Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

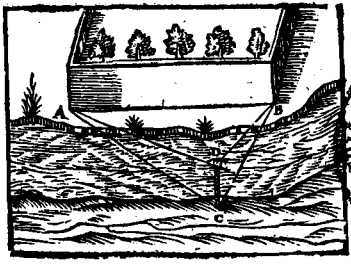
342400

LES QUINZE LIVRES DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

Traduits en François par D. HENRION *Professeur és Mathematiques, reveus & corrigez: avec des Commentaires beaucoup plus amples & faciles, & des figures en plus grand nombre que dans toutes les impressions precedentes.*

Plus, le Livre des DONNEZ du même Euclide, aussi traduit en François par ledit Henrion.

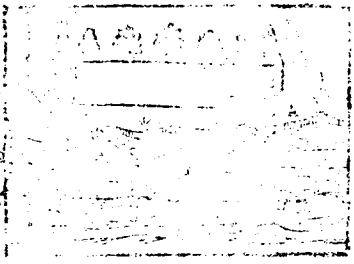
TOME I.



LYON
BIBLIOTHEQUE DE LA VILLE
NOAILLES

A ROUEN,
Chez JEAN LUCAS, ruë aux Juifs, à côté de la petite porte de l'Hôtel de Ville.

M. DC. LXXVI.



AU LECTEUR.

AMY Lecteur, voicy le dernier des Ouvrages du ſieur Henrion Profeſſeur és Mathematiques, contenant les quinze Livres des Elements d'Euclide, traduits en François, avec des Commentaires beaucoup plus amples & faciles, & des figures mieux taillées qu'en toutes les traductions precedentes, auſquels il a ajoûté le Livre des Donnez du même Euclide, auſſi traduit en François, ce qui n'avoit point encores été fait juſques icy, quoy que l'uſage de ce Livre ſoit fort commun par toutes les Mathematiques, & particulierement en l'Analyſe ſi aujourd'huy eſtimée & ſi recherchée, & qui a remis la Geometrie en ſon luſtre autant qu'elle y fut jamais, avec

eſperance d'une perfection beaucoup plus grande. Cet Ouvrage étoit imprimé dés le vivant de l'Autheur : & s'il ne l'a publié, c'eſt que ſon intention étoit d'y ajoûter le reſte de ce qui ſe trouve des œuvres d'Euclide, ſçavoir l'Optique, & la Çatoptrique, les Phenomenes, la Muſique, & un fragment du leger & du peſant, toutes leſquelles parties il avoit déja traduites, comme en font foy les Manuſcrits qu'il a laiſſés, & qui ſont entre les mains de ſa veuve : ainſi il diviſoit tous les Ouvrages d'Euclide en deux Tomes, dont le premier étoit celui-cy, & le dernier devoit contenir ce que nous venons de dire.

PREFACE.

LA Geometrie ſe diviſe en doctrine des plans, qui eſt appellée du mot general Geometrie & doctrine des ſolides, que les Mathematiciens appellent par un nom propre & particulier Stereometrie. Car la Geometrie en general ſe propoſe, de conſiderer les plans & les ſolides, & de les comparer entr'eux ou de les diviſer. Euclide nous voulant laiſſer en ſes Elemens une parfaite connoiſſance de la Geometrie, traitte des plans aux ſix premiers Livres, & aux cinq derniers des ſolides, recherchant leurs proprietez. Et d'autant que toutes les choſes Geometriques, & principalement ces cinq corps reguliers, qui ont de coûtume d'être appellez corps Platoniques, ne

pouvoient être traittez parfaitement ſans la connoiſſance des lignes commenſurables & incommenſurables, Euclide a mis ſon dixiéme Livre devant ſa Stereométrie auquel il traitte de ces ſortes de lignes : Et ſçachant que ce traitté des lignes commenſurables & incommenſurables ne ſe peut faire ſans la connoiſſance des nombres, il traitte des proprietez des nombres aux trois Livres qui precedent le dixiéme. C'eſt pourquoy tout ce volume des Elemens Geometriques compris en quinze Livres, (dont les deux derniers ſont attribuez à Hypſicle Alexandrin) ſe pourra à bon droit diviſer en quatre parties. La premiere partie contenuë en ſix premiers Livres, traitte des plans : La ſeconde comprenant les trois Livres ſuivans, recherche les proprietez des nombres: La troiſiéme qui conſiſte au dixiéme Livre ſeul, traitte des lignes

commenſurables & incommenſurables: Et enfin la quatriéme partie contenuë aux cinq autres Livres, comprend la ſcience des corps ou ſolides. La premiere partie ſe ſubdiviſe en trois : Car aux quatres premiers Livres, il eſt traitté des plans abſolument, & de leur égalité & inégalité; mais au cinquiéme Livre il eſt traitté en general des proportions des grandeurs : & au ſixiéme, ſont examinées les proportions des plans.

Ce que c'eſt que Probleme, Theoreme, Propoſition, Lemme, Corollaire & Scholie.

TOute démonſtration de Mathematique, eſt ou Probleme ou Theoreme. Les Mathematiciens appellent *Probleme*, une démonſtration qui enſeigne à faire ou conſtruire quelque choſe : Et *Theoreme*, la démonſtration laquelle recherche ſeulement quelque proprieté d'une

ou plusieurs quantitez ensemble. Bref, les Problemes enseignent à trouver & construire quelque chose, & les Theoremes démontrent les affections & proprietez des choses déja faites & construites. Et tant le Probleme que le Theoreme, sont appellez *Proposition*, d'autant que l'un & l'autre nous propose quelque chose. On appelle *Lemme*, quelque Probleme ou Theoreme, qui étant necessaire à une démonstration, se prend & prouve auparavant que de venir à cette démonstration principale, afin de la faire plus évidente & briéve. On appelle *Corollaire*, une consequence que l'on tire de ce qui a été démontré en quelque proposition. Et enfin ce qu'on nomme *Scholie*, est une annotation qu'on fait seulement comme en passant sur quelque proposition.

ELEMENT PREMIER.

BIBLIOTHEQUE DE LA VILLE LYON 1935

DEFINITIONS.

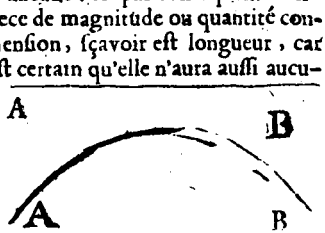
1. Le point, eſt ce qui n'a aucune partie.

LES Phyſiciens diſent que le point eſt le moindre objet de la veuë ; & iceluy peut être décrit avec ancre, ou autre choſe: Mais les Mathematiciens rejettans cette definition, diſent que le point eſt un objet de l'intellect ſi ſubtil, qu'il ne peut être diviſé en aucunes parties : Et iceluy ne ſe peut écrire, mais ſeulement entendre & imaginer : Bien eſt vray, que pour le repreſenter à nos ſens exterieurs, nous nous ſervons du point Phyſique. Le point n'a donc aucunes des dimenſions Geometriques, c'eſt à dire qu'il n'a longueur, largeur, ny époiſſeur, mais bien eſt-il principe d'icelles.

2. La ligne, eſt une longueur ſans largeur.

Apres le point, Euclide vient à la ligne, qui n'eſt autre choſe que le fiux ou coulement d'iceluy point, d'un lieu en un autre: car par ainſi l'intervale compris entre ces deux lieux-là, ſera

une longueur ſans largeur, puis que le point du coulement duquel elle eſt produite, n'en a aucune: & par conſequent la ligne (qui eſt la premiere eſpece de magnitude ou quantité continuë) a ſeulement une dimenſion, ſçavoir eſt longueur, car n'ayant aucune largeur, il eſt certain qu'elle n'aura auſſi aucune époiſſeur ou profondeur. Et pour tant mieux entendre cecy, qu'on imagine le point A étre mû ou coulé depuis A iuſques en B, & avoir laiſſé par ſon flux ou coulement la trace & veſtige A B: or cette trace AB ſera appellée ligne; car l'intervale compris entre les deux points A & B, eſt vrayement une longueur ſans largeur, & époiſſeur, puis que le point A, par le coulement duquel elle eſt produite, eſt privé de toute dimenſion.

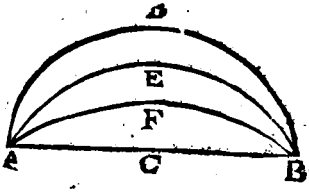


3. Les extrémitez de la ligne, ſont points.

Cecy eſt intelligible, puis que toutes lignes terminées commencent à un point, & achevent auſſi à un point, comme les lignes precedentes A B, qui ont pour leurs extrémitez les points A & B: car Euclide n'entend parler icy ny des lignes infinies, ny des circulaires, ny de toutes autres ſortes de lignes, auſquelles on ne peut aſſigner aucun terme ny extrémité.

4. La ligne droite, eſt celle qui eſt également compriſe & étenduë entre ſes points.

Les Mathematiciens ont de trois ſortes de lignes, c'eſt à ſçavoir la ligne droite, la ligne circulaire, qu'ils appellent auſſi ligne courbe, & la ligne mixte: Euclide définit icy la droite, laquelle il dit étre celle-là qui eſt également étenduë entre ſes points: ainſi la ligne A C B eſt dite ligne droite, pource que tous les points entre-moyens d'icelle ligne, com-



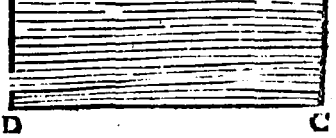
me C, ſont également poſez entre les extrémes A & B, l'un n'étant plus élevé ou abaiſſé que l'autre : ce qui n'advient aux trois autres lignes A D B, A E B, A F B, car il eſt manifeſte que les points entremoyens D, E, F, ſont bien plus élevez que les extrémes A & B. Quelques autres Autheurs ont diverſement défini la ligne droite : car Campanus dit, que c'eſt le plus court chemin d'un point iuſqu'à un autre : &, ſelon Archimede, la ligne droite eſt la plus courte de toutes celles qui ont mémes extrémitez. Mais Platon dit, que c'eſt celle-là dont les points du milieu ombragent les extrémes : comme par exemple, ſi en la ligne A C B, le point extréme A avoit la vertu d'illuminer, & le point du milieu C la force de cacher : iceluy point C empécheroit que le point extréme B fût illuminé de l'autre extréme A : Et auſſi l'œil étant au point extréme A, il ne pourroit voir l'autre extréme B, à cauſe du point C, poſé entre iceux extrémes : ce qui n'arriveroit pas aux lignes non droites, comme le démontrent les lignes ADB, AEB, & AFB.

Or tout ainſi que les Mathematiciens conçoivent la ligne droite décrite par le flux & mouvement imaginaire du point, ainſi auſſi entendent-ils la qualité de la ligne décrite par la qualité d'iceluy mouvement : car ſi on entend que le point coule droit par le plus court chemin, ne ſe détournant çà ne là, la ligne ainſi décrite ſera appellée ligne droite : mais ſi le point fluant vacile en ſon mouvement, & s'écarte çà & là la ligne décrite ſera appellée mixte : & finalement ſi le point fluant ne vacile en ſon mouvement, mais eſt porté en rond d'un certain mouvement uniforme & régulier, gardant toûjours une égale diſtance à quelque certain point à l'entour duquel il eſt porté ; cette ligne décrite ſera appellée circulaire. Or Euclide ne traite icy que de deux ſimples lignes, ſçavoir eſt de la droite & de la circulaire. Il a défini celle-là cy-deſſus, & il définira cette-cy à la 15. def. Mais quant à la mixte, il en obmet la définition, pource qu'elle n'a aucun uſage en ſes élemens Geometriques : il y en a de pluſieurs ſortes, & d'icelles traitent amplement Apollonius, Perzeus, Nicomedes, Archimedes, & autres Autheurs.

5. Superficie, eſt ce qui a longueur & largeur tant ſeulement.

Apres la ligne, qui eſt la premiere eſpece de quantité conti-

nuë, & qui a une seule dimension, Euclide définit la superficie, qui est la seconde espece de quantité, & a deux dimensions: car on n'y trouve pas la seule longitude comme en la ligne, mais aussi latitude, sans toutefois aucune profondité: comme la quantité A B C D compriſe entre les lignes AB, BC, CD, DA, & considerée selon la longitude AB, ou DC, & selon la latitude AD, ou BC, sans aucune épaisseur ou profondité, est appellée superficie. Quelques-uns décrivans la superficie disent, que c'est l'extrémité du corps. Et comme dit Proclus, la superficie nous est fort naïfvemẽt



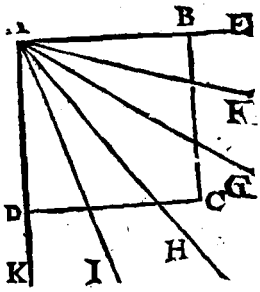
representée par les ombres du corps: car veu qu'elles ne peuvent penetrer au dedans de la terre, elles seront seulement longues & larges. Davantage, comme les Mathematiciens entendent que la ligne est produite par le flux ou coulement du point, ainsi disent-ils, que la ligne se mouvant en travers, produit la superficie: comme par exemple, si on entend que la ligne A B se meuve vers la ligne D C, elle fera la superficie A B C D, laquelle n'aura aucune profondeur, puis que c'est la trace & vestige du mouvement de la ligne A B qui n'a aucune profondité.

6. Les extrémitez de la superficie, sont lignes.

Il faut icy entendre des superficies bornées, & terminées par lignes droites, comme la superficie A B C D cy-dessus, de laquelle les extrémitez sont les lignes AB, BC, CD, & DA: car il y a bien plusieurs superficies encloses d'une seule ligne, comme de la circulaire, & autres, dont Euclide ne fait mention en ces Elemens-cy: mais il n'en veut icy parler, non plus que de la superficie spherique, qui circuit & environne un corps entieremẽt rond & spherique. Comme donc la ligne terminée cõmence à un point, & finit à un autre point, ainsi aussi la superficie terminée commence par une ligne, & finit par une ligne, tant selon sa longueur, que selon sa largeur.

7. Superficie plane, eſt celle qui eſt également compriſe entre ſes lignes.

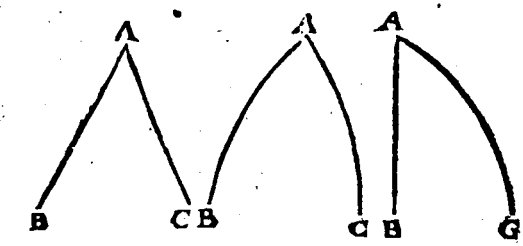
Cette définition de la ſuperficie plane a quelque ſimilitude & rapport à celle de la ligne droite: car comme ſa ligne qui eſt également étenduë entre ſes points, eſt appellée ligne droite; ainſi auſſi la ſuperficie qui eſt également étenduë entre ſes lignes, tellement que toutes les parties du milieu ne ſont plus élevées ny abaiſſées que les extrémes, eſt appellée ſuperficie plane. Et derechef, comme la ligne droite eſt la plus courte d'entre ſes extrémitez, ainſi auſſi la ſuperficie plane eſt la plus courte, ou briéve de toutes celles qui ont mémes extrémitez. C'eſt encore pour la méme raiſon, que quelques autres décrivans la ſuperficie plane, diſent que c'eſt celle-là de laquelle toutes les parties du milieu ombragent ſes extrémes: ou bien celle-là à toutes les parties de laquelle une ligne droite peut étre accommodée. Comme par exemple, la ſuperficie A B C D ſera dite plane, ſi la ligne droite A E ſe mouvant à l'entour du point immobile A, en ſorte qu'elle vienne à étre la méme que A F, puis la méme que A G, & puis encore la méme que A H, en apres la méme que A I, & finalement la méme que A K; elle ne rencontre rien en la ſuperficie de plus élevé ou abaiſſé l'un que l'autre, ains que tous les points de ladite ſuperficie ſoient touchez d'icelle ligne mouvante A E, & en quelque ſorte raclez par icelle. Mais toutes ſuperficies eſquelles il y a des endroits les uns plus élevez que les autres, tellement qu'on n'y peut pas accommoder une ligne droite par tous les lieux & endroits d'icelles, telle qu'eſt la ſuperficie interieure d'une voûte ou arcade, ou bien l'exterieure d'un globe, ou d'une colomne ronde, & auſſi d'un cone, &c. ſont appellées ſuperficies courbes: & icelles ſont de pluſieurs ſortes, c'eſt à ſçavoir convexe, comme la ſuperficie interieure d'une voûte ou arcade: mais la con-



templation de toutes ces choſes appartient à la Stereometrie, dont traite Euclide és cinq derniers Livres ; c'eſt pourquoy il explique ſeulement icy la ſuperficie plane, de laquelle il traite és ſix premiers Livres. Et cependant eſt à noter que cette ſuperficie eſt ſouventesfois appellée plan par les Mathematiciens: tellement que quand ils parlent de plan, il faut tousjours entendre une ſuperficie plane.

8. Angle plan, eſt l'inclination de deux lignes, l'une à l'autre ſe touchant en un plan non directement.

Euclide enſeigne icy que quand deux lignes conſtituées en quelque ſuperficie plane concurrent en un point d'icelle ſuperficie, & ne ſe rencontrent directement, alors l'inclination d'icelles deux lignes s'appelle angle plan. Comme par exemple, pource que les deux lignes AB & AC, concurrent en A, & ne ſe rencontrent pas directement ; le concours ou inclination qu'icelles deux lignes font au point A, s'appelle angle : Et d'autant qu'iceluy angle eſt conſtitué au même plan qu'icelles deux lignes AB & AC, on l'appelle angle plan, à la differenee d'autres angles, dont les uns ſont nommez angles ſolides, deſquels traite cy apres Euclide en la Stereometrie ; & les autres ſont appellez angles ſpheriques, deſquels traitent amplement Menelaus & Theodoſe en leurs élemens ſpheriques, comme nous avons auſſi fait en nos triangles ſpheriques.

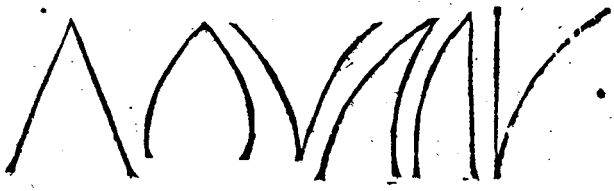


Or quant à l'angle plan cy-deſſus définy eſt à remarquer, premierement que la grandeur ou quantité dudit angle plan

consiſte en la ſeule inclination des lignes qui le conſtituënt, & non pas en la longueur d'icelles lignes ; car le prolongement deſdites lignes n'augmente point leur inclination, ny par conſequent la grandeur de l'angle. En apres que quelques Geometres ont eſtimé qu'afin que deux lignes faſſent angle, il étoit neceſſaire qu'étans continuées du point de leur rencontre, elles s'entrecoupaſſent en iceluy, dont s'enſuivroit que deux cercles s'entretouchans en un plan, ou qu'une ligne droite touchant un cercle ne feroit angle, ce qui eſt contre l'intention d'Euclide, ainſi qu'il appert, tant par cette définition de l'angle plan, que par la 16. p. 3. & comme l'a auſſi bien démontré Clavius ſur la meſme propoſition, où il refute Pelletier, qui diſoit que la ligne droite touchant le cercle, ne faiſoit angle ; c'eſt pourquoy ceux qui tiennent encore cette opinion, ſe mocquent bien d'Euclide, de Clavius, & autres Geometres, qui diſent qu'une ligne droite touchant un cercle, fait un angle contigent, ou d'attouchement.

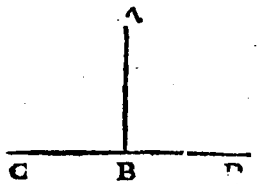
9. Que ſi les lignes comprenant l'angle ſont droites, l'angle ſera appellé rectiligne.

Tout angle plan eſt fait, ou de deux lignes droites, & alors il ſe nomme angle rectiligne, comme dit icy Euclide; ou de deux lignes courbes, & alors on l'appelle angle curviligne ; ou bien d'une ligne droite & d'une courbe, & alors on le nomme angle mixte. Or les angles curvilignes peuvent varier en trois manieres, & les mixtes en deux, à cauſe de la diverſe inclination ou habitude des lignes courbes, ainſi qu'il appert manifeſtement aux angles plans de la figure cy appoſée.



10. Quand une ligne droite tombant ſur une autre ligne droite, fait les angles de part & d'autre égaux entr'eux, les angles ſont droits, & la ligne tombante, eſt perpendiculaire à celle-là, ſur laquelle elle tombe.

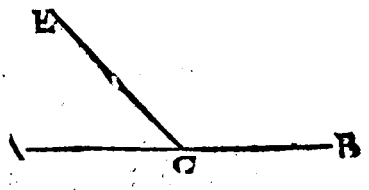
Il y a de trois ſortes d'angles rectilignes, ſçavoir eſt droit, obtus & aigu; le premier deſquels Euclide definit icy avec la ligne perpendiculaire, & quant aux deux autres, il les definit aux deux definitions prochainement ſuivantes. Il dit donc icy que ſi une ligne droite tombe ſur une autre ligne droite, en ſorte qu'elle faſſe les angles de part & d'autre égaux, ce qui advient lors que ladite ligne ne s'incline ou panche plus d'un côté que de l'autre; chacun d'iceux angles eſt appellé angle droit, & la ligne ainſi tombante, eſt dite perpendiculaire à celle-là ſur laquelle elle tombe. Comme par exemple, ſi la ligne droite A B tombe ſur la ligne droite C D, en ſorte qu'elle ne s'incline pas plus d'un côté que de l'autre, les deux angles, qu'elle fait au point B ſeront égaux entr'eux, & chacun d'iceux ſera nommé angle droit; mais la ligne A B ſera dite perpendiculaire à C D, ſur laquelle elle tombe. Par même raiſon, la ligne droite C B ſera auſſi dite perpendiculaire à la ligne droite A B, encore qu'icelle C B faſſe un ſeul angle droit avec A B; Et ce d'autant que ſi ladite ligne A B étoit prolongée directement de la part de B, elle y feroit un autre angle égal au premier. Par quoy en Geometrie, pour conclure que quelque angle eſt droit, ou que la ligne qui le conſtituë eſt perpendiculaire à une autre, il faut ſeulement prouver que ledit angle eſt égal à celuy de l'autre côté. Semblablement, ſi quelque angle eſt dit droit, ou que l'une des lignes qui le conſtituë ſoit perpendiculaire à l'autre, on pourra auſſi conclure que ledit angle eſt égal à celuy de l'autre côté; car ſi ces angles-là n'étoient égaux, ils ne ſeroient nommez angles droits, ainſi qu'il appert tant par la ſuſdite definition, que par les deux ſuivantes.



11. Angle obtus, eſt celuy qui eſt plus grand qu'un droit.

12. Mais l'aigu, eſt celuy qui eſt plus petit qu'un droit.

Quand une ligne droite tombant ſur une autre s'incline ou panche plus d'un côté que de l'autre, elle fait conſequemment deux angles inégaux, dont l'un eſt plus grand que l'angle droit, & ſe nomme angle obtus, mais l'autre eſt plus petit, & s'appelle angle aigu. Ainſi pource qu'en cette figure, la ligne droite E C tombant ſur la ligne droite A B, s'incline & panche plus du côté de A C que de la part de B C, les deux angles du point C ſeront inégaux, & celuy vers B, qui eſt plus grand & ouvert que le droit ſera dit angle obtus; mais celuy de la part de A, qui eſt plus petit & fermé que l'angle droit, ſera nommé angle aigu.



Et d'autant que ſouventefois en un plan concurrent plus de deux lignes à un même point, & par conſequent y conſtituënt pluſieurs angles, les Geometres ont accoûtumé (pour éviter confuſion) d'exprimer l'angle dont ils parlent par trois lettres, deſquelles celle du milieu dénote le point auquel les lignes conſtituënt l'angle, & celles des extrémes ſignifient les commencemens d'icelles lignes qui font iceluy angle: tellement qu'en la figure cy-deſſus, l'angle obtus que nous avons dit être celuy de la part de B, ſera exprimé & entendu par ces trois lettres E C B, ou B C E, à cauſe qu'il eſt conſtitué au point C, & contenu par les deux lignes droites E C, & B C, qui commençant en E & B, ſe vont rencontrer au ſuſdit point C. Mais l'angle aigu que nous avons dit être de la part de A, s'exprimera par ces trois lettres E C A, ou A C E, parce qu'il eſt conſtitué au point C, & fait par les deux lignes droites E C & A C, qui commencent en E & A, & ſe vont rencontrer au ſuſdit point C. Ce

qu'on doit bien noter, afin de connoitre & discerner facilement les angles, dont sera fait mention és demonstrations suivantes.

13. Terme, est l'extrémité de quelque chose.

Ainsi les points sont termes ou extrémitez des lignes, les lignes des superficies, & les superficies des corps.

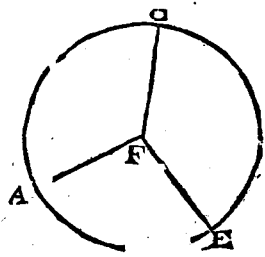
14. Figure, est ce qui est compris & environné d'un, ou de plusieurs termes.

Toute quantité ayant termes, n'est pas dite figure: mais seulement celles que les termes environnent: ainsi la ligne terminée par deux points, n'est pas dite figure: mais toutes superficies, & solides, finis & limitez, sont nommez figures, pource qu'ils sont environnez d'un seul, ou de plusieurs termes: d'un seul, comme le Cercle, l'Ellipse, & la Sphere: de plusieurs, comme le triangle, le quarré, le cube, la pyramide, &c.

15. Cercle, est une figure plane, contenuë par une seule ligne qu'on appelle circonference, vers laquelle toutes les lignes droites menées d'un seul point de ceux qui sont en icelle figure, sont égales entr'elles.

16. Et ce point-là est appellé centre du cercle.

De toutes les figures planes, la plus parfaite est le cercle, lequel, selon que le definit icy Euclide, est une figure plane contenuë & environnée d'une seule ligne, à laquelle toutes celles menées d'un seul point de ceux qui sont dedans la figure, sont égales entr'elles: & cette ligne là s'appelle periphere, ou circonference du cercle, & le susdit point, centre du cercle: Comme par exemple, si une superficie ou espace est environnée d'une seule ligne ACE



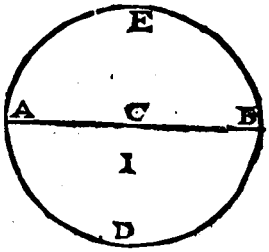
& que de quelque point d'audedans d'icelle, comme de F, toutes les lignes droites menées au terme ou circuit ACE, comme F A, F C, & F E, ſont égales entr'elles : telle figure plane ſera appellée cercle, & le terme ou ligne A C E, qui circuit & environne icelle figure, s'appelle periphere, ou circonference du cercle : mais ledit point F, eſt nommé centre du cercle.

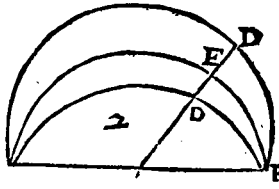
Quelques Geometres definiſſent autrement le cercle, & diſent, que c'eſt une figure plane, décrite par une ligne droite finie, laquelle ayant un des points extrémes fixe, eſt meuë à l'entour d'iceluy juſques à ce qu'elle retourne au même lieu où elle a commencé à mouvoir : comme ſi la ligne droite A F ayant le point F fixe, eſt entenduë ſe mouvoir à l'entour d'iceluy point F, tirant de A vers C, E, juſques à ce qu'elle revienne au même lieu F A, où elle a commencé ſon mouvement ; elle décrira par iceluy mouvement le cercle ou eſpace A C E, duquel la circonference eſt décrite & tracée par le point mobile A ; & le point fixe F, eſt le centre d'iceluy cercle, duquel centre toutes les lignes droites menées à la ſuſdite circonference A C E, ſont égales entr'elles, puis qu'elles proviennent toutes d'une ſeule & même meſure, c'eſt à ſçavoir de la ligne F A.

17. Diametre du cercle, eſt une ligne droite menée par le centre du cercle, & finiſſant de part & d'autre à la circonference d'iceluy cercle, le diviſe en deux également.

Si dans un cercle on mene une ligne droite par le centre, qui aille de part & d'autre juſques à la circonference ; icelle ligne s'appellera diametre du cercle. Comme en cette premiere figure, la ligne droite A B, qui eſt tirée par le centre C, & va de part & d'autre juſques à la circonference du cercle, s'appelle diametre du cercle : Et iceluy, comme adjoûte Euclide, coupe le cercle en deux parties égales, tellement que la partie AEB eſt égale à la partie ADB. Ce qui eſt aſſez manifeſte, puiſque ledit diametre A B paſſe par le milieu du cercle, c'eſt à ſçavoir par le centre C : car s'il ne diviſoit le cercle en deux parties égales, les lignes droites tirées du centre à la circonference, ne ſeroient pas égales, contre la definition du cercle : Neanmoins pluſieurs Interpretes d'Euclide rapportent en cét endroit la de-

monſtration que Proclus dit, en avoir été faite par Thales Mileſien, qui eſt telle : Imaginons nous que la partie de cercle A B D ſoit ſuperpoſée & accommodée à l'autre partie du cercle A E B, en ſorte que le diametre A B ſoit commun à l'une & à l'autre partie. Or la circonference A D B ſe rencontrera totalement avec la circonference A E B, ou bien elle tombera au deſſus d'icelle, ou au deſſous : Si elles ſe rencontrent & conviennent l'une à l'autre, il eſt évident que ces deux parties là faites par le diametre A B, ſont ſont égales entr'elles, puiſque l'une n'excede l'autre. Mais ſi on dit que la circonference A D B ne ſe rencontre pas avec la circonference A E B, ains qu'elle tombe au deſſus ou au deſſous d'icelle, comme en la 2. figure, ſoit tirée du centre C une ligne droite, laquelle coupe la circonference A D B en D, & la circonference A E B en E ; les deux lignes droites C D & C E, qui ſont tirées du centre à la circonference d'un méme cercle, ſeront égales entr'elles, par la definition du cercle : Ce qui eſt abſurde, car l'une n'eſt que partie de l'autre. Donc l'une de ces circonferences-là ne tombera pas au deſſus ny au deſſous de l'autre ; mais ſe rencontreront & conviendront totalement l'une avec l'autre, & par conſequent ſeront égales : ce qu'il falloit demontrer.

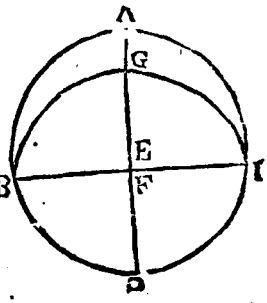




De cette demonſtration il appert que le diametre ne coupe pas ſeulement la circonference en deux également, mais auſſi toute l'aire & ſuperficie du cercle : Car puiſque les demies conferences conviennent & s'accordent entr'elles, comme il a été demonſtré : les ſuperficies contenuës & encloſes entre le diametre & chacune d'icelles demy circonferences conviendront auſſi entr'elles, puiſque l'une n'excede l'autre ; & par conſequent elles ſeront égales entr'elles.

18. Demy cercle, eſt une figure compriſe du diametre, & de moitié de la circonference.
19. Portion ou ſegment de cercle, eſt une figure compriſe d'une ligne droite, & de partie de la circonference.

Au cercle precedent la figure AEB contenuë ſous le diametre AB, & la moitié de la circonference AEB, eſt dite demy cercle; car il a été démontré cy-deſſus, qu'icelle figure eſt moitié du cercle AEBD, & ce à cauſe que le diametre, ou ligne droite AB, qui le diviſe en deux parties, paſſe par le centre C: Mais quant une ligne droite, qui ne paſſe pas par le centre du cercle, le diviſe en deux parties: chacune d'icelles parties cõtenuë ſous ladite ligne droite, & une partie de la circõference, eſt nommée ſegment ou portion de cercle; & ces deux parties ſont inégales, car celle où eſt le centre eſt plus grande que l'autre. Comme par exemple, au cercle A B C D, duquel le centre eſt E, ſoit une ligne droite B F D, qui coupe ledit cercle en deux parties, ſans paſſer par ledit centre E; la partie B A D, compoſée ſous la ligne droite B D, & la partie de circonference BAD, s'appelle ſegment ou portion de cercle, comme auſſi BCD, qui eſt contenuë ſous la méme ligne droite B D, & la circonference B C D. Or il eſt aſſez évident que la portion B A D, en laquelle eſt le centre E, eſt plus grande que l'autre portion BCD, attendu que ſi de B par le centre E on menoit un diametre, il couperoit le cercle en deux moitiez, chacune deſquelles ſeroit plus grande que la portion B C D, & moindre que l'autre portion BAD: Neanmoins Clavius & quelques autres Interpretes d'Euclide le demontrent ainſi.



Soit conçeu ou imaginé que par le centre E, ſoit mené le diametre AC perpendiculaire à BD: donc ſi les ſuſdites portions BAD, & BCD, ſont dites égales,

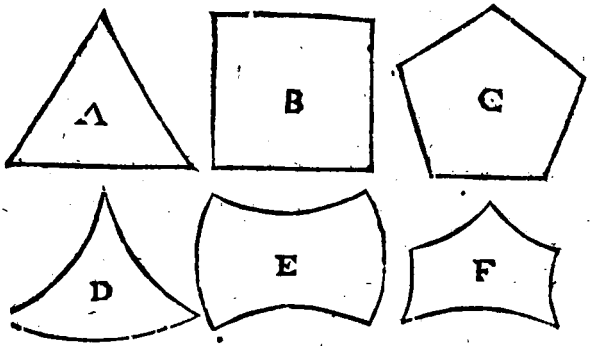
& que la portion BCD, ſoit entenduë ſe mouvoir à l'entour de la ligne droite B D, en ſorte qu'elle tombe ſur l'autre portion B A D ; cette portion là conviendra avec cette-cy, & la ligne droite CF à la ligne droite AF, à cauſe que par la 10. defin. les angles du point F ſont droits & égaux : Parquoy la ligne droite FC, qui eſt maintenant la même que F A, ſera plus grande que E A, qui n'eſt que partie d'icelle F A. Mais d'autant que E C, eſt égale à E A, étans toutes deux menées du centre E à la circonference ; F C ſera pareillement plus grande que E C, la partie que le tout : Ce qui eſt abſurde. Donc la portion BCD ne conviendra pas à la portion BAD ; ains elle tombera dedans icelle, cõme eſt la portion BGD, de ſorte que la ligne droite F G, qui ſera lors la même qüe F C ſera moindre que E A ou EC ; car ſi on diſoit qu'elle tombe dehors, comme ſi le cercle étoit BCDG, duquel le centre fuſt E ; auſſi la portion BCD tomberoit dehors BGD, ainſi que la portion BAD : Derechef F A, qui ſeroit lors la même que F C, ſeroit plus grande que E G, c'eſt à dire que EC ; & partant la partie F C ſeroit derechef plus grande que le tout E C : Ce qui eſt abſurde. Il eſt donc manifeſte que la portion BAD, en laquelle eſt le centre E, eſt plus grande que l'autre portion BCD, puis que cette-cy eſt égale à la portion B G D, qui eſt partie de la portion B A D. Car puis qu'il a été demontré que la portion B C D, meüe à l'entour de la ligne droite B D, ne peut convenir ſur la portion B A D, ne tomber hors icelle ; elle tombera totalement au dedans comme B G D.

Or ces deux definitions n'étoient pas proprement de ce lieu, veu qu'elles ne ſont employées en ce premier Livre, mais bien au troiſiéme, auquel la derniere eſt repetée.

20. Figure rectiligne, eſt celle qui eſt compriſe de lignes droites.

Apres avoir definy le cercle, le demy cercle, & les portions de cercle, Euclide paſſe aux figures planes rectilignes, & dit, que ce ſont celles contenuës & encloſes de lignes droites, & telles ſont les trois figures cy-deſſous cottées A, B, C ; par conſequent les figures planes compriſes & environnées de lignes courbes, comme celles cottées D E F, ſont appellées figures courbeli-

gnes, ou curvilignes : mais les figures qui ſont circuites &



encloſes en partie de lignes droites, & en partie de lignes courbes, ſont nommées figures mixtes,

21. Figure de trois côtez, eſt celle qui eſt compriſe de trois lignes droites.

Euclide voulant décrire divers genres de figures rectilignes, commence par les figures trilateres, ou de trois côtez, & dit que ce ſont celles qui ſont contenuës & environnées de trois lignes droites : & d'autant que telles figures ont toûjours trois angles, on les appelle communément triangles. Ainſi la figure A cy-deſſus, laquelle eſt contenuë ſous trois lignes droites, qui conſtituënt trois angles, ſera nommée figure trilatere, ou plûtôt triangle rectiligne ; & y en a de diverſes eſpeces, qui ſeront declarées cy-apres : mais la figure D, circuite & encloſe de trois lignes courbes, ſera dite triangle curviligne.

22. Figure de quatre côtez, eſt celle qui eſt compriſe de quatre lignes droites.

Apres les figures trilateres viennent en ordre les quadrilateres, ou de quatre côtez, c'eſt à ſçavoir les figures contenuës ſous quatre lignes droites, leſquelles conſtituënt auſſi quatre angles; & pour ce ſont-elles ſouvent appellées quadrangles: ainſi entre les figures precedentes celle cottée B, compriſe & encloſe de quatre lignes droites qui conſtituënt quatre angles, ſera appellée quadrilatere, ou quadrangle rectiligne; & y en a de diverſes eſpeces cy-apres declarées: mais la figure cottée E encloſe de quatre lignes courbes ſera dite quadrangle curviligne.

23. Figures multilateres, ou de pluſieurs côtez, ſont celles qui ſont compriſes de plus de quatre lignes droites.

Le nombre des eſpeces de figures rectilignes étant infini, Euclide s'eſt contenté de definir, & particulierement denommer les deux premieres eſpeces cy-deſſus declarées, c'eſt à ſçavoir celles contenuës ſous trois & quatre lignes droites: & quant aux autres eſpeces de figures, qui ſont contenuës & encloſes par plus de quatre lignes droites, il les appelle de ce nom general, multilateres: mais les Geometres denommant particulierement quelqu'unes de ces figures multilateres, prennent leurs denominations du nombre de leurs angles: ainſi les figures cy-devant cottées C, & F, leſquelles ſont compriſes & environnées de cinq lignes, qui conſtituënt cinq angles, ſont appellées *Pentagones*: Et celles contenuës de ſix lignes, ſont nommées *Hexagones*; de ſept, *Heptagones*; de huit, *Octogones*; de neuf, *Enneagones*; de dix, *Decagones*; de vnze, *Endecagones*; de douze, *Dodecagones*, &c.

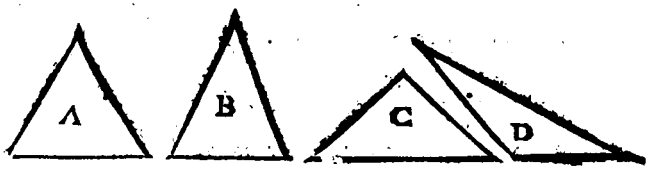
24. Or des figures de trois côtez, celle ſe nomme Triangle equilateral, qui a les trois côtez égaux.

25. Triangle Iſoſcele, qui a deux côtez égaux ſeulement.

26. Scalene, qui a les trois côtez inégaux.

Il y a diverſes eſpeces de triangles rectilignes, ſoit qu'on les conſidere

conſidere ſelon les côtez, ſoit qu'on ait égard à leurs angles:



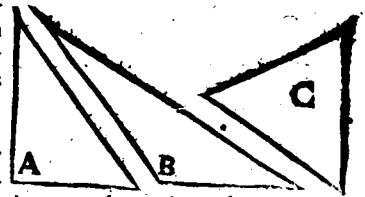
conſiderant les côtez il y en a de trois eſpeces, leſquelles Euclide expoſe par ces trois definitions, & dit premierement que le triangle qui a tous les trois côtez égaux, comme le triangle A, s'appelle triangle equilateral: Mais les triangles qui n'ont que deux côtez égaux, comme B & C, s'appellent triangles Iſoſcelles. Et finalement, le triangle qui a tous les trois côtez inégaux, comme D, eſt nommé triangle ſcalene. Or les triangles Equilateraux ſont touſjours uniformes & d'une méme ſorte: mais les Iſoſceles, & les Scalenes ſont diverſifiez en infinies manieres.

27. Encores des figures de trois côtez, celle ſe nomme triangle rectangle qui a un angle droit.

28. Ambligone, qui a un angle obtus.

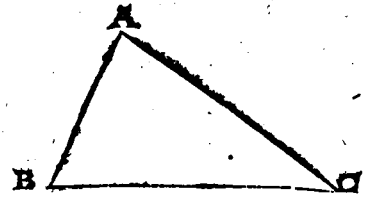
29. Oxigone, qui a les trois angles aigus.

Euclide conſidere maintenant les triangles ayant égard à leurs angles, leſquels triangles ſont de trois ſortes, c'eſt à ſçavoir rectangle, ambligone, & oxigone: les triangles rectangles ſont ceux qui ont un angle droit; & tel eſt icy le triangle A: mais les triangles ambligones, ſont ceux qui ont un angle obtus, comme eſt icy le triangle B: & les triangles oxigones, ſont ceux qui ont tous les trois angles aigus, & tel eſt icy le triangle C.



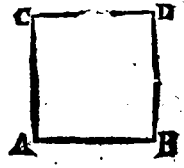
Or eſt à noter qu'en tout triangle deux quelconques lignes

des trois qui le cõtiennent, étans prises pour deux cõtez, la troisiéme restante a accoûtumé d'étre apellée par les Geometres, la base du triangle, soit qu'icelle ligne soit le costé infime du triangle, ou non: tellement que chacune desdites trois lignes qui constituënt & enfermẽt le triangle peust étre prise pour base: Ainsi au triangle A B C, les lignes A B, & A C étans prises pour les deux costez, la troisiéme ligne, B C sera la base: mais si on prend A B, & B C pour les deux costez, A C sera la base du triangle.



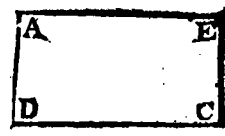
30. Mais des figures de quatre côtez; celle qui a les quatre côtez égaux, & les quatre angles droits s'appelle quarré.

Apres les figures trilateres, Euclide expose les quadrilateres, qui sont de cinq sortes: la premiere d'icelles, qui est equilaterale & rectangle, s'appelle quarré. Ainsi la figure quadrilatere A B C D, ayant tous les quatre costez égaux, & tous les quatre angles droits sera appellée quarré.



31. Quarré long, qui a les quatre angles droits, mais non pas tous les côtez égaux.

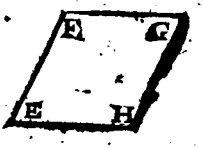
La seconde figure quadrilatere s'apelle quarré long, à cause qu'étant plus long d'une part que de l'autre, elle a tous les quatre angles droits. Ainsi la figure quadrilatere A B C D sera appellée quarré long, car elle a les quatre angles droits, & non pas



tous les costez égaux entr'eux, ains seulement les costez opposez A B, D C, qui sont plus longs que les deux autres opposez, A D, B C, qui sont aussi égaux entr'eux.

32. Rhombe, qui a les quatre côtez égaux, mais non pas les quatre angles droits.

La troisiéme sorte de figure quadrilatere, laquelle on appelle Rhombe a bien tous les quatre costez égaux entr'eux, ainsi que le quarré, mais elle n'a pas comme luy les quatre angles droits; ains elle en a deux opposez obtus, & deux opposez aigus. Ainsi le quadrilatere E F G H, duquel tous les quatre costez sont égaux entr'eux, & les quatre angles non droits, ains obtus & aigus, sera appellé Rhombe.



33. Rhomboide, qui a les angles opposez, & les côtez opposez aussi égaux entr'eux, sans être equilateral, ny rectangle.

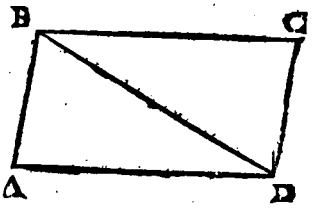
La figure quadrilatere qui n'est equilateralle ny rectangulaire, mais a les costez opposez égaux entr'eux, & les angles opposez aussi égaux entr'eux, s'appelle Rhomboide; & telle est icy la figure I K L M, de laquelle les costez opposez I K, L M sont égaux entr'eux, & plus longs que les deux autres costez opposez I L, K M, qui sont pareillement égaux entr'eux, mais les angles opposez I, M, égaux, & plus grands que les deux autres K, L, lesquels sont aussi égaux entr'eux.

34. Toute autre figure de quatre côtez, est appellée trapeze.

Toute autre figure quadrilatere differente des quatre susdites, c'est à sçavoir qui n'est ny quarré, ny quarré long, ny

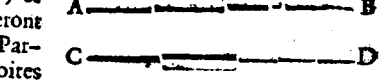
Rhombe, ny Rhomboide, s'appelle trapèse; & telles sont ces deux figures A & B; car l'une ny l'autre n'est equilatere ny rectangle, ny n'a les angles oposez égaux, ny tous les costez oposez aussi égaux.

Or est icy à noter que quand d'un angle de quelconque figure quadrilatere on tire une ligne droite à l'angle oposé, cette ligne est appellée diametre par aucuns, & diagonalle par d'autres; ainsi au quadrilatere A B C D la ligne B D, menée de l'angle B à son oposé D est dite diagonalle, ou diametre.



35. Lignes droites paralleles, sont celles qui étans sur un méme plan, & prolongées infiniment de part & d'autre ne se rencontrent jamais.

Afin que les lignes droites soient dites paralleles, ou equidistantes, il ne suffit pas qu'étans prolongées infiniment de part & d'autre, elles ne viennent iamais à se rencontrer; mais il est aussi necessaire qu'elles soient en une mesme superficie plane: Car plusieurs lignes droites n'étans en une méme superficie, pourroient bien étre prolongées à l'infiny & ne se rencontrer iamais, lesquelles toutesfois ne seroient dites paralleles. Comme par exemple, si deux lignes droites posées de travers au milieu de l'air ne se touchent point, bien qu'elles soient prolongées tant qu'on voudra, elles ne se rencontreront iamais, & toutesfois elles ne seront pas dites paralleles. Parquoy les deux lig. droites A B, & C D, lesquelles sont en une méme superficie plane, & qui étans prolongées à



l'infiny tant de la part de A, C, que de B, D, ne se rencontrent iamais, seront dites lignes paralleles.

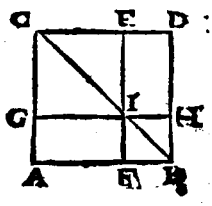
Or icy fuissent les definitions du premier livre d'Euclide : Mais d'autant qu'en ce méme Livre est souvent parlé de parallelogramme, & de leurs complemens, lesquels Euclide n'a point definy, nous adjoûterons icy leurs definitions.

36. Parallelogramme, est une figure quadrilatere qui a les côtez opposez parallels, ou equidistans.

Telle figure est tousjours l'une de ces quatre: Quarré, Quarré long, Rhombe, & Rhomboide, car elles ont toutes leurs costez opposez parallels.

37. Mais quand en un parallelogramme on mene un diametre, & deux lignes droites paralleles aux côtez, lesquelles coupant iceluy diametre à un méme point, divisent le parallelogramme en quatre autres parallelogrammes ; ces deux là par lesquels le diametre ne passe point, sont appellez complemens ; mais les deux autres par lesquels le diametre passe, sont dits être à l'entour du diametre.

Soit un parallelogramme ABDC, duquel le diametre est B C, & la ligne E F coupant iceluy diametre au point I, soit parallele aux costez A C, B D; mais la ligne G H coupant ledit diametre B C au méme point I, soit parallele aux côtez A B, C D. Il est manifeste que tout le parallelogramme est divisé par lesdites deux lignes paralleles E F, G H, en quatre autres parallelogrammes, deux desquels, sçavoir A G I F, & D E I H, par lesquels le diametre B C ne passe point, sont appellez par les Geometres complemens, ou supplemens des deux autres parallelogrammes B F I H, C E I G, lesquels



ſont dits étre à l'entour du diametre, à cauſe que par iceux paſſe le diametre.

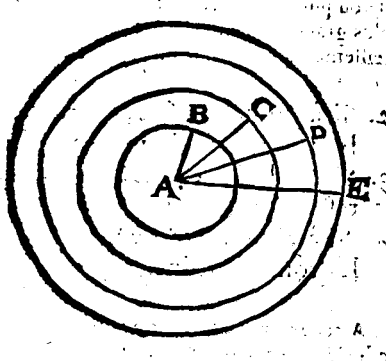
PETITIONS OV DEMANDES.

1. D'un point donné à un autre point, mener une ligne droite.
2. Continuer infiniment une ligne droite donnée & terminée.
3. Décrire un cercle de quelque centre & interuale que ce ſoit.

Euclide ne ſe ſert en ces élemens-cy que de deux ſortes de lignes ſimples, ſçavoir eſt de la droite & de la circulaire, la deſcription deſquelles étant fort facile, il demande icy qu'on là luy concede & accorde, ſans qu'il ſoit contraint de demontrer qu'elle eſt poſſible : ce qui eſt toutefois manifeſte ; car puiſque la ligne eſt un flux & coulement imaginaire du point, & partant la ligne droite étre un flux procedant de droit chemin, & le plus court qui puiſſe eſtre d'un lieu à un autre, il eſt certain que ſi on entend quelque point ſe mouvoir directement à un autre, une ligne droite ſera menée d'un point à l'autre. Parquoy on ne pûſt pas nier que depuis le point A, iuſques à quelconque point B, on ne puiſſe mener une droite ligne, comme A B, ainſi qu'Euclide requiert qu'on luy accorde par la premiere des trois petitions ſuſdites. Et ſi on entend le méme point ſe mouvoir encore plus outre directement & ſans aucunement decliner çà ne là, la ligne droite terminée ſera prolongée ; & ce prolongement ſe pourra faire à l'infiny, veu que nous pouvons entendre ce point là ſe mouvoir infiniment : Et partant perſonne ne pourra nier que la ligne droite A B cy-deſſus, ne puiſſe étre continuée iuſques en C, puis encore iuſques en D, & ainſi à l'infiny, comme Euclide demande qu'on luy accorde par la 2. petition. Mais ſi on conçoit quelconque ligne droite terminée ſe mouvoir à l'entour d'un de ſes points extrémes qui demeure fixe, iuſques à ce qu'elle retourne au méme lieu où elle a commencé ſon mou-

A B C D

vement, sera décrit vn cercle, & fait ce qui est requis par la 3. petition, comme il apert en ces quatre lignes droites A B, A C, A D, A E, chacune desquelles étant menée à l'entour du centre A, décrit un cercle selon la grandeur & intervalle d'icelle.



Aux trois petitions precedentes, Clavius a adjoûté la suivante.

4. Etant donné quelconque grandeur, on en pûst prendre une autre plus grande, ou moindre.

Car d'autant que toute quantité continuë peust étre infiniment augmentée par addition, & diminuée par division, il ne se peut donner quantité continuë si grande, qu'il ne s'en puisse donner encore une plus grande; ny une si petite qu'il ne s'en puisse encore donner une plus petite. Ce qui est dit icy touchant l'addition, est aussi veritable aux nombres; car chaque nombre peut étre augmenté à l'infiny par l'addition continuelle de l'unité, jaçoit qu'en la diminution d'iceluy on parvienne à l'unité indivisible.

AXIOMES OV communes Sentences.

1. Les choses égales à une même, sont égales entr'elles.

A ce premier axiome, Clavius a adjoûté, qu'une chose qui est

plus grande ou plus petite qu'une des égales, eſt auſſi plus grande ou plus petite que l'autre : Et ſi l'une des choſes égales eſt plus grande ou plus petite que quelque grandeur, l'autre eſt pareillement plus grande ou plus petite que la méme grandeur.

2. Si à choſes égales, on adjoûte choſes égales, les touts ſont égaux.
3. Si de choſes égales, on ôte choſes égales, les reſtes ſont égaux.
4. Si à choſes inégales, on adjoûte choſes égales, les touts ſont inégaux.

A cet axiome Clavius a adjoûté, que ſi à choſes inégales on adjoûte choſes inégales, c'eſt à ſçavoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite, les touts ſont inégaux, ſçavoir eſt celuy-là plus grand, & cettui-cy plus petit.

5. Si de choſes inégales, on ôte choſes égales, les reſtes ſont inégaux.

A cette notion Clavius adjoûte auſſi, que ſi de choſes inégales on ôte choſes inégales, c'eſt à ſçavoir de la plus grande, moins, & de la plus petite, plus; les reſtes ſont inégaux, ſçavoir eſt celuy-là plus grand, & cettui-cy plus petit.

Or en toutes les quatre notions precedentes par le mot de choſes ou quantitez égales, il faut auſſi entendre une méme commune à pluſieurs; Car ſi à choſes égales on y en adjoûte une méme commune, les touts ſeront égaux. Et ſi de choſes égales on en retranche une commune, les reſtes ſeront auſſi égaux. Et ſi à choſes inégales on en adjoûte une commune, où à une méme choſe commune, on adjoûte choſes inégales, les touts ſeront inégaux. Et ſi de choſes inégales, on en retranche une méme commune, ou d'une méme choſe, on en retranche d'inégales, les reſtes ſeront inégaux.

6. Les choſes doubles d'une autre ſont égales entr'elles.

Clavius adjoûte à cet axiome, que ce qui eſt double d'une

des choſes égales eſt pareillement double de l'autre : Mais il eſt auſſi manifeſte que les choſes qui ſont triples d'une méme, ou bien quadruple, ou quintuple, &c. ſont égales entr'elles.

7. Les choſes qui ſont moitiez d'une méme, ſont égales entr'elles.

Il eſt auſſi évident que les choſes égales entr'elles ſont moitiez d'une méme : Et ſemblablement que les choſes qui ſont tierces parties d'une méme, ou quartes, ou cinquiémes, &c. ſont auſſi égales entr'elles.

En ces deux derniers axiomes, par une méme quantité on doit auſſi entendre les quantitez égales, car les choſes doubles, triples, quadruples, &c. de choſes égales, ſont auſſi égales entr'elles ; Item, les choſes qui ſont moitiez, ou tierces parties, &c. de choſes égales, ſont pareillement égales entr'elles.

8. Les choſes qui conviennent entr'elles, ſont égales entr'elles.

C'eſt à dire, que deux grandeurs ſeront égales entr'elles, ſi étans poſées l'une ſur l'autre, l'une n'excede l'autre, mais toutes deux enſemble s'ajuſtent entr'elles : comme deux lignes droites, ſeront dites être égales entr'elles, ſi l'une étant poſée ſur l'autre, celle qui eſt poſée deſſus s'ajuſte à toute l'autre ; tellement qu'elle ne l'excede, ny ne ſoit excedée d'icelle. Ainſi auſſi deux angles rectilignes ſeront égaux entr'eux quand le ſommet de l'un, étant poſé ſur le ſommet de l'autre, l'un n'excede l'autre, mais les lignes de l'un tombent totalement ſur celles de l'autre : car par ainſi les inclinations des lignes ſeront égales, combien que ſouventefois icelles lignes ſoient inégales entr'elles. Ainſi auſſi deux ſuperficies ſeront égales entr'elles, quand l'une étant poſée ſur l'autre, elle ne l'excede, ny n'eſt excedée par icelle, mais s'ajuſtent totalement entr'elles. Quelqu'un expliquant cette notion a dit que convenir, c'eſt avoir les extrémitez ſur les extrémitez : ce qui n'eſt pas vray en toutes grandeurs ; Car pour exemple, une ligne droite peut bien avoir ſes extrémitez ſur les extrémitez d'une ligne courbe, laquelle neanmoins, ne luy ſera égale. Ainſi auſſi une ligne courbe peut bien avoir ſes extrémitez ſur les extrémitez d'une autre ligne courbe, laquelle ne luy ſera pas pourtant égale. Or il eſt manifeſte

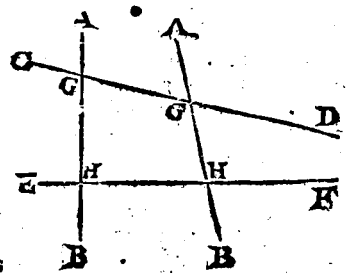
que de cet axiome on peut bien convertir & prendre pour principe, *que les lignes droites égales conviennent* : Auſſi *que les angles rectilignes égaux conviennent* : Semblablement, *Que les ſuperficies planes égales & ſemblables conviennent*. On peut bien encore tirer quelques autres converſes de cet axiome : mais de le vouloir convertir univerſellement (comme quelques-uns) c'eſt ſe mocquer, veu que ſi on trouve une ligne courbe égale à une droite, elles ne conviendront pas pourtant : & auſſi qu'à tout angle rectiligne, il s'en peut bailler un curviligne égal, leſquels neanmoins ne conviendront iamais : voire même faire un quarré égal à un triangle, ou à quelconque autre figure rectiligne : leſquels pourtant ne peuvent iamais convenir.

9. Le tout eſt plus grand que ſa partie.
10. Tous les angles droits ſont égaux entr'eux.

De ce principe, nous pouvons convertir & prendre pour maxime, que tout angle rectiligne égal à un angle droit, eſt auſſi droit.

11. Si une ligne droite tombant ſur deux autres lignes droites, fait les angles interieurs d'un même côté plus petits que deux droits, icelles deux lignes étans continuées à l'infiny, ſe rencontreront du côté où les angles ſont plus petits que deux droits.

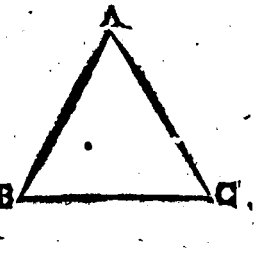
Comme par exemple, ſi la ligne droite A B, tombant ſur les deux lignes droites C D, E F, & les coupant aux points G, H, fait les deux angles interieurs D G H, F H G, pris enſemble plus petits que deux droits, icelles deux lignes C D, E F, étans continuées à l'infiny ſe rencontreront de la part de D, F, où les ſuſdits angles interieurs



ſont faits moindres que deux droits : Car il eſt manifeſte que de l'autre côté, ſçavoir eſt vers C, E, l'eſpace d'entre leſdites deux lignes C D, E F, s'élargira tousjours de plus en plus; mais de cettui-cy il s'étrecira en ſorte que finalement icelles lignes ſe rencontreront à un point.

12. Deux lignes droites n'enferment pas un eſpace.

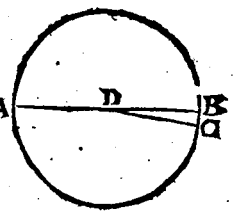
Une ſeule ligne courbe enferme bien un eſpace, comme font auſſi une ligne droite & une courbe, mais deux droites ne le peuvent faire, ains il en faut du moins trois, pour contenir & enclore une eſpace, cõme il apert en cette figure, en laquelle les 2 lignes droites A B, & B C, qui font l'angle B, étans prolongées tant qu'on voudra de la part de A & C, ne ſe joindrõt point, mais au contraire elles ſe dilateront tousjours de plus en plus; tellement que pour enclore l'eſpace d'entre icelles deux lignes, il ſera neceſſaire d'en mener une troiſiéme, comme A C.



A ces 12 axiomes, Clavius & autres Interpretes d'Euclide, ont encore adjoûté les 8 ſuivans.

13. Deux lignes droites ſe rencontrans indirectement n'ont pas un méme & commun ſegment.

Combien que par la nature de la ligne droite, il ſoit aſſez manifeſte que deux lignes droites, ſe rencontrans de travers, ne peuvent avoir aucune partie commune, tant petite qu'elle puiſſe étre; outre le point de leur rencontre; ſi eſt-ce toutesfois que Proclus le demontre ainſi. Que deux lignes droites A D B, A D C ayent, s'il eſt poſſible, une partie cõmune A D. Du centre D, & de l'intervale d'icelle A D, ſoit d'écrit un cercle coupant les deux



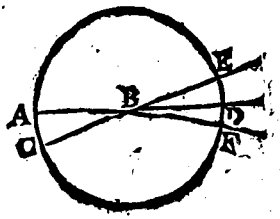
lignes droites proposées aux points B & C. Donc les circonferences AB, & ABC seront égales entr'elles: (car elles sont circonferences de deux cercles égaux, puis que ADB, ADC sont posez diametres) la partie & le tout: ce qui est absurde. Donc deux lignes droites, &c.

Or nous n'ayons pas raporté cet axiome, ny aussi les sept autres suivans, tout de même qu'ils se trouvent dans Clavius & autres Interpretes d'Euclide, ains avons changé quelques mots aux uns, & ajoûté aux autres, afin d'ôter de ceux-là tout doute & ambiguité, & ne laisser en ceux-cy aucune défectuosité: comme par exemple, en cettuy-cy nous avons ajoûté *se rencontrans indirectement*, pource que deux lignes droites peuvent bien avoir un commun segment, quand elles sont posées directement, & constituent comme une seule ligne droite, ainsi qu'il apert icy aux deux lignes droites D C & B A, qui ont la partie ou segment A C commun: mais quand elles sont posées de travers & indirectement, elles ne peuvent avoir aucune partie commune outre le point de leur rencontre.

D A C B

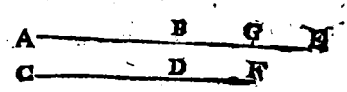
14. Deux lignes droites se rencontrans à un point indirectement, si elles sont toutes deux prolongées, elles s'entrecouperont necessairement en iceluy point.

Cet axiome dépend aussi de la nature de la ligne droite, & toutesfois Clavius le démontre ainsi. Que deux lignes droites A B, C B se rencontrent indirectement au point B; ie dis qu'icelles lignes étans prolongées s'entrecouperont à iceluy point B, sçavoir est que C B prolongée tombera, comme en E, au dessus de A B prolongée. Car si C B continuée ne tomboit au dessus de A B prolongée, ou elle conviendroit avec icelle. A B continuée, de sorte qu'elle passeroit par D, & par ainsi les deux lignes droites A B D, C B D auroient un même



segment B D commun, contre le precedent axiome : ou bien elle tomberoit au dessous de AB prolongée comme en F, tellement que C B F seroit une ligne droite : Donc du centre B, & de quelconque intervalle soit décrit un cercle ACFD. coupant les lignes droites A B, C B prolongées en D, F. Or puis que l'une & l'autre ligne droite A B D, CBF passe par le centre B, tant A C D que C F sera demy cercle par la 18. def. & consequemment les circonferences A B D & C F seront égales entr'elles, le tout & la partie : ce qui est absurde.

15. Si à choses égales on adjoûte choses inégales, l'excez des toutes sera le méme que l'excez des adjoûtées.



Aux grandeurs égales A B, C D, étans ajoûtées les inégales B E, D F, desquelles la difference ou excés est G E ; il est manifeste que la toute A E excedera la toute CF du même excez G E.

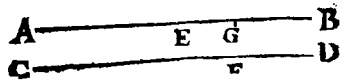
16. Si à choses inégales on ajoûte choses égales, l'excez des toutes sera le même que l'excez de celles qui étoient au commencement.

Comme si (en la figure precedente) aux grandeurs inégales BE, DF, dont l'excez ou difference est G E, on ajoûte les grandeurs inégales A B, C D : il est manifeste que la toute A E excedera la toute CF du même excez G E.

17. Si de choses égales on retranche choses inégales, l'excez des restantes sera le méme que l'excez des retranchées.

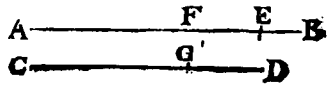
Des grandeurs égales A B, C D, étans retranchées les inéga-

les, B E, D F, dont l'excez eſt E G, il eſt évident que le reſte C F excedera le reſte A E, du méme excez E G.



18. Si de choſes inégales on ôte choſes égales, l'excez des reſtantes ſera le méme que l'excez des toutes.

Comme ſi des grandeurs inégales A B, C D, dont l'excez eſt B E, on retranche les grandeurs égales A F, C G, il eſt manifeſte que le reſte F B, excedera le reſte G D, du méme excez B E.



19. Le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

20. Si un tout eſt double d'un tout, & le retranché du retranché; le reſte ſera auſſi double du reſte.

Comme par exemple, le nombre total 24. étant double du nombre total 12: & 18. retranché de celuy-là, double de 5. retranché de cettui-cy, 14. reſte du premier tout, ſera auſſi double de 7. reſte du ſecond tout.

ELEMENT PREMIER.

PROBL. I. PROP. I.

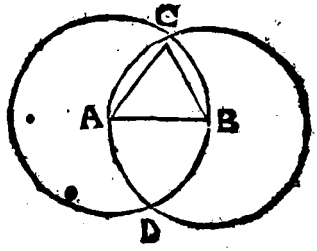
Sur une ligne droite donnée & terminée, décrire un triangle equilateral.

SOIT la ligne droite donnée A B, ſur laquelle il faut faire un triangle equilateral.

Du centre A, & de l'intervale de AB, ſoit décrit le cercle BCD: Item, du centre B, & de l'intervale de la méme A B, ſoit décrit un autre cercle A C D, coupant le premier és points C & D, de l'un deſquels, ſçavoir de C, ſoient menées les deux lignes droites C A, & C B: Ie dis que le triangle A B C, conſtruit ſur la ligne droite donnée A B, eſt equilateral.

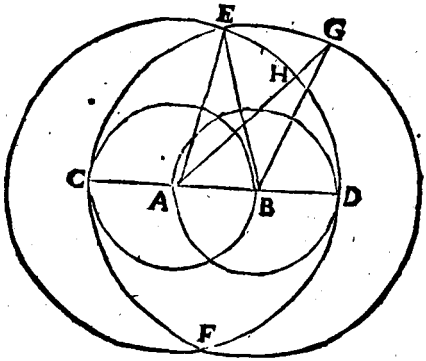
Car le coſté A B, eſt égal au coſté A C par la quinziéme definition, d'autant qu'ils procedent de méme centre vers méme circonference: & par la méme raiſon, le coſté B A eſt égal au coſté B C. Donc par la *1. com. ſent. les coſtez C A,

& C B seront égaux, chacun étant égal à A B : & partant le triangle A B C décrit sur A B, est equilateral ; qui est ce qu'il falloit faire.



SCHOLIE.

Quelques Interpretes ont icy enseigné à décrire aussi sur une ligne droite donnée un triangle Isoscelle, & un Scalene, ce que nous ferons aussi en cette maniere. Soit une ligne droite donnée A B, à l'entour de laquelle des centres A & B, soient décrits deux cercles, ainsi que dessus. Et apres soit prolongée icelle A B, de part & d'autre vers les circonferences iusques en C & D : puis du centre A, & intervale A D, soit décrit le cercle D E F : Item du centre B, & intervale B C, le cercle C E F, coupant le premier és points E & F, de l'un ou l'autre desquels, sçavoir de E, soient menées aux points A & B, les deux lignes E A, E B : Ie dis que le triangle A E B, fait sur la ligne donnée

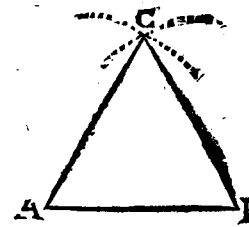


née AB, est Isoscelle, qui est que les deux côtez AE, EB, sont égaux entr'eux, & plus grands que AB. Car d'autant que par la 15 def. AE, est égale à la ligne droite, AD, & icelle AD est double de AB, veu que BA. & DB, sont égales entr'elles : aussi AE sera double de AB. Derechef ; parce que BE est égal à BC, & icelle BC est double de AB, aussi BE, sera double d'icelle AB. Veu donc que l'un & l'autre côté AE & BE est double de la même AB, ils seront égaux entr'eux par la 6. com. sent. & partant plus grands que la ligne AB. Donc le triangle AEB est Isoscelle. Maintenant, si du point A, on tire la ligne droite AG à la circonference EGF, qui ne soit la même que AE, ou AD, coupant la circonference EHD en H, & de G on mene à B la ligne droite GB, sera constitué le triangle AGB sur la ligne AB, lequel ie dis être scalene. Car par la 15. def. tant AH, AD, que BG, BC sont égales. Mais AD, BC sont doubles de AB : d'icelle seront donc aussi doubles AH, BG : & partant plus grandes qu'icelle AB. Veu donc que AG est plus grande que AH, ou que BG : le triangle AGB sera scalene : ce qu'il falloit faire.

Or est icy à noter que pour briéveté nous mettons souventesfois ce mot ligne au lieu de ligne droite, & quelquesfois aussi nous posons simplement deux lettres capitales : comme par exemple AB, au lieu de dire la ligne droite AB, c'est pourquoy quand on trouvera ledit mot ligne posé simplement, ou bien deux lettres capitales de suite, il faudra entendre une ligne droite. Semblablement quand on trouvera ce mot angle, ou trois lettres capitales posées simplement de suitte sans aucune explication, il faudra entendre un angle rectiligne, le lieu duquel sera toûjours denotté par la lettre du milieu, ainsi que nous avons déja remarqué à la 12. Def.

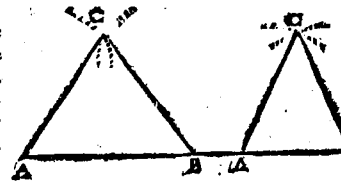
Et d'autant qu'en la construction & démonstration de la plusspart des problémes de ces Elemens-cy, Euclide employe beaucoup de paroles, & tire plusieurs lignes qui ne sont necessaires pour pratiquer lesdits problémes, nous enseignerons en suitte de leurs démonstrations, comme on peut facilement & briévement construire lesdits problemes, & principalement ceux qui sont les plus en usage chez les Mathematiciens, & en la pratique des-

quels on peut aporter quelque briéveté.

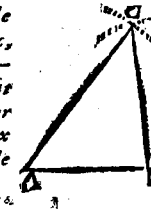


Premierement donc, pour décrire un triangle équilateral ſur une ligne droite donnée AB, des centres A & B, mais de l'intervalle d'icelle AB, ſoient décrits deux arcs de cercles s'entrecoupans en C: puis iceluy point C, ſoient tirées les lignes droites AC, BC, & ſera fait le triangle équilateral ACB.

Mais pour décrire un triangle Iſoſcelle ſur ladite ligne AB: des centres A & B, mais d'un intervale plus grand qu'icelle AB, ſi on veut les côtez plus grands que la ligne donnée, ou moindre (& toutesfois plus grand que la moitié d'icelle AB) ſi on veut les côtez moindres: & ſoient décrits deux arcs s'entrecoupans en C; puis tirées les deux lignes AC, BC, leſquelles feront ſur AB le triangle Iſoſcelle ACB.



Et pour conſtruire un triangle ſcalene ſur ladite AB, du centre B, & d'un intervale plus grand que BA, ſoit décrit un arc, puis du centre A, & d'un intervale encore plus grand que le precedent, ſoit décrit un autre arc qui coupe le premier en C, auquel point ſoient menées les deux lignes droites AC, BC, & ſera fait le triangle ſcalene ACB.



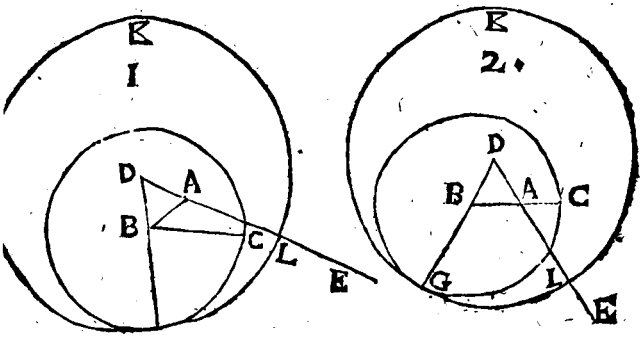
Voila donc comme il faut décrire ſur une ligne donnée un triangle ou equilateral, ou Iſoſcelle, ou ſcalene, & ſur la 22. prop. de ce Livre nous enſeignerons comme il faut conſtruire quelconque triangle ayant les trois côtez égaux à trois lignes droites données.

PROB. 2. PROP. II.

D'un point donné, mener une ligne droite égale à une ligne droite donnée.

Soit le point donné A, & la ligne droite donnée B C : & il faut du point A, mener une ligne droite égale à icelle donnée B C.

De l'un ou l'autre extréme de la ligne donnée B C, ſçavoir ſt de B, comme centre, & de l'intervale d'icelle BC, ſoit dé- tit le cercle C G : puis du point donné A, au centre B, ſoit



ıenée la ligne droite A B (ſinon que le point A fut donné en ı ligne B C, comme en la 2. fig.) ſur laquelle ligne A B par precedente propoſition ſoit décrit le triangle equilateral DB, & ſoit continué le coſté DB, iuſques à ce qu'il rencon- : la circonference en G : mais le coſté DA tant qu'on vou- a en E, En apres, du centre D, & de l'intervale de la ligne oite DG, ſoit décrit le cercle GK L coupant la ligne DE en : Je dis que la ligne AL, qui eſt menée du point donné A, : égale à la ligne droite donnée BC.

Car les lignes droites DG & DL ſont égales, d'autant qu'elles ›cedent de même centre vers une même circonference, deſ- :lles lignes ſi on ôte DA & DB, qui ſont égales, étant DAB

triangle equilateral : les reſtantes BG & AL ſeront auſſi égales par la 3. com. ſent. Mais BG eſt égale à BC, parce qu'elle procede de même centre vers même circonference. Donc AL ſera égale à BC, parce que les choſes égales à une même ſont égales entr'elles. Nous avons donc du point donné A mené la ligne droite AL égale à la ligne droite donnée BC. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Ce probléme peut avoir divers cas : car où le point donné eſt posé en la même ligne droite donnée, ou hors icelle : & ſelon chacune de ces poſitions il y peuſt encor avoir divers cas, deux deſquels ſeulement nous avons raporté icy, d'autant qu'en tous les autres cas il y a toûjours une même conſtruction & demonſtration.

Que ſi en la conſtruction on fait ſur la ligne droite AB le triangle ABD Iſoſcelle au lieu qu'il a été fait equilateral, on demontrera en la même maniere la ligne droite AL être égale à la ligne droite BC.

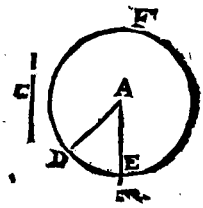
Quant à la pratique de ce problémé, elle eſt fort facile : car il n'y a qu'à prendre la ligne donnée BC, & de ſon intervale décrire un arc du centre A, & quelconque ligne droite menée d'icelui centre à cet arc, ſera égale à la ligne droite donnée BC.

PROB. 3. PROP. III.

Deux lignes droites inégales étans dondées, ôter de la plus grande, une ligne droite égale à la plus petite.

Soient les deux lignes droites inégales AB & C, deſquelles AB eſt la plus grande : & d'icelle il faut ôter une ligne égale à C.

A l'un ou l'autre des extrémes de la plus grande ligne AB, ſçavoir eſt au point A, ſoit poſée par la precedente prop. la ligne droite AD égale à la moindre C : puis du centre A, & de l'intervale AD, ſoit décrit un



cercle coupant AB en E. Je dis que la ligne AE eſt égale à C. Car d'autant que par la 15. def. les lignes droites AD, AE ſont égales : & par la conſtruction AD eſt égale à C ; par la 1. com. ſent. AE ſera auſſi égale à C. Nous avons donc ôté de AB la ligne AE égale à C, ainſi qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

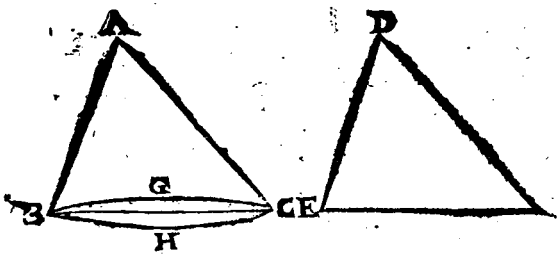
Il y peut bien avoir divers cas en ce probléme, à cauſe des diverſes poſitions auſquelles ſe peuvent rencontrer les deux lignes données, mais en tous ces cas-là on peut toûjours faire la même conſtruction & demõſtration que cy deſſus, comme Proclus a fort bien remarqué ſur cette prop.

Quant à la pratique de ce probléme, elle eſt tres-aiſée, veu qu'il n'y a qu'à prendre la moindre ligne donnée, & de l'intervale d'icelle, décrire de l'un ou l'autre extréme de la plus grande ligne un petit arc, qui coupera d'icelle, une ligne égale à la moindre donnée.

THEOREME 1. PROP. IV.

Si deux triangles ont deux côtez égaux à deux côtez chacun au ſien, & l'angle contenu d'iceux, égal à l'angle : la baſe ſera égale à la baſe ; & les autres angles égaux aux autres angles, chacun au ſien ; & le triangle égal au triangle.

Soient les deux triangles ABC & DEF, deſquels le côté AB



t égal au côté DE, & AC à DF, & l'angle A égal à lan-

gle D : Ie dis que la baſe BC ſera égale à la baſe EF, & l'angle B égal à l'angle E, & l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC égal au triangle DEF.

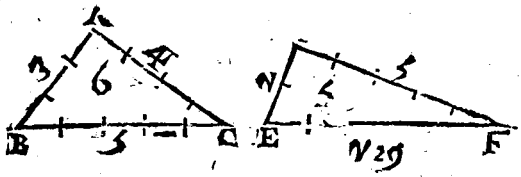
Qu'il ne ſoit ainſi ; ſi on entend le triangle DEF, être poſé ſur le triangle ABC, en ſorte que le point D ſoit ſur le point A, & que DE tombe ſur AB, auſſi DF tombera ſur AC : autrement l'angle A ne ſeroit pas égal à l'angle D. Et d'autant que les coſtez AB & AC ſont égaux aux coſtez DE & DF, chacun au ſien, ils conviendront par la 8. com. ſent. convertie. & partant les extremitez E & F tomberont ſur les extremitez B & C : ainſi la baſe EF conviendra avec la baſe BC, car ſi elle ne convenoit, elle tomberoit ou au deſſus d'icelle BC, comme BGC, ou au deſſous, comme BHC : ce qui eſt impoſſible, attendu que deux lignes droites ne peuvent enclore une eſpace par la 12. com. ſent. Donc les deux baſes BC, & EF conviendront, & partant ſeront égales entr'elle par la ſuſdite 8. com. ſent. Et par ainſi tout le triangle DEF conviendra avec tout le triangle ABC, conſequemment égal à iceluy, & l'angle B conviendra auſſi avec l'angle E, & l'angle C avec l'angle F ; partant égaux. Si donc deux triangles ont deux coſtez égaux à deux coſtez, chacun au ſien, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Euclide met deux conditions en ce theoreme qui y ſont du tout neceſſaires ; la premiere deſquelles eſt que deux coſtez d'un triangle ſoient égaux aux deux coſtez de l'autre chacun au ſien : & la ſeconde, que les deux angles contenus d'iceux coſtez égaux, ſoient auſſi égaux. car defaillant l'une ou l'autre de ces deux conditions, ny les baſes, ny les autres angles ne pourroient jamais être égaux : & la derniere défaillant, les triangles peuvent bien être quelquefois égaux, mais le plus ſouvent ils ſont inégaux : ce que nous pourrions facilement demontrer icy n'étoit que pluſieurs choſes à ce requiſes n'ont encore été démontrées : neanmoins afin de rendre aucunement évidente la neceſſité des ſuſdites conditions nous rapporterons icy ce qu'en dit Proclus ſur cette propoſition, & Clavius apres luy.

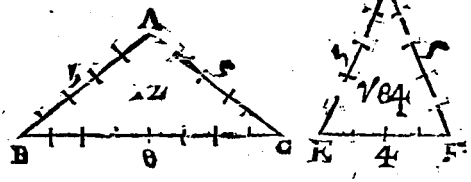
Pour la premiere condition de ce theoreme, ſoient deux triangles ABC, DEF, ayans les angles A & D égaux

ſçavoir droits ; & les deux coſtez AB , AC égaux aux



deux coſtez DE , DF , non chacun au ſien, mais ces deux-là pris enſemble égaux à ces deux-cy auſſi pris enſemble : & ſoit AB 3 , & AC 4 , qui ajoûtez enſemble ſont 7, mais DE ſoit 2 , & DF 5 , qui ſont auſſi enſemble 7. Ce qu'étant ainſi , la baſe BC ſera 5, & la baſe EF , racine quarrée de ce nombre 29, laquelle eſt plus grande que 5, mais moindre que 6, & l'aire ou ſuperficie du triangle ABC ſera 6 : mais l'aire du triangle DEF ne ſera que 5. Finalement les angles ſur la baſe BC ne ſeront pas égaux aux angles de deſſus la baſe EF, chacun au ſien. Toutes leſquelles inégalitez adviennent à cauſe de ce que les coſtez AB , AC ne ſont pas égaux aux coſtez DE, DF chacun au ſien.

Quant à la ſeconde condition : Les coſtez AB, AC du triangle ABC ſoient égaux aux côtez DE, DF du triangle DEF, chacun

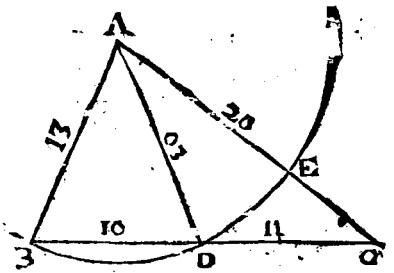


au ſien, & chacun d'iceux ſoit 5, mais les angles A & D contenus d'iceux coſtez ſoient inégaux , & ſoit A plus grand que D. Toutes leſquelles choſes étans ainſi, la baſe BC ſera plus grande que la baſe EF, comme il ſera demontré en la 24. prop. de ce Livre.

Que ſi nous poſons la baſe BC être 8, & la baſe EF 4, l'aire du triangle ABC, ſera 12 ; mais l'aire du triangle

DEF sera la racine quarrée de ce nombre 84, laquelle est plus grande que 9, mais moindre que 10. Ce qui est tres-bien connu des Geometres.

Et afin qu'on n'estime pas que cette inégalité advienne à raison de ce que tous les quatre costez des triangles sont égaux, & rendre tant plus manifeste la necessité de la seconde condition de ce theoréme, soit un triangle ABC duquel le costé AB soit moindre que le coste AC, & aussi que la base BC. Du centre A, & de l'intervale du petit costé AB, soit décrit un cercle BDE qui coupera tant le plus grand costé AC, que la base BC: Car autrement il passeroit ou par le poinct C, ou au delà d'iceluy; ce qui est absurde, veu que toutes les lignes droites tirées du centre A à la circonference du cercle BDE, doivent être égales entr'elles par la 15. def. Qu'il coupe donc la base BC en D, & soit tirée la ligne AD. Par la même 15. def. AB est égale à AD, & AC est commune à tous les deux triangles ABC, ADC, & partant iceux triangles auront les deux costez AB, AC égaux aux deux costez AD, AC, chacun au sien; mais l'angle DAC, contenu des deux costez AD, AC, n'est que partie de l'angle BAC, contenu des costez égaux à ceux-là; & partant la base DC ne sera aussi que partie de la base BC, & pareillement le triangle ADC partie du triangle ABC. Ce qui est aussi manifeste par l'application des nombres aux lignes: Car les Geometres sçavent tres-bien que le costé AB étant 13, le costé AC 20, & la base BC 21; le costé AD sera aussi 13, & la base DC 11; mais l'aire ou contenu du triangle ABC sera 126, & celuy du triangle DAC ne sera que 66. Donc



afin que de deux triangles les bases soient égales entr'elles, & leurs angles aussi égaux entr'eux, & pa-

veillement les triangles égaux ; il eſt du tout neceſſaire que non ſeulement chaque coſté de l'un ſoit égal à chaque coſté de l'autre, mais auſſi que les angles contenus d'iceux coſtez ſoient égaux entr'eux, comme a fort bien dit Euclide.

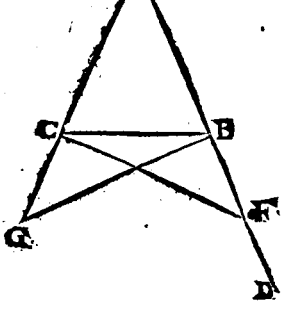
Finalement, nous remarquerons une fois pour toutes, qu'Euclide n'entend parler en ces Elemens-cy que des triangles rectilignes, car combien que cette propoſition & pluſieurs autres ſe puiſſent faire generales étans veritables, tant au regard des triangles rectilignes que des ſpheriques, ſi eſt-ce toutesfois que cela n'advient pas en toutes propoſitions, comme on peut voir en nôtre traité des triangles ſpheriques, c'eſt pourquoy nous étendrons toutes ſes propoſitions ſeulement aux triangles rectilignes, encores qu'Euclide ne les ſpecifie pas.

PROP. V. TH. 2.

Les triangles Iſoſceles, ont les angles ſur la baſe égaux : & les côtez égaux étans continuez, les angles exterieurs ſous la baſe ſont égaux.

Soit le triangle Iſoſcelle ABC : Je dis premierement que les angles ABC, & ACB, ſur la baſe BC, ſont égaux.

Qu'il ne ſoit ainſi. Soient prolongez AB & AC, coſtez égaux juſques en D & G : & ſoit fait AF égale à AG par la 3. prop. & ſoient menées les lignes BG & CF. Les deux triangles ABG, & ACF, ayans l'angle A commun, ont les deux coſtez A B & A G égaux aux deux coſtez AC, & AF, chacun au ſien ; & par 4. propoſition, la baſe B G ſera égale à la baſe C F, & l'angle ABG égal à l'angle AFG & l'angle G égal à l'angle F. Item les triangles G C B, FBC, ayant l'angle G égal à l'angle F, & les deux coſtez GB, & GC égaux aux



deux costez CF & FB : (Car CF a été prouvé tantost égal à BG ; & AG, AF étans égaux ; & AC, AB aussi égaux ; les restes CG, & BF seront aussi égaux) par la 4. prop. la base sera égale à la base ; & les autres angles égaux aux autres angles, chacun au sien : sçavoir est l'angle GBC, égal à l'angle FCB. Et qui des angles égaux ABG & ACF, oste les angles égaux CBG & BCF ; les demeurans ABC & ACB, seront égaux.

