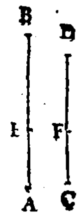
Ponitur autem & ut AE ad EB ita CF ad FD; qvare & ut CG ad GD ita CF ad FD (per 11, 5.); At prima CG major est qvam tertia CF: ergo & secunda GD major erit qvam qvarta FD; sed & minor, qvod fieri non potest; non est igitur ut AB ad BE ita CD ad minorem qvam FD.

Similiter ostendemus neqve esse CD ad majorem qvam FD; est igitur ad ipsam FD.

Qvare si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. *Qvod erat demonstr.*

PROP. XIX. THEOR.

Si fuerit ut tota ad totam ita ablata ad ablatam; erit reliqva ad reliqvam ut tota ad totam.



Sit enim ut tota AB ad totam CD ita ablata AE ad ablatam CF: dico & reliqvam EB ad reliqvam FD ita esse, ut tota AB ad totam CD.

Demonstratio.

Qvoniam est ut tota AB ad totam CD, ita AE ad CF; & alterne erit ut BA ad AE ita DC ad CF (per 16. 5.)

Et qvoniam compositæ magnitudines sunt proportionales, & divisæ proportionales erunt (per 17. 5.): ut igitur BE ad EA, ita DF ad CF; rursus alterne ut BE ad DF ita EA ad FC.

Sed ut AE ad CF ita posita est AB ad CD; & igitur reliqva EB erit ad reliqvam FD ut tota AB ad totam CD (per 11. 5.).

Qvod erat demonstr.

Corollarium.

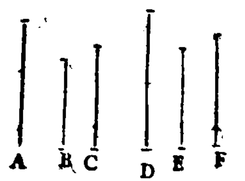
Et qvoniam ostensum est ut AB ad CD ita esse EB ad FD (per 16. 5.); erit alternatim ut AB ad BE ita CD ad DF, nempe

nempe compositæ magnitudines proportionales: ostensum autem est ut AB ad AE ita esse CD ad CF (per 16. & 19. 5.), qvod est per conversionem rationis (per 17. def. 5.). Ex hoc igitur perspicuum est, si compositæ magnitudines AB, BE, CD, DF sint proportionales, & per conversionem rationis proportionales esse.

Qvod erat demonstr.

PROP. XX. THEOR.

Si sint tres magnitudines & aliæ ipsis numero æqvales, qvæ binæ sumantur in eadem ratione, ex æqvo autem prima major sit qvam tertia: & qvarta qvam sexta major erit; & si æqvalis, æqvalis, & si minor, minor.



Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ ipsis numero æqvales D, E, F, binæ sumptæ in eadem ratione, sitqve ut A ad B ita D ad E, & ut B ad C ita E ad F, ex æqvo autem major sit A qvam C; dico & qvartam D majorem esse sexta F; qvod si prima A tertiæ C fuerit æqvalis, erit & qvarta D æqvalis sextæ F; sin illa minor, hæc qvoqve minor erit.

Demonstratio.

Qvoniam A major est qvam C, alia vero utcunqve B, & major ad eandem majorem habet rationem qvam minor (per 8. 5.); habebit A ad B majorem rationem qvam C ad B. Sed ut A ad B ita D ad E; & invertendo ut C ad B ita F ad E, ergo & D ad E majorem habet rationem qvam F ad E. Ad eandem vero rationem habentium, qvæ majorem habet rationem, illa major est (per 10. 5.); major igitur est D qvam F. Similiter ostendemus & si A sit æqvalis C & D ipsi F æqvalem esse; & si minor, minorem.

Qvod erat demonstr.

PROP. XXI. THEOR.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æqvales, qvæ binæ ſumantur & in eadem ratione; ſit autem perturbata earum proportio, & ex æqvo prima major ſit qvam tertia: & qvarta qvam ſexta major erit; & ſi æqvalis, æqvalis & ſi minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ ipſis numero æqvales D, E, F, binæ ſumptæ & in eadem ratione; ſit autem perturbata earum proportio, videlicet ut A ad B ita E ad F, ut vero B ad C ita D ad E, & ex æqvo A major ſit qvam C: Dico & D qvam F majorem eſſe; & ſi æqvalis, æqvalem, & ſi minor, minorem.

Demonſtratio.

Qvoniam major eſt A qvam C, alia vero B: habebit A ad B majorem rationem qvam C ad B (per 8. 5.).

Sed ut A ad B ita E ad F, & invertendo ut C ad B ita E ad D: qvare & E ad F majorem habebit rationem qvam E ad D; ad qvam vero eadem majorem habet rationem illa minor eſt (per 10. 5.): minor igitur eſt F qvam D: ac propterea D qvam F major erit. Similiter oſtendemus & ſi æqvalis æqvalem: videlicet ſi A ſit æqvalis C, & D ipſi F æqvalem eſſe; & ſi minor, minorem.

Qvod erat demonſtr.

PROP. XXII. THEOR.

Si ſint qvotcunqve magnitudines & aliæ ipſis numero æqvales, qvæ binæ ſumantur in eadem ratione; & ex æqvo in eadem ratione erunt.

Sint

Sint quotcunque magnitudines A, B, C, & aliæ ipsis numero æquales D, E, F bina sumpta in eadem ratione, ut A quidem ad B ita D ad E, ut autem B ad C ita E ad F: dico & ex æquo in eadem ratione esse ut A ad C ita D ad F.

Constructio.

1. Sumantur enim ipsarum quidem A, D, æque multiplices G, H.
2. Ipsarum vero B, E, sumantur aliæ utcunque æque multiplices K, L, & ipsarum C, F, aliæ utcunque æque multiplices M, N.

Demonstratio.

Quoniam est ut A ad B ita D ad E, & sumptæ sunt ipsarum A, D æque multiplices G, H, & ipsarum B, E aliæ utcunque æque multiplices K, L; erit ut G ad K ita H ad L (per 4. 5.). Eadem quoque ratione erit ut K ad M ita L ad N.

Et cum sint tres magnitudines G, K, M, & aliæ ipsis numero æquales H, L, N binæ sumptæ & in eadem ratione: ex æquo igitur si G superat M & H ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor (per 20. 5.).

Sunt autem G, H ipsarum A, D æque multiplices, & M, N ipsarum C, F aliæ utcunque æque multiplices: ut igitur A ad C ita erit D ad F (per 5. def. 5.).

Quod erat demonstr.

PROP. XXIII. THEOR.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem ratione, sit autem perturbata eorum proportio: & ex æquo in eadem ratione erunt.

Sint

Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ ipsis numero æqvales, binæ sumptæ in eadem ratione D, E, F, sit autem perturbata earum proportio, videlicet ut A ad B ita E ad F, & ut B ad C ita D ad E: dico ut A ad C ita esse D ad F.

Constructio.

Sumantur ipsarum qvidem A, B, D, æqve multiplices G, H, L, ipsarum vero C, E, F aliæ utcunqve æqve multiplices K, M, N.

Demonstratio.

Qvoniam G, H æqve multiplices sunt ipsarum A, B; partes autem eandem habent rationem, qvam earum æqve multiplices (per 15. 5.) erit ut A ad B ita G ad H.

Simili ratione ut E ad F ita M ad N; atqve est ut A ad B ita E ad F. Ut igitur G ad H ita M ad N (per 11. 5.). Et qvoniam est ut B ad C ita D ad E, & sumptæ sunt ipsarum qvidem B, D æqve multiplices H, L ipsarum vero C, E aliæ utcunqve æqve multiplices K, M; erit ut H ad K ita L ad M (per 4 5.).

Ostensum autem est ut G ad H ita esse M ad N: Qvoniam igitur tres sunt magnitudines G, H, K, & aliæ ipsis numero æqvales L, M, N; binæ sumptæ in eadem ratione, estqve perturbata earum proportio, ex æqvo, si G superat K, & L ipsam N superabit; & si æqvalis, æqvalis; & si minor, minor (per 21. 5.).

Sunt autem G, L, ipsarum A, D æqve multiplices, & K, N æqve multiplices ipsarum C, F: ut igitur A ad C ita erit D ad F (per 5. def. 5.).

Qvod erat demonstr.

PROP.

PROP. XXIV. THEOR.

Si prima ad ſecundam eandem habeat rationem, qvam tertia ad qvartam; habeat autem & qvinta ad ſecundam eandem rationem, qvam ſexta ad qvartam: & compoſita è prima & qvinta ad ſecundam eandem rationem habebit qvam compoſita è tertia & ſexta ad qvartam.

Prima enim AB ad ſecundam C eandem habeat rationem, qvam tertia DE ad qvartam F: habeat autem & qvinta BG ad ſecundam C rationem eandem, qvam ſexta EH ad qvartam F: dico & compoſitam è prima & qvinta AG ad ſecundam C eandem habere rationem qvam compoſita è tertia & ſexta DH ad qvartam F.

Demonſtratio.

Qvoniam eſt ut BG ad C ita EH ad F; erit invertendo ut C ad BG ita F ad EH (per cor. 4. 5.).

Et qvoniam ut AB ad C ita eſt DE ad F, ut autem C ad BG ita F ad EH; erit ex æqvo ut AB ad BG ita DE ad EH (per 22. 5.). Cum autem diviſæ magnitudines ſint proportionales & compoſitæ proportionales erunt (per 18. 5.): Ut igitur AG ad GB ita eſt DH ad HE.

Ut autem GB ad C ita EH ad F: Ergo ex æqvo ut AG ad C ita erit DH ad F (per 22. 5.).

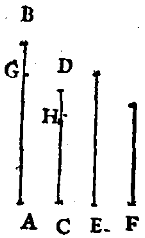
Qvod erat demonſtr.

PROP. XXV. THEOR.

Si qvatuor magnitudines fuerint proportionales maxima ipſarum & minima duabus reliqvis majores erunt.

Sint

Sint qvatuor magnitudines proportionales AB, CD, E, F, & sit ut AB ad CD ita E ad F; sit autem maxima ipsarum AB, & F minima: dico AB & F ipsis CD & E Majores esse.



Demonstratio.

Ponatur enim ipsi qvidem E æqvalis AG, ipsi vero F æqvalis CH. Qvoniam igitur est ut AB ad CD ita E ad F, estqve AG æqvalis E, & CH æqvalis F; erit ut AB ad CD ita AG ad CH.

Et qvoniam est ut tota AB ad totam CD ita ablata AG ad ablatam CH; erit & reliqva GB ad reliqvam HD ut tota AB ad totam CD (per 19. 5.). Major autem est AB qvam CD (ex hypoth.); Ergo & GB major est qvam HD.

Cum autem AG sit æqvalis ipsi E, & CH ipsi F; erunt AG & F æqvales ipsis CH & E.

Si autem inæqvalibus æqvalia addantur, tota erunt inæqvalia; cum igitur GB, HD sint inæqvalia, sitqve major GB, si ipsi qvidem GB addantur AG & F, ipsi vero HD addantur CH & E, fiunt AB & F ipsis CD & E majores.

Qvod erat demonstrandum.

EU-

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEXTUS.

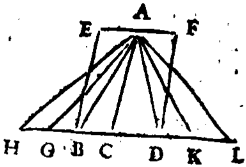
DEFINITIONES:

1. Similes figuræ rectilineæ sunt, qvæ & singulos angulos singulis æqvales habent, & circa æqvales angulos latera proportionalia.
2. Reciprocæ figuræ sunt, qvando in utraqve figura antecedentes & conseqventes rationum termini fuerint.
3. *Secundum extremam ac mediam rationem* recta linea *secta* esse dicitur, qvando ut tota ad majus segmentum ita majus segmentum ad minus se habuerit.
4. Altitudo cujusqve figuræ est linea perpendicularis à vertice ad basin ducta.
5. *Ratio ex rationibus componi* dicitur, qvando rationum qvantitates inter se multiplicatæ illius faciunt qvantitatem.