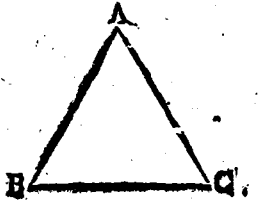
Pour la seconde partie. Que les costez égaux AB & AC étans continuez, les angles exterieurs sous la base BC, sont égaux, sçavoir FBC à BCG, elle a été suffisamment démontrée ; lors qu'on a prouvé que les triangles GBC, & CFB, avoient leurs angles égaux, chacun au sien. Patquoy les triangles Isoscelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Cette proposition est aussi vraye és triangles équilateraux. Car les deux côtez AB, AC du triangle ABC étans égaux entr'eux, ou l'autre côté CB, est pareillement égal à iceux ; comme il aviene au triangle équilateral, ou bien inégal ; comme il arrive au triangle Isoscele : Il s'ensuit necessairement, que les angles de dessus la base BC, sont égaux entr'eux, & ceux de dessous la même base aussi égaux entr'eux, comme il appert par la démonstration cy-dessus.

COROLLAIRE.

De cette 5. proposition s'ensuit que tout triangle équilateral est aussi équiangle, c'est à dire que les trois angles de quelconque triangle équilateral sont égaux entr'eux. Car soit un triangle équilateral ABC : Donc parce que les deux costez AB, AC sont égaux, par la 5. prop. les deux angles B & C seront égaux. Semblablement, pource que les deux costez AB, BC sont égaux, les deux angles A & C seront aussi égaux. Donc

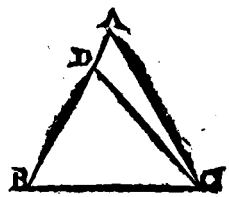


par la 1. *com. ſint. tous les trois angles A, B, C, ſeront égaux entr'eux. Ce qu'il faloit démontrer.*

THEOR. 3. PROP. VI.

Si un triangle a deux angles égaux entr'eux; les côtez ſoutendans iceux angles, ſeront auſſi égaux entr'eux.

Soit le triangle ABC, duquel les deux angles ABC, & ACB ſur la baſe BC ſont égaux : Je dis que les deux coſtez AB & AC qui ſoûtendent les ſuſdits angles égaux, ſont auſſi égaux.



Autrement, ſoit AB plus grand que AC, s'il eſt poſſible : on en pourra donc retrancher une partie égale à AC par la 3. prop. laquelle partie ſoit BD, & ſoit menée la ligne DC : les deux triangles DBC, & ACB, ont deux coſtez égaux à deux coſtez chacun au ſien, & les angles compris d'iceux coſtez auſſi égaux ; car les deux coſtez BD & BC du triangle BDC ſont égaux aux deux coſtez AC, & CB du triangle ACB, & l'angle B égal à l'angle ACB ; & par la 4. prop. iceux triangles DBC, ACB, ſeront égaux ce qui eſt impoſſible : car l'une eſt partie de l'autre, Donc les coſtez AB, & AC n'étoient pas inégaux, ains égaux. Ce qu'il falloit demontrer.

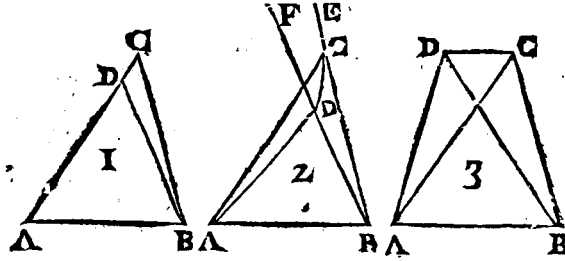
COROLLAIRE,

Il s'enſuit de cette propoſition, que tout triangle équiangle, c'eſt à dire qui a tous les angles égaux, eſt équilateral : car par ce qui a été icy demontré, les angles ABC, ACB étans égaux, les deux coſtez AB, AC, ſeront pareillement égaux ; Mais ſi les deux angles A & B étoient encore égaux, auſſi les côtez CA, CB ſubtandans iceux angles, ſeroient auſſi égaux : & partant tous les trois côtez AB, AC, BC égaux entr'eux, puis que les choſes égales à une même, ſont égales entr'elles.

PROP. VII. TH. IV.

Si des extremitez de quelque ligne droite, on mene deux autres lignes droites, se rencontrans à un point; des mêmes extremitez, on n'en pourra pas mener deux autres égales à icelles, chacune à la sienne, & de même part, se rençontrans à un autre point.

Soit la ligne AB, des extremitez de laquelle soient menées deux lignes droites AC & BC se rencontrant à quelconque

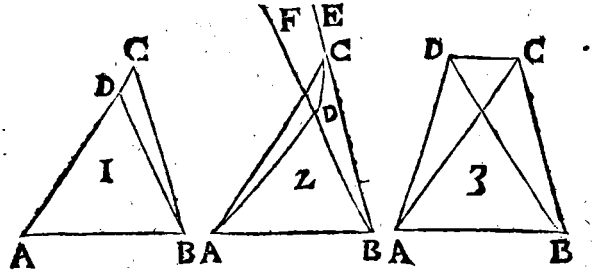


point C. Je dis que des mêmes extremitez A & B, & de la même part que C, on ne peut mener deux autres lignes droites égales à icelles AC & BC chacune à la sienne, qui se rencontrent à un autre point que C; c'est à dire que si de l'extremité A on mene la ligne AD égale à AC, & de l'extremité B la ligne BD égale à BC, il ne peut être que le point de rencontre D, soit autre que le point de rencontre C.

Car si faire se peut, que le point de rencontre D, tombe ailleurs qu'au point C: où iceluy point D tombera sur l'une ou l'autre des lignes AC, BC; ou dans le triangle ACB; ou hors iceluy.

Premierement, iceluy point de rencontre D, ne peut être sur la ligne AC, comme en la premiere figure: car il faudroit que les deux lignes AD, & AC fussent égales entr'elles, sçavoir est la partie au tout, ce qui est absurde: partant la rencontre D, ne se fera point sur AC, ny aussi sur BC, à cause de la même absurdité.

Soit donc iceluy point de rencontre D dans le triangle ABC, comme en la 2. figure : & apres avoir prolongé BC iuſques en E, & BD iuſques en F, ſoit menée CD. Puis que les deux li-



gnes AC, & AD ſont poſées égales, le triangle ACD ſera Iſoſcele, & par la 5. propoſition les deux angles ACD & ADC ſu la baſe CD ſeront égaux. Mais l'angle ACD eſt moindre que l'angle DCE : (car il n'eſt que partie d'iceluy) donc l'angl ADC eſt auſſi moindre que le méme angle DCE : & par conſequent l'angle CDF, qui n'eſt que partie d'iceluy ADC, ſera beaucoup moindre que le méme angle DCE. Derechef, puis que les lignes BC, BD, ſont poſées égales, le triangle BCD doit étre Iſoſcele, & partant les angles CDF & DCE ſous la baſe DC, ſeront égaux par la méme 5. prop. Mais il a été demonſtré que l'angle CDF eſt beaucoup moindre que l'angle DCE, donc le méme angle C D F eſt moindre que l'angle D C E, & auſſi égal à iceluy : ce qui eſt abſurde.

Soit donc finalement iceluy point de rencontre D hors iceluy triangle ACB, comme en la 3. figure : apres avoir mené la ligne CD il s'enſuivra que les deux triangles ADC & BCD ſeront Iſoſceles; & partant qu'ils auront les angles ſur la baſe CD égaux : ſçavoir eſt ADC à ACD, & BDC à BCD. Mais iceluy BCD, eſt plus grand que ACD : donc auſſi BDC ſera plus grand que ADC, c'eſt à dire la partie que le tout: ce qui eſt abſurde. Le point de rencontre D ne tombera donc pas hors le triangle ABC, ny dedans iceluy, ny ſur les lignes AC & BC : Il faut donc qu'iceluy point de rencontre D tombe au premier point de rencontre C : Parquoy ſi des extrémitez de quelque ligne droite, &c. Ce qu'il faloit demo ntrer.

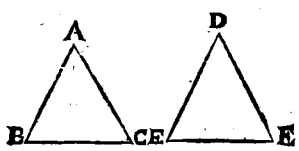
SCHOLIE.

Il eſt manifeſte que ſi AD, BD priſes enſemble étoient faites égales à AC, BC auſſi priſes enſemble, le point de leur rencontre D, ſeroit autre que le premier point C; comme il ſeroit encore ſi on faiſoit AD égale à BC, & BD égale à AC, mais en l'une ny l'autre maniere, icelles lignes AD, BD ne ſeroient pas ſelon l'intention d'Euclide : car il veut que non ſeulement les lignes AD, BD, ſoient égales aux lignes AC, BC chacune à la ſienne, mais auſſi que les lignes égales ſoient menées d'un même point, & de plus que ce ſoit de même part. Car il eſt tres evident qu'icelles AD, BD, peuvent bien être tirés de l'autre côté de C, c'eſt à ſçavoir au deſſous de la ligne AB. Donc fort à propos Euclide met en ce theoréme que les lignes ſoient égales chacune à la ſienne, & menées de même part, &c.

THEOR. 5. PROP. VIII.

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés chacun au ſien, & la baſe égale à la baſe; ils auront auſſi l'angle compris d'iceux côtez égaux, égal à l'angle.

Soient deux triangles ABC, DEF, deſquels le coſté AB, eſt égal à DE; AC à DF, & la baſe BC à la baſe EF: Je dis que les angles A & D compris d'iceux coſtez égaux, ſont égaux.



Car puis que la baſe BC eſt égale à la baſe EF; ſi on entend icelles être poſées l'une ſur l'autre, elles conviendront tombant le point E ſur le point B, & F ſur C: & par la 7. prop. les deux lignes ED & FD, qui ſont égales à BA & CA, ſe rencontreront au point A, & conviendront avec icelles lignes BA

& cA : partant conviendront auſſi les angles A & D contenus d'icelles lignes ; & par conſequent ſeront égaux par la 8. com. ſent. Donc ſi deux triangles, &c, Ce qu'il falloit demontrer.

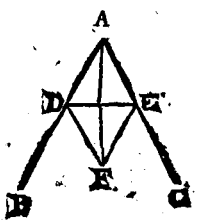
COROLLAIRE.

Puis que la baſe E F *convient avec la baſe* BC, *& les coſtez* DE, DF, *conviennent auſſi avec les coſtez* A B, A C, *il s'enſuit que non ſeulement l'angle* A *eſt égal à l'angle* D ; *mais auſſi que l'angle* E *eſt égal à l'angle* B, *& l'angle* F, *égal à l'angle* C, *& tout le triangle égal à tout le triangle.*

PROB. 4. PROP. IX.

Couper en deux également un angle rectiligne donné.

Soit l'angle rectiligne donné B A C, lequel il faut couper en deux également ; c'eſt dire en deux angles égaux entr'eux. Soient de A B & A C retranchées deux parties égales A D, A E ; & apres avoir mené la ligne D E, ſur icelle ſoit décrit le triangle equilateral D E F par la premiere propoſition, & ſoit menée la ligne A F : Je dis qu'icelle ligne coupe l'angle donné B A C en deux également.



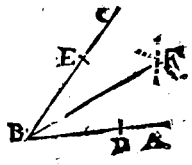
Car puiſque les lignes A D, A E ont été priſes égales, & A F eſt commune aux deux triangles D A F, E A F ; les deux coſtez A D & A F, du triangle D A F, ſeront égaux aux deux coſtez AE & AF du triangle E A F, & la baſe D F égale à la baſe E F ; (étant DFE triangle équilateral) donc par la 8. prop. l'angle DAF ſera égal à l'angle EAF ; & partant l'angle B A C eſt coupé en deux également par la ligne AF. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Que ſi au lieu du triangle equilateral cy-deſſus con-

struit, on en fait un Isoscelle, la demonstration sera toujours la même: Ce qu'on peut aussi faire aux trois propositions suivantes.

Quant à la pratique de cette proposition, nous l'avons enseignée en nostre Geometrie pratique Probl. 5. Et neanmoins nous ne laisserons pas de la repeter icy; Et pource soit un angle rectiligne A B C, qu'il faut couper en deux également. Du centre B & de tel intervale qu'on voudra, soient coupées B D, B E égales, puis des points D & E soient décrits deux arcs s'entrecoupans en F, & d'icelle interfection soit tirée par le point B, la ligne droite F B, laquelle divisera l'angle donné A B C en deux également.



Or il apert par ce que dessus qu'on peut aussi couper un angle rectiligne en quatre parties égales, en huit, en seize, en trente-deux, & ainsi consecutivement, en procedant tousjours par augmentation double: Car apres qu'un angle rectiligne est coupé en deux également, si on divise derechef chaque partie en deux également, on aura quatre angles égaux. Que si on coupe derechef chacun d'iceux en deux également, nous aurons huit angles égaux, & ainsi consequemment.

PROBL. 5. PROP. X.

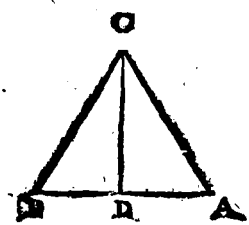
Couper en deux également une ligne droite donnée & terminée.

Soit la ligne droite donnée & terminée AB: laquelle il faut couper en deux également.

Sur icelle ligne AB soit construit le triangle equilatera ACB par la 1. prop. & par la prec. l'angle C soit coupé en deux également par la ligne CD, tirée iusques à ce qu'elle coupe A B en D. Je dis qu'icelle A B est coupée en deux également en D.

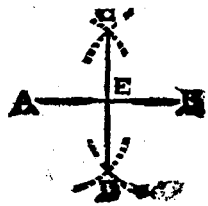
Car puis que les angles du point C sont égaux, & le triangle ACB, est equilateral, les deux triangles ACD, & BCD, ont deux

deux costez AC, CD, égaux à deux costez BC, CD, chacun au sien, & les angles du point C, qu'ils comprennent aussi égaux; partant par la 4. prop. la base AD, sera égale à la base DB. Donc AB est coupée en deux également en D. Ce qu'il faloit faire.



SCHOLIE.

Nous avons enseigné la pratique de cette proposition en nostre Geometrie pratique Prob. 1. & ce fait ainsi: Pour diviser la ligne droite AB en deux parties égales, du centre A, & de quelque intervale que ce soit (plus grand toutesfois que la moitié d'icelle AB) soient décrits deux arcs de cercle, l'un au dessus d'icelle ligne, comme C, & l'autre au dessous, comme D, puis du centre B, & du même intervale soient décrits deux autres arcs qui coupent les precedens esdits points C & D, puis d'une intersection à l'autre, soit tirée la ligne droite CD, laquelle coupera AB en deux également au point E. Est à noter que si de part & d'autre de AB on ne pouvoit décrire deux arcs comme D, il faudroit ayant décrit les deux arcs C, ouvrir le compas d'un plus grand intervale, & en décrire deux autres arcs au dessus de C, & la ligne menée d'une intersection à l'autre, & continuée iusques à AB, la coupera en deux également.



Or il apert par ce que dessus, qu'on peut aussi couper une ligne droite finie en quatre parties égales, en 8, en 16, en 32. &c. ainsi que nous avons dit, en la precedente prop. de la division de l'angle rectiligne. Mais comment on peut diviser une ligne droite terminée en tant de par-

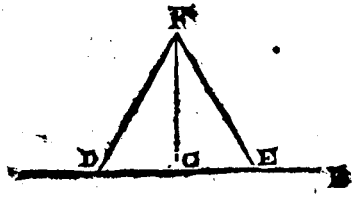
ties égales qu'on voudra, nous l'avons enseigné en nostre Geometrie pratique Probl. 7 : & ce tant Geometriquement que Mechaniquement avec le compas de proportion.

PROBL. 6. PROP. XI.

Sur une ligne droite donnée, & d'un point en icelle, élever une ligne droite perpendiculaire.

Soit une ligne droite donnée AB, & le point en icelle C : d'iceluy point il faut mener une ligne perpendiculaire à icelle AB.

Soient du point C prises les deux lignes égales CD & CE par la 3. proposition, & sur DE soit fait le triangle equilateral DFE, & de C à F soit menée la ligne CF: Je dis qu'icelle CF est la ligne perpendiculaire demãdée. Car les triangles DFC & CFE ayans deux côtez égaux à deux côtez, chacun au sien, sçavoir DC à CE par la construction, & CF commun, & la base DF égale à la base EF, à cause que le triangle DFE est equilateral; par la 8. prop. les angles au point C, contenus des costez égaux, seront égaux; & partant par la 10. def. ils sont dits droits, & la ligne CF perpendiculaire à AB, ainsi qu'il falloit faire.

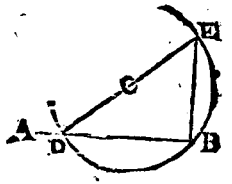


SCHOLIE.

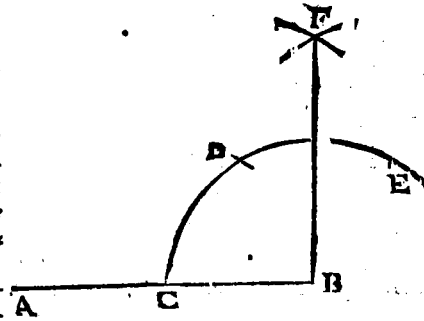
La pratique de cette proposition est enseignée en nostre Geometrie pratique, Prob. 2. & neanmoins nous la repeterons encore icy. Pour élever sur AB une ligne perpendiculaire du point C, soient marquées en icelle AB deux points

comme D, également distans de C, & d'iceux points, soient décrits deux arcs d'un même intervale s'entrecoupans en E, de laquelle intersection soit tirée à C la ligne droite EC, qui sera perpendiculaire à ladite AB.

Que si le point donné étoit B à l'extremité de la ligne, il faudroit continuer ladite ligne, & sur icelle étant continuée faire comme dessus: ou bien nous prendrons un point au dessus d'icelle ligne, comme C, lequel soit plus prés du point donné B, que de l'autre extremité A; puis d'iceluy point C, & de l'intervale CB, nous décrirons la circonference DBE, qui coupe la ligne donnée en D, & d'iceluy point D par C, nous tirerons la ligne droite DCE coupant la susdite circonference en E, duquel point E soit tirée la ligne droite EB, laquelle sera perpendiculaire à AB.



Autrement, du point donné B, & de quelque intervale que ce soit BC, moindre toutefois que la ligne donnée, soit décrit un arc CDE plus grand que le tiers de la circonference entiere du cercle, puis sur iceluy arc CDE soient pris deux intervales CD, DE, chacun égal au semidiametre BC, & des points D, E, soient décrits deux arcs de cercle s'entrecoupans au point F, duquel soit tirée au point B la ligne droite FB, qui sera perpendiculaire à AB.



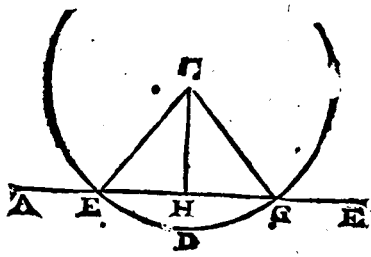
Est à noter qu'encore que le point donné B ne fut l'extremité de la ligne, on pourroit neanmoins mener la perpendiculaire par l'une ou l'autre des deux manieres cy-dessus.

PROBL. 7. PROP. XII.

Abaiſſer une ligne droite perpendiculaire ſur une ligne droite indeterminée, & d'un point hors icelle.

Soit la ligne droite donnée & interminée A B, & le point hors icelle C, duquel il faut mener une ligne perpendiculaire ſur A B.

Soit pris au delà de la ligne A B quelconque point D ; puis du centre C, & de l'intervale C D, ſoit décrit le cercle E D G, coupant la ligne A B és points E & G, puis par la 10. prop. ſoit coupée E G en deux également au point H, & ſoit menée la ligne C H, laquelle ie dis être perpendiculaire à A B.

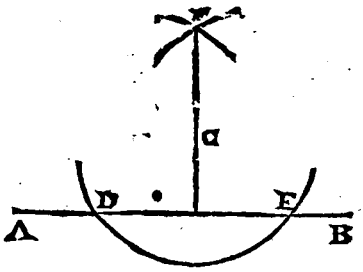


Car étans tirées les lignes droites C E, C G; les deux coſtez E H & H C ; du triangle E H C, ſeront egaux aux deux coſtez G H & H C du triangle G H C, un chacun au ſien, & la baſe C E eſt egale à la baſe C G, étans icelles tirées du centre C à la circonference, & par la 8. prop. les angles du point H ſeront égaux ; & partant par la 10. definit. ils ſeront droits, & la ligne C H. perpendicul. à A B. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

La pratique de ce probleme eſt enſeignée en noſtre Geometrie pratique probl. 3. & eſt icelle qu'il enſuit. Pour mener à une ligne donnée A B une perpendiculaire d'un point donné hors icelle, comme C ; d'iceluy point C ſoit décrit un arc qui coupe la ligne donnée en D & E, puis

d'iceux points, comme centres, soient décrits deux arcs de cercles d'un même intervalle, qui s'entrecoupent au point F : (il n'importe pas de quel costé ce soit, au dessus ou au dessous de la ligne AB) puis d'iceluy point F, par celuy donné C, soit tirée une ligne droite FCG, qui rencontre la donnée en G, & icelle FCG sera perpendiculaire à AB.

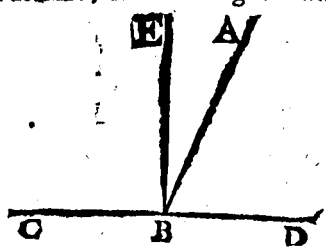


THEOR. 6. PROP. XIII.

Quand une ligne droite tombant sur une ligne droite fait angles, ou iceux seront deux angles droits, ou égaux à deux droits.

Soit la ligne droite AB, laquelle tombant sur une autre ligne droite CD, fait les angles CBA, & DBA : Je dis qu'iceux sont deux angles droits, ou egaux à deux droits.

Car ou icelle ligne AB est perpendiculaire à CD, ou elle ne l'est pas : Si elle est perpendiculaire, les deux angles sont droits par la 10. def. Si elle ne l'est pas, soit levée la perpend. BE par la 11. prop. & les deux angles CBE & DBE seront droits par la susdite deff. mais par la 19. com. sent. le seul angle droit DBE est egal aux deux angles DBA, ABE ensemble : parquoy si on leur ajoûte le commun CBE, les trois angles DBA, ABE & CBE seront egaux aux deux droits DBE, CBE. Derechef, d'autant que par la même



19. com. sent. les deux angles C B E, A B E ensemble sont égaux au seul ABC : si on adjoûte le commun DBA, les deux angles ABC, DBA seront égaux aux trois CBE, ABE, DBA: mais ces trois-cy ont été demontrez égaux à deux droits : donc ces deux-là ABC, ABD seront aussi égaux à deux droits. Parquoy si une ligne droite tombante sur une autre ligne droite, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Cette demonstration de Theon est suivie par la plus-part des Interpretes d'Euclide, mais les autres ayans montré comme dessus, que les deux angles CBE & DBE sont droits, concluënt incontinent par la 8. com. sent. que les deux ABC, & ABD ensemble, seront donc aussi égaux à deux droits, veu qu'ils occupent autant d'espace, voire le même, que les deux droits C B E, D B E, & conviennent avec eux.

Aussi Clavius a remarqué, que cette proposition semble dépendre de quelque commune notion de l'esprit: car de ce que l'angle ABC excede l'angle droit EBC, l'angle restant ABD est excedé par l'angle droit E B D; car comme en celui-là l'excez est l'angle ABE, ainsi en cettui-cy le defaut est le même angle ABE. Parquoy l'on pourra conclure, que les angles ABC, ABD sont égaux à deux droits, attendu que l'excez de l'angle obtus ABC, est le defaut de l'aigu ABD.

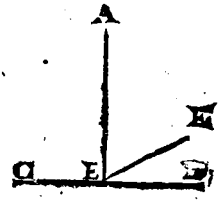
THEOR. 7. PROP. XIV.

Si à un point de quelque ligne droite se rencontrent deux autres lignes droites de part & d'autre d'icelle, faisant deux angles égaux à deux droits: icelles deux lignes se rencontreront directement.

Soit la ligne droite A B & en icelle le point B, auquel se rencontrent deux autres lignes droites CB & DB de part & d'autre d'icelle A B, faisant les deux angles A B C & A B D

égaux à deux droits : Je dis que CB & DB se rencontrent directement, c'est à dire que CBD est une ligne droite.

Autrement, si CBD n'est ligne droite, soit continuée CB directement de la part de B, & la continuation d'icelle tombera ou au dessus de BD, ou au dessous: qu'elle tombe donc au dessus, s'il est possible, comme BE, en sorte que CBE soit ligne droite. D'autant que AB tombe sur CBE, les deux angles ABC, & ABE, seront égaux à deux droits par la 31. prop. Mais par l'hypothese les deux ABC & ABD sont aussi égaux à deux droits, & par la 10. com. sent. tous les angles droits sont égaux entr'eux: dõc par la 1. cõ. sent. ces deux angles ABC, & ABD seront égaux aux deux ABC, & ABE. Parquoy ôtant l'angle commun ABC, les restans ABD, & ABE, seront égaux, le tout & la partie; ce qui est impossible. Parquoy la ligne droite CB étant prolongée, ne tombera pas au dessus de BD; mais elle ne tombera pas aussi au dessous, car il adviendroit toûjours la même absurdité : donc CB, & DB se rencontroient directement. Ce qu'il faloit demontrer.



THEOR. 8. PROP. XV.

Si deux lignes droites se coupent l'un l'autre, elles feront les angles opposez au sommet égaux.

Soient les deux lignes AB & CD, se coupans l'une l'autre au point E : Je dis que les angles opposez au sommet, sçavoir AEC, & DEB, sont égaux entr'eux.

Car d'autant que sur AB tombe la ligne CE, les angles AEC & BEC, sont égaux à deux droits par la 13. prop. Item, pour la même raison, CEB, & DEB, seront égaux à deux droits: partant les deux angles AEC & CEB, seront égaux aux deux CEB & DEB. Que si on oste le commun CEB, le demeurant AEC

ſera egal au demeurant DEB. Le même ſe peut auſſi dire des deux angles oppoſez AED, & CEB. Parquoy ſi deux lignes droites, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

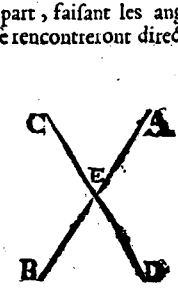
COROLLAIRE.

Il s'enſuit de cette demonſtration, que deux lignes droites s'entrecoupans, font au point de leur ſection quatre angles egaux à quatre angles droits. Eſt auſſi manifeſte qu'étans conſtituez tant d'angles qu'on voudra à l'entour d'un ſeul & même point, qu'ils ſeront ſeulement egaux à quatre angles droits, car ſi de E, *en la precedente figure, on mene tant d'autres lignes droites qu'on voudra, elles diviſeront ſeulement les quatre angles conſtituez au point* E, *en pluſieurs parties; toutes leſquelles parties priſes enſemble, ſeront egales aux quatre angles d'iceluy point* E, *par la* 19. *com. ſent. c'eſt à dire à quatre angles droits.*

SCHOLIE.

Nous demontrerons icy la converſe de cette 15. *prop. qui, ſelon Proclus, eſt telle.*

Si à un point de quelque ligne droite ſe rencontrent deux autres lignes droites, non de même part, faiſant les angles au ſommet egaux: icelles deux lignes ſe rencontreront directement.



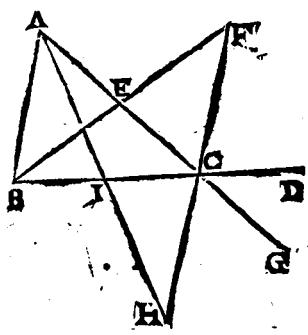
Soit la ligne droite AB, & un point en icelle E, *auquel ſoient menées les deux lignes droites* CE, DE *de part & d'autre de AB faiſant les angles* CEA, DEB *egaux entr'eux. Ie dis qu'icelles lignes* CE, DE *ſe rencontrent directement. Car adjoûtant aux angles egaux* CEA, DEB, *l'angle commun* CEB: *les deux angles* CEA, CEB *ſeront egaux aux deux angles* DEB, CEB *par le* 2. *axiome. Mais les deux angles* CEA, CEB *ſont egaux à deux droits par la* 13. *prop. Donc les deux* DEB, CEB *ſeront auſſi egaux à deux droits,*

& par la 14. prop. les lignes droites C E, D E ſe rencontreront directement. Ce qui eſtoit propoſé.

Pelletier a aucunement changé cette converſe: car il dit que ſi quatre lignes droites A E, C E, B E, D E ſe rencontrans au point E y font quatre angles dont les oppoſez A E C, B E D ſoient egaux entr'eux, & les oppoſez B E C, A E D, auſſi egaux entr'eux: les deux lignes oppoſites A E, B E ſe rencontreront directement, comme auſſi les deux C E, D E. Ce qui eſt manifeſte, car ſi aux angles egaux A E C, B E D, on ajoûte les égaux C E B, A E D, par le 2. axiome les deux angles A E C, C E B ſeront égaux aux deux angles B E D, A E D. Donc tant ces deux-là, que ces deux-cy, ſont moitié des quatre angles faits au point E, leſquels par le Corol. prec. ſont egaux à quatre droits. Parquoy les deux angles A E C, C E B, ſeront egaux à deux droits, & par la 14. prop. les deux lignes, A E, B E ſe rencontreront directement. Et pour même raiſon C E, D E feront auſſi une ſeule ligne droite C D.

THEOR. 9. PROP. XVI.

Un côté de quelconque triangle étant prolongé, l'angle exterieur eſt plus grand que l'un ou l'autre des oppoſez interieurs.



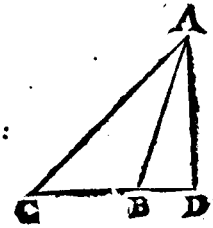
Soit le triangle A B C, duquel le coſté B C ſoit continué iuſques à D. Je dis que l'angle exterieur A C D eſt plus grand que l'oppoſé interieur B A C: Et encore plus grãd que A B C autre oppoſé interieur.

Qu'ainſi ne ſoit: Apres avoir coupé A C en deux egalement en E, ſoit menée la ligne B E, & continuée iuſques en F: en ſorte que E F ſoit faite égale à B E, & ſoit menée F C. Les deux triangles A E B, & C E F, auront les deux côtez A E & E B,

égaux aux deux costez CE & EF, chacun au sien par la construction, & par la precedente prop. l'angle AEB est égal à l'angle CEF : donc par la 4. prop. les bases AB & FC seront égales, & les autres angles égaux, chacun au sien & partãt l'angle BAE, sera égal à l'angle ECF qui n'est que partie de l'angle ACD, lequel pour cette raison sera plus grand que l'opposé interieur BAC. Que si le costé AC est prolongé en G, & BC coupé en deux également en H, & on tire la ligne AH I, tellement que HI soit égale à AH, & soit menée CI: On demontrera par même raison que dessus, que l'angle externe BCG est plus grand que l'interne & opposé ABC. Mais par la proposition precedente à iceluy BCG, est égal l'externe ACD: donc iceluy ACD, est aussi plus grand que l'interne & opposé ABC. Parquoy en tout triangle, un costé estant prolongé, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE.

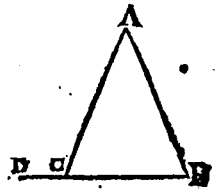
De cette proposition il s'ensuit (dit Proclus) que d'un même point on ne peut mener à une même ligne droite plus de deux lignes droites égales entr'elles. Car si faire se peut, soient menées du point A à la ligne BC, trois lignes droites AB, AC, AD, egales entr'elles: d'autant que les costez AB, AD, sont egaux, par la 5. prop. les angles ABD, ADB sur la base BD seront egaux. Derechef, pource que les costez AB, AC sont egaux, par la même 5. prop. les angles ABC, ACB sur la base BC seront egaux. Parquoy veu que chaque angle ADB & ACB, est egal à l'angle ABD, par la 1. com. sent. l'angle ABC sera egal à l'angle ADC, c'est à dire l'exterieur à l'opposé interieur : ce qui est absurde, puis que par cette 16. p. l'externe est plus grand que l'interne. Donc on ne pourra pas mener de A à BC plus de deux lignes droites egales entr'elles. Ce qui étoit proposé.



THEOR. 10. PROP. XVII.

Tout triangle a deux angles plus petits que deux droits, de qu'elle façon qu'ils ſoient pris.

Soit le triangle ABC: Je dis que les deux angles B, & ACB ſont enſemble plus petits que deux droits; comme auſsi les deux A, & ACB: Item les deux A, & B.

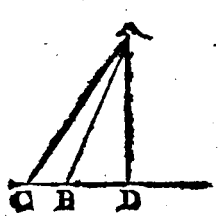


Car apres avoir continué le coſté BC, iuſques en D, il eſt evident par la 16. prop. que l'angle exterieur ACD eſt plus grand que l'oppoſé interieur B: & par la 4. com. ſent. ſi on leur adjoûte l'angle commun ACB, les deux ACD & ACB ſeront plus grands que les deux B & ACB. Mais les deux ACD & ACB, ſont egaux à deux droits, par la 13. prop. Partant ABC & ACB, ſont plus petits que deux droits.

On demontrera pareillement que les deux angles A & ACB: Item, les deux angles A & B, en prolongeant un autre coſté, ſont moindres que deux droits. Parquoy tout triangle a deux angles plus petits que deux droits, &c. Ce qu'il faloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte que d'un méme point on ne peut mener plus d'une ligne perpendiculaire ſur une ligne droite. Car ſi faire ſe peut, ſoient menées de A ſur la ligne droite BD, les deux perpendic: AD, AB. Donc au triangle ABD, les deux angles internes ABD, ADB, ſeront égaux à deux droits, puis que chacun eſt droit. Ce qui eſt impoſſible: car il a été demonſtré cy-deſſus, que deux angles d'un triangle ſont moins



dres que deux angles droits.

Il s'enſuit auſſi de cette prop. qu'en tout triangle, duquel un angle eſt droit, ou obtus, que les autres ſont aigus. Car puis qu'il a été demontré que deux angles quels qu'ils ſoient, ſont moindres que deux droits, il eſt neceſſaire que s'il y en a un droit, ou obtus, celuy qu'on voudra des deux autres ſoit aigu: car autrement en un triangle ſeroient deux angles droits, ou plus grands que deux droits.

S'enſuit encore de cette prop. que ſi une ligne droite AB, fait avec une autre ligne droite, CD, angles inégaux, ſçavoir eſt ABD, aigu, & ABC, obtus, & de quelconque point d'icelle AB, on tire une perpendiculaire ſur CD, comme AD: icelle perpendiculaire AD, tombera de la part de l'angle aigu ABD: car qu'elle tombe, s'il eſt poſſible, du coſté de l'angle obtus ABC, comme AC. Donc au triangle ABC, les deux angles ABC, ACB, obtus & droit, ſont plus grands que deux droits; mais auſſi moindres que deux droits par cette prop. ce qui eſt abſurde. La perpendiculaire tirée de A, ne tombera donc pas du coſté de l'angle obtus, & partant tombera du coſté de l'angle aigu.

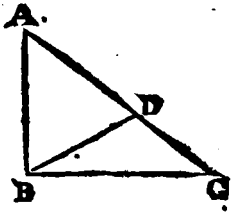
Eſt encore manifeſte par cette prop. que tous les angles d'un triangle equilateral, & les deux angles de deſſus la baſe d'un triangle Iſoſcelle, ſont aigus. Car puis que deux angles quels qu'ils ſoient, d'un triangle equilateral, & les deux de deſſus la baſe d'un Iſoſcelle ſont egaux entr'eux par la 5. prop. & tant ces deux-cy enſemble, que ces deux-là, ſont moindres que deux droits par cette prop. chacun d'iceux ſera moindre qu'un droit, c'eſt à dire aigu: car s'il étoit droit, ou obtus, tous les deux enſemble ſeroient, ou egaux à deux droits, ou plus grands.

THEOR. 11. PROP. XVIII.

De tout triangle, le plus grand côté ſoûtient le plus grand angle.

Soit un triangle ABC, ayant le coſté AC plus grand que le coſté AB. Je dis que l'angle ABC, eſt plus grand que l'angle ACB.

Qu'il ne soit ainsi : Puis que AC est plus grand que AB, d'icelluy soit retranchée AD, egale à AB, & soit menée BD. Le triangle A B D est Isoscele, & par la 5. prop. les deux angles ABD, & A D B, sur la base B D, seront egaux. Or l'angle exterieur ADB, est plus grand que l'opposé interieur, C, par la 16. prop. Mais ABC étant plus grand que ABD, il sera aussi plus grand que son égal ADB : & à plus forte raison A B C sera plus grand que C. Par même raison, si on pose le côté A C, plus grand que le côté B C ; on demontrera l'angle ABC étre plus grand que l'angle BAC, sçavoir est, si de CA on coupe une ligne égale à B C, &c. Parquoy le plus grand costé de tout triangle, &c. Ce qu'il faloit demontrer.



CORROLAIRE.

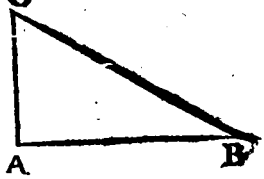
Il est donc manifeste par cette demonstration, que tous les trois angles d'un triangle scalene sont inégaux.

THEOR. 12. PROP. XIX.

En tout triangle, le plus grand angle est soûtenu du plus grand côté.

Soit le triangle A B C duquel l'angle A est plus grand que l'angle C. Je dis que le costé BC, qui soûtient le plus grand angle A, est plus grand que le costé A B, qui soûtient un moindre angle C.

Autrement, il sera egal, ou plus petit : Il ne peut étre egal, d'autant que le triangle seroit Isoscele, & par la 5. prop. les deux angles A & C seroient egaux contre l'hypothese. Il ne peut aussi étre plus petit, d'autant que par la 18. prop. l'angle A seroit plus petit que l'angle C, ce qui est aussi contre l'hypothese. Il sera donc plus grand. Par même raison on prouvera le côté BC,



être plus grand que le costé AC, si on pose l'angle A, être plus grand que l'angle B. Donc de tout triangle le plus grand angle est soûtenu du plus grand costé. Ce qu'il faloit demontrer.

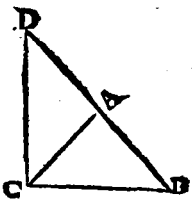
COROLLAIRE.

Il s'ensuit de cette proposition, que si de quelconque point on tire sur une ligne droite tant d'autres lignes droites qu'on voudra, l'une desquelles soit perpendiculaire, icelle perpendiculaire sera la plus petite de toutes, puis qu'elle sera toûjours opposée à un angle aigu, & les autres à l'angle droit fait par icelle perpendiculaire.

THEOR. 13. PROP. XX.

En tout triangle, deux côtez de qu'elle façõ qu'ils soient pris, sont plus grands que le troisiéme.

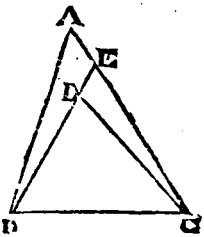
Soit le triangle ABC : Je dis que deux costez d'iceluy lesquels on voudra, sçavoir est AB & AC, sont plus grands ensemble que le troisiéme costé BC.



Qu'il ne soit ainsi apres avoir prolongé BA, jusques en D, & fait AD, égale à AC soit menée la ligne DC. Le triangle DAC, sera Isoscelle, & par la 5. prop. les deux angles ADC, & ACD, sur la base DC, seront égaux. Mais par le 9. ax. DCB, est plus grand que DCA : il sera donc aussi plus grand que son égal ADC : & partant par la 19. prop. BD, sera plus grand costé que BC. Mais BD, est égal aux deux costez AC, & BA : donc aussi iceux AC, & BA, seront plus grands que BC. On demontrera en la même maniere que deux autres costez tels que l'on voudra sont plus grands ensemble que l'autre. Parquoy. deux costez d'un triangle pris en quelque sorte que ce soit, sont plus grands que l'autre. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 14. PROP. XXI.

Si des extremitez d'un costé de quelconque triangle, on méne deux lignes droites se rencontrans au dedans d'iceluy : icelles seront plus petites que les deux autres costez du triangle, mais elles feront un plus grand angle.



Soit le triangle A B C, & des extremitez du costé B C, soient menées interieurement deux lignes droites B D, C D, se rencontrans au point D ; Je dis qu'icelles lignes B D, & C D ensemble sont plus petites que les costez B A, & C A, ensemble : mais que l'angle D, est plus grand que l'angle A.

Qu'ainst ne soit continuée B D, jusques au point E. Donc par la 20. prop. les deux costez B A, & A E, du triangle B A E, seront plus grands que le troisiéme B E : Et si on leur ajoûte chose commune E C, par la 4. comm. sont les touts C E, E B, seront tousiours plus petits que les touts C E, E A, A B, c'est à dire C A, A B. Pareillement les deux côtez C E, E D, du triangle C E D, sont plus grands que le troisiéme C D, ausquels si on ajouste chose égale, sçavoir D B, les touts C E, E D, D B, ou C E, E B, seront tousjours plus grands que les touts C D, & D B. Mais il a été demontré que C A, A B, sont plus grands que C E, E B : donc C A, A B, seront beaucoup plus grands que C D, B D. Ce qui étoit proposé en la premiere partie.

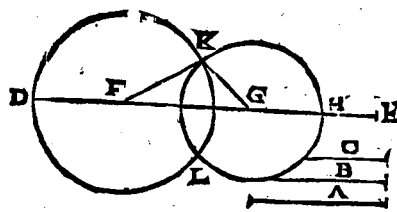
Pour la seconde partie, sçavoir que l'angle B D C est plus grand que l'angle A. D'autant qu'il est exterieur du triangle C E D, il sera plus grand que son opposé interieur C E D par la 16. prop. Mais pour la même raison, iceluy angle C E D est aussi plus grand que son opposé interieur A : donc à plus forte raison B D C sera plus grand que A. Si donc des extremitez d'un costé de quelconque triangle, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

PROB. 8. PROP. XXII.

Faire un triangle de trois lignes droites égales à trois autres données : mais il faut que deux d'icelles de qu'elle façon qu'elles soient prises, soient plus grandes que l'autre ; d'autant que de tout triangle, deux côtez de quelque façon qu'ils soient pris, sont plus grands que l'autre.

Soient trois lignes données A, B, & C, desquelles deux de qu'elle façon qu'elles soient prises, sont plus grandes que la troisiéme : car autrement d'icelles on ne pourroit pas constituër un triangle, comme il apert de la 20. prop. en laquelle il a été demontré que de tout triangle deux costez sont tousjours plus grands que l'autre. Il faut faire un triangle ayant les trois côtez egaux à icelles trois lignes données.

Soit prise une ligne droite, tant grande qu'il sera de besoin, comme DE, de laquelle soit retranchée DF, egale à A ; & puis du reste soit prise FG egale à B, & GH egale à C, & du centre F, & de l'intervale FD, soit décrit un cercle DKL : Item un autre cercle HKL du centre G, & de l'intervale GH, coupant le premier cercle au point K duquel soient menées les deux lignes KF, KG. Je dis que les costez du triangle FKG sont egaux aux trois lignes données A, B, C.

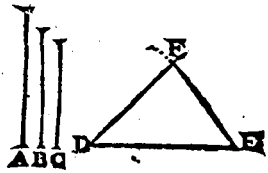


Car d'autant que FD, FK sont egales par la def. du cercle : Item GK & GH ; les trois costez du triangle FKG, sont egaux aux trois lignes FD, FG, GH, lesquelles étans egales aux trois données par la construction ; aussi les costez du triangle FKG seront egaux à icelles lignes données A, B, C. Nous avons donc fait

fait un triangle de trois lignes droites egales aux trois lignes droites données A, B, C. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

La pratique de ce probl. eſt enſeignée en noſtre Geometrie pratique Prob. II. *& eſt telle : Soit priſe la ligne droite* D E *egale a quelconque des données comme à A, puis du point D ; & intervale de la ligne* B, *ſoit décrit un arc* F : *ſemblablement du point* E, *& de l'intervale de l'autre ligne C, ſoit décrit un autre arc qui coupe le premier au point F: puis à ladite interſection ſoient tirées les deux lignes droites DF,* E F ; *& ſera fait le triangle D E F, ayant les trois coſtez egaux aux trois lignes droites données A, B, C.*

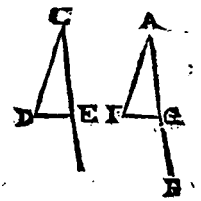


PROBL. 9. PROP. XXIII.

Sur une ligne droite donnée, & à un point donné en icelle, faire un angle rectiligne egal à un angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnée AB, & le point en icelle A, ſur lequel il faut faire un angle rectiligne egal à l'angle rectiligne donné C.

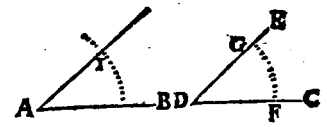
Ayant pris és lignes CD, CE, qui conſtituënt l'angle donné C quelconques points D, E, ſoit menée la ligne D E : & ſur AB ſoit conſtruit par la prop. precedente le triangle A F G, ayant les trois côtez egaux aux trois côtez du triangle CDE, ſçavoir eſt les deux côtez AF, AG, egaux aux deux côtez C D, C E, & la baſe F G à la baſe DE. Il eſt donc evident par la 8. prop. que l'angle A



ſera egal à l'angle C donné. Nous avons donc fait ſur AB, & au point A, l'angle F A G egal à un donné D C E, ainſi qu'il étoit requis.

SCHOLIE.

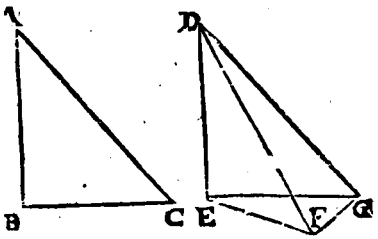
Combien que la pratique de ce probléme ſoit enſeignée en noſtre Geometrie pratique, neanmoins nous l'enſeignerons encore icy. Soit une ligne donnée A B, & un point en icelle A, auquel il faut faire un angle rectiligne egal au donné C D E. Du centre D ſoit fait de tel interuale qu'on voudra un arc F G, qui coupe les lignes de l'angle donné és points F, G: puis du méme interuale, ſoit décrit du centre A un arc interminé H I: En apres, ſoit priſe la diſtance F G, & icelle portée ſur l'arc H I, puis du point A par I, ſoit tirée la ligne droite A I, & ſera fait l'angle H A I egal à l'angle donné C D E.



THEOR. 15. PROP. XXIV.

Si deux triangles ont deux côtez egaux à deux côtez, chacun au ſien, & l'angle contenu d'iceux côtez plus grand que l'angle, ils auront auſſi la baſe plus grande que la baſe.

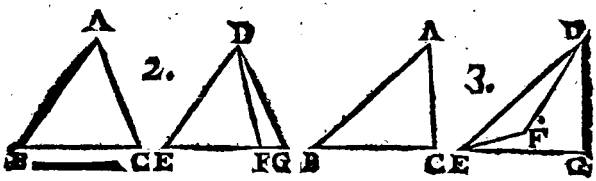
Soient deux triangles A B C & D E F, deſquels deux coſtez A B, A C ſont egaux aux coſtez D E, D F, chacun au ſien: mais l'ãgle A eſt plus grãd que l'angle F, D, F. Ie dis que la baſe B C, eſt plus grande que la baſe E F.



Qu'ainſi ne ſoit. Sur la ligne D E, & au point D, ſoit fait par la precedente prop. l'angle E D G, égal à l'angle A, (& la ligne

droite DG, tombera hors le triangle D E F, puis que l'angle EDF, a été posé moindre que l'angle A) & soit posée DG, egale à DF, c'est à dire à AC : Soit tirée puis apres la ligne EG, laquelle tombera ou au dessus de la ligne EF, ou sur icelle, ou au dessous d'icelle. Qu'elle tombe premierement au dessus de EF, & soit tirée la ligne FG. D'autant que les deux costez AB, AC, sont egaux aux deux costez DE, DG, un chacun au sien, & l'angle A egal à l'angle EDG par la construction : la base BC sera egale à la base EG, par la 4. prop. Et puis que les deux costez DF, DG, sont egaux entr'eux : les angles DFG, DGF seront aussi egaux entr'eux par la 5. prop. Mais l'angle DGF est plus grand que l'angle EGF, par la 9. com. sent. donc aussi l'angle DFG sera plus grand que le méme angle EGF : parquoy tout l'angle EFG sera beaucoup plus grand que le méme angle EGF : donc au triangle EFG le costé EG sera plus grand que le costé EF par la 19. prop. Mais il a été demontré que EG est egale à B C : donc BC sera aussi plus grande que EF : Ce qui étoit proposé.

Maintenant, que EG tombe sur icelle EF : ainsi qu'en la 2. fig. d'autant que comme dessus la base EG, sera egale à la base



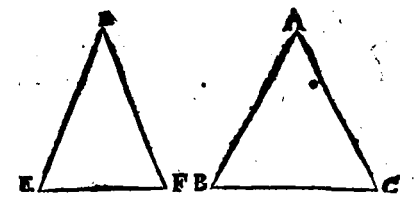
B C par la 4. prop. & G E est plus grande que E F par la 9. com. sent. aussi BC sera plus grande que EF : Ce qui étoit proposé.

En troisiéme lieu, que EG tombe au dessous de EF. Il est evident que les deux lignes interieures D F EF sont plus petites que les deux costez DG, EG par la 21. prop. Mais par la construction DG est egale à DF : donc EG est plus grande que EF par la 5. com. sent. Mais comme dessus par la 4. prop. EG est egale à BC : donc aussi icelle BC sera plus grande que EF. Si donc deux triangles ont deux costez egaux, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 16. PROP. XXV.

Si deux triangles ont deux côtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, & la baſe plus grande que la baſe; ils auront auſſi l'angle contenu d'iceux côtez egaux, plus grand que l'angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, deſquels les deux côtez AB & AC, ſont egaux aux deux DE & DF, chacun au ſien: Mais la baſe BC eſt plus grande que la baſe EF. Je dis que l'angle A eſt plus grand que l'angle D.



Autrement, il ſera egal, ou plus petit. Mais il ne peut être égal: d'autant que par la 4. prop. les baſes BC & EF ſeroient egales contre l'hypotheſe. Pareillement il ne peuſt être plus petit; d'autant que par la 24. prop. la baſe BC ſeroit plus petite que la baſe EF, & elle a été poſée plus grande. Parquoy l'angle A ſera plus grand que l'angle D, puis qu'il ne peuſt être egal ny plus petit. Si donc deux triangles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

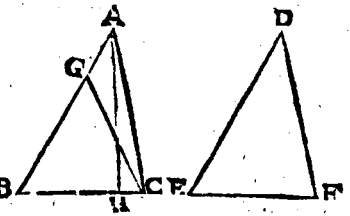
THEOR. 17. PROP. XXVI.

Si deux triangles ont deux angles egaux à deux angles, chacun au ſien, & un côté egal à un côté, ſçavoir eſt, ou celuy aux extremitez duquel ſont les angles egaux, ou bien celuy qui ſoûtient l'un d'iceux angles egaux: ils auront auſſi les autres côtez egaux aux autres côtez, chacun au ſien, & l'autre angle egal à l'autre angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, deſquels les angles B &

ACB, ſont egaux aux deux E & F, chacun au ſien, & ſoit premierement le coſté B C, aux extremitez duquel ſont les angles B & A C B, egal au coſté E F, aux extremitez duquel ſont les angles E & F. Je dis que les deux autres coſtez AB, AC, ſont egaux aux deux autres coſtez DE, DF, chacun au ſien, ſçavoir eſt AB à DE, & AC à DF, & l'autre angle BAC egal à l'autre angle D.

Car ſi A B n'eſt égal à D E, l'un d'iceux ſera plus grand: Soit donc A B plus grand, s'il eſt poſſible, & d'iceluy ſoit retranchée B G égale à DE : puis ſoit tirée la ligne droite C G. Donc puis que les coſtez BC, BG, ſont égaux aux coſtez E F, DE, chacun au ſien, & l'angle B égal à l'angle E, par la 4. prop. la baſe CG ſera égale à la baſe F D, & les autres angles égaux aux autres angles chacun au ſien, c'eſt à ſçavoir que l'angle B C G ſera égal à à l'angle F, auquel eſt auſſi égal l'angle ABC par l'hypotheſe. Partant les deux angles ACB & GCB ſeroient égaux, la partie au tout : ce qui eſt abſurbe. Donc le coſté AB n'étoit pas inégal au coſté DE, mais égal. Parquoy veu que les coſtez AB BC ſont égaux aux coſtez DE, EF, chacun au ſien, & l'angle B égal à l'angle E ; la baſe AC ſera égale à la baſe DF, & l'autre angle BAC égal à l'autre angle D, par la 4. prop. de ce livre. Ce qui étoit propoſé.



Soient maintenant égaux deux autres coſtez ſçavoir eſt AB à DE ſouſtendans angles égaux ACB & F. Je dis derechef que les deux autres coſtez AC, BC ſont égaux aux deux autres côtez DF, EF, chacun au ſien, c'eſt à dire AC à DF, & BC à EF : & l'autre angle BAC égal à l'autre angle D. Car ſi le côté BC n'eſt égal au coſté EF, ſoit le plus grand BC, duquel ſoit couppé BH égal à EF, puis tiré la ligne A H. Donc puis que les coſtez AB, BH ſont égaux aux coſtez DE, EF, un chacun au ſien, & l'angle B eſt égal à l'angle E par l'hypotheſe, par la 4. prop. la baſe ſera égale à la baſe, & les autres angles égaux aux autres angles, c'eſt à ſçavoir, que l'angle AHB ſera

égal à l'angle F. Mais par l'hypotheſe l'angle ACB, eſt auſſi égal à l'angle F. Donc l'angle AHB, ſera auſſi egal à l'angle ACB, l'exterieur à ſon oppoſé interieur : ce qui eſtabſurde : car il eſt plus grand par la 16. prop. Le coſté BC n'eſtoit donc pas plus grand que le coſté EF, ains égal. Parquoy les deux coſtez AB, BC, ſont égaux aux deux coſtez DE, EF, chacun au ſien, & par la 4. prop. l'angle B eſtant égal à l'angle E, les baſes AC, DF, ſeront égales, & les autres angles BAC & D auſſi égaux. Parquoy ſi deux triangles ont deux angles égaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte par la demonſtration de cette propoſition, que le triangle eſt auſſi egal au triangle.

SCHOLIE.

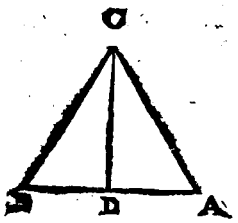
Nous demontrerons icy deux theorémes aſſez utils & neceſſaires en Geometrie : le premier eſt tel.

En un triangle equilateral, ou Iſoſcelle, étant menée une ligne droite de l'angle contenu des deux coſtez egaux, laquelle diviſe en deux egalement, ou l'angle, ou la baſe ; elle ſera perpendiculaire à la baſe : & ſi elle coupe l'angle en deux egalement, elle coupera auſſi la baſe en deux egalement : Mais ſi elle coupe en deux egalement la baſe, elle coupera pareillement l'angle en deux egalement. Et au contraire étant tirée une ligne droite perpendiculaire à la baſe, elle diviſera en deux egalement, tant la baſe que l'angle.

Au triangle ABC ſoient deux coſtez egaux AC, BC, & la ligne droite CD diviſe premierement l'angle C en deux egalement. Ie dis qu'icelle ligne CD eſt perpendiculaire à la baſe AB, & la diviſe en deux egalement. Car puis que les deux coſtez AC, CD, ſont egaux aux deux coſtez BC, CD, & les angles qu'ils contiennent auſſi egaux, par la quatriéme prop. les baſes AD, BD ſeront auſſi egales, & les angles au point D egaux, & partant droits.

Que ſi la ligne droite CD diviſe en deux egalement la ligne AB : Ie dis que la ligne droite CD eſt perpendiculaire à la ligne AB, & que l'angle C eſt coupé en deux

egalement. Car puis que les deux costez AD, DC, sont egaux aux deux costez BD, DC, & la base AC egale à la base BC, par la 8. prop. les angles du point D seront egaux, & partant droits, & la ligne CD perpendiculaire, & par le Corol. de la 8. prop. les angles qui sont en C seront aussi egaux.



Maintenant soit la ligne droite CD perpendiculaire à AB: Ie dis qu'elle coupe aussi la base BA, & l'angle C en deux egalement. Car par la 5. prop. les angles A & B seront egaux: parquoy puis que les deux angles A & D du triangle ACD, sont egaux aux deux angles B & D, du triangle BCD, un chacun au sien, & le costé CD opposé aux angles egaux A & B commun, par la 26. prop. les autres costez AD, BD, seront aussi egaux, & les autres angles du point C pareillement egaux, Ce qu'il faloit demontrer.

Le second Theoréme est tel.

Le triangle auquel une ligne droite tirée de l'un des angles perpendiculaire à la base, divise ou la base ou l'angle en deux egalement, a les deux costez comprenant iceluy angle egaux: Et si la base est divisée en deux egalement, l'angle sera aussi divisé en deux egalement: Mais si l'angle est divisé en deux egalement, aussi sera la base divisée en deux egalement.

Au méme triangle ABC, soit CD perpendiculaire à la base AB, & la divise en deux également. Ie dis que les costez AC & BC sont egaux, & les angles à C aussi egaux. Car puis que les deux costez AD, DC, sont égaux aux deux costez BD, DC, & les angles qu'ils comprennent aussi egaux, sçavoir droits par la 4. prop. les bases AC, BC, & les angles à C seront pareillement egaux.

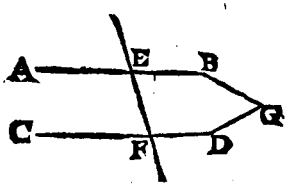
Maintenant, que la perpendiculaire CD coupe en deux egalement l'angle C: ie dis que les costez AC, BC sont egaux, & les lignes AD, BD aussi egales: Car puis que les deux angles D, C du triangle ACD. sont egaux aux deux angles D, C du triangle BCD, & le costé CD est commun, par la 26. prop. les deux côtez AC, BC, seront egaux, & les côtez AD, BD, aussi egaux: Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 18. PROP. XXVII.

Si une ligne droite tombant sur deux lignes droites fait les angles opposez alternativement egaux ; icelles deux lignes seront paralleles entr'elles.

Soient deux lignes droites AB & CD, sur lesquelles tombant la ligne droite EF, fait les angles BEF, & EFC alternativement égaux. Je dis que AB & CD sont paralleles.

Car si elles ne sont paralleles, estans continuées elles se rencontreront : Que si elles se rencontroient, comme au point G, elles feroient un triangle avec le costé EF, & l'angle exterieur CFE seroit plus grand que l'opposé interieur FEB par la 16. prop. ce qui est contre l'hypothese Donc les deux lignes AB, &

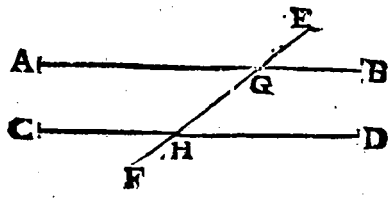


& CD ne se rencontreront jamais ; & par la 25. def. icelles lignes seront paralleles entr'elles. Parquoy si une ligne droite tombante sur deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 19. PROP. XXVIII.

Si une ligne droite tombant sur deux lignes droites, fait l'angle exterieur égal à son opposé interieur du mesme costé ; ou bien les deux interieurs de même costé, égaux à deux droits; icelles deux lignes seront paralleles entr'elles.

Soient deux lignes droites AB & CD, sur lesquelles tombant une autre ligne droite EF, fasse l'angle exterieur EGA égal à GHC son opposé interieur du même costé. Je dis que AB & CD sont paralleles entr'elles.



Car puis que l'angle GHC eſt posé égal à l'angle EGA, auquel eſt auſſi egal l'angle BGH par la 15 prop. les angle alternes BGH, GHC, ſeront égaux par la premiere commune ſentence : partant les lignes droites AB, CD ſeront paralleles par la propoſition precedente. Ce qui étoit proposé.

Pour la ſeconde partie. Je dis que ſi les deux angles interieurs de même coſté AGH, & CHG ſont egaux à deux droits, auſſi AB & CD ſeront paralleles. Car par la 13, propoſition, les deux angles GHC, & GHD ſont egaux à deux droits ; partant auſſi egaux aux deux AGH & GHC. Que ſi d'iceux angles egaux, on oſte le commun GHC, les demeurans AGH & GHD ſe trouveront alternativement egaux, & par la 27. prop. AB & CD ſeront paralleles. Si donc une ligne droite tombant ſur deux lignes droites, &c. Ce qui faloit demontrer.

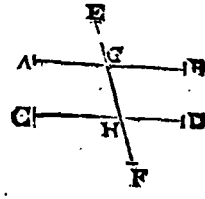
THEOR. 20 PROP. XXIX.

Si une ligne droite tombe ſur deux lignes droites paralleles, elle fera les angles oppoſez alternativement egaux ; & l'exterieur egal à ſon oppoſé interieur du même côté : & les deux interieurs de même côté egaux à deux droits.

Soient deux lignes droites paralleles AB & CD, ſur leſquelles tombe la ligne droite EF. Je dis en premier lieu que les angles AGH & GHD oppoſez alternativement ſont egaux.

Autrement, s'ils ne ſont egaux, AGH ſera plus grand, ou plus petit que l'autre. Soit donc AGH plus petit, s'il eſt poſſible, que GHD : & ſi à iceux angles inégaux on ajoûte choſe comm. ſçavoir l'angle GHC, les deux angl. AGH & GHC ſeront plus petits que les deux GHC & GHD, leſquels par la 13. prop. étans egaux à deux droits, AGH & GHC ſeront plus petits

que deux droits, & par la 11. com. sent. les deux lignes AB & CD ne sont point paralleles : ce qui est contre nostre hypothese. Donc il falloit que l'angle AGH fust égal à l'angle GHD son alterne opposé.



Pour la seconde partie. Je dis que l'angle exterieur EGB est égal à son opposé interieur de-mesme costé GHD : ce qui est manifeste par ce qui a été demontré cy-dessus, sçavoir que les angles AGH & GHD étoient égaux, étant aussi EGB egal à AGH par la 15. proposition ; & par la 1. com. sent. EGB & GHD seront égaux, étans tous deux égaux au même AGH.

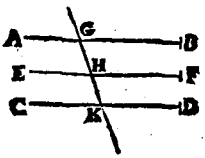
Pour la troisiéme partie : je dis que les deux angles interieurs de méme costé AGH & GHC sont égaux à deux droits : car s'il étoit autrement les lignes AB & CD ne seroient paralleles par la 11. com. sent. contre l'hypothese. Si donc une ligne droite tombe sur deux lignes droites, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 21. PROP. XXX.

Les lignes droites paralleles à une mesme ligne droite, sont paralleles entr'elles.

Soient les lignes droites AB, CD, paralleles à une même ligne droite EF. Je dis que AB & CD sont paralleles entr'elles.

Car d'autant que toutes ces lignes AB, EF, CD, sont posées en un même plan, soit tirée la ligne droite GHK, qui les couppe toutes trois, sçavoir est AB en G ; EF en H ; & CD en K. Et puis que AB est posée parallele à EF, les angles alternes AGH, GHF, seront égaux entr'eux par la precedente proposition. Derechef, puis que CD est aussi posée parallele à la même EF ; l'angle DKH sera aussi égal au même angle GHF c'est à sçavoir l'interne à l'externe. Parquoy les angles AGH & DKH seront egaux entr'eux, lesquels étans alternes, les lignes AB &



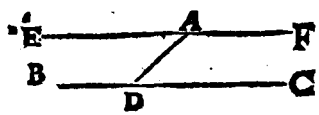
CD ſont paralleles entr'elles, par la 27. prop. Parquoy les lignes droites paralleles à une même ligne droite ſont paralleles entr'elles. Ce qu'il faloit démontrer.

SCHOLIE.

Si quelqu'un diſoit que AG & BG ſont paralleles à EF, & toutesfois elles ne ſont paralleles entr'elles, il faudroit répondre qu'icelles AG & BG ne ſont pas deux lignes, mais ſeulement les deux parties d'une ſeule & meſme ligne : Car il faut entendre que toutes les paralleles dont parle icy Euclide, ſoient infiniment produites ſans ſe rencontrer : mais il appert que AG étant prolongée ſe rencontre avec BG.

PROBL. 10. PROP. XXXI.

D'un point donné, mener une ligne droite parallele à une ligne droite donnée.



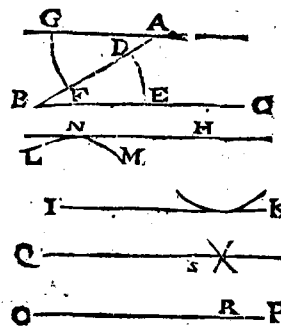
Soit le point donné A, duquel il faut mener une ligne droite parallele à la donnée BC. Soit menée la ligne AD faiſant avec la ligne donnée BC, quelconque angle ADC, & ſur icelle AD, & au point A ſoit fait l'angle DAE égal à l'angle ADC. Je dis que la ligne EA tirée tant qu'on voudra vers F, eſt parallele à BC. Car puis que par la conſtruction les angles alternes ADC, DAE ſont égaux, les lignes BC, FE ſeront paralleles entr'elles par la 27. prop. Nous avons donc d'un point donné A, mené une ligne droite EF parallele à une ligne droite donnée BC. Ce qu'il faloit faire

SCHOLIE.

Il eſt manifeſte par cette conſtruction, que le point donné doit être tellement ſitué hors la ligne donnée, qu'icelle étant continuée directement ne rencontre iceluy. Quant à la pratique de cette propoſition, nous l'avons enſeignée en nos Memoires Mathematiques, Prob. 6. de la Geo-

metrie pratique, laquelle toutesfois nous repeterons icy. Du point donné A soit menée la ligne droite AB faisant avec la ligne donnée BC, l'angle ABC; puis de A & B comme centres, & d'un même intervale, soient décrits les deux arcs DE, FG, & fait FG egal à DE, puis par les points A & G soit menée la ligne droite AG si grande qu'on voudra, & icelle sera parallele à BC.

Autrement, *si du point H on veut mener une parallele à la ligne droite IK, du centre H soit fait un arc qui touche seulement la ligne donnée IK, puis du centre I (qui est l'extremité de la ligne le plus éloigné de l'arc ja fait) & du mesme intervalle soit décrit un autre arc LM, puis du point H soit tirée la ligne droite HN, qui touche l'arc LM, & icelle ligne HN sera la parallele requise.*



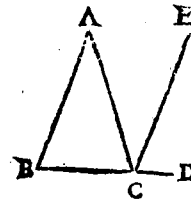
Encore autrement: *Si du point Q, il faut tirer une ligne parallele à une ligne donnée OP, soit pris en icelle ligne quelconque distance, comme OR, avec laquelle soit décrit du centre Q un arc S; puis soit pris la distance ou intervalle QO, & d'iceluy soit aussi décrit du centre R un arc qui coupe le precedent en S, & d'icelle intersection soit tirée par le point donné Q la ligne droite QS, laquelle sera parallele à OP, ainsi qu'il étoit requis.*

THEOR. 22. PROP. XXXII.

En tout triangle, l'un des côtez étant prolongé, l'angle exterieur est égal aux deux opposez interieurs; & de chacun triangle les trois angles interieurs sont égaux à deux droits.

Soit le triangle ABC, duquel le costé B C, soit prolongé

jusques en D : Je dis en premier lieu que l'angle exterieur ACD, est egal aux deux opposez interieurs A & B.



Qu'il ne soit ainsi : qu'on mene CE parallele à BA par la 31. prop. & d'autant que la ligne AC tombe sur les paralleles AB, EC, par la 29. prop. les angles BAC, & ACE, seront alternativement egaux : Item l'exterieur ECD, sera egal à son opposé interieur ABC. Partant il est manifeste que le total ACD, est egal aux deux A & B, opposez interieurement.

Pour la seconde partie que les trois angles A, B, & C, interieurs du triangle ABC sont egaux à deux droits, il est evident, étant ACD egal aux deux A & B. Mais ACD & ACB, sont ensemble egaux à deux droits par la 13. prop. Partant les trois angles interieurs A, B, & ACB, seront aussi egaux à deux angles droits. Si donc de tout triangle, l'un des costez est prolongé, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

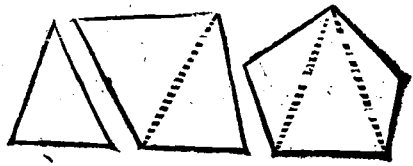
SCHOLIE.

De cette proposition nous pouvons colliger à combien d'angles droits sont egaux tous les angles internes de quelconque figure rectiligne, qui n'en a point d'externe & ce par deux manieres, dont la premiere est telle.

Tous les angles de quelconque figure rectiligne, sont egaux à deux fois autant d'angles droits, qu'icelle est entre les figures rectilignes.

C'est à dire, que tous les angles de la premiere figure rectiligne sont egaux à deux fois un droit, c'est à dire, à deux droits : Mais les angles de la seconde figure rectiligne, sont egaux à deux fois deux droits, savoir est à quatre droits : Mais ceux de la troisiéme figure, sont egaux à deux fois trois droits, c'est à dire à six droits, & ainsi des autres. Or le lieu qu'obtient chaque figure rectiligne entre les figures rectilignes, est montré par le nombre des costez, ou des angles, deux d'iceux ostez, d'autant que deux lignes droites n'enferment pas une superficie, & par consequent ne consti-

tuent une figure : mais ſont requiſes au moins trois lignes droites pour conſtituer une figure rectiligne : d'où vient que le triangle eſt la premiere figure rectiligne : Car de ſes coſtez, en eſtans oſtez deux, reſte un : ainſi la figure ayant douze coſtez, ou douze angles, ſera la dixiéme figure, puis que deux eſtans oſtez de douze reſtent dix : & ainſi faut-il juger des autres. Parquoy puis que la figure contenuë de douze coſtez, eſt la dixiéme, elle aura auſſi douze angles equivallans à vingt angles droits, c'eſt à ſçavoir à deux fois dix angles droits : Ainſi auſſi tous les dix angles de la figure contenuë de dix coſtez, equivallent à ſeize angles droits, puis qu'icelle figure eſt la huitiéme en ordre entre les figures rectilignes. Or la raiſon de cecy eſt, que toute figure rectiligne ſe diviſe en autant de triangles, qu'elle eſt quantiéme en ordre entre les figures, ou bien qu'elle a d'angles, ou de coſtez, deux eſtans oſtez : Car de quelconque angle d'une figure, on peut tirer des lignes droites à tous les angles oppoſez : mais aux deux plus prochains on n'en peut pas tirer. Parquoy la figure ſera diviſée en autant de triangles qu'elle a d'angles, deux d'iceux eſtans oſtez. Ainſi il eſt evident que le triangle ne ſe peut diviſer en autres triangles : mais le quadrangle ſe coupe en deux : le Pentagone en trois, &c. Vû donc que les angles d'iceux triangles conſtituent tous les angles de la fig. propoſée, & tous les angles de quelconque triangle rectiligne ſont égaux à deux droits : il eſt manifeſte que tous les angles de quelconque figure rectiligne ſont egaux à deux fois autant d'angles droits, qu'eſt le nombre des triangles eſquels elle ſe diviſe, c'eſt à dire à deux fois autant d'angles droits, qu'icelle figure eſt quantiéme en ordre entre les figures rectilignes. Ce qu'on voit manifeſtement és figures cy-deſſus apposées.

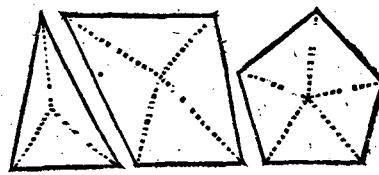


Le ſecond moyen par lequel on ſçaura la valeur des an-

les de quelconque figure rectiligne, est cestuy-cy.

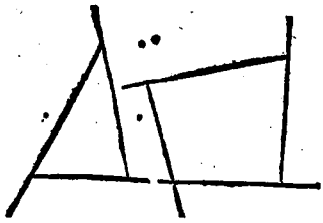
Tous les angles de quelconque figure rectiligne, sont égaux à deux fois autant d'angles droits, quatre étans ostez, qu'il y a en icelle d'angles, ou de costez.

C'est à dire, que les angles de chaque triangle sont égaux à deux fois trois droits, quatre ostez, c'est à sçavoir à deux droits: Ainsi aussi les angles de la figure de douze costez, vaudront deux fois douze angles droits, moins quatre, sçavoir est vingt angles droits, &c. Or la demonstration de cela est telle. Si de quelconque point pris dedãs la figure on tire des lignes droites à tous les angles, il y aura autant de triangles en ladite figure, qu'elle a d'angles ou de costez. Veu donc que les trois angles de chaque triangle par la 32. prop. sont égaux à deux droits, tous les angles d'iceux triangles, sont egaux à deux fois autant de droits qu'il y a de costez en la figure. Mais il est evident que les angles des mesmes triangles qui sont à l'entour du point pris dedans la figure, n'appartiennent aux angles de ladite figure proposée: & partant si on oste ces angles-là, les autres angles des triangles qui constituent ceux de la figure proposée, seront aussi egaux à deux fois autant d'angles droits, ceux d'alentour le point pris étans ostez, qu'il y a de costez, ou d'angles à la figure. Mais tous ces angles-là d'alentour le point pris, sont seulement egaux à quatre droits, ainsi que nous l'avons colligé de la 15. prop. Parquoy les angles de quelconque figure rectiligne sont égaux à deux fois autant de droits, quatre étans ostés, que ladite figure cõtient d'angles ou de cõtés



Or il apert de ce que dessus, que si chaque coté de quelconque figure rectiligne, qui n'a que des angles interieurs, est prolongé par ordre vers une même part, tous les angles externes pris ensemble, seront egaux à quatre droits. Car par la 13 prop. les angles interieurs pris avec les exterieurs, sont egaux à deux fois autant d'angles droits, qu'il y a d'angles, ou de costez en la figure.

Mais les angles interieurs ſont egaux à deux fois autant de droits, quatre oſtez, que ladite figure a d'angles, comme nous auons montré cy-deſſus; partant les exterieurs ſont touſjours egaux à quatre droits. Par exemple: En quelconque triangle, les angles interieurs & exterieurs enſemble, ſont egaux à ſix droits: comme il apert en cette figure.



Mais par la 32 prop. les internes ſeuls ſont egaux à deux droits. Donc les ſeuls exterieurs ſeront egaux à quatre droits. En un quadrangle, les angles exterieurs, & les interieurs enſemble, ſont egaux à huit droits. Mais les interieurs ſeuls ſont egaux à quatre droits, comme nous avons demontré; les extérieurs ſeuls ſeront donc auſſi egaux à quatre droits. Toutes leſquelles choſes peuvent étre veuës és figures appoſées cy-deſſus. Il y a la méme raiſon en toutes autres figures qui ont tous leurs angles interieurs.

COROLLAIRE.

Il reſulte de cette 32. prop. que les trois angles de quelconque triangle rectil. pris enſemble, ſont égaux aux trois angles de quelconque autre triangle pris enſemble: Pource que tant ces trois-là, que ces trois-cy, ſont égaux à deux droits: d'où vient que ſi deux angles d'un triangle ſont egaux à deux angles d'un autre triangle, le troiſiéme angle de l'un ſera auſſi égal au troiſiéme angle de l'autre; & de plus, ſi les deux angles de ce triangle-là ſont égaux aux deux angles de de cettui-cy, chacun au ſien, les triangles ſeront equiangles.

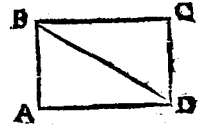
Il appert auſſi que tout triangle Iſoſcelle, duquel l'angle compris des coſtez égaux eſt droit, à chacun des autres angles demy droit: car ces deux enſemble font un droit, puis que par la 32. prop. les trois ſont égaux à deux droits, & que le troiſiéme eſt poſé droit: Parquoy puis que par

que par la 5. prop. les deux restãs sont égaux entr'eux: chacun d'iceux sera demy droit. Mais si l'angle cõtenu des cotés egaux étoit obtus, chacun des autres seroit moindre qu'un demy droit: car les deux ensemble seroient moindres qu'un droit, &c. Finalement si ledit ãgle estoit aigu, chacun des autres, seroit plus grand qu'un demy droit: pource que les deux ensemble seroient plus grands qu'un droit, &c. D'où resulte derechef que les triangles Isoscelles, qui ont les angles du sommet égaux, sont equiangles; attendu que chacun des angles de dessus la base, sera la moitié du reste de deux droits.

Il est pareillement manifeste, que chaque angle d'un triangle equilateral, est les deux tierces parties d'un droit, ou la tierce partie de deux droits. Car deux angles droits, ausquels sont égaux les trois angles d'un triangle equilateral par cette 32. propos. estans divisez en trois angles égaux, chacun d'iceux sera necessairement la tierce partie de deux droits, ou bien les deux tierces parties d'un droit.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Les lignes droites qui conjoignent deux lignes droites égales & paralleles, & de mesme part, sont aussi égales & paralleles.



Soient deux lignes droites AB & CD, qui conjoignent de mesme part deux autres lignes droites AD & BC égales & paralleles. Je dis que AB & CD, sont aussi égales & paralleles.

Qu'il ne soit ainsi: soit menée la diagonalle BD: Icelle tombant sur les deux paralleles AD & BC, fera les angles ADB & CBD alternativement egaux par la 29. prop. Item AD & BC étans egales, les deux triangles ABD & CBD, auront deux costez egaux à deux costez chacun au sien, & les angles qu'ils comprennent aussi egaux, & par la 4. prop. la base AB sera egale à la base CD, & l'angle ABD sera egal alternativemẽt à l'angle CDB, & par la 27. prop. icelles lignes egales AB & CD, seront aussi paralleles

Donc les lignes droites qui conjoignent deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

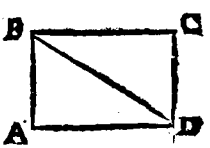
SCHOLIE.

Euclide a dit que les lignes égales & paralleles doivent être conjointes de même part, afin que celles qui les joindront soient aussi égales & paralleles pource que si on les conjoignoit de part & d'autre, comme de A à C, & de B à D il est manifeste que les lignes qui les joindroient ainsi, ne seroient jamais paralleles, ains s'entrecoupperoient toûjours, & ne seroient que rarement égales.

THEOR. 24. PROP. XXXIV.

En tout parallelogramme, les côtés & les angles opposez, sont égaux entr'eux; & la diagonalle le couppe en deux également.

Soit le parallelogramme A BCD, auquel soit menée la diagonalle BD. Je dis que le côté AB, est égal à son opposé CD & aussi le côté AD égal au côté BC: Item que l'angle A est égal à son angle opposé C, & encore l'angle A B C égal à l'angle ADC: finallement qu'iceluy parallelogramme ABCD, est couppé en deux également par la diagonalle BD.



Car puis que la figure quadrilatere ABCD est un parallelogramme, le côté AB sera parallele au côté CD, & le côté AD au côté BC, & par la 29. propos. l'angle ABD sera alternativement égal à BDC. Item l'angle ADB alternativement égal à l'angle CBD. Ainsi les deux triangles BAD & DCB auront les angles A B D & B D A, égaux aux angles BDC & CBD, chacun au sien: & le côté BD commun à tous les deux susdits triangles: & partant par la 26. prop. les autres costez AB & AD, seront égaux aux autres costez C D & B C, chacun au sien, & l'autre angle A égal à l'autre

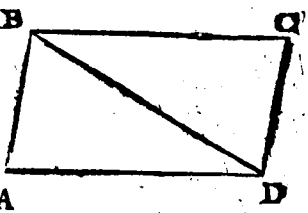
angle C. Et de plus il eſt évident que les deux angles du point B enſemble, ſeront égaux aux deux enſemble du point D. Encores par la 4. propoſ. les triangles ABD & CDB ſeront égaux; & partant le parallelogramme ABCD eſt couppé en deux également par la diagonalle BD. Donc en tout parallelogramme les coſtez & les angles, &c. Ce qui eſtoit à prouver.

SCHOLIE.

Euclide à bien dit icy que la diagonalle couppe le parallelogramme en deux également, mais il n'a rien dit des angles, pource qu'icelle diagonalle les couppe quelquesfois en deux également, & d'autres fois inegallement, ainſi qu'il eſt démontré au troiſiéme Theoreme ſuivant.

1. Tout quadrilatere ayant les coſtez oppoſez égaux eſt parallelogramme.

Au quadrilataire ABCD, les coſtez oppoſez AB, CD ſoient egaux, & auſſi les oppoſez AD, BC. Ie dis qu'icelluy quadrilatere ABCD eſt un parallelogramme. Car ayant mené la diagonalle BD, les deux coſtez AB, BD du triangle ABD ſeront egaux aux deux côtez DC, BD du triangle BCD, chacun au ſien, & la baſe BD, egale à la baſe BC. Donc par la 8. propoſ. l'angle ABD ſera egal à l'angle CDB, qui luy eſt alterne, & encore ADB à ſon alterne CBD par le Corollaire d'icelle 8. prop. Et par la 27. p. les lignes AB, CD ſeront paralleles; comme auſſi BC, AD: & par la 36. def. le quadrilatere ABCD eſt un parallelogramme. Ce qui étoit propoſé.



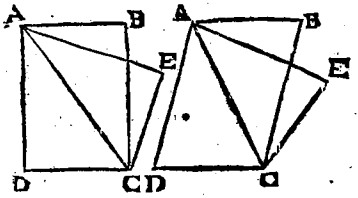
De cecy reſulte que les Rhombes, & les Rhomboides ſont parallelogrammes, puis qu'ils ont leurs coſtez oppoſez egaux.

2. Tout quadrilatere qui a les angles oppoſez egaux, eſt parallelogramme.

Au quadrilatere ABCD, les angles opposez A & C soient egaux, comme aussi les opposez B & D. Ie dis que ABCD est un parallelogramme. Car si aux angles egaux A & C, on ajoute les angles egaux B & D: par le 2. Ax. les deux angles A & B seront egaux aux deux angles C & D: partant les deux A & B seront la moitié des quatre angles A, B, C & D. Mais ces quatre cy sont egaux à quatre droits, comme nous avons demontré au Scholie de la 32. prop. Donc les deux A & B seront egaux à deux droits, & par la 28. prop. les costez AD, BC seront parallels. Par mesme raison les costez AB, DC seront aussi parallels. Parquoy le quadrilatere ABCD est un parallelogramme. Ce qui estoit proposé.

De cecy resulte que tout quadrilatere qui a tous les angles droits est parallelogramme, attenau que les deux angles A & B seront egaux à deux droits, comme aussi les deux D & C, &c. Consequemment tant le quarré, que le quarré long, sont parallelogrammes, puis qu'ils ont tous leurs angles droits.

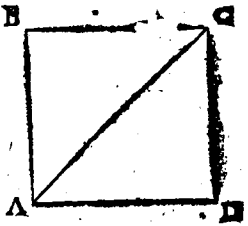
Or par les deux Theoremes precedents sont converties les deux premieres parties de la 34. propos. mais quant à la 3. partie, on ne la peut pas convertir, vû que tout quadrilatere qui est coupé en deux egalement par la diagonalle, n'est pas parallelogramme. Car soit ABCD un quarré long, ou bien un Rhomboide, lequel sera parallelogramme, & consequemment étant tirée la diagonalle AC, elle le coupera en deux egalement: & sur icelle soit construit le triangle AEC, en sorte que le costé AE soit egal au costé AD, & le costé CE egal au costé CD: & sera fait le trapese ADCE, duquel la diagonalle sera AC, qui le coupera en



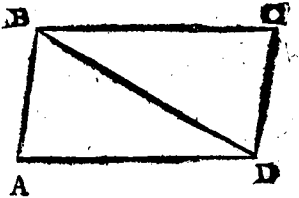
deux egalement, puis que les deux triangles ADC, AEC ayans tous leurs costez egaux chacun au sien, sont consequemment egaux.

3. Si un parallelogramme est equilateral, la diagonale coupera les angles en deux egalement : mais inégalement s'il n'est equilateral.

Soit un parallelogramme ABCD, duquel tous les côtez soient egaux entr'eux, & soit menée la diagonalle AC : Ie dis qu'elle coupe les angles A & C en deux egalement. Ce qui est manifeste par la 8. propos. veu que les deux triangles ABC, ADC ont tous les trois côtez egaux, chacun au sien.

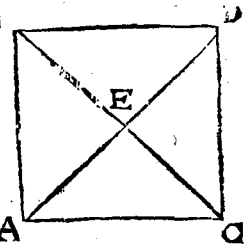


Soit derechef le parallelogramme ABCD, auquel le costé AD soit plus grand que le costé AB, & soit tirée la diagonalle BD : Ie dis qu'elle coupe inégalement les angles B & D. Car puis qu'au triangle ABD le costé AD est plus grand que le costé AB, par la 18. propos. l'angle ABD sera plus grand que l'angle ADB. Mais par la 29 prop. l'angle ABD est egal à son alterne BDC, car AD est parallele à BC, puis que ABCD est un parallelogramme. Donc aussi l'angle BDC sera plus grand que l'angle ADB : & partant tout l'angle D est coupé inégalement par la diagonale BD. Il y a même raison des autres angles. Parquoy appert ce qui étoit proposé.

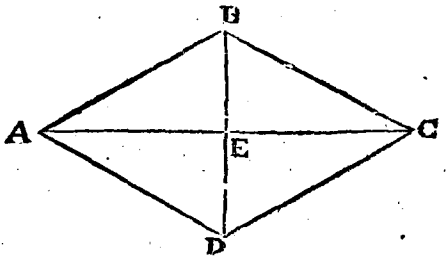


4. Si un parallelogramme a tous les angles egaux, les deux diagonalles seront egales entr'elles : mais inégales, si les angles sont inégaux.