PROP. I. THEOR.

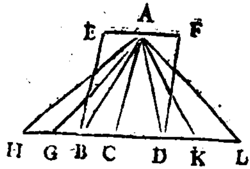
Triangula & parallelogramma, qvæ eandem habent altitudinem, sunt inter se ut bases.

Sint triangula qvidem ABC, ACD, parallelogramma vero EC, CF, qvæ eandem habent altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto A ad BD ductam: dico ut basis BC ad basin CD ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum.



Con-

Constructio.



1. Producatur BD ex utraqve parte ad puncta H L;
2. Basi BC æqvales qvotcunqve ponantur BG, GH; Basi vero CD ponantur qvotcunqve æqvales DK, KL.
3. Jungantur AG, AH, AK, AL.

Demonstratio.

1. Qvoniam CB, BG, GH inter se sunt æqvales, erunt & triangula AGH, AGB, ABC inter se æqvalia (per 38. 1.): ergo qvam multiplex est basis HC ipsius basis BC, tam multiplex est triangulum AHC trianguli ABC, eadem ratione, qvam multiplex est basis LC ipsius basis CD, tam multiplex est & triangulum ALC ipsius ACD trianguli; & si æqvalis est basis HC basi CL, & triangulum AHC triangulo ALC est æqvale; & si basis HC basin CL superat & triangulum AHC superabit triangul. ALC; & si minor, minus erit (per 38. 1.).

Qvatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BC, CD & duobus triangulis ABC, ACD, sumpta sunt æqve multiplicia, basis qvidem BC, & ABC trianguli, videlicet HC basis & AHC triangulum; basis vero CD & trianguli ACD alia utcunqve æqve multiplicia, nempe CL basis & ALC triangulum. Atqve ostensum est, si basis HC basin CL superat, & triangulum AHC superare triangulum ALC; & si æqvalis, æqvale, & si minor, minus: est igitur ut BC basis ad basin CD ita triangulum ABC ad ACD triangulum (per 5. def. 5.). *Qvod primo erat demonstrandum.*

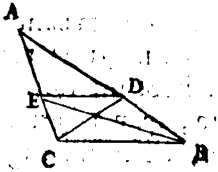
2. Qvoniam trianguli ABC duplum est parallelogrammum EC, & trianguli ACD parallelogrammum FC duplum (per 41. 1.), partes autem eandem inter se rationem habent, qvam earum æqve multiplices (per 15. 5.); erit ut ABC triangulum ad triangulum ACD ita parallelogrammum EC ad FC parallelogrammum.

Qvoniam igitur ostensum est, ut basis BC ad CD basin ita esse ABC triangulum ad triangulum ACD, ut autem ABC triangulum ad triangulum ACD ita parallelogrammum EC ad FC parallelogrammum: erit ut BC basis ad basin CD ita parallelogrammum EC ad FC parallelogr. (per 11. 5.). *Qvod 2do erat demonstr.*

PROP.

PROP. II. THEOR.

Si uni laterum trianguli parallela recta linea ducatur, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera, & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, qvæ sectiones conjungit recta linea, reliqvo trianguli lateri parallela erit.



Trianguli enim ABC uni laterum BC parallela ducatur DE: dico ut BD ad DA ita esse CE ad EA.

Demonstratio.

1. Jungantur BE, CD: triangulum igitur BDE triangulo CDE est æqvale, qvia in eadem sunt basi DE & intra easdem parallelas DE, BC (per 37. 1.), aliud autem est triangulum ADE; & æqvalia ad idem eandem habent rationem (per 7. 5.): ergo ut triangulum BDE ad triangulum ADE ita est CDE triangulum ad triangulum ADE. Ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE ita est BD ad DA: nam cum eandem altitudinem habeant videlicet perpendicularem à puncto E ad AB ductam, inter se sunt ut bases (per 1. 6.). Et ob eandem causam ut CDE triangulum ad triangulum ADE ita CE ad EA: ut igitur BD ad DA ita est CE ad EA (per 11. 5.).

Quod erat demonstr.

2. *Sed trianguli ABC latera AB, AC proportionaliter secta sint in punctis D, E, ut BD ad DA ita sit CE ad EA, & jungatur DE: dico DE ipsi BC parallelam esse.*

Iisdem enim constructis, qvoniam est ut BD ad DA ita CE ad EA; ut autem BD ad DA ita triangulum BDE ad triangulum ADE (per 1. 6.); & ut CE ad EA ita CDE triangulum ad triangulum ADE: erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE ita CDE triangulum ad triangulum ADE (per 11. 5.). Utrumqve igitur triangulorum BDE, CDE ad triangulum ADE eandem habet rationem, ideo triangulum BDE triangulo CDE

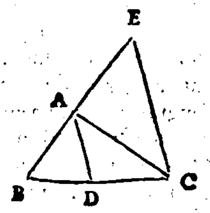
 æqvale

æqvale eſt (per 9. 5.): & ſunt ſuper eadem baſi DE. Æqvalia autem triangula & ſuper eadem baſi conſtituta etiam intra eaſdem ſunt parallelas (per 39. 1.): ergo DE ipſi BC parallela eſt. *Qvod ſecundo erat demonſtrandum.*

PROP. III. THEOR.

Si trianguli angulus bifariam ſecetur, ſecans autem angulum recta linea ſecet etiam baſin; baſis ſegmenta eandem rationem habebunt qvam reliqva trianguli latera: & ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem qvam reliqva trianguli latera; qvæ à vertice ad ſectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam ſecabit.

1. *Sit triangulum ABC & ſecetur angulus BAC biſariam a recta linea AD: dico ut BD ad DC ita eſſe BA ad AC.*



Conſtructio.

1. Ducatur per C ipſi DA parallela CE (per 31. 1.)
2. Producatur trianguli latus BA usqvedum conveniat cum parallela ducta CE in puncto E.

Demonſtratio.

Qvoniam in parallelas AD, EC incidit recta linea AC; erit angulus ACE æqvalis angulo CAD (per 29. 1.). Sed CAD angulus ponitur æqvalis angulo BAD: ergo & BAD ipſi angulo ACE æqvalis erit.

Rurſus qvoniam in parallelas AD, EC recta linea BAE incidit, exterior angulus BAD æqvalis eſt interiori AEC (per 29. 1.).

Oſtenſus autem eſt angulus ACE angulo BAD æqvalis; ergo & ACE ipſi AEC æqvalis erit; & propterea latus AE æqvale lateri AC (per 6. 1.).

Et

Et qvoniam uni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD; erit ut BD ad DC ita BA ad AE (per 2. 6.), æqvalis autem est AE ipsi AC: est igitur ut BD ad DC ita BA ad AC. *Qvod primo erat demonstr.*

2. *Sit autem ut BD ad DC ita BA ad AC; & AD jungatur dico, angulum BAC bifariam sectum esse à recta linea AD.*

Iisdem enim constructis, qvoniam est ut BD ad DC ita BA ad AC est autem (per 2. 6.) ut BD ad DC ita BA ad AE (etenim uni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi ECparallela ducta est AD) erit ut BA ad AC ita BA ad AE ergo AC est æqvalis AE (per 9. 5.) ac propterea & angulus AEC angulo ACE æqvalis (per 5. 1.).

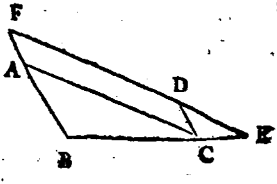
Sed angulus qvidem AEC est æqvalis angulo exteriori BAD, angulus vero ACE æqvalis alterno CAD (per 29. 1.): qvare & BAD angulus ipsi CAD æqvalis erit. Angulus igitur BAC bifariam sectus est à recta linea AD.

Qvod secundo erat demonstrandum.

PROP. IV. THEOR.

Æqviangulorum triangulorum proportionalia sunt latera, qvæ circum æqvales angulos; & homologa sunt latera, qvæ æqvalibus angulis subtenduntur.

Sint æqviangula triangula ABC, DCE, qvæ angulum qvidem ABC angulo DCE, angulum vero ACE angulo DEC æqvalem habeant, & præterea angulum BAC æqvalem angulo CDE: Dico triangulorum ABC, DCE, proportionalia esse latera, qvæ sunt circa æqvales angulos; & homologa esse latera, qvæ æqvalibus angulis subtenduntur.

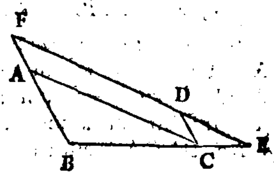


Demonstratio.

Ponatur enim BC in directum ipsi CE. Et qvoniam anguli ABC, ACB duobus rectis sunt minores (per 17. 1.).

 æqvalis

æqvalis autem est angulus ACB angulo DEC; erunt ABC, DEC anguli duobus rectis minores; qvare BA, ED producta inter se convenient (per 11. ax.) producantur, & convenient in puncto F.



Iam qvoniam angulus DCE æqvalis est angulo ABC, erit BF ipsi CD parallela (per 28. 1.). Rursus, qvoniam æqvalis est angulus ACB angulo DEC, parallela erit AC ipsi FE: parallelogrammum igitur est FACD: ac propterea FA qvidem ipsi CD; AC vero ipsi FD æqvalis (per 34. 1.).

Et qvoniam uni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE, parallela ducta est AC; erit ut BA ad AF ita BC ad CE (per 2. 6.) æqvalis autem est AF ipsi CD; ut igitur BA ad CD ita BC ad CE (per 7. 5.), & alterne ut AB ad BC ita DC ad CE (per 16. 5.).

Rursus qvoniam CD parallela est BF, erit ut BC ad CE ita FD ad DE, Sed DF æqvalis AC: ergo ut BC ad CE ita AC ad ED, & alterne ut BC ad AC ita CE ad ED. Itaqve qvoniam ostensum est, ut AB ad BC ita DC ad CE, ut autem BC ad CA ita CE ad ED; erit ex æqvo ut BA ad CA ita DC ad ED (per 22. 5.).

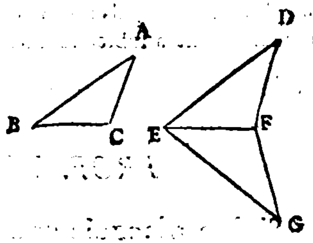
Æqviangulorum igitur triangulorum proportionalia sunt latera, qvæ circum æqvales angulos, & homologa sunt latera, qvæ æqvalibus angulis subtenduntur.

Quod erat demonstr.

PROP. V. THEOR.

Si duo triangula latera habeant proportionalia, æqviangula erunt triangula; & æqvales habebunt angulos, qvibus homologa latera subtenduntur.

Sint



Sint duo triangula ABC, DEF, qua latera proportionalia habeant, sitque ut AB quidem ad BC ita DE ad EF; ut autem BC ad CA ita EF ad FD; & adhuc ut BA ad AC ita ED ad DF: dico triangulum ABC triangulo DEF aeqviangulum esse & aeqvales habere angulos, qvibus homologa latera subtenduntur; angulum qvidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD; & praeterea angulum BAC angulo EDF.

Constructio & Demonstratio.

Constituatur ad rectam lineam EF & ad puncta in ipsa E, F, angulo qvidem ABC æqvalis angulus FEG, angulo autem BCA æqvalis angulus EFG; qvare reliqvus BAC angulus reliqvo EGF est æqvalis (per 32. 1.). Ideoqve æqviangulum est triangulum ABC triangulo EGF; triangulorum igitur ABC, EGF proportionalia sunt latera, qvæ circum æqvales angulos, & homologa, qvæ æqvalibus angulis subtenduntur (per 4. 6.); ergo ut AB ad BC ita GE ad EF. Sed ut AB ad BC ita DE ad EF: ut igitur DE ad EF ita GE ad EF (per 11. 5.): Utraqve igitur ipsarum DE, GE eandem habet rationem ad EF; & idcirco erit DE ipsi GE æqvalis (per 9. 5.). Eadem ratione & DF æqvalis erit GF. Itaqve qvoniam DE est æqvalis EG, communis autem EF; duæ DE, EF, duabus GE, EF sunt æqvales, & basis DF basi GF æqvalis; angulus igitur DEF est æqvalis angulo GEF (per 8. 1.), & DEF triangulum æqvale triangulo GEF & reliqvi anguli reliqvis angulis æqvales, qvibus æqvalia latera subtenduntur; angulus igitur DFE qvidem est æqvalis angulo GFE, angulus vero EDF æqvalis angulo EGF. Et qvoniam angulus DEF est æqvalis angulo GEF, & angulus GEF æqvalis angulo ABC (per construct.); erit & angulus ABC angulo DEF æqvalis. Eadem ratione & angulus ACB æqvalis est angulo DFE, & etiam angulus ad A angulo ad D: ergo ABC triangulum est æqviangulum triangulo DEF.

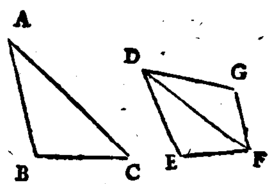
Si igitur duo triangula latera habeant proportionalia, æqviangula erunt triangula; & æqvales habebunt angulos, qvibus homologa latera subtenduntur.

Qvod erat demonstrandum.

PROP. VI. THEOR.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqvalem habeant, circa æqvales autem angulos latera proportionalia; æqviangula erunt triangula, & æqvales habebunt angulos, qvibus homologa latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC, DEF unum angulum BAC uni angulo EDF æqvalem habentia, circa æqvales autem angulos latera proportionalia, ut BA ad AC ita ED ad DF: dico triangulum ABC triangulo DEF æqviangulum esse, & angulum qvidem ABC habere æqvalem angulo DEF, angulum vero ACB angulo DFE.



Constructio,

Ad rectam lineam DF & ad puncta in ipsa D, F, alterutri angulorum BAC, EDF constituatur æqvalis angulus FDG, angulo autem ACB æqvalis DFG.

Demonstratio.

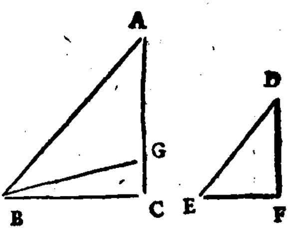
Qvoniam in duobus triangulis ABC, DFG duo anguli A, C duobus angulis FDG, DFG æqvales sunt (per construct.); erit & reliqvus angulus B, reliqvo G æqvalis (per 32. 1.): ergo triangulum ABC triangulo DGF æqviangulum est; ac propterea ut BA ad AC ita GD ad DF (per 4. 6.); Est autem ut BA ad AC ita ED ad DF (per hypoth.); ut igitur ED ad DF ita GD ad DF (per 11. 5): qvare ED æqvalis est

est ipsi DG, (per 9. 5.); communis vero est DF: ergo duæ ED, DF duabus GD, DF sunt æqvales, & angulus EDF angulo GDF est æqvalis: basis igitur EF est æqvalis basi FG, triangulumqve DEF æqvale triangulo GDF, & reliqvi anguli reliqvis angulis æqvales: alter alteri, qvibus æqvalia latera subtenduntur (per 4. 1.), angulus igitur DFG est æqvalis angulo DFE; angulus vero ad G æqvalis angulo ad E. Sed angulus DFG æqvalis est angulo ACB (per construct.): angulus igitur ACB angulo DFE est æqvalis. Angulus autem BAC æqvalis est angulo EDF (per hypoth.): ergo & reliqvus, qvi ad B æqvalis reliqvo, qvi ad E (per 32. 1.) æqviangulum igitur est triangulum ABC triangulo DEF, & æqvales sunt anguli, qvibus homologa latera subtenduntur.

Quod erat demonstr.

PROP. VII. THEOR.

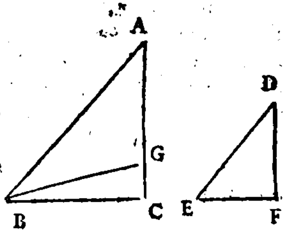
Si duo triangula unum angulum uni angulo æqvalem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, reliqvorum vero utrumqve simul vel minorem vel non minorem recto; æqviangula erunt triangula & æqvales habebunt angulos, circa qvos latera sunt proportionalia.



Sint duo triangula ABC, DEF unum angulum uni angulo æqvalem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF æqvalem, circa alios autem angulos ABC, DEF latera proportionalia, ut sit DE ad EF sicut AB ad BC, & reliqvorum, qvi ad C, F primo utrumqve simul minorem recto: Dico triangulum ABC triangulo DEF æqviangulum esse, angulumqve ABC æqvalem angulo DEF, & reliqvum, qvi ad C reliqvo, qvi ad F æqvalem.

Constructio & Demonstratio.

1. Si inæqvalis est angulus ABC angulo DEF, unus ipsorum major erit. Sit igitur major ABC, & constituatur ad rectam lineam AB & ad punctum in ipsa B angulo DEF æqvalis angulus ABG (per 23. 1).



Qvoniam angulus A est æqvalis angulo D (per hypoth.), angulus vero ABG æqvalis angulo DEF (per construct.); erit reliqvus AGB reliqvo DFE æqvalis: æqviangulum igitur est ABG triangulum triangulo DEF; qvare ut AB ad BG sic DE ad EF (per 4. 6.). Ut vero DE ad EF sic AB ad BC (per hypoth.): ut igitur AB ad BC sic AB ad BG, ideo AB ad utramqve BC, BG eandem habet rationem (per 11. 5.); erit igitur BC ipsi BG æqvalis, ac propterea angulus BGC est æqvalis angulo BCG (per 5. 1.). Minor autem recto est angulus, qvi ad C (per hypoth.); ergo & BGC minor est recto, & ob id, qvi ei deinceps est AGB major recto (per 13. 1.). Atqvi ostensus est angulus AGB æqvalis angulo F: angulus igitur, qvi ad F recto major est, qvod hypothesi repugnat: non est igitur angulus ABC inæqvalis angulo DEF; ergo ipsi est æqvalis. Est autem & angulus ad A æqvalis ei, qvi ad D: qvare & reliqvus, qvi ad C æqvalis reliqvo, qvi ad F; æqviangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF.

Qvod primo erat demonstr.

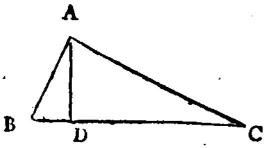
2. Sed rursus ponatur uterqve angulorum, qvi ad C, F non minor recto: dico rursus, & sic triangulum ABC triangulo DEF æqviangulum esse. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus BC æqvalem ipsi BG, angulumqve ad C angulo BGC æqvalem. Sed angulus, qvi ad C non est minor recto: non est igitur recto minor BGC. Qvare trianguli BGC duo anguli non sunt duobus rectis minores; qvod fieri non potest (per 17. 1.), non igitur rursus est ABC angulus inæqvalis angulo DEF; ergo æqvalis. Est autem & qvi ad A æqvalis ei, qvi est ad D: reliqvus igitur, qvi ad C reliqvo ad F est æqvalis; ac propterea triangulum ABC triangulo DEF æqviangulum est. *Qvod secundo erat demonstr.*

PROP.

PROP. VIII. THEOR.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basin perpendicularis ducatur; qvæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti & inter se sunt similia.

Sit triangulum rectangulum ABC rectum habens angulum BAC, & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD:



1. *Dico triangula ABD, ADC toti triangulo ABC similia esse.*

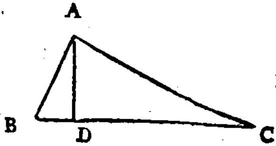
Demonstratio.

Qvoniam angulus BAC est æqvalis angulo ADB, rectus enim est uterqve, & angulus, qvi ad B communis duobus triangulis ABC, ABD; erit reliqvus ACB reliqvo BAD æqvalis (per 32. 1,): æqviangulum igitur est triangulum ABC triangulo ABD. Qvare ut BC, qvæ subtendit angulum rectum trianguli ABC, ad BA subtendentem angulum rectum trianguli ABD, sic ipsa AB subtendens angulum, qvi ad C trianguli ABC, ad BD subtendentem angulum æqvalem angulo, qvi ad C, videlicet BAD ipsius ABD trianguli (per 4. 6.): & sic etiam AC ad AD subtendentem angulum, qvi ad B communem duobus triangulis: ergo triangulum ABC triangulo ABD æqviangulum est, & circa æqvales angulos latera habet proportionalia: simile igitur est triangulum ABC triangulo ABD (per 1. def. 6.). Eadem ratione demonstrabimus etiam ADC triangulum triangulo ABC simile esse; qvare utrumqve ipsorum ABD, ADC toti triangulo ABC est simile.

Qvod primo erat demonstrandum.

2. *Dico insuper triangula ABD, ADC etiam inter se similia esse.*

Qvoniam enim rectus angulus BDA est æqvalis recto ADC; sed & BAD ostensus æqvalis ei, qvi ad C; erit reliqvus, qvi ad B reliqvo DAC æqvalis (per 32. 1.): æqviangulum igitur est triangulum ABD triangulo ADC. Ergo ut BD trianguli



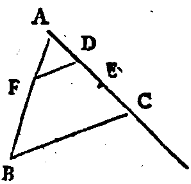
ABD subtendens BAD angulum ad DA trianguli ADC subtendentem angulum, qvi ad C, æqvalem angulo BAD, sic ipsa AD trianguli ABD, subtendens angulum, qvi ad B, ad DC trianguli ADC, subtendentem angulum DAC, ei, qvi ad B æqvalem (per 4. 6.). Et sic etiam BA subtendens rectum angulum ADB ad AC subtendentem angulum rectum ADC: est igitur ABD triangulum simile triangulo ADC (per def. 6.). *Qvod secundo erat demonstrandum.*

Corollarium.

Ex hoc manifestum est, in triangulo rectangulo perpendicularem ab angulo recto ad basin ductam, mediam proportionalem esse inter segmenta basis: & præterea inter basin & basis segmentum utrumlibet, latus segmento conterminum medium esse proportionale.

PROP. IX. PROBL.

A data recta linea imperatam partem abscindere.



Sit data recta linea AB: oportet ab ipsa AB imperatam partem abscindere; imperetur autem, ex: gr. pars tertia.

Constructio.

1. Ducatur à puncto A qvælibet recta linea AC, qvæ cum ipsa AB angulum qvemlibet contineat:
2. Sumatur in AC qvodvis punctum D, & ipsi AD æqvales ponantur DE, EC (per 3. 1.);
3. Jungatur BC & per D ipsi BC parallela ducatur DF (per 31. 1.).

De-

Demonstratio.

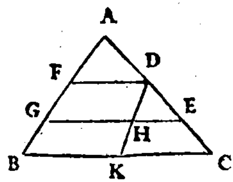
Qvoniam uni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC, parallela ducta est FD; erit ut CD ad DA, ita BF ad FA (per 2. 6.). Dupla autem est CD ipsius DA; Ergo & BF ipsius FA dupla; tripla igitur est BA ipsius AF.