Soit premierement un parallelogramme ABCD, duquel tous les angles ſcient egaux, & ſoient menées les deux diagonalles AC, BD: Ie dis qu'icelles diagonalles ſont egales entr'elles. Car attendu que les deux coſtez AB, BC, du triangle ABC ſont egaux aux deux coſtez DC, CB, du triangle BCD, chacun au ſien, & l'angle B egal à l'angle C, par la 4. propoſ. la baſe AC ſera egale à la baſe BD: ce qui étoit propoſé. Partant au quarré, & au quarré long les diametres ſont egaux, puis que l'un & l'autre a tous les angles egaux, ſçavoir droits.



Maintenant au parallelogramme ABCD, *duquel l'angle* ABC *ſoit plus grand que l'angle* BAD, *& ſoient les deux diagonales* AC, BD. *Ie dis que la diagonale* AC, *qui ſoûtient le plus grand angle B, eſt plus grande que la diagonale* BD, *qui ſoûtient le moindre angle* A. *Car d'autant qu'au triangle* ABC *les deux coſtez* AB, BC, *ſont egaux aux deux coſtez* AB, AD *du triangle* BAD. *chacun au ſien, & l'angle* B *plus grand que l'angle* A, *par la vingt-quatriéme propoſition, la baſe* AC *ſera plus grande que la baſe* BD. *Ce qui étoit propoſé.*



De cecy reſulte qu'au Rhombe ou Rhomboide les diagonales ſont inégales: car ils ont les angles obliques, & par conſequent inégaux.

5. En tout parallelogramme, les diagonales s'entrecoupent en deux egalement : & tout quadrilatere auquel les diagonales s'entrecoupent en deux egalement, eſt parallelogramme.

Au parallelogramme ABCD cy-deſſus, ſoient les deux diametres AC, BD qui s'entrecoupent au point E : Ie dis que chacun d'iceux diametres eſt coupé en deux parties egales en E, c'eſt à dire que AE, CE *ſont egales, &* BE, DE *auſsi egales. Car d'autant que par la 29. prop. les deux angles* EAB, EBA *du triangle* ABE, *ſont egaux aux alternes* ECD, EDC *du triangle* CDE, *un chacun au ſien, & le coſté* AB *egal au coſté oppoſé* CD *par la 34. prop. le coſté* AE *ſera egal au coſté* CE, *& le coſté* BE *au coſté* ED *par la 26. prop. Ce qui étoit premierement propoſé.*

Maintenant, au quadrilatere ABCD *ſoient les deux diagonales* AC, BD, *qui s'entrecoupent en deux egalement en* E : *Ie dis qu'iceluy quadrilatere* ABCD *eſt un parallelogramme. Car puis que les coſtez* AE, BE *du triangle* AEB *ſont egaux aux coſtez* CE, DE *du triangle* CED, *chacun au ſien, & que par la quinziéme propoſition les angles au ſommet* E *ſont auſsi egaux ; par la quatriéme propoſition les baſes* AB, CD *ſeront egales, & l'angle* ABE *egal à l'angle alterne* CDE : *Donc les lignes droites* AB, CD *ſeront paralleles par la 27. propoſition. Par même raiſon* AD, BC *ſeront demontrées paraleles. Parquoy* ABCD *eſt un paralelogramme.*

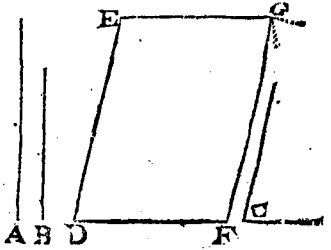
De cecy apert que ſi on veut promptement conſtruire un paralelogramme, il faut tirer deux lignes droites interminées AC, BD, *qui s'entrecoupent comme que ce ſoit en* E ; *puis prendre* AE, EC *egales, &* BE, ED *auſsi egales, puis ſoient tirées les lignes* AB, BC, CD, DA : *& ſera fait le paralelogramme* ABCD : *lequel ſera un Rhombe, ſi les angles du point* E *ſont faits droits, & s'ils ſont obliques, ce ſera un Rhomboide ; Mais les ſuſdits angles étans droits, ſi on fait toutes les quatre lignes* EA, EB, EC, ED *egales entr'elles ; le paralelogramme conſtitué ſera un quarré : Finalement leſdits angles du point* E *étans*

obliques, & toutes les quatre susdites lignes egalés, le parallelogramme constitué sera un quarré long; le tout, comme il apert des choses demontrées cy-dessus.

A ce que dessus nous adjouterons encore ce problème.

6. Construire un parallelogramme qui ait un angle egal à un angle donné, & les costez comprenant iceluy angle, egaux à deux lignes droites données.

Soient données deux lignes droites A, B, & un angle C. Il faut construire un parallelogramme ayant un angle egal au donné C, & les deux costez comprenant iceluy angle, egaux aux deux lignes données A & B.



Soit prise DE egale à A, puis à l'extremité D, soit fait l'angle EDF egal au donné C, faisant DF egale à B: en apres du centre E, & du même intervale B soit décrit un arc de cercle G, puis du centre F & intervale A soit décrit un autre arc qui coupe le precedent G, & de l'interfection soient tirées les lignes droites EG, FG: & le quadrilatere DEGF, sera le parallelogramme requis; ainsi qu'il est manifeste par les choses cy-dessus demontrées.

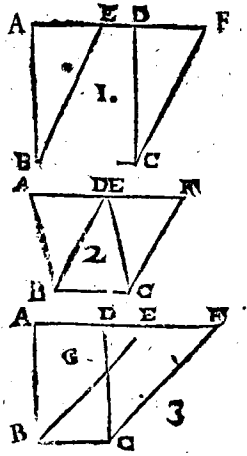
THEOR. 25. PROP. XXXV.

Les parallelogrammes constituez sur une même base, & entre mêmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient deux parallelogramme ABCD & BCFE, tous deux sur même base BC, & entre mêmes paralleles AF, & BC: Je dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Or le point E tombera, ou entre A & D, ou au point D, ou entre D & F: qu'il tombe premierement entre A & D, com-

me en la premiere figure. D'autant que par la 34. prop. au parallelogramme ABCD, le costé AD est egal au côté BC qui luy est opposé, & qu'au mesme BC est aussi egal EF costé du parallelogramme BEFD, par la 1. com. sent. les costez AD, EF seront egaux entr'eux : ôtant donc d'iceux la partie commune ED, les restes AE & DF seront egaux par la 3. com. sent. Mais par la même 34. prop. au parallelogramme ABCD, les costez opposez AB, DC sont aussi egaux ; & puis qu'étans parallels, sur iceux tombe la ligne droite FA, l'angle exterieur CDF sera egal à l'angle interieur BAE par la 29. prop. Donc les triangles ABE, DCF auront deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & les angles qu'ils comprennent aussi egaux ; & partant iceux triangles ABE, DCF seront egaux entr'eux par la 4. prop. leur ajoûtant donc le trapeze commun BEDC, sera fait le parallelogramme ABCD egal au parallelogramme BEFC. Ce qui étoit proposé.



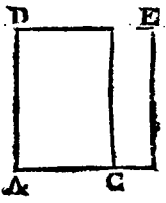
Maintenant, que le point E tombe avec le point D, comme en la deuxiéme figure, d'autant que comme dessus les lignes AD, EF seront egales entr'elles, & l'angle exterieur FEC egal à l'interieur DAB ; les triangles BAD & CEF seront egaux par la quatriéme proposition. Ajoûtant donc à chacun le triangle commun BDC, seront faits egaux les parallelogrammes ABCD, & BEFC.

En troisiéme lieu, que le point E tombe entre D & F, comme en la troisiéme fig. D'autant que par la 34. propos. les côtez opposez des parallelogrammes sont egaux, AD & BC seront egaux : Item BC & EF ; & partant AD & EF egaux, auxquels si on ajoûte la ligne commune DE ; la toute AE sera egale à la toute DF. Item AB est egale à DC, lesquelles étans

paralleles, l'angle exterieur GDE sera egal à l'opposé interieur EAB : & par la quatriéme proposition les triangles BAE & CDF, seront egaux : desquels si on oste le triangle commun GDE, les demeurans trapezes BADG & CGEF, seront egaux : ausquels si on ajoûte le triangle commun BGC, le parallelogramme ABCD sera egal au parallelogramme BCFE: Donc les parallelogrammes constituez sur une mesme base, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux : Ce qui étoit à démontrer.

SCHOLIE.

Est icy à noter, que quand Euclide & les autres Geometres parlent de parallelogrammes constituez sur une même base, & entre mesmes paralleles, ils entendent que ladite base soit en l'une d'icelles paralleles comme aux exemples cy-dessus : Car entendant autrement cette proposition elle pourroit estre fausse, comme a fort bien remarqué le sieur Dounot, & ainsi qu'il appert en ces deux parallelogrammes ADFC, CFEB, lesquels sont tous deux constituez sur la base CF, & entre mesmes paralleles AB, DE: & toutesfois il est evident, qu'ils ne sont pas egaux : Ce qui advient à cause de ce que leur base commune CF, n'est pas en l'une ne l'autre des paralleles AB, DE. Le même se doit aussi entendre des parallelogrammes, & des triangles mentionnez aux propositions suivantes, c'est à dire, qu'ils doivent tous avoir leurs bases en l'une des paralleles.

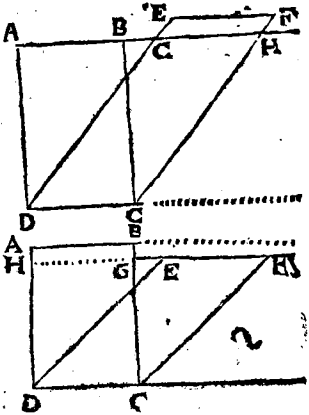


Clavius a converty cette 35. prop. ainsi :

Les parallelogrammes egaux constituez sur une même base, & de même part, seront entre mêmes paralleles.

Soient deux parallelogrammes egaux ABCD, CDEF, sur une même base CD, & d'une même part : Ie dis qu'ils sont entre mêmes paralleles, c'est à dire, que prolongeant la ligne droite AB elle rencontrera directement EF. Car autrement si elle ne la rencontre elle tombera,

ou au dessus d'icelle EF ou au dessous. Premierement, qu'elle tombe au dessous, s'il est possible, comme est AH, en la premiere figure. Donc par la 35. proposition le parallelogramme CDGH sera egal au parallelogramme ABCD: Mais à iceluy parallelogramme ABCD est posé egal le parallelogr. CDEF. Parquoy les parallelogrammes CDEF, CDGH seront egaux: le tout & la partie. Ce qui est absurde. Le prolongement & continuation directe de AB ne tombera donc pas au dessous de EF.



Secondement, que AB prolongée tombe s'il est possible, au dessus de EF, comme en la 2. figure: donc EF prolongée tombera au dessous de AB. Parquoy comme dessus les parallelogrammes ABCD, CDHG seront egaux, le tout & la partie. Ce qui est absurde. Donc puis que AB produite ne tombera pas au dessus de EF, ny au dessous, elle la rencontrera directement. Ce qui étoit proposé.

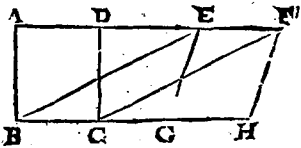
THEOR. 26. PROP. XXXVI.

Les parallelogrammes constituez sur bases egales, & entre mêmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient les deux parallelogrammes ABCD & EFGH, ayans les bases BC & GH egales, & entre mêmes paralleles AF & BH. Je dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Qu'il ne soit ainsi: soient menées les deux lignes BE, CF: d'autant que BC est posée egale à GH, & que par la 34. prop. la même GH est egale à son opposée EF, les deux lignes BC, EF seront egales entr'elles par la 1. com. sent. Mais elles sont aussi paralleles par l'hypothese: Donc les lignes BE, CF, qui les

conjoignent seront aussi egales & paralleles par la 33. propos. & par consequent BEFC sera un parallelogramme constitué sur méme base BC, & entre mémes paralleles BH, AF



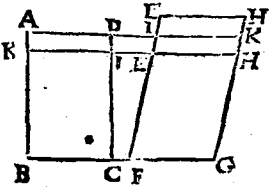
que le parallelogramme ABCD, & par la 35 prop. ils seront egaux; & par la méme prop. il sera aussi egal au parallelog. EFGH, étant sur méme base EF, avec iceluy, & entre mémes paralleles AF, BH; Et par la 1. com. sent. les parallelog. ABCD, & EFGH, seront egaux entr'eux. Donc les parallelogrammes constituez sur bases égales, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Clavius a converty cette 36. propos. ainsi qu'il ensuit.

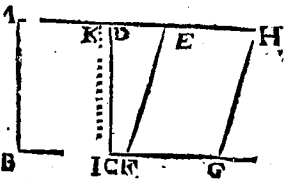
Les parallelogrammes egaux constituez sur bases egales : & de méme part sont entre mémes paralleles. Et si les parallelogrammes egaux constituez entre mémes paralleles, n'ont une méme base, ils seront sur bases egales.

Premierement, soient deux parallelogrammes egaux ABCD, EFGH, constituez sur bases egales BC, FG, & de méme part : Ie dis qu'ils sont entre mémes paralleles, c'est à dire que AD prolongée se rencontrera directement avec EH. Car autrement elle tomberoit ou au dessous d'icelle EH, ou au dessus; & il s'ensuivroit le tout estre egal à la partie: comme il a été dit en la converse de la precedente proposition.



Secondement, soient les parallelogrammes egaux ABCD, EFGH, entre mémes paralleles AH, BG : Ie dis que leurs bases BC, FG sont egales : Car autrement l'une sera plus grande que l'autre, & soit BC la plus grande, s'il est possible, & d'icelle soit retranchée BI egale à FG : puis soit

menée IK parallele à AB. Donc par la 36. prop. le parallelogramme ABIK sera egal au parallelogramme EFGH; & puis auſſi egal au parallelogramme ABCD, la partie au tout. Ce qui eſt abſurde. La baſe BC n'eſt donc pas plus



grande que la baſe FG: Et par meſme raiſon elle ne ſera pas plus petite. Parquoy les baſes BC, FG ſont egales.

Clavius demontre encore icy cet autre Theoreme.

Si deux parallelogrammes conſtituez entre meſmes paralleles, ont leurs baſes inegales; celuy-là ſera le plus grand, qui aura la plus grande baſe. Et au contraire, ſi deux parallelogrammes inegaux ſont entre meſmes paralleles; le plus grand aura une plus grande baſe que l'autre.

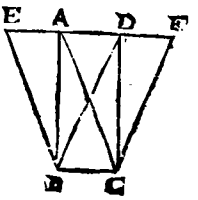
Soient les deux paralelogrammes ABCD, EFGH *de la figure precedente, entre les paraleles* AH, BG *& ſoit la baſe* BC *plus grande que la baſe* FG: *Ie dis que le paralelogramme* ABCD, *qui eſt ſur la plus grande baſe* BC, *eſt plus grand que le paralelogramme* EFGH. *Car de* BC *ſoit retranché* BI *egale à* FG, *& ſoit tirée* IK *paralele à* AB *par la 31. propoſ. de ce Livre. Donc par la 36. prop. les paralelogrammes* ABIK, EFGH *conſtituez ſur baſes egales, ſeront egaux: & puis que par le 9. ax. le paralelogramme* ABCD *eſt plus grand que le paralelogramme* ABIK, *le même paralelogramme* ABCD *ſera auſſi plus grand que le paralelogramme* EFGH. *Ce qui étoit propoſé.*

Soient derechef les paralelogrammes ABCD, EFGH *inegaux, &* ABCD *le plus grand: Ie dis que la baze* BC *eſt plus grande que la baſe* FG. *Car ſi elle étoit egale, les paralelogrammes ſeroient egaux par la 33. propoſition de ce livre. Ce qui eſt abſurde, puis que* ABCD *a été poſé plus grand que* EFGH. *Mais ſi ladite baſe* BC *étoit moindre, le paralelogramme* EFGH *ſeroit plus grand que le paralelogramme* ABCD, *comme il a été demontré cy-deſſus; Ce qui eſt encore abſurde. Donc puis que la baſe* BC *ne peut être egale, ny moindre que la baſe* FG, *elle ſera plus grande. Ce qui étoit propoſé.*

THEOR. 27. PROP. XXXVII.

Les triangles constituez sur une même base; & entre mêmes paralleles, sont égaux entr'eux.

Soient deux triangles ABC, BDC, tous deux constituez sur la mesme base BC, & entre mesme paralleles EF, & BC. Je dis qu'ils sont égaux entr'eux.

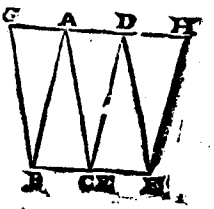


Car si on mene B E parallele à CA, & CF parallele à BD, afin d'accomplir les parallelog. BEAC, & BCFD, iceux seront égaux par la 35. prop. attendu qu'ils sont constituez sur mesme base BC, & entre mesmes paralleles BC, EF. Mais les triangles donnez ABC, & DBC, sont moitiez d'iceux parallelogrammes par la 34. prop. pource qu'ils sont couppez en deux également par les diagonales AB, DC: dont aussi les triangles ABC; DBC seront égaux, par la 7. com. sent. Parquoy les triangles constituez sur une mesme base, & entre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 28. PROP. XXXVIII.

Les triangles constituez sur base egale; & entre mêmes paralleles, sont égaux entreux.

Soient deux triangles ABC, DEF, constituez sur bases égales BC & EF, & entre mesmes paralleles G H & BF. Je dis qu'ils sont égaux entr'eux.



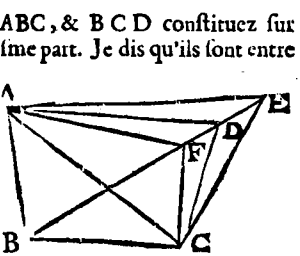
Car apres avoir mené BG, parallele à CA, & FH parallele à DE par la 31. prop. qui accomplissent les deux parallelogram. ACBG. DEFH: iceux étans constituez sur bases égales, & entre mêmes paralleles, seront égaux par la 36. prop. aussi égales seront leurs moitiez sçavoir les triangles proposez ABC

& DEF par la 34. prop. oſtans les parallelogrammes couppez en deux également par les diagonales BA & DF. Donc les triangles conſtituez ſur baſes égales, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 29 PROP. XXXIX.

Les triangles égaux conſtituez ſur une même baſe, & de même part, ſont auſſi entre même paralleles.

Soient deux triangles égaux ABC, & BCD conſtituez ſur une meſme baſe BC, & de meſme part. Je dis qu'ils ſont entre meſme paralleles c'eſt à dire, que ſi on mene la ligne droite AD, elle ſera paralliele à BC,



Autrement, du point A, on en pourra mener une autre qui ſera parallele à BC (ſi AD ne l'eſt) par la 31. prop. laquelle tombera, ou bien au deſſus de AD, ou au deſſous. Qu'elle tombe premierement au deſſus, & ſoit icelle AE, s'il eſt poſſible; & apres avoir continué BD juſques en E, & mené EC, les deux triangles BAC, & BEC par la 37. prop. eſtans ſur meſme baſe, & entre meſmes paralleles, ſeront égaux. Mais par l'hypotheſe les deux triangles BAC, & BDC ſont auſſi égaux: donc par la 1. com. ſent. les triangles BEC & BDC ſeroient auſſi égaux, la partie & le tout; partant la parallele menée du point A, ne tombera pas au deſſus de AD. Le meſme inconvenient s'enſuivra ſi on la fait tõber au deſſous de AD comme AF: car ayant mené CF. les triangles BFC & BDC ſe trouueroient égaux, ce qui ne peut eſtre: donc du point A on ne menera point d'autre ligne que AD parallele à BC. Parquoy les triangles égaux conſtituez ſur meſme baſe, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

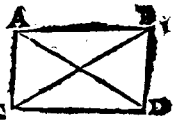
SCHOLIE.

Par cette prop. qui eſt la converſe de la 37. il eſt aiſé de demontrer comme a fait Commandin le Theor. ſuivant.

Tout quadrilatere qui eſt coppé en deux également par l'un

& l'autre diametre, eſt parallelogramme.

Le quadrilatere ABDC *ſoit diviſé en deux egalement par l'un & l'autre diametre* AD, BC : *Ie dis qu'iceluy eſt paralelogramme. Car d'autant que les triangles* ACD, BDC *ſont chacun moitié du quadrilatere* ABDC, *ils ſont egaux entr'eux par le 7. ax. Et pource qu'ils ont une même baſe* CD, *& ſont de même part, ils ſont entre mêmes paraleles par la 39. prop. & partant* AB *eſt paralele à* CD. *Semblablement veu que les triangles* ABC, ACD *ſont egaux & ſur même baſe* AC, *icelle ligne* AC *ſera auſſi paralele à* BD : *donc le quadrilatere* ABDC *eſt paralelogramme, puis que les coſtez oppoſez d'iceluy ſont paralels. Ce qui eſtoit propoſé.*

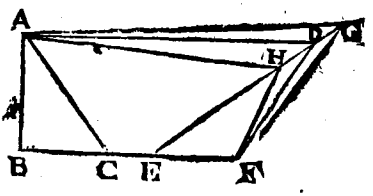


THEOR. 30. PROP. XL.

Les triangles egaux conſtituez ſur baſes egales, & de même part, ſont auſſi entre mêmes paralleles.

Soient deux triangles egaux ABC, & DEF, conſtituez ſur baſes egales BC & EF, & de même part. Je dis qu'ils ſont auſſi entre mêmes paralleles ; c'eſt à dire, que ſi on mene une ligne droite de A en D, qu'icelle ſera parallele à BF.

Autrement ; du point A on en pourra mener une autre qui ſera parall. à BF (ſi AD ne l'eſt) par la 31. prop. laquelle tombera, ou au deſſus de AD, ou au deſſous. Soit donc premierement au deſſus, & ſoit icelle AG, s'il eſt poſſible, & apres avoir continué ED iuſques à ce qu'il rencontre AG en G, & mené FG, les deux triangles BAC, & EGF ſeront egaux par la 38. prop. mais par l'hypotheſe

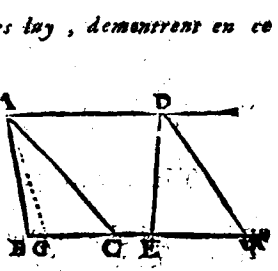


thefe les triangles BAC & DEF ſont auſſi égaux : donc par la 1. com. ſent. le triangle EDF ſera égal au triangle EGF, la partie au tout ; ce qui eſt impoſſible : Partant la parallele menée du point A ne tombera point au deſſus de AD. Le meſme inconvenient s'enſuivra ſi on la fait tomber au deſſous, comme AH, car les triangles EHF & EDF, ſe trouveroient égaux : donc du point A ne pourra eſtre menée autre ligne que AD parallele à BF. Parquoy les triangles égaux conſtituez ſur baſes égales, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Commandin & Clavius apres luy, demontrent en ce lieu le Theoreme ſuivant.

Si les triangles égaux conſtituez entre meſmes paralleles, n'ont une meſme baſe, ils ſeront ſur baſes égales.



Soient les triangles égaux ABC, DEF, entre mêmes paralleles AD, BF, & ſur les baſes BC, EF : Ie dis qu'icelles baſes ſont égales entr'elles. Car ſi elles ne ſont égales ſoit BC la plus grande, & d'icelle ſoit retranchée CG, egale à EF, & tirée AG. Donc par la 38. propoſit. le triangle ACG ſera égal au triangle DEF : Mais à ce meſme triangle a été poſé égal le triangle ABC. Donc par le 1. axiome les triangles AGC, ABC ſeront égaux, la partie & le tout : Ce qui eſt abſurde. Donc les baſes BC, EF, ne ſont pas inégales, mais égales. Ce qui étoit propoſé.

En ſuitte de ce theoreme Clavius démontre encore le ſuivant.

Si deux triangles conſtituez entre mêmes paralleles, ont leurs baſes inégales, celuy-là ſera le plus grand, duquel la baſe ſera la plus grande. Et au contraire, ſi deux triangles inégaux ſont entre mêmes paralleles, la baſe du plus grand ſera la plus grande.

En la figure precedente ſoient entre mêmes paralleles AD, BF, les triangles ABC, DEF, & ſoit la baſe BC plus grande que la baſe EF : Ie dis que le trian-

gle ABC, eſt plus grand que le triangle DEF. Car ayant pris CG egale a EF, & tiré AG, les triangles AGC, DEF, ſeront egaux par la 38. propoſition. Et puis que par le 9. axiome le triangle ABC eſt plus grand que le triangle AGC, le même triangle ABC ſera plus grand que le triangle DEF.

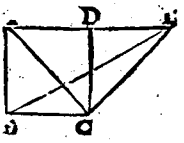
Soient derechef les triangles inegaux ABC, DEF, & le plus grand ſoit ABC. Ie dis que la baſe BC eſt plus grande que la baſe EF. Car ſi on dit qu'elle eſt egale, le triangle ABC ſera egal au triangle DEF: ce qui eſt abſurde, attendu qu'il a été poſé plus grand. Et ſi on l'eſtime être moindre, le triangle DEF ſera plus grand que le triangle ABC, comme il a été démontré cy-deſſus: Ce qui eſt encore plus abſurde, puis que ABC a été poſé plus grand que DEF. Donc la baſe BC ſera plus grande que la baſe EF, puis qu'elle ne peut être ny egale, ny moindre. Ce qui étoit propoſé.

THEOR. 31. PROP. XLI.

Si un parallelogramme, & un triangle ont une même baſe, & ſont entre mêmes paralleles; le parallelogramme ſera double du triangle.

Soit le parallelogramme ABCD ſur la méme baſe BC. que le triangle BCE, & tous deux entre même paralleles AE & BC. Ie dis que le parallelogramme ABCD eſt double du triangle BEC

Car ſi on meine la diagonalle AC, le triangle ABC ſera la moitié du parallelogramme A B C D par la 34. prop. Mais par la 37. prop. le méme triangle A B C ſera egal au triangle BEC. Donc par la 6. com. ſent. le parallelogramme ABCD, qui eſt double de l'un, ſera auſſi double de l'autre. Si donc un parallelogramme & un triangle ont une méme baſe, &c. Ce qu'il falloit prouver.

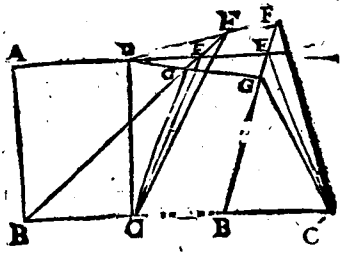


Si les baſes étoient egales, on demontreroit encore la même choſe, & en la méme maniere que deſſus, tirant le diametre du parallelogramme. Car d'autant que

les triangles conſtituez ſur baſes egales, & entre mêmes paralleles ſont egaux entr'eux, le parallelogramme qui eſt double de l'un, ſeroit auſſi double de l'autre.

Clavius a demontré apres Commandin la converſe de cette 41. prop. ainſi qu'il enſuit.

Si un parallelogramme double d'un triangle eſt conſtitué ſur une même baſe qu'iceluy, ou ſur une baſe egale, & de même part; ils ſeront entre même paralleles. Et ſi un parallelogramme eſt double d'un triangle & entre même paralleles, leurs baſes ſeront egales, ſi elles ne ſont une même.

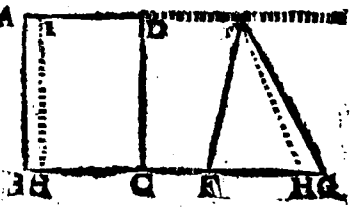


Soit le parallelogramme ABCD double du triangle EBC, *ſur une même baſe, ou ſur baſes egales: Ie dis qu'ils ſont entre mêmes paralleles, c'eſt à dire que AD qui eſt parallele à BC, étant prolongée directement tombera au point* E. *Car autrement elle tombera ou au deſſus de* E, *ou au deſſous. D'où adviendra comme il a été demontré en la 39. ou 40. prop. la partie être egale au tout. Car par la 41. prop. le parallelogramme ſera pareillement double du triangle BFC, ou BGC: & par le 6. axiom. les triangles* EBC, FBC, *ou les triangles* FBC, GBC *ſeront egaux, la partie & le tout. Ce qui eſt abſurde.*

Soit maintenant le parallelogramme ABCD double du triangle EFG, *& entre mêmes paralleles. Ie dis que la baſe* BC *eſt egale à la baſe* FG. *Car ſi l'une d'icelles ſçavoir* BC *eſt plus grande, ayant pris* CH *egale à* FG *& tiré* HI *parallele à* BA, *on demontrera les parallelogrammes* ABCD, IHCD *être egaux, le tout & la partie: (pour ce que chacun eſt double du triangle* EFG *celuy-là par l'hypotheſe; & cettuy-cy par la 41. prop.) ce qui eſt abſurde. On demontrera encore le même, ſi on dit la baſe* FG *être plus grande que la baſe* BC: *Car ayant fait* FH *egale à* BC, *& tiré la ligne droite*

LYON 1886

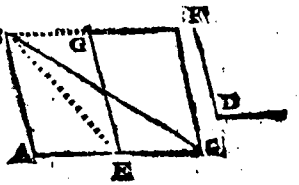
H E, *les triangles* EFH, EFG *seront egaux, la partie & le tout; (d'autant que chacun est moitié du parallelogramme* ABCD, *celuy-là par la 41. prop. & cetuy-cy par l'hypothese) Ce qui est absurde.*



PROBL. II. PROP. XLII.

Faire un parallelogramme egal à un triangle donné, & qui ait un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit le triangle donné ABC, & l'angle rectiligne donné D il faut faire un parallelogramme egal au triangle donné A B C, & qui ait un angle egal à l'angle donné D.



L'un des costez du triangle, sçavoir, AC soit coupé en deux egalement en E, par la 10. prop. puis soit fait l'angle CEG egal à l'angle D par la 23. prop. Et par la 31. prop. soit menée de B, la ligne BF parallele à AC, laquelle coupe EG en G. Derechef, de C soit menée CF parallele à FG, rencontrant BF en F: & sera constitué un parallelog. EGFC, ayant l'angle CEG egal au donné D, lequel parallelogramme, je dis être egal au triangle donné ABC. Car étant tirée la ligne BE, iceluy parallelogramme EGFC sera double du triangle EBC par la proposition precedente, duquel est aussi double le triangle A B C, iceluy étant egal aux deux ABE, EBC, qui sont egaux entr'eux par la 38. propos. Donc le parallelogramme EGFC, & le triangle A B C seront egaux entr'eux par la sixiéme commune sentence, & puis qu'iceluy parallelogramme à l'angle CEG egal au donné D par la con-

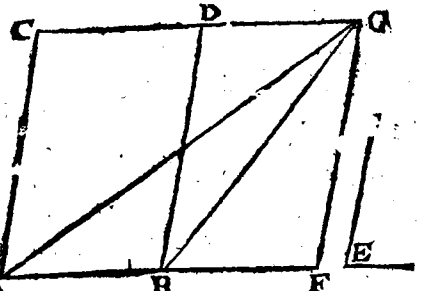
struction, nous avons construit un parallelogramme egal à un triangle donné, &c. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

La pratique de ce probleme est enseignée au 13. de nostre Geometrie pratique : Et est si facile à entendre par la construction cy-dessus, qu'il n'est besoin d'en dire autre chose : mais nous adjouterons icy (apres Pelletier) la converse de cette 42. proposition, qui est telle.

Faire un triangle egal à un parallelogramme donné, & qui ait un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit donné le parallelogramme ABDC, & l'angle rectiligne E : *il faut faire un triangle egal au parallelogrãme donné AD, ayant un angle egal au donné* E. *Soient prolongées CD, tant qu'il sera de besoin, AB en sorte que BF soit egale à icelle AB ; puis au point A soit fait l'angle FAG egal au donné* E, *tirant AG iusques à ce qu'elle rencontre CD prolongée en G, & étant joint FG, le triangle AGF sera le requis : Car l'angle FAG est egal au donné* E, *& étant tirée* BG, *les triangles AGB & BGF seront egaux par la 38. prop. & partant le total AGF sera double de AGB : Mais par la 41. prop. le parallelogramme AD est aussi double d'iceluy triangle ABG. Donc le triangle AGF, & le parallelogramme ACDB seront aussi egaux entr'eux. Ce qu'il faloit faire.*



COROLLAIRE.

Il est evident par les deux demonstrations cy-dessus,

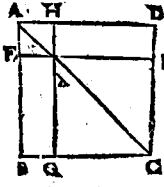
qu'un triangle qui a la base double de celle d'un parallelogramme constitué entre mêmes paralleles qu'iceluy, est egal à iceluy parallelogramme.

THEOR. 32. PROP. XLIII.

En tout parallelogramme les supplêmens des parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre, sont egaux entr'eux.

Soit le parallelogramme ABCD, son diametre AC. à l'entour duquel sont les parallelogrammes AEKH & KGCF. Je dis que les parallelogrammes HKFD & EBGK, qu'on appelle supplémens, sont egaux entr'eux.

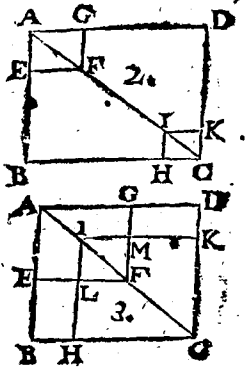
Car d'autant que par la 34. prop. les triangles ABC, ADC sont egaux entr'eux: Item les triangles CKG, CFK aussi egaux; si on oste ceux-cy de ceux-là, resteront egaux les trapezes ABGK, ADFK: Mais par la 34. prop. sont aussi egaux les triangles AEK, AHK partant si on les oste des trapezes susdits, demeureront egaux les complemens EBGK, HKFD. Donc en tout parallelogramme les supplémens, &c. Ce qui étoit à prouver.



SCHOLIE.

Si les deux parallelogrammes d'alentour le diametre n'étoient conjoints au point K, *ainsi qu'en la figure cy-dessus, mais que l'un fut éloigné de l'autre, comme en la 2. figure, ou bien qu'ils s'entrecoupassent ainsi qu'en la troisiéme, on demontreroit en la même maniere que dessus, être aussi egaux, les complemens ou restes, sçavoir en la 2. figure, les pentagones* BEFIH, DGFIK, *& en la 3. les parallelogrammes* BELH, DGMK; *Car puis que par la 34. prop. les triangles ABC, ADC, de l'une & l'autre figure sont egaux entr'eux, comme aussi les triangles AEF, AGF; les trapezes BEFC, DGFC seront pareillement egaux par le 3. axiome.*

Parquoy si d'iceux trapezes de la seconde figure, on oste les triangles egaux HIC, KIC, resteront encore egaux les pentagones BEFIH, DGFIK. Mais adjoutant aux trapezes de la troisiéme fig. les triangles egaux LIE, MIF, les figures BELIC, DGMIC seront egales entr'elles, desquelles si on oste les triangles egaux HIC, KIC, resteront aussi egaux les parallelogrammes BELH, DGMK. Ce qui étoit proposé.

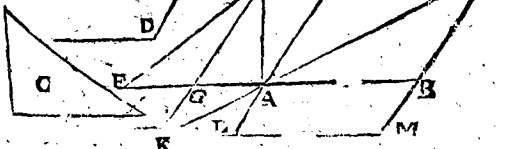


PROB. 12. PROP. XLIV.

Sur une ligne droite donnée, décrire un parallelogramme egal à un triangle donné, ayant un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit la ligne droite donnée AB, le triangle donné C, & l'angle rectiligne donné D. Il faut sur A B décrire un parallelogramme egal au triangle C, & qui ait un angle egal au dõné D.

Soit prolongée la ligne donnée A B iusques en E, tellement



que AE soit egale à quelconque des costez du triangle C, & soit achevé de construire par la 22. proposition, le triangle AFE, ayant les costez egaux aux costez dudit triangle donné C, lequel luy sera aussi egal par le Corol. de la huitiéme

propoſ. Soit maintenant conſtruit par la 42. prop. le parallelogr. AGFH, egal au triangle AFE, & ayant l'angle GAH egal au donné D : & apres avoir continué la ligne FH juſques en I, tellement que HI ſoit egale à AB, ſoit menée IA juſques à ce qu'elle rencontre FG prolongée en K : (ce qui doit arriver, n'étant IA parallele à FG par la 11. com. ſent.) Puis du point K, ſoit menée KM parallele à GB, juſques à ce qu'elle rencontre IB tirée en M : & finalement ſoit prolongée HA juſques à ce qu'elle rencontre KM en L. Je dis que le parallelogramme ABML eſt le requis.

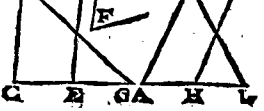
Car il eſt conſtitué ſur la ligne droite donnée AB, & à l'angle BAL egal à l'angle donné D, puis que par la 15. prop. il eſt egal à l'angle GAH, qui a été fait egal à l'angle D : Finalement il eſt egal au triangle donné C, puis que par la 43. propoſ. il eſt égal au parallelogramme AHFG, lequel a été fait egal au triangle AFE, ou C. nous avons donc décrit ſur la ligne donnée AB un parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous avons enſeigné la pratique de ce Probl. en nos Memoires Mathematiques Probl. 15. de la Geometrie pratique, & ne differe de la conſtruction cy-deſſus. C'eſt pourquoy nous n'en dirons autre choſe, mais nous ajouterons icy la converſe de cette propoſ. laquelle eſt telle.

Sur une ligne droite donnée, conſtruire un triangle égal à un parallelogramme donné, & qui ait un angle égal à un angle rectiligne donné.

Soit la ligne droite donnée AB, ſur laquelle il faut décrire un triangle egal au parallelogramme CDKE, & qui ait un angle égal à l'angle donné F.



Soit prolongée CE, juſques en G, tellement que CE, EG ſoient égales, & ſoit menée DG, qui fera le triangle CDG: En apres, par la precedente prop. ſoit conſtruit ſur AB le parallelogramme BH égal au triangle CDG, ayant l'angle BAH egal au donné F : puis ſoit prolongée AH juſques en L, de ſorte que HL ſoit egale à AH, & ayant tiré BL, le triangle ABL, ſera le requis. Car

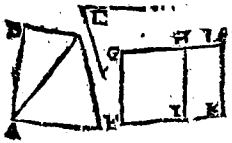
par le corol. de la 42. prop. iceluy triangle ABL eſt egal au parallelogramme BH. Mais icelluy parallelog. eſt egal par la conſtruction au triangle DCG, lequel eſt egal au parallelog. CK par le même corol. Donc le triangle ABL ſera auſſi egal a icelluy parallelogramme CK : mais il a l'angle A egal au donné F, & eſt fait ſur la ligne donnée AB parquoy appert être fait ce qui étoit propoſé.

PROBL. 13. PROP. XLV.

Faire un parallelogramme egal à une figure rectiligne donnée, ayant un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit la figure rectiligne donnée ABCD, & l'angle donné E: Et il faut faire un parallelogramme egal à icelle figure rectiligne ABCD, qui ait un angle egal au donné E.

Soit reſoluë de la figure rectiligne donnée en triangles, ſçavoir eſt menant la ligne droite AC: puis par la 42. propoſ. ſoit fait le parallelogramme FGHI egal au triangle ADC, ayant l'angle F egal à l'angle donné E. Item ſur HI ſoit fait le parallelogramme HIKL, egal au triangle ABC, ayant un angle HIK egal au donné E, & ſera fait ce qui eſt requis. Car les deux parallelogrammes FH & IL, ſont conſtruits egaux à la figure rectiligne ABCD, & ont chacun un angle egal à l'angle donné E & ces deux parallelogrammes enſemble en font un ſeul. Car d'autant que chacun des angles GFI, HIK, eſt egal à l'angle donné E, ils le ſeront auſſi entr'eux : auſquels ſi on ajoûte l'angle commun FIH, les deux angles GFI, HIF, qui ſont egaux à deux droits par la 29. prop. eſtant FH parallelogramme; ſeront egaux aux deux angles HIK, HIF, leſquels partant ſeront egaux à deux droits, & par la 14. prop. les deux lignes FI, KI, ſe rencontreront directement. Pareillement les deux angles GHI, HLK eſtans égaux par la 34. prop. car ils ſont oppoſez à angles egaux GFI, HIK, ſi à iceux on ajoûte l'angle commun IHL; par le même diſcours que cy



dessus les deux lignes GH & IH se rencontreront directement ainsi FK & GL étans lignes droites, & conjoignant de même part les egales & paralleles FG & KL, elles seront aussi egales & paralleles par la 33. prop. & partant FGlk sera parallelogramme; lequel nous avons construit egal à la figure rectiligne donnée ABCD, & l'angle F egal au donné E, ainsi qu'il étoit requis.

SCHOLIE.

S'il y eust eu dauantage de triangles en la figure donnée, il eust fallu construire sur KL un troisiéme parallelogramme egal au troisiéme triangle : puis sur le côté opposé à KL, un autre parallelogramme egal au 4. triangle, & ainsi proceder de triangle en triangle jusques à la fin. Et quant à la demonstration, ce sera toujours la même que dessus, repetée autant de fois qu'il sera de besoin. Or comme on décrira sur une ligne droite donnée un parallelogramme egal a une figure rectiligne donnee, & qui ait un angle egal à un angle rectiligne donné, il eſt assez manifeste par les choses cy-dessus dittes : car pour exemple, si la ligne droite FG eust êté donnée, nous eussions par la precedente prop. décrit sur icelle le parallelogramme FGHI : puis sur la même ligne FG, ou plûtoſt sur une egale à icelle HI, le parallelogramme HIKL, & ainsi consecutivement s'il y avoit d'avantage de triangle en la figure rectiligne donnée.

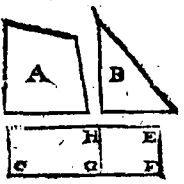
Peletier a ajoûté en ce lieu un Probleme fort utile, lequel nous rapporterons icy, mais beaucoup plus briefvement qu'il n'a fait.

Estans données deux figures rectilignes inegales, trouver l'excez de la plus grande par dessus la moindre.

Soient données deux figures rectilignes A & B, dont A est la plus grande : il faut trouver l'excez de A par dessus B. Par la 45. prop. soit fait le parallelogramme CDEF egal au rectiligne A, ayant quelconque angle C : puis sur la ligne CD soit fait le parallelogramme CDHG egal au rectiligne B, ayant l'angle C commun, & le pa-

ralelogramme GHEF ſera l'excez du rectiligne A par deſſus le rectiligne B.

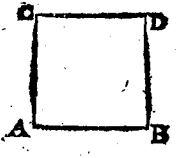
Car d'autant qu'iceluy paralelogramme GE eſt l'excez du paralelogramme CE egal à A, par deſſus le paralelogramme CH egal à B; le même parallelogramme GE ſera auſſi l'excez du rectiligne A par deſſus le rectiligne B. Ce qu'il falloit faire.



PROB. 14. PROP. XLVI.

Sur une ligne droite donnée, décrire un quarré.

Soit la ligne droite donnée AB, ſur laquelle il faut décrire un quarré. Du point A, ſoit menée AC ligne perpendiculaire à AB par la II. prop. laquelle ſoit faite egale à icelle AB, & apres avoir mené CD parallele à AB, & BD parallele à AC, par la 31. prop. Je dis que le quadrilatere ABDC eſt un quarré.



Car d'autant que par la conſtruction il eſt parallelogramme, les coſtez & les angles oppoſez ſont egaux par la 34. propoſ. partant le coſté AB eſt egal à CD, & AC à BD : mais AC étant egal à AB par la conſtruction ; il eſt evident que les quatre coſtez ſont egaux entr'eux. Item l'angle A étant droit par la conſtruction, auſſi ſon oppoſé D ſera droit. Et la ligne AC tombant ſur deux lignes paralleles AB, CD, les deux angles interieurs A & C, ſont egaux à deux droits par la 29. prop. Mais l'angle A eſt droit : donc l'angle C ſera auſſi droit : partant auſſi droit ſon oppoſé B. Ainſi les quatre angles A, B, C, D ſeront droits : & par la déf. du quarré la figure ABDC ſera quarrée. Nous avons donc décrit un quarré ſur la ligne droite donnée AB. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous avons enſeigné la pratique de cette propoſ. en noſtre Geometrie pratique Probl. 12. laquelle ne differe guere de la conſtruction cy-deſſus : car ayant mené la perpendiculaire AC, & icelle fait egale à AB, du même intervale AB ſoient décrits des centres C & B, deux arcs qui s'entrecoupent en D, duquel étans tirées les lignes CD, BD, ſera fait le quarré requis.

Proclus demontre icy : Que les quarrez de lignes egales ſont egaux entr'eux : & que des quarrez egaux les lignes ſont egales. *Ce qui eſt aiſé à prouver par la ſuperpoſition d'un quarré ſur l'autre : Car les lignes étans egales, ſi l'une eſt poſée deſſus l'autre, elles conviendront entr'elles ; & les angles étans auſſi egaux, c'eſt à ſçavoir droits, ils conviendront pareillement entr'eux : & partant tout le quarré conviendra à tout le quarré. Que ſi les quarrez ſont egaux, ils conviendront entr'eux, à cauſe de l'egalité des angles : donc auſſi les lignes ; autrement un quarré ſeroit plus grand que l'autre. Nous avons laiſſé la demonſtration de Proclus qui eſt tres-longue, pour ſuivre celle-cy qui eſt briéve & facile.*

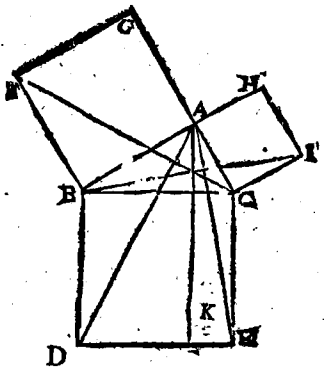
THEOR. 33. PROP. XLVII.

Aux triangles rectangles, le quarré du côté qui ſoûtient l'angle droit, eſt egal aux quarrez des deux autres côtez.

Soit le triangle rectangle ABC, ſur les côtez duquel ſoient décrits les trois quarrez BCED, ABFG, AHIC. Je dis que le quarré BCED décrit ſur le coſté BC, qui ſoûtient l'angle droit BAC, eſt egal aux deux quarrez ABFG & ACIH, décrits ſur les deux autres côtez AB & AC.

Car ſoit menée la ligne AK parallele à BD, ou à CE, & tirées les lignes AD, AE, CF & BI. D'autant que par la definition du quarré, les quatre angles au point A ſont droits, les lignes droites AB, AH ſe rencontreront directement, & ne feront qu'une ligne droite : Item, CA, AG par la 14. prop.

Derechef, puis que les angles ABF, CBD ſont egaux, car ils ſont droits, ſi on leur ajoûte le commun ABC, le total FBC ſera egal au total ABD. Le triangle ABD a donc les deux coſtez AB, BD, egaux aux deux côtez FB, BC du triangle CBF, chacun au ſien, & les angles ABD, CBF contenus d'iceux coſtez, egaux, & par la 4. p. les triangles ABD, CBF ſeront egaux.



Mais le quarré AF eſt double du triangle FBC par la 41. prop. car ils ſont ſur même baſe BF, & entre mémes paralleles BF, GC: il ſera donc auſſi double de ſon egal ABD, duquel le parallelogramme BK eſt auſſi double par la méme 41. prop. & par conſequent le quarré AF ſera egal au parallelogramme BK: car les choſes doubles d'une méme ſont égales entr'elles. Par méme diſcours on prouvera que le parallelog. CK eſt egal au quarré AI: partant les deux parallelogrammes enſemble BK & CK, ſeront egaux aux deux quarrez enſemble AF & AI. Donc le quarré BE qui eſt compoſé d'iceux parallelogrammes BK, CK, ſera auſſi egal aux mémes quarrez AF, AI. Parquoy aux triangles rectangles; le quarré du coſté, &c. Ce qu'il faloit prouver.

SCHOLIE.

Par ce theoreme on peut facilement entendre, qu'aux triangles ambligones le quarré du coſté oppoſé à l'angle obtus, eſt plus grand que les deux quarrez enſemble des deux autres coſtez: Et qu'en tout triangle le quarré d'un coſté oppoſé à un angle aigu eſt moindre que les deux quarrez enſemble des deux autres coſtez. Car ſi l'angle obtus eſt reſſerré juſques à ce qu'il vienne à

être droit, les costez qui le comprennent demeurans les mêmes, le costé opposé viendra moindre par la 24. proposition. Mais si l'angle aigu est ouvert & élargi iusques à ce qu'il vienne droit, les costez qui le contiennent demeurans les mêmes, le costé opposé à iceluy angle sera fait plus grand par la même 24. prop. veu donc qu'il a été demontré cy-dessus que le quarré du costé opposé à l'angle droit, est egal aux deux quarrez ensemble des deux autres costez; il est evident que le quarré du costé opposé à l'angle obtus, est plus grand que les deux quarrez ensemble des deux autres costez; & que le quarré du costé opposé à un angle aigu, est moindre que les deux quarrez ensemble des deux autres costez: Mais de combien celuy-là est plus grand, & de combien cettui-cy est moindre, Euclide le demontrera és 12. & 13. prop. du second Livre.

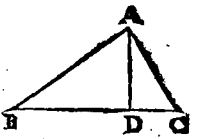
Or l'invention de ce celebre & tant renommé Theoreme est attribuée à Pythagoras, lequel en fut si content & joyeux, que pour en rendre grace aux Dieux, plusieurs disent qu'il sacrifia un Hecatombe, & d'autres rapportent qu'il ne leur sacrifia qu'un bœuf; ce qui est plus vray-semblable, que non pas qu'il en ait immolé cent, veu que ce Philosophe faisoit tres-grand scrupule d'épandre le sang des animaux. Mais quoy qu'il en soit, ce Theoreme est un dés plus utiles aux choses Geometriques; encore qu'il ne semble pas si admirable que la 31. prop. du sixiéme Livre, où Euclide demontre qu'aux triangles rectangles, la figure décrite sur le costé qui soûtient l'angle droit, est egale aux deux figures semblables, décrites & semblablement posées sur les deux costez qui contiennent iceluy angle droit.

Par le moyen de cette 47. prop. il est fort aisé de demontrer cet autre Theoreme suivant.

Si de l'angle d'un triangle compris de deux costez inegaux, est tirée une perpendiculaire à la base, laquelle tombe dans le triangle; elle coupera la base en deux parties inegales, la plus grande desquelles sera vers le plus grand costé: Et au contraire, si la base est coupée inegalement par la perpendiculaire, les deux costez seront inegaux, & le plus grand sera celuy adjacent au plus grand segment.

Au triangle ABC, duquel le costé AB est plus grand que

le costé AC, soit la ligne AD perpendiculaire à la base BC, laquelle tombe dedans le triangle : ce qui advient toûjours quand l'un & l'autre angle d'icelle base est aigu, ainsi qu'il apert du Cor. de la 17. prop. Ie dis que la partie BD est plus grande que la partie CD. Car par la 47. prop. le quarré de AB est egal aux deux quarrez de AD, BD ; & le quarré de AC, egal aux deux de AD, CD : Mais le quarré de AB est plus grand que celuy de AC, puis que le costé AB est plus grand que le costé AC ; donc aussi les deux quarrez de AD, BD, seront plus grands que les deux quarrez de AD, DC ; parquoy ostant le commun quarré de AD, restera le quarré de BD plus grand que le quarré de CD ; & partant la ligne droite BD sera plus grande que la ligne droite CD.



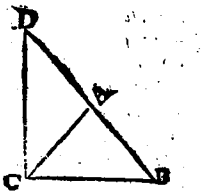
Maintenant, que la ligne perpendiculaire AD fasse le segment BD plus grand que le segment CD. Ie dis que le costé AB est plus grand que le costé AC. Car le quarré de BD sera plus grand que le quarré de CD, & adjoûtant le commun quarré de AD, les deux quarrez de BD, AD, seront plus grands que les deux de CD, AD. Mais par la 47. propos. le quarré de AB est egal aux deux de BD, AD, & celuy de AC egal aux deux de CD, AD. Donc aussi le quarré de AB sera plus grand que le quarré de AC, & par consequent le costé AB sera plus grand que le costé AC. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 34. PROP. XLVIII.

Si le quarré de l'un des côtez d'un triangle, est egal aux quarrez des deux autres côtez ; l'angle soûtenu d'iceluy côté est droit.

Au triangle ABC, le quarré du costé BC soit egal aux quarrez des deux autres costez BA & AC. Je dis que l'angle BAC, soustenu d'iceluy costé BC, est droit.

Car apres avoir mené AD perpendiculaire à AC, par la 11. prop. & fait icelle AD egale à AB, soit menée CD. Le triangle CAD sera rectangle, & par la 47. prop. le quarré de CD sera egal aux deux quarrez de CA & AD, lesquels sont egaux aux quarrez de BA & AC, étant leurs lignes egales ; & par la 1. comm. sent. le quarré de BC sera egal au quarré de CD : partant la ligne CB egale à CD. Donc les triangles BAC, & CAD auront deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base BC egale à la base DC, & par la 8. prop. l'angle BAC sera egal à l'angle droit CAD : partant il sera aussi droit. Si donc le quarré de l'un des costez d'un triangle est egal, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

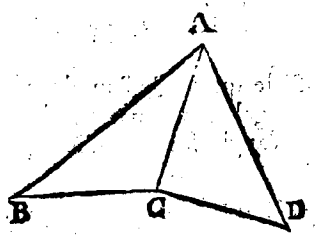


SCHOLIE.

A cette proposition, qui est converse de la precedente, nous ajoûterons cet autre theoreme.

Si le quarré d'un costé de quelque triangle est plus grand que les deux quarrez ensemble des deux autres costez, l'angle soûtenu d'iceluy costé est obtus : Et s'il est moindre, aigu.

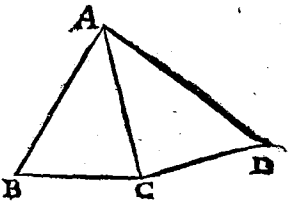
Au triangle ABC, *le quarré du côté* AB, *soit plus grand que les deux quarrez ensemble des deux autres côtez* AC, CB : *Ie dis que l'angle* ACB *opposé au côté* AB *est obtus. Car soit tiré de* C *perpendiculairement à* AC, *la ligne droite* CD *egale à* BC, *& soit joint* AD. *D'autant que par la 47. prop. le quarré de* AD *est egal aux deux quarrez de* AC, CD, *c'est à dire* AC, CB, *& le quarré de* AB *a*



esté

esté posé plus grand que les quârrez de AC, CB, *le quarré de* AD, *sera moindre que le quarré de* AB ; *& partant la ligne* AD *moindre que ladite ligne* AB. *Parquoy veu que les costez* BC, AC, *du triangle* ABC, *sont egaux aux côtez* CD, AC, *du triangle* ACD, *un chacun au sien, & la base* AB *plus grande que la base* AD, *par la* 25. *prop. l'angle* ACB *sera plus grand que l'angle* ACD : *Mais iceluy* ACD *est droit. Donc* ACB *est plus grand qu'un droit ; & partant obtus. Ce qui est proposé.*

Maintenant, soit le quarré de AB *moindre que les deux quarrez des deux autres côtez* AC, CB : *Ie dis que l'angle* ACB *soûtenu d'iceluy côté* AB, *est aigu. Car ayant fait comme auparavant le triangle rectangle* ACD, *on prouvera par les mêmes raisons que dessus, que la base* AD *est plus grande que la base* AB, *& l'angle droit* ACD *plus grand que l'angle* ACB, *qui partant est aigu. Ce qui est proposé.*



Or d'autant que l'aplication des nombres aux côtez des triangles rectangles est utile à plusieurs operations, nous remarquerons icy que tout triangle est rectangle, duquel le plus grand côté contenant 5 *parties egales, le moindre contient trois des mêmes parties, & l'autre* 4 : *ou bien selon trois autres nombres, doubles, ou triples ou quadruples, & c. des trois susdits* 5, 4, 3, *comme* 10, 8 *&* 6 ; *ou* 15, 12 *&* 9 ; *ou* 20, 16 *&* 13 ; *ou* 50, 40, *&* 30 ; *& c. Car il apert que le quarré du plus grand de trois tels nombres, est toûjours egal aux quarrez des deux autres nombres.*

Mais si sans avoir egard aux nombres cy-dessus, on vouloit faire un triangle rectangle, ayant tous les trois côtez en nombre de parties egales sans fraction, on pourroit trouver lesdits nombres en deux manieres ; dont la premiere qu'on attribuë aussi à Pythagoras, est telle. Soit pris pour le moindre côté un nombre de parties nompair, & iceluy nombre étant quarré soit ôtée l'unité de sondit quarré, & la moitié du reste à iceluy quarré.

ſera le moyen nombre, auquel adjoûtant l'unité viendra le plus grand nombre : Comme par exemple, prenant 5 pour le nombre des parties du moindre coſté, ſon quarré eſt 25, duquel ôtant l'unité reſtent 24, dont la moitié eſt 12, pour le nombre des parties du moyen côté, mais adjoûtant l'unité à iceluy, viendront 13 pour le nombre des parties du plus grand côté.

La deuxiéme maniere eſt attribuée à Platon, & eſt telle : Soit pris un nombre pair, & du quarré de la moitié d'iceluy ſoit ôtée l'unité, & reſtera l'un des deux autres nombres ; mais adjoûtant ladite unité au même quarré, viendra le troiſiéme nombre : comme par exemple, prenant 6 pour l'un des nombres, le quarré de la moitié d'iceluy eſt 9, dont l'unité étant ôtée, reſtent 8, pour l'un des deux autres nombres ; mais adjoûtant ladite unité à iceluy quarré, viennent 10 pour le troiſiéme nombre.

Fin du premier Element.

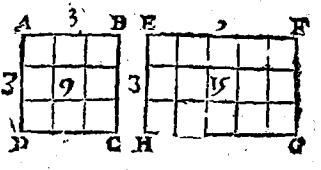
ELEMENT SECOND.

DEFINITIONS.

1. Tout parallelogramme rectangle, eſt dit être contenu ſous deux lignes droites qui font l'angle droit.

IL a été dit en la 36. def. 1. que c'eſt que parallelogramme, & qu'il y en a de quatre ſortes: mais maintenant il faut entendre qu'un parallelogramme eſt dit rectangle, lors qu'il a tous les angles droits, & par conſequent il y a ſeulement le quarré, comme A B C D, & le quarré long, comme E F G H, qui ſoient rectangles: car il n'y a que ces deux ſortes de parallelogrammes qui ayent les angles droits. Et eſt à noter, qu'en tout parallelogramme ſi un ſeul angle eſt donné droit, il eſt neceſſaire que les trois autres ſoient auſſi droits: comme par exemple, ſi l'angle E *du parallelogramme* E F G H *eſt droit. Ie dis que les trois autres* F, G, H, *ſont auſſi droits. Car d'autant que les lignes* EF, GH *ſont paral-*

les, les angles interne E & H, sont egaux à deux droits par la 29. p. 1. Mais l'angle E est droit par l'hypotese: donc ainsi l'angle H sera droit: & par la 34. p. 1. leurs opposez G & F seront aussi droits. Et puis que par la 34 p. 1. tout parallelogramme a les costez opposez egaux, il n'y peut avoir en un parallelogramme que deux côtez inegaux, lesquels constituent chaque angle d'iceluy: C'est pourquoy Euclide dit icy, tout parallelogramme rectangle être contenu sous deux lignes droites, qui comprennent un angle droit; tellement que le parallelog. rectangle EFGH sera dit être contenu sous les deux lignes droites EF, EH: ou sous les deux EF, FG: ou sous FG, GH: ou finalement sous GH, HE: ainsi deux lignes expriment toute la magnitude ou grandeur d'un parallelogramme rectangle: sçavoir l'une comme EF, ou HG, sa longueur: & l'autre comme EH, ou FG, sa largeur: & par le mouvement imaginaire de l'une de ces deux lignes en l'autre, se fait icelluy parallelogramme. Car si l'esprit conçoit que la ligne EF, en allant en bas au long de la ligne EH, se meuve en travers, tellement qu'elle face tousjours angle droit avec icelle EH, jusques à ce que le point E parvienne au point H, & le point F au point G; sera décrit tout le parallel. rectangle EFGH. Le même sera fait, si on pose EH se mouvoir en travers, selon la ligne EF. D'où advient que pour obtenir l'aire ou contenu de tout parallelogramme rectangle on multiplie un costé d'iceluy par l'autre: comme par exemple, le costé EF étant de cinq pieds, & l'autre côté EH de trois: si on multiplie un nombre par l'autre, seront produit quinze pieds quarrez, pour l'aire ou contenu de tout le parallelogramme EFGH. Pareillement au parallelogramme rectangle ABCD, le côté AB étant de trois pieds, & le côté AD aussi de trois pieds: multipliant l'un par l'autre, seront produits neuf pieds quarrez, pour l'aire d'iceluy rectangle, comme montre la figure cy-dessus.

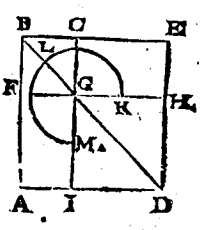


Or est icy à noter, qu'en ce second Livre, & és autres suivans, Euclide appelle les parallelogrammes rectangles,

ſimplement rectangles; ce qu'obſervent auſsi les autres Geometres, tellement que par le nom de rectangle, il faut toujours entendre parallelogr. rectangl'. Derechef, que pour briéveté, & afin de ne repeter ſouventesfois toutes les lettres appoſées aux parallelogrammes, les Geometres ont de coûtume d'exprimer chaque parallelogramme ſoit rectangle ou non par deux lettres ſeulement, ſçavoir celles qui ſont diametralement oppoſées: tellement que pour denoter le parallelogramme ABCD, on dira ſeulement le parallelogramme AC ou BD.

2. En tout parallelogramme, l'un des parallelogrammes décrits à l'entour du diametre, avec les deux ſupplémens, eſt appellé Gnomon.

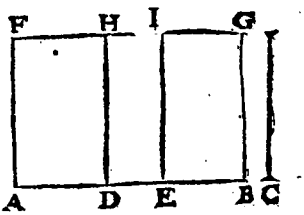
Au parallelogramme ABED, ſoit menée la diagonale BD; & CGI parallele à AB coupant icelle diagonale en G, & par iceluy point G ſoit menée FGH parallele à AD: & le parallelogramme ABED ſera diviſé en quatre parallelogrammes, deux deſquels FC & HI, ſont dits être décrits à l'entour du diametre ou diagonale, mais les deux autres EG, AG, ſont appellez ſupplémens, ainſi que nous avons dit à la 37. def. du premier Livre. Or la figure compoſée d'iceux ſupplemens & de l'un ou l'autre des parallelogrammes d'alentour la diagonale, ſera dit Gnomon: comme la figure CEDAFG, laquelle eſt compoſée des deux ſupplémens AG, GE, & du parallelogramme HI, qui eſt alentour du diametre; ſera appellée Gnomon. Pour même raiſon la figure ABEHGI, qui eſt compoſée des deux ſupplémens IF, GE, & du parallelog. FC, qui eſt alentour le diametre, ſera auſsi dit Gnomon. Et à noter que pour briévement exprimer telles figures, les Geometres y décrivent quelquesfois une circonference, comme le Gnomon ſuſdit ABEHGI, auquel eſt décrite la circonference KLM, ſera exprimé & denoté par icelle circonference KLM.



THEOR. 1. PROP. 1.

Si de deux lignes droites l'une eſt couppée en tant de parties que l'on voudra, le rectangle contenu ſous les deux toutes, eſt egal aux rectangles compris de la non couppée, & d'une chacune partie de celle qui eſt couppée.

Soient deux lignes droites AB & C, dont la premiere AB eſt couppée à l'avanture en pluſieurs parties, ſçavoir eſt en A D, DE, EB. Je dis que le rectangle compris d'icelles deux lignes A B & C, ſera egal aux trois rectangles compris de la ligne non couppée, & d'une chacune partie de la couppée AB.



Qu'il ne ſoit ainſi: qu'on mene AF perpendiculaire à AB, par la 11. p. 1. laquelle ſoit faite egale à C, & du point F ſoit menée FG parallele à AB; & BG parallele à AF par la 31. prop. 1. Il eſt evident que le quadrilatere AFGB, ſera un paralelog. rectangle, & qu'iceluy ſera compris de deux lignes données AB & C, puis que AF eſt egale à C. Item ſoient menées les deux lignes D H & E I paralleles à AF par la 31. prop. 1. Donc par la deff. des paralelog.. les trois quadrilateres AH, DI, EG, ſeront parallelogrammes rectangles compris des lignes egales AF, DH, EI, & des trois ſegmens AD, DE, EB, c'eſt à dire de la ligne C & d'iceux trois ſegmens. Mais iceux trois parallelogrammes rectangles enſemble, conviennent au rectangle AG, compris des lignes données: & par la 8. com. ſent. ils luy ſont egaux. Parquoy ſi de deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

Ce qu'Euclide propoſe en lignes aux dix premiers Theoremes de ce ſecond livre, nous l'avons appliqué

& demontré en nombres au Scholie de la 14. pr. 9. Neanmoins j'eſtime qu'il ne ſera inutile de les expliquer dés icy par nombres, comme a fait Clavius: Car d'autant que ce qui provient de la multiplication d'un nombre par un autre répond au produit d'une ligne en une autre, on peut facilement & briefvement montrer par nombres ce qui eſt icy demontré en lignes avec beaucoup de paroles.

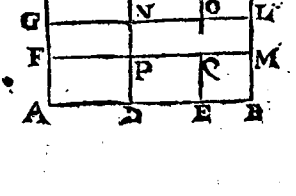
Soient donc propoſez deux nombres, comme 10 *&* 6, *le premier deſquels ſoit diviſé en trois autres nombres ou parties,* 5, 3 *&* 2. *Or multipliant les deux nombres propoſez entr'eux, c'eſt à ſçavoir* 10 *&* 6, *ſera produit le nombre* 60, *auquel ſera egale la ſomme de ces trois nombres* 30, 18 *&* 12, *leſquels ſont procréez multipliant chaque partie du nombre diviſé* 10, *c'eſt à ſçavoir* 5, 3, 2, *par le nombre non diviſé* 6: *ainſi qu'il appert en l'operation cy-deſſous:*

				30
10	5	3	2	18
6	6	6	6	12
60	30	18	12	60

Or Commandin demontre icy deux autres Theoremes, dont le premier eſt tel.

S'il y a deux lignes droites, l'une & l'autre deſquelles ſoit coupée en tant de parties qu'on voudra; le rectangle compris d'icelles deux lignes, eſt egal aux rectangles contenus de chaque ſegment de l'une, & d'un chacun des ſegmens de l'autre.

Soient deux lignes droites AB, AC, contenant un angle droit A, & AB ſoit coupée és points D & E, mais AC és points F & G. Ie dis que le rectangle contenu ſous AB, AC, eſt egal aux rectangles compris de chaque partie AD, DE, EB, & d'un chacun ſegment AF, FG, GC, c'eſt à dire egal aux rectangles contenus de

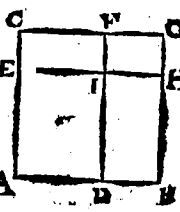


AD, AF; AD, FG; AD, GC: DE, AF; DE, FG, DE, GC: EB, AF; EB, FG; EB, GC. *Car étant accompli le rectangle* AH, *soient tirées* DI, EK *paralleles à* AC: *Item* FM, GL *paralleles à* AB, *qui couperont les premieres és points* P, Q, N, O. *Veu donc que le rectangle* AP *est contenu sous* AD, AF: *&* NF *sous* AD, FG: *&* GI *sous* AD, GC, (*pource que par la* 34. *prop.* 1. *les lignes* FP, GN *sont egales à icelle* AD.) *Item que les rectangles* DQ, PO, NK, *sont contenus sous* DE, AF: DE, FG: DE, GC: (*car* DP, PN, NI *sont egales à icelles* AF, FG, GC; *&* PQ, NO, *à icelle* DE, *par la* 34. *prop.* 1.) *Et par la même raison les rectangles* EM, QL, OH, *sont compris sous* EB, AF: EB, FG: EB, GC. *Il est evident que le rectangle contenu sous* AB, AC, *est egal aux rectangles compris sous chacune des parties* AD, DE, EB, *& un chacun des segmens* AF, FG, GC: *ce qui étoit proposé.*

Nous rendrons auſsi manifeſte ce Theoreme par nombres: & pource ſoient deux nombres 12 *&* 8, *le premier deſquels ſoit diviſé en trois parties* 6, 4 *&* 2: *mais le dernier ſoit ſeulement diviſé en deux parties* 5 *&* 3. *Or le produit de ces deux nombres propoſez multipliez entr'eux eſt* 96, *auquel eſt manifeſtement egale la ſomme de ces ſix nombres,* 30, 20, 10, 18, 12 *&* 6, *leſquels ſont produits par la multiplication de chacune des parties* 6, 4, 2, *en chacune des parties* 5 *&* 3, *comme vouloit Commandin en ce premier Theor. Quand au ſecond il eſt tel qu'il enſuit.*

S'il y a deux lignes droites coupées comme on voudra, le rectangle compris ſous icelles, avec celuy compris ſous une partie de l'une d'icelles lignes, & une partie de l'autre, eſt egal aux rectangles contenus ſous les lignes totales, & les ſuſdites parties reciproquemẽt, avec le rectangle cõtenu des deux autres parties.

Soient deux lignes droites AB, AC, *faiſant l'angle droit* A, *leſquelles ſoient coupées comme on voudra en* D *&* E. *Ie dis que le rectangle compris ſous* AB, AC, *avec celuy compris ſous les parties* AD, EC, *eſt egal aux rectangles contenus ſous* AB, EC: AC, AD: DB, AE. *Car ayant accomply le rectangle* AG, *ſoit me-*



née DF parallele à AC ; & EH à AB, s'entrecoupans en I. Veu donc que le rectangle AG eſt egal aux rectangles EG, AI, DH : ſi on leur ajoûte le commun rectangle EF : les rectangles AG, EF, qui ſont compris ſous les toutes AB, AC, & les parties AD, EC, ſeront egaux aux rectangles EG, AF, DH, compris ſous AB, EC : AC, AD : DB, AE : ce qui étoit propoſé.

Afin que ce theor. de Commandin ſoit auſſi manifeſte par nombres, ſoient propoſez deux quelconques nombres 9 & 5, le premier deſquels ſoit diviſé en deux parties 5 & 4 : mais l'autre ſoit diviſé en 3 & 2 : Or le produit de ces deux nombres propoſez eſt 45, & celuy de la partie 5, multipliée par la partie 3 eſt 15 ; & la ſomme de ces deux produits eſt 60, auquel nombre eſt manifeſtement egale la ſomme & addition de ces trois nombres 27, 25 & 8, qui ſont produits de 9 par 3, de 5 par 5, & de l'autre partie 4 par l'autre partie 2.

COROLLAIRE.

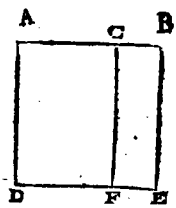
Parce que deſſus eſt manifeſte que s'il y a deux lignes droites, l'une & l'autre deſquelles ſoit coupée comme on voudra, le rectangle compris ſous icelles ſera egal au rectangle compris ſous une totale, & un ſegment de l'autre, & aux deux rectangles contenus de l'autre ſegment de cette-cy, & d'un chacun ſegment de celle-là. Car le rectangle AG, qui eſt compris des deux toutes AB, AC, eſt egal au rectangle EG, contenu de la toute EH ; c'eſt à dire AB, & du ſegment EC, & aux deux rectangles AI, DH, compris de l'autre ſegment AE, & des ſegmens AD, DE. Iceluy rectangle AG eſt auſſi egal aux trois rectangles AH, EF, IG. Pareillement aux trois AF, DH, IG, comme auſſi aux trois autres DG, AI, EF.

Le même ſe doit auſſi entendre des nombres : car il eſt evident que les deux nombres cy deſſus propoſez, c'eſt aſſavoir 9 & 5, eſtans multipliez entr'eux produiſent 45, auquel ſont egaux ces trois nombres 27, 10 & 8, produits de la multiplication de 9 par la partie 3 : & de la partie 2 par chacune des parties 5, 4. Et ainſi de toute autre partie qu'on voudra prendre.

THEOR. 2. PROP. II.

Si une ligne droite eſt coupée comme on voudra: les rectangles compris de la toute & d'une chacune partie, ſont egaux au quarré de la toute.

Soit la ligne droite AB, coupée en deux parties telles qu'on voudra au point C. Je dis que le rectangle de la toute AB, & de la partie AC, avec le rectangle de la toute AB, & de l'autre partie CB, ſont enſemble egaux au quarré de la toute AB.



Qu'ainſi ne ſoit: Sur AB ſoit décrit le quarré AE; puis de C ſoit menée CF parallele à AD, laquelle CF ſera egale à icelle AD, c'eſt à dire à AB: car icelles AD, AB ſont egales par la def. du quarré. Il eſt donc evident que les deux rectangles AF & CE, ſont compris de la toute AB, ou ſon egale CF, & des deux parties AC & CB, & ſi ils conviennent avec le quarré AE, & par conſequent luy ſont egaux. Si donc une ligne droite eſt coupée comme on voudra, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Clavius demontre encore ce Theoreme ainſi. Soit priſe une ligne droite D egale à AB: Or puis que AB eſt coupée en C, le rectangle contenu ſous la non coupée D, & la coupée AB (qui eſt le quarré de la toute AB) ſera egal aux deux rectangles compris ſous la non coupée D (c'eſt à dire ſous AB) & un chacun des ſegmens AC, CB par la prec. prop. Ce qui étoit propoſé.

Pour accommoder ce Theoreme aux nombres. Soit le nombre 12 diviſé en deux nombres 7 & 5: il eſt evident qu'au quarré d'iceluy nombre, qui eſt 144, ſont egaux

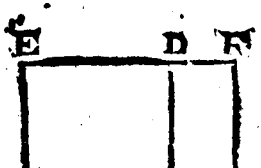
les deux nombres 84 *&* 60, *qui ſont produits du même nombre* 12 *multiplié par chacune des parties* 7 *&* 5 : *car ils ſont auſſi* 144. *comme montre l'addition d'iceux.*

Or encore qu'en ce ſecond Theoreme Euclide propoſe d'une ligne diviſée en deux parties ſeulement, ſi eſt-ce toutesfois qu'en la même maniere ſera demontré le même, ſi la ligne eſt diviſée en tant de parties qu'on voudra. Ce qui ſe peut auſſi voir par nombres, ainſi qu'il enſuit. Soit le nombre 12 *diviſé en trois parties* 5, 4 *&* 3. *Le quarré dudit nombre* 12 *ſera* 144 ; *auquel ſont egaux ces trois nombres* 60, 48 *&* 36, *leſquels ſont produits d'iceluy nombre propoſé* 12, *multiplié par chacune des parties* 5, 4 *&* 3.

Sera auſſi demontré comme deſſus, que ſi une ligne droite eſt coupée en tant de parties qu'on voudra ; le quarré de la toute eſt egal aux rectangles contenus ſous chaque ſegmens & un chacun ſegment. Ce que nous rendrons auſſi manifeſte par nombres : & pour ce ſoit le nombre 10 *diviſé en trois parties* 5, 3 *&* 2 : *Il eſt evident que le quarré du nombre total* 10 *eſt* 100, *& qu'à iceluy ſont egaux ces neuf nombres* 25, 15. 10, 15, 9. 6, 10, 6 *&* 4, *leſquels ſont produits par chacune des parties multipliée par chacune d'icelles.*

THEOR. 3. PROP. III.

Si une ligne droite eſt coupée comme on voudra; le rectangle compris de la toute, & de l'une des parties, eſt egal au rectangle compris d'icelles parties, & au quarré de la partie premierement priſe.

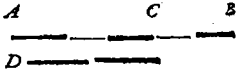


Soit la ligne droite AB coupée comme on voudra au point C. Je dis que le rectangle compris de la totale AB, & de l'une ou l'autre partie, comme AC, eſt egal au rectangle compris des deux parties AC & CB, & au quarré de la partie AC, laquelle avoit eſté premierement priſe.

Qu'il ne soit ainsi : Sur la partie AC soit fait le quarré AD par la 46. pr. 1. puis soit menée BF parallele à CD par la 31. prop. 1. rencontrant ED prolongée en F. Il est donc évident que AD est le quarré de la partie AC ; & CF le rectangle de parties AC & CB ; (car CD est egale à AC par la definition du quarré) & AF le rectangle de la toute AB & de la partie AC ; sur laquelle a esté fait le quarré. Or le quarré AD, & le rectangle CF ensemble, conviennent avec le rectangle AF ; & par consequent egaux à iceluy. Si donc une ligne droite est coupée comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

SCHOLIE.

Clavius demontre encore ce Theor. ainsi. Soit prise la ligne droite D egale à la partie AC. *D'autant que la ligne droite* AB *est divisée en* C, *par la* 1. *pr. de ce livre, le rectangle contenu sous D &* AB (*c'est à dire sous* AC *&* AB) *sera egal au rectangle compris sous* D *&* CB (*c'est à dire sous* AC, CB) *& au rectangle contenu sous* D *&* BC, *c'est à dire au quarré de la partie* AC. *Ce qui est proposé.*

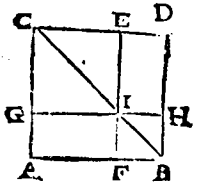


Pour accommoder ce Theor. aux nombres, soit quelconque nombre 12 *divisé en deux parties telles qu'on voudra* 7 *&* 5. *Or multipliant ledit nombre proposé* 12 *par sa partie* 7, *viendront* 84, *auquel produit sont egaux ces deux nombres* 35 *&* 49, *lesquels sont produits de* 7 *multipliez par* 5, *& de* 7 *par soy même. Mais multipliant le même nombre* 12 *par l'autre partie* 5, *sera produit le nombre* 60, *auquel sont aussi egaux ces deux nombres* 35 *&* 25, *qui sont les produits des deux parties* 7 *&* 5, *multipliées entr'elles, & de la partie* 5 *en soy même : Et partant apert ce qui a esté proposé.*

THEOR. 4. PROP. IV.

Si une ligne droite eſt coupée comme on voudra; le quarré de la toute eſt egal aux deux quarrez des parties, & à deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne donnée AB, coupée comme on voudra au point F. Je dis que les deux quarrez décrits ſur les parties AF & FB, avec deux fois le rectangle d'icelle AF & FB ſont enſemble egaux au quarré de la totale AB.



Qu'ainſi ne ſoit. Sur la ligne totale AB ſoit décrit le quarré AD; & apres avoir mené la diagonale BC; du point F, ſoit menée la ligne droite FE parallele à AC, coupant la diagonale BC en I, & derechef par iceluy point I ſoit menée G H parallele à A B, le tout par la 31. prop. 1. Je dis premierement que les quadrilateres H F & E G ſont quarrez.

Car déja il appert qu'ils ſont parallelogrammes, étans décrits entre lignes paralleles. Item puis que AD eſt quarré, les deux coſtez AB & AC ſeront egaux, & le triangle ABC eſt Iſoſcelle: & par la 5. prop. 1. les deux angles ſur la baſe BC, ſçavoir eſt A B C & A C B ſeront egaux. Pareillement la ligne BC tombant ſur les deux paralleles AC & FE fera l'angle exterieur FIB egal à l'oposé interieur A C B par la 29. prop. 1. lequel eſtant egal à ABC par la 1. com. ſent. ABC & FIB ſeront egaux, & par la 6. prop. 1. les deux coſtez B F & FI ſeront egaux: & par la 34. prop. 1. le parallelogramme H F aura les quatre coſtez egaux: & partant il ſera quarré; car l'angle F B H eſtant droit, les trois autres ſeront auſſi droits, comme nous avons demontré à la 1. def. de ce livre. Par meſme diſcours on montrera G E eſtre auſſi quarré. Maintenant, d'autant que AI & I D ſont décrits entre lignes paralleles, & les angles A & D ſont droits, il appert qu'ils ſont parallelogrammes rectangles,

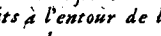
& egaux entr'eux par la 43. prop. 1. & ſont compris des deux parties AF, FB, eſtant, EI egale à AF, & HI, IF à FB par la 34. prop. 1. & def. du quarré. Partant AI & ID ſont deux fois le rectangle de AF & FB, leſquels avec les deux quarrez FH & GE conviennent avec le quarré total AD, & par la 8. com. ſent. ils luy ſeront egaux. Si donc une ligne droite eſt coupée comme on voudra, le quarré de la toute eſt egal, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte par la demonſtration cy-deſſus, que les parallelogrammes décrits à l'entour de la diagonalle d'un quarré, & qui ont un angle commun avec iceluy, ſont auſſi quarrez. Et de plus, il eſt évident que la diagonalle coupe en deux egalement les angles du quarré. Ce que nous avons auſſi demontré au 3. Theor. du Scholie de la 34. p. 1.

SCHOLIE.

Clavius demontre encore apres Campanus ce 4. Theor. d'Euclide ainſi. D'autant que la ligne droite AB eſt coupée en F, par la 2. prop. 2. le quarré de la toute AB ſera egal aux rectangles compris ſous la toute AB, & chacune des parties AF, FB. Mais par la 3. prop. 2. le rectangle contenu ſous AB, AF eſt egal au rectangle compris ſous AF, FB avec le quarré de la partie AF. Item le rectangle de AB, FB eſt egal au rectangle de FB, AF, avec le quarré de la partie FB. Donc le quarré de AB eſt auſſi egal aux quarrez des parties AF, FB, & aux rectangles contenus ſous AF, FB & ſous FB, AF. Ce qui eſt propoſé.



Pour accommoder ce Theoreme aux nombres: Soit le nombre 10 diviſé en deux parties 6 & 4: Il eſt manifeſte que le nombre 100, qui eſt le quarré du nombre total 10, eſt egal à 36 & 16, qui ſont les quarrez des parties 6 & 4, avec deux fois 24, nombre produit deſdites parties 6 & 4 multipliées entr'elles: car tous ces

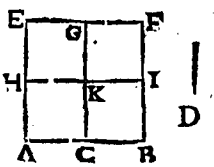
quatre nombres 36, 16, 24 *&* 24, *font enſemble* 100, *ainſi qu'il appert en l'operation ſuivante.*

10	6	4	6	36
10	6	4	4	16
				24
100.	36.	16.	24.	24
				100.

Clavius demontre auſſi en ce lieu le Theoreme ſuivant.

Si une ligne droite eſt double d'une autre, le quarré de celle-là eſt quadruple du quarré de cette-cy : & ſi un quarré eſt quadruple d'un autre quarré, le côté de celuy-là eſt double de cettui-cy.

Soient deux lignes droites AB & D, deſquelles AB eſt double de D. Ie dis que le quarré de AB eſt quadruple du quarré de D. Car ayant diviſé AB en deux egalement en C, ſi on fait telle conſtruction qu'en cette 4. *propoſ. il eſt evident que les* 4. *parallelogrammes AK, CI, HG, KF. ſeront quarrez, & egaux entr'eux Mais le quarré AF eſt egal à iceux quatre quarrez : donc le quarré de AB ſera quadruple du quarré de AC, c'eſt à dire de D, qui luy eſt egale : Car AB eſt double de l'une & de l'autre.*



Pour la ſeconde partie : Soit le quarré de AB quadruple du quarré de D. Ie dis que AB eſt double de D. Car AB étant coupée en deux egalement en C, le quarré de AB ſera quadruple du quarré de AC, comme il a été demontré cy-deſſus. Mais le quarré de AB a été poſé auſſi quadruple du quarré de D : donc les quarrez des lignes AC & D ſont egaux, & partant icelles lignes AC & D auſſi egales. Mais AB eſt double de AC : donc auſſi double de D.

Ce Theoreme eſt auſſi manifeſte en nombres : Car ſoient

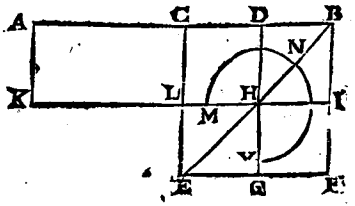
deux quelconques nombres 10 *&* 5, *dont le premier eſt double de l'autre. Il apert que* 100, *quarré du premier nombre* 10, *eſt quadruple de* 25, *quarré du dernier nombre* 5.

THEOR. 5. PROP. V.

Si une ligne droite eſt coupée en deux parties egales, & en deux inegales; le rectangle contenu d'icelles parties inegales avec le quarré de la partie du milieu, ſont egaux au quarré de la moitié de la toute.

Soit la ligne donnée AB coupée en deux parties egales au point C, & en deux inegales au point D. Je dis que le rectangle compris des deux parties inegales AD & BD, avec le quarré de la partie du milieu CD, ſont egaux au quarré de la moitié CB.

Car ſur la ligne CB ſoit décrit le quarré CF par la 46. prop. 1. & apres avoir mené DG parallele à BF ſoit menée la diagonale BE coupant DG au point H, par lequel ſoit menée interminément IK parallele à AB, coupant CE en L: puis du point A, ſoit auſſi menée AK parallele à DH, rencontrant KI en K. Donc par le Corol. de la prec. pr. DI, LG ſeront quarrez; & partant la ligne DH ſera egale à la ligne DB: & par la 34. prop. 1. LH eſt auſſi egale à CD: parquoy le rectangle AH eſt compris des deux ſegmens AD, DB; & LG ſera quarré de la partie du milieu CD. Il faut donc prouver que le rectangle AH, avec le quarré GL, eſt egal au quarré CF, fait ſur la ligne CB moitié de la toute AB.