Qvare à data recta linea AB imperata pars tertia AF abscissa est. *Qvod erat faciendum.*

PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam insectam similiter secare, ut data recta secta est.

Sit data recta linea insecta AB, secta vero AC: Oportet rectam lineam AB insectam similiter secare ut AC secta est in punctis D, E.



Constructio.

1. Datæ rectæ AB, AC, ponantur ita, ut angulum qvemvis comprehendant, jungaturqve BC.
2. Per puncta D, E ipsi BC parallelæ ducantur DF, EG, per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK.

Demonstratio.

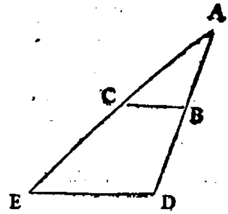
Qvoniam parallelogrammum est utrumqve ipsorum FH, HB (per construct), erit igitur DH æqvalis FG; HK vero ipsi GB æqvalis. Et qvoniam uni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC parallela ducta est HE; erit ut CE ad ED ita KH ad HD. Æqvalis autem est KH qvidem ipsi BG, HD vero ipsi GF: est igitur ut CE ad ED ita BG ad GF. Rursus qvoniam uni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG parallela ducta est FD; ut ED ad DA, ita erit GF ad FA. Sed ostensum est, ut CE ad ED ita esse BG ad GF: ut igitur CE ad ED ita est BG ad GF, & ut ED ad DA ita GF ad FA.

Ergo data recta linea insecta AB similiter secta est ut data recta AC. *Qvod erat demonstrandum.*

PROP. XI. PROBL.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Sint data dua recta linea AB, AC, & ponantur ita, ut angulum quemvis comprehendant: oportet ipsis AB, AC tertiam proportionalem invenire.



Constructio.

1. Producantur AB, AC ad puncta D, E;
2. Ponatur ipsi AC æqvalis BD, & jungatur BC;
3. Per D ipsi BC parallela ducatur DE (per 31. 1.);

Demonstratio.

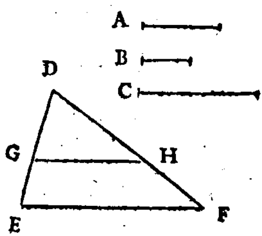
Qvoniam uni laterum trianguli ADE, videlicet ipsi DE parallela ducta est BC; erit ut AB ad BD ita AC ad CE, æqvalis autem est BD ipsi AC: ut igitur AB ad AC ita est AC ad CE.

Qvare duabus datis lineis AB, AC tertia proportionalis CE est inventa. *Qvod erat faciendum.*

PROP. XII. PROBL.

Tribus datis rectis lineis, qvartam proportionalem invenire.

Sint data tres recta linea A, B, C: oportet ipsis A, B, C qvartam proportionalem invenire.



Constructio.

1. Exponantur duæ rectæ lineæ DE, DF, angulum qvemvis EDF comprehendentes; & ponatur ipsi qvidem A æqvalis DG, ipsi vero B æqvalis GE & ipsi C æqvalis DH;
2. Jungatur GH, & per E ipsi HG parallela ducatur EF.

Demon-

Demonſtratio.

Qvoniam uni laterum trianguli DEF, nimirum ipſi EF parallela ducta eſt GH; erit ut DG ad GE ita DH ad HF. Eſt autem DG ipſi A æqvalis, GE vero æqvalis B & DH æqvalis C: ut igitur A ad B ita C ad HF.

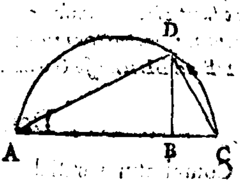
Qvare datis tribus rectis lineis A, B, C, qvarta proportionalis inventa eſt HF.

Qvod erat faciendum.

PROP. XIII. PROBL.

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.

Sint data duæ rectæ lineæ AB, BC: oportet inter ipſas mediam proportionalem invenire.



Conſtructio.

1. Ponantur in directum AB, BC, & ſuper ipſa AC deſcribatur ſemicirculus ADC;
2. A puncto B ipſi AC ad rectos angulos ducatur BD (per 11. 1);
3. Jungantur AD, DC.

Demonſtratio.

Qvoniam angulus ADC eſt in ſemicirculo, is rectus eſt (per 31. 3.). Et qvoniam in triangulo rectangulo ADC ab angulo recto ad baſin perpendicularis ducta eſt DB; erit BD media proportionalis inter ſegmenta baſis AB, BC.

Duabus igitur datis rectis lineis AB, BC, media proportionalis inventa eſt DB.

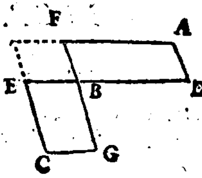
Qvod erat faciendum.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Parallelogrammorum æqvalium & unum angulum uni æqvalem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, qvæ circum æqvales angulos: & qvorum parallelogrammorum unum angulum uni æqvalem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, qvæ circum æqvales angulos, illa inter ſe ſunt æqvalia.

1. *Sint æqvalia parallelogramma AB, BC æqvales habentia angulos ad B, & ponantur in directum DB, BE; ergo & in directum erunt FB, BG (per 14. 1.): Dico parallelogrammorum AB, BC latera, qvæ ſunt circa æqvales angulos eſſe reciproce proportionalia; hoc eſt, ut DB ad BE ita eſſe GB ad BF.*



Demonſtratio.

Compleatur parallelogrammum FE.

Qvoniam igitur parallelogrammum AB æqvale eſt parallelogrammo BC, eſt autem parallelogrammum FE aliud: erit ut AB ad FE ita BC ad FE (per 7. 5.). Sed ut AB qvidem ad FE ita eſt DB ad BE, ut autem BC ad FE ita GB ad BF (per 1. 6.) erit igitur ut DB ad BE ita GB ad BF. Ergo parallelogrammorum AB, BC latera, qvæ circum æqvales angulos ſunt reciproce proportionalia. *Qvod primo erat demonſtr.*

2. *Sint autem latera, qvæ circum æqvales angulos, reciproce proportionalia, ſitqve ut DB ad BE ita GB ad BF: dico parallelogrammum AB eſſe æqvale parallelogrammo BC.*

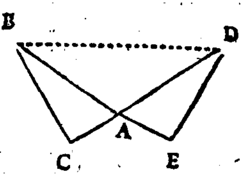
Qvoniam enim eſt ut DB ad BE ita GB ad BF (per hypoth.), ut autem DB ad BE ita AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE, & ut GB ad BF ita BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE (per 1. 6.); erit ut AB ad FE ita BC ad FE (per 11. 5.): æqvale igitur eſt AB parallelogrammum parallelogrammo BC. *Qvod ſecundo erat demonſtrandum.*

PROP.

PROP. XV. THEOR.

Triangulorum æqvalium & unum angulum uni æqvalem habentium reciproce proportionalia sunt latera, qvæ circum æqvales angulos: & qvorum triangulorum unum angulum uni æqvalem habentium reciproce proportionalia sunt latera, qvæ circum æqvales angulos, illa inter se sunt æqvalia.

Sint æqvalia triangula ABC, ADE unum angulum uni æqvalem habentia, angulum scilicet BAC æqvalem angulo DAE: dico triangulorum ABC, ADE latera, qvæ circum æqvales angulos, esse reciproce proportionalia, hoc est ut CA ad AD ita esse EA ad AB.



Constructio.

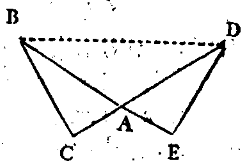
1. Triangula ABC, ADE ponantur ita, ut in directum sit CA ipsi AD: ergo & EA ipsi AB in directum erit (per 14. 1.);
2. Jungatur BD.

Demonstratio.

1. Qvoniam triangulum ABC æqvale est triangulo ADE (per hypoth.), est autem aliud triangulum ABD: erit ut CAB triangulum ad triangulum BAD ita triangulum ADE ad triangulum BAD (per 7. 5.). Sed ut triangulum qvidem CAB ad BAD triangulum ita CA ad AD; ut autem triangulum EAD ad ipsum BAD ita EA ad AB (per 1. 6.): Erit igitur CA ad AD ut EA ad AB: qvare triangulorum ABC, ADE latera, qvæ circum æqvales angulos, sunt reciproce proportionalia; *Qvod primo erat demonstrandum.*

2. *Sin*

2.) *Sint autem latera triangulorum ABC, ADE reciproce proportionalia; & sit ut CA ad AD ita EA ad AB: dico triangulum ABC triangulo ADE esse æqvale.*



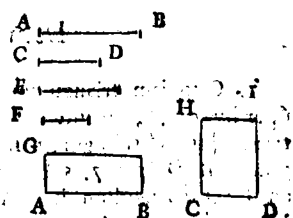
Iisdem ut supra constructis, qvoniam ut CA ad AD ita est EA ad AB; ut autem CA ad AD, ita ABC triangulum ad triangulum BAD, & ut EA ad AB ita triangulum EAD ad BAD triangulum (per 1. 6.): erit ut ABC triangulum ad triangulum BAD ita triangulum EAD ad BAD triangulum (per 11. 5.): utrumqve igitur triangulorum ABC, ADE ad triangulum BAD eandem habet rationem; ac propterea æqvale est ABC triangulum triangulo EAD (per 9. 5.).

Qvod 2do erat demonstr.

PROP. XVI. THEOR.

Si qvatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis comprehensum æqvale est rectangulo, qvod sub mediis comprehenditur: & si rectangulum sub extremis comprehensum æqvale fuerit ei, qvod sub mediis comprehenditur, qvatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint qvatuor rectæ lineæ proportionales AB, CD, E, F; qvidem AB ad CD ita E ad F; dico rectangulum sub rectis lineis AB, F æqvale esse ei, qvod sub ipsis CD, E comprehenditur.



Constructio.

1. A punctis A, C ipsis AB, CD ad rectos angulos ducantur AG, CH (per 11. 1.);
2. Ipsi F ponatur æqvalis AG; ipsi vero E æqvalis CH;
3. Compleantur BG, DH parallelogramma.

Demon-

Demonſtratio.

Qvoniam eſt ut AB ad CD ita E ad F; eſt autem E qvidem æqvalis CH & F ipſi AG; erit ut AB ad CD ita CH ad AG. parallelogrammorum igitur BG, DH reciproce proportionalia ſunt latera, qvæ circum æqvales angulos (per 2. def. 6.). Qvorum autem parallelogrammorum æqviangulorum reciproce proportionalia ſunt latera, qvæ circum æqvales angulos, ea inter ſe ſunt æqvalia (per 14. 6.); parallelogrammum igitur BG, æqvale eſt parallelogrammo DH; eſt autem parallelogrammum BG, ſub rectis lineis AB, F comprehenſum, nam AG æqvalis eſt F: parallelogrammum vero DH comprehenditur ſub ipſis CD, E, cum CH ipſi E ſit æqvalis: rectangulum igitur comprehenſum ſub rectis AB, F eſt æqvale ei, qvod ſub ipſis CD, E comprehenditur.

Qvod primo erat demonſtrandum.

2. *Sit rectangulum comprehenſum ſub AB, F æqvale ei, qvod comprehenditur ſub ipſis CD, E: dico qvatuor rectas lineas proportionales eſſe, videlicet ut AB ad CD ita E ad F.*

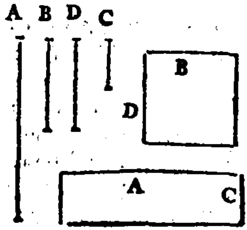
Iisdem enim conſtructis, qvoniam rectangulum comprehenſum ſub rectis AB, F eſt æqvale ei, qvod ſub rectis CD, E comprehenditur, eſt autem rectangulum BG comprehenſum ſub rectis AB, F, etenim AG eſt æqvalis F; comprehenſum vero ſub rectis CD, E eſt rectangulum DH, qvod CH ipſi E ſit æqvalis: erit parallelogrammum BG æqvale parallelogrammo DH; & ſunt æqviangula: æqvalium autem & æqviangulorum parallelogrammorum latera, qvæ circum æqvales angulos ſunt reciproce proportionalia (per 14. 6): qvare ut AB ad CD ita CH ad AG. Æqvalis autem eſt CH ipſi E, & AG ipſi F: ut igitur AB ad CD ita E ad F.

Qvod ſecundo erat demonſtrandum.

PROP. XVII. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis comprehenſum æqvale eſt ei, qvod à media fit, qvadrato: Et ſi rectangulum ſub extremis comprehenſum æqvale fuerit ei, qvod à media fit, qvadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

1.) Sint tres rectæ lineæ proportionales A, B, C, ut qvidem A ad B ita B ad C: dico rectangulum comprehensum sub rectis A, C æqvale esse ei, qvod à media B fit, qvadrato.



Constructio.

Ponatur ipsi B æqvalis D.

Demonstratio.

Qvoniam ut A ad B ita B ad C, æqvalis autem est B ipsi D; erit ut A ad B ita D ad C. Si autem qvatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis comprehensum est æqvale ei, qvod sub mediis comprehenditur (per 16. 6.): ergo rectangulum comprehensum sub rectis A, C æqvale est ei, qvod comprehenditur sub rectis B, D. Sed rectangulum comprehensum sub rectis B, D est æqvale qvadrato, qvod fit ex ipsa B; etenim B est æqvalis D: rectangulum igitur comprehensum sub rectis A, C, est æqvale ei, qvod ex B fit qvadrato. *Qvod primo erat demonstrandum.*

2.) Sed rectangulum comprehensum sub rectis A, C æqvale sit qvadrato, qvod fit ex B: dico A ad B ita esse ut B ad C.

Iisdem enim constructis, qvoniam rectangulum comprehensum sub rectis A, C æqvale est qvadrato, qvod fit ex B; at qvadratum, qvod fit ex B est rectangulum, qvod sub ipsis B, D comprehenditur, est enim B æqvalis D: erit rectangulum comprehensum sub rectis A, C æqvale ei, qvod sub rectis B, D comprehenditur.

Si autem rectangulum sub extremis comprehensum æqvale fuerit ei, qvod sub mediis comprehenditur, qvatuor rectæ lineæ proportionales erunt (per 16. 6.): est igitur ut A ad B ita D ad C. Sed B æqvalis est D; ut igitur A ad B ita B ad C.

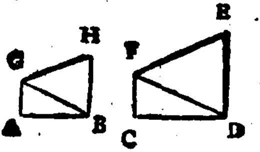
Qvod secundo erat demonstrandum.

PROP.

PROP. XVIII. THEOR.

A data recta linea dato rectilineo simile similiterqve positum rectilineum describere.

Sit data recta linea AB datum autem rectilineum CE: Oportet a recta linea AB rectilineo CE simile similiterqve positum rectilineum describere.



Constructio & Demonstratio.

Jungatur DF; & ad rectam lineam AB & ad puncta in ipsa A, B angulo qvidem C æqvalis angulus constituatur GAB, angulo autem CDF angulus fiat æqvalis ABG (per 23. 1.): reliqvus igitur CFD angulus reliqvo AGB est æqvalis (per 32. 1.): ergo æqviangulum est FCD triangulum triangulo GAB; ac propterea ut FD ad GB ita FC ad GA & CD ad AB.

Rursus constituatur ad rectam lineam BG, & ad puncta in ipsa B, G angulo DFE æqvalis angulus BGH, angulo autem FDE æqvalis GBH: ergo reliqvus, qvi ad E reliqvo, qvi ad H est æqvalis; æqviangulum igitur est triangulum FDE triangulo GBH: qvare ut FD ad GB ita FE ad GH & ED ad HB (per 4. 6.). Ostensum autem est ut FD ad GB ita esse FC ad GA & CD ad AB: Est igitur ut FC ad GA ita CD ad AB & FE ad GH, & adhuc ED ad HB (per 11. 5.), itaqve qvoniam angulus CFD æqvalis est angulo AGB (per construct.), angulus autem DFE angulo BGH; erit totus CFE angulus toti AGH æqvalis. Eadem ratione & CDE est æqvalis ipsi ABH, & præterea angulus ad C angulo ad A æqvalis, angulus vero ad E æqvalis angulo ad H; æqviangulum igitur est AH ipsi CE, & latera circum æqvales angulos habet proportionalia; ergo rectilineum AH rectilineo CE simile erit.

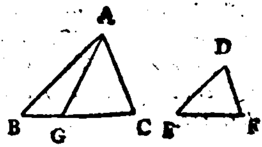
A data igitur linea AB dato rectilineo CE simile & similiter positum rectilineum AH descriptum est.

Qvod erat faciendum & demonstrandum.

PROP. XIX. THEOR.

Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

Sint similia triangula ABC, DEF habentia angulum ad B æqvalem angulo ad E; & sit ut AB ad BC ita DE ad EF, ita ut latus BC homologum sit lateri EF (per 12 def. 5.): dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplicatam rationem habere ejus, qvam habet BC ad EF.



Constructio.

1. Sumatur ipsis BC EF tertia proportionalis BG, ut sit sicut BC ad EF ita EF ad BG (per 12. 6.);
2. Jungatur GA;

Demonstratio.

Qvoniam ut AB ad BC ita est DE ad EF; erit permutando ut AB ad DE ita BC ad EF (per 16. 5.). Sed ut BC ad EF ita EF ad BG, & igitur ut AB ad DE ita EF ad BG (per 11. 5.): qvare triangulorum ABG, DEF latera, qvæ circum æqvales angulos reciproce sunt proportionalia.

Qvorum autem triangulorum, unum angulum uni æqvalem habentium, latera, qvæ circum æqvales angulos, reciproce sunt proportionalia, ea inter se sunt æqvalia (per 15. 6.): æqvale igitur est ABG triangulum triangulo DEF. Et qvoniam est ut BC ad EF ita EF ad BG; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam rationem habet ejus, qvam habet ad secundam; habebit BC ad BG duplicatam rationem ejus qvam habet BC ad EF (per. 10. def. 5.).

Ut autem BC ad BG ita ABC triangulum ad triangulum ABG (per 1. 6.): Ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplicatam rationem habet ejus, qvam habet BC ad EF.

Est

Est autem ABG triangulum triangulo DEF æqvale: & igitur triangulum ABC ad triangulum DEF duplicatam rationem habebit ejus, qvam habet BC ad EF.

Qvod erat demonstr.

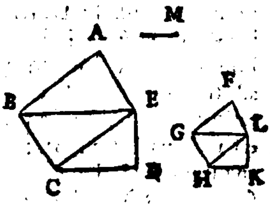
Corollarium.

Ex hoc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam ita esse triangulum, qvod fit à prima, ad triangulum à secunda simile & similiter descriptum: qvoniam ostensum est ut CB ad BG ita ABC triangulum ad triangulum ABG, hoc est ad triangulum DEF.

PROP. XX. THEOR.

Similia polygona in similia triangula dividuntur & numero æqvalia & homologa totis: & polygonum ad polygonum duplicatam habet rationem ejus, qvam latus homologum habet ad latus homologum.

Sint similia polygona ABCDE, FGHKL, & sit latus AB homologum ipsi FG: Dico polygona ABCDE, FGHKL in similia triangula dividi & numero æqvalia & homologa totis; & polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplicatam rationem habere ejus, qvam habet AB ad FG.



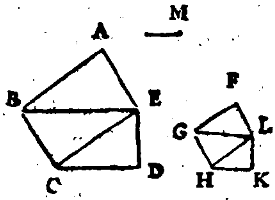
Constructio.

Jungantur BE, EC, GL, LH.

Demonstratio.

1. Qvoniam simile est ABCDE polygonum polygono FGHKL (per hypoth.) erit angulus BAE angulo GFL æqvalis; atqve est, ut BA ad AE ita GF ad FL (per 1 def. 6.). Triangula igitur BAE, GFL sunt similia (per 6. 6.), ideoqve angulus ABE æqvalis angulo FGL, & angulus AEB æqvalis angulo FLG.

Eſt autem & totus AED angulus æqvalis toti FLK, propter ſimilitudinem polygonorum: ergo reliqvus BED angulus reliqvo GLK eſt æqvalis, & eadem ratione EBC reliqvo LGH eſt æqvalis.



Et qvoniam ob ſimilitudinem triangulorum ABE, FGL eſt ut BE ad BA ita GL ad GF; ſed & propter ſimilitudinem polygonorum ut BA ad BC ita FG ad GH; erit ex æqvo ut BE ad BC ita GL ad GH (per 22. 5.): nempe circum æqvales angulos EBC, LGH latera ſunt proportionalia: æqviangulum igitur eſt EBC triangulum triangulo LGH (per 6. 6), qvare & ſimile (per 1. def. & 4. 6.).

Eadem ratione & EDC triangulum ſimile eſt triangulo HLK: Similia igitur polygona ABCDE, FGHKL in ſimilia triangula dividuntur & numero æqvalia.

Qvod primo erat demonſtrandum.

2. Qvoniam in præcedentibus oſtenſum eſt triangulum ABE ſimile triangulo FGL, triangulum autem BEC ſimile triangulo GLH; erunt igitur inter ſe in duplicata ratione laterum homologorum (per 19. 5.), hoc eſt, ratio trianguli ABE ad triangulum FGL eſt duplicata rationis BE ad GL, & ratio trianguli BEC ad triangulum GLH etiam duplicata eſt rationis BE ad GL: Ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL ita triangulum BEC ad triangulum GLH (per 11. 5.). Eodem modo oſtendetur ut triangulum BEC ad triangulum GLH ita eſſe triangulum EDC ad triangulum LKH. Qvare ut unum antecedens videlicet triang. ABE ad unum conſeqvens ſcil. ad triangulum FGL ita omnia antecedentia ABE, BEC, CED ſimul ſumpta ad omnia conſeqventia FGL, GLH, HLK ſimul ſumpta (per 12. 5.). Totis igitur homologa ſunt omnia iſta triangula, hoc eſt ut polygonum unum ad alterum.

Qvod ſecundo erat demonſtrandum.

3. Ratio trianguli ABE ad triangulum FGL eſt duplicata rationis BA ad FG (per 19. 5.). Sed ratio polygoni ad polygonum

num est eadem cum ratione trianguli ABE ad triangulum FGL (ut jam ostendebatur). Ergo etiam ratio polygoni ad polygonum est duplicata rationis AB ad FG (per 11. 5.).

Quod tertio erat demonstrandum.

Corollarium 1.

Eodem modo & in similibus qvadrilateris ostendetur, ea esse in duplicata ratione laterum homologorum, ostensum autem & in triangulis (ad coroll. 19. 6.): qvare universæ similes rectilineæ figuræ inter se sunt in duplicata ratione homologorum laterum.

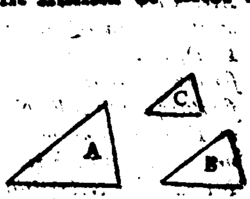
Corollarium 2.

Et si ipsis AB, FG tertiam proportionalem sumamus, qvæ sit M: habebit AB ad M duplicatam rationem ejus, qvam habet AB ad FG (per 10. def. 5.). Habet autem & polygonum ad polygonum, & qvadrilaterum ad qvadrilaterum duplicatam rationem ejus, qvam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est qvam AB ad FG: atqve ostensum est hoc in triangulis. Universe igitur manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse figuram rectilineam, qvæ fit a prima, ad similem & similiter descriptum à secunda.