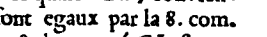


Or le rectangle AL eſt egal au rectangle CI par la 36. pr. 1. d'autant

d'autant qu'ils sont sur bases egales AC & CB, & entre mêmes paralleles AB & KI. Pareillement les supplemens CH & HF sont egaux par la 43. prop. 1. ausquels si on ajoûte le quarré commun DI, les touts CI & DF seront egaux : & par la 1. com. sent. DF sera egal à AL, ausquels si on ajoûte aussi le supplement commun CH, le Gnomon MNX sera egal au rectangle AH. Mais iceluy Gnomon, & le quarré GL, conviennent avec le quarré CF, & partant sont egaux par la 8. com. sent. Donc aussi le rectangle AH, & le quarré GL seront egaux au quarré CF par la 1. com. sent. Parquoy si une ligne droite est coupée en deux parties egales, & en deux inegales, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Nous ajoûterons tant en ce Theor. qu'aux 5. suivans les demonstrations qu'en a fait le docte Maurolycus. D'autant que par la 4. p. 2. le quarré de CB est egal aux quarrez de CD & DB, avec deux fois le rectangle d'icelles ; &



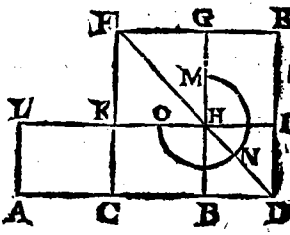
que par la 3. p. 2. le rectangle de CB, DB est egal au rectangle de CD, DB, avec le quarré de DB : le quarré de CD sera egal à l'autre quarré de CD, avec le rectangle de CB, DB, & celuy de CB, DB, ou de AC, DB. Mais par la 1. prop. 2. le rectangle des toutes AD, DB, est egal aux rectangles de DB, AC, & de DB, CD. Donc le quarré de CB sera egal au quarré de CD, avec le rectangle de AD, DB. Ce qui étoit proposé.

Pour accommoder ce Theoreme aux nombres, soit le nombre 12 divisé en deux parties egales 6 & 6; Et aussi en deux parties inegales 8 & 4 ; & par ainsi la plus grande partie de 8 excede la moitié 6 du nombre 2, qui est la partie du milieu. Il est evident que 32, nombre produit des deux nombres inegaux 8 & 4, avec 4 qui est le quarré de 2, est egal à 36, qui est le quarré de 6, moitié du nombre proposé.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si une ligne droite eſt coupée en deux parties egales, & qu'on luy ajoûte directement quelque autre ligne droite : le rectangle de la toute & de l'ajoûtée comme d'une, & de l'ajoûtée, avec le quarré de la moitié, eſt egal au quarré qui eſt fait de la moitié & de l'ajoûtée comme d'une.

Soit la ligne droite AB coupée en deux egalement au point C ; & à icelle AB ſoit ajoûtée directement la ligne BD. Je dis que le rectangle compris de la totale AD, & de l'ajoûtée BD, avec le quarré de la moitié CB, eſt egal au quarré de la ligne CD, laquelle eſt compoſée de la moitié CB, & de l'ajoûtée BD.



Qu'ainſi ne ſoit : ſur la ligne CD ſoit décrit le quarré CE, & tiré ſa diagonale DF ; & apres avoir du point B, mené BG parallele à DE, laquelle coupe la diagonale au point H ; par iceluy point H ſoit menée interminément IKL parallele à AD par la 31. prop. 1. Item AL parallele à DI, rencontrant IL en L.

Premierement le rectangle AI eſt compris de la toute & ajoûtée comme d'une AD, & de l'ajoûtée DI (car icelle DI eſt egale à l'ajoûtée BD eſtant BI quarré par le Cor. de la 4. p. de ce livre.) Item KG, qui eſt quarré par le meſme Cor. eſt fait ſur HK egale à la moitié CB par la 34. prop. Je dis donc que le rectangle AI, & le quarré KG ſont enſemble egaux au quarré CE. Car les deux ſuplemens CH & HE eſtans egaux par la 43. pr. 1. Item les deux rectangles AK & CH auſſi egaux par la 36. prop. 1. d'autant qu'ils ſont ſur baſes egales, & entre meſme paralleles : & par la 1. com. ſent. AK ſera egal à HE, & en ajoûtant à chacun d'iceux le rectangle commun CI, le Gnomon MNO ſera egal au rectangle AI. Mais iceluy

Gnomon avec le quarré GK, ſont egaux au quarré CE : donc le rectangle AI avec le quarré KG ſera egal au meſme quarré CE. Parquoy ſi une ligne droite eſt coupée en deux parties egales. &c. Ce qu'il falloit demontrer.

SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. pr. 2. le quarré de CD eſt egal aux deux quarrez de CB, BD avec deux fois le rectangle d'icelles CB : BD; & que par la 1. pr. 2. le rectangle des toutes AD, BD eſt egal aux trois rectangles de DB, AC; DB, CB; & DB, DB, (qui eſt le quarré de DB) le quarré de CD ſera egal à l'autre quarré CB avec le rectangle de AD, BD.* Ce qu'il falloit demontrer.

Pour apliquer ce Theor. aux nombres, ſoit le nombre 12 diuiſé en deux nombres egaux 6 & 6; & à iceluy nombre 12 ſoit ajoûté 3. Il eſt evident que le nombre 45 produit de tout le nombre compoſé 15 multiplié par l'ajoûté 3, avec 36 quarré de la moitié 6. ſont 81, tout ainſi que le quarré de 9, compoſé de ladite moitié 6, & de l'ajoûté 3.

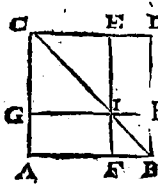
THEOR. 7. PROP. VII.

Si une ligne droite eſt coupée comme on voudra; le quarré de la toute, & le quarré de l'une des parties, ſont egaux au quarré de l'autre partie, & deux fois le rectangle compris de la totale, & de la partie premierement priſe.

Soit la ligne AB coupée comme on voudra au point F. Je dis que les deux quarrés de la totale AB, & de la partie AF, ſont egaux au quarré de l'autre partie FB, & deux fois le rectangle de AB, AF.

Qu'il ne ſoit ainſi : ſur AB ſoit décrit le quarré AD avec ſa diagonale BC : & apres avoir mené du point F, la ligne FE paralele à AC, laquelle coupe la diagonale BC au point I;

d'icelluy point soit menée G H parallele à AB par la 12. pr. 1. Donc FH & GE seront quarrez par le Cor. de la 4. prop. de ce liv. & puis que par la 34. pr. 1. GI est egale à AF; GE sera quarré du segm. AF. Derechef pource que AC est egale à AB, le rectangle AE sera compris sous la toute AB & le segm. AF. Par même raison le rectangle GD sera compris sous les mêmes lignes AB, AF: (car CD, CG sont egales à AB, AF, à cause des quarrez AD, GE.) Vû donc que les rectangles AE & ID, avec le quarré FH sont egaux au quarré AD: si on leur ajoûte le commun quarré EG, les quarrez AD, EG seront egaux aux rectangles AE, GD, (chacun desquels est compris de la toute AB & de la partie AF) avec le quarré FH. Parquoy si une ligne droite est coupée comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demontrer.



SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. pr. 2. le quarré de AB est egal aux deux quarrez de AF, FB, & deux fois le rectangle d'icelles AF, FB; si on ajoûte le quarré commun de AF, les quarrez de AB, AF seront egaux aux trois quarrez de AF, AF, FB, avec deux fois le rectangle de AF, FB.* Mais *par la 3. p. 2. le rectangle de AB, AF est egal au rectangle de AF, FB, avec le quarré de AF; & partant deux fois le rectangle de AB, AF, est egal à deux fois le rectangle de AF, FB, avec deux fois le quarré de AF: donc les quarrez de AB, AF, sont egaux à l'autre quarré de FB, avec deux fois le rectangle de AB, AF. Ce qui étoit à démontrer.*

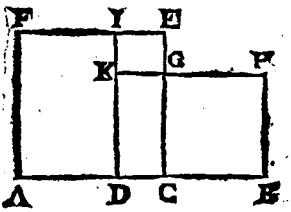
Pour accommoder ce Theor. aux nombres, soit divisé le nombre 12 en deux tels nombres qu'on voudra 7 & 5. Or il est evident que 144 nomb. quarré de 12, & 49 nombre quarré de la partie 7, sont ensemble egaux à 193, qui est fait de 25 nombre quarré de l'autre partie 5, & deux fois 84, produit de 12 multiplié par 7. Semblablement 144 & 25, nombres quarrez de 12 & 5, sont ensemble egaux à 169.

fait de 49 quarré de 7, & deux fois 60, produit de 12 multiplié par la partie.

Commandin demontre en ce lieu le Theor. suivant.

Si une ligne droite est coupée en deux parties inegales, les quarrez d'icelles parties sont egaux au rectangle contenu deux fois sous icelles parties, & au quarré de la ligne, dont la plus grande partie excede la moindre.

Soit la ligne droite AB coupée en deux parties inegales AC, CB, desquelles AC est la plus grande, & d'icelle AC, soit prise AD egale à BC, afin que DC soit l'excez de la partie AC par dessus BC. Ie dis que les quarrez des parties AC, CB sont egaux au rectangle contenu deux fois sous AC, CB, & au quarré de DC. Car soient construits les quarrez AE, CH, & mené DI parallele à CE: puis prolongée HG jusques à ce qu'elle rencontre DI en K. Or d'autant que les lignes BC, AD sont egales, leur ajoûtant la commune DC, la toute AC, c'est à dire CE, sera egale à la toute DB. Mais CG est aussi egale à CB: donc aussi le reste GE sera egal au reste DC: & partant puis qu'aussi IE est egale à DC par la 34. pr. I. GE, IE seront egales: & partant IG sera le quarré de l'excez DC. Et d'autant que les rectangles AI, DH sont contenus sous les parties AC, CB; (car AC est egale à l'une & à l'autre ligne AF, DB: & CB à l'une & à l'autre AD, BH.) Il est manifeste que les quarrez AE, CH, des parties AC, CB sont egaux aux rectangles AI, DH, qui sont contenus sous les parties AC, CB, & à IG quarré de l'excez DC, Ce qui étoit proposé.



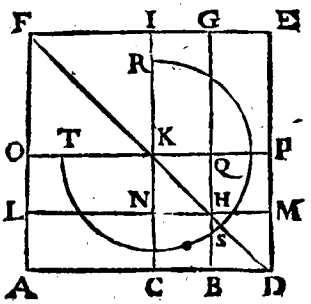
Le même est aussi manifeste par nombres: car le nombre 12 étant divisé en deux parties inégales 7 & 5: dont la plus grande excede la moindre de 2: les quarrez d'icelles parties seront 49 & 25, qui font ensemble 74, auquel nombre sont egaux deux fois 35 produit de 7 multiplié par 5. avec 4 quarré de l'excez 2.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si une ligne droite eſt coupée comme on voudra ; quatre fois le rectangle compris de la toute & de l'une des parties, avec le quarré de l'autre partie, eſt egal au quarré de la toute, & d'icelle partie premierement priſe comme d'une ſeule ligne.

Soit la ligne donnée AB coupée comme on voudra au point C. Je dis que quatre fois le rectangle, compris de AB & de l'une ou l'autre partie, ſçavoir BC, avec le quarré de l'autre partie AC, ſont enſemble egaux au quarré de AD compoſée de la totale AB, & de la partie BC.

Qu'il ne ſoit ainſi : Soit prolongée AB vers D, & pris BD egale à BC, puis ſur la totale AD ſoit fait le quarré AE avec ſa diagonale FD, & des deux points B & C, ſoient menées BG & CI paralleles à DE. Item des points H & K, auſquels elles coupent la diagonale FD, ſoient menées LM & OP paralleles à AD, par la 31. prop. 1. leſquelles coupent les premieres paralleles en N & Q.

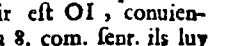


Premierement, par ce qui reſulte de la 4. prop. de ce Livre les rectangles OI, NQ, BM au long de la diagonale ſeront quarrez. Item, d'autant que CB eſt egale à BD : CH, & BM, ſeront egaux & quarrez : (étant l'un d'iceux quarré) pareillement NQ & HP auſſi egaux quarrez ; ainſi les quatre CH, BM, NQ, HP, ſeront quarrez, & egaux : & par la 43. p. 1. les deux ſupplémens LK & KG ſeront auſſi egaux entr'eux, & par la 36. pr. 1. LK eſt egal à AN ; & KG à QE : & par conſequent iceux quatre rectangles ſont auſſi

egaux entr'eux. Mais comme aux precedentes, il eſt evident que AH eſt une fois le rectangle de AB & BH, (egale à BD) qui eſt un des quatre rectangles avec un des quatre petits quarrez legaux : donc iceux quatre rectangles avec iceux quatre quarrez faiſant le Gnomon RST ſeront egaux à quatre fois le rectangle de AB & BD ; lequel Gnomon avec le quarré de OK (egale à AC par la 34. p. 1.) ſçavoir eſt OI, conuiennent avec le quarré AE : & partant par la 8. com. ſent. ils luy ſeront egaux : Si donc une ligne droite eſt coupée, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Autrement, *D'autant que par la 4, prop. 2. le quarré de AD eſt egal aux quarrez de AB, BD, & à deux fois le rectangle d'icelles AB, BD, c'eſt à dire, aux quarrez de AB, BC avec deux fois le rectangle de AB, BC : & que par la precedente les quarrez de AB, BC ſont egaux au quarré de AC avec deux fois le rectangle de AB, BC : le quarré de AD ſera egal à quatre fois le rectangle de AB, BC, avec le quarré de AC. Ce qu'il faloit demontrer.*



Pour accommoder ce theoreme aux nombres, ſoit le nombre 12, diviſé comme on voudra en 7 & 5. Or ledit nombre 12 multiplié par la partie 7, fait 84, qui pris quatre fois avec 25 quarré de l'autre partie 5, font 361, qui eſt le nombre quarré de 19, compoſé de 12 & 7. Semblablement le nombre 240, qui eſt fait du nombre propoſé 12, multiplié quatre fois par la partie 5, étant adjoûté avec 49, quarré de l'autre partie 7, font 289, tout ainſi que le quarré de 17, nombre compoſé du donné 12, & de la partie 5.

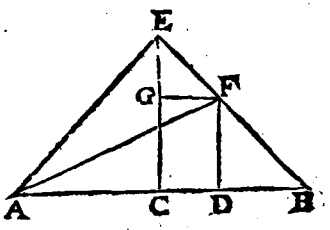
THEOR. 9. PROP. IX.

Si une ligne droite eſt coupée en deux parties egales, & en deux inegales : les quarrez d'icelles parties inegales ſeront doubles des quarrez de la moitié, & de la partie du milieu.

Soit la ligne donnée AB coupée en deux egalement au point

C, & en deux inegalement en D. Je dis que les quarrez de AD & DB parties inegales, ſont doubles des quarrez de AC moitié, & de CD partie du milieu.

Qu'il ne ſoit ainſi : au point C ſoit levée la perpendiculaire CE, qu'on fera egale à CA, & apres avoir mené AE & BE, ſoit levée la perpendiculaire DF, coupant BE en F, duquel point ſoit menée FG parallele à AB, coupant CE en G ; & finalement ſoit menée AF.



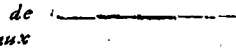
Premierement, les triangles ACE, & ECB ſeront Iſoſcelles, & feront les angles ſur les baſes AE & EB egaux par la 5. prop 1. eſtant l'angle ECB droit pour eſtre CE perpendiculaire. Item FDB eſtant droit, & DBF demy droit, auſſi, par la 32. pr. 1. DFB ſera demy droit, & par la 6. pr. 1 les coſtez DB & DF, du triangle BDF, ſeront egaux entr'eux. Par le meſme diſcours ſera demontré que les coſtez GF, GE, du triangle FGE, ſont egaux entr'eux. Item il eſt evident que l'angle AEB ſera droit, étant compoſé des deux demy droits AEC, & BEC.

Maintenant par la 47. pr. 1. au triangle rectangle ACE, le quarré de AE, côté qui ſoûtient l'angle droit, eſt double du quarré de AC ; étant egal à tous les deux de AC & CE. Par même diſcours, le quarré de EF eſt double du quarré de GF, ou de CD ſon egal par la 34. p. 1. partant les deux quarrez de AE & EF, ſeront doubles des deux de AC & CD. Pareillement le quarré de AF étant egal aux deux de AE & EF par la 47. p. 1. iceluy ſera double des deux de AC & CD. Mais par la même 47. pr. 1. le quarré de AF eſt egal aux deux de AD & DF, ou DB ſon egale : donc les deux quarrez de AD & DB ſeront doubles des deux de AC & CD. Si donc une ligne droite eſt coupée, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. prop. 2. Le quarré de la ligne AD eſt egal aux deux quarrez de AC, CD, & à deux fois le rectangle d'icelles AC, CD : ſi on ad-*

joûte le commun quarré de DB, les deux quarrez de AD, DB, ſeront egaux aux trois quarrez de AC, CD & DB, avec deux fois le rectangle de AC, CD, ou de BC, CD. Mais par la 7. prop. 2. les quarrez de BC ou AC, & de CD, ſont egaux au quarré de DB avec deux fois le rectangle de BC, CD. Donc les quarrez de AD, DB ſont egaux à deux fois les quarrez de AC, CD: & partant doubles d'iceux: Ce qu'il faloit demontrer.



Commandin demontre encore cette propoſition autrement, ainſi qu'il enſuit. D'autant que AC eſt egale à CB, & icelle CB excede CD de DB, auſſi AC excedera la même CD de DB. Parquoy comme il a été demontré à la 7. prop. 2. les quarrez de AC, CD, ſont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD, avec le quarré de DB, & partant les trois quarrez de AC, CD, DB, avec deux fois le rectangle de AC, CD, ſont doubles des quarrez de AC, CD. Mais par la 4. propoſit. 2. le quarré de AD eſt egal aux quarrez de AC, CD, avec deux fois le rectangle de AC, CD. Donc les quarrez de AD, DB ſont doubles des quarrez de AC, CD.

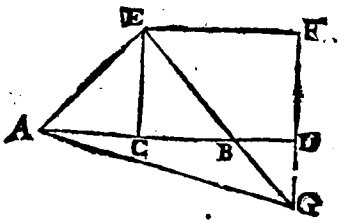
Pour auſſi rendre manifeſte ce Theor. par nomb. ſoit le n. 12 diviſé en deux parties egales, 6 & 6, & en deux inegales 8 & 4, de ſorte que la partie du milieu ſera 2. Or il eſt evidēt que 64 & 16, qui ſont les quarrés des parties inegales 8 & 4, ſont enſemble doubles de 36 & 4, qui ſont les quarrez de la moitié 6, & de la partie du milieu 2, comme vouloit la prop.

THEOR. 10. PROP. X.

Si une ligne droite eſt coupée en deux parties egales, & on luy ajoûte directement quelqu'autre ligne droite; le quarré de la toute avec l'ajoûtée comme d'une, & le quarré de l'ajoûtée, ſont doubles des quarrez de la moitié, & de la moitié, & de l'ajoûtée, comme d'une.

Soit la ligne droite AB coupée en deux egalement au point

C, à laquelle ſoit ajoûtée directement B D. Je dis que les quarrez de AD & BD ſont doubles des quarrez de AC & CD. Qu'ainſi ne ſoit ; au point C ſoit levée la perpendiculaire C E par la 11. prop. 1. egale à AC : & apres avoir mené les deux lignes AE & EB, ſoient menées par la 31. prop. 1. EF parallele à CD, & DF à CE ſe rencontrant en F, & ſoient continuées EB &. FD, juſques à ce qu'elles ſe rencontrent au point G : (elles s'y rencontreront puis que les deux angles BEF, EFD, ſont moindres que les deux droits CEF, EFD.) Finalement ſoit tirée la ligne AG.



Premierement, puis que AC & CE ſont egaux ; auſſi par la 5. prop. 1. les angles EAC & CEA ſont egaux, & demy droits par la 32. prop. 1. étant l'angle ACE droit. Par même diſcours, les angles CBE & BEC ſeront auſſi demy droits, & l'angle AEB droit, étant compoſé de deux demy droits. Item par la 15. prop. 1. l'angle DBG ſera egal à CBE, & demy droit : & les deux lignes CD & EF étans paralleles, par la 29. prop. 1. l'angle BEF ſera egal à CBE, c'eſt à dire demy droit, & l'angle F étant droit par la 34. pr. 1. (car il eſt oppoſé à un droit C) BGD ſera auſſi demy droit par la 32. p. 1. & par la 6. p. 1. les triangles EGF & BDC, ſeront Iſoſcelles rectangles, & CF parallelogramme rectangle.

Maintenant par la 47. prop. 1. le quarré de AE, coſté qui ſoûtient l'angle droit C, eſt egal aux deux quarrez des deux autres coſtez AC, CE, partant double du quarré de AC. Par même diſcours EG ſe trouvera double du quarré de EF, ou de CD, qui luy eſt egale par la 34. prop. 1. ainſi les deux quarrez de AE & EG, ou le ſeul de AG qui leur eſt egal par la 47. prop. 1. ſera double des deux de AC, CD. Mais par la même 47. p. 1. il eſt egal aux deux quarrez de AD & DG, ou BD ſon egal, & par conſequent les deux quarrez de AD & BD, ſeront doubles des deux de AC & DC. Si donc une ligne droite eſt coupée en deux parties egales, &c. Ce qu'il faloit prouver.

SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. prop. 2. le quarré de* AD *eſt egal aux quarrez de* AC, CD, *avec deux fois le rectangle d'icelles* AC, CD, *ou de* BC, CD: *Si on adjoûte le commun quarré de* BD, *les deux quarrez de* AD, BD *ſeront egaux aux trois quarrez de* AC, CD; BD *avec deux fois le rectangle de* BC, CD. *Mais par la 7. p. 2. le quarré de* BD *avec deux fois le rectangle de* BC, CD *eſt egal aux quarrez de* CD CB, *c'eſt à dire de* AC, CD. *Donc les quarrez de* AD, BD, *ſont egaux à deux fois les quarrez de* AC, CD, *& partant ils ſont doubles d'iceux. Ce qu'il falloit démontrer.*

A C B D

Commandin demontre encore cette prop. ainſi. D'autant que AC eſt egale à CB, *& CD excede icelle* CB *de* BD, *auſſi la même CD excedera AC du même excez BD: Parquoy comme il a été demonstré à la 7. prop. de ce livre, les quarrez de AC, CD, ſont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD avec le quarré de* BD: *& partant les trois quarrez de AC, CD, BD avec deux fois le rectangle de AC, CD, ſont doubles des quarrez de AC, CD. Mais par la 4. p. 2 le quarré de AD eſt egal aux deux quarrez de AC, CD. & deux fois le rectangle d'icelles AC, CD: Dont les quarrez de AD & BD ſont doubles des quarrez de AC, CD.*

Ce Theoreme eſt auſſi evident en nombres: car le nombre 8 *étant diviſé en deux parties egales* 4 *&* 4, *ſi on luy ajoûte quelconque nombre* 5, *le nombre composé ſera* 13, *duquel le quarré* 169 *avec* 25 *quarré du nombre adjoûté* 5, *fait* 194, *qui eſt double du nombre* 97, *ſomme de ces deux nombres* 16 *&* 81, *qui ſont les quarrez de la moitié* 4, *& de 9 composé de ladite moitié & du nombre ajoûté* 5.

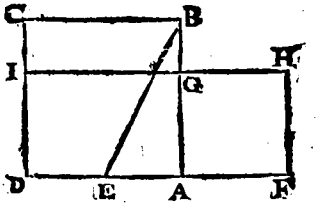
PROBL. 1. PROP. XI.

Couper une ligne droite donnée, tellement que le rectangle de la toute, & de l'une des parties, ſoit egal au quarré de l'autre partie.

Soit la ligne droite donnée AB, laquelle il faut diviſer ſelon le requis de la propoſition.

Apres avoir conſtruit ſur icelle AB le quarré AC, ſoit diviſée AD en deux egalement au point E, & apres avoir mené EB, & prolongé EA vers F, tellement que EF ſoit egale à EB, ſur AF ſoit fait le quarré AH; & ſoit continuée HG juſques en I. Je dis que la ligne AB eſt coupée au point G, en ſorte que le rectangle CG, compris de BC egale à BA; & de BG partie de BA, eſt egal au quarré de l'autre partie AG, ſçavoir eſt à GF.

Car la ligne AD eſtant coupée en deux egalement en E, & on luy ajoûte directement AF, & le quarré de la moitié & de l'ajoûtée comme d'une, ſçavoir EF, ou de ſon egale EB, eſt egal au rectangle de DF, AF, au quarré de AE par la 6. p. de ce livre. Mais le quarré de EB eſt egal aux deux de BA & AE par la 47. prop. 1. ainſi les deux quarrez de BA & AE, ſeront egaux au rectangle de DF, AF, & au quarré de AE: ôtant donc le quarré de AE commun, les demeurans quarré de AB, ſçauoir AC, & le rectangle de DF, AF, ſçavoir FI, ſeront egaux; deſquels AC & FI, ſi on ôte le rectangle commun AI; le demeurant quarré FG, ſera egal au demeurant rectangle GC. Parquoy nous avons coupé la ligne droite AB en G, tellement que le rectangle d'icelle & de la partie GB eſt egal au quarré de l'autre partie AG. Ce qu'il falloit faire.



SCHOLIE.

Nous avons enſeigné en nos Memoires Mathe-

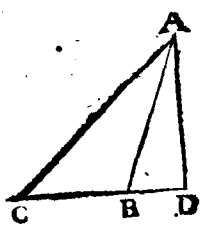
matiques Probl. 72. de la Geometrie pract. à couper une ligne droite, non seulement comme enseigne icy Euclide, mais aussi en sorte que le rectangle de la toute, & de l'une des parties soit double, ou triple, ou quadruple, &c. ou moitié, ou tiers, ou quart, &c. du quarré de l'autre partie : bref qu'iceluy rectangle soit au quarré, selon quelconque raison donnée.

Quand aux nombres, ils ne se peuvent accommoder à ce probleme, sinon qu'on y employe les nombres irrationaux : Car aucun nombre absolu ne peut être divisé en deux autres tels que le nombre produit du tout, multiplié par l'une des parties soit egal au nombre quarré de l'autre partie, comme il sera demontré au Scholie de la 14. p. 9. auquel les 10. theoremes precedens seront demontrez en nombres ; Neanmoins pour le contentement de ceux qui entendent les operations des nombres irrationaux, nous appliquerons les nombres aux lignes & superfices mentionnez en la demonstration cy-dessus. Que la ligne AB soit 8 : donc sa moitié AE sera 4, & leurs quarrez seront 64 & 16, qui font ensemble 80, pour le quarré de BE, ou EF, qui par consequent sera irrationelle, c'est à sçavoir √80 : & d'icelle EF, ostons EA 4, & resteront pour AF, ou AG, √80—4, qui ostez de la toute AB 8, resteront pour l'autre partie BG 8—√80—4, c'est à dire 12—√80, qui multipliez par le nombre total 8, feront 96—√5120 pour le rectangle GC, & autant est le quarré AH ; car la partie AG, qui est √80—4, multipliée par soy-même fait aussi 96—√5120, comme vouloit ce probleme.

THEOR. II. PROP. XII.

Aux triangles ambligones, le quarré du côté qui soûtient l'angle obtus, est plus grand que les quarrez des deux autres côtez, de la quantité de deux fois le rectangle, compris d'un des côtez contenant l'angle obtus, sçavoir celuy sur lequel étant prolongé tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

Soit le triangle ambligone A B C, duquel soit prolongé le côté CB iusques en D, & du point A soit menée la perpendiculaire A D par la 12. prop. 1. Je dis que le quarré du costé A C qui soûtient l'angle obtus A B C, est plus grand que les quarrez de A B & C B, de deux fois le rectangle de C B & B D, sçavoir C B, qui est l'un des costez faisant l'angle obtus, celuy sur lequel étant prolongé tombe la perpendiculaire A D, & B D prise dehors entre l'angle obtus, & la perpendiculaire, c'est à dire que le quarré du costé A C est egal aux deux quarrez des costez A B, B C, avec deux fois le rectangle de C B, B D.



Qu'il ne soit ainsi : Puis que la ligne C D est coupée en B, le quarré d'icelle C D sera egal aux deux quarrez de C B, B D, & au rectangle compris deux fois sous C B, B D, par la 4. prop. de ce Livre : Adjoûtant donc le commun quarré de A D, les deux quarrez de C D, D A, seront egaux aux trois quarrez de C B, B D, D A, & au rectangle compris deux fois sous C B, B D. Mais par la 47. pr. 1. le quarré de A C est egal aux quarrez de C D, D A : donc aussi le quarré de A C sera egal aux trois quarrez de C B, B D, D A, & au rectangle compris deux fois sous C B, B D. Et puis que par la 47. p. 1. le quarré de A B est egal aux quarrez de B D, D A ; le quarré de A C sera egal aux quarrez de C B, A B, & deux fois le rectangle de

CB, BD. Parquoy aux triangles ambligones, le quarré du côté qui soûtient l'angle obtus, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Or que la perpendiculaire tirée de A, doive tomber sur le costé CB prolongé de la part de l'angle obtus, comme l'a pris icy Euclide, nous le demontrerons ainsi : Soit le triangle ABC ayant l'angle B obtus, & le côté CB prolongé de la part de B. Ie dis que la perpendic. tirée de A tombe hors le triangle sur le costé CB prolongé, comme est la ligne droite AD. Car si elle tomboit dans le triangle, comme est la ligne AE, les deux angles ABE, AEB seroient plus grands que deux droits, contre la 17. prop. 1. Mais si elle tomboit hors le triangle sur le costé

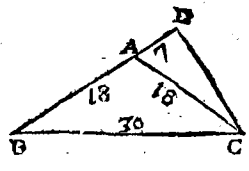
BC prolongé de la part de C, comme est AF; derechef, au triangle ABF, les deux angles ABF, AFB, seroient plus grands que deux droits : ce qui est absurde.

Or afin de pouuoir par le moyen des nombres faire paroître la verité de ce theoreme, nous enseignerons icy certaines regles, par lesquelles on pourra construire diuers triangles ambligones, ayans les costez commensurables en nombre entier, & aussi la ligne d'entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

REGLE I.

Pour construire un triangle ambligone Isoscelle, ayant les costez, & la ligne prise dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus commensurables en nombre entier, soit fait le segment exterieur, d'autant de parties egales que le nombre d'icelles parties se puisse diuiser exactement par 7. comme de 7. ou de 14. ou de 21. ou de 28. ou 35. &c. puis

apres soit posé pour chaque costé egal le double d'iceluy segment, & outre ce $\frac{4}{7}$ d'iceluy, mais pour le plus grand costé, le quadruple & $\frac{2}{7}$ dudit segment exterieur: comme au triangle *ABC*, ou le segment *AD* est posé de 7, & l'un & l'autre des costez *AB*, *AC* de 18, qui est double & $\frac{4}{7}$ de 7; mais le plus grand costé *BC* de 30, qui est le quadruple & $\frac{2}{7}$ de 7. Or que ce triangle *ABC* composé comme dessus soit ambligone, il est evident: Car le quarré du costé *BC* est 900, & ceux des costez *AB*, *AC* font seulement ensemble 648, chacun d'iceux étant 324: & partant parce que nous avons demontré au Scholie de la 48 p. 1. l'angle *BAC* sera obtus. Donc le triangle *ABC* duquel les costez & la ligne exterieure *AD* sont commensurables en nombre entier, est ambligone. Parquoy le quarré dudit costé *BC*, qui est 900 sera egal à la somme des quarrez des deux autres costez *AB*, *AC*, & de deux fois *BA* en *DA*, c'est à dire à la somme de ces quatre nombres 324, 324, 126, 126, qui font aussi 900, comme veut cette 12. proposition.



REGLE II.

Pour construire un triangle Ambligone scalene duquel non seulement les costez, & la ligne prise dehors entre la perpendiculaire tombant sur le moindre costé prolongé & l'angle obtus, mais aussi ladite perpendiculaire, soient commensurables en nombre entier:

tier; soit posé le segment exterieur d'autant de parties qu'on voudra qui se puissent exactement diviser par 5; comme de 5, 10, 15, 20, &c. puis au double d'icelles parties ajoûtez $\frac{1}{5}$ pour avoir le petit costé, $\frac{3}{5}$ pour avoir le moyen, & $\frac{2}{5}$ pour avoir la perpendiculaire, mais le quadruple dudit segment sera le plus grand costé. Ou bien posez le segment exterieur de 9, ou 18, ou 27, ou d'autre nombre de parties qui se puisse partir exactement par 9: puis pour le petit costé prenez $\frac{7}{9}$ dudit segment; pour avoir le moyen, ajoûtez à iceluy segment $\frac{2}{3}$, pour la perpendiculaire $\frac{1}{3}$, & pour le grand costé ajoustez $\frac{2}{9}$ au double d'iceluy segment: Comme si nous posons que le segment exterieur soit de 9 parties egales, le plus petit costé sera 7 d'icelles parties, le moyen 15, la perpendiculaire 12, & le plus grand costé 20. Or le quarré d'iceluy costé est 400, auquel est egale la somme de ces quatre nombres 225, 49, 63, 63, qui sont les quarrez des deux costez 15 & 7, & deux fois le produit de 9 multiplié par 7, c'est à dire le segment exterieur par le moindre costé. Parquoy appert que le triangle ainsi construit est ambligone, & cette 12. prop. estre veritable.

REGLE III.

Pour construire un triangle ambligone Scalene, duquel les costez & le segment exterieur du moyen costé prolongé jusques à la rencontre de la perpendiculaire tombant sur iceluy costé, soient commensurables en nombre entier: Soit pris ledit segment exterieur de 5 parties, ou de 10, ou de 15, &c. puis soit ajousté $\frac{1}{5}$ au triple d'iceluy segment, & viendra le moindre costé, le double duquel donnera le moyen costé, mais

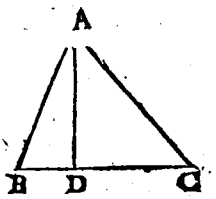
multipliant ledit ſegment par 8, nous aurons le plus grand coſté; comme ſi nous poſons le ſegment exterieur de 5 parties, ajouſtans $\frac{1}{5}$ d'iceluy ſegment à ſon triple 15, nous aurons 16 pour le moindre coſté, & doublant iceluy coſté viendront 32 pour le moyen coſté: & finalement multipliant ledit ſegment par 8, nous aurons 40 parties pour le plus grand coſté du triangle: lequel ſera ambligone, veu que le quarré d'iceluy coſté 40, eſt 1600, & la ſomme des quarrez des deux autres coſtez 16 & 32 n'eſt que 1280; mais ces deux quarrez eſtans ajouſtez à deux fois 160 procreez de la multiplication du moyen coſté 32 par le ſegment exterieur 5, font auſſi 1600, comme veut Euclide en cette 12. prop.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Aux triangles Oxigones, le quarré du côté qui ſoûtient l'angle aigu, eſt plus petit que les quarrez des deux autres côtez, de deux fois le rectangle contenu de l'un des côtez qui font l'angle aigu, ſçavoir celuy ſur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne priſe au dedans entre la perpendiculaire & l'angle aigu.

Soit le triangle ABC, ayant les angles B & C aigus, mais de l'angle A tombe AD perpendiculaire au côté BC. Je dis que le quarré du côté AB, qui ſoûtient l'angle aigu C, eſt plus petit que les deux quarrez des deux autres côtez AC & CB, de

deux fois le rectangle de BC & CD : ſçavoir BC, l'un des côtez qui font l'angle aigu C, ſur lequel tombe la perpendiculaire, & CD priſe entre la perpendiculaire, & iceluy angle aigu C.



Car d'autant que la ligne BC eſt coupée en D, les quarrez de BC, CD, ſont egaux au quarré de BD, & deux fois le rectangle de BC, CD par la 7. pr. de ce livre, auſquels ſi on ajoûte le quarré commun de AD, les trois quarrez de BC, CD, AD, ſeront egaux aux deux quarrez de BD, AD, & deux fois le rectangle de BC, CD. Mais les deux triangles ADB, ADC étans rectangles, le quarré de AB eſt egal aux deux quarrez de AD, DB : & le quarré de AC aux deux quarrez de AD, DC par la 47. prop. 1. Donc les deux quarrez de AC, BC ſeront egaux au quarré de AB, & deux fois le rectangle de BC, CD : en ôtant donc iceux deux rectangles, le quarré de AB ſera d'autant plus petit que les quarrez de AC, BC : ce qui étoit propoſé à prouver. On demontrera en la même maniere que le quarré du côté AC, qui ſoûtient l'angle aigu, B, eſt plus petit que les deux quarrez des deux autres côtez AB, BC, de deux fois le rectangle de CB, BD. Donc aux triangles Oxigones, le quarré du côté qui ſoûtient l'angle aigu, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

CHOLIE.

Or combien qu'Euclide propoſe ce Theoreme des

triangles oxigones ſeulement : toutesfois le meſme eſt auſſi veritable és triangles rectangles & ambligones, la perpendiculaire tombant de l'angle droit ou obtus : Car il eſt manifeſte par la 17. pr. 1. que les deux autres angles ſont aigus : & partant la perpendiculaire tombera tousjours dans le triangle, comme Euclide l'a pris en la demonſtration cy-deſſus : Ce qui eſt auſſi facile à prouver. Car ſi elle tomboit hors le triangle, il s'enſuivroit qu'un angle aigu ſeroit plus grand que le droit. Ce qui eſt abſurde.

Et comme au precedent Scholie nous avons enſeigné à conſtruire divers triangles ambligones ayans les côtez & le ſegment compris entre la perpendiculaire & l'angle obtus commenſurables en nombres entiers, afin de pouvoir plus facilement faire apparoir en nombres la verité de ce qu'Euclide a demontré en la 12. prop. auſſi enſeignerons nous icy quelques regles pour conſtruire divers triangles oxigones ayant les coſtez & les ſegmens de la baſe commenſurables en nombres entiers, afin de faire auſſi paroiſtre en nombre la verité de ceite 13. prop.

REGLE I.

D'autant qu'au triangle equilateral & à l'Iſoſcelle la perpendiculaire tombant de l'angle compris des deux coſtez egaux fait les ſegmens de la baſe egaux, ainſi qu'il a eſté demontré ſur la 26. prop. 1. il ſera fort aiſé de conſtruire tels triangles qui ayent les coſtez & les ſegmens commenſurables en nombre entier, c'eſt pourquoy il n'eſt pas beſoin de nous y arreter : Mais quand eſt requis un triangle Iſoſcelle, auquel la baſe ſoit plus grande que chaque coſté, & que

la perpendiculaire tombe sur l'un d'iceux costez egaux; elle le coupera en deux segmens inegaux, comme nous avons demontré à la 47. prop. 1. le moindre desquels segmens il faut poser d'autant de parties qu'on voudra, & icelles estans multipliées par 8, produiront le plus grand segment, mais les multipliant par 12, sera produit la base, & les deux segmens estans adioustez, l'on aura l'une & l'autre des iambes: ce qu'on aura aussi multipliant le moindre segment par 9. Comme par exemple, ayant posé le moindre segment de 4 parties, nous les multiplierons par 8, & viendront 32 pour le plus grand segment: mais les multipliant par 12, viennent 48 pour la base, & par 9 viennent 36 pour chaque côté. Or que ce triangle Isoscelle soit oxigone, il est manifeste parce que nous avons demontré au Scholie de la 48. prop. 1. car veu que le quarré de la base 48 n'est que 2304, & la somme des quarrez des deux iambes est 2592, chacun d'iceux estant 1296, l'angle compris d'iceux costez sera aigu, & par consequent les autres seront aussi aigus, puis qu'ils sont plus petits par la 18. propos. 1. Et si à iceluy quarré 2304, nous adjoustons 288, qui sont deux fois 144, nombre produit de 36, costé sur lequel tombe la perpendiculaire, par 4, segment compris entre la perpendiculaire & l'angle opposé à ladite base, viendront aussi 2592. Pareillement 1296, quarré de l'une des iambes est moindre que 3600, somme des quarrez de la base & de l'autre iambe, de deux fois 1152, nombre produit du costé 36, multiplié par le grand segment 32: car ces trois nombres 1296, 1152, 1152 font ensemble le mesme nombre 3600. Parquoy appert estre veritable ce que dit Euclide en cette 13. pr.

REGLE II.

Que s'il eſt requis que le triangle ſoit Iſoſcelle ayant la baſe moindre que chacune jambe, & que ſur l'une d'icelle tombe la perpendiculaire : il faudra poſer le moindre ſegment, d'autant de parties que l'on voudra en nombre pair, & multipliant la moitié d'iceluy nombre par 7, on aura le plus grand ſégment, mais multipliant ledit moindre ſegment par 3, on aura la baſe, & finalement la ſomme des deux ſegmens ſera chacune des jambes : qu'on aura auſſi multipliant la moitié du moindre ſegment par 9. Parquoy ayant poſé le moindre ſegment de 4, je multiplie ſa moitié 2, par 7, & viennent 14 pour l'autre ſegment, tellement que toute la jambe ſera 18, & multipliant ledit ſegment 4 par 3, viennent 12 pour la baſe. Or que ce triangle ſoit oxigone, il eſt evident, attendu que le quarré du coſté 18 n'eſt que 324, & la ſomme des quarrez des deux autres coſtez eſt 468 : Et de plus, iceluy quarré 324 eſt moindre que ladite ſomme 468, de deux fois 72, nombre produit de la multiplication de 18, coſté ſur lequel tombe la perpendiculaire par 4, ſegment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle oppoſé à l'autre jambe : partant il apert eſtre veritable ce que dit Euclide en cette 13. prop.

REGLE III.

Que s'il eſt requis que le triangle ſoit ſcalene, & la perpendiculaire tombe ſur le moindre coſté, il faudra poſer le moindre ſegment de 70 parties, ou de

140, ou de quelque autre nombre qui se puisse diviser exactement par 70 ; puis adjoûter à iceluy nombre $\frac{29}{70}$ & viendra le plus grand segment, & la somme de ces deux segmens sera le moindre costé ; mais ayant doublé le moindre segment, & à iceluy double adjousté $\frac{42}{70}$ c'est à dire $\frac{3}{5}$ dudit segment, sera procreé le moyen costé ; & finalement si à ce double du moindre segment on adjouste $\frac{55}{70}$, c'est à dire $\frac{11}{14}$, on aura le plus grand costé. Comme si nous posons le moindre segment de 70, & à iceluy adjoûtons $\frac{29}{70}$, nous aurons 99 pour le plus grand segment, & par consequent le moindre costé sera 169 ; mais adjoûtant $\frac{42}{70}$ au double d'iceluy moindre segment, viendront 182 pour le moyen costé : & adjoustant au même double $\frac{55}{70}$, viendront 195 pour le plus grand costé. Or que ce triangle soit oxigone, il est evident, attendu que le quarré du plus grand costé 195 n'est que 38025, & la somme des quarrez des deux autres costez est 61680 : parquoy le plus grand angle est aigu, & consequemment les autres sont aussi aigus. Que si à iceluy quarré 38025, on adjouste deux fois 11830, nombre produit de la multiplication de 169, costé sur lequel tombe la perpendiculaire par le moindre segment 70, viendra le mesme nombre 61685. Parquoy apert encore estre veritable ce que dit Euclide en cette 13. p.

REGLE IV.

Que si au triangle scalene il est requis que la perpendiculaire tombe sur le moyen costé, soit posé le moindre segment de 5 parties, ou de 10, ou de

quelqu'autre nombre qu'on puisse exactement diviſer par 5, puis à iceluy ſegment ſoient ajoûtée $\frac{4}{5}$, & on aura le plus grand ſegment; & la ſomme d'iceux ſera le moyen coté: mais ajoûtant $\frac{3}{5}$ au double d'iceluy moindre ſegment, on aura le moindre côté, & le plus grand ſera le triple dudit ſegment. Parquoy ſi nous poſons le moindre ſegment de 10 parties, ajoûtant à iceluy les $\frac{4}{5}$, nous aurons 18 pour l'autre ſegment, & conſequemment tout le moyen côté ſera 28. Mais ajoûtant 6, qui ſont les $\frac{3}{5}$ du moindre ſegment 10, au double d'iceluy ſegment, viennent 26 pour le moindre coſté; & le plus grand ſera 30, triple dudit moindre ſegment. Or qu'iceluy triangle ſoit oxigone, il eſt manifeſte: car le quarré du plus grand coſté 30, n'eſt que 900, & la ſomme des quarrez des deux autres coſtez 26 & 28 eſt 1460: & partant le plus grand angle eſt aigu, & conſequemment les autres angles ſont auſſi aigus. Maintenant ſi nous multiplions le coſté ſur lequel tombe la perpendiculaire, ſçavoir 28 par le moindre ſegment 10, nous aurons 280, & pour le double 560, qui ajoûtées au ſuſdit quarré de 30 ſçavoir 900, font le meſme nombre 1460 ſomme des deux quarrez des deux autres coſtez 26 & 28, qui ſont 676, 784. Pareillement le quarré du moindre coſté 26, n'eſt que 676, & la ſomme des quarrez des deux autres coſtez eſt 1684: tellement qu'il eſt moindre que cette dite ſomme de deux fois 504, nombre produit de la multiplication de 28, coſté ſur lequel tombe la perpendiculaire par 18, ſegment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle oppoſé à iceluy moindre coſté. Parquoy appert derechef être veritable ce que dit Euclide en cette 13. propoſition.

REGLE V.

Et finalement, s'il eſtoit requis que la perpendiculaire tombe ſur le plus grand coſté, ſoit encore poſé le moindre ſegment de 5 parties, ou de 10, ou de 15, &c. puis au triple d'iceluy ſegment ſoit adjoûté $\frac{1}{5}$, & viendra le plus grand ſegment, tellement que la ſomme d'iceux ſegmens ſera le plus grand coſté : mais adjoûtant $\frac{3}{5}$ au double d'iceluy moindre ſegment, on aura le moindre coſté, & le moyen ſera le quadruple dudit ſegment. Par ainſi le moindre ſegment eſtant poſé de 5 parties, le plus grand ſera de 16, & le plus grand coſté 21, le moindre 13, & le moyen 20. Or le quarré de ce plus grand coſté 21, n'eſt que 441, & la ſomme des deux quarrez des deux autres coſtez 20 & 13 eſt 569 : parquoy l'angle opposé à iceluy coſté, qui eſt le plus grand par la 18. prop. 1. eſt aigu, & conſequemment le triangle ſuſdit eſt oxigone. Davantage le quarré du moindre coſté 13, ſçavoir 169, eſt plus petit que la ſomme des quarrez des deux autres coſtez 20 & 21, ſçavoir eſt 841, de deux fois 336, nombre produit de la multiplication de 21, coſté ſur lequel tombe la perpendiculaire par 16, ſegment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle opposé à iceluy moindre coſté : Pareillement le quarré du moyen coſté 20, ſçavoir 400, eſt moindre que 610, ſomme des quarrez des deux autres coſtez 13, & 21, de deux fois 105, nombre produit de 21 multiplié par le moindre ſegment 5. Parquoy apert encore par ce 5. triangle eſtre veritable, ce que dit Euclide en cette 13. prop.

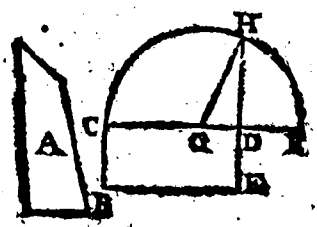
Mais il eſt auſſi evident tant par la demonſtration d'Euclide, que par l'application des nombres cy-devant faite, que ce qu'il dit icy des triangles oxigones ſeulement, eſt auſſi veritable tant aux triangles rectangles qu'aux ambligones, tellement qu'on peut dire qu'en tout triangle, le quarré du coſté qui ſouſtient un angle aigu, eſt plus petit que la ſomme des quarrez des deux autres coſtez, de deux fois le rectangle contenu du coſté ſur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne compriſe entre icelle perpendiculaire, & ledit angle aigu.

PROBL. 2. PROP. XIV.

Faire un quatré egal à une figure rectiligne donnée.

Soit donnée la figure rectiligne A, à laquelle il faut faire un quarré egal.

Soit premierement fait le parallelogramme BD egal à la figure donnée A, ayant un angle droit par la 45. prop. 1 puis ſoit prolongé un côté, comme CD, juſques en F, & fait DF egale à l'autre côté DE : & apres avoir coupé CF en deux egalement au point G, & d'iceluy point G & intervalle GC ou GF, décrit le demy cercle CHF, ſoit continuée ED juſques à ce qu'elle ren-



contre la circonference du demy cercle en H. Je dis que le quarré de DH eſt egal à la figure rectiligne A.

Car puiſque CF eſt coupée en deux egalement au point G, & en deux inegalement au point D; le rectangle de C D & D F, ſçavoir BD, avec le quarré de la partie du milieu GD, eſt egal au quarré de la moitié GF par la 5. prop. de ce livre, ou de ſon egale GH, lequel eſt egal aux deux quarrez de GD & DH par la 47. prop. 1. Que ſi on oſte le quarré commun de GD, le demeurant quarré de DH ſe trouvera egal au demeurant rectangle BD: & par conſequent à la figure rectiligne donnée A. Nous avons donc trouvé le côté d'un quarré egal à une figure rectiligne donnée A. Ce qu'il falloit faire.

Fin du ſecond Element.

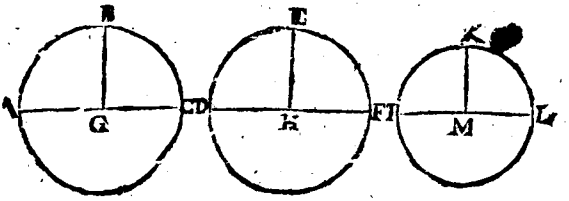
ELEMENT TROISIE'ME.

DEFINITIONS.

CERCLES egaux, ſont ceux deſquels les diamettres ſont egaux, ou deſquels les lignes droites menées des centres aux circonferences, ſont egales.

D'autant qu'Euclide demontre en ce 3. Livre diverſes proprietez & affections du cercle, il explique auparavant quelques termes dont l'uſage ſera fort frequent en iceluy: Il dit donc premierement que ces cercles-là ſont egaux, deſquels les diametres ou ſemidiametres ſont egaux. Car puis que le cercle eſt décrit par le mouvement & revolution du demy diametre à l'entour d'une de ſes extremitez fixe & immobile; comme nous avons

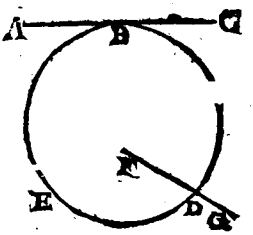
dit à la 15. def. du 1. Livre ; il eſt evident que ces cercles-là ſont egaux, deſquels les demy diametres, ou les lignes droites menées des centres aux circonferences ſont egales entr'elles : ou bien deſquels les diametres entiers ſont egaux entr'eux. Comme



ſi les diametres AC, DF, ou les lignes droites GB, HE, menées des centres G & H, ſont egales entr'elles, les cercles ABC, DEF ſeront egaux entr'eux. Et au contraire, ſi les cercles ſont egaux, leurs diametres ou les lignes droites menees des centres aux circonferences, ſeront auſsi egales.

De cecy il appert, que les cercles ſont inegaux quand les diametres, ou les lignes droites menées des centres aux circonferences, ſont inegales ; & que celuy eſt le plus grand, duquel le diametre, ou demy diametre eſt le plus grand. Comme ſi les diametres DF, IL, ou les lig. droites HD, MK, menées des centres aux circonfer. ſont inegales, les cercles DEF, IKL ſeront inegaux ; & ſi le diametre DF eſt le plus grand, auſsi le cercle DEF ſera le plus grand. Et au contraire ; des cercles inegaux, les diametres ou ſemidiametres ſeront inegaux, c'eſt à ſçavoir celuy du plus grand cercle, plus grand, & celuy du moindre, plus petit.

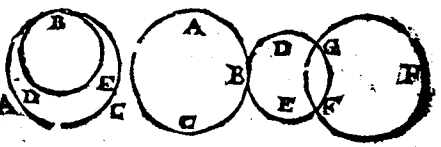
2. Vne ligne droite eſt dite toucher le cercle, laquelle touchant le cercle, ſi elle eſt continuée ne le coupe point.



Comme la ligne droite A B ſera dite toucher le cercle B D E en B, ſi elle l'y touche, en ſorte qu'étant prolongée vers C, elle ne le coupe point, ains demeure totalement dehors iceluy cercle. Mais d'autant que la ligne droite GD atteint le meſme cercle au point D, en telle ſorte qu'eſtant prolongée iuſques à F, elle coupe le cercle, & tombe dedans iceluy, elle ne ſera pas dite toucher le cercle, mais le couper.

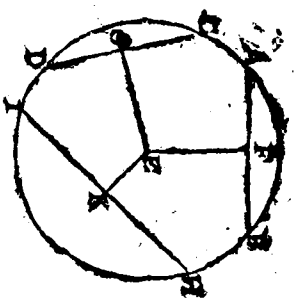
3. Les cercles ſont dits ſe toucher l'un l'autre, quand en ſe touchant ils ne ſe coupent point.

Ainſi les deux cercles ABC, DBE ſeront dits ſe toucher l'un l'autre en B, s'ils s'y touchent en ſorte qu'ils ne s'entrecoupent point. Or cet attouchement des cercles eſt de



deux ſortes; Car les cercles s'entretouchent ou en dedans, ou en dehors: Ils ſe touchent en dedans, quand l'un eſt posé dedans l'autre; & en dehors, quand l'un eſt conſtitué hors de l'autre, comme il apert icy. Mais ſi deux cercles s'atteignent de telle ſorte que l'un coupe l'autre, comme font icy les deux cercles DGE, FGH, ils ſeront dits ſe couper, & non pas ſe touch

4. Au cercle, les lignes droites ſont dites être egalement diſtantes du centre, lors que les perpendiculaires, tirées du centre ſur icelles, ſont egales. Mais celle-là eſt dite eſtre plus éloignée du centre, ſur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.

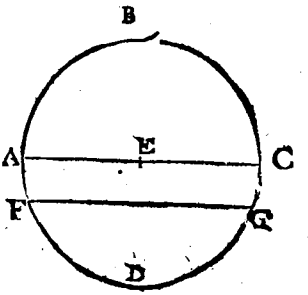


Comme au cercle ABDC, les lignes droites AB, CD, ſeront dites eſtre egalement diſtantes & éloignées du centre E, ſi les perpendiculaires EF, EG, ſont egales: Mais la ligne droite AB ſera dite eſtre plus éloignée du centre E que la ligne HI, ſi la perpendiculaire EF eſt plus grande que la perpendiculaire EK.

5. Segment, ou portion de cercle, eſt une figure compriſe d'une ligne droite, &

de la circonference du cercle.

Si dans un cercle, comme ABCD, on mene une ligne droite qui coupe le cercle en deux parties, comme fait la ligne droite FG; tant la figure [illegible]G contenuë sous ladite ligne droite FG, & la [illegible]e de circonference FBG, que la figure FDG compriſe ſous la meſme ligne droite FG, & la partie de circonference FDG, ſera dite ſegment ou portion de cercle. Mais eſt icy à noter qu'il y a de trois ſortes de ſegmens de cercle. Car ſi la ligne droite paſſe par le centre du cercle, comme AEC, elle diviſera le cercle en deux ſegmens egaux ABC, ADC, chacun deſquels s'appelle proprement demy cercle, comme il a été dit au premier livre.



Mais quand la ligne ne paſſe point par le centre, comme FG, elle diviſe le cercle en deux parties inegales FBG. FDG, l'une deſquelles, ſçavoir FBG, dans laquelle eſt le centre E, eſt plus grande que le demy cercle, & s'appelle portion ou ſegment majeur: mais l'autre portion FDG, eſt plus petite que le demy cercle, & s'appelle ſegment mineur. Davantage la ligne droite FG eſt appellée chorde par pluſieurs Geomettres, & la partie de circonference FBG, ou FDG, arc.

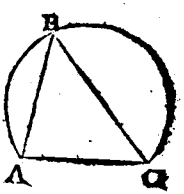
6. L'angle

6. L'angle du ſegment, eſt celuy compris d'une ligne droite, & de la circonference du cercle.

Euclide vient maintenant à definir trois ſortes d'angles que l'on conſidere aux cercles, & commence par l'angle du ſegment, diſant que l'angle mixte BFG, ou BGF, qui en la figure prec. eſt contenu ſous la ligne droite EG, & la circonference IBG, s'appelle angle du ſegment. Que ſi le ſegment eſt un demy cercle, l'angle d'iceluy ſera appellé angle du demy cercle, & tel eſt l'angle EAB, ou ECB. Mais ſi le ſegment eſt plus grand que le demi cercle l'angle d'iceluy, comme BFG, ou BGF, ſera dit angle du ſegment majeur: Et ſi le ſegment eſt plus petit que le demy cercle, l'angle d'iceluy, comme DFG, ou DGF, ſera appellé angle du ſegment mineur.

7. Un angle ſe dit être au ſegment, ou en la portion, lors qu'à un point pris en la circonference du ſegment, ſont menées deux lignes droites des extremitez de la ligne qui ſert de baſe au ſegment; & cet angle-là eſt celuy compris d'icelles deux lignes.

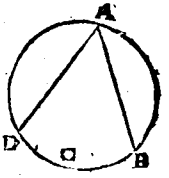
Soit un ſegment de cercle ABC, duquel la baſe eſt la ligne droite AC, des extremitez de laquelle ſoient menées au point B, pris en la circonference les deux lignes droites AB, CB, qui conſtituent l'angle rectiligne ABC; iceluy angle eſt dit eſtre au ſegment ABC.



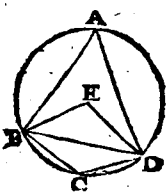
8. Mais quand les lignes droites qui comprennent l'angle embraſſent quelque circonference, l'angle eſt dit être, ou s'appuyer ſur icelle.

En la circonference du cercle ABCD ſoit pris quelconque

point A, & d'iceluy à deux autres points B & D d'icelle circonference, ſoient menées deux lignes droites AB, AD, qui conſtituent l'angle rectiligne DAB, & embraſſent la circonference BCD : Iceluy angle BAD ſera dit eſtre ou s'apuyer ſur icelle circonference BCD.



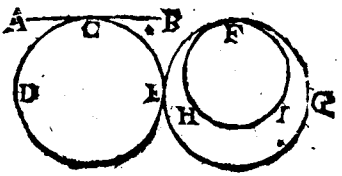
Eſt icy à noter que quelques Interpretes n'ont fait aucune difference entre cet angle-cy & le precedent, mais les ont pris pour un même : & toutesfois ſi on les conſidere bien, on y trouvera une grande diſcrepance : Car celuy-là ſe refere au ſegment auquel il eſt conſtitué, & cettuy-cy ſe rapporte à la circonference qui luy ſert de baſe : Comme par exemple, ſi au cercle ABCD on prend quelque ſegment de cércle BCD, l'angle qui eſt en ce ſegment ne ſera pas le même que celuy qui inſiſte, ou eſt appuyé ſur la circonference d'iceluy ſegment : car l'angle qui eſt en iceluy ſera BCD, & l'angle qui inſiſte ou s'apuye ſur la circonference d'iceluy ſera l'angle BAD



Vne autre choſe eſt encore à remarquer icy, c'eſt que les angles qui s'apuyent ſur la circonference, peuvent être non ſeulement conſtituez en la circonference, comme il a été dit cy-deſſus, mais peuvent auſſi être conſtituez au centre du cercle ; comme par exemple, l'angle BED conſtitué au centre E par les deux lignes droites BE, DE, ſera auſſi dit s'apuyer ſur la circonference BCD, tellement qu'il y a icy deux angles appuyez ſur ladite circonference BCD, ſçavoir BAD conſtitué en la circonference, & BED conſtitué au centre.

Or outre les trois ſortes d'angles cy-deſſus definis & expliquez, les Geometres en conſiderent encore un autre qu'ils appellent angle de contingence ou d'attouchement : cet angle eſt contenu d'une ligne droite touchant le cercle, & de la circonference d'iceluy cercle, ou bien de deux circonferences ſe touchant l'une l'autre au dehors ou au dedans. Comme par exemple, ſi la ligne droite AB touche le cercle CDE au point C, l'angle mixte ACD,

ou BCE *sera dit angle de contingence ou d'attouchement. De-rechef, si le cercle* EFG *touche le cercle* CDE *au dehors en* E, *& le cercle en* HFI *au dedans en* F, *tant l'angle curviligne* CEF, *que* EFH *ou* GFI, *sera appellé angle de contingence ou d'attouchement.*



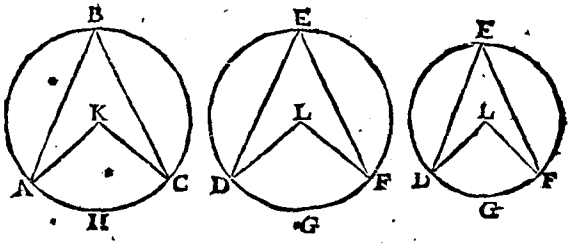
9. Secteur de cercle, est une figure contenuë sous deux lignes droites qui font un angle au centre, & la circonference compriſe entre icelles lignes.

Si au cercle ABCD, *duquel le centre eſt* E, *les deux lignes droites* AE, CE, *conſtituent au centre* E, *l'angle* AEC; *la figure* AECD, *contenuë des deux lignes droites* AE, EC, *& de la circonference* ADC *compriſe entre icelles lignes, ſera appellée ſecteur de cercle. Item la figure* ABCE, *compriſe des mêmes lignes droites* AE, EC, *& de la circonference* ABC, *ſera auſſi dite ſecteur de cercle.*

10. Semblables portions de cercle, ſont celles qui reçoivent angles egaux; ou bien eſquelles les angles ſont egaux entr'eux.

Comme ſi aux cercles ABC, DEF, *les angles rectilignes* B, E, *ſont egaux; les ſegmens* ABC, DEF, *qui reçoivent iceux angles egaux, ou eſquels ſont les ſuſdits angles egaux, ſeront dits ſegmens ſemblables: Et les circonferences* ABC, DEF, *ſeront pareillement dites ſemblables, c'eſt à dire que le ſegment* ABC *ſera telle partie de tout le cer-*

cle ABCH, que le ſegment DEF eſt partie de tout le cercle DEFG : & la circonference ABC ſera auſſi tel-



le partie de toute la circonference ABCH, que la circonference DEF eſt de toute la circonference DEFG. Par même raiſon, les arcs ou circonferences AHC, DGF, ſur leſquelles s'appuyent angles egaux, ſont auſſi dites ſemblables : Comme ſi aux mêmes cercles ABC, DEF, les angles ABC, DEF ou AKC, DLF ſont egaux ; les arcs ou circonferences AHC, DGF, ſur leſquelles s'appuyent les ſuſdits angles, ſeront dits arcs ſemblables.

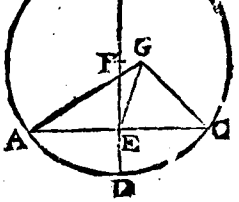
Des choſes ſuſdites, l'on peut colliger que les ſemblables portions d'un même cercle, ou de cercles egaux, ſont auſſi egales entr'elles, attendu qu'elles ſont parties egales d'une même choſe, ou de choſes egales.

PROBL. 1. PROP. I.

Trouver le centre d'un cercle donné.

Soit le cercle donné ABC, duquel il faut trouver le centre.

Soit tirée en iceluy la ligne droite AC, qui coupe la circonference, comme que ce ſoit, és points A & C : puis par les 10. & 11. prop. 1. ſoit icelle AC coupée en deux egalement, & à droits angles par la ligne droite BD, ſe terminant à la peripheree ſes points B & D : & fina-



lement icelle BD ſoit auſſi coupée en deux egalement en F, par la ſuſdite 10. prop. 1. Je dis que F eſt le centre du cercle proposé.

Car en icelle ligne droite BD, un autre point que F ne ſera pas le centre, vû que tout autre point la diviſe inegalement.

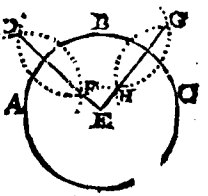
Si donc le point F n'eſt pas le centre, le point G hors la ligne BD ſoit le centre, (s'il eſt poſſible) duquel ſoient menées les trois lignes droites GA, GE & GC. D'autant que G étant le centre, par la def. du cercle les lignes droites AG & GC ſeront egales: mais par la conſtruction AE & EC ſont auſſi egales, & GE eſt commune aux deux triangles GEA & GEC: donc iceux triangles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, & la baſe AG egale à la baſe CG, & par la 8. pr. 1. les angles AEG & CEG ſeront egaux: & partant droits, & la ligne EG perpendiculaire par la 10. def. 1. Mais l'angle BEA par la conſtruction eſt droit, & tous les angles droits ſont egaux par la 10. com. ſent. donc les deux angles AEG & BEA ſeront egaux, ſçavoir le tout à ſa partie: ce qui eſt abſurde. Donc le point G n'eſt pas le centre. Le même inconvenient s'enſuivra prenant tout autre point hors la ligne BD. Partant le point F ſera le centre du cercle ABC, requis à trouver.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, que ſi au cercle une ligne droite coupe une autre ligne droite en deux egalement, & à angles droits, le centre du cercle ſera en icelle coupante. Car il a eſté demonſtré qu'il eſt impoſſible que le centre du cercle ABC ſoit ailleurs qu'au point F, milieu de la ligne BD, laquelle coupe la ligne AC en deux egalement, & à angles droits en E.

SCHOLIE

Combien que la pratique de ce Probleme ſoit aiſée par la conſtruction d'iceluy, ſi eſt-ce toutesfois qu'elle eſt encore plus briéve & facile, ainſi qu'il enſuit. Pour trouver le centre du cercle ABC, *ſoient pris en la circonference d'iceluy les trois points* A, B, C, *comme en*

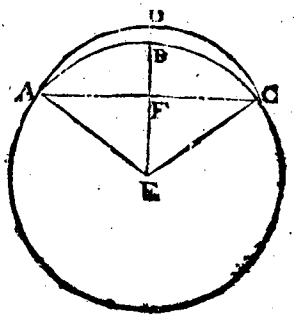


voudra : puis des deux points A & B, soient décrits d'un même intervalle, deux arcs qui s'entrecoupent és points D & F, par lesquels soit menée la ligne droite DFE interminement : en apres, des points A & C, soient aussi décrits d'un même intervalle deux autres arcs s'entrecoppans és points G & H, par lesquels soit menée la ligne droite GH, qui coupe DF en E, & iceluy point sera le centre requis.

THEOR. 1. PROP. II.

Si en la circonference d'un cercle, on prend deux points comme on voudra ; la ligne droite menée de point à autre, tombera dans le cercle.

Soit le cercle ABC, & en la circonference d'iceluy soient pris deux points tels qu'on voudra A & C. Je dis que la ligne droite menée du point A au point C tombera dedans le cercle; car si elle ne tombe au dedans, elle tombera, ou sur la circonference, ou hors du cercle. Qu'elle tombe donc hors le cercle, s'il est possible, comme la ligne ADC : & ayant trouvé le centre E par la prec. prop. d'iceluy soient menées aux points A & C les lignes droites EA, EC, & à quelque point D de la ligne ADC, soit aussi menée ED, qui coupe la circonference du cercle ABC en B. Or d'autant que les deux côtez EA, EC sont egaux, le triangle AEC aura les angles EAD, ECD, sur la base ADC, egaux par la 5. prop. 1. Mais puis que du triangle AED, le costé AD est prolongé, l'angle exterieur EDC sera plus grand que son opposé interieur EAD, par la 16. proposition 1. Donc le même angle EDC sera aussi plus grand que l'angle ECD, qui est egal à EAD. Parquoy EC opposé au plus grand angle EDC



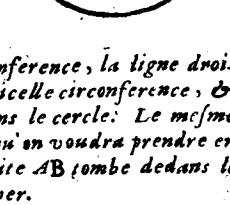
ſera plus grand que ED par la 19. prop. 1. & partant EB egale à EC, ſera auſſi plus grande que ED, la partie que le tout. Ce qui eſt abſurde. Donc la ligne droite menée de A à C ne tombera pas hors le cercle. On démontrera par même raiſon qu'elle ne peut pas auſſi tomber ſur la circonference A B C. Il faut donc qu'elle tombe dedans le cercle, comme la ligne droite AFC. Parquoy ſi en la circonference d'un cercle, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

SCHOLIE.

Ce même Theoreme peut auſſi être demontré affirmativement ainſi qu'il enſuit.

En la circonference du cercle AB, *dont le centre eſt* C, *ſoient pris deux points tels qu'on voudra* A *&* B. *Ie dis que la ligne droite* AB *menée d'un point à l'autre tombe dans iceluy cercle.*

Car ſoit pris en icelle ligne droite A B *quelconque point comme* D, *entre ſes extremes* A *&* B, *puis du centre* C, *ſoient menées les lignes droites* CA, CD, CB. *D'autant que les deux coſtez* AC, BC, *du triangle* ACB *ſont egaux, les angles* BAC, ABC *ſeront egaux par la* 5. *prop.* 1. *Mais l'angle externe* ADC *eſt plus grand que l'angle interne* ABC *par la* 16. *prop.* 1. *donc le meſme angle* ADC *ſera plus grand que l'angle* BAC: *&* *partant par la* 19. *prop.* 1. *le coſté* AC *ſera plus grand que le coſté* CD: *parquoy puis que* CA *eſt tirée de centre juſques à la circonference, la ligne droite* CD *ne parviendra pas juſques à icelle circonference, &* *par conſequent le point* D *tombe dans le cercle. Le meſme ſera demontré de tout autre point qu'on voudra prendre en icelle* AB. *Donc toute la ligne droite* AB *tombe dedans le cercle propoſé. Ce qu'il faloit prouver.*



COROLLAIRE.

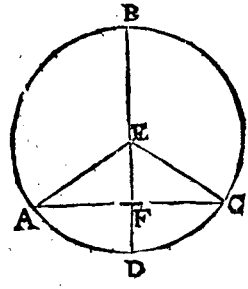
De cecy eſt manifeſte, qu'une ligne droite touchan une cercle, le touche ſeulement à un point; car ſi elle le tou-

choit à deux points, la partie de la ligne d'entre iceux points tomberoit dans le cercle par cette proposition, parquoy elle couperoit le cercle, contre l'hypothese.

THEOR. 2. PROP. III.

Si dans le cercle quelque ligne droite passe par le centre, & coupe en deux egalement une autre ligne droite qui ne passe point par le centre; elle la coupera à angles droits: & si elle la coupe à angles droits, elle la coupera aussi en deux egalement.

Au cercle ABCD soit la ligne droite BD, laquelle passant par le centre E, coupe en deux egalement la ligne droite AC, laquelle ne passe point par le centre; Je dis que BD coupe aussi AC en angles droits au point F.



Car étans menées les deux lignes droites CE & AE, les deux triangles AEF, CEF, auront les deux côtez AF, FE, egaux aux deux costez CF, EF, chacun au sien, & la base AE egale à la base EC; & par la 8. prop. 1. les deux angles au point F seront egaux, & partant droits par la 10. def. 1.

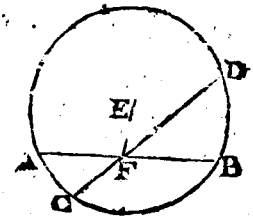
Je dis pareillement, que si BD coupe AC à angles droits au point F; qu'elle la coupera aussi en deux egalement. Car les deux angles au point F étans droits ils seront egaux, & l'angle A est egal à l'angle C par la 5. prop. 1. estant AEC triangle Isoscelle, & le costé EF commun aux deux triangles AEF, CEF, & par la 26. prop. 1. AF sera egale à CF. Parquoy si dans le cercle quelque ligne droite passe par le centre, &c. Ce qu'il faloit prouver.

THEOR. 3. PROP. IV.

Si dans le cercle, deux lignes droites ne passans

point par le centre, s'entrecoupent; elles ne se couperont pas l'une l'autre en deux egalement.

Au cercle ACBD, duquel le centre est E, soient deux lignes droites AB & CD, s'entrecoupans au point F, & desquelles ny l'une ny l'autre ne passe par le centre E. Je dis que l'une ou l'autre est coupée inegalement. Car du centre E estant menée la ligne EF; si icelles lignes AB, CD s'entrecouppent en deux egalement au point F, la ligne EF les coupera au mesme point aussi en deux egalement, & à droits angles par la pr. prec. & les angles AFE, EFB seront droits, & egaux à CFE, EFD aussi droits, & egaux: ce qui est impossible, n'étant AFE que partie de CFE: ainsi les lignes droites AB, CD ne s'entrecoupoient pas en deux egalement. Parquoy si dans le cercle deux lignes droites ne passant point par le centre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

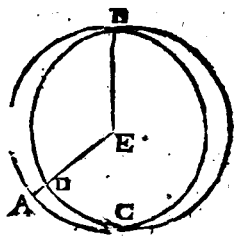


THEOR. 4. PROP. V.

Si deux cercles se coupent l'un l'autre, ils n'auront pas même centre.

Soient les deux cercles ABC, BCD se coupans l'un l'autre en B & C. Je dis qu'ils ne sçauroient avoir un même centre.

Car s'il est possible, soit leur centre commun E, duquel soient tirées deux lignes droites, sçavoir EB à la section B: Mais EA coupant l'une & l'autre circonference en A & D. Donc puis que E est posé centre du cercle BCD, la ligne droite ED sera egale à la ligne droite EB par la 15. def. 1. Derechef, puis que E est aussi posé centre du

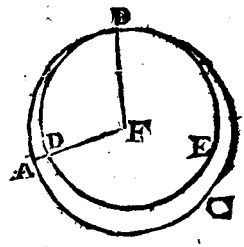


cercle ABC, la ligne droite EA sera aussi egale à la mesme ligne EB, & par la 1. com. sent. ED, EA seront egales entr'elles, la partie au tout ; ce qui est impossible : partant les deux cercles ne pouvoient avoir un même centre. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 5. PROP. VI.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dedans, ils n'auront pas mesme centre.

Soient les deux cercles ABC, & DBE se touchans l'un l'autre au dedans en B. Je dis qu'ils n'auront pas même centre. Car s'il est possible, soit leur centre commun F, & d'iceluy soient menées les deux lignes FA & FB : sçavoir est FB à l'attouchement B; & FA, coupant l'un & l'autre cercle en D, A. D'autant que F est posé centre du cercle ABC, les lignes droites FA, FB seront egales : derechef, d'autant que F est aussi posé centre du cercle BDE, la ligne FD sera egale à la ligne FB, à laquelle a esté demontré estre aussi egale FA, donc FA, FD seront egales entr'elles ; la partie au tout. Ce qui est absurde. Parquoy F ne pouvoit estre centre commun des cercles s'entretouchans interieurement en B. Ce qu'il falloit demontrer.

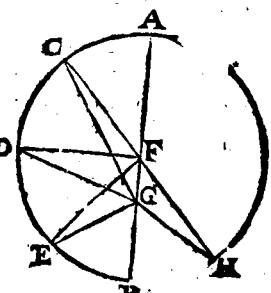


SCHOLIE.

Euclide a proposé ce Thereme des cercles s'entretouchans seulement au dedans, d'autant que des cercles qui se touchent par dehors, il appert assez que leurs centres sont divers : veu qu'un des cercles est dehors l'autre, & le centre est tousjours au milieu de son cercle.

THEOR. 6. PROP. VII.

Si au diametre du cercle l'on prend quelque point qui ne soit pas le centre du cercle, & d'iceluy point tombent quelques lignes droites à la circonference; la plus grande sera celle en laquelle est le cétre, & la plus petite celle qui reste: Mais des autres toûjours la plus proche de celle qui est menée par le centre, est plus grande que la plus éloignée: Et du même point ne peuvent être menées à la circonference que deux lignes droites egales, de part & d'autre de la plus petite.

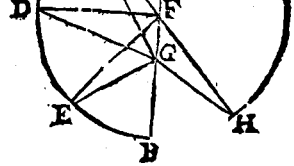


Au diametre AB du cercle ACDEB, duquel le centre est F, soit pris quelque point G outre le centre; & d'iceluy point G tombent tant qu'on voudra de lignes droites GC, GD, GE, en la circonference. Je dis en premier lieu, que de toutes les lignes menées de G à la circonference, GA en laquelle est le centre, est la plus grande. Car du centre F estans menées à C, D & E, les lignes FC, FD & FE: le triangle GFC aura les deux costez GF, FC, plus grands que le costé GC par la 20. pr. 1. Mais les lignes droites GF, FC sont egales aux lignes droites GF, FA, c'est à dire à toute la ligne GA: donc GA sera aussi plus grande que GC. Par mesme raison GA sera aussi plus grande que GD, & que GE: parquoy la ligne GA est la plus grande de toutes celles menées de G à la circonference.

Secondement, ie dis que GB est plus petite que GD, ou autre quelconque: car au triangle DFG, les deux costez DG &

GF, seront plus grands que le troisiéme DF par la 20. prop. 1. ou que son egale BF. Que si on oste la ligne commune GF, le demeurant GD sera plus grand que le demeurant GB. Par méme raison GB, sera aussi plus petite que GE, & que GC, ou autre quelconque tombant de G à la circonference.

Tiercement, ie dis que GC plus proche de la ligne AG que GD, est plus grande qu'icelle GD: & pour la méme raison GD plus grande que GE, & ainsi des autres s'il y en avoit davantage de tirées de G à la circonference. Car les deux costez GF, FC du triangle GFC, sont egaux aux deux costez GF, FD du triangle GFD, chacun au sien: mais l'angle CFG est plus grand que l'angle DFG, & partant par la 24. p. 1. la base GC sera plus grande que la base GD. Pour méme raison GC sera aussi plus grande que GE : Item GD plus grande qu'icelle GE. Parquoy la ligne la plus proche de celle qui est menée par le centre, est plus grande que celle qui en est plus éloignée.



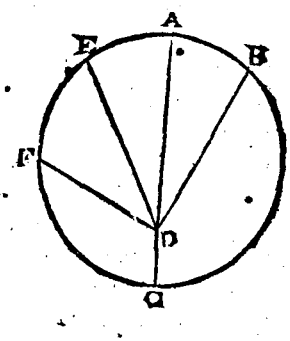
Finalement, ayant fait l'angle BFH egal à l'angle BFE, & tiré GH : ie dis que les lignes GE, GH, sont egales entr'elles, & qu'on n'en peut mener de G à la circonference aucune autre egale à icelles. Car d'autant que les costez EF, FG du triangle EFG, sont egaux aux costez HF, FG du triangle AFG, & les angles EFG, HFG aussi egaux : les lignes GH, GE, qui sont de part & d'autre du diametre, sont egales entr'elles. Et il est evident qu'on ne pourra tirer du point G une autre ligne dans le cercle, qui ne s'aproche ou recule de la ligne BA, tombant de costé ou d'autre de GE, ou GH ; & par ce qui a esté montré cy-dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles GE, GH. Donc du point G à la circonference ne se peuvent tirer plus de deux lignes droites qui soient egales entr'elles. Parquoy si au diametre d'un cercle on prend quelconque point qui ne soit pas le centre, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

SCHOLIE.

Iaçoit qu'Euclide ait ſeulement demontré que des lignes droites tirées de meſme part du diametre, la plus prochè de celle tirée par le centre eſt plus grande que la plus éloignée, toutesfois cela eſt auſſi vray, ſi elles ſont tirées de diverſe part: comme ſi la ligne droite GD eſt plus proche de GA que la ligne droite GH; icelle GD ſera plus grande que GH: car ſi de la part de GD on fait l'angle BGE egal à l'angle BGH les lignes GE, GH ſeront egales, attendu qu'elles ſont egalement diſtantes de GA, & le point E tombera entre B & D, puis que GD a eſté poſée plus proche de GA que GH. Mais par cette prop. GD eſt plus grande que GE: donc la meſme GD ſera auſſi plus grande que GH. Quelques Interpretes veulent convertir cette 7. prop. ainſi qu'il enſuit.

Si on prend un point dedans le cercle, & d'iceluy point tombent des lignes droites à la circonference, entre leſquelles ſoient la plus grande & la plus petite qui puiſſent être menées de ce point-là à ladite circonference: mais des reſtantes, les unes ſoient inegales, & les autres egales: la plus grande paſſera par le centre du cercle, & la plus petite ſera le reſte du diametre: mais des autres les plus grandes ſeront les plus proches du centre, & les égales en ſeront egalement diſtantes.

Au cercle ABC ſoit pris le point D, duquel tombent en la circonference tant qu'on voudra de lignes droites DA, DB, DC, DE, DF, deſquelles DA ſoit la plus grande qui puiſſe eſtre tirée d'iceluy point à ladite circonference, & DC la moindre: mais des autres, DE ſoit plus grande que DF, & egale à DB. Ie dis premierement que DA paſſe par le centre du cercle: Car ſi elle n'y paſſe, étant tirée



quelque ligne droite de D par le dit centre, elle ſera la plus grande de toutes celles tombantes de D par la 7. propoſ. 3. Ce qui eſt abſurde, puis que DA eſt poſée la plus grande. Donc DA paſſe par le centre.

En ſecond lieu, ie dis que DC eſt le reſte du diametre, c'eſt à dire qu'elle eſt directement à DA: Car autrement icelle DA étant prolongée directement, ſon prolongement ſera autre que DC, & la plus petite ligne qui puiſſe tomber de D à la circonference; par la 7. prop. 3. Ce qui ne peut eſtre, puis que DC a eſté poſée la plus petite: donc DC eſt l'autre partie du diametre.

Tiercement, ie dis que DE eſt plus proche de DA que DF. Car elle n'y pourroit pas eſtre egalement diſtante, attendu que par la ſuſdite prop. elles ſeroient egales, & elles ont eſté poſées inegales. Mais DE ne peut pas auſſi eſtre plus éloignée de la meſme DA que DF: car elles ſeroient plus petites qu'icelle DF, par la meſme propoſition, & elle a eſté poſée plus grande.

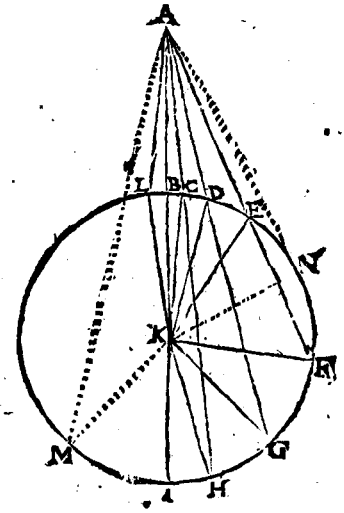
En dernier lieu, ie dis que DB, DE ſont egalement diſtantes de DA: Car ſi l'une en eſtoit plus proche elle ſeroit plus grande que l'autre par la meſme 7. prop. & elles ont eſté poſées egales.

THEOR. 7. PROP. VIII.

Si on prend quelque point hors le cercle, & d'iceluy point ſoient menées quelques lignes droites dans iceluy cercle, deſquelles l'une paſſe par le centre, & les autres où l'on voudra: celle qui paſſe par le centre ſera la plus grande de toutes celles qui ſeront menées en la circonference concave. Quant aux autres, touſjours la plus proche de celle qui paſſe par le centre eſt plus grande que la plus éloignée. Mais de celles qui tombent à la circonference convexe, la plus petite eſt celle qui eſt compriſe entre le point & le diame-

tre : Quant aux autres, la plus éloignée de la plus petite eſt plus grande que celle qui en eſt plus proche : Et d'icelluy point ne peuvent tomber à la circonference que deux lignes droites egales de part & d'autre de la plus petite.

Du point A hors le cercle BCDE, le centre duquel eſt K, ſoient menées les lignes droites AF, AG, AH & AI coupans ledit cercle, deſquelles lignes AI paſſe par le centre K, & les autres comment que ce ſoit. Je dis premierement que AI qui paſſe par le centre, eſt la plus grande de toutes icelles lignes tirées à la circonference concave : puis apres, que AH qui eſt la plus proche d'icelle AI eſt plus grande que AG, qui en eſt plus éloignée : Et pour méme raiſon AG plus grande que AF. Et au contraire, ie dis que AB cõpriſe entre le point A & la circonference convexe, eſt la plus petite ligne de toutes celles qui ſont hors le cercle : puis apres, que la ligne AC plus prochaine de la plus petite AB, eſt moindre que AD, qui en eſt plus éloignée : Et par méme raiſon icelle AD moindre que AE. Finalement, ie dis que de A, on peut ſeulement mener deux lignes droites egales de part & d'autre de la plus petite AB.



Car du centre K étans menées aux points C, D, E, F, G, & H, les lignes droites KC, KD, KE, KF, KG & KH ; les deux coſtez AK, KH, du triangle AKH, ſont plus grands que la li-

gne AH par la 20. pr. 1. Mais les lignes AK, KH ſont egales aux lignes AK, KI, c'eſt à dire à toute la ligne droite AI: icelle AI ſera donc auſſi plus grande que AH. Pour la même raiſon AI ſera plus grande que AG, & auſſi que AF. Parquoy la ligne AI eſt la plus grande de toutes celles qui tombent du point A dans le cercle.

Puis apres, d'autant que les coſtez Ak & KH du triangle AKH ſont egaux aux coſtez AK, KG du triangle AkG, chacun au ſien, & l'angle AKH plus grand que l'angle AKG; la baſe AH ſera plus grande que la baſe AG, par la 24. prop. 1. Par même raiſon AH ſera plus grande que AF; item AG plus grãde que la même AF. Parquoy la ligne plus proche de celle qui paſſe par le centre, eſt plus grande que celle qui en eſt plus éloignée.

Derechef, puis qu'au triangle ACK la ligne AK, eſt moindre que les deux AC, CK; ſi on ôte les egales BK, CK, demeurera encore AB moindre que AC. Par ſemblable raiſon AB ſera plus petite que AD, & auſſi que AE. Parquoy la ligne AB eſt la plus petite de toutes celles qui ſont menées de A à la circonference convexe.

Derechef, d'autant que dans le triangle ADK tombent deux lignes droites AC, CK, des extremitez du côté AK, icelles AC, Gk, ſeront moindres que AD, DK par la 21. prop. 1. deſquelles ſi on ôte les egales CK, DK, reſtera encore AC moindre que AD. Par même raiſon on prouvera que AC eſt moindre que AE: Item AD moindre que la meſme AE. Parquoy la ligne la plus proche de la plus petite AB, eſt moindre que la plus éloignée.

Finalement, ſoit fait l'angle AxL egal à l'angle AxC, tirant xL, juſques à ce qu'elle rencontre la periphere en L, & ſoit menée la ligne AL. D'autant que les coſtez Ax, xC du triangle AxC, ſont egaux aux coſtez Ax, xL du triangle AxL; & les angles AxC, AxL auſſi egaux, les lignes droites AC, AL de part & d'autre de la moindre AB, ſeront egales entr'elles par la 4. prop. 1. Or que nulle autre puiſſe eſtre egale à icelles il eſt evident: car ſi on en mene une autre du point A, il faudra qu'elle ſoit plus proche ou plus éloignée de AB; & par ce qui a été demontré cy-deſſus, elle ſera plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles AC, AL. Donc du point A tomberont ſeulement deux lignes droites egales de part & d'autre de la moindre AB. Parquoy ſi on prend quelque point hors le cercle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

Par même raiſon de A ne peuvent tomber en la circonference concave que deux lignes droites egales de part & d'autre de la plus grande AI. Car ayant fait l'angle AKM egal à l'angle AKG, & mené AM, les triangles AKM, AKG auront les baſes AG, AM egales par la 4. prop. 1. & on ne peut de A mener à ladite circonference concave d'autre ligne egale à icelle AG, AM, attendu qu'elle ſeroit plus proche ou plus éloignée de AI, & par conſequent plus grande ou plus petite qu'icelles, ainſi qu'il appert par ce qui a été demontré cy-deſſus.

Il appert auſſi que quand l'une des lignes tombantes de A, touche le cercle, comme AN, qu'icelle touchante eſt plus petite qu'aucune de celles qui tombent en la circonference concave: Car étant tirée du centre à l'attouchement la ligne droite KN, les deux coſtez AK, KF du triangle AKF, ſeront egaux aux deux coſtez AK, KN du triangle AKN, chacun au ſien, & l'angle AKF eſt plus grand que l'angle AKN, & par la 24. pr. 1. la baſe AF ſera plus grande que la baſe AN: Et par même raiſon toute autre ligne tombante en la circonference concave ſera plus grande qu'icelle AN.

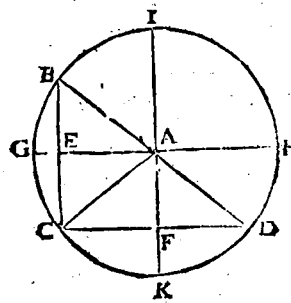
Mais la même ligne touchante AN ſera la plus grande de toutes les autres lignes qui tombent de A en la circonference convexe. Car puis que par la 21. prop. 1. les deux coſtez AE, EK ſont moindres que les deux coſtez AN, NK, ſi on en oſte les lignes egales KE, KN, reſtera AE moindre que AN; & ainſi des autres.

Au reſte ce qu'Euclide a demontré en cette 8. prop. avenir aux lignes menées d'une même part de la plus grande ou plus petite, aviendra encore, les lignes eſtans menées de diverſes parts, c'eſt à dire, que ſi AH eſt plus proche de AI que AM: Icelle AH ſera auſſi plus grande que ladite AM, jaçoit qu'elles ne ſoient toutes deux d'une même part: & ſi AD eſt plus éloignée de AI que AL, elle ſera auſſi plus grande qu'icelle AL. Ce qu'on peut demontrer procedant, ainſi qu'au precedent Scholie pour les lignes tirées de diverſe part.

THEOR. 8. PROP. IX.

Si on prend quelque point au dedans d'un cercle, & d'iceluy point tombent à la circonference plus de deux lignes droites egales, le point pris eſt le centre du cercle.

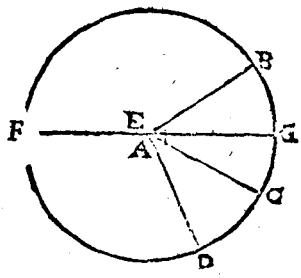
Soit pris le point A au cercle BCD, & d'iceluy point tombent à la circonference les trois lignes droites egales AB, AC, AD. Je dis que le point pris A, eſt le centre du cercle.



Qu'il ne ſoit ainſi: ſoient menées les lignes droites BC & CD, & apres les avoir coupées en deux egalement aux points E & F, d'iceux points au point A, ſoient menées les deux lignes droites EA, FA, & prolongées de part & d'autre en la circonference. D'autant que les deux triangles BEA & CEA, ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, & les baſes AB, AC auſſi egales, les deux angles au point E ſeront egaux, & partant droits, & par le Corol. de la 1. prop. de ce livre le centre du cercle ſera en ligne droite GAH, puis qu'elle diviſe la ligne droite FC en deux egalement, & à angles droits en E. Par même diſcours le centre du cercle ſe trouvera auſſi en la ligne droite KI. Il faut donc que ce ſoit à leur commune ſection A, n'y ayant point d'autre point commun. Parquoy ſi on prend quelque point dedans un cercle, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

Autrement. Si le point A n'eſt le centre du cercle, ſoit iceluy centre au point E, ſi faire ſe peut, duquel ſoit mené par A le diametre FG. D'autant donc qu'au diametre FG,

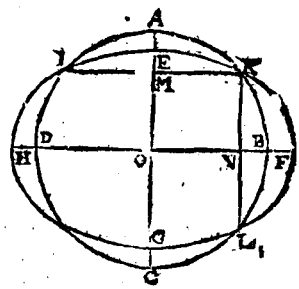
eſt pris le point A outre le centre, duquel tombent en la circonference les lignes droites AD, AC; icelle AD qui eſt plus proche de AF tirée par le centre E, ſera plus grande que AC par la 7. p. 3. Ce qui eſt abſurde, car icelles AB, AC ont été poſées egales. La même abſurdité s'enſuivra toûjours ſi on poſe le centre être à un autre point que A: parquoy iceluy point A ſera le centre du cercle ABC. Ce qu'il faloit prouver.



THEOR. 9. PROP. X.

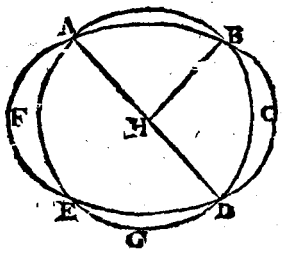
Un cercle ne coupe pas un autre cercle en plus de deux points.

Soient les deux cercles ABCD & EFGH, ſe coupans aux trois points I, K & L, s'il eſt poſſible. Item ſoient menées les deux lignes droites IK & KL, leſquelles ſoient coupées en deux également aux points M & N par la 10. prop. 1. & ſoient menées les lignes droites MC, NH, à droits angles ſur Ik & KL. Il faudra par le Corol. de la 1. pr. de ce livre que les deux centres des deux cercles ſoient en la ligne AC; ils ſeront auſſi en la ligne FH: Ce ſera donc au point de la commune ſection O, & en ce faiſant les deux cercles auroient même centre contre la 5. prop. de ce livre. Donc les cercles ABCD &



EFGH ne se pouvoient pas couper en plus de deux points: Ce qu'il faloit demontrer.

Autrement. Que les deux cercles ABCDEF, & ABDGE se coupent, s'il est possible, en plus de deux points, c'est à sçavoir en A, B, D: & soit trouvé le centre du cercle ABDGE, lequel soit H, & d'iceluy soient menées les lignes droites HA, HB, HD, lesquelles seront egales entr'elles par la defin. du cercle. Et d'autant qu'au cercle ABCDEF on a pris le point H, duquel tombant à la circonference plus de deux lignes egales, iceluy point H sera le centre dudit cercle, par la 9. prop. 3. Mais il est aussi le centre du cercle ABDGE. Donc deux cercles s'entrecoupans ont même centre. Ce qui est absurde.

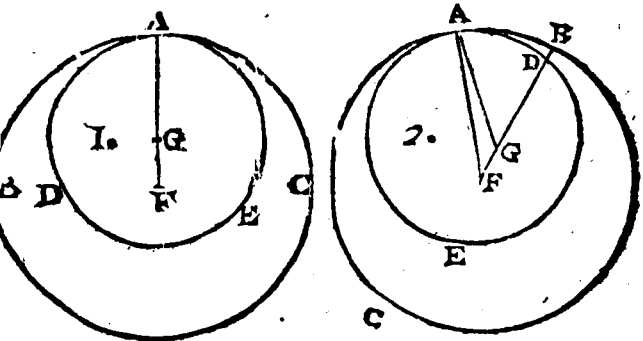


THEOR. 10. PROP. XI.

Si ayant pris les centres de deux cercles qui se touchent l'un l'autre au dedans, on conjoint iceux centres par une ligne droite; icelle ligne étant prolongée tombera en l'attouchement des cercles.

Soient deux cercles ABC & ADE s'entretouchans interieurement au point A, & par la 1. pr. 3. soit trouvé le centre du cercle ABC, lequel soit F; puisque par la 6. pr. 3. deux cercles s'entretouchans au dedans ne peuvent avoir un même centre, F ne sera pas le centre du cercle ADE: Soit donc aussi trouvé son centre, qui soit G. Je dis que la ligne droite menée du centre F au centre G, & prolongée de ce costé là jusques à la circonference du plus grand cercle ABC, tombera au point de l'attouchement A, comme à la premiere figure. Car

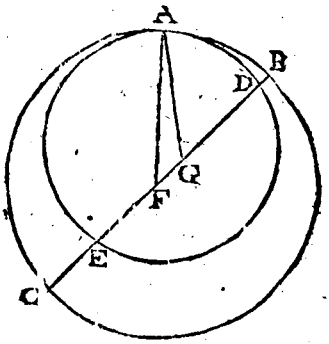
autrement il faudra qu'elle tombe à quelqu'autre point de ladite circonference, car d'autant que les deux centres F & G sont au dedans du cercle A B C, ladite ligne FG étant conti-



nuée, elle ira necessairement rencontrer la circonference d'iceluy cercle : & si quelqu'un dit que ce n'est pas au point d'atouchement, soit, s'il est possible, à quelconque autre point, comme B en la 2 figure ; tellement que la ligne FGB coupe la circonference du moindre cercle A D E au point D. D'autant donc que les centres F & G, & le point d'atouchement A ne sont pas en une ligne droite, si dudit point A on mene des lignes droites aux deux centres F & G, elles feront un triangle avec la ligne FG, qui est la distance d'un centre à l'autre, lequel triangle soit AFG. Donc puis que par la 20. prop. 1. les deux costez AG, FG dudit triangle AFG, sont plus grands que l'autre costé F A ; & iceluy F A est egal à la ligne F B, (pource que F est le centre du cercle ABC) aussi les lignes AG, GF seront plus grandes que FB : ostant donc FG commune, restera G A, plus grande que GB. Et partant, puis que GA est egale à G D ; (car G est le centre du cercle ADE) G D sera aussi plus grande que GB, la partie que le tout : ce qui est absurde. Donc la ligne droite conjoignant les deux centres des cercles A BC, ADE, & produite, ne tombera pas ailleurs qu'à l'atouchement A. Parquoy si deux cercles se touchent l'un l'autre au dedans, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

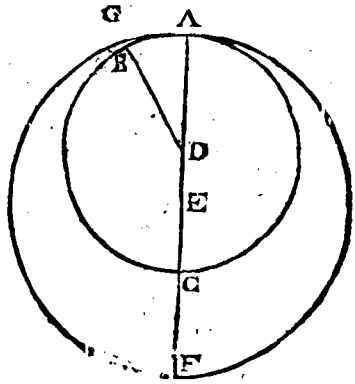
SCHOLIE.

Candalle, Errard & quelques autres Interpretes demontrent cette 11. *prop. ainsi qu'il enſuit. Soient deux circonferences ABC & ADE ſe touchans intérieurement au point A, & de la plus grande ABC, le centre ſoit F, duquel au point d'attouchement A ſoit menée la ligne droite AF : Ie dis que le centre de la plus petite circonference ADE eſt en icelle ligne AF. Autrement, qu'il ſoit hors d'icelle, s'il eſt poßible, comme au point G, & ſoit conjoint FG, & prolongé de la part de G juſques à ce qu'il coupe les deux circonferences aux points D & B, puis ſoit menée* GA. *D'autant que par la* 20. *prop.* I. *les deux coſtez* AG, FG *du triangle* AFG *ſont plus grands que l'autre coſté FA, & iceluy FA eſt egal à la ligne FB, puis que F eſt le centre du cercle ABC; auſſi* AG, FG *ſeront plus grandes que FB. Oſtant donc* FG *commune, reſtera* GA *plus grande que* GB; *mais GA eſt egale à GD (car G a été poſé centre du cercle* ADE. *) Donc auſſi GD ſera plus grande que GB; la partie que le tout; ce qui eſt abſurde. Parquoy le centre de l'autre circonference* ADE *ne ſera pas hors la ligne FA : & partant les deux centres des circonferences ABC & ADE ſeront en ladite ligne FA. Donc la ligne conjoignant iceux centres & prolongée tombera au point d'atouchement A.*



Encore autrement ſelon Pelletier & Billingſley. Soient deux cercles ABC, AFG *s'entretouchans au dedans en A, & par la* I. *pr.* 3. *ſoit trouvé le centre du cercle ABC, qui ſoit D, & auſſi le centre de* AFG, *lequel ſoit* E : *Ie dis que la ligne droite menée du centre* E *à D & prolongée juſques à la circonference du plus grand cercle tombera au*

point de l'atouchement A. *Car autrement elle tombera de part ou d'autre d'iceluy atouchement A ; qu'elle tombe donc, s'il eſt poſſible, à un autre point, comme G : tellement que* FEDG *ſoit diametre du grand cercle AGF, & CEDB du petit cercle ABC, & ſoit tirée* DA. *D'autant qu'un diametre FEDG, le point* D *eſt autre*



que le centre E, *la ligne droite* DA *ſera plus grande que* DG *par la 7. pr. 3. Mais* DB *eſt egale à* DA *par la def. du cercle : donc* DB *ſera auſſi plus grande que* DG, *la partie que le tout. Ce qui eſt abſurde. Parquoy la ligne* ED *prolongée vers A ne pourra tomber ailleurs qu'à iceluy point d'atouchement A.*

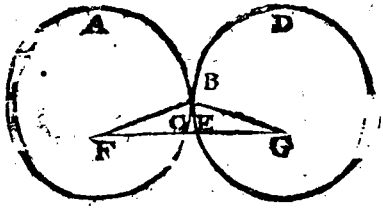
THEOR. 11. PROP. XII.

Si deux cercles ſe touchent l'un l'autre au dehors, la ligne droite menée d'un centre à l'autre, paſſera par l'atouchement.

Soient deux cercles ABC, DBE ſe touchans l'un l'autre au dehors au point B, deſquels les centres ſoient F & G. Je dis que ſi d'un centre à l'autre on mene une ligne droite, qu'icelle paſſera par le point d'atouchement B.

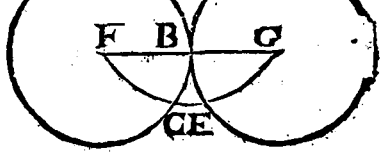
Autrement, il s'enſuivra abſurdité : car ſi icelle ligne ne paſſe par le point d'atouchement B, qu'elle paſſe ailleurs, s'il eſt poſſible, ſçavoir aux points C & E, où elle coupe les deux circonferences, & du point d'atouchement B ſoient menées les deux

lignes droites FB, GB, lesquelles par la 20. prop. 1. seront plus grandes que FG, & par la def. du cercle, il s'ensuit que FC, étant egale à FB, & GE à GB, que les deux lignes FC & GE, seront plus grandes que FG, la partie que le tout. La ligne droite menée d'un centre à l'autre, passera donc par l'atouchement B. Parquoy si deux cercles se touchent l'un l'autre au dehors, &c. Ce qu'il faloit demonstrer.



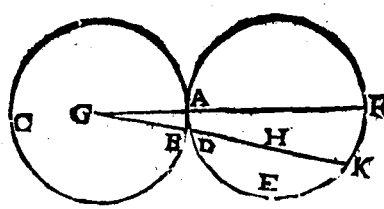
SCHOLIE.

D'autant qu'en cette demonstration d'Euclide, les centres ne demeurent en leurs vrayes places, & que cela pourroit peut-être causer quelque doute, Oronce & Schubelius en ont ajouté une autre où les centres retiennent leurs places, laquelle est telle. Que les cercles ABC, DBE s'entretouchent au dehors en B, & d'iceux les centres soient F & G : Ie dis que la ligne droite menée d'un centre à l'autre passera par le point d'atouchement B, c'est à dire que si on mene à iceluy point B les lignes droites FB, GB, elles feront une seule ligne droite FBG. Car autrement elles feront un angle à iceluy point B, & de F à G on pourra mener une ligne droite, laquelle soit (s'il est possible) FCEG, qui coupe les circonferences en C & E. Donc icelle ligne droite FCEG constituera un triangle avec les



deux lignes FB, GB, puis qu'on a posé qu'elles s'inclinent & font angle au point B; & par la 20. p. 1. icelles FB, GB sont plus grandes que FCEG: Mais par la def. du cercle FC est egale à FB, & GE à GB; donc FC & GE seront aussi plus grandes que la même FCEG, la partie que le tout: (car icelle FCEG outre FC, GE contient encore la ligne droite CE,) Ce qui est absurde.

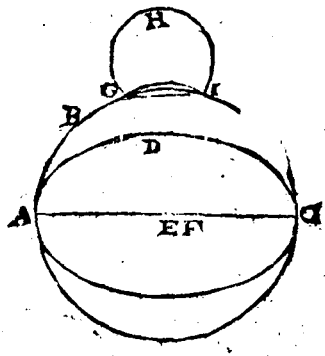
Pelletier, & apres luy Billingsley demontrent encore cette 12. pr. ainsi. Soient les deux cercles ABC & DEF qui s'entretouchent par dehors au point A; & que G soit le centre du cercle ABC, duquel soit tirée par l'atouchement des cercles, la ligne droite GA jusques à ce qu'elle rencontre la circonference DEF au point F: Ie dis que le centre du cercle ADE est en icelle ligne droite GAF. Autrement qu'il soit hors d'icelle, s'il est possible, comme au point H, & du centre G à iceluy centre H soit tirée la ligne droite GHK jusques à ce qu'elle rencontre la circonference en K, coupant la periphere ABC en B, & la circonference ADE en D. D'autant que du point G, qui est hors le cercle ADE, sont tirées à iceluy cercle les deux lignes droites GK, GF, desquelles GK passe par le centre H, par la 8. pr. 3. la partie exterieure GD sera moindre que GA partie exterieure de GF. Mais AG est egale à GB par la def. du cercle: donc aussi GD sera moindre que GB, le tout que la partie: ce qui est absurde. Donc le centre du cercle ADE ne sera pas hors la ligne GAF, & partant les deux centres des cercles ABC, & ADE seront en icelle ligne GF; parquoy la ligne conjoignant iceux centres passera par l'atouchement des cercles.



THEOR. 12. PROP. XIII.

Un cercle ne touche point un autre cercle à plus d'un point, tant dehors que dedans.

Soient les deux cercles ABC, & ADC se touchans interieurement aux deux points A & C, s'il est possible ? & d'autant qu'ils ne peuvent avoir un même centre par la 6. pr. de ce livre, soient les deux centres divers E & F, par lesquels étant tirée la ligne droite EF, & produite de part & d'autre, il faut qu'elle tombe és points d'atouchement A & C par la 11. pr. de ce mesme livre : & par la def. du cercle, il faut que les lignes droites EA & EC soient egales. Item FA & FC. Mais FA est plus grande que EA. Partant FC sera aussi plus grande que EC, la partie que le tout : ce qui est impossible. Donc les deux cercles ne se toucheront point en deux points au dedans.

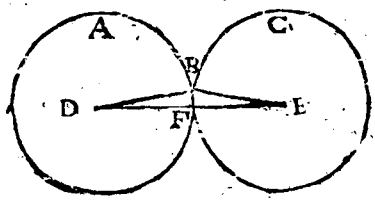


Pareillement, il est impossible qu'ils se touchent exterieurement à plus d'un point : car si le cercle GHI pouvoit toucher en dehors le cercle ABC en deux points, comme G & I, il faudroit que la ligne droite GI menée par lesdits deux points, tombast dedans l'une & l'autre cercle par la 2. pr. 3. ce qui est impossible : car icelle ligne droite GI tombant dedans le cercle ABC, elle ne peut pas tomber dedans le cercle GHI, puis qu'iceluy est tout dehors ABC. Parquoy les cercles ne se touchent point à plus d'un point, tant dehors que dedans. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Cette 2. partie est encore demontrée par plusieurs Interpretes ainsi : Que les deux cercles AB & CB, dont les centres sont D & E, s'entretouchent par dehors au point F : Ie dis qu'ils ne se peuvent toucher à un autre point. Car ayant mené du centre D au centre E la ligne droite DE, elle passera par ledit atouchement F par la proce-

dente prop. & ſi les cercles ſe touchoient encore à un autre point, comme B, la ligne droite menée d'un centre à l'autre paſſeroit auſſi par iceluy atouchement B; & par ainſi les deux lignes droites D F E, D B E enclorroient une ſuperficie, ce qui eſt impoſſible.



Clavius demontre en ce lieu le Theoreme ſuivant.

Si au demy diametre d'un cercle produit, on prend un point outre le centre, le cercle décrit d'iceluy point comme centre, par le point extréme du demy diametre, touchera le premier cercle en iceluy point extréme du ſemy-diametre, & tombera tout dehors le même cercle.

Soit le cercle ABC, *(voyez la derniere figure de la page* 182.*) duquel le centre eſt D, & au demy diametre* AD *prolongé, ſoit pris quelconque point comme* E, *duquel & de l'intervalle* EA *ſoit décrit le cercle* AFG, *lequel je dis toucher le cercle* ABC *au ſeul point A. Car ou le point* E *eſt dans le cercle* ABC, *ou dehors. S'il eſt dedans: d'autant que* AE *eſt plus grand que* AD, *c'eſt à dire que* DC, *& à plus forte raiſon que* EC: *la ligne* EF *qui eſt egale à* EA *ſera auſſi plus grande que* EC: *& partant le point* F *eſt hors le cercle* ABC: *& le cercle* AFG *hors le même cercle prés du point* F. *Iceluy point* F *tombera beaucoup davantage hors le cercle* ABC, *ſi* E *eſt hors le même cercle* ABC. *Si donc le cercle* AFG *ne tombe tout dehors le cercle* ABC, *tellement qu'il le touche au ſeul point A, que le cercle* AFG *coupe ou touche le cercle* ABC, *en un autre point* B, *ſi faire ſe peut, & ſoit tirée la ligne* DB. *Vû donc qu'au diametre du cercle* AFG *eſt pris le point D, outre le centre* E, *la ligne* DA *ſera la plus petite de toutes les lignes droites tom-*

bantes de D à la circonference, par la 7. prop. 3. Donc DA eſt moindre que DB, *ce qui eſt abſurde; car DA, DB tombant du centre D en la circonference d'un même cercle ABC, ſont egales. Donc le cercle AFG ne coupe ou touche le cercle ABC en un autre point que* A, *mais tombe tout dehors iceluy: ce qui étoit propoſé.*

Que ſi au ſemy-diametre non produit, on prend un point outre le centre, le cercle décrit d'iceluy point comme centre, par le point extréme du ſemy-diametre touchera pareillement le premier cercle au ſuſdit point extréme du demy-diametre, & tombera tout dedans le méme cercle. Comme ſi au ſemy-diametre AE, *du cercle* AFG, *on prend le point D, duquel & de l'interuale DA, on décrive le cercle* ABC, *iceluy tombera totalemtnt dedans AFG, & le touchera au ſeul point A. Car puis qu'il a été demontré cy-deſſus que le cercle* AFG *tombe tout dehors le cercle* ABC, *pareillement tout cétui-ci tombera dedans celui-là, tellement qu'ils s'entretouchent au ſeul point* A; *& par ainſi apert ce qui étoit propoſé.*

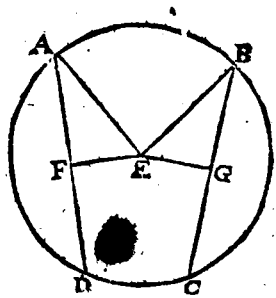
THEOR. 13. PROP. XIV.

Dans le cercle, les lignes droites egales, ſont egalement diſtantes du centre; & les egalement diſtantes du centre ſont egales entr'elles.

Au cercle ABCD, duquel le centre eſt E, ſoient deux lignes droites egales AD & BC. Je dis qu'elles ſeront egalement diſtantes du centre E.

Qu'ainſi ne ſoit, par la 12. prop. 1. du centre E ſoient menées les deux lignes EF, EG, perpendiculaires aux deux lignes droites AD, BC: puis ſoient tirées les deux lignes AE & BE. Or les deux lignes droites AD & BC, étans coupées en angles droits par les perpendiculaires EF & EG, elles ſeront auſſi coupées en deux egalement par la 3. p. 3. & puis qu'icelles AD, BC ſont poſées egales, la moitié AF ſera egale à la moitié BG. Pareillement AE étant egale à BE par la def. 1. cercle. le quarré de AE ſera egal au quarré de BE. Mais iceluy quarré de AE eſt egal aux deux quarrez de

AF, FE, par la 47. prop. 1. & le quarré de BE eſt egal aux deux quarrez de BG, GE. Donc les deux quarrez de AF, FE ſeront egaux aux deux quarrez de BG, GE. Mais puis que les lignes AF, BG ſont egales, le quarré de AF eſt egal au quarré de BG, & par conſequent le quarré de FE, eſt egal au quarré de GE. Parquoy la ligne FE ſera egale à la ligne GE, & par la 4. def. du 3. AD & BC ſeront egalement diſtantes du centre E.



Quant à la ſeconde patrie. Je dis que ſi AD, BC ſont egalement diſtantes du centre E, qu'elles ſeront egales entr'elles : car ayant conſtruit, comme deſſus, les perpendiculaires EF & EG ſeront egales par la 4. def. de ce liv. & couperont AD, BC en deux egalement par la 3. pr. de ce même liv. & par deduction de la 47. p. 1. comme cy-deſſus, AF ſe trouvera egale à BG, & par conſequent auſſi leurs doubles AD & BC ſeront egales entr'elles. Si donc au cercle les lignes droites egales, &c. Ce qui étoit à demontrer.

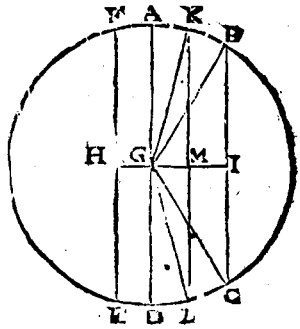
THEOR. 14. PROP. XV.

Dans le cercle, la plus grande ligne eſt le diametre : quant aux autres toûjours la plus proche du centre eſt plus grande que la plus éloignée.

Au cercle ABCDEF, duquel le centre eſt G ſoit le diametre AD, & la ligne FE la plus proche d'iceluy. mais BC la plus éloignée. Je dis que de toutes ces lignes AD eſt la plus grande, & que FE eſt plus grande que BC.

Car ſoient tirées du centre G les lignes droites GH, GI perpendiculaires aux lignes droites FE, BC : & pource que BC eſt plus éloignée du centre que FE ; la perpendiculaire

GI sera plus grande que GH, par la 4. def. de ce Livre. Soit donc coupé d'icelle GI, la ligne GM egale à GH, & par M soit menée KML perpendiculaire à GI, & soient tirées les lignes GK, GB, GC, GL. Donc puis que les perpendiculaires GM, GH sont egales, les lignes droites KI, FE seront egalemẽt distantes du centre par la 4. def. de ce Livre, & partant egales entr'elles par la precedente. Derechef, puis que GK, GL, sont plus grandes que KL par la 20. prop. 1. & icelles GK, GL sont egales au diametre AD; iceluy diametre AD sera aussi plus grand que KL ou FE. Par mesme raison on demontrera que AD est plus grande que toutes les autres lignes.



Item, d'autant qu'aux triangles GKL & GBC, les costez GK, GL, GB, GC sont egaux par la definition du cercle, & l'angle GKL est plus grand que l'angle BGC, par la 24. prop. 1. la base KL, ou son egale FE, sera plus grande que la base BC, & ainsi des autres. Parquoy dans le cercle la plus grande ligne est le diametre, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

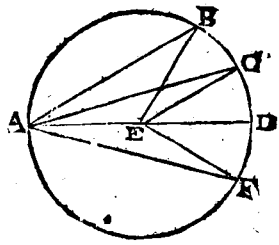
SCHOLIE.

Clavius demontre icy le Theoreme suivant pris de Commandin.

Si en la circonference du cercle on prend un point, & d'iceluy l'on mene quelque ligne droite au cercle, l'une desquelles passe par le centre, & les autres où l'on voudra: celle qui passe par le centre sera la plus grande de toutes: mais des autres les plus proches de celle-là qui passe par le centre seront plus grandes que les plus éloignées: & n'y en peut avoir que deux egales de part & d'autre de la plus grande.

En la circonference du cercle AB, CD soit pris le point

A, & d'iceluy ſoient menées pluſieurs lignes droites AB, AC, AD, *deſquelles* AD *paſſe par le centre* E: *ie dis que* AD *eſt la plus grande de toutes, & AC eſtre plus grande que* AB, *qui eſt plus éloignée d'icelle* AD. *Car eſtans menées les lignes* BE, CE; *au triangle* AEC *les deux coſtez* AE, EC *ſeront plus grands que le coſté AC par la* 20. *pr.* 1. *Mais icelles lignes* AE, EC *ſont egales aux lignes droites* AE, ED, *c'eſt à dire à la ligne droite* AD. *Donc icelle* AD *ſera plus grande que AC: & par meſme raiſon elle ſera auſſi plus grande que* AB, *& ainſi des autres.*



En apres, d'autant qu'au triangle AEC *les deux coſtez* AE, EC *ſont egaux aux deux coſtez* AE, EB *du triangle* AEB, *chacun au ſien, & tout l'angle* AEC *plus grand que l'angle* AEB, *la baſe* AC *ſera plus grande que la baſe* AB *par la* 14. *propoſ.* 1. *Et par meſme raiſon* AC *ſera plus grande que toute autre ligne plus éloignée du centre* E.

En 3. *lieu: ie dis que du point A on ne peut mener au cercle que deux lignes droites egales entr'elles de part & d'autre de la plus grande* AD. *Car ayant fait l'angle* AEF *egal à l'angle* AEC, *& joint* AF, *les deux coſtez* AE, EC *ſeront egaux aux deux coſtez* AE, EF, *& les angles* AEC, AEF, *contenus d'iceux coſtez, auſſi egaux, & par la* 4. *prop.* 1. *les baſes* AC, AF *ſont egales: & il eſt evident que du meſme point A on ne peut tirer dans le cercle une autre ligne, qui ne s'aproche ou éloigné de AD; & partant plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles* AC, AF. *Donc du point A ne ſe peuvent tirer dans le cercle que deux lignes droites egales entr'elles.*

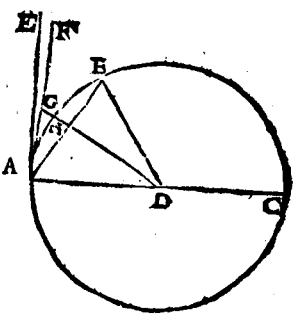
Que ſi de AB, AF, *tirées de diverſes parts du diametre* AD, *on dit que* AF *eſt plus proche d'iceluy diametre AD, on démontrera, comme au Scholie de la* 7.

prop. de ce livre, que ladite AF eſt plus grande que AB.

THEOR. 15. PROP. XVI.

Si à l'extremité du diametre d'un cercle, on leve une ligne perpendiculaire, elle tombera hors le cercle: & entre icelle perpendiculaire & la circonference ne tombera pas une autre ligne droite, & l'angle du demy cercle eſt plus grand que tout angle rectiligne aigu, & celuy qui reſte plus petit.

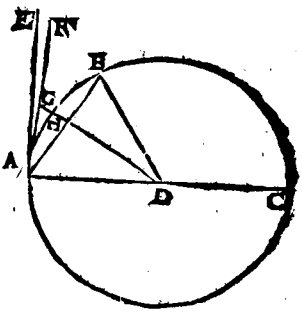
Du cercle A B C, ſoit le centre D, & le diametre A C, ſur l'extremité duquel A, ſoit levée la ligne perpendiculaire AE, par la 11. prop. 1. Je dis premierement qu'icelle ligne AE tombe hors le cercle.



Car ſi elle tomboit dans iceluy, ainſi que AB, étant tirée D B, les deux angles DAB, DBA, ſeront egaux par la 5. prop. 1. Mais DAB eſt droit par la conſtruction: donc DBA ſera auſſi droit: ce qui eſt abſurde, puis que par la 17. prop. 1. deux angles d'un triangle ſont moindres que deux droits. Donc la perpendiculaire ne tombera pas dans le cercle. Pour la méme raiſon elle ne tombera pas auſſi en la circonference, mais dehors, comme eſt AE.

Maintenant, ie dis que de A ne peut tomber entre la perpendiculaire AE, & la circonference AB, une autre ligne droite. Car s'il eſt poſſible que quelque ligne droite y tombe, comme AF, de D ſoit menée ſur icelle la perpendiculaire D G, coupant la circonference en H, laquelle tombera neceſſairement de la part de l'angle aigu DAF par le Corol. de la 17. prop. 1. Veu donc qu'au triangle DAG, les deux angles DAG, DGA, ſont

ſont moindres que deux droits par la 17. prop. 1. & par la conſtruction DGA eſt droit, l'angle D A G ſera moindre qu'un droit, & partant la ligne D A, ou ſon egale D H, ſera plus grande que DG, par la 19. pr. 1. la partie que le tout: ce qui eſt abſurde. Entre la perpendiculaire AE, & la circonference AB ne tombera donc pas une autre ligne droite.



Je dis finalement, que tout l'angle du demy cercle BAC contenu du diametre AC, & de la circonference AB, eſt plus grand que tout angle rectiligne aigu, & que celuy qui reſte BAE contenu de la ligne droite AE, & de la circonference AB eſt plus petit que tout angle rectiligne aigu. Car puis que CAE eſt angle droit diviſé par la ſeule circonference AB, & qu'entre icelle circonference AB & la ligne droite AE, ne peut tomber une autre ligne droite; l'angle BAE ne peut eſtre diviſé par aucune ligne droite, & par ainſi ne ſera diminué par aucune ligne droite, ny par conſequent l'angle BAC ne ſera augmenté par aucune ligne droite. Si donc à l'extremité du diametre d'un cercle on leve une perpendiculaire, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

COROLLAIRE.

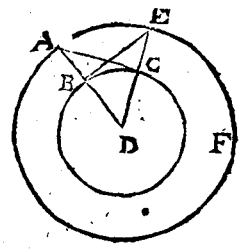
Par ces choſes eſt manifeſte qu'une ligne droite tirée perpendiculairement de l'extremité du diametre, touche le cercle en un ſeul point. Car il a eſté demontré qu'elle tombe hors le cercle: & partant elle le touche ſeulement au point extréme du diametre. Parquoy s'il étoit requis tirer une ligne droite par le point A donné en la circonference du cercle, laquelle touchaſt le cercle en A nous tirerions de A au centre D la ligne droite AD, & ſur icelle ſeroit élevée la perpendiculaire AE, laquelle toucheroit le cercle en A, comme il a été demontré.

PROBL. 2. PROP. XVII.

D'un point donné, mener une ligne droite qui touche un cercle donné.

Soit le point donné A, duquel il faut mener une ligne droite qui touche le cercle donné BC, dont le centre est D.

Soit menée la ligne AD coupant le cercle BC en B: puis du centre D, & intervalle DA, soit décrit le cercle AEF: Et apres avoir levé au bout du demy diametre BD la perpendiculaire BE par la 11. p. 1. laquelle coupe la circonference AEF en E, soit menée la ligne ED coupant le cercle BC au point C, & du point donné A, à iceluy point C, soit menée la ligne AC: ie dis qu'elle touche le cercle donné BC au point C.



Car les deux triangles ACD & EBD ayans deux costez egaux, & l'angle D commun, la base AC sera egale à la base EB, & l'angle droit ACD egal à l'angle EBD, qui sera aussi droit. Et par le Corol. de la preced. prop. la ligne AC touchera le cercle BC au seul point C. Nous avons donc du point donné A mené la ligne droite AC, qui touche le cercle donné au point C. Ce qu'il falloit demontrer.

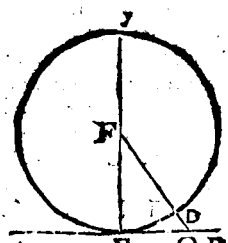
SCHOLIE.

La pratique de cette prop. est aisée à entendre par la construction d'icelle: mais nous avons enseigné en nôtre Geometrie pratique, Prob. 20. une autre maniere beaucoup plus facile, laquelle nous rapporterons encore à la 31. prop. de ce livre.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si une ligne droite touche un cercle : & du centre à l'atouchement on mene une ligne droite, elle ſera perpendiculaire à la touchante.

Soit la ligne droite AB touchant le cercle CDE, au point E, & d'icelui point d'atouchement ſoit menée la ligne droite EC paſſant par le centre F. Ie dis qu'elle ſera perpendiculaire à AB. Car ſi elle ne l'eſt, ſoit menée FG perpendiculaire à AB, coupant la circonference en D. Veu donc qu'au triangle FEG les deux angles FEG, FGE ſont moindres que deux droits, par la 17. prop. 1. & FGE eſt droit par la conſtruction FEG ſera moindre qu'un droit, & par la 10. p. 1. la ligne FE, ou FD ſon egale ſera plus grande que FG, la partie que le tout: ce qui eſt abſurde. Donc FE eſt perpendiculaire à AB. Parquoy ſi une ligne droite touche un cercle, &c. Ce qu'il falloit demontrer.



SCHOLIE.

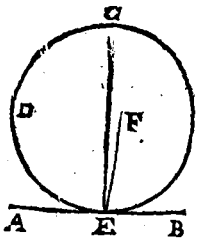
Clavius démontre encore cette prop. ainſi. Si EC n'eſt perpendiculaire à AB, l'un des angles qu'elle fait au point E ſera obtus, & l'autre aigu. Soit donc CEB aigu. ; & veu qu'il eſt plus grand que l'angle du demy cercle CED, *l'angle du demy cercle ſera plus petit que quelque angle rectiligne aigu : ce qui eſt contre la 16. pr. 3. & partant abſurde.*

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si une ligne droite touche un cercle, & au point de l'atouchement eſt levée une perpendiculaire ; en icelle ſera le centre du cercle.

Soit la ligne droite AB, touchant le cercle CDE au point E: & d'iceluy soit levée EC perpendiculaire à AB. Je dis que le centre du cercle sera dans icelle ligne perpendiculaire EC.

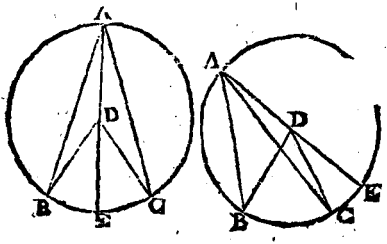
Autrement, il sera dehors icelle ligne; soit donc au point F, s'il est possible, & d'iceluy point soit menée la ligne droite EF au point de l'attouchement E; icelle ligne EF sera aussi perpendiculaire à AB par la prec. prop. ce qui est impossible: car les deux angles ABC, AEF seroient droits & egaux, la partie au tout: partant le centre du cercle n'estoit pas hors la ligne EC, ains dedans Si donc une ligne droite touche un cercle, &c. Ce qu'il falloit prouver.



THEOR. 18. PROP. XX.

Au cercle, l'angle du centre est double de l'angle de la circonference, quand iceux angles ont une même circonference pour base.

Au cercle ABC, duquel le centre est D, soient constituez



les deux angles BAC & BDC, sçavoir BAC en la circonferen-

de, & BDC au centre, ayant pour base une mesme circonference BC. Je dis que l'angle BDC sera double de l'angle BAC.

Car premierement, si les lignes droites AB, AC encloſent les lignes DB, DC, comme en la premiere figure; étant menée par le centre D la ligne droite ADE, & les lignes DA, DB & DC, étans egales, les deux triangles ADB & ADC seront Isosceles, & par la 5. pr. 1. ils auront les angles egaux sur les bases AB & AC. Mais l'angle exterieur BDE par la 32. p. 1. est egal aux deux angles interieurs DAB & DBA, qui sont egaux: partant il sera double du seul DAB: par mesme discours EDC se trouvera aussi double de DAC, & par consequent les deux ensemble BDC seront doubles des deux ensemble BAC.

Que si l'angle de la circonference BAC est comme en la seconde figure, il s'ensuivra toûjours le mesme, sçavoir que l'angle BDC sera double de l'angle BAC.

Car apres avoir mené par le centre D la ligne ADE, par la 32. pr. 1. l'angle exterieur BDE sera egal aux deux oppoſez interieurs ABD, DAB, & double du seul DAB, le triangle étant Isosceele: par mesme discours CDE sera double de CAD, & par la 20. com. sent. si de BDE double de BAE on ôte CDE, double de CAE, le demeurant BDC sera double du demeurant BAC. Parquoy au cercle, l'angle du centre est double de l'angle de la circonference, &c. Ce qu'il faloit prouuer.

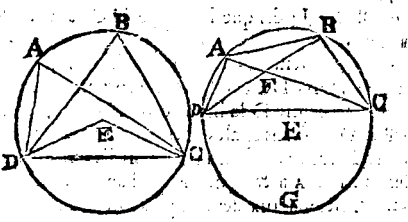
THEOR. 19. PROP. XXI.

Au cercle, les angles qui sont en une même portion, sont egaux entr'eux.

Toute portion de cercle, est ou plus grande, ou plus petite que le demy cercle. Soit donc premierement au cercle ABCD, le centre duquel est E, une plus grande portion DABC, en laquelle soient les angles DAC & DBC. Je dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Car si du centre E on mene les deux lignes ED & EC, l'angle du centre DEC sera double de l'angle en la circonference DAC par la prop. prec. & par la même prop. il sera aussi dou-

ble de l'autre angle DBC. Mais les choses qui sont moitié d'une même, sont



egales entr'elles : Donc aussi les angles A & B seront egaux entr'eux.

Soit maintenant une portion plus petite que le demy cercle, comme en la 2. figure. Je dis que les deux angles DAC, DBC, étans en la mesme portion DABC sont egaux.

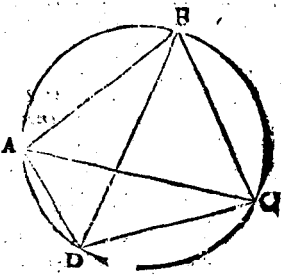
Car si on mene la ligne droite AB, il se fera une portion BGA, plus grande que le demy cercle ; & comme nous avons demonstré cy-dessus, les deux angles ADB & BCA, qui sont en une mesme portion AGB, seront egaux : pareillement aux deux triangles DAF & CBF, les angles opposez au point F sont egaux par la 15. pr. 1. & par ce qui a été demontré à la 32. pr. 1. le troisiéme angle DAF sera egal au troisiéme angle CBF. Donc au cercle, les angles qui sont, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Les figures de quatre côtez inscrites au cercle, ont les angles opposez egaux à deux angles droits.

Soit le cercle AECD, auquel soit inscrite la figure de quatre côtez ABCD. Je dis que les angles opposez ABC, ADC, item BAD, BCD, sont egaux à deux droits. Car si on mene les deux diagonales AC & BD, les deux angles ACD & ABD, étans en une mesme portion ABCD, seront egaux par la pr. prec. Pareillement les deux angles DBC & CAD, étans en une mesme portion DABC, seront egaux ; donc les deux angles sous le point B, seront egaux aux deux DAC & DCA, lesquels avec les deux du point D, sont egaux à

deux droits par la 32. pr. 1. partant auſſi les deux ſous le point B avec les deux ſous le point D : c'eſt à dire le total ABC, avec le total ADC, ſeront egaux à deux droits. Nous demonſterons en la meſme maniere que les deux angles BAD, BCD, ſont egaux à deux droits. Car derechef les deux angles ABD, ACD, ſont egaux. Item les deux BCA, BDA; & partant tout l'angle BCD



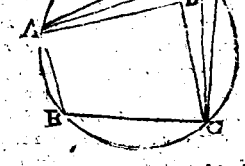
ſera egal aux deux ABD, ADB, leſquels avec BAD ſont egaux à deux droits par la 32. p. 1. Donc auſſi les deux BCD, BAD, ſeront egaux à deux droits. Parquoy les figures de quatre coſtez inſcriptes au cercle, &c. Ce qu'il faloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La converſe de cette 22. prop. peut être demonſtrée ainſi qu'il enſuit.

Si deux angles oppoſez d'un quadrilatere ſont egaux à deux droits, le cercle décrit par trois angles d'iceluy paſſera auſſi par le quatriéme angle.

Au quadrilatere ABCD, les deux angles oppoſez, B & D ſoient egaux à deux droits, & par les trois angles A, B, C, ſoit décrit un cercle : Ie dis qu'il paſſera auſſi par le 4 angle D Car s'il n'y paſſe, il paſſera ou au deſſa de D, ou au deſa. Soient donc tirées les deux lignes droites AE, CE, en telle ſorte que ne coupant les lignes droites CD, AD, elles conſtituent au cercle un quadrilatere ABCE. Donc par la 22. pr. 3. les deux angles oppoſez B, E ſont egaux à deux droits : Mais par l'hypotheſe les deux angles B & D, ſont auſſi egaux à deux droits ; & partant les deux angles B & E

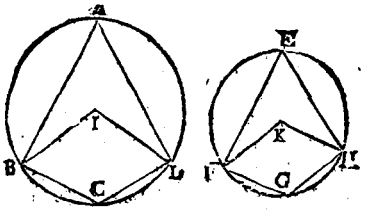


ſeront egaux aux deux B *&* D. *Parquoy en ôtant l'angle commun* B, *reſteront les angles* D *&* E *egaux : Ce qui eſt abſurde, car étant tirée la ligne droite* C A, *l'angle* D *ſera plus grand que l'angle* E *par la* 21. *pr.* 1. *ou au contraire l'angle* E *ſera plus grand que l'angle* D. *Le cercle paſſera donc par le point* D.

Nous demontrerons encore icy quatre theoremes non ſeulement utils aux choſes Geometriques, mais auſſi neceſſaires aux Aſtronomiques.

1. Aux cercles, les angles qui s'apuyent ſur arcs ſemblables ſont egaux entr'eux, ſoit qu'ils ſoient conſtituez aux centres ou aux circonferences : & au contraire, les arcs auſquels s'apuyent angles egaux conſtituez aux centres ou aux circonferences, ſont ſemblables.

Aux cercles ABCD, EFGH, *deſquels les centres* I *&* K, *ſoient premierement les arcs ſemblables* BCD, FGH, *auſquels inſiſtent & s'apuyent les angles* I *&* K *aux centres; & les angles* A *&* E *aux circonferences. Ie dis que tant ces deux là, que ces deux-cy ſont egaux entr'eux. Car étans conſtituez en iceux arcs les angles* C, G, *qui par la* 10. *d.* 3. *ſeront egaux: & par la* 22. *p.* 3. *tant les deux angles* C, A, *que les deux* G, E, *ſont egaux à deux droits. Otant donc les egaux* C, G, *les reſtans* A, E *ſeront auſſi egaux : Mais d'iceux ſont doubles les angles* I, K, *par la* 20. *prop.* 3. *& par conſequent ils ſont auſſi egaux. Ce qui étoit propoſé.*

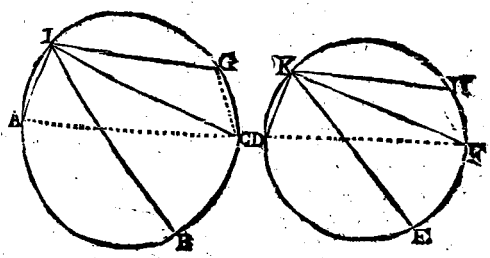


Secondement, ſoient egaux tant les angles I, K, *que* A, E, *leſquels s'apuyent ſur les arcs* BCD, FGH : *Ie dis qu'iceux arcs* BCD, FGH *ſont ſemblables. Car* A *&* E *ſont egaux, & par la* 22. *prop.* 3. *tant les deux angles* A *&* C *que les deux* E *&* G *ſont egaux à deux droits, les deux autres* C *&* G *ſeront auſſi egaux ; & partant les arcs*

BCD, FGH, *auſquels inſiſtent les angles* A, E *aux circonferences, ſeront ſemblables par la* 10. *d.* 3. *Mais ſi les angles* I *&* K *aux centres ſont egaux, leurs moitiez* A *&* E, *ſeront auſſi egales. Parquoy comme deſſus, les arcs* BCD, FGH *ſont ſemblables. Ce qu'il faloit demontrer.*

2. Si aux demy cercles, ou autres ſegmens ſemblables, l'on ajoûte des ſegmens ſemblables; les totals ſegmens ſeront auſſi ſemblables: & ſi des cercles, demy cercles, ou autres ſegmens ſemblables, on oſte des ſegmens ſemblables; les ſegmens reſtans ſeront auſſi ſemblables.

Aux cercles ABC, DEF, *ſoient les ſegmens ou arcs ſemblables* ABC, DEF *qui ſoient demy cercles ou non, & à iceux ſoient ajoûtez les arcs ſemblables* CG, FH. *Ie dis que tout l'arc* ABG *eſt ſemblable à tout l'arc* DEH. *Car étans pris aux arcs reſtans les deux points* I, K, *comme on voudra, ſoient menées les lignes droites* AI, CI, GI; DK, Fk, HK. *D'autant que les arcs* ABC, DEF *ſont ſemblables, les angles* AIC, DkF, *ſeront*



egaux par le prec. Theor. Et *par meſme raiſon les angles* CIG, FkH *ſeront auſſi egaux, à cauſe des arcs ſemblables* CG, FH. *Donc tout l'angle* AIG *ſera egal à tout l'angle* DKH: *& par le meſme theor. prec. les arcs* ABG, DEH *ſeront ſemblables: Ce qui étoit propoſé.*

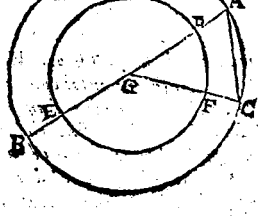
Maintenant, que des ſegmens ou arcs ſemblables ABC, DEF, *ſoient retranchez les arcs ſemblables* AB,

DE. Ie dis que les arcs restans BC, EF, sont aussi semblables. Car estans pris derechef les deux points I, K, aux peripheres restantes des arcs donnez, soient menées les lignes droites AI, BI, CI : DK, EK, FK. Donc puis que tout l'arc ABC est semblable à tout l'arc DEF, tout l'angle AIC sera egal à tout l'angle DKF par le prec. theor. Et par mesme raison l'angle retranché AIB sera egal à l'angle retranché DKE, à cause des arcs semblables AB, DE : donc aussi l'angle restant BIC sera egal à l'angle restant EKF ; & consequemment les arcs BC, EF, seront semblables. Ce qu'il falloit demontrer.

Que si des cercles entiers on oste les segmens semblables IAC, KDF, les segmens restans CGI, FHK seront aussi semblables. Car ayant pris aux arcs d'iceux segmens les points A, G, D, H, soient menées les lignes droites IA, CA, IG, CG : KD, FD, KH, FH. D'autant que les segmens IAC, KDF sont semblables, les angles IAC, KDF seront egaux par la 10. def. 3. Et puis que par la 22. prop. . tant les deux angles opposez A, G, que les deux D, H, sont egaux à deux droits ; en ostant les deux angles egaux A & D, les deux restans G & H seront aussi egaux, & partant les segmens IGC, KHF seront semblables par la mesme def. Ce qui estoit proposé.

3. Si deux ou plusieurs cercles sont décrits d'un mesme centre, & d'iceluy soient menées deux ou davantage de lignes droites, qui coupent les circonferences ; les arcs compris entre deux quelconques d'icelles lignes, seront semblables.

Soient deux cercles ABC, DEF, décrits d'un mesme centre G, duquel soient menées les deux lignes droites GB, GC, qui coupent les circonferences en B, C, & E, F : Ie dis que les arcs EF, BC, sont semblables. Car étant prolongée la ligne BG iusques en A, & tirées les lignes droites AC, DF l'angle G constitué au centre sera double de chacun des angles A, D,

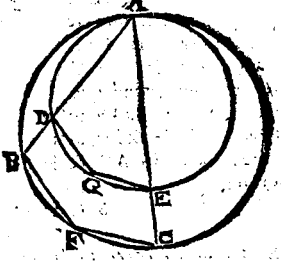


en la circonference par la 20. prop. 3. Donc par le 1. de ces theor. les arcs BC, EF, *sur lesquels ils s'apuyent seront semblables. Ce qui estoit proposé.*

Autrement, *D'autant que sur les arcs* EF, BC *s'apuyent angles egaux au centre ; ou plûtoſt un ſeul & meſme angle* BGC ; *iceux arcs* EF, BC *ſeront ſemblables par le theor. ſuſdit.*

4. Si deux ou davantage de cercles s'entretouchent au dedans, & du point d'atouchement ſoient tirées deux ou davantage de lignes droites qui coupent les cercles ; les arcs compris entre deux quelconques d'icelles lignes ſeront ſemblables ; comme auſſi les arcs compris entre le point d'atouchement, & laquelle on voudra d'icelles lignes.

Que les deux cercles ABC, ADE *s'entretouchent en dedans au point* A, *duquel ſoient menées les deux lignes droites* AB, AC, *qui coupent les cercles en* B, C, *&* D, E: *Ie dis que tant les arcs* BC, DE, *que* AB, AD; & ACB, AED *ſont ſemblables. Car ayant pris les deux points* F, G, *& tiré les lignes droites,* BF, CF, DG, EG; *les deux angles* DAE, DGE; *ſeront egaux aux deux angles* BAC, BFC, *attendu que tant ces deux-là, que ces deux cy ſont egaux à deux droits par la 22. pr. 3. & partant l'angle commun* BAC *eſtant oſté, les deux autres angles* DGE, BFC *demeureront egaux : & par la 10. def. 3. les arcs* DE, BC *ſeront ſemblables.*

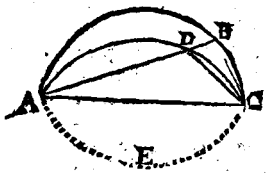


Et d'autant que ſi on conçoit eſtre tirée la ligne droite AC *par le centre du cercle, elle tombera en l'atouchement* A *par la 11. prop. 3. & en la meſme maniere que deſſus les arcs* DE, BC *ſeront ſemblables, leſquels eſtans ôtez des demy cercles ſemblables, reſteront auſſi ſemblables les arcs* AD, AB, *qui oſtez des circõferences entieres, reſteront encore les arcs* AED, ACB *ſemblables ; comme nous avons demontré au 2. theor. Ce qui eſtoit proposé.*

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Deux portions de cercles, semblables & inegales, ne se mettront pas dessus une même ligne droite, & de même part.

Car si faire se peut, soient deux portions de cercles semblables, & inegales ABC & ADC, sur la ligne droite AC, & de même costé. Il est evident qu'elles s'entrecouperont seulement és points A & C, puis que par la 10. pr. de ce livre un cercle ne coupe pas un autre cercle en plus de deux points; & partant la circonference d'une portion sera toute dehors la circonference de l'autre. Soit donc menée la ligne droite A B coupant les circonferences en D & B, & tirées les deux lignes droites BC & DC; par la definition des semblables portions, les deux angles ABC & ADC seront egaux, ce qui est absurde: car par la 16. pr. 1. l'angle exterieur ADC doit estre plus grand que l'opposé interieur B. Donc les deux portions ABC & ADC, estans semblables & inegales, ne se pouvoient mettre sur une même ligne droite AC, & de mesme part. Ce qu'il falloit demontrer.



SCHOLIE.

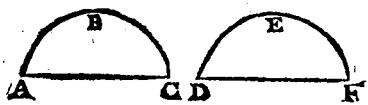
Encore qu'en cette 23. prop. & demonstration d'icelle les portions de cercles soient constituées de mesme part, si est-ce toutesfois que la prop. sera aussi veritable, si lesdites portions sont posées de diverse part; comme sont les portions ABC; AEC. Car si on conçoit que l'une d'icelles portions, comme AEC, soit, meüe à l'entour de la ligne droite AC, & vienne à être de même part que ABC, il aviendra toûjours la même absurdité que dessus, attendu qu'une portion ne conviendra point à l'autre, à cause de leur inegalité.

Davantage, il eſt évident, que ce qui eſt dit icy de deux portions conſtituez ſur une même ligne droite, ſe doit auſſi entendre de celles conſtituées ſur lignes droites egales: car l'une d'icelles lignes étant ſuperposée à l'autre, elle luy conviendra, & partant les deux portions ſeront lors poſées ſur une même ligne droite, ainſi que deſſus, &c.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Semblables portions de cercles étans conſtituées ſur lignes droites egales, ſont egales entr'elles.

Soient deux portions de cercles ſemblables A B C & D E F conſtituées ſur lignes droites egales AC, & DF Je dis qu'icelles portions ſont egales entr'elles.



Autrement, ſi elles eſtoient inegales il s'enſuivroit que deux portions ſemblables & inegales, pourroient eſtre poſées ſur lignes droites egales, ou bien ſur une meſme, contre la prop. precedente: donc les deux portions ABC & DEF conſtituées ſur lignes droites egales, ſeront egales; Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

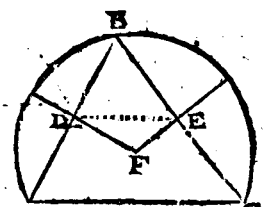
Il eſt aiſé de demontrer la converſe tant de cette prop. que de la precedente, c'eſt à ſçavoir que les egaux ſegmens de cercles conſtituez ſur lignes droites egales, ou ſur une meſme, ſont ſemblables. Car à cauſe de l'egalité deſdits ſegmens, ou portions de cercles, l'une conviendra à l'autre, & partant tous les angles conſtituez en icelles ſont egaux: Parquoy icelles portions ſeront ſemblables. Que ſi quelqu'un dit que leſdites portions ne conviennent entr'elles, il faudroit ou que l'une

tombast toute hors de l'autre, & elles ne seroient egales entr'elles, contre l'hypothese; ou bien que la circonference de l'une coupast la circonference de l'autre, & par ainsi un cercle en couperoit un autre à plus de deux points, contre la 10. *prop.* 3.

PROBL. 3. PROP. XXV.

La portion d'un cercle étant donnée, décrire le cercle duquel elle est portion.

Soit une portion de cercle ABC, de laquelle il faut trouver le centre pour achever le cercle d'icelle.



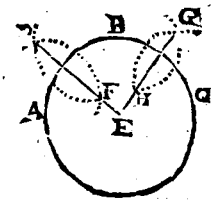
En la circonference d'icelle portion soient pris comme on voudra les trois points A, B, C, & apres avoir mené les deux lignes droites AB & BC, & icelles coupées en deux egalement en D & E par la 10. prop. 1. d'iceux points soient levées par la 11. prop. 1. les perpendiculaires DF, & EF, se rencontrans au point F: (or elles se doivent rencontrer, pour ce que si on menoit une ligne droite de D à E, comme DE, seroient faits deux angles EDF, DEF, moindres que deux droits. (Je dis que le point F est le centre cherché.

Car par le Corol. de la 1. prop. de ce livre le centre sera en la ligne DF: Il sera aussi en EF: ce sera donc au point F, qui leur est commun. Parquoy nous avons trouvé le centre du cercle, duquel le segment donné ABC est portion: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La pratique de cette prop. n'est differente à celle de la

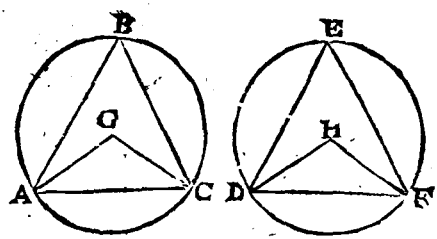
premiere, c'eſt à ſçavoir qu'ayant pris en la circonference les trois points A, B, C, il faut des points A & B, décrire d'un même intervalle deux arcs qui s'entrecoupent en D, F, & par iceux mener une ligne droite DFE : en apres, des points B & C, décrire encore d'un même intervalle deux autres arcs qui s'entrecoupent en G & H, par leſquels ſoit menée une ligne droite GHE, qui coupe la precedente DF en E, qui ſera le centre requis.



THEOR. 23. PROP. XXVI.

Aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent ſur circonferences egales, ſoit qu'ils s'apuyent êtans conſtituez aux centres, ou aux circonferences.

Soient les cercles egaux ABC & DEF, leſquels les centres ſont G & H, & à iceux ſoient conſtituez les angles egaux G, H : Item les angles B, E conſtituez aux circonferences, ſoient

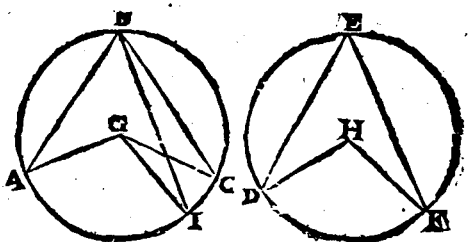


auſſi egaux. Je dis que les circonferences AC & DF, ſur leſquelles iceux angles s'apuyent, ſont egales.

Car d'autant que les cercles ſont egaux, les lignes tirées du centre à la circonference ſeront egales par la 1. def. de ce *livre*. Parquoy ayant tiré les deux lignes droites A C, DF, les deux triangles AGC, & DHF, auront deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, & l'angle G egal à l'angle H : & par la 4. prop. 1. la baſe AC ſera egale à la baſe D F. Pareillement l'angle B étant egal à l'angle E, la portion ABC ſera ſemblable à la portion DEF, par la 10. def. de ce livr. & par la 24. prop. elles ſeront egales ; & qui de cercles egaux ôte portions egales, ſçavoir ABC & DEF, le demeurant AC ſera egal au demeurant DF : ainſi les angles egaux s'apuyeront deſſus circonferences egales AC, DF. Donc aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent ſur circonferences egales, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

Que ſi les ſuſdits angles étoient inegaux, le plus grand s'apuyeroit ſur un plus grand arc que le moindre: Car aux cercles egaux ABC, DEF, ſoit l'angle AGC au



centre G, plus grand que l'angle DHF au centre H. Item l'angle ABC en la circonference, plus grand que l'angle DEF en la circonference. Ie dis que l'arc AC eſt plus grand que l'arc DF. Car ayant fait l'angle AGI egal à l'angle DHF, & l'angle AEI egal à l'angle DEF ; par ce qui a été demontré cy-deſſus, les arcs AI, DF ſeront egaux ; & partant AC ſera plus grand que DF.

Or ce

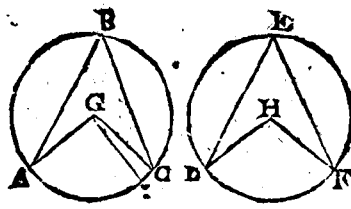
Or ce qu'Euclide dit des cercles egaux en cette proposition, & aux trois prochaines suivantes, se doit aussi entendre d'un même cercle; c'est à dire qu'en un même cercle, les angles egaux s'appuyent sur circonferences egales, &c. Car toujours la même demonstration qui se fera en deux ou plusieurs cercles egaux, aura aussi lieu en un même cercle.

THEOR. 24. PROP. XXVII.

Aux cercles egaux, les angles qui s'apuyent dessus circonferences egales, sont egaux entr'eux, soit qu'ils s'apuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.

Soient deux cercles egaux ABC & DEF, les centres desquels sont G & H, & sur les circonferences egales AC & DF, soient les angles ABC & DEF, tous deux en la circonference. Item AGC & DHF au centre : ie dis premierement qu'iceux angles AGC & DHF, seront egaux.

Autrement, l'un d'iceux angles sera plus grand que l'autre: Soit donc AGO plus grand que DHF, s'il est possible, & par la 23. pr. 1. sur AG soit fait l'angle AGI egal à DHF, & par la precedente prop. les circonferences AI & DF seront egales; ce qui est contre nôtre hypothese; car nous avons posé AC egale à DF. Il faudroit doncques que AC & AI fussent egales, contre la 8. com. sent. Donc l'angle AGC n'étoit point plus grand que l'angle DHF, & partant egal: ce qui estoit proposé.

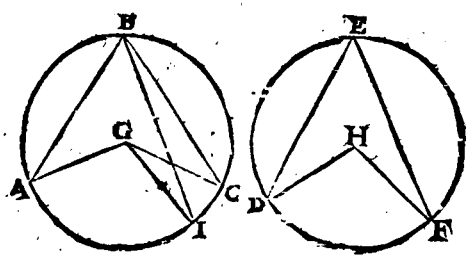


Or l'égalité des angles du centre estant prouvée, les angles de la circonference sont entendus egaux, puis qu'ils sont moitiez d'iceux par la 20. proposition de ce livre. Donc aux

cercles egaux les angles qui s'apuyent dessus circonferences egales, sont egaux, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

SCHOLIE.

Que si les arcs étoient inegaux, l'angle insistant sur le plus grand arc seroit plus grand que celuy du moindre. Comme en la figure du Scholie precedent, soit l'arc AC plus grand que l'arc DF : Je dis que l'angle AGC est plus grand que l'angle DHF, & l'angle ABC, plus grand



que l'angle DEF. Car ayant fait l'arc AI egal à l'arc DF, & tiré les lignes droites GI, BI; tant les angles AGI, DHF, que les angles ABI, DEF, seront egaux, comme il a esté demontré cy-dessus : & partant l'angle AGC sera plus grand que l'angle DHF, & l'angle ABC plus grand que l'angle DEF.

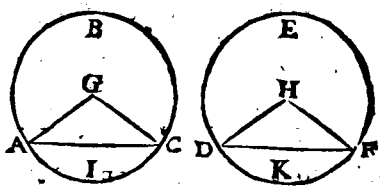
THEOR. 25. PROP. XXVIII.

Aux cercles egaux, les lignes droites egales prennent circōferences egales, sçavoir la plus grande à la plus grāde, & la plus petite à la plus petite.

Soient deux cercles egaux ABC & DEF, desquels les centres sont G & H, & dans ces cercles soient deux lignes droites egales AC & DF : Je dis que les circonferences qu'elles coupent, sont egales, sçavoir la petite AIC à la petite DKF,

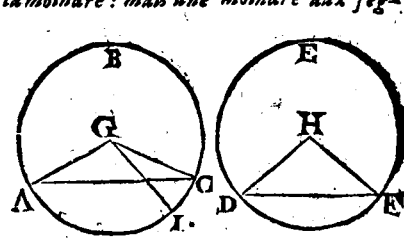
& la grande ABC à la grande DEF.

Qu'il ne soit ainsi ; des centres G & H, soient menées les lignes GA, GC, HD, HF, qui seront egales par la 1. def. de ce livre, estans les cercles egaux ; & la ligne droite AC estant egale à la ligne droite DF, les deux triangles AGC & DHF, auront les trois côtez egaux aux trois costez, chacun au sien: & par la 8. pr. 1. l'angle G sera egal à l'angle H, & par la 26. pr. dece livr. ils s'apuyeront dessus circonferences egales AIC, DKF; & qui de cercles egaux oste icelles circonferences egales, resteront les circonferences ABC DEF, aussi egales. Donc aux cercles egaux, les lignes droites egales prennent circonferences egales, &c. Ce qu'il falloit demontrer.



SCHOLIE.

Que si les lignes droites étoient inegales, la plus grande prendroit aux segmens mineurs une plus grande circonference que la mindre : mais une moindre aux segmens majeurs. Comme aux cercles egaux ABC, DEF, *desquels les centres sont* G *&* H, *soit la ligne droite* AC *plus grande que la ligne droite* DF : *Ie dis que la circonference* AC *moindre que le demy cercle est plus grande que la circonference* DF : *& que la circōference* ABC *est moindre que la periphere* DEF. *Car étās tirées les lignes droites* AG, GC, DH *&* HF : *les costez* AG, GC *du triangle* AGC, *seront egaux aux costez* DH, HF *du triangle* DHF : *& la base* AC *est posée plus grande que la base*



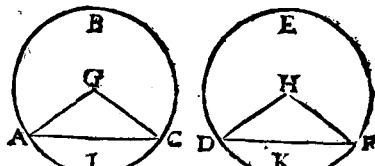
DF : *Donc l'angle* AGC *sera plus grand que l'angle* DHF *par la 25. pr. 1. Parquoy soit fait l'angle* AGI *egal à l'angle DHF par la 23. prop. 1. & par la 26. pr. 3. l'arc* AI *sera egal à l'arc DF, & partant la circonferenee* AIC *sera plus grande que la circonference DF, & consequemment le reste* ABC *sera moindre que le reste* DEF.

THEOR. 26. PROP. XXIX.

Aux cercles egaux, les circonferences egales, soûtendent lignes droites egales.

Es cercles egaux ABC & DEF, desquels les centres sont G & H, soient les circonferences ABC, DEF egales : item les circonferences AIC, DKF aussi egales & soustenduës des lignes droites AC & DF. Je dis qu'icelles lignes soustendantes sont egales.

Qu'ainsi ne soit : des centres G & H soient menées les lignes droites GA, GC, HD, HF. Or d'autant que l'on pose les circonferences AIC, DKF egales, les angles G & H qui s'apuyent dessus icelles circonferences, seront egaux par la 27. proposition de ce livre : pareillement les côtez GA & GC, étans egaux aux côtez HD & HF par 1. d. 3. la base AC sera egale à la base DF par la 4. proposition 1. Donc aux cercles egaux les circonferences, &c. Ce qui estoit à prouver.



SCHOLIE.

Mais si les circonferences étoient inégales, la plus grande seroit soustenduë d'une plus grande ligne que la moindre, lesdites circonferences étans moindres que le

demy cercle : Car ſi elles étoient plus grandes, la moindre d'icelles circonf. ſeroit ſouſtenduë d'une plus grande ligne que la plus grande. Comme aux cercles egaux ABC, DEF, deſquels les centres ſont G & H, ſoient les circonferences AC, DF, chacune moindre que le demy cercle, & ſoit AC plus grande que DF, & partant ABC moindre que DEF : Ie dis que la ligne droite AC eſt plus grande que la ligne droite DF. Car étans tirées les lignes droites AG, GC, DH, & HF, l'angle AGC ſera plus grand que l'angle DHF par le Scholie de la 27. prop. de ce livre ; & puis que les côtez AG, GC, du triangle AGC ſont egaux aux côtez DH, HF du triangle DHF, par la 24. prop. 1. la baſe AC ſera plus grand que la baſe DF.

Clavius, apres Commandin, demontre en ce lieu les quatre Theoremes ſuivans.

1. Les cercles, deſquels les lignes droites egales retranchent ſemblables circonferences, ſont egaux.

Soient deux cercles ABC, DEF, deſquels les lignes droites egales AC, DF, coupent ſemblables circonferences ABC, DEF : Ie dis qu'iceux cercles ſont egaux. Car ſi les ſegmens ABC, DEF ſont ſemblables, les ſegmens reſtans AIC, DKF, ſeront auſſi ſemblables, comme nous avons demontré au Scholie de la 22. prop. de ce livre. Derechef, pource que ſur les lignes droites egales AC, DF, ſont conſtituez les ſemblables ſegmens ABC, DEF, ils ſeront egaux par la 24. p. 3. Par meſme raiſon ſeront auſſi egaux les ſemblables ſegmens AIC, DKF. Donc les cercles entiers ABC, DEF, ſeront egaux : Ce qui étoit propoſé.

2. Des cercles inegaux, les lignes droites egales coupent circonferences diſſemblables.

En la meſme figure precedente les lignes droites AC, DF ſoient poſées egales, & les cercles ABC, DEF, inegaux. Ie dis que les circonferences ABC, DEF, ſont diſſemblables. Car ſi elles étoient ſemblables, les cercles ſeroient egaux, comme nous avons demontré cy-deſſus, contre l'hypotheſe. Donc les circonferences ABC, DEF, ſont diſſemblables. Par meſme raiſon les circonferences AIC, DKF, ſeront auſſi diſſemblables. Ce qu'il falloit demontrer.

3. Les lignes droites, qui prennent circonferences semblables de cercles inegaux, ſont inegales.

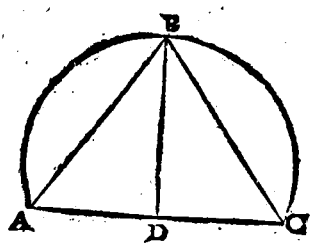
En la meſme figure ſoient poſez les cercles inegaux, & les circonferences ABC, DEF ſemblables : Ie dis que les lignes droites AC, DF ſont inegales. Car ſi elles étoient egales, les cercles ſeroient egaux par le premier Theor. cy-deſſus, contre l'hypoth. icelles lignes droites AC, DF, ſont donc inegales.

4. Les lignes droites, qui de quelconques cercles prennent circonferences ſemblables & inegales, ſont inegales.

En la meſme figure, ſoient poſées les circonferences ABC, DEF ſemblables & inegales. Ie dis que les lignes droites AC, DF ſont inegales. Car les cercles ſont ou egaux, ou inegaux : Soient premierement egaux. Si donc les lignes droites AC, DF, ſont dites egales, par la 28. prop. 3. les circonferences ABC, DEF, ſeront egales : ce qui eſt contre l'hypoth. Icelles lignes droites AC, DF, ne ſont donc pas egales. Soient puis apres les cercles inegaux. Donc les lignes droites AC, DF, étans les circonferences ABC, DEF, ſemblables, ſeront inegales, comme il a été demontré au precedent Theor. En la meſme maniere nous demontrerons les lignes droites AC, DF eſtre inegales, ſi les circonferences AIC, DKF, ſont poſées ſemblables & inegales.

PROBL. 4. PROP. XXX.

Couper une circonference donnée en deux egalement.



Soit la circonference donnée ABC, laquelle il faut couper en deux egalement.

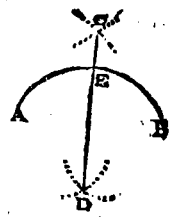
Soit menée la ligne droite AC, laquelle ſoit coupée en deux egalement au point D, duquel point ſoit élevée la perpendiculaire DB par la 11. prop. 1. qui rencon-

tre la circonference en B. Je dis que la circonference ABC est coupée en deux également en B.

Qu'il ne soit ainsi : soient menées les lignes droites AB & BC. D'autant que les deux costez AD & DB du triangle ADB, sont egaux aux deux costez C D & D B du triangle CDB, chacun au sien, & les deux angles au point D egaux: par la 4. p. 1. la base AB sera egale à la base BC, & par la 28. prop. de ce livre les circonferences A B & B C seront egales. Nous avons donc coupé la circonference donnée en deux également. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

La pratique de cette proposition est fort aisée, car il n'y a qu'à décrire deux arcs de cercles de chaque extremité de la circonference donnée A & B, qui s'entrecoupent és points C & D, desquels points étant menée une ligne droite C D, elle coupera la circonference donnée AB en deux également au point E.



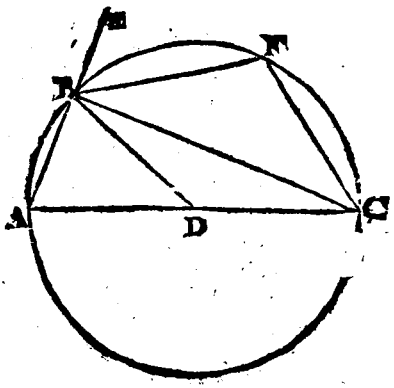
THEOR. 27. PROP. XXXI.

Au cercle, l'angle qui est au demy cercle est droit: & celuy qui est en la plus grande portion, est plus petit qu'un droit ; mais celuy qui est en la plus petite, est plus grand qu'un droit. Et davantage, l'angle de la plus grande portion, est plus grand qu'un droit : mais l'angle de la plus petite portion est moindre qu'un droit.

Au cercle ABC, duquel D est le centre, & AC le diametre soit constitué au demy cercle ABC, l'angle rectiligne ABC ; & en la plus grande portion B A C, l'angle B A C : mais en la moindre portion B F C, l'angle CFB. Je dis en premier lieu

que l'angle ABC au demy cercle, eſt droit.

Car apres avoir mené la ligne BD, & continué AB juſques à E : il eſt evident que les triangles ABD & CBD ſont Iſoſceles, & par la 5. p. 1. ils auront les angles ſur la baſe egaux, ſçavoir BAD à ABD, & CBD à BCD : & partant les deux enſemble ABD, CBD, ſeront egaux aux deux enſemble BAD & BCD. Mais par la 32. p. 1. l'exterieur CBE eſt egal à iceux deux angles BAD, BCD ; & partant les deux au point B, faiſant le ſeul ABC, ſeront auſſi egaux à l'exterieur CBE, & par la 10. def. 1. les deux angles ABC & CBE, ſeront deux droits.



Ie dis en ſecond lieu, que l'angle BAC, qui eſt en la plus grande portion CAB, eſt plus petit qu'un droit : ce qui eſt aiſé à prouver par la 32. pr. 1. d'autant qu'au triangle BAC, l'angle ABC, étant droit, les deux autres enſemble ne vaudront qu'un droit ; & partant le ſeul angle BAC eſt plus petit qu'un angle droit, & ainſi des autres.

Ie dis tiercement, que l'angle BFC, qui eſt en la petite portion CFB, eſt plus grand qu'un droit ; car par la 22. p. de ce livre la figure de quatre coſtez ABFC inſcrite au cercle, a les deux angles oppoſez A & F, egaux à deux droits. Mais nous avons prouvé A eſtre plus petit qu'un droit, par conſequent F ſera plus grand.

Ie dis en quatriéme lieu, que l'angle de la plus grande portion, ſçavoir CBA, compris de la ligne droite BC, & de la periphere BAC, eſt plus grand qu'un angle droit : ce qui

eſt evident ; car l'angle droit rectiligne ABC n'eſt que partie d'iceluy angle mixte CBA.

Finalement, je dis que l'angle de la petite portion, compris de la ligne droite BC & de la circonference BFC, c'eſt à dire l'angle mixte CBF eſt moindre qu'un droit, car iceluy n'eſt que partie de l'angle droit CBE. Donc au cercle, l'angle qui eſt au demy cercle eſt droit, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE.

De ce que deſſus, eſt manifeſte qu'un angle d'un triangle eſtant egal aux deux autres, eſt droit.

SCHOLIE.

La converſe de cette prop. eſt manifeſtement vraye, c'eſt à ſçavoir que

Le ſegment de cerele, auquel eſt conſtitué un angle droit, eſt demy cercle ; & celuy auquel eſt un angle aigu, eſt ſegment majeur : mais celuy auquel eſt un angle obtus, eſt ſegment mineur : Et le ſegment duquel l'angle eſt plus grand qu'un droit eſt plus grand que le demy cercle ; mais celuy duquel l'angle eſt moindre que le droit, eſt ou demy cercle, ou moindre que le demy cercle.

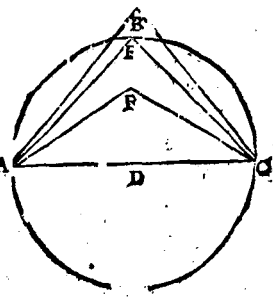
Car l'angle étant droit, ſi le ſegment n'eſt pas un demy cercle, il ſera ou plus grand, & ainſi l'angle ſera aigu ; ou moindre, & ainſi l'angle ſera obtus : contre l'hypotheſe. Derechef, l'angle étant aigu, ſi le ſegment n'eſt pas plus grand que le demy cercle, il ſera ou demy cercle, & ainſi l'angle en iceluy ſera droit : ou moindre que le demy cercle, & ainſi l'angle en iceluy ſera obtus. Ce qui eſt auſſi contre l'hypotheſe. Finalement, l'angle étant obtus, ſi le ſegment n'eſt moindre que le demy cercle, il ſera ou demy cercle, & ainſi l'angle en iceluy ſera droit ; ou plus grand, & ainſi l'angle ſera aigu : Ce qui eſt ſemblablement contre l'hypotheſe. Davantage, quand l'angle du ſegment eſt plus grand qu'un droit, ſi le ſegment n'eſt pas plus grand que le demy cercle, il ſera ou demy cercle, ou moindre que le demy cercle, & ainſi l'angle d'iceluy ſera moindre qu'un droit, contre la poſition. Et quand l'angle du ſegment eſt moindre qu'un

droit, ſi le ſegment n'eſt pas demy cercle, ou moindre que le demy cercle, il ſera plus grand, & par ainſi l'angle d'iceluy ſera pareillement plus grand que le droit: Ce qui eſt contre l'hypotheſe.

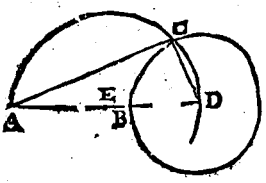
Clavius demontre en ce lieu le theoreme ſuivant.

Si le coſté oppoſé à l'angle droit d'un triangle rectangle eſt coupé en deux également, & du point de la ſection eſt décrit un cercle de l'intervale de la moitié d'iceluy coſté; iceluy cercle paſſera par l'angle droit du triangle.

Au triangle rectangle ABC, le coſté AC oppoſé à l'angle droit B, ſoit coupé en deux egalement au point D, duquel & de l'interuale DA, ou DC, ſoit décrit le cercle AEC, lequel je dis paſſer par B. Car s'il paſſoit au deſſus de B, ou au deſſous, étans tirées les lignes droites AE, CE, tellement qu'elles ne coupent les lignes droites AB, BC, ains qu'elles tombent au deçà d'icelles, ou au delà: l'angle AEC au demy cercle ſera droit par la 31. p. 3. & conſequemment les angles B & E ſeront egaux, étans droits: ce qui eſt abſurde, vû que l'angle E par la 21. prop. 1. eſt neceſſairement ou plus grand, ou plus petit que l'angle B. Le cercle AEC paſſera donc par le point de l'angle droit B. Ce qui étoit propoſé.



Or de la demonſtration de la premiere partie de cette pr. nous colligeons un facile moyen pour d'un point donné hors un cercle mener une, ou deux lignes droites qui touchent iceluy cercle, ce qui ſe fait ainſi. Soit

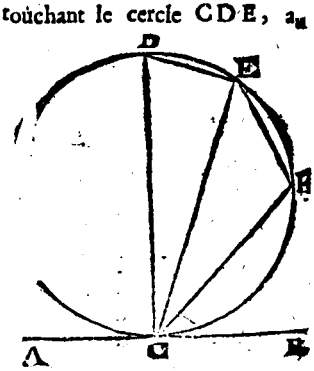


donné le point A hors du cercle BC, le centre duquel eſt D: & il faut mener de A une ligne droite, qui touche iceluy cercle donné. Ayant mené la ligne AD, ſoit coupée icelle en deux egalement en E *par la* 10. *p.* 1. *& de* E *comme centre, & de l'intervale* EA *ſoit décrit un cercle ACD qui coupe le donné en* C, *auquel point* C *ſoit menée la ligne droite AC, & icelle touchera le cercle donné en* C. *Car étant tirée la ligne droite* CD, *l'angle ACD au demy cercle ſera droit par ladite* 31. *pr.* 3. *& partant la ligne droite AC, touchera le cercle BC en* C *par le Cor. de la* 16. *p.* 3. *Et ſi du même point A, on vouloit encore tirer une autre ligne qui touche ſemblablement ledit cercle BC, il n'y auroit qu'à décrire le cercle entier ACD, & il couperoit encore la circonference BC à un autre point au deſſous de AD, &c.*

THEOR. 28. PROP. XXXII.

Si quelque ligne droite touche le cercle, & de l'atouchement on mene une autre ligne droite coupant le cercle, les angles qu'elle fait à la touchante ſont egaux à ceux qui ſont aux ſegmens alternes du cercle.

Soit la ligne droite AB touchant le cercle CDE, au point C, & d'iceluy point ſoit menée la ligne droite CE, coupant le cercle en deux portions CDE, CFE. Je dis que l'angle ECB, eſt egal à tout angle qui peut être fait en la portion alterne CDE, & que l'angle ECA eſt auſſi egal à tout angle qui peut être fait en la portion alterne CFE.



Qu'il ne ſoit ainſi, apres avoir mené par le centre

le diametre CD, soient menées les lignes droites DE, EF, FC. Maintenant par la prop. precedente l angle DEC dans le demy cercle est droit, & par la 32. p. 1. les deux autres D & ECD sont egaux à un droit, c'est à dire à DCB, lequel est droit par la 18. prop. de ce livre, desquels si on oste l'angle commun ECD, le demeurant ECB sera egal au demeurant D. Pareillement par la 22. prop. la figure de quatre costez inscrite au cercle CFED, aura les angles opposez F & D, egaux à deux droits: c'est à dire aux deux ECA, ECB, desquels si on oste choses egales, c'est à sçavoir les angles egaux D & ECB, les demeurans F & ECA seront egaux.

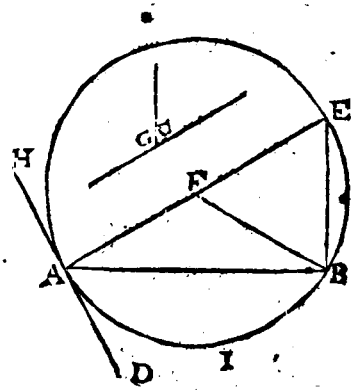
Que si la ligne coupant le cercle étoit le diametre d'iceluy, tous les angles qui se feroient tant en l'un qu'en l'autre demy cercle, seroient droits par la prop. prec. & partant appert ce qui est proposé. Si donc quelque ligne droite touche le cercle, &c. Ce qu'il faloit prouver.

PROBL. 5. PROP. XXXIII.

Dessus une ligne droite donnée, décrire une portion de cercle capable d'un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnée AB, & l'angle rectiligne C; il faut sur icelle ligne décrire une portion de cercle comprenant un angle egal à l'angle donné C.