PROP. XXI. THEOR.

Qvæ eidem rectilineo sunt similia & inter se sunt similia.

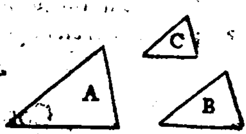
Sit utrumqve rectilineum A, B simile rectilineo C: dico & rectilineum A rectilineo B simile esse.



Demonstratio.

Qvoniam A rectilineum simile est rectilineo C (per hypoth.), & ipsi C æqviangulum erit & circum æqvales angulos latera habebit proportionalia (per 1. def. 6.).

Rursus, qvoniam rectilineum B simile est rectilineo C, etiam ipsi C æqviangulum erit & circum æqvales angulos latera habebit proportionalia;



Utrumqve igitur rectilineorum A, B ipsi C æqviangulum est, & circum æqvales angulos latera habet proportionalia;

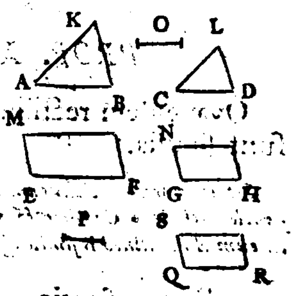
Qvare & rectilineum A ipsi B æqviangulum est (per 1. ax.), ideoqve latera circum æqvales angulos proportionalia habet (per 4. 6.); ac propterea A ipsi B est simile (per 1. def. 6.):

Qvod erat demonstrandum.

PROP. XXII. THEOR.

Si qvatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & rectilineæ, qvæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta, proportionalia erunt: & si rectilinea, qvæ ab ipsis fiunt similia & similiter descripta, fuerint proportionalia; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

1. *Sint qvatuor rectæ lineæ proportionales AB, CD, EF, GH sitqve ut AB ad CD ita EF ad GH; sint porro ab ipsis qvidem AB, CD descripta similia & similiter posita rectilinea KAB, LCD, ab ipsis vero EF, GH descripta sint rectilinea similia & similiter posita MF, NH: dico ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD ita esse rectilineum MF ad ipsum NH rectilineum.*



Constructio.

Sumatur ipsis qvidem AB, CD tertia proportionalis O; ipsis vero EF, GH tertia proportionalis P (per 11. 6.).

De-

Demonſtratio.

Qvoniam eſt ut AB ad CD ita EF ad GH, ut autem CD ad O ita GH ad P: erit ex æqvo ut AB ad O ita EF ad P (per 22. 5.); Sed ut AB ad O ita eſt rectilineum KAB ad LCD rectilineum, ut autem EF ad P ita rectilineum MF ad rectilineum NH (per 2. coroll. 20. 6.); Cum vero ratio AB ad O æqvalis ſive eadem eſt ac ratio EF ad P, ut igitur KAB ad LCD ita MF ad NH (per 11. 5.).

Qvod primo erat demonſtrandum.

2. *Sit ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD ita rectilineum MF ad rectilineum NH: dico ut AB ad CD ita eſſe EF ad GH.*

Conſtructio.

Fiat enim ut AB ad CD ita EF ad QR (per 12. 6); & deſcribatur ab ipſa QR alterutri rectilineorum MF, NH ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum SR (per 18. 6.).

Demonſtratio.

Qvoniam igitur eſt ut AB ad CD ita EF ad QR, & deſcripta ſunt ab ipſis qvidem AB, CD ſimilia & ſimiliter poſita KAB, LCD rectilinea, ab ipſis vero EF, QR ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea MF, SR; eſt ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD ita rectilineum MF ad SR rectilineum (ut in ſuperiori parte oſtenſum eſt).

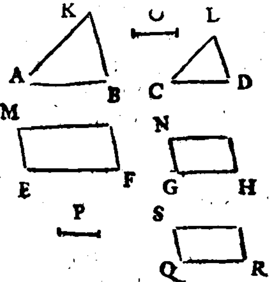
Ponitur autem & ut rectilineum KAB ad rectilineum LCD ita MF rectilineum ad rectilineum NH; rectilineum igitur MF ad utrumqve ipſorum NH, SR eandem habet rationem (per 11. 5.): ergo rectilineum NH eſt ipſi SR æqvale (per 9. 5.); eſt autem & ipſi ſimile ſimiliterqve poſitum (per conſtr.): Ergo GH eſt æqvalis QR. Et qvoniam ut AB ad CD ita eſt EF ad QR æqvalis autem QR ipſi GH; erit ut AB ad CD ita EF ad GH (per 7. 5.).

Qvod ſecundo erat demonſtrandum.

LEMMA.

At vero ſi rectilinea æqvalia & ſimilia ſint, homologa ipſorum latera inter ſe æqvalia eſſe hoc modo demonſtrabimus.

Sint



Sint æqvalia & similia rectilinea NH, SR; & sit ut HG ad GN ita RQ ad QS: dico RQ ipsi HG esse æqualem.

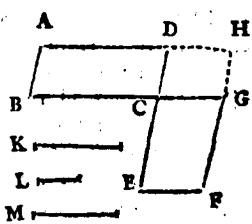
Si enim inæqvales sint una ipsarum major erit. Sit RQ major qvam HG; & qvoniam est ut RQ ad QS ita HG ad GN: permutando erit ut RQ ad GH ita QS ad GN (per 16. 5.).

Major autem est QR qvam HG; ergo & QS qvam GN major erit: qvare & rectilineum RS rectilineo HN est majus; sed & æqvale, qvod fieri non potest: non est igitur QR inæqvalis ipsi GH; ergo æqvalis.

Qvod erat demonstr.

PROP. XXIII. THEOR.

Æqviangula parallogramma inter se rationem habent ex laterum rationibus compositam.



Sint æqviangula parallelogramma AC, CF æqvalem habentia BCD angulum angulo ECG: dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF rationem habere compositam ex rationibus laterum; hoc est ex ratione, qvam habet BC ad CG, & ex ratione, qvam habet DC ad CE.

Constructio.

1. Ponatur enim BC in directum ipsi CG, ergo & DC ipsi CE in directum erit (per 14. 1.);
2. Compleatur DG parallelogrammum productis rectis AD, FG usqve dum concurrant in puncto H;
3. Exponatur recta linea qvædam K, & fiat ut BC ad CG ita K ad L, ut autem DC ad CE ita L ad M (per 12. 6.).

De-

Demonstratio.

Rationes ipsius K ad L & L ad M eædem sunt, qvæ rationes laterum videlicet BC ad CG & DC ad CE (per constr.).

Sed ratio K ad M composita est ex ratione K ad L & ratione L ad M: qvare & K ad M rationem habet ex rationibus laterum compositam (per 5. def. 6.).

Et qvoniam est ut BC ad CG ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH (per 1. 6.); sed ut BC ad CG ita K ad L (per constr.) erit igitur ut K ad L ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrammum (per 11. 5.).

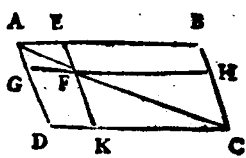
Rursus qvoniam est ut DC ad CE ita parallelogrammum CH ad parallelogrammum CF (per 1. 6.); ut autem DC ad CE ita L ad M (per constr.): ut igitur L ad M ita erit parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum (per 11. 5.).

Itaqve cum ostensum sit, ut K qvidem ad L ita esse AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH, ut autem L ad M ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum erit ex æqvo ut K ad M ita AC parallelogrammum ad ipsum CF (per 22. 5.). Habet autem K ad M rationem ex rationibus laterum compositam: ergo & AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF rationem habet ex rationibus laterum compositam. *Qvod erat demonstr.*

PROP. XXIV. THEOR.

Omnis parallelogrammi qvæ circa diametrum sunt parallelogramma sunt similia toti & inter se.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC; circa diametrum vero AC parallelogramma sint EG, HK: dico parallelogramma EG, HK & toti ABCD & inter se similia esse.



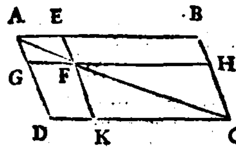
Demonstratio.

Qvoniam recta EK parallela est rectæ BC, erit angulus AEF æqvalis angulo ABC, angulus autem AFE æqvalis angulo ACB (per 29. 1); duo igitur triangula AEF, ABC sunt æqviangula; Eodem modo & duo triangula AGF, ADC æqviangula sunt: qvare parallelogrammum EG æqviangulum est parallelogrammo ABCD: utrumqve enim

eorum

eorum in duo triangula æqvalia & æqviangula per diametrum AC divisum est (per 34. 1.).

Porro qvoniam æqviangula sunt triangula ABC, AEF, erunt latera ipsorum circa æqvales angulos proportionalia, nempe ut AB ad BC ita AE ad EF; & qvoniam etiam æqviangula sunt triangula ADC, AGF (ut supra ostensum est), erunt ipsorum latera similiter proportionalia videlicet, ut CD ad DA ita FG ad GA (per 4. 6.): qvare parallelogramma EG, ABCD, qvæ & singulos angulos singulis angulis æqvales habent & latera circa æqvales angulos proportionalia, sunt similia (per 1. def. 6.).



Eadem ratione & parallelogrammum HK simile est parallelogrammo ABCD: utrumqve igitur ipsorum EG, HK parallelogrammorum toti parallelogrammo ABCD est simile. Qvæ autem eidem rectilineo sunt similia & inter se sunt similia (per 21. 6): parallelogrammum igitur EG simile est parallelogrammo HK.

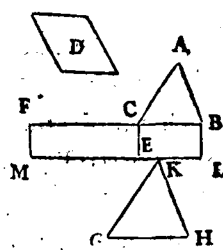
Qvare omnis parallelogrammi, qvæ circa diametrum sunt parallelogramma, & toti & inter se sunt similia.

Qvod erat demonstr.

PROP. XXV. PROBL.

Dato rectilineo simile, & alteri dato æqvale idem constituere.

Sint data duo rectilinea videlicet ABC & D: oportet constituere rectilineum, idemqve ipsi ABC qvidem simile, ipsi vero D æqvale.



Constructio.

1. Ad rectam lineam BC applicetur parallelogrammum BE triangulo ABC æqvale; ad rectam vero CE applicetur parallelogrammum CM æqvale ipsi D in angulo FCE, qvi angulo CBL est æqvalis (per 44. & 45. 1): 2. Su-

2. Sumatur inter ipsas BC, CF media proportionalis GH (per 13. 6.);

3. Ab ipsa GH describatur rectilineum KGH simile & similiter positum rectilineo ABC (per 18. 6.).

Demonstratio.

Qvoniam EB, CM sunt parallelogramma & angulus FCE æqvalis est angulo CBL (per construct.), in directum igitur est BC ipsi CF (per 14. 1.); & qvoniam est ut BC ad GH ita GH ad CF (per construct.); cum autem tres lineæ rectæ sint proportionales, ut prima ad tertiam ita est figura rectilinea, qvæ fit à prima ad similem & similiter descriptam à secunda (per 2. coroll. 20. 6): erit itaqve ut BC ad CF ita ABC triangulum ad triangulum KGH. Sed ut BC ad CF ita parallelogrammum BE ad EF parallelogrammum (per 1. 6.): & igitur ut triangulum ABC ad triangulum KGH ita BE parallelogrammum ad parallelogrammum EF: qvare alterne sive permutando ut ABC triangulum ad parallelogrammum BE, ita triangulum KGH ad EF parallelogrammum (per 16. 5.). Est autem triangulum ABC æqvale parallelogrammo BE (per construct.): æqvale igitur est & KGH triangulum parallelogrammo EF. Sed EF parallelogrammum æqvale est rectilineo D: ergo & triangulum KGH ipsi D est æqvale. Est autem & KGH simile triangulo ABC (per constr.).

Dato igitur rectilineo ABC simile, & alteri dato D æqvale idem constitutum est KGH.

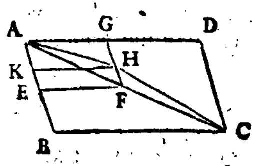
Qvod erat faciendum.

PROP. XXVI. THEOR.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur, simile toti & similiter positum, communem cum ipso angulum habens; circa eandem diametrum est cum toto.

A pa-

A parallelogrammo enim ABCD parallelogrammum AEFG auferatur simile ipsi ABCD & similiter positum, communemqve cum ipso angulum habens DAB: dico parallelogrammum ABCD circa eandem esse diametrum cum parallelogrammo AEFG.



Demonstratio.

Si thesin propositionis negaveris, sit itaqve ipsorum diameter AHC, ducaturqve per H alterutri ipsarum AD, BC parallela HK.

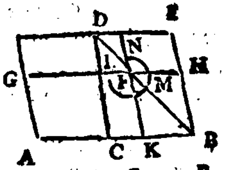
Qvoniam igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum cum parallelogrammo KG (per antithesin), erit parallelogrammum ABCD parallelogrammo KG simile (per 24. 6.): ergo ut DA ad AB ita GA ad AK (per 1. def. 6.).

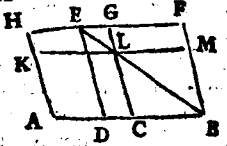
Est autem & (propter similitudinem parallelogrammorum ABCD, EG,) ut DA ad AB ita GA ad AE: ideoqve ut GA ad AE ita GA ad AK (per 11. 5): ac proinde GA ad utramqve ipsarum AK, AE eandem rationem habet; erit igitur AE ipsi AK æqvalis (per 9. 5.), hoc est, totum suæ parti erit æqvale, qvod fieri neqvit: non igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum cum parallelogrammo KG: igitur circa eandem diametrum erit parallelogrammum ABCD cum parallelogrammo AEFG. *Qvod erat demonstr.*

PROP. XXVII. THEOR.

Omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis, similibus & similiter positis ei, qvæ à dimidia describitur, maximum est, qvod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.

Sit





Sit recta linea AB seceturque bifariam in C; & ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum AD deficiens figura parallelogramma CE, simili & (Fig. 1. similiter posita ei, qvæ a dimidio ipsius AB descripta est, hoc est a BC: Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam (Fig. 2. AB applicatorum & deficientium figuris parallelogrammis, similibus & similiter positis ipsi CE, maximum esse AD. Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF, deficiens figura parallelogramma KH simili & similiter posita ipsi CE: Dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF majus esse.

Demonstratio.

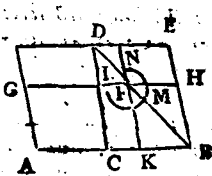
1. Qvoniam parallelogrammum CE simile est parallelogrammo KH, circa eandem diametrum sunt (per 26. 6.). Ducatur eorum diameter DB & describatur Figura prima.

Qvoniam igitur CF est æqvale ipsi FE (per 43. 1.), commune apponatur KH: totum igitur CH toti KE est æqvale. Sed CH est æqvale CG, qvoniam recta linea AC ipsi CB est æqvalis (per 36. 1.): ergo & GC ipsi EK æqvale erit. Commune apponatur CF: totum igitur AF est æqvale gnomoni LMN; qvare & CE, hoc est parallelogrammum AD, parallelogrammo AF est majus (per 36. 1.).

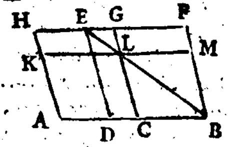
Qvod primo erat demonstrandum.

2. Sit rursus AB secta bifariam in puncto C, & applicatum sit AL deficiens figura CM; & rursus ad rectam lineam AB applicetur parallelogrammum AE deficiens figura DF, simili & similiter posita ei, qvæ à dimidia AB describitur, videlicet CM: Dico parallelogrammum AL, qvod ad dimidium est applicatum majus esse parallelogrammo AE.

Qvo-



Qvoniam enim simile est DF ipsi CM, circa eandem sunt diametrum (per 26. 6.): sit ipsorum diameter EB & describatur Figura 2.

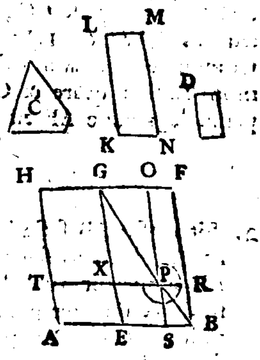


Et qvoniam LF æqvale est LH (per 36. 1.), etenim FG ipsi GH est æqvalis; erit LF ipso EK majus. Est autem LF æqvale DL (per 43. 1.): majus igitur est DL ipso EK. Commune apponatur KD. Ergo totum AL toto AE est majus. *Qvod secundo erat demonstr.*

PROP. XXVIII. THEOR.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æqvale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, qvæ similis sit alteri datæ: oportet autem datum rectilineum, cui æqvale applicandum est, non majus esse eo, qvod ad dimidiam applicatur similibus existentibus defectibus & ejus qvod ad dimidiam & ejus cui oportet simile deficere.

Sit data recta linea AB; datum autem rectilineum cui oportet æqvale ad datam rectam lineam AB applicare sit C, non majus existens eo, qvod ad dimidium applicatum est similibus existentibus defectibus; cui autem simile oportet deficere sit D: oportet ad datam rectam lineam AB dato rectilineo C æqvale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, qva similis sit ipsi D.



Constructio.

1. Secetur AB bifariam in E (per 19. 1.).
2. Ab ipsa EB describatur simile & similiter positum ipsi D, qvod sit EBFG (per 18. 6.) & compleatur AG Parallelogrammum.

Demonstratio.

Qvoniam AG vel æqvale est ipsi C, vel eo majus ob determinationem; & siqvidem AG sit æqvale C, factum jam erit, qvod proponebatur; etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo C æqvale parallelogrammum AG applicatum est deficiens figura parallelogramma EF, ipsi D simili.

Sin autem non est æqvale, erit HE majus qvam C, atqve est HE æqvale EF: ergo & EF qvam C est majus. Qvo autem EF superat C, ei excessui æqvale ipsi vero D simile & similiter positum idem constituatur KLMN (per 25. 6.). Sed D est simile EF, qvare & KM ipsi EF simile erit. Sit igitur recta linea qvidem LK homologa ipsi GE, LM vero ipsi GF.

Et qvoniam æqvale est EF ipsis C † KM erit EF ipso KM majus: major igitur est GE ipsa KL, & GF ipsa LM (per 1 Corol. 20. 6.). Ponatur GX æqvalis LK, & GO æqvalis LM (per 3. 1.), & compleatur XGOP parallelogrammum (per 31. 1): æqvale igitur & simile est XO ipsi KM (per 24. 6.). Sed KM simile est EF: ergo & XO ipsi EF est simile (per 21. 6.): circa eandem igitur diametrum est XO cum ipso EF (per 26. 6.). Sit ipsorum diameter GPB & figura describatur.

Itaqve qvoniam EF est æqvale ipsis C & KM, qvorum XO est æqvale KM, erit reliqvus gnomon æqvalis reliqvo C. Et qvoniam OR est æqvale XS (per 43. 1.), commune apponatur RS: totum igitur OB toti XB est æqvale. Sed XB est æqvale TE (per 36. 1.), qvoniam & latus AE æqvale lateri EB: qvare & TE ipsi OB æqvale est. Commune apponatur XS; ergo totum TS æqvale toti gnomoni XS † SF. At gnomon XS † SF ipsi C ostensus est æqvalis: & igitur TS ipsi C æqvale erit.

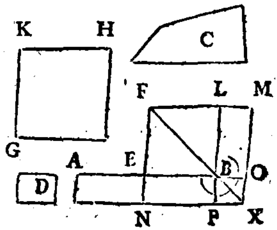
Ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C æqvale parallelogrammum TS applicatum est, deficiens figura parallelogramma RS ipsi D simili, qvoniam & RS simile est ipsi OX.

Qvod erat faciendum.

PROP. XXIX. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æqvale parallelogrammum applicare excedens figura parallelogramma, qvæ similis sit alteri datæ.

Sit data recta linea AB, datum vero rectilineum, cui oportet æqvale ad ipsam AB applicare, sit C; cui autem oportet simile excedere, sit D: itaqve oportet ad AB rectam lineam dato rectilineo C æqvale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma simili ipsi D.



Constructio.

1. Secetur AB bifariam in E (per 10. 1.);
2. A recta EB ipsi D simile similiterqve positum parallelogrammum describatur EL (per 18. 6.);
3. Utrisqve qvidem EL † C æqvale, ipsi vero D simile & similiter positum idem constituatur GH (per 25. 6.).

Demonstratio.

Qvoniam parallelogrammum EL simile est ipsi D, & parallelogrammum GH eidem etiam D est simile (per construct.), erunt EL, GH inter se qvoqve similia (per 21. 6.), ideoqve latus KH est homologum lateri FL, KG vero ipsi FE.

Porro parallelogrammum GH majus est ipso EL, ideoqve recta linea KH major qvam FL & KG major qvam FE.

Producantur FL, FE, & ipsi qvidem KH æqvalis fiat FLM, ipsi vero KG æqvalis FEN (per 3. 1.), & compleatur parallelogrammum: ergo MN æqvale & simile est ipsi GH. Sed GH est simile ipsi EL: & MN igitur ipsi EL simile erit (per 21. 6.); ac propterea circa eandem diametrum est EL cum ipso NM (per 26. 6.). Ducatur ipsorum diameter & figura describatur.

Ita-

Itaqve qvoniam GH ipsis EL † C est æqvale, sed & GH æqvale MN; erit & MN æqvale ipsis EL † C. Commune auferatur EL: reliqvus igitur gnomon est ipsi C æqvalis. Et qvoniam EA est æqvalis EB, æqvale erit & AN parallelogrammum parallelogrammo NB, hoc est ipsi LO (per 36. & 43. 1.). Commune apponatur EX: totum igitur AX æqvale est gnomoni. Sed gnomon est æqvalis C: ergo & AX ipsi C æqvale est.

Ad datam igitur rectam AB dato rectilineo C æqvale parallelogrammum applicatum est AX excedens figura parallelogramma PO ipsi D simili, qvoniam & EL simile est OP.

Qvod erat faciendum.

PROP. XXX. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam secundum extremam ac mediam rationem secare.

Sit data recta linea terminata AB: oportet ipsam AB secundum extremam ac mediam rationem secare. (*vid. Fig.* 1.).

FIG. 1.

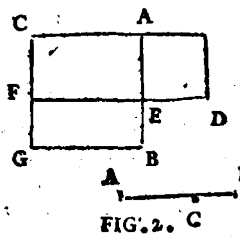


FIG. 2.

Constructio.

1. Describatur ex AB qvadratum BC (per 46. 1.);
2. Ad AC ipsi BC æqvale parallelogrammum applicetur CD, excedens figura AD ipsi BC simili (per 29. 6.).

Demonstratio.

Qvoniam qvadratum est BC; erit igitur & AD qvadratum. Et qvoniam BC est æqvale CD, commune auferatur CE: reliqvum igitur BF reliqvo AD est æqvale. Est autem & ipsi æqviangulum: ergo ipsorum BF, AD latera, qvæ circum æqvales angulos sunt reciproce proportionalia (per 14. 6.): ut igitur FE ad ED ita est AE ad EB. Est autem FE æqvalis AC, hoc est ipsi AB; & ED ipsi AE: qvare ut AB ad AE ita AE ad EB. Sed AB major est qvam AE; ergo AE qvam EB est major.