Soit construit sur icelle ligne AB. & à l'extremité A, l'angle BAD egal à l'angle donné C par la 23. pr. 1. & au point A soit levée AE perpendiculaire à AD; puis sur la ligne AB & au point B, soit fait l'angle ABF egal à l'angle BAE par la 23. prop. 1. tirant la ligne BF jusques à ce qu'elle rencontre la perpendiculaire AE au point



F : donc par la 6. pr. 1. les costez FA, FB, seront egaux: Partant le cercle décrit du centre F & de l'intervale FA, passera aussi par le point B : & apres avoir mené la ligne droite BE. Je dis que l'angle E, qui est en la portion AEB est egal à l'angle donné C. Car d'autant que la ligne droite AE passe par le centre F, & qu'à icelle AE, la ligne DA est perpendiculaire ; par le Corol. de la 16. prop. de ce livre le cercle touchera icelle DA en A. Parquoy par la preceden. prop. l'angle BAD, qui par la construction est egal à l'angle C, sera egal à l'angle E, décrit dans la portion alterne AEB ; par consequent iceluy angle E sera egal à l'angle C. Nous avons donc décrit une portion de cercle sur la ligne donnée AB, capable d'un angle egal à un angle donné C.

Que si l'angle donné eut esté obtus, comme G, il eût fallu construire l'angle BAH egal à iceluy, & chercher le centre F comme dessus, pour décrire le cercle AEBI, & par la prop. precedente la portion mineure AIB eust compris un angle egal à l'angle donné G.

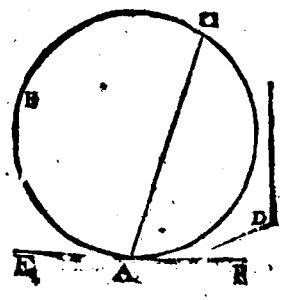
Que si l'angle donné eût esté droit, il n'eust fallu que décrire un demy cercle sur la ligne donnée, attendu que tout angle fait au demy cercle est droit par la 31. pr. 3. Or nous avons donc construit sur la ligne donnée AB, un segment de cercle, &c. Ce qu'il faloit faire.

PROBL. 6. PROP. XXXIV.

D'un cercle donné, ôter une portion capable d'un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit le cercle donné ABC ; duquel il faut ôter une portion capable d'un angle rectiligne egal à l'angle donné D.

Soit menée la ligne droite EF touchant le cercle en A : puis par la 23. prop. 1. soit fait sur icelle ligne, & au point A, l'angle rectiligne FAC egal au donné D, faisant que la ligne droite AC coupe le cercle en deux portions. Je dis que tout angle qui sera fait en la portion alterne ABC sera egal au donné D. Car il sera egal à l'angle FAC par la 32.

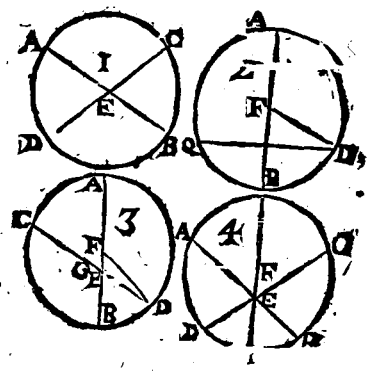


prop. de ce livre, lequel est egal à D par la construction. Nous avons donc du cercle donné ABC coupé une portion, &c. Ce qu'il faloit faire.

THEOR. 29. PROP. XXXV.

Si dans un cercle, deux lignes droites se coupent l'une l'autre; le rectangle contenu des deux parties de l'une, est egal au rectangle compris des deux parties de l'autre.

Soient deux lignes droites AB, CD dans le cercle ACBD s'entrecoupans en E. Je dis que le rectangle compris des deux parties AE & EB, est egal au rectangle contenu des deux parties CE & ED.



Or les lignes qui se coupent dans le cercle, ou elles passent toutes deux par le centre, ou bien l'une d'icelles seulement, ou ny l'une ny l'autre. Que si elles passoient toutes deux par le centre comme en la premiere figure, les quatre parties seront egales; & par ainsi la proposition est evidente.

Que si la seule AB, passe par le centre F, & divise DC en deux egalement comme en la seconde figure, elle la divisera aussi à droits angles, par la 3. prop. de ce livre. Et apres avoir mené FD, il est évident par la 7. pr. 2. que le rectangle de AE, & EB avec le quarré de EF, sera egal au quarré de FB, ou FD, (car la ligne AB est coupée en deux egalement au point F, & en deux inegalement en E) & par la 47. prop. 1. le quarré de FD estant egal aux deux quarrez de FE & ED, en ostant le

quarré commun de FE, le demeurant rectangle de AE & EB, se trouvera egal au quarré de ED, c'est à dire au rectangle de CE & ED, puis que CD est coupée en deux egalement en E.

Que si la ligne AB passant par le centre F (comme en la troisiéme figure) divise inegalement CD, ne passant point par le centre, il s'ensuivra la mesme chose. Car apres avoir mené la perpendiculaire FG, & la ligne droite FD: pour autant que AB est coupée en deux egalement en F, & en deux inegalement en E, le rectangle de AE & EB, avec le quarré de EF, sera egal au quarré de FB, ou de son egale FD par la 5. prop. 2. Mais le quarré de FE est egal aux deux de FG & GE par la 47. pr. 1. Pareillement le quarré de FD, est egal aux deux de FG & GD par la 47. prop. Donc aussi le rectangle de AE & EB, avec les deux quarrez de FG & GE, sera egal aux deux quarrez de FG & GD: & partant en ostant le quarré commun de FG le demeurant quarré de GD, sera egal au rectangle de AE & EB, & quarré de GE. Mais le mesme quarré de GD est aussi egal au rectangle de CE & ED, avec le quarré de GE; par la 5. prop. 2. puis que CD est coupée en deux egalement en G, par la perpendiculaire FG & en deux inegalement en E. Parquoy iceluy rectangle de CE & ED avec le quarré de GE sera egal au rectangle de AE & EB avec le quarré de GE: en ôtant donc le quarré commun de GE, le rectangle de AE, EB, se trouvera egal au rectangle de CE & ED.

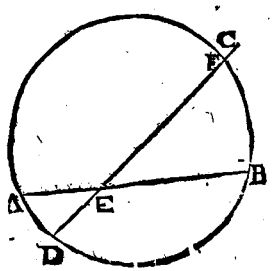
Que si ny l'une ny l'autre des deux lignes ne passe par le centre F, (comme en la 4. figure) il s'ensuivra le mesme: car si on mene le diametre HI, passant par le point commun E de la 4. figure, le rectangle de IE & EH, sera egal au rectangle de CE & ED, comme cy-dessus a esté dit; & par mesme raison il sera aussi egal au rectangle de AE & EB; & par la 1. comm. sent. les deux rectangles de AE, EB; Item de CE, ED, seront egaux. Si donc dans un cercle, deux lignes droites, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Nous convertirons cette 35. prop. ainsi.

Si deux lignes droites s'entrecoupent, tellement que le rectangle compris des segmens de l'une soit egal au rectangle contenu sous les segmens de l'autre, le cercle décrit par trois des points extrémes d'icelles lignes quels qu'ils soient, passera aussi par le 4 point.

Que les lignes droites AB, CD s'entrecoupent en E, & que le rectangle compris sous AE, EB soit egal au rectangle compris des parties CE, ED. Je dis que les quatre points A, D, B, C, tombent en la circonference d'un cercle, c'est à dire qu'estant décrit un cercle passant par les trois points A, D, B, il passera necessairement par l'autre point C. Car s'il n'y passe, il passera ou au dela de C, ou au deçà, comme par le point F. D'autant que par la 35. proposition 3. le rectangle compris sous FE, ED est egal au rectangle compris de AE, EB, & que le rectangle contenu sous CE, ED est aussi posé egal au même rectangle de AE, EB; les rectangles compris sous CE, ED, & sous FE, ED, seront egaux, la partie au tout: ce qui est absurde. Par même raison le cercle ne passera pas au delà du point C. Donc le cercle décrit par des trois points A, D, B, passera par le quatriéme point C. Ce qu'il falloit demontrer.



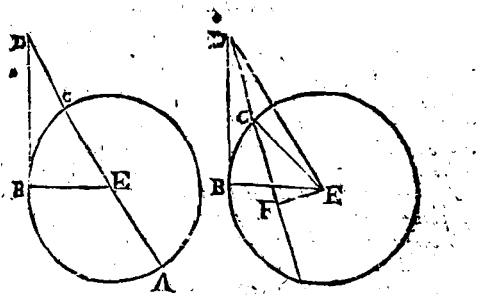
THEOR. 30. PROP. XXXVI.

Si dehors le cercle on prend quelque point, & d'iceluy vers le cercle tombent deux lignes droites, l'une desquelles coupent le cercle, & l'autre le touche; le rectangle contenu de toute la coupante, & de sa partie prise dehors entre le point & la circonference convexe, est egal au quarré de la touchante.

Hors le cercle ABC soit pris le point D, duquel soit menée la ligne DA, coupant le cercle en C, & la ligne DB touchant iceluy cercle en B. Je dis que le rectangle de la toute AD & de la partie CD, prise entre le point donné & le cercle, est egal au quarré de la touchante BD.

Premierement

Premierement que la ligne AD passe par le centre E, com-



me en la premiere figure, & d'icelluy centre E au point d'attouchement B, soit menée la ligne EB; laquelle par la 18. pr. de ce livre sera perpendiculaire à icelle touchante BD: & pour autant que la ligne AC est coupée en deux egalement au point E, & à icelle est ajoutée directement CD, le rectangle de la totale AD, & de sa partie CD avec le quarré de CE; ou BE son egale, est egal au quarré de BD par la 6. pr. 2. ou aux deux de DB & BE par la 47. pr. 1. Que si on ôte le quarré commun de BE, le demeurant quarré de BD, sera egal au demeurant rectangle de AD & CD, par la 2. com. sent.

Que si la ligne AD ne passe par le centre du cercle proposé, comme en la seconde figure, il faudra demontrer en cette sorte: du centre E soient menées les lignes EB, EC, à BD, & la perpendiculaire EF, laquelle coupera AC en deux egalement par la 3. prop. de ce livre. Et par la 6. pr. 2. comme cy-dessus, le rectangle de AD & CD, avec le quarré de CF, sera egal au quarré de DF, ausquelles choses egales si on ajoute le quarré commun de EF, le rectangle de AD & DC, avec les deux quarrez de CF & FE, ou le seul de CE par la 47. pr. 1. sera egal aux deux quarrez de DF & FE, ou au seul de DE par la 47. pr. 1. ou aux deux de DB & BE par lamême 47. pr. 1. Que si on oste les quarrez egaux de CE & BE, les demeurans quarré de DB, & le rectangle de AD & CD, seront egaux. Parquoy si hors le cercle on prend quelque point, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE.

Par ces choſes eſt manifeſte, que ſi d'un point pris hors le cercle, ſont tirées pluſieurs lignes droites coupant le cercle; les rectangles compris ſous chacune d'icelles & ſa partie exterieure, ſeront egaux entr'eux: pource que chacun de ces rectangles-là, ſera egal au quarré de la ligne touchante.

Appert auſſi que deux lignes droites tirées d'un meſme point, & touchant le cercle, ſont egales entr'elles: puis que le quarré de chacune d'icelles ſera egal au rectangle de la ligne tirée du meſme point, & coupant le cercle, & de la partie exterieure d'icelle.

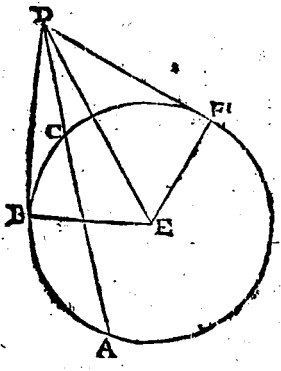
Eſt auſſi evident que d'un meſme point pris hors le cercle, peuvent être ſeulement tirées deux lignes droites qui touchent le cercle: Car il faudroit qu'elles fuſſent toutes egales entr'elles: & partant du point D pourroient être menées plus de deux lignes droites egales de part & d'autre de DE, contre la 8. prop. de ce troiſiéme livre.

THEOR. 31. PROP. XXXVII.

Si dehors le cercle on prend quelque point, & d'iceluy point tombent deux lignes droites au cercle, l'une deſquelles coupe le cercle, & l'autre l'atteint: Si le rectangle compris de toute la coupante, & de la partie priſe entre le point & la circonference convexe, eſt egal au quarré de celle qui atteint; celle qui atteint touchera le cercle.

Hors le cercle A B C ſoit pris le point D, & d'iceluy ſoit menée la ligne droite D A qui coupe le cercle au point C, & la ligne DB qui atteint le cercle au point B: & ſoit le rectangle de la toute A D & de la partie CD, egal au quarré de DB. Je dis que D B touche le cercle en B.

Car du point D, étant menée la ligne DF touchant le cercle au point F, & du centre E les lignes EB, ED, EF, par la proposition precedente, le quarré de DF sera egal au rectangle de AD & CD. Mais par l'hypotheſe le quarré de DB, eſt auſſi egal à iceluy rectangle: & partant les quarrez, & les lignes DF & BD, ſeront egales. Item EF & EB, ſont auſſi egales par la def. du cercle, & ED à ſoy-même: ainſi les deux triangles DBE & DFE, ayans les trois côtez egaux aux trois coſtez, chacun au ſien, les angles B & F, ſeront egaux par la 8. p. 1. & F étant droit par la 18. prop. de ce livre, auſſi B ſera droit; & par le Cor. de la 16. prop. 3. la ligne DB touchera le cercle. Parquoy ſi dehors le cercle on prend quelque point, &c. Ce qu'il faloit prouver.



Fin du troiſiéme Element.

ELEMENT QUATRIE'ME.

DEFINITIONS.

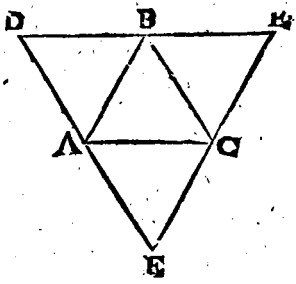
UNE figure rectiligne se dit être inscrite en une figure rectiligne, lors qu'un chacun des angles de la figure inscrite, touche un chacun costé de la figure en laquelle elle est inscrite.

2. Semblablement aussi une figure se dit être circonscrite à une figure, quand un chacun côté de la circonscrite touche un chacun angle de l'inscrite.

Ainsi le triangle A B C, *duquel chaque angle touche un chacun costé du triangle* D E F *est dit estre inscrit en iceluy triangle* D E F. *Et au contraire, à cause que chaque costé d'iceluy trianole* D E F *touche chaque angle du triangle* A B C, *il est dit estre circonscrit à iceluy triangle* A B C.

Il faut entendre le mesme des inscripeions & circonscriptions des autres figures rectilignes; & jaçoit qu'el-

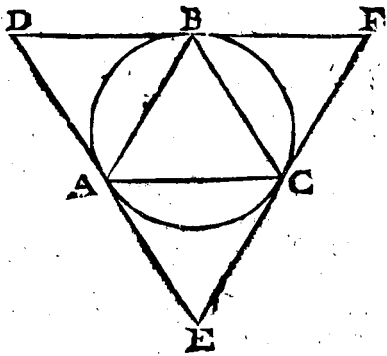
les soient proprement dites estre inscrites, ou circonscrites quand le nombre des costez de l'inscrite est egal au nombre des costez de la circonscrite, & le nombre des angles aussi egal: si est-ce toutesfois qu'il n'est pas du tout necessaire, veu que plusieurs Geometres ont enseigné à inscrire un quarré, un pentagone, &c. dedans un triangle, &c.



3. Mais une figure rectiligne se dit être inscrite au cercle, quand un chacun angle de la figure inscrite, touche la circonference du cercle.

4. Et une figure rectiligne se dit être circonscrite au cercle, quand un chacun des côtez de la figure circonscrite, touche la circonference du cercle.

Ainsi le triangle ABC sera dit être inscrit au cercle ABC, à cause que chaque angle d'iceluy triangle touche la circonference dudit cercle ABC. Mais le triangle DEF sera dit estre circonscrit au cercle



ABC, pource que chaque costé d'iceluy triangle DEF *touche la circonference dudit cercle és points ABC.*

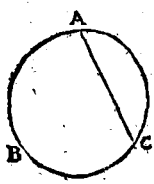
5. Semblablement aussi le cercle se dit être inscrit en une figure rectiligne, quand la circonference du cercle touche un chacun costé de la figure en laquelle il est inscrit.

6. Mais le cercle se dit être circonscrit à une figure, quand la circonference du cercle touche un chacun des angles d'icelle figure à l'entour de laquelle il est décrit.

Comme par exemple, en la figure prec. le cercle ABC est dit estre inscrit au triangle DEF, *à cause qu'il touche chaque costé d'iceluy triangle és points A, B, C: mais le même cercle ABC est dit estre circonscrit au triangle ABC, pource qu'il touche chaque angle d'iceluy triangle.*

7. Une ligne droite se dit être accommodée au cercle, quand les extremitez d'icelle sont en la circonference du cercle.

Ainsi la ligne droite AC sera dite estre accommodée au cercle ABC, à cause que les extremitez d'icelle ligne AC sont en la circonference dudit cercle.

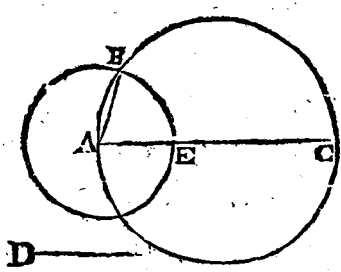


PROBL. 1. PROP. 1.

Au cercle donné, accommoder une ligne droite egale à une ligne droite donnée, laquelle ne soit pas plus grande que le diametre du cercle.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut accommoder une ligne droite egale à la ligne droite donnée D, qui n'eſt pas plus grande que le diametre d'iceluy cercle.

Soit mené le diametre AC, & ſi la ligne donnée eſt egale à iceluy diametre, on aura accommodé au cercle ABC la ligne AC egale à la donnée D. Mais ſi D eſt moindre que le diametre AC, d'iceluy ſoit retranchée la partie AE egale à ladite ligne D. En apres du centre A, & de l'intervale AE ſoit décrit le cercle BE coupant le cercle donné au point B, & ſoit menée la ligne droite AB : icelle ſera accommodée au cercle, & egale à D.



Car les extremitez d'icelle A B ſont en la circonference du cercle A B C étant menée de l'extremité du diametre A au point de l'interſection B. Mais par la def. du cercle les lignes droites A B & A E ſont egales, & par la conſtruction, icelle AE eſt egale à D : donc par la 1. com. ſent. AB & D ſeront egales entr'elles. Nous avons donc accommodé au cercle donné une ligne droite ; &c. Ce qu'il faloit faire.

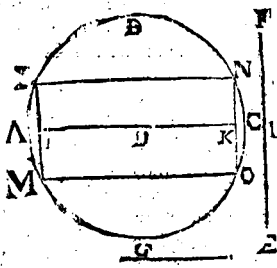
SCHOLIE.

Commandin adjoûte en cet endroit le probl. ſuivant.

En un cercle donné accommoder une ligne droite egale à une ligne droite donnée, qui ne ſoit pas plus grande que le diametre du cercle, & parallele à une autre ligne droite donnée.

Soit le cercle donné ABC, duquel le centre eſt D, auquel il faut accommoder une ligne droite egale à une donnée EF, qui n'eſt pas plus grande que le diametre du cercle, & laquelle ſoit parallele à la ligne droite donnée G. Sur le centre D ſoit tiré le diametre ADC parallele à la ligne donnée G. Que ſi EF eſt egale au diametre AC, ſera fait ce qui eſtoit requis : Mais ſi elle n'eſt egale à

iceluy diametre, soit icelle coupée en deux egalement au point H, & soit prise DI egale à EH, & DK egale à HF, afin que la toute IK soit egale à la toute EF : puis par les points I, K, soient tirées à angles droits LM, NO, & soit joint MO : Icelle MO accommodée au cercle sera egale à EF, & parallele à G. Car puis que LM, NO

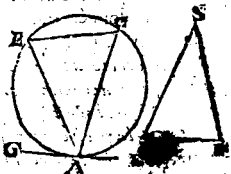


sont egalement distantes du centre D, elles seront egales entr'elles par la 14. pr. 3. & par la 3. prop. 3. elles seront coupées en deux egalement en I & K, étans coupée à angles droits par le diametre AC : & partant IM, KO sont egales entr'elles : & pource qu'elles sont aussi paralleles par la 28. pr. 1. semblablement IK, MO seront egales & paralleles par la 33. pr. 1. Parquoy veu que IK est egale à EF & parallele à G, aussi MO sera egale à icelle EF, & parallele à G par la 30. pr. 1. Par même raison, si on tire LN, elle sera egale à EF, & parallele à G. Donc au cercle ABC, est accommodée la ligne droite MO, ou LN, egale à EF & parallele à G. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 1. PROP. II.

Dans un cercle donné, inscrire un triangle equiangle à un triangle donné.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inscrire un triangle equiangle au donné DSF.



Soit menée la ligne droite GH, qui touche le cercle au point A, auquel point soient faits les deux angles GAB egal à l'angle D, & HAC egal à l'angle F, par la 23. pr. 1. tirant les lignes AB, AC, iusques à ce qu'elles rencontrent la circonference en B & C : puis soit menée BC. Je dis

que le triangle inscrit ABC est equiangle au donné DSF.

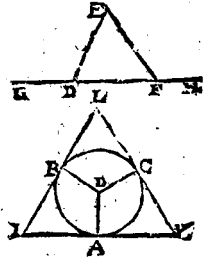
Car puis que la ligne GH touche le cercle, & la ligne AB le coupe en deux portions, l'angle C en la portion BCA sera egal à l'angle de l'atouchement GAB, & par consequent à l'angle D son egal par la 32. pr. 3. & par la même raison, la ligne AC coupant le cercle, l'angle B sera aussi egal à l'angle F, & par la 32. pr. 1. le troisiéme angle A sera aussi egal à l'angle S: & par consequent les triangles DSF, BAC seront equiangles. Au cercle donné nous avons donc décrit un triangle equiangle à un triangle donné. Ce qu'il faloit faire.

PROBL. 3. PROP. III.

A l'entour d'un cercle donné, décrire un triangle equiangle à un triangle donné.

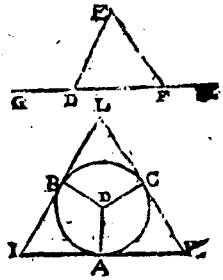
Soit le cercle donné ABC, à l'entour duquel il faut décrire un triangle equiangle au triangle donné DEF.

Soit prolongé le costé DF de part & d'autre jusques en G & H, & du centre D soit menée comme on voudra la ligne DA, sur laquelle & au point D, soient construits les deux angles ADB egal à EDG, & ADC egal à l'angle HFE par la 23. pr. 1. & aux trois lignes DA, DB, DC, soient menées les trois lignes perpendiculaires IK, IL, KL, lesquelles toucheront le cercle és points A, B, C, par le Corol. de la 16. pr. 3. & icelles se rencontrans aux trois points I, K, L, feront le triangle IKL, lequel ie dis estre le triangle demandé.



Car il apert deja qu'il est circonscrit au cercle; puis que tous les costez d'iceluy le touchent és points A, B, C. Et d'autant que toute figure de quatre costez à les quatre angles egaux à quatre angles droits (comme nous avons demontré à la 32. pr. 1.) le trapeze ADBI aura les quatre angles egaux à quatre

droits. Mais les deux A & B estans droits par la construction, les deux autres D & I, seront egaux à deux droits, c'est à dire egaux aux deux GDE & FDE, qui sont egaux à deux angles droits par la 13. proposition 1. & par la construction ADB est egal à GDE : donc l'angle I sera egal à l'angle EDF. Par mesme discours l'angle K e trouvera egal à l'angle DFE, Et par la 32. pr. 1. le troisiéme L sera egal au troisiéme E : ainsi le triangle circonscrit IKL sera equiangle au triangle donné DEF : Parquoy nous avons fait ce qui estoit requis.

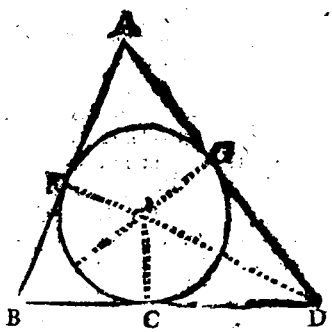


PROBL. 4. PROP. IV.

Dans un triangle donné, décrire un cercle.

Soit le triangle donné, ABC, dans lequel il faut décrire un cercle.

Par la 9. prop. 1. les deux angles B & C soient coupez en deux egalement par les deux lignes BD & CD, se rencontrans au point D : Item d'iceluy point de rencontre D, soient menées les trois perpendiculaires DE, DF, DG, par la 12. pr. 1. & du centre D, & interval-le DE soit décrit le cercle EFG. Je dis qu'iceluy cercle est inscrit au triangle donné ABC.



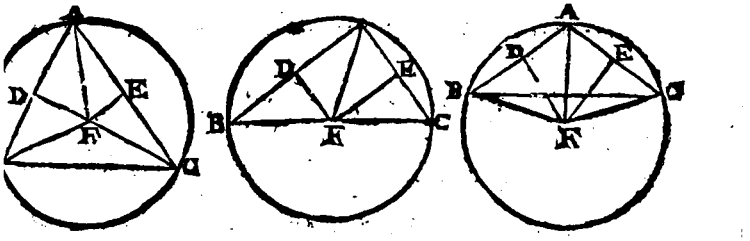
Car d'autant que l'angle DEB eſt droit, il ſera egal à l'angle DFB, qui eſt pareillemẽt droit, & le total B étant coupé en deux egalement, les deux DEB & DBE, ſeront egaux aux deux DFB & FBD, &, le coſté DB eſtant cõmun, le coſté FD ſera egal au coſté DE par la 26. pr. 1. Par meſme diſcours DG ſe prouvera egale à DE, & par la 1. com. ſent. les trois lignes DE, DF, DG, ſeront egales entr'elles : ainſi le cercle EFG décrit de l'intervale DE, le ſera auſſi de l'intervale des deux autres : & partant il paſſera par les points E, F, G, & en iceux touchera les trois coſtez du triangle par le Corol. de la 16. pr. 3. pource qu'à iceux coſtez ſont perpendiculaires les demy diametres DE, DF, DG. Donc par la 5. def. de ce livre, le cercle E F G ſera inſcrit au triangle donné : Ce qu'il faloit faire.

PROBL. 5. PROP. V.

A l'entour du triangle donné décrire un cercle.

Soit le triangle donné ABC, à l'entour duquel il faut décrire un cercle.

Soient coupez en deux egalement les deux coſtez AB & AC aux points D & E par la 10. pr. 1. & par la 11 pr. 1. d'iceux points D & E, ſoient levées les perpendiculaires DF, EF, ſe rencontrans au point F, lequel ſera ou dans le triangle, ou au coſté BC, ou hors le triangle : & apres avoir mené les trois lignes



FA, FB, FC, les deux triangles ADF, BDF, auront les côtez AD, BD egaux, & DF commun, & les deux angles au point D egaux pour eſtre droits : donc les baſes AF, BF, ſeront egales par la 4. prop. 1. Par meſme diſcours AF, CF, ſeront auſſi ega-

les : & par la 1. com. sent. les trois lignes FA, FB, FC, seront egales entr'elles : & partant le cercle décrit de F, & de l'intervalle FA, passera aussi par les points B & C. Nous avons donc décrit un cercle à l'entour du triangle donné ABC : Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste, que si le centre tombe dans le triangle, les trois angles sont aigus : car ils sont tous en une grande portion de cercle : mais s'il tombe en l'un des costez, l'angle opposé à iceluy sera droit, attendu qu'il sera au demy cercle : si finalement il tombe hors le triangle, l'angle opposé sera obtus, car il sera en une moindre portion de cercle.

Et au contraire, il est evident que si le triangle est oxigone, le centre tombera dedans iceluy : mais s'il est rectangle, il tombera au costé opposé à l'angle droit : & finalement s'il est ambligone, le centre tombera dehors.

SCHOLIE.

On peut aussi colliger de ce Probléme la maniere de décrire un cercle par trois points donnez, lesquels ne soient en une ligne droite : car ayant joint iceux points par lignes droites, on aura un triangle, à l'entour duquel il faudra décrire un cercle, comme il est enseigné en ce Prob. Cecy se pratique aussi plus facilement, comme nous avons enseigné en nostre Geometrie pratique, Probl. 21.

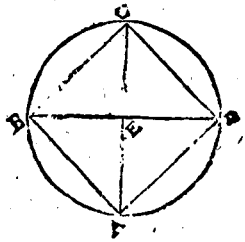
PROBL. 6. PROP. VI.

Dans un cercle donné, décrire un quarré.

Soit le cercle donné A B C, dans lequel il faut décrire un quarré.

Soient menées les deux diametres AC & BD se coupans au centre E en angles droits, & soient menées les quatre lignes droites AB, BC, DC, & DA. Je dis que le quadrilatere ABCD est un quarré inscrit au cercle donné.

Car d'autant que les quatre angles au point E sont droits, & egaux par la construction, les 4. arcs ausquels ils insistent seront egaux par la 26. pr. 3. & partant les lignes droites qui soustendent iceux arcs seront aussi egales par la 29. prop. 3. donc tous les costez du quadrilatere ABCD seront egaux entr'eux. Mais par la 31. prop. 3. les angles d'iceluy quadrilatere sont droits, chacun d'iceux estant au demy cercle: donc le quadrilatere ABCD est un quarré inscrit au cercle proposé. Ce qu'il faloit faire.

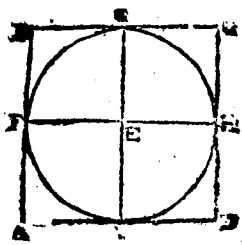


PROBL. 7. PROP. VII.

A l'entour d'un cercle donné décrire un quarré.

Soit le cercle donné FGSI à l'entour duquel il faut décrire un quarré.

Soient menez les deux diametres FS & GI se coupans à angles droits au centre E, & par la 31. pr. 1. des points G & I, soient menées les deux lignes BC, AD paralleles au diametre FS: Item par les points F & S, soient aussi menées les deux lignes AB, DC paralleles à GI, & icelles 4. lignes paralleles se rencontrans aux points A, B, C, D, feront le quadrilatere ABCD, lequel ie dis estre le quarré demandé.



Car en premier lieu, il est evident par la construction qu'il est parallelogramme, & par la 34. prop. 1. les quatre costez seront egaux, chacun d'iceux estant egal à l'un des deux diametres FS, GI, qui sont egaux entr'eux. Pareillement par la mesme trente-quatre proposition 1. les quatre angles

A, B, C, D, ſont egaux aux quatre qui ſont au point E, chacun à ſon oppoſé, d'autant que ce ſont parallelogrammes. Mais chacun d'iceux angles du point E étant droit, auſſi chacun des quatre A, B, C, D, ſera droit; & par conſequent le parallelogramme ABCD, aura les quatre coſtez egaux, & les quatre angles droits, & partant il ſera quarré, les coſtez duquel touchent le cercle és points, F, G, S, I, par le Corol. de la 16. prop. 3. Parquoy nous avons décrit un quarré à l'entour d'un cercle donné. Ce qu'il faloit faire.

PROBL. 8. PROP. VIII.

Dans un quarré donné, décrire un cercle.

Soit le quarré donné ABCD, (en la fig. prec.) dans lequel il faut décrire un cercle.

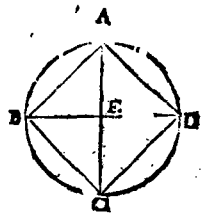
Soient coupez en deux egalement les quatre coſtez du quarré aux points F, G, S, I; & aprés avoir mené les deux lignes FS & GI s'entrecoupans au point E, d'iceluy point E, & de l'intervale EF, ſoit décrit un cercle FGSI, lequel ſera le demandé.

Car d'autant que AD, BC ſont egales & paralleles, leurs moitiez AI, BG ſeront auſſi egales & paralleles, & par la 33. pr. 1. AB ſera egale & parallele à IG. Semblablement CD ſera egale & parallele à la meſme IG: & par meſmes raiſons on demontrera que AD, BC ſont egales & paralleles à FS. Donc le quarré donné ſera auſſi diviſé en quatre parallelogrammes, leſquels par la 34. prop. 1. auront les coſtez oppoſez egaux: ainſi AF & IE ſeront egaux; Item FE & AI; FB & EG; ID & ES; mais toutes icelles moitiez des coſtez du quarré ſont egales entr'elles; partant EF, EG, ES, EI, ſeront auſſi egales entr'elles. Parquoy le cercle décrit du point E, & de l'intervale de l'une d'icelles, comme EF, paſſera auſſi par les points G, S, I, & touchera le quarré aux meſmes points F, G, S, I, par le Corol. de la 16. prop. 3. pource que les angles à iceux points ſont droits. Nous avons donc décrit un cercle dans le quarré donné ABCD: Ce qu'il faloit faire.

PROBL. 9. PROP. IX.

A l'entour d'un quarré donné, décrire un cercle.

Soit le quarré donné ABCD, à l'entour duquel il faut décrire un cercle.



Soient menées les deux diagonales AC & BD, s'entrecoupans au point E : puis du centre E, & de l'intervale EA, soit décrit le cercle ADCB. Je dis qu'il sera le demandé, c'est à dire qu'il passera par les quatre angles du quarré donné ABCD.

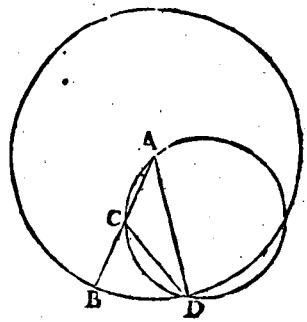
Car le costé AB étant egal au costé AD, le triangle BAD sera Isoscele : & par la 5. prop. 1. les angles ABD & ADB, sur la base BD seront egaux, & chacun demy droit par la 32. prop. 1. estant l'angle BAD droit par la def. du quarré. Par mesme discours, nous demontrerons que tous les autres angles des points A, B, C, D, seront aussi demy droits : & partant egaux entr'eux : ainsi au triangle AED les deux angles EAD & EDA seront egaux, & par consequent les lignes droites EA, ED, aussi egales par la 6. prop. 1. & par mesme discours ED sera egale à EC, & EC à EB ; comme aussi EB à EA : & partant les quatre lignes droites EA, ED, EC & EB, seront egales entr'elles. Parquoy le cercle décrit du centre E, & de l'intervale de l'une d'icelles lignes passera par l'extremité des autres, qui sont les angles du quarré donné ABCD. Nous avons donc décrit un cercle à l'entour d'un quarré donné : ce qu'il faloit faire.

PROBL. 10. PROP. X.

Décrire un triangle Isoscele, ayant un chacun des angles de dessus la base double de l'autre.

Soit pris quelconque ligne droite AB, laquelle par la 11.

p. 2. soit coupée en C, en sorte que le rectangle compris de AB, BC, soit egal au quarré de AC : puis du centre A, & de l'intervale AB soit décrit un cercle, dans lequel soit accommodée la ligne droite BD egale à AC : & apres soit menée la ligne AD. Je dis que ABD est un triangle Isoscele ayant chacun des angles ABD, ADB double de l'autre angle A, ainsi qu'il étoit requis.



Car en premier lieu, il apert assez qu'iceluy triangle ABD est Isoscele, puis que les deux costez AB, AD, procedent du centre A à la circonference BD : & apres avoir mené CD, à l'entour du triangle ACD, soit décrit le cercle ACD par la 5. p. 4. D'autant que par la construction le rectangle de AB & BC est egal au quarré de CA, ou de son egale DB; par la 37. pr. 3. la ligne DB touchera le cercle ACD en D, & par la 32. pr. 3. l'angle CDB sera egal à l'angle A, qui est au segment alterne CAD : & si à iceux angles on ajoûte le commun ADC, les touts seront egaux, sçavoir le total ADB, au deux CAD & ADC: mais l'angle exterieur DCB, est aussi egal aux deux oppositez interieurs CAD & ADC par la 32. pr. 1. partant il sera aussi egal à l'angle ADB, ou ABD, qui luy est egal par la 5. p. 1. puis que le triangle est Isoscele : & par la 6. p. 1. le triangle DCB sera aussi Isoscele, & le costé CD egal à DB : & partant aussi egal à CA; & le triangle DCA estant Isoscele, il aura les deux angles sur la base AD egaux par la 5. prop. 1. & l'angle exterieur DCB (qui est egal à tous les deux) sera double du seul A, aussi sera son egal B, & partant aussi son autre egal ADB. Nous avons donc construit le triangle Isoscele ABD, ayant chacun des angles de dessus la base BD double du troisiéme : Ce qu'il faloit faire.

COROL-

COROLLAIRE.

Pource que les trois angles du triangle ABD, ſont egaux à deux droits, c'eſt à dire à cinq cinquiémes de deux droits: Il eſt evident que l'angle A eſt la cinquiéme partie de deux droits, & chacun des autres B & D, les deux cinquiémes parties: Item A eſtre les deux quints d'un droit; & chacun des deux B & D les quatre quints, puis que tous les trois ſont egaux à deux droits, c'eſt à dire à dix quints d'un droit.

SCHOLIE.

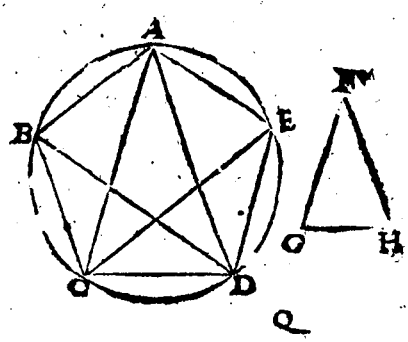
Or par quelle maniere on doit conſtruire un triangle Iſoſcele, ayant un chacun des angles de deſſus la baſe, non ſeulement double de l'autre, comme fait icy Euclide, *mais auſſi ſelon quelconque raiſon donnée, nous l'avons enſeigné (apres Pappus & Clavius) en noſtre Geometrique practique Prob. 37. & Scholie du 126.*

PROBL. II. PROP. XI.

Dans un cercle donné, décrire un pentagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDE, dans lequel il faut inſcrire le pentagone demandé.

Soit par la prec. ptop. conſtruit le triangle FGH Iſoſcele, qui ait chacun des angles G & H double de l'angle F: puis au cercle donné ſoit inſcrit le triangle ACD equiangle au triangle FGH



par ſa 2. p. 4. Et ayant coupé les angles ACD, ADC en deux egalement par les lignes droites CE & DB par la 9. p. 1. ſoient menées les lignes droites CB, BA, AE, ED. Je dis que le pentagone ABCDE inſcrit au cercle donné, eſt equiangle & equilateral.

Car puiſque le triangle FGH à chacun des deux angles ſur la baſe GH, double du troiſiéme F; le triangle ACD, qui eſt equiangle à iceluy FGH, aura auſſi chacun des angles de deſſus la baſe CD double du troiſiéme A, leſquels étans coupez en deux egalement par les lignes droites CE & DB, les cinq angles ADB, BDC, CAD, DCE, ACE ſeront egaux, & par la 26. prop. 3. ils auront circonferences egales pour baſes: mais les egales circonferences comprennent lignes droites egales par la 29. pr. 3. donc tous les cinq coſtez AB, BC, CD, DE & EA, étans egaux, le pentagone ſera equilateral.

Auſſi eſt-il manifeſte par la 27. prop. 3. qu'il eſt equiangle, d'autant que chaque angle d'iceluy eſt ſoûteuu de circonferences egales, ſçavoir de trois arcs comprenans trois coſtez du pentagone, vû que nous avons prouvé que tous iceux arcs ſont egaux. Nous avons donc décrit dans un cercle donné un pentagone equiangle, & equilateral: Ce qu'il faloit faire.

COROLLAIRE.

De cecy, il s'enſuit, que l'angle du pentagone equilateral & equiangle, comprend les trois cinquiémes parties de deux droits, ou bien les 6 quints d'un droit. Car puis que les trois angles BAC, CAD, DAE ſont egaux par la 27. prop. 3. & CAD eſt le quint de deux droits, ou les deux quints d'un droit; le total BAE, qui eſt composé de ces trois, ſera les trois quints de deux angles droits, ou bien les ſix quints d'un droit.

SCHOLIE.

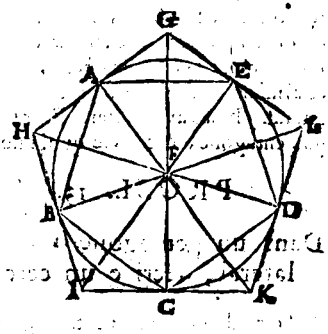
Clavius enſeigne en ce lieu-cy deux manieres pour décrire un pentagone equilateral, & equiangle ſur une ligne droite donnée & terminée, la plus facile deſquelles nous avons enſeignée en noſtre Geometrie pratique Prob. 38. c'eſt pourquoy nous n'en ferons icy repetition.

PROBL. 12. PROP. XII.

A l'entour d'un cercle donné, décrire un pentagone, equiangle & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDE, à l'entour duquel il faut décrire un pentagone equilateral & equiangle.

Dans iceluy cercle soit décrit le pentagone AECDE par la prec. prop. & apres avoir mené du centre F les 5 lignes FA, FB, FC, FD, FE, soient menées sur icelles les 5 lignes perpendiculaires GH, HI, IK, KL, LG par la 11. prop. 1. se rencontrans aux cinq points G, H, I, K, L: (elles se doivent rencontrer; car puis que les angles GAE, GEA sont moindres que deux droits, étans parties des angles droits GAF, GEF par la 11. com. sent. les lignes droites AG, EG se rencontreront de la part de G, & ainsi des autres. (Je dis que GHIKL est le pentagone demandé.



Car il est evidemment circonscrit au cercle donné, puis que par le Coroll. de la 16. p. 3. les lignes droites GH, HI, IK, KL, LG touchent ledit cercle és points A, B, C, D, E: Et apres si on meine les cinq lignes FG, FH, FI, FK, FL, d'autant que les angles FAG, FEG sont droits par la 47. prop. 1. le quarré de FG sera egal aux deux quarrez de FA, AG; il sera aussi egal aux deux de FE, & EG, & par consequent les deux quarrez de FA, AG, seront égaux aux deux de FE, EG. Mais les quarrez de FA, FE sont egaux (étans décrits sur lignes egales.) Donc ceux de AG, & EG seront aussi égaux; & les lignes AG & EG egales: Parquoy les deux costez AF, FG du triangle AGF sont egaux aux deux costez EF, FG du triangle EGF, chacun au sien, & la base AG egale à la base GE: & par la 8. prop. 1. les angles AFG, EFG seront egaux:

& partant AFE sera double de AFG. Par mesme discours AFB, qui est egal à AFE par la 27. p. 3. (car ils ont egales circonferences pour bases) sera aussi double de AFH, & par consequent AFG & AFH seront egaux : Donc les triangles AGF, AHF ont deux angles egaux à deux angles, chacun au sien, & le costé AF commun : & par la 26. prop. 1. AG sera egale à AH. Par mesme discours GE & EL se trouveront egales : mais AG & EG estans egales, aussi leurs doubles GH & GL seront egales. Par mesme discours on prouvera tous les autres costez egaux, & partant le pentagone GHIKL sera equilateral.

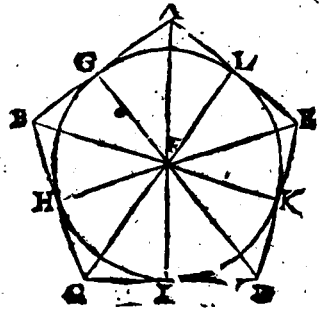
Qu'il soit aussi equiangle, il est evident : car nous avons montré que les angles des triangles AGF, EGF sont egaux, sçavoir est, les angles AGF, EGF : Item AGF, AHF : & qu'on en pouvoit dire autant des autres : donc les deux angles sous le point G, seront egaux aux deux angles sous le point H, & ainsi des autres : partant le pentagone sera equiangle & equilateral. Nous avons donc décrit à l'entour d'un cercle donné un pentagone, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 13. PROP. XIII.

Dans un pentagone donné equiangle, & equilateral, décrire un cercle.

Soit donné un pentagone equiangle, & equilateral ABCDE, dans lequel il faut inscrire un cercle.

Par la 9. prop. 1. soient coupez en deux egalement deux des angles d'iceluy A & B, par les lignes AF & BF se rencontrans au point F, & par la 12. pr. 1. d'iceluy point F soient menées FG, FI, FH, FK, FL, perpendiculaires sur les costez du pentagone ; puis du centre F, & intervale FG soit décrit le cercle GHIKL.



Je dis qu'il est inscrit au pentagone donné.

Car ayant mené les li-

gnes droites FC, FD & FE : d'autant que les deux costez AB, BF, du triangle ABF sont egaux aux deux costez CB, BF du triangle BFC, chacun au sien, & les angles ABF. CBF, contenus d'iceux costez, egaux par la construction; les bases AF, CF seront egales, & les angles BAF, BCF aussi egaux par la 4. p. 1. Mais puis que les angles du pentagone A & C sont posez egaux, & que par la construction l'angle BAF est moitié de BAE; l'angle BCF sera aussi moitié de BCD, & consequemment iceluy BCD, est divisé en deux également par la ligne FC. Par même raison nous montrerons que les deux autres angles du pentagone D & E, sont divisez en deux également par les lignes FD & FE. Maintenant puisque par la construction les deux angles sous le point A sont egaux, ayant esté le total coupé en deux également, & que l'angle droit G est egal à l'angle droit L, & le costé FA commun aux deux triangles AGF, ALF, par la 26. prop. 1. les deux autres costez seront egaux, sçavoir AG à AL, & FG à FL : par mesme discours FH, FI, FK, se trouveront egales : & partant le cercle décrit de F & intervale FG, passe par les points G, H, I, K, L, esquels il touche les costez du pentagone proposé par le Cor. de la 16. p. 3. Le cercle GHIKL est donc inscrit au pentagone donné. Ce qu'il faloit faire.

PROBL. 14. PROP. XIV.

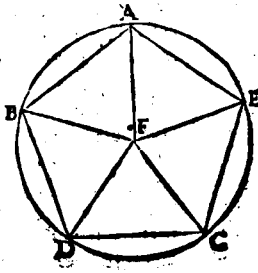
A l'entour d'un pentagone donné, lequel est equiangle, & equilateral, décrire un cercle.

Soit le pentagone equiangle, & equilateral donné ABCDE, à l'entour duquel il faut décrire un cercle.

Soient coupez les deux angles A & B en deux également par la 9. p. 1. avec les lignes droites AF & BF se rencontrans au point F, & d'iceluy point F; & intervale de l'une d'icelles deux lignes, soit décrit le cercle ABCDE. Je dis qu'il sera circonscrit au pentagone donné.

Car ayant mené les trois lignes FC, FD, FE, nous demontrerons comme au precedent Probl. qu'elles couperont en deux également les angles C, D, E. En apres, puis que le pentagone est equiangle, & chaque angle d'iceluy est coupé en deux également, au triangle AFB les deux angles sur la base BA se-

ront egaux, & par la 6. prop. 1. les deux costez AF & BF, seront aussi egaux : par le mesme discours BF & FC seront aussi egales, & ainsi des autres coupantes ; & par la 1. com. sent. il est evidét qu'icelles 5. lignes FA, FB, FC, FD, FE seront egales entr'elles, & partant que le cercle décrit de l'intervale de l'une d'icelles, passera par les extremitez des autres, qui sont aussi les cinq angles du pentagone donné. Parquoy nous avons décrit un cercle á l'entour d'un pentagone equiangle, & equilateral donné. Ce qu'il faloit faire.



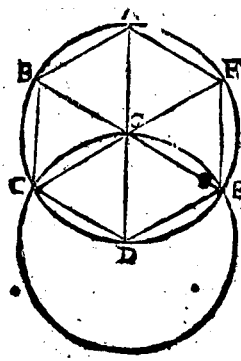
PROBL. 15. PROP. XV.

Dans un cercle donné, inscrire un hexagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDEF, dont le centre est G ; dans lequel cercle il faut inscrire un hexagone equiangle, & equilateral.

Soit mené le diametre AD, puis du centre D, & intervale DG, soit décrit le cercle GCE coupant le donné aux points C & E, desquels points soient menées les deux lignes CGF, EGB : finalement, soient menées les lignes droites AB, BC, CD, DE, EF, FA ; & on aura décrit au cercle donné l'hexagone ABCDEF, que je dis être equilateral, & equiangle.

Car il est evident (demontrant comme en la 1. p. 1.) que les deux triangles CDG, DEG construits sur la ligne DG sont equilateraux, & par le Cor. de



la 5. p. 1. chacun d'iceux sera aussi equiangle, & par la 32. p. 1. un chacun de leurs angles vaudra le tiers de deux angles droits : & puis que par la 13. p. 1. les deux angles CGE ; EGF sont egaux à deux droits, l'angle EGF vaudra aussi le tiers de deux angles droits ; donc tous les angles du point G seront egaux entr'eux, valant chacun un tiers de deux angles droits; puis que par la 15. p. 1. les opposez au sommet sont egaux : partant les six bases AB, BC, CD, DE, EF, FA, seront egales, & les angles sur icelles aussi egaux par la 4. p. 1. Donc l'hexagone ABCDEF sera equilateral : mais il est aussi equiangle. Car puis que tous les angles des six triangles sont egaux, les deux du point A seront egaux aux deux du point B, & ainsi des autres. Nous avons donc décrit dans un cercle donné un hexagone equiangle & equilateral : Ce qu'il faloit faire.

COROLLAIRE.

Par cecy est manifeste que le costé de l'hexagone est egal au demy diametre du cercle ; car le costé de l'hexagone DC, est egal au semidiametre DG par la def. du cercle.

PROBL. 16. PROP. XVI.

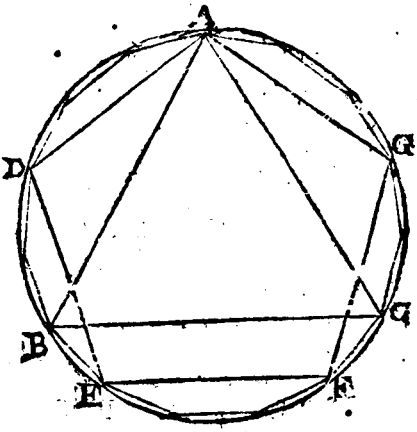
Dans un cercle donné, décrire un quindecagone equiangle & equilateral.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inscrire un quindecagone equiangle & equilateral.

Soit premierement décrit dans iceluy cercle le triangle equilateral ABC par la 2. p. de ce livre ; les trois costez étans egaux, la circonference sera divisée en trois egalement par les 26. ou 28. pr. 3. pareillement, soit en iceluy cercle inscrit le pentagone ADEFG par la 11. prop. de ce livre, ayant l'un des angles au point A. Je dis qu'ayant mené la ligne droite BE, ce sera le costé du quindecagone demandé.

Car, comme il a esté dit, l'arc ADB est le tiers de toute la circonference ; partant doit contenir cinq costez du quindecagone. Item la ligne droite AD, costé du pentagone, soûtient l'arc AD, cinquiéme partie de la circonference ; par-

tant doit contenir trois costez du quindecagone : & consequemment les deux arcs AD & DE contiendront six costez du quindecagone. Mais l'arc ADB en contient cinq : donc l'arc BE sera la quinziéme partie de toute la circonference : & partant la ligne droite BE sera le costé du quindecagone, & si par la 1. p. de ce livre on accommode au cercle encores 14 lignes droites egales à icelle BE, sera inscrit au cercle un quindecagone equilateral & aussi equiangle par la 27. pr. 3. puis que tous ses angles soustendent arcs egaux, chacun d'iceux angles étant composé de 13 arcs egaux. Nous avons donc au cercle donné décrit un quindecagone, &c. Ce qu'il faloit faire.



Pareillement aussi, tout ainsi qu'au pentagone, si par les quinze points des divisions egales du cercle, nous tirons des lignes droites qui le touchent, se décrira un quindecagone equilateral & equiangle à l'entour dudit cercle : & davantage nous décrirons & circonscrirons un cercle à un quindecagone equilateral & equiangle donné, suivant la mesme methode pratiquée au pentagone.

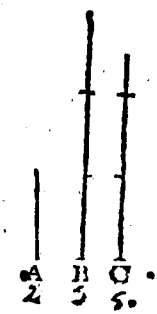
Fin du quatriéme Element.

ELEMENT CINQUIE'ME.

DEFINITIONS.

PArtie eſt une grandeur tirée d'une autre plus grande, lors que la plus petite meſure la plus grande.

C'eſt à dire que lors qu'une grandeur en meſure une autre plus grande, elle eſt dite partie d'icelle: Comme A qui eſt contenu 3 fois en B, eſt dit partie d'iceluy. Or entre les Mathematiciens il y a deux ſortes de partie: car il y en a une qui meſure ſon tout; comme A, lequel repeté 3 fois conſtituë ſon tout B: & l'autre ſorte ne me-



sure pas son tout, mais prise ie ne sçay combien de fois excede iceluy, où defaut au même, comme A, lequel étant pris 3 fois excede C, mais étant pris seulement 2 fois; il est excedé par le même C; Or la premiere est dite partie aliquote; & l'autre, partie aliquante: de cette-là seulemẽt parle icy Euclide, puis que cette-cy ne mesure son tout, & aussi ne l'apelle-il pas partie au 7. livre, mais parties.

2. Multiplice, est une grandeur plus grande qu'une autre plus petite, quand la plus grande est mesurée de la plus petite.

C'est à dire que si la grandeur A, est mesurée par B, moindre grandeur qu'icelle A, elle est dite multiplice de B: ainsi aussi la grandeur C, qui est mesurée 5. fois par D, est dite multiplice d'icelle D.

Or quand deux petites grandeurs en mesurent egalement deux autres plus grandes, c'est à dire, qu'une moindre est contenuë autant de fois en une plus grande, qu'une autre moindre en une autre plus grande, ces deux plus grandes là sont dites equimultiplices d'icelles moindres: comme les grandeurs A & E sont dites equimultiplices de B & D, pour ce que tout ainsi que A contient trois fois B, ainsi aussi E contient trois fois D. Et le même se doit entendre, si plusieurs moindres grandeurs en mesurent egalement plusieurs grandes.

3. Raison, est une habitude de deux grandeurs de même genre, comparées l'une à l'autre selon la quantité.

C'eſt à dire que quand deux quantitez de même genre, comme deux nombres, deux lignes, deux ſuperficies, deux ſolides, &c. ſont comparez entr'eux ſelon la quantité, c'eſt à dire ſelon que l'une eſt plus grande que l'autre, ou moindre, ou egale, telle comparaiſon eſt apelée raiſon, & par quelqu'uns proportion: Parquoy on ne peut pas dire, qu'il y ait quelque raiſon d'une ligne à une ſuperficie, ou d'un nombre à une ligne, puis que ny la ligne & la ſuperficie, ny le nombre & la ligne, ne ſont pas quantitez de même genre. Semblablement ſi on confere une ligne avec une ligne ſelon la qualité, c'eſt à dire, ſelon que l'une eſt blanche, & l'autre noire; ou bien que l'une eſt chaude, & l'autre froide, &c. encore que l'une & l'autre ſoient de même genre, cette comparaiſon n'eſt pas dite raiſon, pource qu'elle n'eſt pas faite ſelon la quantité.

Or jaçoit que la raiſon ſe trouve proprement ès ſeules quantitez, ſi eſt-ce toutesfois que toutes autres choſes, qui en quelque maniere prennent la nature de la quantité, come ſont les temps, les ſons, les voix, les lieux, les mouvemens, les pois, & les puiſſances, ſont auſſi dites avoir raiſon, ſi leur habitude eſt conſiderée ſelon la quantité, comme quand nous diſons un temps être plus grand qu'un autre temps, ou moindre; ou deux temps eſtre egaux, &c. telle habitude ſera dite raiſon, pource qu'alors les temps ſont conſiderez ainſi que certaines quantitez.

En toute raiſon cette quantité-là, qui eſt referée à une autre, eſt dite par Euclide, & autres Geometres, antecedant de la raiſon; & celle-là à laquelle elle eſt referée, eſt dite conſequent d'icelle raiſon: Comme en la raiſon de A à B; A eſt dit antecedant de la rai-

son, & B consequent; Que si au contraire B est comparé à A; B sera apellé antecedant, & A consequent.

A——
B——

Or cette raison definie par Euclide, est divisée en raison rationelle, & irrationelle.

La rationelle, est celle qui se peut exprimer en nombres: comme la raison d'une ligne de 10 pieds à une autre de cinq pieds, laquelle est exhibée par ces nombres 10 & cinq. Mais l'irrationelle, est cette raison-là qui ne se peut exprimer en nombres: comme la raison du diametre d'un quarré au côté d'iceluy, laquelle ne se peut trouver ny exprimer en nombre: comme est demontré par Euclide, en la derniere proposition du 10. livre.

Autres disent que la raison ou portion rationelle, est celle qui a les deux quantitez commensurables, c'est à dire, qui ont une commune partie aliquote, ou bien qui sont mesurées par une même commune mesure: comme la raison d'une ligne de 20 pieds à une autre de 8 pieds: car une ligne de 4 pieds ou de 2, est partie aliquote de l'une & l'autre de ces deux-là, & par consequent mesure icelles. Mais la raison ou proportion irrationelle, est celle (disent-ils) qui a les deux quantitez incommensurables, c'est à dire, qui n'ont nulle partie aliquote, ou desquelles on ne peut trouver aucune commune mesure. Comme la raison du costé d'un quarré à sa diagonalle, & de plusieurs autres lignes dont est traité au 10. livre.

Cette raison se divise aussi en raison d'egalité, & d'inegalité: La raison d'egalité, est quand deux quantitez egales se cõparent entr'elles, comme 10 à 10; une ligne de 12 pieds à une autre ligne de 12 pieds, &c. Mais la raison d'inegalité, est quand deux

quantitez inegales se comparent entr'elles, comme 10 à 4 est raison d'inegalité; telle est aussi celle de 5 à 9; celle d'une ligne de 7 pieds à une autre de 15 pieds, &c.

Cette raison d'inegalité, est subdivisée en raison d'inegalité majeure, & d'inegalité mineure. La raison d'inegalité majeure, est quand la plus grande quantité est comparée à la moindre: comme la raison de 8 à 5, est dite raison d'inegalité majeure: item la raison d'une ligne de 10 pieds à une de 4, &c. Mais la raison d'inegalité mineure, est quand on compare la moindre quantité à la plus grande: comme la raison de 7 pieds à 9, s'apelle raison de moindre inegalité: item celle d'une ligne de 9 pieds à une autre de 12 pieds, &c.

La raison rationelle d'inegalité majeure, est divisée en cinq genres, sçavoir raison multiple, superparticuliere, superpartiente, multiple superparticuliere, & multiple superpartiente: les trois premieres desquelles sont simples, & les deux dernieres composées d'icelles premieres.

La raison multiple, est quand l'antecedant d'icelle contient le consequent plusieurs fois precisément: & cette raison contient sous soy diverses especes. Car si l'antecedant contient le consequent deux fois precisement, elle est dite double: si trois fois, triple, si 4, quadruple: si dix, decuple, &c. Comme la raison de 20 à 4 est dite quintuple, pource que l'antecedant 20 contient le consequent 4, cinq fois, & la raison d'une ligne de 18 pieds, à une autre de 3 pieds, est dite sextuple, d'autant que 18 contient 3 six fois, & ainsi des autres.

La raison superparticuliere, est quand l'antecedent

contient le consequent une fois, & en outre une partie aliquote d'iceluy consequent : & cette raison a diverses especes. Car si ceste partie aliquote est moitié d'iceluy consequent, est constituée une raison sesquialtere, comme la raison de 3, à 2, en laquelle l'antecedent 3 contient le consequent 2, une fois & encore $\frac{1}{2}$ d'iceluy ; si elle est tierce partie, sesquitierce, si une quarte partie, sesquiquarte : si une cinquiéme partie, sesquiquinte, &c. Commençant tousiours le nom de ladite raison par sesqui, *& se terminant par le denominateur de la partie aliquote.*

La raison superpatiente, est quand l'antecedant contient le consequent une fois, & en outre plus d'une partie aliquote d'iceluy : & a aussi cette raison plusieurs especes. Car si l'antecedant contient le consequent une fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'iceluy, est constituée une raison superbipatiente tierces comme la raison de 20 à 12, en laquelle le nombre 20 contient 12, une fois & $\frac{2}{3}$ d'iceluy : si $\frac{3}{4}$, sera constituée une raison supertripartiente quarte, comme la raison d'une ligne de 63 pieds à une de 36, & ainsi des autres ; le nom d'icelles commençant tousiours par super, *& prenant à son milieu le numerateur de la partie aliquote, & le denominateur à la fin d'iceluy.*

La raison multiple superparticuliere, est quand l'antecedant contient le consequent plusieurs fois, & encore une partie aliquote d'iceluy : cette-cy est composée de la premiere & de la deuxiéme : & tout ainsi que chacune d'icelles contient plusieurs especes, aussi fait celle-cy. Car si l'antecedant contient le consequent 2 fois, & encore $\frac{1}{2}$ d'iceluy, cette raison sera apellée double sesquialtere, comme la raison de 5 à 2, en laquelle 5 contient 2 deux fois & $\frac{1}{2}$ d'iceluy : si $\frac{1}{3}$, comme d'une

ligne de 7 pieds à une autre de 3 pieds, cette raison s'apellera double sesquitierce : & la raison de 29 à 7 s'apellera quadruple sesquiseptuble, d'autant qu'en 29.7. est cõtenu 4 fois & $\frac{1}{7}$ d'iceluy, & ainsi des autres.

La raison multiple superpatiente, est quand l'antecedant contient le consequent plusieurs fois, & plusieurs parties aliquotes d'iceluy : cette raison est composée de la premiere & troisiéme ; & tout ainsi que chacune d'icelles contient sous soy plusieurs especes, aussi fait cette-cy : comme si l'antecedant contient le consequent, 2 fois, encore $\frac{2}{3}$ parties d'iceluy, cette raison sera apellée double superbipartiente tierce, comme est la raison de 8 à 3 : mais s'il le contient 3 fois, & encore $\frac{3}{4}$ d'iceluy, elle s'apellera triple superpatiente quarte, comme est la raison de 15 à 4 s'il le contient 4 fois, & encore $\frac{6}{7}$ d'iceluy, elle sera dite quadruple supersextupartiente septuple, comme est la raison de 34 à 7, & ainsi des autres.

Or tout ce qui a été dit cy-dessus des cinq especes de raison rationnelle d'inegalité majeure, se doit aussi entendre des cinq especes de l'inegalité mineure, excepté qu'il faut toujours apposer cette syllabe sub, disant submultiple au lieu de multiple, subsuperparticuliere, au lieu de superparticuliere, & ainsi des autres.

Et pource que les denominateurs des raisons rationnelles cy-dessus exposées sont assez utiles, nous enseignerons icy par quels nombres elles se dénomment. Nous apellons denominateur d'une raison, le nombre qui exprime distinctement, & apertement la quantité de la grandeur antecedante au respect de la consequente : comme le dominateur de la raison quintuple est 5, pource que ce nombre là montre que la grandeur en quantité antecedante contient 5 fois la consequente.

Semblablement le denominateur de la raison sesquiquarte est $1\frac{1}{4}$, *pource qu'icelluy nombre signifie que la quantité antecedante contient la consequente une fois &* $\frac{1}{4}$ *d'icelle : Item le denominateur de la raison subtriple, est* $\frac{1}{3}$, *car il demontre que l'antecedant est la tierce partie du consequent: & ainsi des autres. C'est pourquoy, comme j'estime, Euclide au 6. livre, & autres Mathematiciens, apellent le denominateur de quelconque raison la quantité d'icelle, car il denomme & exprime comme nous avons dit, combien une grandeur est au respect d'une autre avec laquelle elle est conferée, ainsi qu'il apert par les exemples proposez.*

Or de ces choses on peut facilement colliger le denominateur de quelconque raison. Car le denominateur de la raison multiple, est le nombre entier contenant autant d'unitez, que l'antecedant de la raison contient de fois le consequent. Comme le denominateur de la raison double, est 2, de la sextuple, 6; de la centuple 100, &c. Mais le denominateur de quelconque raison submultiple, est un nombre rompu, duquel le numerateur est tousiours l'unité : mais le denominateur est le nombre denommant la raison multiple correspondante. Comme le denominateur de la raison subdouble est $\frac{1}{2}$: *de la subsextuple* $\frac{1}{6}$ *de la subcentuple* $\frac{1}{100}$, *&c. Il est donc facile de trouver le denominateur de quelconque raison multiple ou submultiple, puis que la prolation montre le denominateur de la raison, comme il est evident par les exemples proposez cy-dessus.*

Le denominateur de quelconque raison superparticuliere est l'unité avec la partie aliquote que l'antecedant doit comprendre outre le consequent. Comme le denominateur de la raison sesquialtere, est $1\frac{1}{2}$: *de la sesquitierce* $\frac{1}{3}$; *&c. Il n'est donc pas difficile de trouver*

ver le denominateur d'une raison superparticuliere, puis que la prolation d'icelle raison exprime le denominateur par sa partie aliquote, comme il apert par les exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison subsuperparticuliere est un nõbre rompu, duquel le numerateur est moindre que le denominateur seulement d'une unité. Comme le denominateur de la raison subsequialtere, est $\frac{2}{3}$: & celuy de la subsesquitierce, est $\frac{3}{4}$ &c. Donc le denominateur de telle raison sera aisément trouvé, car il n'y a qu'à prendre pour numerateur de la fraction le denominateur de la partie aliquote : & pour le denominateur d'icelle fraction, le nombre plus grand de l'unité. Comme le denominateur de la raison subsesquiquinte est $\frac{5}{6}$: & celuy de la raison subsesquiseptiéme est $\frac{7}{8}$: mais celuy-là de la raison subsesquineufiéme, est $\frac{9}{10}$.

Le denominateur de quelque raison superpartiente, est une unité avec les parties aliquotes que l'antecedant doit contenir outre le consequant. Comme le denominateur de la raison supertripartiente quarte, est $1\frac{3}{4}$: celuy de la raison superquadripartiente quintes, est $1\frac{4}{5}$: & ainsi des autres. Or les denominateurs de telles raisons sont faciles à trouver, pource que la prolation même de la raison exhibe le propre denominateur d'icelle, comme il apert és exemples cy-dessus. Mais le denominateur de quelconque raison subsuperpartiente, est un nombre rompu, duquel le numerateur est moindre que le denominateur, d'autant d'unitez, que la quantité consequente contient de parties aliquotes par dessus l'antecedante. Comme le denominateur de la raison subsupertripartiente quarte est $\frac{4}{7}$; celuy de subsuperquadripartiente quinte, est $\frac{5}{9}$ &c. On trouvera donc le denominateur de telle raison, si pour le numerateur de

la fraction, on prend le denominateur des parties aliquotes exprimées en la raison proposée, auquel si on ajoûte le nombre d'icelles parties, on aura le denominateur d'icelle fraction : comme le denominateur de la raison subsupertripartiente quinte est $\frac{5}{8}$, pource que le numerateur de cette fraction est le nombre denommant les quintes, sçavoir 5, auquel est ajoûté le nombre 3, des trois parties, afin de faire 8, denominateur de la fraction : mais le denominateur de la raison subsuperquadripartiente neufiéme est $\frac{9}{13}$: & ainsi des autres.

Le denominateur de quelconque raison multiple superparticuliere est le nombre entier denommant la raison multiple proposée avec la partie que la quantité antecedante doit contenir outre la consequente. Comme le denominateur de la raison triple sesquiseptiéme est $3\frac{1}{7}$: mais celuy de la raison quadruple sesquiquinte, est $4\frac{1}{5}$. &c. Le denominateur de telle raison est aisé à exhiber pource que la prelation de la raison exprime distinctement tant le denominateur de la multiple raison que la partie aliquote, comme il se voit és exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison submultiple superparticuliere est une fraction dont le numérateur est le nombre denommant les parties aliquotes contennës en la raison. Comme le denominateur de la raison subtriple sesquiquarte, est $\frac{3}{13}$ de subquintuple sesquinenfiéme, $\frac{9}{46}$. &c. On trouvera le denominateur de telle raison, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur de la partie aliquote : & iceluy étant multiplié par le denominateur de la raison multiple, si on ajoûte 1 au produit, on aura le denominateur de la fraction, comme il est manifeste par les exemples cy-dessus.

Le denominateur de quelconque raison multiple su-

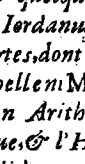
perpartiente, est le nombre entier, denommant la raison multiple obtenuë en icelle, avec les parties aliquotes que la quantité antecedente doit contenir de la consequente. Comme le denominateur de la raison triple superbipartiente tierces, est $3\frac{2}{3}$: de quadruple supertripartiente quintes, $4\frac{3}{5}$, &c. Il est facile de trouver le denominateur de telles raisons, pource que la prolation exprime distinctement, tant le denominateur de la raison multiple, que les parties aliquotes, comme apert és exemples cy-dessus. & le denominateur d'une raison submultiple superpartiente, est une fraction, dont le numerateur est le nombre denommant les parties aliquotes d'icelle raison: comme le denominateur de la raison subtriple superbipartiente tierces, est $\frac{3}{11}$: de subquadruple supertripartiente quintes $\frac{5}{23}$, &c. Le denominateur de telles raisons sera trouvé, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes: lequel étant multiplié par le denominateur de la raison multiple, & au nombre produit ajoûté le nombre des parties aliquotes, viendra le denominateur de la fraction, ainsi qu'il apert és exemples posez cy-dessus.

Finalement le denominateur de la raison d'egalité est toûjours l'unité, pource que les termes ou quantitez d'icelle raison sont egales entr'elles; & partant l'une contient l'autre une fois precisément.

4. Proportion, est une similitude de raisons.

Tout ainsi que la comparaison de deux quantitez entr'elles est dite raison; ainsi la comparaison & ressemblance de deux ou plusieurs raisons entr'elles, est dite proportion: comme si la raison de A à B, est semblable à la raison de C à D, l'habitude d'entre ces raisons sera dite proportion. Et c'est ce que les Grecs apellent

analogie, & quelques Latins proportionalité. Selon Boëtius & Iordanus il y en a de plusieurs sortes, dont les principales qu'ils apellent Medieté, sont la proportion Arithmetique, la Geometrique, & l'Harmonique. Mais Euclide ne traite icy que de la Geometrique, laquelle est ou



continuë, ou discrete: la proportion continuë, est celle de laquelle les grandeurs entre moyennes sont prises deux fois, tellement qu'il ne se fait nulle interruption de raisons, ains chaque quantité entre moyenne est antecedent & consequent, sçavoir antecedant de la quantité subsequente, mais consequent à la quantité antecedante: comme si on dit que telle qu'est la raison de A à B, telle est celle de B à C, où la quantité B est antecedant de la quantité C, & consequent de la quantité A. Mais la proportion discrete ou non continuë, est celle en laquelle chaque quantité entremoyenne, est prise seulement une fois, tellement qu'il se fait interruption de raisons, & aucune quantité n'est antecedant & consequent: mais seulement antecedent ou consequent: comme quand on dit que la raison de A à B, est comme celle de C à D.

5, Les grandeurs sont dites avoir raison l'une à l'autre, lesquelles étans multipliées se peuvent exceder l'une l'autre.

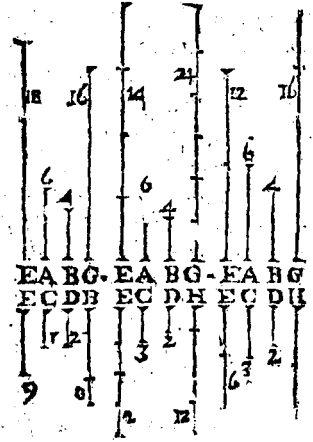
Euclide ayant en la 3. def. apelé raison l'habitude de deux grandeurs de même genre, il explique en cette-cy quelle chose requierent deux quantitez de même genre, afin qu'elles soient dites avoir raison, sçavoir est, que l'une ou l'autre d'icelles étant multipliée, elles s'augmente en sorte, que finalement elle surpasse l'au-

tre : ainſi il y a raiſon entre le coſté d'un quarré, & le diametre d'iceluy, puis que le coſté multiplié par 2. c'eſt à dire pris deux fois, excede le diametre. Car d'autant que deux coſtez du quarré & le diametre, conſtituent un triangle Iſoſcele, par la 20. p. 1 les deux coſtez du quarré ſeront plus grands que le diametre. Ainſi pareillement entre la circonference d'un cercle & le diametre d'iceluy, il y a raiſon (laquelle toutesfois n'eſt encore connuë) puis que le diametre multiplié par 4. c'eſt à dire pris 4 fois, excede la circonference: car toute la circonference, comme il eſt demonſtré par Archimede, ne contient que trois fois le diametre, & encore une particule peu moindre qu'une ſeptiéme partie d'iceluy diametre. Mais il s'enſuit de cette def. qu'une ligne finie n'aura raiſon à une infinie, encores qu'icelles deux lignes ſoient de meſme genre de quantité: car en quelque ſorte que ce ſoit multipliée la ligne finie elle ne pourra ſurpaſſer l'infinie. S'enſuit auſſi qu'il n'y a point de raiſon entre un angle rectiligne, & un angle contingent. Car il apert de la 16. pr. 3. qu'iceluy angle contingent, ne peut jamais exceder un angle rectiligne.

6. Les grandeurs ſont dites être en même raiſon, la premiere à la ſeconde, comme la troiſiéme à la quatriéme, quand les equimultiplices de la premiere & troiſiéme, aux equemultiplices de la ſeconde & quatriéme, en quelque multiplication que ce ſoit, defaillent enſemble, ſont egaux, ou excedent, un chacun à un chacun, prenant ceux-là qui s'entre-répondent.

Ayãt été dit par Euclide, que c'eſt que raiſon, & quelles grandeurs ſont dites avoir raiſon l'une à l'autre, main-

tenant il declare quelle condition requierent les grandeurs pour être en même raison. ſçavoir eſt, que les equemultiplices de la premiere & troiſiéme grandeur excedent, ſoient egaux ou defaillent aux equemultiplices de la deuxiéme & quatriéme en quelque multiplication que ſoient pris iceux equemultiplices, comme apert en ces quatre quantitez. A, B, C, D, ou les equemultiplices de A & C, premiere &, 3, ſont E & F, & les equemultiplices de B & D, 2e & 4e quantitez ſont G & H: tellement qu'il ſe voit qu'ayant multiplié A & C, par un même nombre; & B, D, par quelconque même nombre, ſi le multiplice E excede le multiplice G qui luy correſpond, auſſi le multiplice F excede le multiplice H, s'il eſt egal, l'autre ſera auſſi egal; s'il defaut auſſi ſera l'autre, & ce en quelconque multiplication qu'on prenne les equemultiplices: & partant il y a même raiſon de A premiere quantité à B ſeconde, que de C troiſiéme à D quatriéme.



Par la converſe de cette def. s'il y a telle raiſon de la premiere à la ſeconde, que de la troiſiéme à la quatriéme, il s'enſuit que les equemultiplices de la pre-

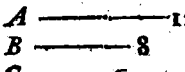
miere & troiſiéme excedent, ſont egaux, ou defaillent aux equemultiplices de la deuxiéme & quatriéme, engendrées de quelque multiplication que ce ſoit.

Et auſſi s'il n'y a même raiſon de la premiere à la ſeconde, que de la tierce à la quatriéme, il s'enſuivra que les equemultiplices de la premiere & troiſiéme n'excederont, ne ſeront egaux, ou ne defaudront aux equemultiplices de la deuxiéme & quatriéme produite de quelque multiplication que ce ſoit.

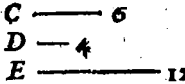
Or ce qui eſt dit icy de quatre grandeurs ſe doit auſſi entendre de trois, prenant celle du milieu deux fois, afin qu'il y en ait quatre.

7. Les grandeurs qui ſont en même raiſon ſont apelées proportionnelles.

Comme ſi des grandeurs A, B, C, D, il y a meſme raiſon de A à B, que de C à D, icelles grandeurs ſont dites proportionnelles.



Et les grandeurs E, F, G, leſquelles ſont en proportion continuë, ſont auſſi dites continuellement proporttionnelles.



8. Quand des equemultiplices, celuy de la premiere grandeur excede celuy de la ſeconde, & le multiplice de la troiſiéme n'excede celuy de la quatriéme, lors il y aura plus grande raiſon de la premiere grandeur à la ſeconde, que de la troiſiéme à la quatriéme.

Euclide declare icy quelle condition doivent avoir 4 grandeurs, afin que la premiere soit dite avoir plus grande raison à la seconde que la tierce à la 4e, disant qu'ayant pris les equemultiplices de la premiere & de la 3e, & les equemultiplices de la deuxiéme & 4e: si la multiplice de la premiere excede la multiplice de la 2e mais la multiplice de la 3e n'excede la multiplice de la 4e il y aura plus grande raison de la premiere grandeur à la seconde, que de la 3e à la 4e, comme il apert en l'exemple ici posé, auquel sont prises E & F, doubles de A & C, premiere & 3e grandeurs, mais G & H triples de B & D, deuxiéme & 4e grandeurs: & pource que E multiplice de A premiere est plus grand que G multiple de B 2e, & F multiplice de C 3e n'est pas plus grand que H multiplice de D 4e, la raison de A premiere grandeur à B 2e, est dite plus grande que la raison de C 3e à D 4.

Or afin que quatre grandeurs soient dites être en même raison, il est necessaire que les equemultiplices d'icelles, pris selon quelconques multiplications, excedent, soient egaux ou defaillent, comme il a été exposé en la 6. def. Mais afin que la premiere grandeur soit dite avoir plus grande raison à la 2e, que la 3e à la 4e: c'est assez que des equemultiplices pris selon quelque multiplication, celuy de la premiere grandeur excede celui de la deuxiéme: & le multiplice de la troisiéme n'excede celuy de la quatriéme, encore que selon plusieurs autres multiplications ces equemultiplices ne soient tels. Parquoy pour conclurre en quelque demonstration qu'il y a plus grande raison d'une grandeur à une au-

tre, que d'une troisiéme à une quatriéme. Il suffira de demontrer que selon quelque multiplication, le multiplice de la premiere grandeur excedant celuy de la seconde, le multiplice de la troisiéme n'excede celuy de la quatriéme.

Et convertissant cette 8. def. s'il y a plus grande raison de la premiere grandeur à la deuxiéme, que de la troisiéme à la quatriéme, le multiplice de la premiere excedant celuy de la deuxiéme, il se peut faire quelque multiplication par laquelle le multiplice de la troisiéme n'excede celuy de la quatriéme.

Que si au contraire d'icelle def. le multiplice de la premiere grandeur ne surmonte celuy de la deuxiéme, & le multiplice de la tierce excede celuy de la quarte, la premiere grandeur sera dite avoir moindre raison à la deuxiéme que la tierce à la quarte. La converse a aussi lieu.

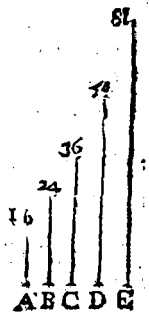
9. Proportion ne peut être constituée sur moins de trois termes.

Puis qu'il a été dit en la 3. def. que raison est l'habitude de deux quantitez, & que proportion par la 4. def. est une similitude de deux ou plusieurs raisons : il s'ensuit qu'il n'y peut avoir moins de trois quantitez ou termes en une proportion, si elle est proportion continuë, mais il en faut quatre au moins si elle est proportion discrette.

10. Quand trois grandeurs sont proportionnelles, la premiere est dite avoir à la troisiéme la raison doublée de la premiere

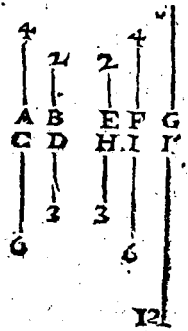
à la seconde : mais s'il y en a quatre, la premiere est dite être à la quatriéme, en raison triplée de la premiere à la seconde : & toûjours d'un même ordre une plus, jusques à ce que la proportion soit achevée.

Comme si les grandeurs A, B, C, D, E, sont continuellement proportionnelles, la premiere quantité A est dite avoir à la 3e quantité C, la raison doublée de celle de A à la 2e B, pource qu'être A & C sont deux raisons, qui sont egales à la raison de A à B, sçavoir est la raison de A à B, & celle de B à C, tellement que la raison de A à C, prend par ce moyen la raison doublée de A à B, c'est à dire posée deux fois d'ordre. Mais la raison de la premiere grandeur A à la 4e D, est dite triplée de celle de A à B, pource qu'entre A & D, se trouvent 3 raisons, lesquelles sont egales à celle de A à B; c'est à sçavoir la raison de A à B, celle de B à C, & celle de C à D: & partant la raison de A à D encloſt par ce moyen la raison triplée de A à B, c'est à dire posée trois fois d'ordre. Et ainsi pareillement la raison de A à E, est dite quadruplée de la raison de A à B; pource qu'entre A & E sont encloſes 4 raisons, qui sont egales à celle de A à B, &c.



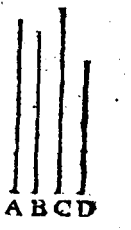
11. Les grandeurs sont dites homologues, ou de semblables raisons, les antecedans aux antecedans, & les conſequens aux conſequens.

C'est à dire que si plusieurs quantitez sont proportionnelles, comme A, B, C, D, sçavoir que comme A est à B, ainsi C soit à D, les quantitez A & C, antecedantes de chaque raison, seront dites homologues, ou de semblable raison, comme aussi les quantitez consequentes B & D. Ainsi pareillement, si les quantitez E, F, G, sont proportionnelles aux quantitez H, I, K: les termes E & H, seront dits homologues, ou de semblable raison: comme aussi le terme F sera dit homologue au terme I: & aussi G à K: ainsi les côtez des figures étans comparez entr'eux, on entend quels costez doivent estre antecedans des raisons, & quels consequens.



12. Raison alterne, est prendre l'antecedant comparé à l'antecedant, & le consequent au consequent.

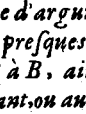
Euclide explique en cette def. & ès suivãtes, aucuns moyens d'arguimenter ès proportions, desquels l'usage est fort frequent en la Geometrie. Il dit donc icy que la raison alterne ou permutée, est quand de quatre grandeurs proportionnelles proposées, comme A, B, C, D, sçavoir que comme A est à B, ainsi C est à D; on vient à conclurre qu'il y a mesme raison de l'antecedant A à l'antecedant C, que du consequent B au consequent D: & cette maniere d'arguimenter (laquelle est demontré à la 16. p. de ce liv.) se couche ordinairement ainsi: comme A est à B, ainsi



ainſi C eſt à D : Donc en permutant comme A ſera à C, ainſi B à D. Et eſt à noter qu'en cette maniere d'argumenter, les quatre grandeurs doivent être de même genre.

13. Raiſon inverſe ou tranſposée, eſt lors qu'on prend le conſequent comme antecedent pour le comparer à l'antecedant, comme ſi c'étoit le conſequent.

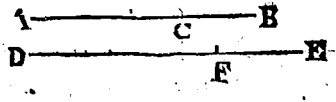
Comme ſi A eſt à B, ainſi que C à D, nous infererons que par raiſon inverſe, comme B eſt à A, ainſi que D eſt à C, c'eſt à dire les conſequens aux antecedans. En cette ſorte d'argumenter les Autheurs parlent preſques toûjours ainſi : comme A eſt à B, ainſi C eſt à D : donc en changeant, ou au contraire, B ſera à A, comme D à C. Cette maniere d'argumenter ſera demontrée au Corrollaire de la 4. propoſition de ce livre.



14. Compoſition de raiſon, eſt lors qu'on prend l'antecedent avec le conſequent, comme une ſeule choſe, pour le comparer au même conſequent.

Comme ſi AC eſt à CB, comme DF à FE, & on vient à conclure que la toute AB eſt à CB, comme la toute DE à FE ; c'eſt à dire que la compoſée de l'antecedant AC & du conſequent CB, eſt au meſme conſequent CB, comme la compoſée de l'antecedant DF, & du conſequent FE, eſt à iceluy conſequent

F Et cette maniere d'argumenter sera dite composition de raison, & se prononce ainsi; comme AC est à CB, ainsi DF à FE: donc en composant. AB sera à CB, comme DE à FE: laquelle sorte d'argumenter sera demontrée en la 18. pr. de ce livre.



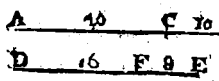
A ce moyen d'argumenter, par la composition de raison, en peuvent estre ajoûtez deux autres: le premier peut estre dit composition converse de raison: sçavoir quand on prend l'antecedant & le consequent comme un seul, pour le comparer à l'antecedant. Comme si AC est à CB, comme DF à FE; & nous inferons, donc comme AB composée de l'antecedant & du consequent, est à l'antecedant AC, ainsi DE composée de l'antecedant & du consequent est à l'antecedant DF: laquelle façon d'argumenter nous demontrerons estre valable sur la 18 p. 5.

L'autre moyen d'argumenter peut estre dit composition contraire de raison; c'est à sçavoir quand l'antecedant est comparé à l'antecedant & consequent comme un seul. Comme si AC est à CB, ainsi que DF à FE, & nous inferons par composition contraire de raison: donc comme AC antecedant sera à la toute AB, composée de l'antecedant & du consequent, ainsi DF antecedant sera à la toute DE, composée de l'antecedant & du consequent. Nous demontrerons sur la 18 p. de ce liv. que cette forme d'argumẽter est valable.

15. Division de raison, est lors qu'on prend l'excez par lequel l'antecedant surpasse

le consequent, pour le comparer à iceluy même consequent.

Comme si on dit qu'il y a telle raison de AB à CB, que de DE à FE : donc aussi AC, excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent, sera a CB consequent, comme DF excez par lequel l'antecedant excede le consequent, sera à FE consequent. Or les Autheurs concluent ordinairement avec cette raison ainsi : comme AB est à CB, ainsi DE est à FE: donc en divisant AC sera aussi à CB, comme DF à FE. Ce qui sera demontré en la 17. p. de ce livre.



A ce moyen d'argumenter en peuvent aussi estre ajoutez deux autres : le premier peut estre apellé division converse de raison : c'est à sçavoir quand le consequent est comparé à l'excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent : Comme si AB est à CB, comme DE à FE, & nous inferons : donc aussi par division converse de raison, comme CB consequent sera à AC excez par lequel l'antecedant surmonte le consequent : ainsi FE consequent sera à DF, excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent : laquelle maniere d'argumenter nous demontrerons pouvoir estre sur la 17. pr. 5. Il est manifeste qu'en l'une & l'autre d'icelles argumentations par division de raison, l'antecedant doit estre plus grand que le consequent.

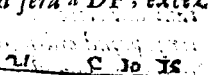
L'autre moyen d'argumenter peut estre dit division contraire de raison, c'est à sçavoir quand l'antecedant est conferé à l'excez, par lequel le consequent excede l'antecedant. Comme quand on dit, AC estre à AB,

comme DF à DE : Donc aussi par division contraire de raison AC antecedant sera à CB, excez par lequel le consequent surmonte l'antecedant, comme DF antecedant sera à EF, excez par lequel le consequent surpasse l'antecedant: lequel moyen d'argumenter nous demontrerons sur la 17. prop. de ce livre.

Il est evident qu'en cette division contraire de raison, le consequent doit estre plus grand que l'antecedant.

16. Conversion de raison, est comparer l'antecedant à l'excez, par lequel l'antecedant surpasse le consequent.

Comme si on dit, que comme AB est à CB, ainsi DE à FE: & on vient à conclure, que AB antecedant sera aussi à AC, excez par lequel il surmonte le consequent comme DE antecedant sera à DF, excez par lequel l'antecedant excede le consequent, cela sera dit conversion de raison. En cette sorte d'argumenter les Autheurs parlent ordinairement ainsi: comme AB est à CB, ainsi DE est à FE: Donc par conversion de raison AB sera à AC, comme DE à DF: laquelle sorte d'argumenter sera demontrée au Cor. de la 19. pr. de ce livre.



17. Raison égale, est lors qu'il y a plusieurs grandeurs d'un costé, & autant de l'autre en multitude, prise de deux en deux en même raison, & que la premiere des premieres grandeurs, est à la derniere des mesmes, comme la premiere des secondes est à la derniere des mesmes.

Autrement, c'eſt lors qu'on prend les extrémes par la ſouſtraction des moyennes.

Comme s'il y a d'un coſté quatre quantitez, A, B, C, D: & autant d'un autre E, F, G, H, leſquelles ſoient priſes deux à deux en meſme raiſon, c'eſt à dire que A ſoit à B, comme E à F; & B à C, comme F à G; & C à D, comme G à H: ſi on infere que comme A eſt à D, premiere & derniere des premieres grandeurs, ainſi E eſt à H, premiere & derniere des ſecondes. Cette maniere d'argumenter eſt dite raiſon egale, ou bien d'egalité. Et d'autant que cette maniere d'argumenter ſe prend ordinairement en deux ſortes, ſçavoir eſt quand les grandeurs qui ſont en meſme raiſon ſont priſes d'ordre: & quand l'ordre eſt perverty: Euclide explique és deux def. ſuivantes que c'eſt que proportion ordonnée, & perturbée.

18. Proportion ordonnée, eſt quand l'antecedant eſt au conſequent, comme l'antecedant eſt au conſequent: & que le conſequent eſt à quelqu'autre, comme le conſequent eſt auſſi à quelqu'autre.

Cecy eſt aiſé à entendre par l'exemple de la def. precedente, où nous avons poſé A eſtre à B, comme E à F; & B à C, comme F à G, & C à D, comme G à H: Car

Car ainsi les termes des 4. premieres quantitez sont pris d'un mesme ordre, que ceux des 4. dernieres; & partant cette proportion est dite ordonnée. Or que le moyen d'argumenter par raison d'egalité, la proportion d'ordre estant observée, soit bon, il sera demonstré en la 22. p. de ce livre.

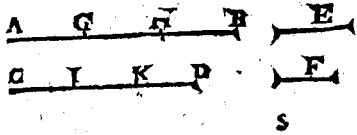
19. Proportion troublée, est quand trois grandeurs étans d'un côté, & autant d'un autre, la premiere est à la seconde, comme la cinquiéme à la sixiéme, & comme la seconde à la troisiéme, ainsi la quatriéme à la cinquiéme.

Comme si A est à B, ainsi que E est à F; & comme B est à C, ainsi D à E: cette proportion sera dite troublée ou perturbée, d'autant qu'un mesme ordre n'est pas gardé en la comparaison des premieres grandeurs entr'elles, qu'és secondes aussi entr'elles. Car és premieres quantitez, la premiere est comparée à la seconde, & cette-cy à la 3e: mais és secondes quantitez la 2e est comparée à la 3e, & la premiere à la seconde. Or que le moyen d'argumenter par raison égale, la proportion troublée estant gardée, soit bon, il sera demonstré en la 23. p. de ce livre.

THEOR. 1. PROP. 1.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra équemultiplices d'autant d'autres grandeurs, chacune à la sienne; comme l'une sera multiplice de l'une, ainsi les toutes seront multiplices des toutes.

Soient tant de grãdeurs qu'on voudra AB & CD, équemultiplices



d'autant d'autres grandeurs E & F. Je dis que les grandeurs AB & CD enſemble, ſeront autant multiplices de E & F enſemble, comme AB l'eſt de E, ou CD de F.

Car puis que *AB* eſt multiplice de E; E meſurera *AB* certain nombre de fois par la 2. def. de ce livre; qu'elle la meſure donc trois fois, & ſoit icelle AB couppée en trois parties égales, AG, GH HB, chacune deſquelles ſera égale à E. Le même ſe peut dire de la grandeur CD, laquelle on couppera auſſi en trois parties égales CI, IK, KD, étant chacune d'icelles égale à F: mais qui a choſes égales, ſçavoir à AG & E, adjoûte choſes égales, ſçavoir CI & F, les toutes AG, CI enſemble, ſeront égales aux toutes E & F enſemble. Par même raiſon GH & IK enſemble, ſeront égales à icelles E & F enſemble pareillement HB & KD, aux mêmes E & F. Autant donc qu'il y a de grandeurs en AB, égales à E; & en CD d'égales à F: autant y en a-t'il en AB & CD priſes enſemble, qui ſont égales à E & F priſes enſemble; Parquoy les deux AB & CD enſemble, ſeront triples des deux enſemble E & F, comme la ſeule AB eſt triple de la ſeule E; ou la ſeule CD de la ſeule F. S'il y a donc tant de grandeurs qu'on voudra equemultiplices, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

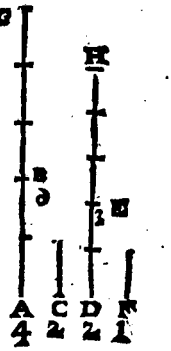
THEOR. 2. PROP. II.

Si la premiere eſt autant multiplice de la ſeconde, que la troiſiéme de la quarte, & la cinquiéme autant multiplice de la ſeconde, que la ſixiéme de la quarte; la compoſée de la premiere & cinquiéme, ſera autant multiplice de la ſeconde, comme la compoſée de la troiſiéme & ſixiéme, le ſera de la quarte.

Soit la premiere grandeur AB, autant multiplice de la ſeconde C, comme la 3. DE l'eſt de la 4 F: & ſoit la 5. BG autant multiplice de la 2 C, comme la 6. EH de la 4. F: Je dis que AG compoſée de la premiere & cinquiéme AB & BG, ſera autant multiplice de la 2.

C, comme DH composée de la tierce & sixiéme DE & EH, le sera de la quarte F.

Car puis que AB est autant multiplice de C, comme DE de F, il y a en AB autant de grandeurs égales à C, qu'il y en a en DE d'égales à F. Par même raison, il y aura aussi en BG autant de grandeurs égales à C, comme il y en a en EH d'égales à F. Il y aura donc en AG autant de grandeurs égales à C, qu'il y en a en DH d'égales à F : parquoy AG composée de la premiere & cinquiéme est autant multiplice de la seconde C, comme DH composée de la tierce & sixiéme l'est de la quarte F. Parquoy si la premiere est autant multiplice de la seconde, que la troisiéme de la quarte, &c. Ce qu'il falloit demontrer.



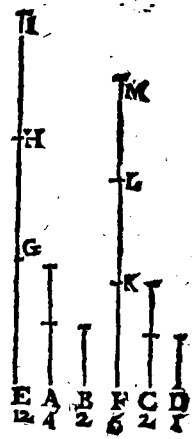
THEOR. 3. PROP. III.

Si la premiere est autant multiplice de la seconde, comme la tierce de la qüarte ; & on prend des équemultiplices de la premiere, & troisiéme: aussi le multiplice de la premiere sera autant multiplice de la seconde, que le multiplice de la tierce le sera de la quarte.

Soit A autant multiplice de B, comme C l'est de D; & de la premiere & tierce A, C, soient pris les equemultiplices E & F. Je dis que E sera autant multiplice de B 2e, que F de D 4e.

Car puis que E est autant multiplice de A, que F l'est de C : E contiendra autant de parties égales à A, comme F de parties égales à C. Soit donc E divisée en EG, GH & HI, chacune égale à A : Item F divisée en FK, KL & LM, chacune égale à C : & d'autant que EG & FK sont égales à A & C, lesquelles sont equemultiplices de B & D par l'hypothese, aussi EG & FK

seront equemultiplices des mêmes B & D. Par même raison GH & KL : item HI & LM, seront equemultiplices d'icelles B & D. Vû donc que EG premiere grandeur est autant multiplice de la seconde B, que FK tierce l'est de D quarte. Item GH cinquiéme autant multiplice de la même seconde B, que KL sixiéme de la quatriéme D ; aussi EH composée de la premiere & cinquiéme sera autant multiplice de la seconde B, que FL composée de la tierce & sixiéme l'est de la quatriéme D, par la prec. prop. Derechef puis que EH premiere grandeur est autant multiplice de la seconde B, que FL tierce l'est de D quarte, & HI cinquiéme est aussi autant multiplice de la seconde B, que LM sixiéme l'est de la quatriéme D : EI composée de la premiere & cinquiéme sera aussi autant multiplice de la seconde B, que FM composée de la tierce & sixiéme l'est de D quatriéme par la 2. p. de ce livre. Si donc la premiere est autant multiplice de la seconde, &c. Ce qu'il falloit demontrer.



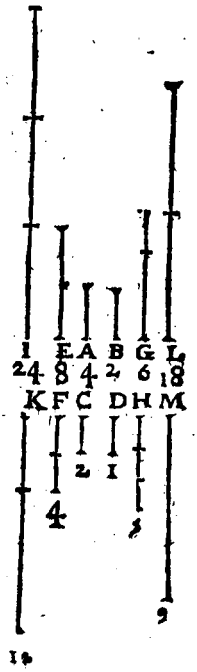
THEOR. 4. PROP. IV.

Si la premiere est à la seconde, en même raison que la tierce à la quarte : aussi les equemultiplices de la premiere & tierce, auront même raison aux equemultiplices de la seconde & quarte, en quelque multiplication que ce soit ; si elles sont prises ainsi qu'elles s'entrerespondent.

Soit A à B en même raison que C à D, & soient prises E & F equemultiplices de A premiere & C tierce : Item G & H equemultiplices de B seconde & D quarte,

ſelon quelque multiplication que ce ſoit, Je dis qu'il y a même raiſon de E à G, que de F à H.

Car ſi on prend I & K équemultiplices de E & F, pareillement L & M équemultiplices de G & H : d'autant que E premiere, eſt autant multiplice de A ſeconde, que F tierce l'eſt de C quarte, & I, K ſont prinſes équemultiplices d'icelles E, F premiere & tierce; auſſi par la 3. prop. de ce livre I & K, ſeront equemultiplices de A & C, ſeconde & quarte. Par meſme raiſon L & M, ſeront auſſi équemultiplices de B & D : & puis que A eſt à B comme C à D : & d'icelles A & C, premiere & tierce, ont été demonſtrées I & K équemultiplices; Mais de B & D ſeconde & quarte, autres équemultiplices L & M : par la converſe de la 6. def. de ce livre, ſi I deffaut, eſt égal, ou plus grand que L, auſſi K deffaudra, ſera égal, ou plus grand que M, ſelon quelconque multiplication que ſoient pris iceux équemultiplices. Et pour autant que I & K, ſont équemultiplices de E & F; pareillement L & M de G & H : par la meſme 6. def. il y aura meſme raiſon de E à G, comme de F à H. Si donc la premiere eſt à la ſeconde en meſme raiſon que la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



COROLLAIRE.

Par cecy eſt manifeſte la preuve de la raiſon inverſe, qu'Euclide a expliquée en la 13. def. de ce livre, ſçavoir eſt que ſi 4. grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront auſſi eſtans priſes à rebours, c'eſt à dire que E eſtant à G comme F à H, auſſi en changeant G ſera à E comme H à F. Car puis qu'il a eſté de-

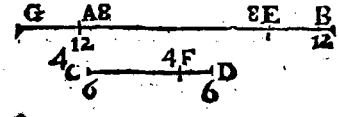
monſtré que ſi I defaut, eſt égal ou plus grand que L, auſſi K defaudra, ſera égal, ou plus grand que M, ſelon quelconques multiplices. Il appert auſſi que ſi L defaut, eſt égal, ou plus grand que I, auſſi M defaudra, ſera égal, ou plus grand que K, ſelon quelconques multiplications: Et partant par la 6. def. il y aura meſme raiſon de G à E que de H à F.

THEOR. 5. PROP. V.

Si une grandeur eſt autant multiplice d'une grandeur, que la retranchée de la retranchée: auſſi le reſte ſera autant multiplice du reſte que la toute de la toute.

Soit la toute AB, autant multiplice de la toute CD, comme la retranchée AE, de la retranchée CF. Je dis que le reſte EB ſera autant multiplice du reſte FD, que la toute AB l'eſt de la toute CD.

Car AG étant faite autant multiplice de FD comme AE l'eſt de CF, ou comme la toute AB l'eſt de la toute CD: d'autant que AE, AG ſont equemultiplices de CF, FD: par la 1. pr. de ce livre, la toute GE, ſera autant multiplice de la toute CD, comme AE de CF: Mais auſſi AB, eſt autant multiplice de CD comme AE de CF, donc GE, AB, ſont équemultiplices de CD, & partant égales entr'elles par la 6. com. ſent. Parquoy en oſtant ce qui leur eſt commun, ſçavoir AE, reſteront égales GA, EB; qui partant ſeront équemultiplices de FD, puis que GA a été poſée multiplice d'icelle FD, & autant comme AB l'eſt de CD: donc auſſi le reſte EB, ſera autant multiplice du reſte FD, que la toute AB l'eſt de la toute CD. Parquoy ſi une grandeur eſt autant multiplice d'une grandeur, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

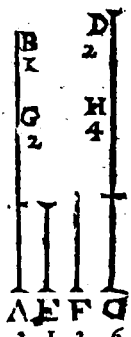


THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux grandeurs ſont équemultiplices de deux autres grandeurs, & d'icelles on retranche des équemultiplices : ou les reſtes ſeront égaux aux mêmes, ou équemultiplices d'icelles.

Soient les grandeurs AB, CD, équemultiplices des grandeurs E, F, & les retranchées AG, CH auſſi équemultiplices des mêmes grandeurs E, F. Je dis que les reſtes GB, HD, ſeront ou égaux aux mêmes E, F, ou équemultiplices d'icelles.

Car d'autant que AB & CD, ſont équemultiplices de E & F ; en AB il y aura autant de grandeurs égales à E, comme en CD de grandeurs égales à F. Pareillement d'autant que la retranchée AG eſt autant multiplice de E, que la retranchée CH l'eſt de F ; AG contiendra autant de grandeurs égales à E, que CH de grandeurs égales à F, par la 1. & 2. def. de ce livre. Si donc d'égales multitudes de grandeurs AB & CD, on ôte égales multitudes de grandeurs AG & CH, les multitudes reſtantes GB & HD ſeront égales : c'eſt-à-dire que GB contiendra autant de fois E, comme HD contiendra F ; ou bien ſi GB eſt égale à E, auſſi HD ſera égale à F : & par ainſi iceux reſtes GB, HD ſeront égales à E & F, chacune à la ſienne, ou bien ſeront equemultiplices d'icelles. Parquoy ſi deux grandeurs ſont equemultiplices de deux autres grandeurs, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



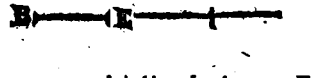
THEOR. 7. PROP. VII.

Les grandeurs égales, ont même raiſon à une même grandeur ; & cette-cy aura même raiſon aux grandeurs égales.

Soient deux grandeurs égales A & B, & une autre quelle

qu'elle ſoit C. Je dis que A & B ont même raiſon l'une que l'autre à C, & que C aura même raiſon à A qu'à B.

Qu'il ne ſoit ainſi; ſoient pris D & E équemultiplices de A prémiere, & B tierce, ſoit auſſi pris F quelcõque multiplice de C, ſeconde & quarte : donc puis que D eſt autant multiplice de A, que E eſt multiplice de B; & que A & B ſont poſées égales : auſſi D & E ſeront égales par la 6. com. ſent. Si donc D eſt plus grande, égale, ou plus petite que F, auſſi E ſera plus grande, égale, ou plus petite que la méme F, & par la ſuſdite 6. def. de ce livre, il y aura telle raiſon de A à C, comme de B à la méme C.



Quant à l'autre partie, elle ſe prouve tout de méme par la ſuſdite def. en prenant les mémes équemultiplices, & montrant l'excez, &c. ou bien plus facilement par la raiſon inverſe. Car puis qu'il a été demontré que A eſt à C comme B à C, en changeant C ſera à A, comme C à B par le Corol. de la 4. prop. de ce livre. Donc les grandeurs égales ont même raiſon à une même, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Des grandeurs inégales, la plus grande a plus grande raiſon à une méme grandeur, que la plus petite : & une méme grandeur a plus grande raiſon à la plus petite grandeur, qu'à la plus grande.

Soient deux grandeurs inégales AB & C, deſquelles AB eſt la plus grande, & une troiſiéme quelle qu'elle ſoit D. Je dis que AB a plus grande raiſon à la troiſiéme D, que non pas C : item, que D a plus grande raiſon à C, qu'à AB.

Qu'il ne ſoit ainſi : ſoit entenduë AB prémiere grandeur, D ſeconde, C tierce, & D quarte. D'autant que AB eſt plus grande que C, ſoit retranchée AE égale à icelle

C, & soient pris des équemultiplices, à sçavoir FG de BE, & GH de EA, en sorte que chacune d'icelles FG & GH soit plus grande que D: & puis que les deux FG, GH, sont équemultiplices des deux BE, EA, par la 1. prop. de ce livre, la toute HF sera autant multiplice de la toute AB, comme HG de AE, ou de C son égale; Maintenant soit prise IK aussi multiplice de D, en sorte qu'elle soit plus petite que HF, mais plus grande que HG: (ce qui est facile, puis que D est plus petite que ny FG, ny GH: si bien qu'il faut seulement adjoûter tant de fois la grandeur D, jusques à ce que l'on ait ce que l'on cherche.) D'autant que FH, GH sont équemultiplices de AB premiere, & C troisiéme, si IK est prise pour l'équemultiplice, tant de D seconde, que D quatriéme, il est évident que HF multiplice de AB premiere, étant plus grande que IK multiplice de D seconde, HG multiplce de C tierce, n'est pas plus grande que IK multiplice de D quarte: & partant par la huitiéme def. de ce livre, il y aura plus grande raison de AB à D, que de C à la même D.

Quant à la seconde partie: d'autant que IK multipliee de la premiere D, (car il faut maintenant poser D premiere & troisiéme, C seconde, & AB quatriéme) est plus grande que HG multiplice de la seconde C; & IK multiplice de la troisiéme D, est moindre que FH multiplice de AB quatriéme: Il y aura plus grande raison de D à C, que de D à AB, par la 8. def. de ce livre. Parquoy des grandeurs inégales, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les grandeurs qui ont même raison à une même grandeur, sont égales entr'elles: & celles-là aussi sont égales, ausquelles une même grandeur a même raison.

Soient premierement deux grandeurs A & B, lesquelles

ayent même raiſon l'une que l'autre à la troiſiéme C. Je dis qu'elles ſont égales entr'elles.

Car ſi elles n'étoient égales, il faudroit que l'une ou l'autre fuſt plus grande; & par la precedente prop. icelle plus grande auroit plus grande raiſon à C, que la plus petite, ce qui eſt contre l'hypotheſe: donc A & B ne ſont pas inégales, mais égales.

Soient maintenant A & B, à chacune deſquelles C ait une même raiſon. Je dis qu'icelles A & B ſont auſſi égales entr'elles: car autrement il faudroit que l'une fuſt plus petite que l'autre: & par la même 8. prop. à icelle plus petite, C auroit plus grande raiſon qu'à la plus grande: ce qui eſt contre l'hypotheſe: A & B ne ſont donc pas inégales, mais égales. Donc les grandeurs qui ont même raiſon, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 10. PROP. X.

Des grandeurs qui ont raiſon à une même grandeur, celle qui a plus grande raiſon eſt la plus grande: & celle-là à laquelle une même grandeur a plus grande raiſon, eſt la plus petite.

Soient trois grandeurs A, B, C: & en premier lieu la raiſon de A à C ſoit plus grande que de B à la même C. Je dis que A ſera plus grande que B.

Autrement, ſi A n'étoit plus grande que B, elle ſeroit égale, ou plus petite, ce qui eſt impoſſible: car ſi elles étoient égales, elles auroient même raiſon l'une que l'autre à C, par la 7. prop. de ce livre, ce qui ſeroit contre l'hypotheſe: ſi auſſi elle étoit plus petite, elle auroit plus petite raiſon à C que non pas B, par la 8. prop. de ce même livre, ce qui eſt pareillement contre l'hypotheſe. Donc A ne ſera pas moindre ny égale à B: & par conſequent ſera plus grande.

Maintenant que C aye plus grande raiſon à B, que non pas à A: Je dis que B ſera plus petite que A. Autrement ſi B n'étoit moindre que A, elle ſeroit égale,

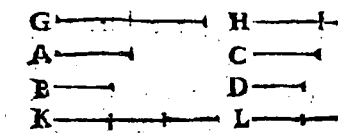
ou plus grande, ce qui eſt impoſſible : car ſi A & B étoient égales, C auroit même raiſon à l'une qu'à l'autre par la ſuſdite 7. prop. de ce livre : ce qui eſt contre nôtre hypotheſe : ſi auſſi elle étoit plus grande, C auroit plus grande raiſon à A qu'à B par la ſuſdite 8. pr. ce qui eſt auſſi contre l'hypotheſe. Donc B ſera moindre que A. Parquoy des grandeurs qui ont raiſon à une même grandeur, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 11. PROP. XI.

Les raiſons qui ſont de même à une autre, ſont auſſi de même entr'elles.

Soit A à B, comme C à D, & comme C à D, ainſi E à F ; Je dis que comme A eſt à B, ainſi E ſera à F.

Qu'il ne ſoit ainſi : de toutes les antecedantes A, C, E, ſoient priſes quelconques équemultiplices, G, H, I. Pareillement, des conſequentes B, D, F, quelconques équemultiplices, K, L, M. D'autant que A eſt à B



comme C à D, par la converſe de la 6. def. de ce livre, ſi G multiplice de A, eſt égale, plus grande, ou plus petite que K multiplice de B ; auſſi H multiplice de C, ſera égale, plus grande, ou plus petite que L, multiplice de D. Item, puis que comme C eſt à D, ainſi E eſt à F, ſi H multiplice de C eſt égale, plus grande, ou plus petite que L multiplice de D, auſſi I multiplice de E, ſera égale, plus grande, ou plus petite que M multiplice de F : Parquoy ſi G multiplice de A premiere, eſt plus grande, égale, ou plus petite que K multiplice de B ſeconde, auſſi I multiplice de E tierce, ſera plus grande, égale, ou plus petite que M multiplice de F quarte ; & par la ſuſdite 6. def. comme A ſera à B, ainſi E ſera à F. Parquoy les raiſons qui ſont de même, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Clavius démontre en ſuite de ce, que les raiſons qui ſont de même à d'autres, ſont auſſi de même entr'elles : Comme ſi A eſt à B, ainſi que C à D, & que E ſoit à F, comme A à B; & G à H, comme C à D; Auſſi comme E ſera à F, ainſi G ſera à H. Car d'autant que les raiſons de E à F, & de C à D ſont de même à la raiſon de A à B, par la 11. p. 5. comme E ſera à F, ainſi C à D. Derechef, pource que les raiſons de E à F, & de G à H ſont de même à la raiſon de C à D : auſſi par la même 11. prop. 5. comme E ſera à F, ainſi G ſera à H.

	A	B	C	D
	3.	2.	6.	4.
	E	F	G	H
	9.	6.	12.	8.

Derechef, ſi les raiſons de A à B, de C à D & de E à F ſont de même entr'elles; & que comme A eſt à B, ainſi G ſoit à H; & comme C à D, ainſi I à K; & comme E eſt à F, ainſi L ſoit à M : auſſi les raiſons de G à H, de I à K, & de L à M ſont de même entr'elles : Car ſuivant ce que nous avons démontré cy-deſſus de quatre raiſons, comme G eſt à H, ainſi I eſt à K, pource que ces raiſons ſont ſemblables aux raiſons de A à B, & de C à D. Et en la même maniere, comme I ſera à K, ainſi L ſera à M, d'autant qu'icelles raiſons ſont de même aux raiſons de C à D, & de E à F, leſquelles ſont ſemblables. Item, comme G ſera à H, ainſi L à M ; puis que ces raiſons ſont de même que les raiſons de A à B, & de E à F, qui ſont poſées égales : Le même ſeroit encores démontré s'il y avoit davantage de raiſons.

	A	B	C	D	E	F
	3.	2.	6.	4.	9.	6.
	G	H	I	K	L	M
	12.	8.	18.	12.	30.	20.

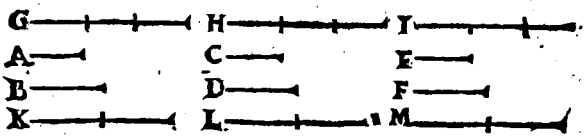
THEOR. 12. PROP. XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra ſont proportionnelles : comme l'une des antecedantes ſera à ſa conſequente, ainſi toutes les antecedantes ſeront à toutes les conſequentes.

Soient ſix grandeurs proportionnelles A, B, C, D, E, F, ſçavoir que A ſoit à B, comme C eſt à D, & E à F :

Je dis que comme l'une des antecedantes eſt à ſa conſequente ; ſçavoir eſt A à B, ainſi toutes les antecedantes enſemble A, C, E, ſeront à toutes les conſequentes enſemble B, D, F.

Car étans priſes des antecedantes A, C, E, les équemultiplices G, H, I : item des conſequentes B, D, F, les équemultiplices K, L, M ; toutes les trois multiplices G, H, I enſemble, ſeront autant multiplice des trois grandeurs A, C, E enſemble, comme la ſeule G eſt multiplice de la ſeule A, par la premiere prop. de ce livre. Auſſi par la même raiſon toutes les trois multiplices K, L, M enſemble, ſeront autant multiplice des trois grandeurs B, D, F enſemble, comme K ſera multiplice de B. Partant puis que A, B, C, D, E, F ſont proportionnelles, ſi G multiplice de A premiere,



eſt plus grande, égale, ou plus petite que K multiplice de B ſeconde, auſſi H multiplice de C troiſiéme, ſera plus grande, égale, ou plus petite que L, multiplice de D quatriéme, par la converſe de la 6. def. de ce livre, & ainſi des deux autres : Partant ſi G eſt plus grande, égale, ou plus petite que K, le compoſé des trois G, H, I, ſera auſſi plus grand, égal, ou plus petit que le compoſé des trois K, L, M. Donc par la même 6. def. comme A ſera à B, ainſi les trois A, C, E enſemble, ſeront aux trois B, D, F enſemble. Parquoy ſi tant de grandeurs qu'on voudra ſont proportionnelles, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si la premiere eſt à la ſeconde comme la tierce à la quarte : mais la tierce a plus grande raiſon à la quarte, que la cinquiéme à la ſixiéme : auſſi la premiere aura plus grande raiſon à la ſeconde, que la cinquiéme à la ſixiéme.

Soit A premiere à B seconde, (*en la prec. fig.*) comme C tierce à D quarte, & qu'il y ait plus grande raison de C tierce à D quarte, que de E cinquiéme à F sixiéme. Je dis qu'il y aura aussi plus grande raison de *A* premiere à B seconde, que de E cinquiéme à F sixiéme.

Car estans prises des antecedantes A, C, E, les équemultiplices G, H, I, & des consequentes B, D, F, les équemultiplices K, L, M: D'autant que A est à B, comme C à D, si G multiplice de A est égale, plus grande, ou plus petite que K multiplice de B, aussi par la converse de la 6. def. de ce livre, H multiplice de C, sera égale, plus grande, ou plus petite que L multiplice de D. Pareillement, d'autant qu'il y a plus grande raison de C premiere à D seconde, que de E tierce à F quatriéme, si H multiplice de C, est plus grande que L multiplice de D, il n'est pas necessaire que I multiplice de E excede M multiplice de F, par la 8. def. de ce livre convertie: donc aussi si G excede K, necessairement I n'excede pas M: & partant par ladite 8 def. il y a plus grande raison de A à B, que de E à F. Si donc la premiere est à la seconde, comme la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Que si la tierce C a moindre raison à la quarte D, que la cinquiéme E à la sixiéme F: aussi la premiere A aura moindre raison à la seconde B, que la cinquiéme E à la sixiéme F. Car si la raison de C à D est moindre que celle de E à F, c'est à dire, que la raison de E premiere à F seconde étant plus grande que celle de C tierce à D quarte, si I excede M, il n'est pas necessaire que H excede L, car quelquesfois elle defaut, ou est égale à icelle par la 8. def. de ce liv. convertie. Mais si H defaut, ou est égale à L, aussi G défaudra, ou sera égale à K par la 6. def. convertie, parce qu'on a posé C 1. estre à D 2. comme A 3. à B 4. Parquoy si I excede M necessairement G n'excedera pas K: & partant par la susdite 8. def. il y aura plus grande raison de E à F, que de A à B, c'est à-dire que la raison de A à B sera moindre que de E à F: ce qui étoit proposé.

En la mesme maniere sera demonstré, que s'il y a plus grande raison de la premiere à la seconde, que de la tierce à la quarte: mais la tierce a plus grande raison à la quarte, que la

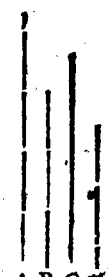
cinquiéme à la ſixiéme ; pareillement la premiere aura beaucoup plus grande raiſon à la ſeconde, que la cinquiéme à la ſixiéme.

Que ſi la premiere a moindre raiſon à la ſeconde, que la tierce à la quarte, & la tierce a moindre raiſon à la quatriéme, que la cinquiéme à la ſixiéme : auſſi la premiere aura beaucoup moindre raiſon à la ſeconde, que la cinquieſme à la ſixieſme.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Si la premiere eſt à la ſeconde, comme la tierce à la quarte, & que la premiere ſoit plus grande que la tierce : auſſi la ſeconde ſera plus grande que la quarte : & ſi égale, égale : ſi plus petite, plus petite.

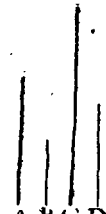
Soit A à B, comme C eſt à D, & que A premiere ſoit plus grande, égale, ou plus petite que C troiſiéme : Je dis que B ſeconde ſera auſſi plus grande, égale, ou plus petite que D quatriéme.



Soit premierement A plus grande que C : il y aura donc plus grande raiſon de A à B, que de C à la même B, par la 8. prop. de ce livre, & par conſequent plus grande raiſon de C à D, que de C à B, eſtant icelle la même raiſon que de A à B, & par la 10. prop. de ce même livre B ſera plus grande que D.

Soit puis apres A égale à C, & par la 7. prop. de ce même livre A ſera à B, comme C à B : & puis que les raiſons de C à D, & C à B, ſont les mêmes que de A à B, les raiſons de C à D & de C à B, ſeront de même entr'elles, par la 11. prop. de ce livre, & partant par la 9. prop. B & D, ſeront égales.

Finalement ſoit A moindre que C, & par la ſuſdite 8. prop. il y aura plus grande raiſon de C à D, que de A à D; & par conſequent plus grande raiſon de A à B, que de A à D, puis qu'il y a même raiſon de *A* à B, que de C à D, & par la 10. prop. de ce même livre B ſera moindre que D. Si donc la premiere eſt à la ſeconde, comme la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit prouver.



SCHOLIE.

Que ſi la ſeconde eſt plus grande, ou égale, ou moindre que la quarte: auſſi la premiere ſera plus grande, ou égale, ou moindre que la tierce. Car puis que A eſt à B comme C à D, en changeant B ſera à A comme D à C par le Cor. de la 4. p. de ce livre. Donc ſi B eſt plus grande, ou égale, ou moindre que D, auſſi A ſera plus grande, ou égale, ou moindre que C par la ſuſdite 14. prop.

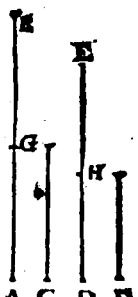
Or Euclide n'a pas demonſtré que ſi la premiere eſt plus grande, égale, ou plus petite que la ſeconde: auſſi la tierce ſera plus grande, égale, ou moindre que la quarte, pource que cela eſt evident à cauſe de la ſimilitude des raiſons. Ce que nous pourrions neantmoins demonſtrer apres Commandin: mais d'autant que ſa demonſtration ne compete qu'aux grandeurs de meſme genre, nous nous tiendrons à ce que la nature des proportions nous monſtre, encore que les grandeurs ſoient de divers genres.

THEOR. 15. PROP. XV.

Les grandeurs ſont entr'elles, comme ſont leurs équemultiplices entr'elles: étans priſes comme elles s'entrereſpondent.

Soit AB autant multiplice de C comme DE eſt multiplice de F. Je dis que AB ſera à DE, comme C à F. Car puis que AB & DE ſont equemultiplices d'icelles C & F, il y

il y aura en AB autant de parties égales à C, comme DE contient de parties égales à F : soit donc divisée AB és parties AG, GB égales à C, & DE és parties DH, HD égales à F; & par la 7. prop. de ce livre une chacune partie de AB, sera à une chacune partie de DE, comme C est à F; & par la 12. prop. toutes les antecedantes AB, seront à toutes les consequentes DE, comme AG l'une des antecedantes, est à DH sa consequente, c'est-à-dire comme C à F, puis que c'est la même raison. Parquoy les grandeurs sont entr'elles, &c. Ce qu'il falloit prouver.

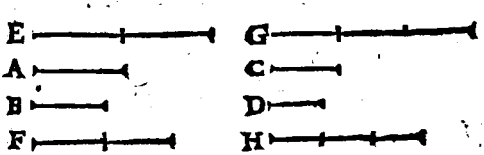


THEOR. 16. PROP. XVI.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles le seront aussi étans permutées.

Soit A à B, comme C à D. Je dis qu'en permutant A sera à C, comme B est à D.

Car si on prēd E & F equemultiplices de A & B; item G & H



equemultiplices de C & D; E sera à F, comme A à B par la prop. precedente, & G à H comme C à D; & par consequent E étant à F, & C à D, en même raison que A à B, elles sont de même entr'elles par la 11. prop. de ce livre. Derechef puis que les raisons de E à F, & G à H sont les mêmes que de C à D, elles seront aussi de même entr'elles par la susdite 11. prop. c'est-à-dire, que comme E premiere est à F seconde, ainsi sera G. tierce à H quarte : parquoy par la 14. prop. de ce même livre, si E premiere est plus grande, égale, ou moindre que G tierce, aussi F seconde sera plus grande, égle, ou moindre que H qua-

triéme, en quelconque multiplication que ſoient priſes les equemultiplices; & par la 6. def. d'iceluy cinquiéme livre *A* ſera à C, comme B à D: (puiſque E & F ſont equemultiplices de A premiere, & *B* troiſiéme; & G & H equemultiplices de *C* ſeconde & D quatriéme, & celles-là defaillent, ſont égales, ou excedent celles-cy, &c.) Parquoy ſi quatre grandeurs ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Or la demonſtration de cette propoſition a ſeulement lieu quand les quatre grandeurs ſont de meſme genre. Car ſi les deux A & B étoient d'un genre, & les deux C & D d'un autre: auſſi les équemultiplices E & F ſeroient d'un genre, c'eſt à ſçavoir duquel ſont A & B, & les equemultiplices G & H d'un autre genre, c'eſt à ſçavoir de celuy duquel ſont C & D: Parquoy on ne pourroit pas dire E eſtre plus grande, égale, ou moindre que G: & partant rien ne ſe concluroit par la 6. def. de ce livre. La raiſon permutée a donc ſeulement lieu quand les quatre grandeurs ſont d'un meſme genre.

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si les grandeurs compoſées ſont proportionnelles; icelles étans diviſées, ſeront auſſi proportionnelles.

Soient les grandeurs compoſées AB, CB, & DE, FE, proportionnelles, c'eſt-à-dire, que AB ſoit à CB, comme DE à FE. Je dis que les mêmes grandeurs étans diviſées ſont auſſi proportionnelles, c'eſt-à-dire que comme AC eſt à CB, ainſi DF eſt à FE.

Car d'icelles AC, CB, DF, FE ſoient priſes les équemultiplices GH, HL, IK, KM, chacune à chacune, & par la 1. prop. de ce livre GL ſera autant multiplice de AB, que GH de AC, c'eſt-à-dire comme IK de DF. Mais icelle IK eſt autant multiplice de DF, que IM de DE par la même 1. prop. donc GL, IM ſont équemultiplices de AB, DE. Derechef ſoient priſes LN,

MO equemultiplices de CB, FE. Pour autant que HL premiere eſt autant multiplice de CB ſeconde, que KM tierce de la quarte FE, & LN cinquiéme autant multiplice de CB ſeconde, que MO ſixiéme de la quarte FE; par la 2. p. de ce livre, HN ſera autant multiplice de CB ſeconde, que KO de FE quatriéme. Et puis que AB eſt à CB, comme DE à FE: & ont été priſes GL, IM equemultiplices de AB, DE, mais HN, KO de CB, FE: par la 6. def. convertie ſi GL multiplice de AB premiere excede, eſt égale, ou moindre que HN multiplice de CB ſeconde, auſſi IM, multiplice de DE tierce, excedera, ſera égale, ou moindre, que KO multiplice de FE quarte: ôtant donc les choſes communes HL, KM, ſi GH excede LN, auſſi IK excedera MO; & ſi égale, égale; & ſi moindre, moindre. Et d'autant que GH, IK ſont equemultiplices de AC premiere & DF tierce. Item LN, MO equemultiplices de CB ſeconde & FE quarte, & il a été demontré (en quelconque multiplication qu'ayent été priſes icelles equemultiplices) que les equemultiplices de la premiere & troiſiéme excedent, ſont égales, ou moindres, que les equemultiplices de la ſeconde & quatriéme, par la ſuſdite 6. déf. de ce cinquiéme livre AC ſera à CB, comme DF à FE: ce qui étoit propoſé. Si donc les grandeurs compoſées ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Nous démontrerons icy ce moyen-là d'argumenter, lequel en la 15. def. nous avons dit converſe de la raiſon diviſée: c'eſt-à-dire que ſi AB eſt à CB, comme DE à FE, auſſi CB ſera à AC, comme FE à DF. Car d'autant que comme AB à CB, ainſi DE à FE, en diviſant par la 17. p. 5. comme AC ſera à CB, ainſi DE à FE: & en changeant, comme CB ſera à AC, ainſi FE ſera à DF: ce qui étoit propoſé.

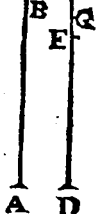
Par même maniere, ſera démontré ce moyen-là d'argumenter, lequel en la même 15. def. nous avons appellé contraire diviſion de raiſon: c'eſt-à-dire que ſi AC eſt à AB, comme DF à DE: auſſi AC ſera à CB, ainſi que DF à FE. Car puis que AC eſt à AB, comme DF à DE: en changeant, comme AB ſera à AC, ainſi DE à DF: donc en diviſant par la 17. p. 5. comme CB à AC: ainſi FE à DF: & en changeant derechef, comme AC à CB, ainſi DF à FE: ce qui étoit à demontrer.

THEOR. 18. PROP. XVIII.

Si les grandeurs diviſées ſont proportionnelles; icelles étans compoſées ſeront auſſi proportionnelles.

Soient les grandeurs diviſées AB, BC; & DE, EF proportionnelles. Je dis qu'en compoſant, AC eſt à CB, comme DF à EF.

Car ſi comme AC eſt à BC, ainſi DF n'eſt pas à EF; DF aura à quelque grandeur moindre ou plus grande que EF, même raiſon que AC à BC. Soit donc premierement DF à GF, moindre que EF, en même raiſon que AC à BC, s'il eſt poſſible: & en diviſant par la precedente propoſition, DG ſera à GF comme AB à BC. Mais comme AB à BC, ainſi DE eſt à EF: donc auſſi comme DG ſera à GF, ainſi DE ſera à EF par la 11. prop. de ce livre. Mais DG premiere eſt plus grande que DE troiſiéme: donc par la 14. propoſition de ce même livre GF ſeconde, ſera auſſi plus grande que EF quatriéme, la partie que le tout: ce qui eſt abſurde. Il n'y aura donc pas de DF à GF, moindre que EF, même raiſon que de AC à BC.



Par même diſcours on démontrera que DF n'aura pas à une grandeur plus grande que EF, même raiſon que AC à BC. Donc comme AC eſt à BC, ainſi DF eſt à EF, puiſque DF ne peut être à une grandeur moindre, ou plus grande que

EF, en même raison que AC à BC. Parquoy si les grandeurs divisées sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Nous démontrerons icy ces deux moyens-là d'argumenter ès proportions, lesquels nous avons descrits en la 14. def. de ce livre. Quant au premier, que nous avons nommé converse composition de raison : soit comme AB à BC ainsi DE à EE. Je dis, que comme AC est à AB, ainsi DF à DE. Car puis que comme AB est à BC, ainsi DE à EF, en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF à DE : donc en composant par la 18. p. cy-dessus, comme AC sera à AB, ainsi DF à DE : Ce qu'il falloit prouver.

Quant à l'autre moyen que nous avons appellé contraire composition de raison : soit derechef comme AB à BC, ainsi DE à EF : Je dis que par le contraire de composition de raison, comme AB à AC, ainsi DE à DF. Car puis que comme AB est à BC, ainsi DE à EF, en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF à DE : donc aussi en composant par la même prop. comme AC sera à AB, ainsi DF à DE ; & partant en changeant derechef, comme AB sera à AC, ainsi DE sera à DF : Ce qui étoit proposé à prouver.

THEOR. 19. PROP. XIX.

Si le tout est au tout, comme le retranché au retranché ; le reste sera aussi au reste, comme le tout est au tout.

Soit la toute AB à la toute DE, comme le retranché AC, au retranché DF. Je dis que le reste CB est aussi au reste FE, comme la toute AB à la toute DE.

Car puis que AB est à DE, comme AC à DF, aussi est permutant par la 16. prop. de ce livre AB sera à AC, comme DE à DF ; & par la 17. prop. de ce même livre, en divisant comme CB sera à AC, ainsi FE sera à DF : parquoy en permutant derechef par la susdite 16. prop. CB sera à FE, comme AC à DF, c'est-à-dire

comme la toute AB à la toute DE, puis que AB, DE, & AC, DF, ont été posées en même raison. Parquoy si le tout est au tout comme le retranché au retranché, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

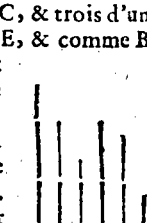
Nous demontrerons icy ce moyen-là d'argumenter ès proportions, qui est pris par la conversion de raison. Car soit comme AC à CB, ainsi DE à FE. Ie dis par conversion de raison, AB être aussi à AC, comme DE à DF. Car puis que comme AB est à CB, ainsi DE est à FE en divisant par la 17. prop. de ce livre, comme AC à CB, ainsi DF à FE: donc aussi en changeant comme CB à AC, ainsi EF à DF: & partant en composant par la 18. prop. de ce cinquiesme livre, comme AB sera à AC, ainsi DE sera à DF: ce qui étoit proposé.

THEOR. 20. PROP. XX.

Si trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, étans prises de deux en deux; sont en même raison, & qu'en raison égale la premiere soit plus grande que la troisiéme; aussi la quatriéme sera plus grande que la sixiéme; & si égale, égale; si plus petite, plus petite.

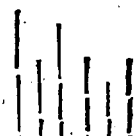
Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & comme A à B, ainsi D à E, & comme B à C, ainsi E à F: & que A premiere soit plus grande que C troisiéme. Je dis que D 4. sera aussi plus grande que F 6.

Car puis que A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A à B que de C à B par la 8. prop. de ce cinquiéme livre. Mais comme A est à B ainsi D à E, & par la 13. p. 5. il y aura plus grande raison de D à E, que de C à B. Item comme C est à B, ainsi F à E: (car puis que B est à C, comme E à F, en changeant comme

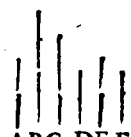


C ſera à B, ainſi F à E.) il y aura donc auſſi plus grande raiſon de D à E que de F à E, & par la 10. pr. 5. D ſera plus grande que F.

Que ſi A eſt égale à C ; je dis auſſi que D ſera égale à F. Car puis que A eſt égale à C, par la 7. p. de ce livre, A ſera à B comme C à B. Mais comme A eſt à B, ainſi D à E : & par la 11. pr. 5. D ſera à E, comme C à B : & comme C eſt à B, ainſi F à E. Donc D ſera auſſi à E comme F à E : & partant D & F ſeront égales par la 9. prop. de ce même livre.



En troiſiéme lieu, ſi A eſt moindre que C, je dis auſſi que D eſt moindre que F. Car puiſque A eſt moindre que C, il y aura moindre raiſon de A à B, que de C à B par la 8. p. 5. Mais comme A eſt à B, ainſi D eſt à E : il y aura donc auſſi moindre raiſon de D à E, que de C à B, par la 13. prop. de ce cinquiéme livre. Mais en changeant comme deſſus, C eſt à B, comme F à E. Il y a donc pareillement moindre raiſon de D à E, que de F à E : & partant par la 10. p. 5. D ſera moindre que F. Parquoy ſi trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

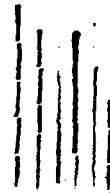


THEOR. 21. PROP. XXI.

Si trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, priſes de deux en deux ſont en même raiſon, étant leur proportion ſans ordre, & qu'en raiſon égale la premiere ſoit plus grande que la troiſiéme ; auſſi la quatriéme ſera plus grande que la ſixiéme ; & ſi égale, égale ; ſi plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'un côté A, B, C, & trois d'un autre, D, E, F, leſquelles priſes de deux en deux ſoient en même raiſon, étant leur proportion troublée, ſçavoir que comme A à B, ainſi E à F, & comme B à C, ainſi D à E. Je dis que comme A ſera égale, plus

grande, ou plus petite que C, auſſi D ſera égale, plus grande, ou plus petite que F.



Car ſi A eſt plus grande que C, il y aura plus grande raiſon de A à B, que de C à B par la 8. pr. de ce livre. Mais comme A à B, ainſi E à F; il y aura donc plus grande raiſon de E à F, que de C à B par la 13. prop. d'iceluy cinquiéme livre. Et d'autant que comme B eſt à C, ainſi D eſt à E, en changeant comme C ſera à B, ainſi E à D. Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de E à F, que de E à D: & partant par la 10. prop. 5. D ſera plus grande que F.

On peut prouver comme en la precedente, ſi A eſt égale, ou plus petite que C; auſſi D être égale, ou moindre que F. Parquoy ſi trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 22. PROP. XXII.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, leſquelles étans priſes de deux en deux ſoient en même raiſon; icelles en raiſon égale ſeront proportionnelles.

Soient trois grandeurs d'un côté A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & ſoit A à B comme D à E, & B à C comme E à F. Je dis qu'en raiſon égale comme A eſt à C, ainſi D à F.

Car étans priſes G, H equemultiplices de A, D: Item I, K, equemultiplices de B, E: Item L, M, equemultiplices de C, F: puiſque A eſt à B, comme D à E, auſſi G multiplice de A premiere ſera à I multiplice de B deu-

xiéme, comme H multiplice de D troisiéme à K multiplice de E quatriéme par la 4. p. de ce cinquiéme livre. Par même raison I sera à L, comme K à M. Vû donc que les trois grandeurs, G, I, L, & les trois autres H, K, M, étans prises de deux en deux sont en même raison, par la 20. pr. 5. si G excede L, aussi H excedera M; & si égale, égale; & si plus petite, plus petite; & partant puis que G, H, equemultiplices de A & D défaillent, sont égales, ou excedent L, M, equemultiplices quelconques de C & F, par la 6. def. A sera à C, comme D à F; ce qu'il falloit prouver.

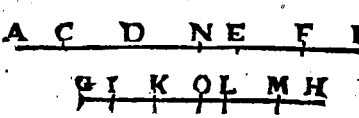
Maintenant soient plus de trois grandeurs, tellement que C soit aussi à N, comme F à O. Je dis que A est encore à N comme D à O. Car puisque nous venons de demonstrer que A est à C, comme D à F; & on a posé C estre à N, comme F à O, il y aura trois grandeurs A, C, N, & trois autres D, F, O, lesquelles sont prises de deux en deux en même raison. Donc comme il a été demonstré és trois grandeurs cy-dessus, A sera derechef à N, comme D à O. En la même maniere sera demonstré en tant de grandeurs qu'on voudra. Si donc il y a tant de grandeurs qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Le docte Stevin en la 19. def. de ses Probl. Geomet. explique une sorte d'argumenter és proportions, qu'il appelle proportion transformée, qui peut estre reduite en un tel theoreme que le suivant.

S'il y-a deux grandeurs, desquelles chacune soit couppée en tant de parties qu'on voudra égales en multitude, & proportionnelles: la composée de tant de parties qu'on voudra de la premiere grandeur, sera à la composée des parties restantes, en mesme raison que la composée, d'autant de parties de la derniere grandeur, sera à la composée des parties restantes d'icelle. Et si quelconque partie de l'une est couppée en deux autres parties, & la partie de l'autre correspondante à cette partie-là, est aussi couppée en deux autres parties proportionnelles à ces deux-là: les totales grandeurs seront aussi couppées proportionnellement.

Soit une grandeur AB couppée en tant de parties qu'on voudra AC, CD, DE, EF, FB; & une autre grandeur GH, couppée en autant de parties que AB, ſçavoir és cinq GI, IK, KL, LM, MH, proportionnelles à celles là de AB. Je dis que AD compoſée des deux parties AC, CD, eſt à DB compoſée des trois parties reſtantes, comme GK compoſée des deux parties GI, IK, eſt à KH compoſée des trois autres parties reſtantes. Car puis que comme AC eſt à CD, ainſi GI eſt à IK, en compoſant par la 18. p. de ce livre AD ſera à CD, comme GK à IK. Mais comme CD à DE, ainſi IK à KL: donc par la 22. prop. de ce meſme livre, en raiſon égale, comme AD ſera à DE, ainſi GK ſera à KL. Derechef, pource qu'en changeant, BF eſt à FE, comme HM à ML, auſſi en compoſant BE ſera à FE, comme HL à ML. Mais FE eſt à ED, comme ML à LK: donc en raiſon égale, BE ſera à ED comme HL à LK; & en compoſant, BD ſera à ED, comme HK à IK; & en changeant, DE à DB, comme KL à KH. Parquoy puis qu'il a eſté demontré que AD eſt à DE, comme GK à KL, & DE eſt à DB, comme KL à KH, par la ſuſdite 22. prop. 5. en raiſon égale comme AD ſera à DB, ainſi GK ſera à KH.

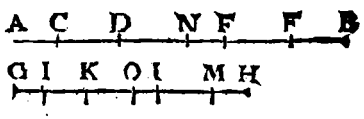


Nous demontrerons en la meſme maniere, que comme AC eſt à CB, ainſi GI eſt à IH. Car derechef en changeant, compoſant, & par égalité de raiſon, comme BC ſera à DC, ainſi HI à KI: & en changeant, comme CD ſera à CB, ainſi IK ſera à IH. Veu donc que comme AC eſt à CD, ainſi GI eſt à IK, & comme CD à CB, ainſi IK à IH: en raiſon egale, comme AC ſera à CB, ainſi GI ſera à IH.

Par meſme raiſon, comme AF ſera à FB, ainſi GM ſera à MH: Car derechef en compoſant, & par egalité de raiſon, comme AF ſera à EF, ainſi GM ſera à LM, par les ſuſdites 18. & 21. prop. de ce livre. Mais auſſi comme EF eſt à FB, ainſi LM à MH: Donc en raiſon egale, comme AF eſt à FB, ainſi GM eſt à HM, & ainſi des autres: appert donc ce qui eſtoit premierement propoſé.

Maintenant ſoit couppée, (comme pour exemple) la troiſiéme partie DE en deux quelconques parties DN, NE; & auſſi

la troiſieſme KL en deux parties KO, OL proportionnelles a celle-la. Je dis que comme AN à NB, ainſi GO à OH. Car en changeant, comme

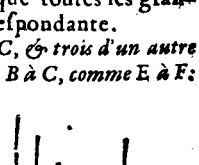


EN ſera à ND, ainſi LO à OK: & en compoſant par la 18. prop. 5. comme ED ſera à DN, ainſi LK à KO. Parquoy puis que comme CD eſt à DE; ainſi IK a KL: & comme DE à DN, ainſi KL à KO: par la 22. prop. 5. en raiſon egale, comme CD ſera à DN, ainſi IK à KO: donc les parties AC, CD, DN, ſont proportionnelles aux parties GI, IK KO. Derechef, pource qu'en changeant, comme FE eſt à ED, ainſi ML à LK: & en compoſant, comme DE à NE, ainſi KL à OL, en raiſon egale, comme FE ſera à EN, ainſi ML, à LO, & en changeant, comme NE à EF, ainſi OL à LM: & partant toutes les parties AC, CD, DN, NE EF, FB, ſont proportionnelles à toutes les parties GI, IK, KO, OL, LM, MH. Donc comme il a eſté demonſtré en la premiere partie, AN ſera à NB comme GO à OH: appert donc ce qui eſtoit propoſé en ſecond lieu.

A ce Theoreme nous en joindrons deux autres, le premier deſquels eſt tel.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, leſquelles priſes de deux en deux, ſoient en meſme raiſon: toutes les grandeurs d'un ordre, ſeront à laquelle on voudra d'icelles en meſme raiſon, que toutes les grandeurs de l'autre ordre ſeront à la correſpondante.

Soient trois grandeurs d'un coſté A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & ſoit A à B, comme D à E, & B à C, comme E à F: je dis, que comme toutes les grandeurs A, B, C enſemble, ſeront à laquelle on voudra d'icelles, par exemple à la derniere C, ainſi toutes les grandeurs D, E, F enſemble, ſeront à la derniere F. Car puiſque comme A eſt à B, ainſi D à E, en compoſant A, B ſont à B comme D, E, à E. Mais B eſt à C, comme E à F: donc en raiſon égale A, B ſeront à C, comme D, E à F: & en compoſant A, B,



C, seront à C, comme D, E, F à F. Ce qu'il falloit prouver.

Que s'il y avoit davantage de grandeurs, la demonstration ne seroit dissemblable à celle cy-dessus : car il n'y auroit qu'à repeter la composition & égalité de raison autant de fois qu'il seroit de besoin : Comme par exemple, soient encore G & H, tellement que C soit à G, comme F à H. D'autant que A, B, est à C, comme D, E est à F; & C à G, comme F à H ; en raison égale A, B, sont à G comme D, E à H, & en composant A, B, G, sont à G, comme D, E, H à H. Mais puis que comme C est à G, ainsi F à H, en changeant, comme G sera à C, ainsi H à F : donc en raison égale, comme A, B, G sont à C, ainsi D, E, H, à F; & en composant comme toutes les grandeurs A, B, G, C, ensemble, seront à la seule C, ainsi toutes les grandeurs D, E, H, F ensemble, seront à la seule F.

Mais si on vouloit prouver, que comme toutes les quatre grandeurs A, B, C, G, sont à la derniere G, ainsi les quatres autres D, E, F, H, sont à la derniere H, il seroit bien plus bref : Car puis que nous avons demontré, que comme A, B, C, sont à C, ainsi D, E, F à F, & que comme C est à G, ainsi F est à H en raison égale, comme A, B, C seront à G, ainsi D, E, F à H : donc en composant, toutes les grandeurs A, B, C, G, seront à G, comme toutes les grandeurs D, E, F, H seront à H.

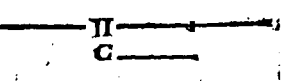
En la même sorte on demontrera, que toutes lesdites grandeurs A, B, C, G seront à A, comme toutes les grandeurs D, E, F, H, seront à D, n'y ayant autre difference, sinon qu'il faut prendre au contraire de ce que dessus.

Et de ce est manifeste, que comme laquelle on voudra des grandeurs du premier ordre, est à sa correspondante du second ordre, ainsi toutes les grandeurs du premier ordre seront à toutes les grandeurs de l'autre ordre.

Le second Theoreme est demontré par Clavius au Scholie de cette 22. prop. & est tel.

Si la premiere est à la seconde en même raison que la tierce à la quarte : les equemultiplices de la premiere & troisiéme auront aussi une même raison à la seconde & quatriéme. Item les equemultiplices de la seconde & quatriéme, auront une même raison à la premiere & troisiéme. Et au contraire, la seconde & quatriéme auront une même raison aux equemultiplices de la premiere & troisiéme. Item la premiere & troisiéme auront une même raison aux equemultiplices de la deuxiéme & quatriéme.

Soit A à B, comme C à D, & soient F, H, equemultiplices de A, C : item G, I, equemultiplices de B, D. Je dis que F est à B, comme H à D : item que G est à A, comme I à C. Et au contraire que B est à F, comme D à H : item A à G, comme C à I. Car puis que F est autant multiplice de A, que H l'est de C, comme F est à A, ainsi H à C, & par l'hypothese A est à B, comme C à D ; donc en raison égale par la 22. pr. 5. comme F sera à B, ainsi H sera à D. Derechef, pource que G est à B, comme I à D, & comme B à A, ainsi D à C : (car puis que A est à B comme C à D par l'hypothese, en changeãt comme B à A, ainsi D à C) en raison égale, comme G sera à A, ainsi I à C par la susdite 22. prop. 5.



Maintenant pource que B est à A, comme D à C par raison inverse : & comme A à F, ainsi C à H : en raison égale, comme B sera à F, ainsi D à H. Derechef, puis que A est à B, comme C à D : & comme B est à G, ainsi D à I ; en raison égale, comme A sera à G, ainsi C à I, par ladite 22. prop. 5. Ce qui estait proposé.

Par cecy est manifeste un moyen d'argumenter, dont les Geometres s'aident souvent, principalement Archimedes, Apolonius Pergeus, & autres : sçavoir est comme A à B, ainsi C est à D : donc comme F double, ou triple, ou quadruple, &c. de A est à B, ainsi aussi H double, ou triple, ou quadruple, &c. de C est à D : Item comme A est à B, ainsi C à D : donc comme A est au double, triple, ou quadruple, &c. de B, sçavoir à G ; ainsi aussi C sera au double, au triple, ou quadruple, &c. de D, sçavoir à I.

THEOR. 23. PROP. XXIII.

Si trois grandeurs, & autant d'autres, prises de deux en deux sont en même raison, & en proportion troublée : icelles en raison égale seront proportionnelles.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & soient prises de deux en deux en même raison, étant leur proportion troublée, sçavoir que comme A à B, ainsi E à F, & comme B à C, ainsi D à E. Je dis qu'en raison égale A sera à C, comme D à F.

Car étans prises G, H, I, equemultiplices de A, B, D: item K, L, M, quelconques autres equemultiplices de C, E, F. Par la 5. p. de ce livre comme A sera à B, ainsi G à H, puis que G, H, sont equemultiplices d'icelles A, B, Mais comme A est à B, ainsi est E à F: donc par la 11. p. 5. comme G est à H, ainsi E est à F. Mais comme E est à F, ainsi aussi L est à M, par la susdite 15. pr. 5. pource que L, M, sont equemultiplices d'icelles E, F: donc aussi comme G est à H, ainsi L est à M, par la 11. p. 5. & puis que comme B est à C, ainsi D à E, par la 4. pr. 5. comme H multiplice de la premiere B, sera à K multiplice de la seconde C, ainsi I multiplice de la troisiéme D, sera à L multiplice de la quatriéme E: donc les trois grandeurs G, H, K, & les trois autres I, L, M, étans prises de deux en deux sont en mesme raison, & la proportion d'icelles sans ordre, puis qu'il a été démontré, que comme G est à H, ainsi L est à M, & comme H est à K, ainsi I à L; & partant par la 21. p. 5. si G est plus grande, égale, ou moindre que K, aussi I sera plus grande, égale, ou moindre que M, & par la 6. def. 5. comme A sera à C, ainsi sera D à F Parquoy si trois grandeurs, & autant d'autres, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Que s'il y avoit plus de trois grandeurs, & que leur proper-

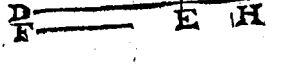
tion ſoit troublée, ſçavoir eſt que comme A eſt à B, ainſi F ſoit à O, & comme B eſt à C, ainſi E ſoit à F, & comme C à N, ainſi D à E. Je dis que A ſera à N, comme D à O. D'autant qu'il a eſté demontré en trois grandeurs que comme A eſt à C, ainſi F eſt à O, & que par l'hypotheſe comme C eſt à N, ainſi D eſt à E, il y aura trois grandeurs d'un côté A, C, N, & trois d'un autre D, E, O, leſquelles priſes de deux en deux ſont en meſme raiſon, & en proportion troublée. Donc derechef en raiſon égale demontrée en trois grandeurs A ſera à N, comme D à O. Le meſme ſera auſſi demontré en cinq grandeurs par quatre, comme il a eſté demontré en quatre par trois, & ainſi ſemblablement de davantage.

THEOR. 24. PROP. XXIV.

Si la premiere eſt à la ſeconde, comme la troiſiéme à la quatriéme, & la cinquiéme à la ſeconde, comme la ſixiéme à la quatriéme; la compoſée de la premiere & cinquiéme, ſera à la ſeconde, comme la compoſée de la troiſiéme & ſixiéme, ſera à la quatriéme.

Soit la premiere AB à la ſeconde C, comme la troiſiéme DE eſt à la quatriéme F; & la cinquiéme BG à la deuxiéme C, comme la ſixiéme EH à la quatriéme F. Je dis que la toute AG, ſera à C, comme la toute DH à F.

Car puiſque comme BG à C, ainſi EH à F, auſſi en changeant, comme C ſera à BG, ainſi F à EH. Vû donc que AB eſt à C, comme DE à F, & C à BG, comme F à EH, en raiſon égale, AB ſera à BG, comme DE à EH, par la 22. p. 5. & en compoſant, comme la toute AG ſera à BG, ainſi la toute DH ſera à EH, par la 18. pr. d'iceluy 5. livre: & derechef puis que AG eſt à BG, comme DH à EH, & BG à C, comme EH à F, en raiſon égale, AG ſera à C, comme DH à F.



Si donc la premiere eſt à la ſeconde, comme la troiſiéme à la quatriéme, &c. Ce qui étoit à prouver.

SCHOLIE.

Preſque en la meſme maniere ſera demontré en tout genre de proportion, ce qui a eſté demontré à la 6. prop. de ce 5. livre, tant ſeulement aux grandeurs multiplices, ſçavoir eſt,

Si deux grandeurs ont même proportion à deux autres grandeurs, & que des retranchées ayent même proportion à icelles; les reſtantes auront auſſi même proportion à icelles.

Que AG & DH ayent meſme proportion à C & F, c'eſt à dire que comme AG eſt à C, ainſi DH ſoit à F. Item les retranchez AB & DE ayent meſme proportion à icelles C & F, tellement que comme AB eſt à C, ainſi DE ſoit auſſi à F: Je dis que les reſtantes BG, EH ont meſme proportion à icelles C, F, c'eſt à dire que comme BG eſt à C, ainſi EH eſt à F. Car d'autant que comme AB eſt à C, ainſi DE eſt à F, par raiſon inverſe, comme G à AB, ainſi F à DE: donc puis que AG eſt à C, comme DH à F, & C à AB, comme F à DE, en raiſon égale AG ſera à AB, comme DH à DE: & en diviſant comme BG ſera à AB, ainſi DH à DE. Et derechef, puis que BG eſt à AB comme EH à DE; & AB à C, comme DE à F, en raiſon égale BG ſera à C, comme EH à F. Ce qui eſt propoſé.

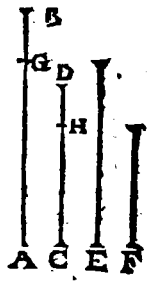
THEOR. 25. PROP. XXV.

Si quatre grandeurs ſont proportionnelles, la plus grande & la plus petite, ſont plus grandes que les deux autres.

Soient quatre grandeurs proportionnelles AB, CD, E, F, deſquelles AB ſoit la plus grande & F la plus petite. Je dis que AB & F enſemble, ſont plus grandes que les deux autres CD & E enſemble.

Car ſi de AB on retranche AG égale à E, & de CD on retranche CH égale à F: AG ſera à CH, comme E à F, c'eſt

c'eſt-à-dire comme AB à CD. Et puiſque la toute AB eſt à la toute CD, comme la retranchée AG à la retranchée CH ; par la 19. prop. de ce livre, comme la toute AB ſera à la toute CD, ainſi le reſte GB ſera au reſte HD : Parquoy iceluy reſte GB ſera plus grand que le reſte HD, comme la toute AB eſt plus grande que la toute CD. Et pour autant que AG & E ſont égales, ſi on adjoûte à icelles, les grandeurs égales F & CH, c'eſt à ſçavoir, F à icelle AG, & CH à E; viendront AG & F enſemble, égales à E & CH enſemble. Et adjoûtant à ces choſes égales, les inégales GB, & HD, ſeront faites AB & F enſemble plus grandes que GE & CD enſemble, puis que GB eſt plus grande que HD. Parquoy ſi quatre grandeurs ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



SCHOLIE.

Or il s'enſuit neceſſairement que ſi la grandeur antecedante d'une raiſon, eſt la plus grande de toutes celles de la proportion, que la conſequente de l'autre raiſon, ſera la plus petite de toutes, comme on peut voir en l'exemple propoſé. Car d'autant que comme AB eſt à CD, ainſi E á F ; & que AB premiere eſt plus grande que E tierce, par la 14. prop. 5. CD ſeconde ſera auſſi plus grande que F quatriéme.

Semblablement, pource que AB eſt plus grande que CD, auſſi E ſera plus grande que F á cauſe de la ſimilitude des raiſons, comme nous avons dit au Scholie de la meſme 14. prop. Que ſi au contraire la grandeur antecedante d'une raiſon eſt la plus petite de toutes, la conſequente de l'autre ſera la plus grande, comme il appert, ſi on dit que F eſt á E, comme CD á AB.

Commandin adjoûte en ce lieu, le theoreme ſuivant.

Si trois grandeurs ſont proportionnelles, la plus grande & la plus petite d'icelles, ſeront plus grandes que le double de l'autre.

Soient trois grandeurs proportionnelles A, B, C, tellement que

comme A eſt à B, ainſi B à C & ſoit A la plus grande, & D la plus petite : Je dis que A & D enſemble, ſont plus grandes que le double de B. *Car ayant pris D égale à B, comme A ſera à* B, *ainſi D ſera à C ; & partant A & C enſemble, ſeront plus grandes que* B *& D enſemble par la* 25. *prop.* 5. *c'eſt à dire que le double de* B. *Ce qui eſt propoſé.*

Euclide finit icy ſon 5. *livre des Elemens ; mais d'autant que Campanus, Commandin & Clavius y adjoûtent quelques autres propoſitions, dont les bons Autheurs s'aident fort ſouvent, & les citent, comme ſi elles eſtoient d'Euclide, nous les adjoûterons auſſi icy.*

THEOR. 16. PROP. XXVI.

Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde, que la troiſiéme à la quatriéme : en changeant, la ſeconde aura moindre raiſon à la premiere, que la quatriéme à la tierce.

Que A ait plus grande raiſon à B que C à D : Je dis que la raiſon de B à A eſt moindre que la raiſon de D à C. Car ſoit entendu E eſtre à B, comme C eſt à D. Donc auſſi la raiſon de A à B ſera plus grande que celle de E à B ; & par la 10. prop. 5. A ſera plus grande que E ; & partant B aura moindre raiſon à A qu'à E par la 8. prop. 5. Mais comme B eſt à E, ainſi eſt en changeant D à C. Donc auſſi la raiſon de B à A eſt moindre que celle de D à C. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons preſque en la meſme maniere que ſi la premiere a moindre raiſon à la ſeconde, que la troiſiéme à la quatriéme ; en changeant, la ſeconde aura plus grande raiſon à la premiere, que la quarte à la tierce.

Que A ait moindre raiſon à B, que C à D : Je dis qu'en changeant B a plus grande raiſon à A, que D à C. Car ſoit entendu E eſtre à B, comme C à D : & la raiſon de A à B ſera pareillement moindre que celle de E à B, parce que nous avons demonſtré au Scholie de la 13. prop. 5. Donc par la 10. prop. 5. A ſera moindre que E : & par la 8. prop. 5. la raiſon de B à A ſera plus grande que de B à E. Mais comme B eſt à E, ainſi eſt en changeant D à C : Donc auſſi la raiſon de B à A ſera plus grande que de D à C.

Autrement. *D'autant que la raiſon de A à B, eſt moindre que de C à D : la raiſon de C à D ſera plus grande que celle de A à B : donc en changeant par la 16. prop. 5. la raiſon de D à C, ſera moindre que de B à A : & partant il y aura plus grande raiſon de B à A que de D à C. Ce qui eſtoit propoſé.*

THEOR. 27. PROP. XXVII.

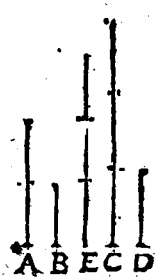
Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde, que la tierce à la quarte ; auſſi en permutant la premiere aura plus grande raiſon à la tierce, que la ſeconde à la quarte.

Que A ait plus grande raiſon à B que C à D. Je dis qu'en permutant A aura plus grande raiſon à C, que B à D. Car ſoit entendu E eſtre à B, comme C à D : & la raiſon de A à B ſera auſſi plus grande que de E à B : & partant A ſera plus grande que E par la 10. prop. 5. donc la raiſon de A à C ſera plus grande que de E à C par la 8. prop. 5. Mais pource qu'en permutant comme E eſt à C, ainſi B eſt à D, (car E eſt poſée à B, comme C à D,) il y aura auſſi plus grande raiſon de A à C, que de B à D. Ce qui eſt propoſé.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons ſemblablement, que ſi la premiere à moindre raiſon á la ſeconde, que la troiſiéme à la quatriéme; en permutant la premiere aura moindre raiſon á la tierce, que la ſeconde á la quarte.

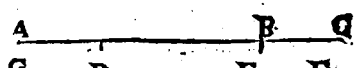
Car ſoit la raiſon de A á B moindre que de C á D: je dis qu'en permutant A aura moindre raiſon à C, que B á D. Car ſoit entendu E eſtre á B, comme C á D, & la raiſon de A á B ſera pareillement moindre que de E á B: & par la 10. prop. 5. A ſera moindre que E: parquoy la raiſon de A à C ſera moindre que de E á la meſme C par la 8. prop. 5. Et puis que E eſt poſée eſtre à B, comme C á D: en permutant comme E à C, ainſi B á D. Donc auſſi la raiſon de A à C ſera moindre que de B á D. Ce qui eſt propoſé.



Autrement. *D'autant qu'il y a moindre raiſon de A á B, que de C á D, il y aura plus grande raiſon de C à D que de A à B: donc en permutant par la 27. p. 5. il y aura auſſi plus grande raiſon de C á A que de D á B: & par la 26. prop. 5. en raiſon inverſe, il y aura moindre raiſon de A á C, que de B à D. Ce qui eſt propoſé.*

THEOR. 28. PROP. XXVIII.

Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde que la tierce à la quarte: la compoſée de la premiere & de la ſeconde aura auſſi plus grande raiſon à la ſeconde, que la compoſée de la tierce & de la quarte à la quarte.

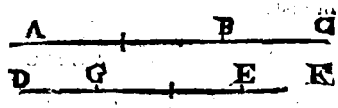


Que AB premiere ait plus grande raiſon à BC ſeconde, que DE tierce á EF quarte: Je dis qu'en compoſant AC aura plus grande rai-

ſon à BC, que DF à EF. Car ſoit entendu comme AB eſt à BC, ainſi quelque autre GE ſoit à EF; & il y aura auſſi plus grande raiſon de GE à EF, que de DE à EF; & par la 10. prop. 5. GE ſera plus grande que DE. Donc puis que comme AB eſt à BC, ainſi GE eſt à EF: en compoſant comme AC ſera à BC, ainſi GF ſera à EF: Mais il y a plus grande raiſon de GF à EF, que de DF à EF, par la 8. p. 5. (car GF eſt plus grande que DF.) Donc auſſi AC aura plus grande raiſon à BC que DF à EF. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Que ſi AB a moindre raiſon à BC que DE à EF, auſſi en compoſant AC aura moindre raiſon à BC que DF à EF. Car derechef ſi comme AB eſt à BC, ainſi quelque autre GE eſt à EF: Icelle GE ſera moindre que DE par la 10. *prop.* 5. *Et en compoſant AC ſera à* BC, *comme* GF, *à* EF. *Mais* GF *a moindre raiſon à* EF *que* DF *à* EF *par la* 8. *pr.* 5. *attendu que* GF *eſt moindre que* DF: *donc auſſi AC aura moindre raiſon à* CB, *que* DF *à* EF.

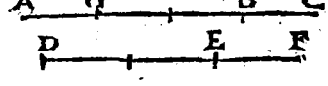


Autrement. *D'autant qu'il y a moindre raiſon de* AB *à* BC, *que de DE à* EF, *il y aura plus grande raiſon de DE à* BF, *que de* AB *à* BC; *& par la* 28. *p.* 5. *en compoſant il y aura auſſi plus grande raiſon de* DF *à* EF, *que de AC à* BC: *& partant il y aura moindre raiſon de AC à* BC, *que de* DF *à* EF.

THEOR. 29. PROP. XXIX.

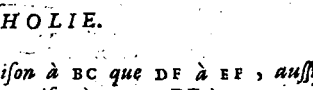
Si la compoſée de la premiere & ſeconde a plus grande raiſon à la ſeconde, que la compoſée de la tierce & quarte à la quatriéme: Auſſi en diviſant, la premiere aura plus grande raiſon à la deuxiéme, que la troiſiéme à la quatriéme.

Que AC ait à BC plus grande raiſon que DF à EF ; Je dis qu'en diviſant AB, aura auſſi à BC plus grande raiſon que DE à EF. Car ſoit entendu que comme DF eſt à EF, ainſi quelque autre GC ſoit à CB ; & il y aura auſſi plus grande raiſon de AC à BC que de GC à BC : & partant AC ſera plus grande que GC par la 10. p. 5. Oſtant donc BC commun, reſtera AB plus grande que GB : & par la 8. prop. 5. il y aura plus grande raiſon de AB à BC, que de GB à BC. Mais en diviſant par la 17. prop. 5. comme GB eſt à BC, ainſi DE eſt à EF : (car on a poſé GC être à BC, comme DF à EF.) Donc auſſi la raiſon de AB à BC ſera plus grande, que celle de DE à EF. Ce qu'il falloit démontrer.



SCHOLIE.

Que ſi AC a moindre raiſon à BC *que* DF *à* EF, *auſſi en diviſant,* AB *aura moindre raiſon à* BC *que DE à* EF. *Car ſi on entend GC être à* BC, *comme* DE *à* EF, *la raiſon de AC à* BC *ſera pareillement moindre que celle de GC à* BC: *& par la* 10. *prop.* 5. AC *ſera moindre que* GC. *Oſtant donc* BC *commune, reſtera* AB *moindre que* GB ; *& par la* 8. *prop.* 5. *la raiſon de* AB *à* BC *ſera moindre que de* GB *à* BC : *Mais puis que* GC *eſt à* BC *comme* DF *à* EF, *en diviſant* GB *ſera à* BC *comme DE à* EF : *il y aura donc auſſi moindre raiſon de* AB *à* BC *que de* DE *à* EF.

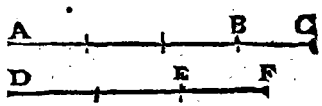


Autrement. *D'autant que la raiſon de* AC *à* BC *eſt moindre que de* DF *à* EF, *il y aura plus grande raiſon de* DF *à* EF, *que de* AC *à* BC : *donc auſſi en diviſant, il y aura plus grande raiſon de* DE *à* EF, *que de* AB *à* BC *par la* 29. *p.* 5. *& partant la raiſon de* AB *à* BC *ſera moindre que de* DE *à* EF.

THEOR. 30. PROP. XXX.

Si la composée de la premiere & seconde a plus grande raison à la seconde, que la composée de la tierce & quarte à la quarte : par conversion de raison, la premiere & seconde aura moindre raison à la premiere, que la tierce & quarte à la tierce.

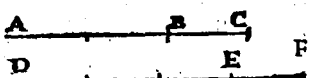
Que AC ait plus grande raison à BC que DF à EF: Je dis par conversion de raison, que AC a moindre raison à AB, que DF à DE. Car AC ayant plus grande raison à BC que DF à EF, en divisant AB aura plus grande raison à BC que DE à EF par la 29. prop. 5.



Donc par raison inverse, il y aura moindre raison de BC à AB que de EF à DE par la 26. pr. 5. Et partant en composant, il y aura aussi moindre raison de la toute AC à AB, que de la toute DF à DE. Ce qui étoit à démontrer.

SCHOLIE.

Semblablement si AC *a moindre raison á* CB *que* DF *á* EF, *aussi par conversion de raison* AC *aura plus grande raison á* AB *que* DF *á* DE. *Car puis qu'il y a moindre raison de* AC *á* BC *que de* DF *á* EF, *par la* 29. *prop.* 5. *en divisant il y aura moindre raison de* AB *á* BC *que de* DE *á* EF, *& en changeant par la* 26. *prop.* 5. *il y aura pareillement moindre raison de* BC *á* AB, *que de* EF *á* DE: *donc en composant par la* 28. *prop.* 5. *il y aura plus grande raison de* AC *á* AB *que de* DF *á* DE.



Autrement. *D'autant que la raison de* AC *á* BC *est moindre que celle de* DF *á* EF, *il y aura plus grande raison de* DF *á* EF *que de* AC *á* BC : *donc par conversion de raison,*

il y aura moindre raiſon de DF *á* DE, *que de* AC *á* AB, *c'eſt-á-dire qu'il y aura plus grande raiſon de* AC *á* AB, *que de* DF *á* DE.

THEOR. 31. PROP. XXXI.

S'il y a trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, & qu'il y ait plus grande raiſon de la premiere des premieres à la ſeconde, que de la premiere des dernieres à la ſeconde, & auſſi plus grande raiſon de la ſeconde des premieres à la tierce, que de la ſeconde des dernieres à la tierce: En raiſon égale, il y aura pareillement plus grande raiſon de la premiere des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la tierce.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & la raiſon de A à B ſoit plus grande que celle de D à E: Item, la raiſon de B à C ſoit auſſi plus grande que de E à F: Je dis qu'en raiſon égale, il y aura plus grande raiſon de A à C que de D à F.

Car ſoit entendu G eſtre à C, comme E à F; & il y aura plus grande raiſon de B à C, que de G à C: Donc par la 10. prop. 5. B ſera plus grande que G; & par la 8. prop. 5. il y aura plus grande raiſon de A à G, que de A à B: Mais la raiſon de A à B eſt poſée plus grande que de D à E: Il y aura donc beaucoup plus grande raiſon de A à G, que de D à E. Soit derechef poſée H eſtre à G, comme D à E: Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de A à G, que de H à G: & par la 10. prop. 5. A ſera plus grande que H: & partant A aura plus grande raiſon à C, que H à la meſme C, par la 8. prop. 5. Mais comme H eſt à C, ainſi eſt en raiſon égale D à F. (pource

que comme D eſt à E, ainſi H à G, & comme E eſt à F, ainſi G à C.) Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de A à C, que de D à F. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

Nous démontrerons en la meſme maniere, que ſi la raiſon de A à B eſt la meſme que de D à E, & celle de B à C plus grande que de E à F: ou au contraire, ſi la raiſon de A à B eſt plus grande que de D à E, & celle de B à C la meſme que de E à F: en raiſon égale, il y aura pareillement plus grande raiſon de A à C, que de D à F: car ſoit premierement A à B, comme D à E, mais la raiſon de B à C plus grande que de E à F. Soit poſée G à C comme E à F; & la raiſon de B à C ſera plus grande que de G à C, & conſequemment B plus grande que G, par la 10. prop. 5. Parquoy il y aura plus grande raiſon de A à G que de A à B. Mais A eſt poſée à B, comme D à E. Donc auſſi la raiſon de A à G ſera plus grande que de D à E. Soit poſée derechef H à G, comme D à E; & il y aura plus grande raiſon de A à G que de H à G; & par la 10. prop. 5. A ſera plus grande que H: Parquoy la raiſon de A à C ſera plus grande que de H à C. Mais comme H eſt à C ainſi eſt en raiſon égale D à F: (attendu que comme D à E, ainſi H à G, & comme E à F, ainſi G à C.) Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de A à C que de D à F.

Maintenant la raiſon de A á B ſoit plus grande que celle de A á E, mais B ſoit á C, comme E á F. Soit poſée G á C, comme E á F; & B ſera auſſi á C, comme G á C: & par la 9. prop. 5. B ſera égale à G. Parquoy A ſera à G, comme A à B par la 7. prop. 5. Mais la raiſon de A à B eſt poſée plus grande que de D à E. Donc auſſi la raiſon de A à G ſera plus grande que de D à E. Soit derechef poſée H à G comme D à E; & il y aura plus grande raiſon de A á G, que de H á G: & partant A ſera plus grande que H par la 10. prop. 5. & il y aura plus grande raiſon de A à C que de H á C. Mais comme H eſt á C, ainſi en raiſon égale D eſt á F: (car comme D á E, ainſi H á G, & comme E eſt á F, ainſi G á C.) Il y aura donc pareillement plus grande raiſon de A á C que de D á F.

Nous démontrerons ſemblablement que ſi A a moindre raiſon à B, que D á E; & B à C moindre raiſon que E á F: auſſi en raiſon égale A aura moindre raiſon à C que D à F. Et ſi

meſme adviendra encore, ſi A étant à B comme D *à* E, *la raiſon de* B *à* C *eſt moindre que de* E *à* F: *Ou au contraire, ſi la raiſon de A à B étant moindre que de* D *à* E, *B eſt à* C *comme* E *à* F: *Car il eſt manifeſte que la demonſtration ſera toûjours la meſme que deſſus.*

THEOR. 32. PROP. XXXII.

S'il y a trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, & qu'il y ait plus grande raiſon de la premiere des premieres à la ſeconde, que de la ſeconde des dernieres à la tierce: Semblablement, qu'il y ait plus grande raiſon de la ſeconde des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la ſeconde: En raiſon égale, il y aura pareillement plus grande raiſon de la premiere des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la tierce.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & que A ait plus grande raiſon à B, que E à F, & B à C que D à E: Je dis qu'en raiſon égale, A aura plus grande raiſon à C, que D à F.

Car ſoit entendu que G eſt à C, comme D à E; & il y aura auſſi plus grande raiſon de B à C, que de G à C: partant B ſera plus grande que G, par la 10. prop. 5. Parquoy la raiſon de A à G ſera plus grande que de A à B, par la 8. prop. 5. Mais la raiſon de A à B eſt plus grande que de E à F: il y aura donc encore beaucoup plus grande raiſon de A à G que de E à F. Soit derechef entendu H eſtre à G, comme E eſt à F, & il y aura auſſi plus grande raiſon de A à G, que de H à G, & par la 10 prop. 5. A ſera plus grande que H: parquoy il y aura plus grande raiſon de A à C que de H à la meſme C. Mais comme H eſt à C,

ainſi eſt en raiſon égale D à F : (car comme D eſt à E, ainſi G eſt à C, & comme E eſt à F, ainſi H à G.) Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de A à C que de D à F. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

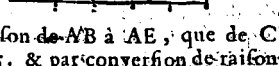
On démontrera ſemblablement, que ſi A *a même raiſon* à B *que* E à F, *&* B à C *plus grande que* D à E : *ou au contraire, ſi la raiſon de* A à B *eſt plus grande que de* E à F, *mais celle de* B à C *la même que de* D à E; *en raiſon égale, la raiſon de* A à C *ſera plus grande que de* D à F.

Par même raiſon on démontrera auſſi, que ſi les raiſons des premieres grandeurs ſont moindres ; auſſi la raiſon des extrêmes ſera moindre ; c'eſt-à-dire, que ſi A *a moindre raiſon* à B *que* E à F, *&* B à C *que* D à E : *auſſi* A *aura moindre raiſon* à C, *que* D à F.

THEOR. 33. PROP. XXXIII.

S'il y a plus grande raiſon du tout au tout, que du retranché au retranché, il y aura auſſi plus grande raiſon du reſte au reſte, que du tout au tout.

Que la toute AB ait plus grande raiſon à la toute CD, que la retranchée AE à la retranchée CF : Je dis que le reſte EB aura plus grande raiſon au reſte FD, que la toute AB à la toute CD.