 Recta

Recta igitur AB secundum extremam ac mediam rationem secta est in E, & majus ipsius segmentum est AE.

Quod erat faciendum.

Aliter.

Constructio.

Secetur AB in C ita, ut rectangulum quod comprehenditur sub AB, BC æquale sit quadrato ex AC (per 11. 2.). vid. Fig. 2.

Demonstratio.

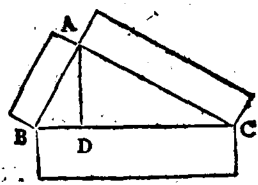
Quoniam igitur rectangulum, quod comprehenditur sub AB, BC, æquale est quadrato ex AC (per constr.); erit ut AB ad AC ita AC ad CB (per 17. 6.). Ergo AB secundum extremam & mediam rationem secta est (per 3. def. 6).

Quod erat faciendum.

PROP. XXXI. THEOR.

In rectangulis triangulis figura, quæ fit à latere rectum angulum subtendente æqualis est eis, quæ à lateribus rectum angulum comprehendentibus fiunt, similibus & similiter descriptis.

Sit triangulum rectangulum ABC: Dico figuram, quæ fit à BC, æqualem esse eis, quæ à BA, AC fiunt, similibus & similiter descriptis.



Demonstratio.

Ducatur perpendicularis AD.

Quoniam igitur in triangulo ABC ab angulo recto, qui est ad A, ad BC basin perpendicularis ducta est AD; erunt triangula ABD, ADC, quæ sunt ad perpendicularem similia toti & inter se (per 8. 6.). Et quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit ut CB ad BA ita AB ad BD. Atqui cum tres rectæ lineæ proportionales sint; ut prima ad tertiam ita erit figura, quæ fit à prima, ad similem & similiter descriptam à secunda

(per

(per 2. Coroll. 20. 6.), ut igitur CB ad BD ita figura, qvæ fit à CB ad similem & similiter descriptam à BA.

Eadem ratione & ut BC ad CD ita figura, qvæ fit à BC, ad eam qvæ fit à CA: qvare & ut BC ad ipsas BD, DC ita figura, qvæ fit à BC, ad eas, qvæ fiunt à BA, AC similes & similiter descriptas. Æqvalis autem est BC ipsis BD, DC: ergo figura qvæ fit à BC æqvalis est eis, qvæ à BA, AC fiunt similibus, similiterqve descriptis. *Qvod erat demonstrandum.*

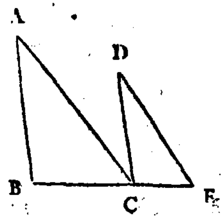
Aliter:

Qvoniam similes figuræ sunt in duplicata ratione laterum homologorum; figura qvæ fit à BC ad eam, qvæ fit à BA, duplicatam rationem habebit ejus, qvam habet BC ad BA (per 1. cor. 20. 6.); habet autem & qvadratum ex BC ad qvadratum ex BA duplicatam rationem ejus, qvam habet BC ad BA: ergo ut figura qvæ fit à BC ad eam qvæ fit à BA ita qvadratum ex BC ad qvadratum ex BA (per 11. 5.). Eadem ratione, & ut figura qvæ fit à BC ad eam qvæ fit à CA ita qvadratum ex CB ad qvadratum ex CA; & igitur ut figura qvæ fit à BC ad eas qvæ fiunt à BA, AC ita qvadratum ex BC ad qvadrata ex BA, AC. Qvadratum autem ex BC æqvale est qvadratis ex BA, AC: ergo & figura, qvæ fit à BC est æqvalis eis, qvæ à BA, AC fiunt, similibus & similiter descriptis. *Qvod erat demonstrandum.*

PROP. XXXII. THEOR.

Si duo triangula, qvæ duo latera duobus lateribus proportionalia habent, componantur secundum unum angulum ita ut homologa latera ipsorum sint parallela; reliqva triangulorum latera in directum sibi invicem erunt.

Sint duo triangula ABC, DCE, qvæ duo latera BA, AC, duobus lateribus CD, DE proportionalia habeant, ut qvidem BA ad AC ita CD ad DE; parallela autem sit AB ipsi CD & AC ipsi DE: Dico BC ipsi CE in directum esse.

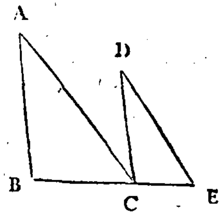


Demonstratio.

Qvoniam AB parallela est DC, & in ipsas incidit recta linea AC; erunt anguli alterni BAC, ACD

æqva-

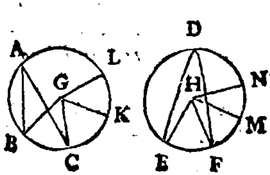
æqvales inter se. Eadem ratione & angulus CDE æqvalis est angulo ACD: qvare & BAC ipsi CDE est æqvalis. Et qvoniam ABC, DCE sunt duo triangula unum angulum qvi ad A uni angulo qvi ad D æqvalem habentia, circum æqvales autem angulos latera proportionalia, scilicet ut BA ad AC ita CD ad DE: erit triangulum ABG triangulo DCE æqviangulum (per 6. 6.): ergo ABC angulus est æqvalis angulo DCE. Ostensus autem est angulus ACD æqvalis angulo BAC: totus igitur ACE duobus ABC, BAC est æqvalis; Communis apponatur ACB: ergo anguli ACE, ACB angulis BAC, ACB, ABC æqvales sunt. Sed BAC, ACB, ABC anguli duobus rectis sunt æqvales (per 32. 1.): & igitur anguli ACE, ACB duobus rectis æqvales erunt, itaqve ad qvandam rectam lineam AC, & ad punctum in ipsa C duæ rectæ lineæ BC, CE, non ad easdem partes positæ, angulos, qvi sunt deinceps ACE, ACB duobus rectis æqvales faciunt: Ergo BC ipsi CE in directum erit (per 14. 1.). *Qvod secundo erat demonstr.*



PROP. XXXIII. THEOR.

In circulis æqvalibus anguli eandem habent rationem, qvam circumferentiæ qvibus insistunt, sive ad centra sive ad circumferentias insistant: adhuc etiam & sectores, qvippe qvi ad centra sunt constituti.

Sint æqvales circuli ABC, DEF & ad centra qvidem ipsorum G, H sint anguli BGC, EHF, ad circumferentias vero anguli BAC, EDF: Dico ut circumferentia BC ad EF circumferentiam ita esse BGC angulum ad angulum EHF, & angulum BAC ad angulum EDF; & adhuc sectorem GBC ad HEF sectorem.



Dé-

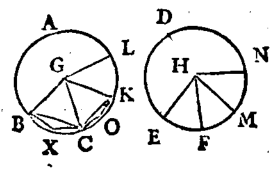
Demonstratio.

1. Ponantur circumferentiæ qvidem BC æqvales qvotcunqve deinceps CK, KL; circumferentiæ vero EF rursus æqvales qvotcunqve FM, MN, & jungantur GK, GL, HM, HN.

Qvoniam igitur circumferentiæ BC, CK, KL inter se sunt æqvales, & anguli BGC, CGK, KGL inter se æqvales erunt (per 27. 1.): qvam multiplex igitur est circumferentia BL circumferentiæ BC tam multiplex est BGL angulus anguli BGC. eodem modo demonstrari potest EN & EHN ipsius EF & EHF esse æqve multiplicia. Et si æqvalis est BL circumferentia circum ferentiæ EN, & angulus BGL angulo EHN erit æqvalis (per 27. 3.); & si circumferentia BL major est circumferentia EN major erit &BGL angulus angulo EHN; & si minor minor: qvatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis BC, EF & duobus angulis BGC, EHF, sumpta sunt circumferentiæ qvidem BC, & anguli BGC æqvè multiplicia, videlicet circumferentia BL & angulus BGL; circumferentiæ vero EF & EHF anguli æqve multiplicia, nempe circumferentia EN & angulus EHN; atqve ostensum est si circumferentia BL superat circumferentiam EN, & BGL angulum superare, angulum EHN; & si æqvalis æqvalem; & si minor minorem esse; igitur ut circumferentia BC ad circumferentiam EF, ita angulus BGC ad angulum EHF (per 5. def. 5.). Sed ut BGC angulus ad angulum EHF, ita angulus BAC ad EDF angulum (per 15. 5.); uterqve enim utriusqve est duplus (per 20. 3.): & igitur ut BC circumferentia ad circumferentiam EF ita & angulus BGC ad angulum EHF, & angulus BAC ad EDF angulum. *Qvod primo erat demonstrandum.*

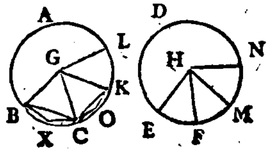
2. *Dico insuper & ut BC circumferentia ad circumferentiam EF ita esse sectorem GBC ad HEF sectorem.*

Jungantur enim BC, CK, & sumptis in circumferentiis, BC, CK punctis X, O, jungantur & BX, XC, CO, OK.



Itaqve qvoniam duæ BG, GC duabus CG, GK æqvales sunt & angulos æqvales comprehendunt; erit & basis BC basi CK æqvalis: æqvale igitur est & GBC triangulum triangulo GCK (per 4.1.). Et qvoniam circumferentia BC circumferentiæ CK est æqvalis, & reliqva circumferentia qvæ complet

plet totum circulum ABC æqvalis est reliqvæ, qvæ eundem circulum complet (per 3. ax.). Qvare & angulus BXC angulo COK est æqvalis (per 27. 3.): Simile igitur est BXC segmentum segmento COK: & sunt super æqvales rectas lineas BC, CK; Qvæ autem super æqvales rectas



lineas sunt similia circulorum segmenta & inter se æqvalia sunt (per 24. 3): ergo segmentum BXC est æqvale segmento COK. Est autem & BGC triangulum triangulo CGK æqvale: & totus igitur sector GBC toti sectori GCK æqvalis erit (per 3. ax.). Eadem ratione & GKL sector utrivis ipsorum GKC, GCB est æqvalis: tres igitur sectores GBC, GCK, GKL sunt æqvales inter se. Similiter & sectores HEF, HFM, HMN inter se sunt æqvales: qvam multiplex igitur est BL circumferentiæ BC, tam multiplex est & GBL sector sectoris GBC. Eadem ratione & qvam multiplex est circumferentia EN circumferentiæ EF, tam multiplex est & HEN sector sectoris HEF; & (ex modo ostensis) si circumferentia BL circumferentiæ EN est æqvalis, & sector GBL æqvalis est sectori HEN; & si circumferentia BL superat circumferentiam EN superat & GBL sector sectorem HEN; & si minor, minor. Qvatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus qvidem circumferentiis BC, EF, duobus vero sectoribus GBC, HEF; sumpta sunt circumferentiæ qvidem BC & sectoris GBC æqve multiplicia, videlicet circumferentia BL & GBL sector, circumferentiæ vero EF & sectoris GEF æqve multiplicia, nempe circumferentia EN & HEN sector. Atqve ostensum est si BL circumferentia superat circumferentiamEN, & sectoremGBL superare sectorem HEN; & si æqvalis æqvalem: & si minor minorem: est igitur ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita sector GBC ad HEF sectorem. *Qvod secundo erat demonstrandum.*

Corollarium.

Perspicuum etiam est & ut sector ad sectorem ita esse angulum ad angulum (per 11. 5.).