Car d'autant qu'il y a plus grande raiſon de AB à CD, que de AE à CF, en permutant, il y aura auſſi plus grande raiſon de AB à AE, que de CD à CF par la 27. prop. 5. & par converſion de raiſon il y aura moindre raiſon de AB à EB, que de CD à FD, par la 30. prop. 5. Donc en permutant, il y aura auſſi moindre raiſon de AB à CD, que de EB à FD par la 27. prop. 5. c'eſt-à-dire, que le reſte EB aura plus gran-

de raiſon au reſte FD, que la toute AB, à la toute CD. Ce qu'il falloit démontrer.

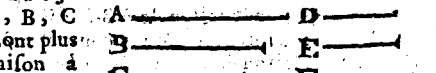
SCHOLIE.

Que ſi la toute AB *a moindre raiſon* à *la toute* CD, *que la retranchée* AE à *la retranchée* CF : *auſſi le reſte* EB *aura moindre raiſon au reſte* FD, *que la toute* AB à *la toute* CD, *comme il appert par la démonſtration cy-deſſus.*

THEOR. 34. PROP. XXXIV.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra d'un côté, & autant d'un autre, & qu'il y ait plus grande raiſon de la premiere des premieres à la premiere des dernieres, que de la ſeconde à la ſeconde; & cette-cy ſoit auſſi plus grande que de la tierce à la tierce, & ainſi de ſuitte : Toutes les premieres enſemble auront plus grande raiſon à toutes les dernieres enſemble, que toutes les premieres, la premiere ôtée, à toutes les dernieres, la premiere auſſi ôtée ; mais moindre raiſon que la premiere des premieres à la premiere des dernieres ; & finalement auſſi plus grande raiſon que la derniere des premieres à la derniere des dernieres.

Soient premierement trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F; & la raiſon de A à D ſoit plus grande que celle de B à E, & celle-cy plus grande que celle de C à F : Je dis que A, B, C enſemble, ont plus grande raiſon à D, E, F enſemble, que B, C enſemble à E, F



enſemble : mais moindre que A à D, & auſſi plus grande que C á F.

Car puis qu'il y a plus grande raiſon de A á D que de B á E, en permutant, il y aura auſſi plus grande raiſon de A á B que de D á E par la 27. prop. 5. Donc en compoſant A & B enſemble, auront plus grande raiſon á B, que D & E enſemble á E par la 28. prop. 5. Et en permutant derechef, A & B enſemble, auront plus grande raiſon á D & E enſemble que B à E. Et puis que la toute A, B, á plus grande raiſon á la toute D, E, que la retranchée B á la retranchée E, la reſtante A aura auſſi plus grande raiſon á la reſtante D, que la toute A, B, á la toute D, E, par la prec. prop. Par même raiſon, il y aura plus grande raiſon de B á E, que de la toute B, C, á la toute E, F. Il y aura donc encore bien plus grande raiſon de A á D, que de la toute B, C á la toute E, F. Donc en permutant, il y aura plus grande raiſon de A á B, C enſemble, que de D á E, F enſemble par la 27. prop. 5. Et en compoſant, il y aura plus grande raiſon de A, B, C á B, C, que de D, E, F à E, F, par la 28. prop. 5. Et en permutant derechef il y aura plus grande raiſon des toutes A, B, C enſemble, aux toutes D, E, F enſemble, que de B, C á E, F : ce qui eſt premierement propoſé.

Et puis qu'il y a plus grande raiſon de la toute A, B, C à la toute D E, F, que de la retranchée B, C á la retranchée E, F, il y aura auſſi plus grande raiſon de la reſtante A á la reſtante D, que de la toute A, B, C, á la toute D, E, F, par la prop. prec. Ce qui eſt ſecondement propoſé.

Mais d'autant qu'il y a plus grande raiſon de B à E, que de C á F : en permutant il y aura auſſi plus grande raiſon de B á C, que de E á F par la 27. prop. 5. Et en compoſant, la toute B, C aura plus grande raiſon á C, que la toute E, F, á F par la 28. prop. 5. Donc en permutant derechef, il y aura plus grande raiſon de B, C á E, F, que de C á F. Mais il a été démontré que A, B, C, enſemble ont plus grande raiſon á D, E, F, enſemble, que B, C, à E, F : Il y aura donc encore bien plus grande raiſon

des toutes A, B, C, aux toutes D, E, F, que de la derniere C á la derniere F. Ce qui eſt tiercement propoſé.

Soient maintenant quatre grandeurs de part & d'autre, avec la même hypotheſe, c'eſt-á-dire, que la raiſon de C tierce à F tierce ſoit plus grande, que de G quarte à H quatriéme. Je dis que la même choſe s'enſuit. Car comme il a déja été démontré en trois grandeurs, il y a plus grande raiſon de B à E que de B, C, G enſemble á E, F, H enſemble. Donc il y aura encore plus grande raiſon de A à D, que de B, C, G, á E, F, H. Et en permutant il y aura plus grande raiſon de A à B, C, G que de D à E, F, H. Parquoy en compoſant il y aura auſſi plus grande raiſon de A, B, C, G à B, C, G, que de D, E, F, H à E, F, H : & en permutant il y aura plus grande raiſon de A, B, C, G à D, E, F, H, que de B, C, G à E, F, H. Ce qui eſt premierement propoſé.

Et vû qu'il y a plus grande raiſon de la toute A, B, C, G, á la toute D, E, F, H, que de la retranchée B, C, G, à la retranchée E, F, H, la reſtante A aura plus grande raiſon à la reſtante D, que la toute A, B, C, G, á la toute D, E, F, H. Ce qui eſt ſecondement propoſé.

Mais comme il a été démontré en trois grandeurs, B, C, G ont plus grande raiſon à E, F, H, que G à H: & A, B, C, G plus grande à D, E, F, H, que B, C, G, à E, F, H : Il y aura donc beaucoup plus grande raiſon de A, B, C, G à D, E, F, H, que de la derniere G à la derniere H : ce qui eſt tiercement propoſé.

En la même maniere on conclurra la même en 5 grandeurs par 4 : & en 6 par 5, &c. tout ainſi qu'il eſt démontré en 4 par 3. Parquoy s'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

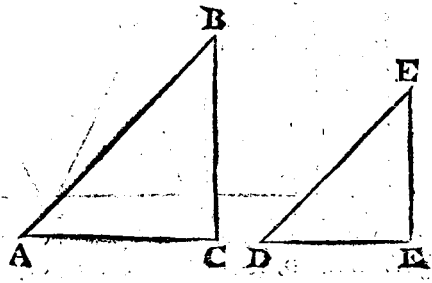
Fin du cinquiéme Livre.

ELEMENT SIXIE'ME.

DEFINITIONS.

SEMBLABLES figures rectilignes, ſont celles qui ont les angles égaux, un chacun au ſien, & les côtez qui contiennent les angles égaux, proportionnaux.

C'eſt-à-dire, que toutes figures rectilignes ſont dites ſemblables, ſi étans equiangles elles ont les côtez d'alentour leurs angles égaux proportionnaux: comme les deux triangles A BC, DEF, ſeront dits ſemblables, ſi l'angle A étant égal à l'angle D, l'angle B égal à l'angle E, &

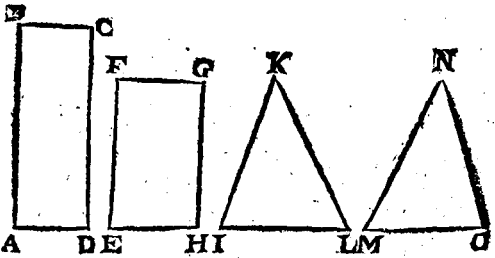


l'angle C à l'angle F ; les côtez qui font & constituent iceux angles égaux, sont proportionnaux ; c'est à sçavoir, que comme AB est à AC, ainsi DE soit à DF, & comme AB est à BC, ainsi DE soit à EF, & comme AC est à BC, ainsi DF soit à EF.

Que si l'une ou l'autre des deux conditions susdites manque, c'est-à-dire, que chacun des angles de l'une des figures étant égal à chacun des angles de l'autre, si les côtez d'alentour leurs angles égaux ne sont proportionnaux ; ou au contraire: telles figures ne seront dites semblables, comme sont le quarré, & le quarré long ; car ces deux figures ont bien les angles égaux, sçavoir droits : mais les côtez de l'une ne sont pas en même raison que les côtez de l'autre : car ceux du quarré sont en raison d'égalité, & ceux d'alentour l'angle droit du quarré long, sont en raison d'inégalité, puis que l'un est plus grand que l'autre. D'où est manifeste, que toutes figures rectilignes équiangles & équilaterales, lesquelles ont les angles & les côtez égaux en nombre, sont semblables, combien qu'elles soient inégales.

2. Les figures sont reciproques, quand les termes antecedans & consequens des raisons, sont en l'une & en l'autre figure.

C'est à dire, que s'il y a deux figures semblables ou non, dont le premier & dernier des termes proportionnaux soient en l'une des figures, & le second & troisiéme terme en l'autre ; icelles

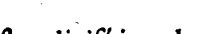


figures seront dites reciproques. Comme si aux deux parallelogrammes ABCD, EFGH, les côtez AB, BC, sont proportionnaux

naux aux côtez EF, FG; *tellement qu'il y ait meſme raiſon de* AB *à* EF, *que de* FG *à* BC; *ou bien que* AB *ſoit à* FG *comme* EF *à* BC: *lceux parallelogrammes ſeront dits figures reciproques, d'autant qu'en chacun d'iceux eſt le terme antecedant de l'une des raiſons, & le conſequent de l'autre. Item les triangles* IKL, MNC, *ſeront auſſi dits reciproques, ſi* IK *eſt à* MN, *comme* MC *à* IL; *ou bien* IK *à* MC, *comme* MN *à* IL.

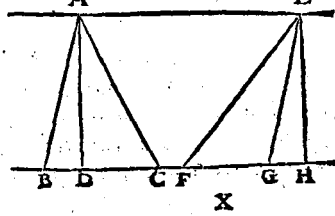
3. Une ligne droite eſt dite eſtre diviſée en la moyenne & extréme raiſon, quand la toute eſt au plus grand ſegment, comme le plus grand ſegment eſt au moindre.

Quand quelque ligne droite, comme AB, *eſt couppée inegalement en* C, *de telle ſorte que la toute* AB, *ſoit au plus grand ſegment* AC, *comme iceluy plus grand ſegment* AC, *eſt au moindre ſegment* BC: *cette ligne* AB *ſera dite eſtre couppée en* C *ſelon la moyenne & extreme raiſon. Or comme cela ſe fait, Euclide l'enſeignera en la* 30. *prop. de ce livre, combien que ſous autres paroles il l'ait déja enſeignée à la* 11. *prop.* 2.



4. La hauteur d'une chacune figure, eſt la perpendiculaire tirée du ſommet à la baſe.

Si de A *ſommet du triangle* ABC, *l'on mene* AD *perpendiculaire à la baſe* BC, *icelle perpendiculaire ſera la hauteur d'iceluy triangle* ABC: *tellement que ledit triangle ſera dit avoir autant de hauteur qu'eſt icelle perpendiculaire* AD. *Semblablement la perpendiculaire* EH *tirée de* E *ſommet du triangle* EFG, *ſur la baſe* FG, *prolongée de la part de* G, *ſera la hauteur d'iceluy triangle* EFG. *Parquoy ſi les perpendiculaires de deux figures menées*



X

des ſommets d'icelles ſur leurs baſes (ſoit qu'icelles baſes ſoient prolongées, ou non) ſont égales; icelles figures ſeront dites avoir même hauteur. Or telles perpendiculaires ſeront égales, quand les baſes des figures & leurs ſommets ſeront conſtituez en mêmes paralleles : Comme ſont les perpendiculaires AD, EH, des triangles ABC, FEG, conſtituez entre mêmes paralleles. Car puis que les deux angles ADH, EHD, interieurs, & de même part, ſont droits, les lignes AD, EH, ſeront paralleles par la 28. prop. 1. Mais AE, DH, ſont auſſi paralleles, puis que les triangles ABC, EFG, ſont poſez être conſtituez entre mêmes paralleles : Donc le quadrilatere AD HE, ſera parallelogramme, & partant les côtez oppoſez AD, EH, ſeront égaux par la 34. prop. 1. Ce qui étoit à prouver.

5. Une raiſon eſt dite être compoſée de raiſons, quand les quantitez des raiſons multipliées entr'elles font quelque raiſon.

C'eſt-à-dire, que quand les quantitez de deux ou pluſieurs raiſons multipliées entr'elles, produiſent quelque quantité de raiſon : icelle raiſon eſt dite être compoſée de celles-là. Or la quantité d'une raiſon eſt le dénominateur d'icelle, comme nous avons déja dit ſur la 3. def. 5. tellement que la quantité de la raiſon triple eſt 3 : mais de la ſubtriple c'eſt $\frac{1}{3}$, &c. Ainſi la raiſon double ſe dit être compoſée de la ſeſquialtere, & de la ſeſquitierce, pource que les quantitez ou dénominateurs d'icelles, ſçavoir eſt $1\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{3}$, étans multipliez entr'eux produiſent 2, dénominateur ou quantité de la raiſon double.

Derechef, la même raiſon double ſera dite être compoſée de la double ſeſquialtere, & de la ſubſeſquiquarte : car les quantitez ou dénominateurs de ces deux raiſons, étans multipliez

entr'eux, produiſent encore 2, dénominateur de la même raiſon double. Pareillement la raiſon trigecuple ſe dit être compoſée des raiſons double, triple & quintuple; d'autant que les dénominateurs d'icelles raiſons, ſçavoir eſt 2, 3, & 5, étans multipliez entr'eux produiſent 30, dénominateur d'icelle raiſon trigecuple. Parquoy étans poſées tant de grandeurs qu'on voudra par ordre, la raiſon des extrémes ſera compoſée des raiſons entre-moyennes, pource que le dénominateur ou quantité de la raiſon de la premiere grandeur à la derniere, eſt produite & procreée par les dénominateurs des raiſons entre-moyennes multipliez entr'eux : comme pour exemple, ſoit A à B en raiſon ſeſquialtere; B à C en raiſon double; & C à D en raiſon ſuperbipartiente tierce : la raiſon des extrémes AD, qui eſt quintuple, eſt compoſée des trois raiſons ſuſdites. Car il eſt évident que multipliant le dénominateur de la raiſon de A à B, par celuy de B à C, ſçavoir 1 ½ par 2 viendront 3 : & partant A eſt à C en raiſon triple, & multipliant le dénominateur d'icelle, ſçavoir eſt 3 par le dénominateur de la raiſon de C à D, qui eſt 1 ⅔ proviennent 5; & partant A qui eſt à D en raiſon quintuple, eſt produite & compoſée des raiſons entre-moyennes.

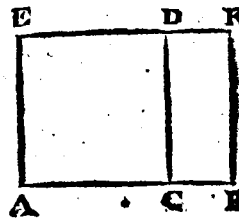
A.	B.	C.	D.
30.	20.	10.	6.

Quelques interpretes afin de rendre plus intelligibles, tant les 27 28 & 29 prop. de ce livre, que pluſieurs du 10. adjoûtent icy cette def.

6. Un parallelogramme étant appliqué ſelon quelque ligne droite donnée, eſt dit defaillir d'un

parallelogramme, lors qu'il n'occupe pas toute ladite ligne : mais il eſt dit exceder, quand il en occuppe une plus grande ; en ſorte toutesfois qu'iceluy parallelogramme defaillant, ou excedant ait deux angles communs avec le parallelogramme appliqué ſur toute la ligne propoſée : & la difference de ces deux parallelogrammes eſt dite defaut, ou excez.

Soit une ligne droite AB ſur laquelle ſoit conſtitué le parallelogramme ACDE, qui n'occupe pas toute ladite ligne AB, ains laiſſe CB ; & ſoit achevé le parallelogramme ABFE tirant BF parallele à CD juſques à ce qu'elle rencontre ED prolongée en F. Or le parallelogramme AD appliqué ſelon la ligne droite AB, ayant les deux angles A, E communs avec le parallelogramme AF, appliqué & décrit ſur toute ladite ligne AB, eſt dit defaillir du parallelogramme CF ; & iceluy parallelogramme CF ſera appellé le defaut.



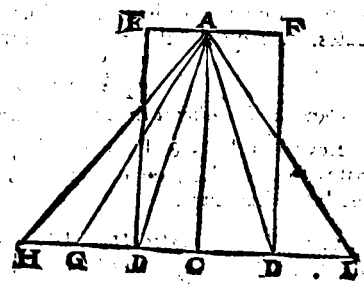
Derechef, ſoit une ligne droite AC, ſur laquelle ſoit conſtitué le parallelogramme AF, ayant le côté AB plus grand que la ligne propoſée AC, & ſoit tirée CD parallele à BF. Donc le parallelogramme AF appliqué ſelon la ligne droite AC, & qui avec le parallelogramme AD décrit ſur toute ladite ligne AC a les deux angles A, E communs, ſera dit exceder AD du parallelogramme CF, tellement qu'iceluy CF eſt dit l'excez.

THEOR. 1. PROP. 1.

Les triangles, & les parallelogrammes de même hauteur, ſont l'un à l'autre comme leurs baſes.

Soient deux triangles ABC & ACD de meſme hauteur, ſur les baſes BC & CD : ſoient auſſi deux parallelogram-

mes CE, CF de même hauteur, les bases desquels soient les mesmes BC, CD. Je dis premierement que le triangle ABC, est au triangle ACD, comme la base BC, est à la base CD : c'est à sçavoir que si on pose pour premiere grandeur la base BC, pour seconde la base CD, pour troisiéme le triangle ABC, & pour quatriéme le triangle ACD; les equemultiplices de la premiere & troisiéme seront plus petites, égales, ou plus grandes, que les equemultiplices de la seconde & quatriéme, ainsi que le requert la 6. definition du 5. livre.



Qu'il ne soit ainsi; qu'on prolonge BD de part & d'autre, & aprés avoir pris d'un côté BG & GH, chacune égale à BC : item de l'autre côté, DI égale à CD, soient menées les lignes droites AG, AH, AI. Donc par la 38. prop. 1. les trois triangles ABC, ABG, AGH, étans sur bases égales & entre mesmes paralleles, seront égaux : aussi par les mesmes raisons les deux triangles ACD & ADI seront égaux; ainsi il est évident qu'autant de fois que la base HC contiendra la base BC, autant de fois le triangle ACH contiendra le triangle ABC. Pareillement, autant de fois que la base CI contiendra la base CD, autant de fois le triangle ACI contiendra le triangle ACD. Parquoy si la base CH, est égale à la base CI, le triangle ACH sera aussi égal au triangle ACI, par la 38. prop. 1. Mais si la base est plus grande, consequemment le triangle sera plus grand; si plus petite, plus petit, & par la 6. def. 5. comme la base BC sera à la base CD, ainsi le triangle ABC sera au triangle ACD : ce qui étoit à démontrer pour la premiere partie.

Quant à la seconde partie touchant les parallelogrammes CE, CF, le même se peut dire que des triangles, parce qu'iceux parallelogrammes sont doubles des trian-

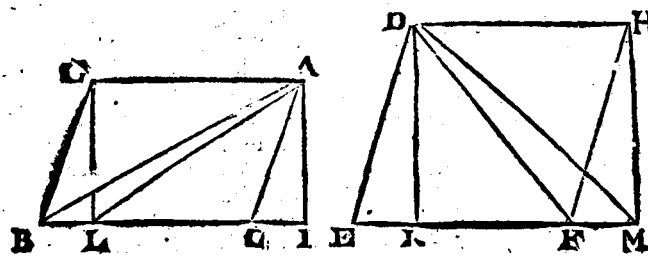
gles ABC, ACD par la 41. prop. 1. & par la 15. prop. 5. ce qui eſt prouvé d'iceux triangles s'entendra des parallelogrammes. Donc les triangles, & les parallelogrammes de même hauteur, ſont entr'eux comme leurs baſes. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Commandin adjoûte en ce lieu cet autre Theoreme.

Les triangles, & les parallelogrammes, deſquels les baſes ſont égales, ou une même, ſont entr'eux, comme leurs hauteurs.

Soient deux triangles ABC, DEF, & les parallelogrammes AGBC, DEFH, ayans les baſes BC, EF égales : Je dis que le triangle ABC eſt au triangle DEF, & le parallelogramme AGBC au parallelogramme DEFH, comme la hauteur AI eſt à la hauteur DK. Car ſi on prend les lignes IL, KM égales aux baſes BC, EF, & on tire les lignes LA, MD, le triangle ALI ſera égal au triangle ABC par la 38. prop. 1. puis qu'ils ſont ſur baſes égales LI, BC, & entre mêmes paralleles AG, IB : Par même raiſon le triangle DKM ſera égal au triangle



DEF. Parquoy par la 7. prop. 5. comme ABC ſera à DEF, ainſi ALI ſera à DKM. Mais par la 1. prop. 6. comme ALI eſt à DKM, ainſi AI à DK. (car ſi AI, DK ſont poſées les baſes, les lignes droites égales LI, KM ſeront les hauteurs.) Donc auſſi ABC ſera à DEF, comme AI à DK.

Et d'autant que par la 15. prop. 5. comme ABC eſt à DEF, ainſi le parallelogramme AGBC au parallelogramme DEFH: (car iceux parallelogrammes ſont doubles des triangles par

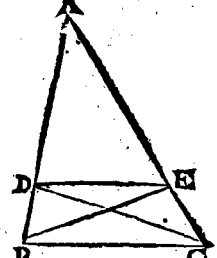
la 41. prop. 1.) aussi AGBC sera à DEFH, comme AI à DK. Le même s'ensuivra si les triangles, & les parallelogrammes ont une même base.

THEOR. 2. PROP. II.

Si on meine une ligne droite parallele à l'un des côtez d'un triangle, laquelle couppe les deux autres côtez ; elle les couppera proportionnellement : & si deux côtez d'un triangle sont couppez proportionnellement, la ligne couppante sera parallele à l'autre côté.

Soit le triangle ABC, dans lequel soit menée la ligne droite DE parallele au côté BC, couppant les deux autres côtez AB & AC aux points D & E. Je dis que les côtez AB, AC sont couppez proportionnellement aux points D & E, c'est-à-dire que AD sera à DB, comme AE est à EC.

Car estans menées les deux lignes BE & CD : par la 37. p. 1. les deux triangles DEB & EDC, estans sur même base, & entre mesmes paralleles, sont égaux ; & par la 7. p. 5. ils auront même raison l'un comme l'autre au troisiéme ADE. Mais par la 1. p. 6. les triangles DEB & DEA, estans de mesme hauteur, sont l'un à l'autre comme la base BD à la base DA : & par la mesme proposition, le triangle CDE, estant de mesme hauteur qu'iceluy triangle EDA, ils seront aussi l'un à l'autre, comme CE est à EA : & partant par la 11. prop. 5. BD sera à DA, comme CE à EA : (puisque ces deux raisons sont les mêmes que du triangle BED au triangle DEA, & du triangle CDE au même triangle DEA.) Ce qui étoit proposé.



Pour la seconde partie : je dis que si DB est à DA, comme CE à EA, la ligne couppante DE sera parallele au côté BC.

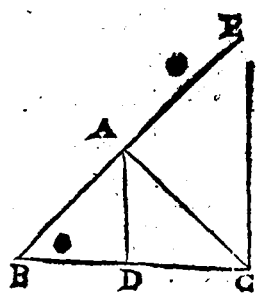
Car les triangles DEB & DEA, ſeront par la 1. prop. 6. l'un à l'autre, comme DB à DA. Item les deux autres triangles CDE, EDA, ſeront auſſi l'un à l'autre, comme CE à EA : & par la 11. prop. 5. le triangle DEB ſera au triangle DEA, comme le triangle CDE eſt au même triangle DEA : & par la 9. prop. 5. les deux triangles BED, & EDC ſeront égaux, leſquels étans ſur même baſe DE, par la 39. prop. 1. ils ſeront entre mêmes paralleles : & partant DE ſera parallele à BC. Parquoy ſi l'on meine une ligne parallele à l'un des côtez d'un triangle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si l'angle d'un triangle eſt couppé en deux également par une ligne droite, laquelle couppe auſſi la baſe ; les ſegmens de la baſe ſeront l'un à l'autre comme les autres côtez du triangle : Et ſi les ſegmens de la baſe ſont l'un à l'autre comme les autres côtez du triangle: la ligne droite tirée du ſommet à la ſection de la baſe, couppe l'angle en deux également.

Au triangle ABC, ſoit l'angle BAC couppé en deux également par la ligne AD, laquelle couppe auſſi la baſe BC au poinct D : Je dis premierement, que BD eſt à DC, comme AB à AC.

Qu'il ne ſoit ainſi : aprés avoir du poinct C mené CE parallele à DA, ſoit cõtinué BA directement juſques à ce qu'il rencontre CE en E; (Or BA, CE ſe rencõtreront, d'autant que les deux angles B & BCE ſont moindres que deux droits, étans égaux aux deux B & BDA, qui ſont moindres que deux droits par la 17. prop. 1.) & parce que DA



& CE ſont paralleles, l'angle CAD ſera égal à ſon alterne ACE par la 29. prop. 1. Et ſi l'exterieur DAB ſera égal à l'oppoſé interieur AEC. Mais BAD, CAD étans égaux par l'hypotheſe, auſſi par les com. ſent. AEC, ACE ſeront égaux : & partant par la 6. prop. 1. les côtez AE & AC ſeront égaux. Mais par la precedente prop. BA eſt à AE, comme BD à DC ; (étant AD parallele à CE) & par conſequent BA ſera auſſi à AC, (égale à AE) comme BD à DC. Ce qui étoit propoſé.

Pour la ſeconde partie : je dis que ſi BA eſt à AC, comme BD à DC, que l'angle CAB ſera couppé en deux également par la ligne droite AD.

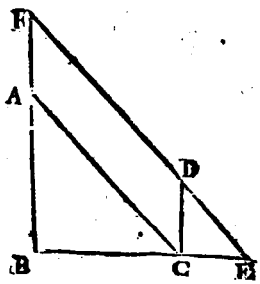
Car aprés avoir conſtruit comme deſſus, BA ſera à AE, comme BD à DC, par la precedente prop. Et partant par la 11. prop. 5. BA ſera à AE, comme le même BA eſt à AC, & par la 9. prop. 5. AE & AC ſeront égaux ; & partant par la 5. prop. 1. les deux angles AEC, ACE, ſeront auſſi égaux ; & par la 29. prop. 1. ils ſont égaux, l'un à DAB, & l'autre à DAC, leſquels par ce moyen ſeront auſſi égaux ; ce qui étoit propoſé. Parquoy ſi l'angle d'un triangle eſt couppé en deux également, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 4. PROP. IV.

Des triangles équiangles, les côtez qui ſont au long des angles égaux, ſont proportionnaux ; & les côtez qui ſoûtiennent les angles égaux, ſont de même raiſon.

Soient deux triangles ABC, DCE, équiangles : c'eſt-à-dire, que l'angle ABC ſoit égal à l'angle DCE, & l'angle ACB à l'angle E, & le troiſiéme au troiſiéme. Je dis que comme AB eſt à BC, ainſi DC à CE ; & comme BC à CA, ainſi CE à ED ; & finablement comme AB à AC, ainſi DC à DE. Car ainſi les côtez d'alentour les angles égaux, ſont les proportionnaux, & les côtez homologues, ou de même raiſon, ſont ceux-là qui ſoûtiennent les angles égaux, c'eſt-à-dire que tous les antecedans, & ſemblablement les conſequens regardent les angles égaux.

Soient conſtituez les côtez BC, CE ſelon une ligne droite, tellement que l'angle externe DCE ſoit égal à l'interne ABC, & pareillement l'externe ACB à l'interne DEC : & d'autant que par la 17. prop. 1. les deux angles ABC, ACB ſont moindres que deux droits, & l'angle DEC eſt égal à l'angle ACB, auſſi les angles B & E ſeront moindres que deux droits : & partant les lignes BA & ED étans produittes de la part de A & D, ſe rencontreront : Qu'elles ſoient donc prolongées & conviennent en F. Il eſt évident que l'angle exterieur ECD, étant par l'hypotheſe égal à ſon oppoſé interieur CBA ; DC ſera parallele à FB par la 28. prop. 1. Pareillement l'angle exterieur ACB étant égal à ſon oppoſé interieur DEC, auſſi par la meſme 28. prop. 1. CA & EF ſeront paralleles. Partant ACDF ſera parallelogramme, & par la 34 prop. 1. il aura les angles, & les côtez oppoſez égaux. Mais AC étant parallele à EF, par la 2. prop. 6. AB ſera à AF, ou CD ſon égale, comme BC à CE ; & en permutant par la 16. prop. 5. AB ſera à BC, comme DC à CE. Pareillement CD étant parallele à BF, comme BC ſera à CE, ainſi ED, ou CA ſon égale, ſera à ED par la 2. prop. 6. & en permutant BC ſera à AC, comme CE à ED.



Veu donc que AB eſt à BC, comme DC à CE, & BC à CA comme CE à ED, auſſi en raiſon égale AB ſera à AC, comme DC à ED. Parquoy des triangles équiangles, &c. Ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

De cecy reſulte, que ſi une ligne droite parallele a un côté d'un triangle, couppe les deux autres côtez d'iceluy, elle ôtera un triangle ſemblable au tout. Comme au triangle BFE étant menée la ligne droite AC parallele au côté FE, qui couppe les deux autres côtez en A & C : Ie dis que le triangle

ABC retranché par icelle ligne AC, eſt ſemblable au triangle BFE. Car d'autant que par la 29. prop. 1. l'angle externe BAC eſt égal à l'interne de même côté F, & que l'angle B eſt commun à tous les deux triangles BAC, BFE, ils ſeront équiangles par le Corol. de la 32. prop. 1. Parquoy, comme il a été démontré cy-deſſus, ils ont les côtez autour des angles égaux proportionnaux : & partant ſelon la 1. def. 6. iceux triangles BAC & BEF ſeront ſemblables.

THEOR. 5. PROP. V.

Si deux triangles ont les côtez proportionnaux, ils ſeront équiangles, & auront les angles égaux, ſous leſquels les côtez de meſme raiſon ſeront ſubtendus.

Soient deux triangles ABC, & DEF, ayans les côtez proportionnaux, & ſoit AB à BC comme DE à EF, & BC à CA, comme EF à FD, & encore AB à AC comme DE à DF. Je dis que les triangles ſont équiangles, ſçavoir l'angle A eſtre égal à l'angle D, & l'angle B à l'angle E, & l'angle C à l'angle F : car ainſi les angles égaux regardent les côtez de meſme raiſon.

Qu'il ne ſoit ainſi : ſur la ligne EF, & aux deux points E & F ſoient conſtruits deux angles, ſçavoir FEG égal à l'angle B, & EFG égal à l'angle C, tirant les lignes EG, & FG juſques à ce qu'elles ſe rencontrent en G: Et par la 32. prop. 1. le 3e angle G ſera égal au 3e angle A. Parquoy les triangles ABC, GEF ſont équiangles : & par la 4. prop. 6. comme AB eſt à BC, ainſi GE à EF. Mais comme AB eſt à BC, ainſi auſſi a été poſé DE à EF : Donc par la 11. prop. 5. comme GE à EF, ainſi DE à la meſme EF : & partant par la 9. prop. 5. GE, DE ſeront égales. Et d'autant que par la propoſition precedente, comme BC

eſt à CA, ainſi EF eſt à FG ; & par l'hypotheſe comme BC eſt à CA, ainſi EF eſt à FD : par la 11. prop. 5. comme EF ſera à FG, ainſi la meſme EF ſera a FD : & par la 9. prop. 5. FG, FD ſeront égales. Veu donc que les côtez EG, FG du triangle GEF, ſont égaux aux côtez DE, DF du triangle DEF, chacun au ſien, & la baſe EF commune aux deux triangles, les angles G & D ſeront égaux par la 8. prop. 1. & partant par la 4. prop. 1. les autres angles GEF, GFE ſeront auſſi égaux aux autres DEF, DFE, chacun au ſien. Parquoy l'angle G étant égal à l'angle A, auſſi l'angle D ſera égal au meſme angle A : & ainſi l'angle DEF ſera égal à l'angle B, & l'angle DFE à l'angle C, ainſi qu'il étoit propoſé. Si donc deux triangles ont les côtez proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, & les côtez au long d'iceux angles égaux, proportionnaux ; ils ſeront équiangles, & auront les angles égaux ſous leſquels les côtez de meſme raiſon ſont ſubtendus.

Soient les deux triangles ABC & DEF, ayans l'angle B égal à l'angle E, & comme AB à BC, ainſi DE ſoit à EF. Je dis que les triangles ſont équiangles, ſçavoir que l'angle A eſt égal à l'angle D, & l'angle C à l'angle F, car ainſi les angles égaux ſont ſubtendus des côtez homologues.

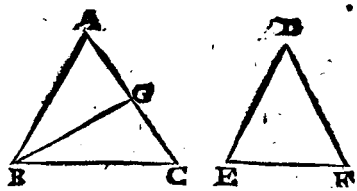
Qu'il ne ſoit ainſi ; ſur la ligne EF ſoit conſtruit, comme en la propoſit. & fig. precedente, le triangle GEF équiangle au triangle ABC : & par la 4. prop. 6. GE ſera à EF, comme AB à BC, ou DE à EF, (car ils ſont en la meſme raiſon) & par la 9. prop. 5. GE & DE (qui ont une meſme raiſon à EF) ſeront égaux ; & partant les deux triangles GEF & DEF, auront deux côtez égaux à deux côtez, ſçavoir GE, EF, à DE, EF, chacun au ſien, & les deux angles au point E, égaux (car ils ſont chacun égal à l'angle B) & par la 4. prop. 1. ils auront la baſe égale à la baſe, & les autres angles égaux aux autres angles, cha-

cun au ſien, & partant iceux triangles ſeront équiangles. Mais l'un d'iceux triangles, ſçavoir GEF, eſt équiangle au triangle ABC par la conſtruction. Donc l'autre triangle DEF ſera auſſi équiangle au meſme triangle ABC. Parquoy ſi deux triangles ont un angle égal à un angle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, & les côtez au long d'un autre angle, proportionnaux, étans les troiſiémes angles de meſme eſpece : Iceux triangles ſeront équiangles, & auront les angles égaux, au long deſquels les côtez ſeront proportionnaux.

Soient deux triangles ABC, & DEF, deſquels les deux angles A & D ſoient égaux, & les côtez AB, BC d'alentour l'angle ABC, proportionnaux aux côtez DE, EF d'alentour l'angle E, c'eſt-à-dire que comme AB eſt à BC, ainſi DE ſoit à EF: mais les autres angles C & F ſoient de meſme eſpece, c'eſt à dire aigus, droits, ou obtus : & ſoient premierement aigus. Je dis que les triangles ſont équiangles, ſçavoir eſt, que les angles ABC & E, à l'entour deſquels ſont les côtez proportionnaux, & les angles C & F ſont égaux.



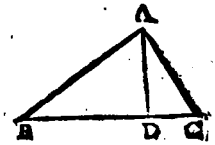
Car ſi l'angle B eſt égal à l'angle E, il appert par la precedente prop. que les triangles ſeront équiangles. Mais ſi leſdits angles ne ſont égaux, ſoit B plus grand que E, & ſoit fait ABG égal à E par la 23. prop. 1. Donc le troiſiéme angle AGB, ſera égal au troiſiéme F, & partant aigu comme iceluy; & les deux triangles ABG & DEF ſeront équiangles; & par la 4 prop. 6. comme AB ſera à BG, ainſi DE à EF. Mais par l'hypotheſe, comme

AB est à BC, ainsi DE à EF : donc par la 11. prop. 5. comme AB sera à BG, ainsi le méme AB sera à BC; & partant par la 9. prop. 5. BG, & BC seront égaux, & par la 5. prop. 1. les deux angles C & BGC sur la base CG seront égaux, & tous deux aigus, & par consequent l'angle BGA sera plus grand qu'un droit, puis que par la 13. prop. 1. les deux BGC, AGB sont égaux à deux droits : Mais l'angle AGB a été démontré égal à l'angle F : donc F seroit aussi plus grand qu'un droit, & on l'a posé aussi moindre : ce qui est absurde. Maintenant, tant l'angle C que F ne soit aigu; & comme dessus l'angle C sera égal à l'angle BGC; & partant iceluy BGC ne sera aussi aigu, & les deux C & BGC ne seront moindres que deux droits, mais égaux ou plus grands que deux droits : ce qui est absurde : car par la 17. prop. 1. ils sont moindres que deux droits. Les angles ABC & E ne sont donc pas inégaux, ains égaux, & partant par la 32. prop. 1. le troisiéme C sera aussi égal au troisiéme F : ce qui est proposé. Si donc deux triangles ont un angle égal à un angle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on tire une perpendiculaire sur la base; elle coupera iceluy triangle en deux autres triangles semblables entr'eux, & au total.

Soit le triangle rectangle ABC, & l'angle droit A, duquel soit menée à la base BC la perpendiculaire AD. Je dis que les triangles ABD & ADC, ausquels est divisé iceluy triangle ABC par la perpendiculaire AD, sont semblables entr'eux, & au total ABC.



Qu'ainsi ne soit : d'autant que AD est perpendiculaire, l'angle BDA est droit, & égal à l'angle droit BAC, du triangle total ABC, & l'angle B est

commun à tous les deux triangles BAD & ABC, & par la 32. prop. 1. le troisiéme angle BAD, sera égal au troisiéme ACB : & partant les deux triangles BAD & ABC, seront équiangles ; & par la 4. prop. 6. ils auront les côtez au long des angles égaux proportionnaux, c'est-à-dire, que comme CB sera à AB, ainsi AB à BD; & comme BA à AC, ainsi BD à DA : & comme BC à CA, ainsi BA à AD : & partant par la 1. def. de ce livre les triangles ABC, ABD seront semblables.

Par même discours, on prouvera que les deux triangles ABC & ADC, sont aussi équiangles, & semblables : car l'angle C étant commun à tous les deux triangles, & l'angle droit BAC égal à l'angle droit ADC, le troisiéme angle CAD sera égal au troisiéme angle B, par la 32. prop. 1. & par la 4. prop. 6. comme BC sera à CA, ainsi CA à CD : & comme CA à AB, ainsi CD à DA, & comme CB à BA, ainsi CA à AD.

On démontrera en la même maniere, les triangles ADB, ADC être semblables entr'eux, puisque les angles au poinct D sont droits, & tant les angles ABD, CAD, que BAD, ACD, ont été démontrez égaux : & partant par la 4. prop. 6. comme BD sera à DA, ainsi DA à DC : & comme DA à AB, ainsi DC à CA : & comme AB à BD, ainsi CA à AD. Si donc de l'angle droit d'un triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, que la perpendiculaire tirée de l'angle droit d'un triangle rectangle à la base, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de la base : & chacun des côtez comprenant l'angle droit, être aussi moyen proportionnel entre toute la base, & le segment qui le touche.

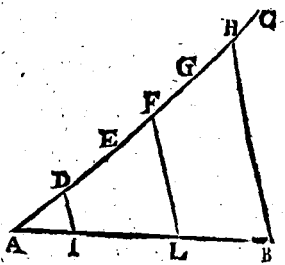
Car il a été démontré, que comme BD est à DA, ainsi DA est à DC : & partant DA est moyenne prop. entre BD & DC : item que comme CB est à BA : ainsi BA à BD : & par ainsi BA est moyenne prop. entre CB & BD : finalement que comme BC est à CA, ainsi CA à CD : & partant CA est moyenne proportionnelle entre BC & CD.

PROB. 1. PROP. IX.

D'une ligne droite donnée, ôter une partie demandée.

Soit la ligne droite donnée AB, de laquelle il faut ôter la cinquiéme partie, ou autre telle qu'on voudra.

Du point A soit menée la ligne droite AC interminement, faisant quelconque angle avec AB, comme BAC, & en icelle AC, soient prises à l'advanture autant de parties égales que dénotte la partie qu'on veut oster, comme en l'exemple proposé; il faut prendre cinq parties égales AD, DE, EF, FG, GH: & apres avoir conjoinct les points B & H par la ligne BH, du point D soit menée DI, parallele à HB: Je dis que AI est la cinquiéme partie requise de AB.



Car puis qu'au triangle ABH, la ligne DI est parallele au côté HB, par la 2. prop. 6. comme HD sera à DA, ainsi BI à IA: & en composant par la 18. prop. 5. comme HA sera à DA, ainsi BA à IA: mais par la construction HA est quintuple de AD: donc aussi BA sera quintuple de AI: & partant AI sera la cinquiéme partie de la ligne droite AB, laquelle avoit été demandée. Donc d'une ligne droite donnée, &c. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

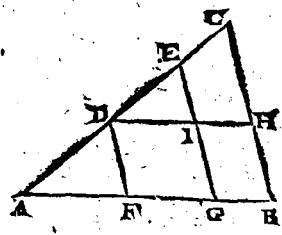
Que si de AB *il falloit coupper plusieurs parties, comme pour exemple les trois cinquiémes, il est évident par ce qui a été démontré cy-dessus, qu'étant tirée la ligne FL parallele à* HB, *le segment AL sera les trois cinquiémes de* AB, *tout ainsi que AF est les trois cinquiémes de AH. Et pour promptement*

ment pratiquer cecy, il faut décrire du centre F, & de l'intervalle HB un arc au dessous de la ligne donnée AB, mais de B & de l'intervalle FH, décrire un autre arc qui coupe le precedent, puis tirer une ligne droite de la section d'iceux arcs à F, & icelle couppera la partie requise AL.

PROBL. 2. PROP. X.

Coupper une ligne droite donnée non couppée, semblablement à une autre ligne droite donnée & couppée.

Soient données les lignes droites AB, AC, desquelles AC est couppée en D & E : & il faut coupper AB en parties semblables & proportionnelles à celles de AC.



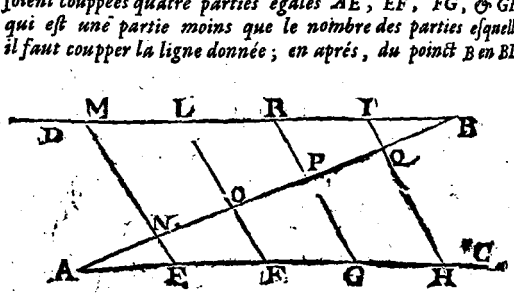
Soient accommodées icelles lignes données, en sorte qu'elles fassent quelconque angle BAC ; & apres avoir mené BC, des points D & E, soient menées DF, EG, paralleles à icelle BC, par la 31. pr. 1. Je dis que la ligne AB est semblablement couppée en F & G, comme la ligne AC est couppée en D & E. Car par la 2. prop. 6. comme AD est à DE, ainsi AF à FG. Que si on tire DH parallele à AB couppant EG en I. Derechef, par la susdite 2. prop. 6. comme DE sera à EC, ainsi DI à IH, c'est-à-dire, ainsi FG à GB, pource que par la 34. prop. 1. FG est égale à DI, & GB à IH. Parquoy les parties FG, GB seront aussi proportionnelles aux parties DE, EC. Les trois parties AF, FG, GB, sont donc proportionnelles aux trois parties AD, DE, EC : & partant AB est couppée semblablement à AC, ainsi qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous adjoûterons icy deux Probl. fort utiles, & neceſſaires aux choſes geometriques.

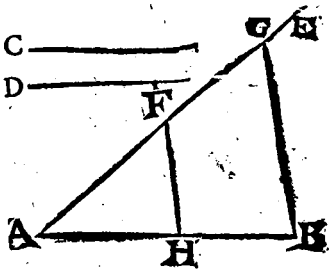
1. Eſtant donnée une ligne droite, la coupper en tant de parties égales qu'on voudra.

Soit la ligne donnée AB, qu'il faut coupper en cinq parties égales. De l'extrêmité A, ſoit menée la ligne AC, tant qu'il ſera de beſoin, faiſant quelconque angle avec AB; puis de l'extrémité B, ſoit menée BD parallele à AC, & d'icelle AC ſoient couppées quatre parties égales AE, EF, FG, & GH; qui eſt une partie moins que le nombre des parties eſquelles il faut coupper la ligne donnée; en aprés, du poinct B en BD,



ſoient auſſi priſes les quatre parties BI, IK, KE, & LM égales à celles de la ligne AC; puis étans menées les lignes EM, FL, GK, & HI, elles couppéront la ligne donnée AB en cinq parties égales. Car puis que par la conſtruction les lignes EF, ML, ſont égales & paralleles entr'elles, par la 33. prop. I. ME, LF, ſeront auſſi paralleles entr'elles: Et par même raiſon LF, KG, HI, ſeront pareillement paralleles. Vû donc que AH eſt couppée en quatre parties égales, AQ le ſera auſſi. Par même raiſon BN ſera encore diviſée en quatre parties égales, parceque BM a été couppée en autant de parties égales. Parquoy vû que tant AN que BQ ſont eſgales à chaque partie NO, OP, PQ, toutes les cinq parties AN, NO, OP, PQ, & QB, ſeront eſgales entr'elles. Ce qu'il falloit faire.

2. Coupper une ligne droite donnée en deux parties, qui ſoient entr'elles ſelon une raiſon donnée.



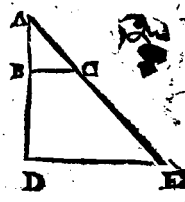
Soit la ligne droite donnee AB, *qu'il faut couppper en deux parties, qui ayent telle raiſon entr'elles que C à D : Du poinct A, ſoit menée AE faiſant quelconque angle avec* AB; *& d'icelle AE, ſoit couppee AF eſgale à C, & puis* FG *eſgale à D : en aprés ſoit menée* BG, *& du poinct* F *tirée* FH *parallele à icelle* BG, *laquelle couppe* AB *en H : & icelle* AB *ſera couppée à iceluy poinct H, ſelon la raiſon de C à D, puis que par la* 2. *prop. de ce livre, AH eſt à* HB, *comme AF à* FG, *qui ſont eſgales à C & D. Ce qu'il falloit faire.*

PROBL. 3. PROP. XI.

A deux lignes droites données, en trouver une troiſiéme proportionnelle.

Soient deux lignes droites données AB & *AC*, auſquelles il en faut trouver une troiſiéme proportionnelle.

Soient diſpoſées icelles lignes en un angle CAB; & apres avoir prolongé AB interminément, ſoit faite BD égale à *AC*, & mené CB; puis du point D, ſoit tirée DE parallele à BC, rencontrant AC prolongée en E. Je dis que CE eſt la troiſiéme proportionnelle requiſe, c'eſt-à-dire que comme AB eſt à AC, ainſi AC à CE. Car puis qu'au triangle ADE, la ligne droite BC eſt parallele au côté DE, par la 2. prop. 6. comme AB ſera à BD, ainſi AC à CE: mais par la 7. prop. 5. comme AB eſt à BD, ainſi la même AB eſt à AC, égale à icelle BD. Donc comme

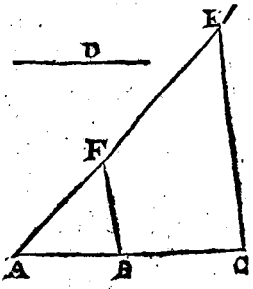


AB est à AC, ainsi AC à CE. Partant à deux lignes droites données, nous en avons trouvé une troisiéme proportionnelle. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 4. PROP. XII.

A trois lignes droites données, en trouver une quatriéme proportionnelle.

Soient les trois lignes droites données AB, BC, & D, ausquelles il en faut trouver une quatriéme proportionnelle.



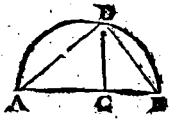
Soient disposées les deux premieres AB, BC, selon une ligne droite AC; & ayant tiré de A une ligne droite interminée AE, faisant avec la premiere AB, quelconque angle, comme A; d'icelle AE, soit coupée AF égale à D, & menée BF: en aprés, de C, soit menée CE parallele à icelle BF, rencontrant AE en E. Je dis que FE est la quatriéme proportionnelle requise. Car, puis qu'au triangle AEC, la ligne BF est parallele à CE, par la 2. prop. 6. comme AB est à BC, ainsi AF, où D son égale est à FE. Nous avons donc trouvé une quatriéme ligne proportionnelle à trois données: Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 5. PROP. XIII.

Entre deux lignes droites données, trouver une moyenne proportionnelle.

Soient deux lignes droites données AC & CB, entre lesquelles il en faut trouver une moyenne proportionnelle.

Soient icelles lignes AC, CB, disposées en une ligne droite AB, sur laquelle soit décrit un demy cercle ADB : & aprés avoir du poinct C levé la perpendiculaire CD, qui rencontre la circonference en D : Je dis qu'icelle CD est la moyenne proportionnelle demandée.



Car étans menées les deux lignes droites AD & BD, l'angle ADB dans le demy cercle, sera droit par la 31. prop. 3. Vû donc que de l'angle droit ADB du triangle rectangle ADB, est tirée DC perpendiculaire à la base AB, par le Corol. de la 8. pr. 6. icelle CD sera moyenne proportionnelle entre AC, CB. Nous avons donc trouvé une moyenne proportionnelle entre deux lignes données : Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

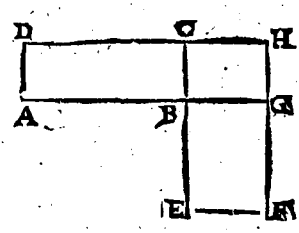
De cecy est évident qu'une ligne droite tiree perpendiculairement de quelconque poinct du diametre d'un cercle, jusques à la circonference d'iceluy, est moyenne proportionnelle entre les segmens du diametre faits par icelle perpendiculaire. Car de quelconque poinct pris au diametre AB, *étant levee une perpendiculaire jusques à la circonference, par les mêmes raisons que dessus, icelle perpendiculaire sera moyenne prop. entre les deux segmens du diametre* AB.

THEOR. 9. PROP. XIV.

Des parallelogrammes égaux, qui ont un angle égal à un angle ; les côtez au long des angles égaux, sont reciproques : & les parallelogrammes qui ont un angle égal à un angle, & les côtez au long des angles égaux reciproques, sont égaux.

Soient deux parallelogrammes égaux ABCD, & BEFG, desquels les deux angles ABC & EBG soient égaux :

Je dis que les côtez qui sont autour d'iceux angles égaux, sont reciproques : c'est-à-dire, que AB est à BG, comme EB à BC.



Car les parallelogrammes AC, BF, étans disposez de telle façon que les deux côtez AB & BG, fassent une ligne droite AG ; les deux côtez EB, BC, feront aussi une ligne droite EC, à cause des angles égaux ABC, EBG, comme il est évident par les 2. com. sent. 13. & 14. prop. 1. & soient prolongez DC, FG, jusques à ce qu'ils se rencontrent en H. Puis donc que les deux parallelogrammes AC, EG, sont égaux, ils auront une même raison au parallelogramme BH, par la 7. prop. 5. Mais la raison du parallelogramme AC au parallelogramme BH, est par la 1. prop. 6. comme celle de la base AB à la base BG. Item celle des parallelogrammes EG, BH, est comme celle de EB à BC : & partant par la 11. prop. 5. comme AB à BG, ainsi EB à BC. Ce qui étoit proposé.

Pour la seconde partie ; si AB est à BG, comme EB à BC, & que les angles ABC & EBG soient égaux : Je dis que les parallelogrammes AC & EG seront aussi égaux.

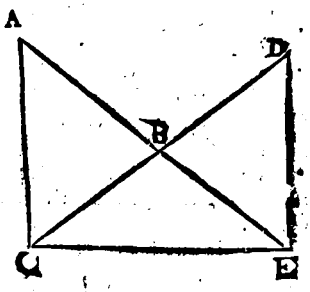
Car ayant fait la mesme construction que devant, on prouvera par la 1. prop. 6. qu'il y a mesme raison du parallelogramme AC au parallelogramme BH, que de la base AB à la base BG : pareillement, qu'il y a mesme raison du parallelogramme EG au parallelogramme BH, que de EB à BC : mais les raisons des bases sont posées semblables : donc aussi les raisons des parallelogrammes AC & EG, au troisiéme BH seront semblables par la 11. pr. 5. & partant par la 9. prop. 5. ils seront égaux. Parquoy des parallelogrammes égaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 10. PROP. XV.

Les triangles égaux ayans un angle égal à un angle, ont les côtez au long des angles égaux reci-

proques : & les triangles qui ont un angle égal à un angle, & les côtez au long des angles égaux reciproques, sont égaux.

Soient deux triangles égaux ABC, & DBE, ayans les angles au point B égaux : Je dis que les côtez qui sont au long d'iceux angles égaux, sont reciproques : c'est-à-dire, que comme AB est à BE, ainsi DB sera à BC.



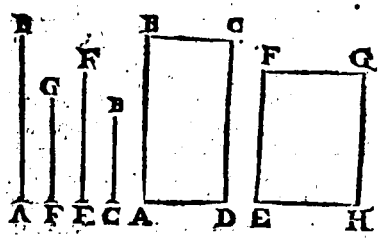
Car les triangles étans disposez en sorte que les deux lignes AB & BE se rencontrent directement, & fassent une seule ligne droite AE, les deux lignes DB, BC, feront aussi une ligne droite CD par les 2. com. sent. 13. & 14. p. 1. & soit menée la ligne CE. Pour autant que les deux triangles ABC & DBE sont égaux, ils auront une mesme raison au triangle BEC par la 7. prop. 5. mais par la 1. prop. 6. la raison du triangle ABC au triangle BEC, (étant de même hauteur) est comme de la base AB à la base BE : pareillement par la même 1. prop. 6. le triangle DBE sera au triangle ECB, comme DB est à BC : & partant par la 11. prop. 5. AB sera à BE, comme DB à BC. Ce qui a été proposé.

Pour la seconde partie : soient les côtez d'alentour les angles égaux au poinct B, reciproques, c'est à sçavoir, que comme AB est à BE, ainsi DB à BC. Je dis que les triangles ABC, DBE, sont égaux. Car ayant fait la même construction que cy-dessus, par la 1. prop. 6. comme AB sera à BE, ainsi le triangle ACB au triangle BCE, & comme DB à BC, ainsi le triangle BED au même triangle BEC : mais par l'hypothese les raisons des bases sont semblables : donc aussi les raisons des triangles ACB, BED, au troisiéme CBE seront semblables par la 11. prop. 5. & partant ils seront égaux par la 9. pr. 5. Donc les triangles égaux ayans un angle égal à un angle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 11. PROP. XVI.

Si quatre lignes droites ſont proportionnelles ; le rectangle compris des extrêmes, eſt égal à celuy des moyennes ; & ſi le rectangle compris des extrêmes, eſt égal au rectangle compris des moyennes ; les quatre lignes ſont proportionnelles.

Soient quatre lignes droites proportionnelles AB, FG, EF, BC, ſçavoir eſt que AB ſoit à FG, comme EF à BC, & ſoit le rectangle ABCD compris des extrêmes AB, BC ; & le rectangle EFGH compris ſous les moyennes EF, FG. Je dis qu'iceux rectangles AC, EG, ſont égaux.



Car puis que les angles droits B & F ſont égaux, & que comme AB eſt à FG, ainſi EF à BC ; les côtez au long des angles égaux B & F, ſeront reciproques par la 2. def. 6. & partant par la 14. prop. 6. les parallelogrammes AC & EG ſeront égaux. Ce qui a été propoſé.

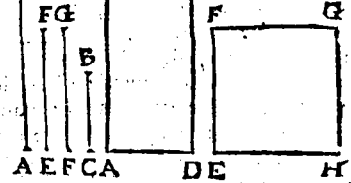
Quant à la ſeconde partie : ſoient les rectangles AC, EG égaux. Je dis que les quatre lignes AB, FG, EF, BC, ſont proportionnelles : c'eſt-à-dire, que comme AB eſt à FG, ainſi EF à BC. Car puis que les rectangles ſont égaux, & ont les angles B & F auſſi égaux, ſçavoir droits, ils auront les côtez au long d'iceux angles égaux, reciproques par la 14. prop. 6. ſçavoir eſt, que comme AB eſt à FG, ainſi EF à BC. Si donc quatre lignes droites ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 12. PROP. XVII.

Si trois lignes droites ſont proportionnelles, le rectangle compris des extrêmes, ſera égal au quarré de la moyenne : & ſi le rectangle compris des extrêmes eſt égal au quarré de la moyenne, les trois lignes ſeront proportionnelles.

Soient trois lignes droites proportionnelles AB, EF, BC, & ſoit le rectangle ABCD compris ſous les extrêmes AB, BC, & le quarré de la moyenne EF ſoit EFGH. Je dis que le rectangle AC eſt égal au quarré EG.

Car étant priſe FG égale à EF, les quatre lignes AB, EF, FG, BC, ſeront proportionnelles, & le quarré EG ſera compris ſous les moyennes EF, FG, à cauſe de l'égalité d'icelles. Parquoy par la prec. prop. le rectangle AC compris des deux extrêmes AB, BC, eſt égal au rectangle des moyennes EF, FG, c'eſt-à-dire au quarré EG. Ce qui étoit propoſé.



Pour la ſeconde partie, le rectangle AC ſoit égal au quarré EG : Je dis que comme AB eſt à EF, ainſi EF à BC. Car puis que les rectangles AC, EG ſont égaux, par la 16. prop. 6. comme AB ſera à FE, ainſi FG à BC : mais par la 7. prop. 5. comme FG eſt à BC, ainſi EF, égale à icelle FG, eſt à la même BC: & partant comme AB eſt à EF, ainſi EF eſt à BC. Si donc trois lignes droites ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

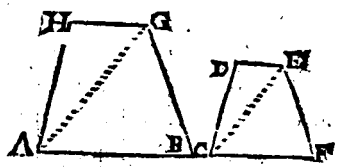
COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte par la derniere partie de ce Theoreme, qu'une ligne droite eſt moyenne proportionnelle entre deux autres lignes droites, qui comprennent un rectangle eſgal au quarré d'icelle ligne. Car pource que le rectangle de AB, BC eſt eſgal au quarré de EF, il a été démontré, que comme AB à EF, ainſi EF à BC; & partant EF eſt moyenne propoſition entre AB & BC.

PROBL. 6. PROP. XVIII.

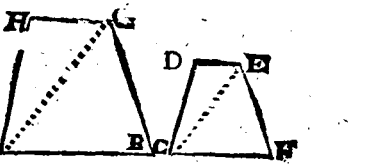
Sur une ligne droite donnée, décrire une figure rectiligne ſemblable, & ſemblablement poſée à une figure rectiligne donnée.

Soit la ligne droite donnée AB, ſur laquelle il faut conſtruire une figure ſemblable, & ſemblablement poſée à la figure rectiligne donnée CDEF.



De quelque angle que ce ſoit de la figure donnée ſoient menées des lignes droites à chacun des angles oppoſez, afin de diviſer icelle figure en triangles; comme icy de l'angle C, ſoit menée à l'angle oppoſé E, la ligne droite CE, laquelle diviſe la figure donnée en deux triangles CEF, CDE: en aprés par la 23. prop. 1. ſoit décrit ſur la ligne AB, & aux points extrémes A & B, les deux angles BAG & ABG, égaux, ſçavoir l'un à l'angle FCE, & l'autre à l'angle CFE. Il eſt évident par la 32. prop. 1. que le troiſiéme AGB ſera égal au troiſiéme CEF, & les triangles CEF, AGB ſeront équiangles, & auront les côtez au long des angles égaux proportionnaux par la 4. prop. 6. Pareillement ſur la ligne AG, & aux deux points A & G, ſoient décrits les deux angles GAH & AGH, égaux aux deux DCE & CED, chacun au ſien: auſſi par

la 32. prop. 1. le troiſiéme H ſera égal au troiſiéme D, & les triangles CDE & AHG ſeront équiangles, & par la 4. prop. 6. ils auront les côtez au long des angles égaux proportionnaux : ainſi l'angle D étant égal à l'angle H, & l'angle F à l'angle B, les deux de C aux deux de A, & les deux de E aux deux de G : les deux figures CDEF, ABGH, ſeront équiangles ; & pour autant qu'elles ſont compoſées de triangles équiangles, leſquels ont les côtez au long des angles égaux proportionnaux, comme CF ſera à FE, ainſi AB à BG : item comme CF eſt à CE, ainſi AB à AG ; & comme CE à CD, ainſi AG à AH ; & en raiſon égale, comme CF ſera à CD, ainſi AB ſera à AH ; par ainſi les côtez au long des angles égaux F, B, & FCD, BAH, ſeront proportionnaux, & ainſi des autres. Parquoy les figures CDEF, AHGB ſeront ſemblables, & ſemblablement décrites. Nous avons donc fait ce qui étoit requis.



SCHOLIE.

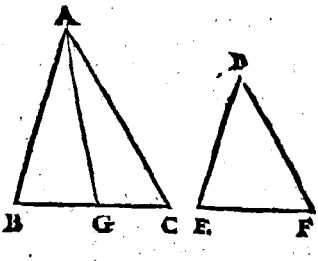
Il eſt évident par ce que nous avons dit ſur la 32. prop. 1. que ſi la figure donnée avoit plus de quatre côtez, elle ſeroit diviſée en plus de deux triangles : & alors il faudroit pour les deux premiers operer ainſi que deſſus, puis aprés proceder de triangle en triangle juſques à la fin, décrivant toûjours ſur & aux extrémitez de la derniere ligne deux angles égaux aux deux de deſſus la diagonalle correſpondante, ainſi qu'il a été fait icy ſur AG, homologue & correſpondante à la diagonalle CE.

THEOR. 13. PROP. XIX.

Les triangles ſemblables, ſont l'un à l'autre en raiſon doublée de leurs côtez de même raiſon.

Soient deux triangles semblables ABC & DEF, ayant les angles B & E égaux ; item C & F ; mais comme AB est à BC ainsi DE à EF, &c. Je dis qu'ils seront l'un à l'autre en raison doublée de leurs côtez de même raison AB & DE, ou AC & DF, ou BC & EF, c'est-à-dire que si à deux quelconques de ces côtez de même raison, comme par exemple BC & EF, on trouve la troisiéme proportionnelle BG, le triangle ABC sera au triangle DEF, comme la ligne BC est à la troisiéme proportionnelle BG : car telle est la raison doublée par la 10. def. 5.

Car étant tirée la ligne AG ; d'autant que les triangles ABC, DEF sont semblables, & que comme AB est à BC ainsi DE est à EF, en permutant par la 16. prop. 5. comme AB sera à DE, ainsi BC sera à EF ; mais comme BC est à EF, ainsi EF est à BG par la construction. Donc comme AB sera à DE, ainsi EF sera à BG par la 11. prop. 5. & par ainsi les deux triangles ABG, DEF, auront les côtez au long des angles égaux B & E, reciproques : & par la 15. prop. 6. iceux triangles ABG, DEF, seront égaux entr'eux : & partant comme le triangle ABC sera au triangle DEF, ainsi sera le même triangle ABC au triangle ABG par la 7. prop. 5. Mais comme le triangle ABC est au triangle ABG de même hauteur, ainsi est la base BC à la base BG par la 1. prop. 6. Donc comme le triangle ABC est au triangle DEF, ainsi est BC à BG. Mais BC, EF, BG, étans continuellement proportionnelles, BC est à BG en raison doublée de BC à EF par la 10. def. 3. donc aussi le triangle ABC est au triangle DEF en raison doublée du côté BC au côté EF. Donc les triangles semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



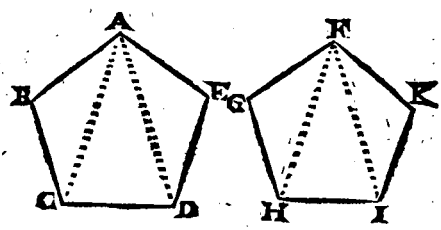
COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, qu'étans trois lignes droites proportionnelles, comme la premiere ſera à la troiſiéme, ainſi le triangle décrit ſur la premiere ſera au triangle ſemblable, & ſemblablement poſé ſur la ſeconde. Car il a été démontré, que comme BC 1. eſt à BG 3. ainſi le triangle ABC au triangle DEF.

THEOR. 14. PROP. XX.

Les polygones ſemblables peuvent eſtre diviſez en nombre égal de triangles ſemblables entr'eux, & proportionnaux à leur tout: & les polygones ſont l'un à l'autre en raiſon doublée de leurs côtez de meſme raiſon.

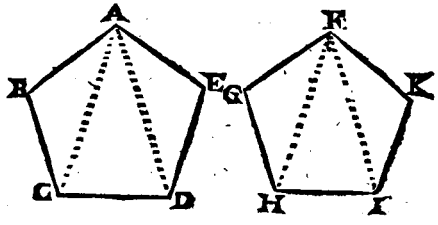
Soient deux polygones ſemblables ABCDE, & FGHIK, ayans les angles A, F, égaux. Item B, G, &c. Je dis premierement qu'iceux polygones peuvent eſtre diviſez en nombre égal de triangles ſemblables.



Car aprés avoir mené les lignes AC, AD, FH, FI, il eſt évident que l'une des figures eſt diviſée en autant de triangles que l'autre. Et d'autant que l'angle B eſt poſé égal à l'angle G, & que comme BA eſt à BC, ainſi GF à GH: par la 6. prop. de ce livre, les triangles ABC & FGH ſeront équiangles, & par la 4. prop. de ce meſme livre, ils auront les côtez au long des angles égaux proportionnaux, & par conſequent ils ſeront ſemblables: par meſme diſcours, les triangles AED & FKI, ſeront auſſi ſemblables.

Pareillement par ce qui a été dit cy deſſus AC eſt à CB, comme FH à HG : mais BC eſt à CD comme GH à HI : car ce ſont côtez de figures ſemblables : donc en raiſon égale par la 22. prop. 5. AC ſera à CD, comme FH à HI : & d'autant que les angles BCD, GHI ſont égaux, & les angles BCA, GHF auſſi égaux ; ceux-cy étans ôtez de ceux-là, les reſtans ACD, FHI, ſeront pareillement égaux : & partant par la 6. prop. 6. les triangles ACD, & FHI, ſeront équiangles, & par conſequent ſemblables.

Je dis ſecondement, qu'iceux triangles ſont proportionnaux à leur tout : c'eſt-à-dire, que chaque triangle de l'un des polygones a telle raiſon à ſon triangle correſpondant de l'autre polygone, que tout le polygone a tout le polygone. Car d'autant que les trois triangles de l'une des figures ſont ſemblables aux trois triangles de l'autre, chacun au ſien, & que par la prop. preced. ils ſont l'un à l'autre, en raiſon doublée de leurs côtez de meſme raiſon : les triangles ABC & FGH, ſeront l'un à l'autre en raiſon doublée de AC à FH : auſſi en la meſme raiſon doublée ſeront les triangles ACD, FHI : & le troiſiéme AED étant au troiſiéme FKI en raiſon doublée de AD à FI,



qui eſt la même que de AC à FH, étans côtez de triangles ſemblables : auſſi les triangles ACD, FKI, ſeront l'un à l'autre en raiſon doublée de AC à FH : & par la 12. prop. 5. tous les triangles du premier polygone, ſeront à tous les triangles de l'autre polygone, comme l'un des triangles de l'un d'iceux, ſera à ſon reſpondant de l'autre.

Je dis tiercement, que le polygone eſt au polygone en raiſon doublée des côtez de même raiſon, comme CD & HI : car puiſque toute la figure ABCDE, eſt à toute la figure FGHIK, comme l'un des triangles de

l'une, ſçavoir ACD, eſt à l'un des triangles de l'autre, ſçavoir FHI, leſquels triangles par la prop. prec. ſont en raiſon doublée de CD à HI, par la 11. prop. 5. le polygone ſera au polygone, en raiſon doublée des mêmes côtez CD & HI. Parquoy les polygones ſemblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

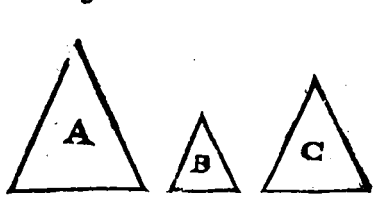
COROLLAIRE.

Par cecy eſt manifeſte, qu'étans trois lignes droites proportionnelles, comme la premiere ſera à la tierce, ainſi le polygone décrit ſur la premiere ſera au polygone ſemblable, & ſemblablement décrit ſur la ſeconde; puis qu'il a été démontré que les polygones ſont entr'eux en raiſon doublée de leurs côtez de même raiſon, c'eſt-à-dire, comme le côté du premier a une troiſiéme proportionnelle auſdits côtez de même raiſon.

THEOR. 15. PROP. XXI.

Les figures rectilignes ſemblables à une même figure rectiligne, ſont auſſi ſemblables entr'elles.

Soit la figure rectiligne A ſemblable à la figure rectiligne *B*, & la figure rectiligne C, auſſi ſemblable à la même *B*: Je dis que les figures A & C ſeront ſemblables entr'elles.



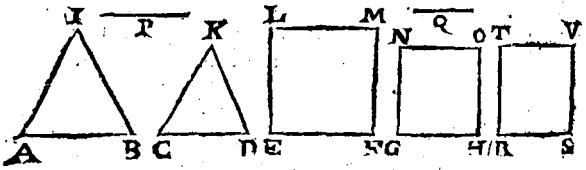
Car d'autant que chacune d'icelles figures A & C eſt ſemblable à *B*, elle a les angles égaux aux angles de *B*, & les côtez d'autour iceux angles égaux proportionnaux par la 1. def. 6. & partant par la 1. com. ſent. les angles de A, ſeront auſſi égaux aux angles de C; & par la 11.

prop. 5. les côtez au long des angles égaux seront proportionnaux : & par la 1. def. 6. A & C seront semblables: donc les figures rectilignes semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 16. PROP. XXII.

Si quatre lignes droites sont proportionnelles; les figures rectilignes semblables, & semblablement décrites sur icelles, seront aussi proportionnelles: & si icelles figures ainsi décrites sont proportionnelles, icelles lignes droites seront aussi proportionnelles.

Soient quatre lignes droites proportionnelles AB, CD, EF, GH : & sur AB, CD, soient constituées deux quelconques figures rectilignes ABI, CDK semblables, & semblablement décrites : Item sur EF & GH deux autres



quelconques figures rectilignes semblables, & semblablement décrites EFML, GHON. Je dis premierement que ces quatre figures rectilignes sont proportionnelles, c'est-à-dire, que comme ABI est à CDK, ainsi EFML est à GHON.

Qu'il ne soit ainsi : aux deux lignes AB & CD, soit trouvée P troisiéme proportionnelle par la 11. prop. 6. & aux deux EF & GH, soit trouvée Q aussi troisiéme proportionnelle : & d'autant que AB est à CD, comme EF est à GH : Item CD à P comme GH à Q : en raison égale AB sera à P, comme EF à Q par la 22. prop. 5. Mais comme AB est à P, ainsi le rectiligne ABI est au rectiligne CDK par le coroll. de la 19. ou 20. prop. 6. Item

comme

comme EF est à Q, ainsi le rectiligne EM est au rectiligne GO. Donc comme ABI est à CDK, ainsi EM est à GO par la 11. prop. 5.

Je dis pour la seconde partie, que si icelles figures semblables, & semblablement décrites sont proportionnelles, que les lignes sur lesquelles elles sont décrites, seront aussi proportionnelles, c'est à sçavoir, que comme AB est à CD, ainsi EF est à GH.

Car ayant trouvé RS quatriéme proportionnelle aux trois lignes AB, CD, EF par la 12. prop. 6. sur icelle RS soit décrit le rectiligne RV semblable, & semblablement posé au rectiligne EM par la 18. prop. 6. & partant aussi semblable au rectiligne GO par la prop. precedente; & d'autant que comme AB est à CD, ainsi EF est à RS, par ce qui a été démontré cy-dessus, comme le rectiligne ABI sera au rectiligne CDK, ainsi le rectiligne EM sera au rectiligne RV. Mais comme ABI est à CDK, ainsi aussi a été posé EM à GO : donc par la 11. prop. 5. comme EM sera à RV, ainsi EM sera à GO; & partant par la 9. prop. 5. les rectilignes RV, GO seront égaux: lesquels étans semblables, & semblablement décrits, consistent nécessairement (comme nous démontrerons incontinent) sur lignes droites égales RS, GH. Parquoy par la 7. prop. 5. comme EF sera à RS, ainsi EF sera à GH. Mais par l'hypothese EF est à RS, comme AB à CD : donc par la 11. prop. 5. comme AB sera à CD, ainsi aussi EF sera à GH. Parquoy si quatre lignes sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

LEMME.

Or que les rectilignes égaux semblables & semblablement décrits, tels que sont GO, RV, consistent sur lignes droites égales, on le prouvera ainsi. Si les lignes GH, RS peuvent être inégales, soit GH la plus grande : & puis que les rectilignes sont semblables, comme GH est à HO, ainsi RS à SV : & GH ayant été posée plus grande que RS, par la 14. prop. 5. HO sera aussi plus grande que SV : & partant le rectiligne GO plus grand que le rectiligne RV ; puis que cettuy-cy peut être constitué dans celuy-là : ce qui est absurde, ayans

été posez égaux. Les lignes GH, RS ne sont donc pas inégales, mais égales. Ce qui étoit proposé.

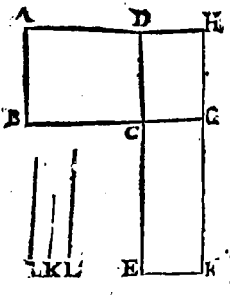
SCHOLIE.

Il est évident, que s'il y a aussi trois lignes droites proportionnelles, les figures rectilignes semblables, & semblablement décrites sur icelles, seront pareillement proportionnelles, &c. Car la ligne moyenne, & son rectiligne étant prise deux fois, on aura quatre lignes proportionnelles : donc aussi quatre rectilignes proportionnaux, comme il a été cy-dessus démontré. Vû donc que le rectiligne qui sera décrit sur la seconde ligne, sera égal à celuy décrit sur la troisiéme; est manifeste ce qui étoit proposé.

THEOR. 17. PROP. XXIII.

Les parallelogrammes équiangles, sont l'un à l'autre en la raison composée de celles de leurs côtez.

Soient deux parallelogrammes équiangles ABCD, & CEFG, ayans les deux angles BCD, ECG égaux : Je dis que la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF est composée de celles de leurs côtez, sçavoir est composée de la raison qui est de BC à CG, & de celle qui est de DC à CE.



Car soient disposez les deux parallelogrammes l'un contre l'autre, en sorte que BC & CG se rencontrent directement, & ne fassent qu'une seule ligne droite, & alors DC & CE feront aussi une ligne droite, puis que les angles BCD, ECG sont égaux, comme il est évident par les 2. com. sent. 13. & 14. prop. 1. Soient prolongez les côtez AD, FG, qui se rencontrant en H, fassent le parallélogram-

me DCGH ; puis soit prise quelconque ligne droite I ; & aux trois BC, CG & I, soit trouvée la 4. proportionnelle K. Item aux trois DC, CE & K, la 4. prop. L. Vû donc que par la 1. prop. 6. comme BC est à CG, ainsi AC à DG ; & comme BC à CG, ainsi aussi I est à K par l'hypothese : pareillement comme AC sera à DG, ainsi sera I à K, par la 11. prop. 5. Mais par même raison DG est à CF, comme K à L, (attendu que comme DG à CF, ainsi DC à CE, par la 1. prop. 6. qui est la méme raison que de K à L.) Donc en raison égale, comme AC sera à CF, ainsi I sera à L par la 22. prop. 5. Mais la raison de I à L est composée de la raison de BC à CG, & de celle de DC à CE par la 5. def. de ce livre. Donc aussi d'icelles raisons est composée la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF. Parquoy les parallelogrammes équiangles sont l'un à l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

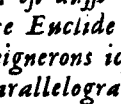
Le meſme ſera encore démontré plus briefvement, ainſi qu'il enſuit. Les parallelogrammes AC, CF étans diſpoſez comme auparavant, AC ſera à CH, comme BC à CG ; & CH à EG comme DC à EC par la 1. prop. 6. Mais la raiſon de AC à EG, eſt compoſée des raiſons entre-moyennes, ſçavoir de AC à CH, & de CH à EG par la 5. def. 6. Donc la meſme raiſon de AC à EG ſera auſſi compoſée des raiſons de BC à CG, & de DC à CE, qui ſont égales à icelles entre-moyennes. Ce qui eſt propoſé.

Or il eſt facile de colliger des choſes cy-deſſus dites & démontrées par Euclide en cette 23. prop. comment on compoſe en lignes, ou en nombres une raiſon de deux ou de davantage de raiſons. Car des raiſons de BC à CG, & de DC à CE, a été compoſée la raiſon de I à L en lignes : mais de 3 à 2 en nombres. Que s'il faut compoſer une raiſon de trois autres

proposées ; ayant trouvé celle composée de deux, d'icelle & de la troisiéme nous en composerons une autre en la même maniere, laquelle sera composée de trois : & ainsi consequemment des autres.

Cette 23. prop. est aussi veritable en nombres, comme le démontre Euclide au 8. l. prop. 5. C'est pourquoy nous enseignerons icy comme il faut trouver la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF, les raisons de leurs côtez, étans connuës en nombres. Comme par exemple, si la raison de BC à CG est la mesme que de 5 à 2, & celle de DC à CE, la mesme que de 3 à 5, nous trouverons la raison d'iceux parallelogrammes ainsi. Ayant posé la premiere raison estre 5 à 2, soit fait que comme 3 est à 5, (qui est la derniere raison) ainsi 2 soit à un autre nombre, qui sera trouvé estre $3\frac{1}{3}$: Cela fait, nous aurons les trois nombres 5, 2, $3\frac{1}{3}$, lesquels auront entr'eux les deux raisons proposées, & consequemment en delaissant le nombre entre-moyen 2, demeurera 5 à $3\frac{1}{3}$ pour la raison composée d'icelles : & telle sera la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF, laquelle reduitte en nombres entiers sera 15 à 10, ou 3 à 2, qui est raison sesquialtere.

On peut aussi en la mesme maniere que dessus oster une raison d'une autre raison plus grande: comme par exemple, soit la raison de A à B, qu'il faut oster d'une plus grande raison C à D.



Soit fait que comme A est à B, ainsi C soit à quelque autre, sçavoir E, qui soit posée moyenne entre C & D : & la raison de E à D sera la raison re-

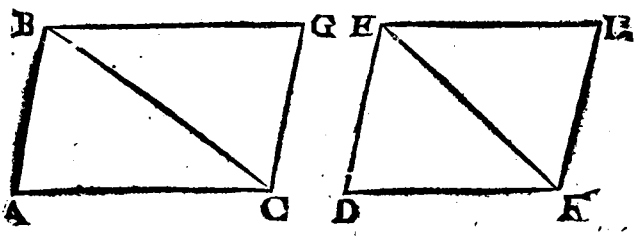
stante de la soustraction requise. Car puisque la raison de C à D est composée de celle de C à E, & de E à D ; si on en oste celle-là de C à E, ou de A à B, qui luy est égale, restera la susdite raison de E à D.

Qu'il faille encore oster la raison de 4 à 3, de celle de 6 à 2, soit fait que comme 4 est à 3, ainsi 6 soit à un autre nombre, sçavoir 4 ½ : & la raison de 4 ½ à 2, sera le reste requis. Car il est évident que la raison de 6 à 2, est composée de celles de 6 à 4 ½, & de 4 ½ à 2 : & partant en ostant de ces deux raisons celle de 6 à 4 ½, ou de 4 à 3, qui luy est égale, restera la susdite raison de 4 ½ à 2, qui est double sesquiquarte.

Commandin démontre en ce lieu les trois Theor. suivans.

1. Les triangles qui ont un angle égal à un angle, sont en raison composée des côtez, qui comprennent l'angle égal.

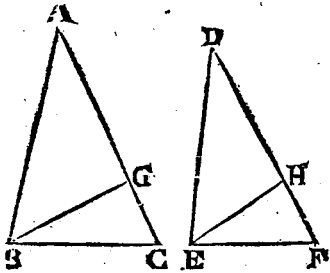
Soient les triangles ABC, DEF, ayans l'angle B esgal à l'angle E : Je dis que le triangle ABC est au triangle DEF en raison composée des côtez comprenans les angles esgaux B & E. Car ayant achevé les parallelogrammes AG, DH, ils seront esquiangles : & partant par la 23. prop. 6. la raison d'iceux sera composée de celle de leurs côtez : Vû donc que les triangles ABC, DEF, desquels ils sont moitiez par la 34. prop. 1. sont en la même raison



qu'iceux par la 15. *prop.* 5. *auſſi iceux triangles ſeront l'un à l'autre en icelle raiſon compoſée des côtez.*

2. Les triangles qui ont un angle égal à un angle, ſont l'un à l'autre, en la même raiſon que les rectangles compris ſous les côtez, qui contiennent l'angle égal.

Soient les triangles ABC, DEF, ayans l'angle A eſgale à l'angle D : Je dis que le triangle ABC eſt au triangle DEF, comme le rectangle de AB, AC, eſt au rectangle de DE, DF. Car étans tirees ſur AC, DF, les perpendiculaires BG, EH ; les triangles ABG, DEH, ſeront eſquiangles, comme appert par le Corol. de la 32. *prop.* 1. *Donc par la* 4. *prop.* 6. *comme GB eſt à BA, ainſi HE à ED. Mais par la* 1. *prop.* 6. *comme GB eſt à BA, ainſi le rectangle de BG, AC, au rectangle de BA, AC, pource que poſant GB, BA, baſes, la hauteur d'iceux rectangles ſera une méme, ſçavoir AC. Semblablement comme HE à ED ainſi eſt le rectangle de EH, DF au rectangle de DE, DF. Donc par la* 11. *prop.* 5. *le rectangle de BG, AC, eſt au rectangle de AB, AC, comme le rectangle de EH, DF au rectangle de DE, DF ; & en permutant le rectangle de BG, AC ſera au rectangle de EH, DF, comme le rectangle de AB, AC au rectangle de DE, DF. Mais le rectangle de BG, AC, eſt au rectangle de EH, DF, ainſi que le triangle* ABC *au triangle* DEF *par la* 15. *prop.* 5. *pource que ces triangles ſont moitiez d'iceux rectangles, par la* 41. *prop.* 1. *(Car ils ont mêmes baſes qu'iceux AC,* DF, *& mêmes hauteurs* BG, EH : *& partant entre mêmes paralleles) donc auſſi le triangle* ABC *ſera au triangle* DEF, *comme le rectangle de* AB, AC, *eſt au rectangle de* DE, DF. *Ce qui étoit propoſé.*

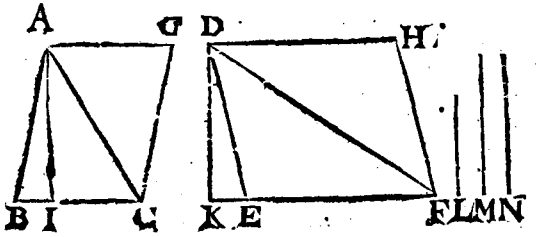


COROLLAIRE.

De cecy reſulte que les parallelogrammes eſquiangles ſont auſſi entr'eux, en la même raiſon que les rectangles compris ſous les côtez des angles eſgaux, puis qu'ils ſont doubles d'iceux triangles.

3. Les triangles, & les parallelogrammes, ſont entr'eux en la raiſon coimpoſée de la raiſon des baſes, & de celle des hauteurs.

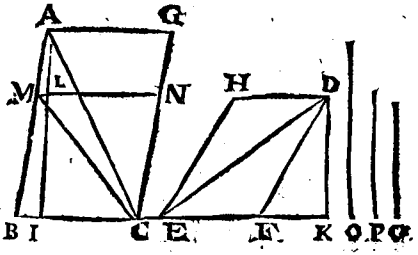
Soient les triangles ABC, DEF; & les parallelogrammes BG, EH; *& les hauteurs d'iceux ſoient AI, DK. Ie dis que la raiſon tant d'iceux triangles, que des parallelogrammes, eſt compoſée de la raiſon de la baſe* BC *à la baſe* EF, *& de celle de la hauteur AI à la hauteur* DK. *Car premierement ſoient les hauteurs eſgales, mais les baſes, ou auſſi eſgales ou ineſgales: & ſoit fait comme* BC *à* EF, *ainſi L à M: & comme AI à* DK, *ainſi M à N,*



leſquelles ſeront eſgales, puis que AI, DK, *ſont poſées eſgales: & partant par la* 7. *prop.* 5. *L ſera à N, comme L à M, c'eſt-à-dire comme* BC *à* EF. *Mais par la* 1. *prop.* 6. *comme* BC *eſt à* EF, *ainſi eſt le triangle ABC au triangle* DEF; *& le parallelogramme* BG *au parallelogramme* EH: *Donc par la* 11. *prop.* 5. *comme L ſera à N, ainſi le triangle au triangle, & le parallelogramme au parallelogramme: Mais la raiſon de L à N eſt compoſée de la raiſon de L à M, c'eſt-à-dire de la raiſon de* BC *à* EF, *& de la raiſon de M à N, c'eſt-à-dire de AI à* DK: *donc la raiſon du triangle ABC au triangle* DEF, *&* du

parallelogramme BG au parallelogramme EH, eſt auſſi compoſee des mémes raiſons.

Soient maintenant les hauteurs AI, DK ineſgales, & AI la plus grande: mais les baſes BC, EF, eſgales; ou auſſi ineſgales. Soit fait que comme AI eſt à DK, ainſi O à P; & comme BC à EF, ainſi P à Q: puis ayans couppé IL eſgale à DK, par L, ſoit tiree MN parallele à BC, & joint CM. D'autant que le triangle ABC eſt au triangle MBC, & le parallelogramme BG au parallelogramme BN, comme la hauteur AI a la hauteur IL ou DK qui luy eſt eſgale, c'eſt-à-dire comme O à P, par le Scholie de la 1. prop. 6. & comme le triangle MBC eſt au triangle DEF, & le parallelogramme BN au parallelogramme FH, ainſi eſt la baſe BC à la baſe EF, (pource



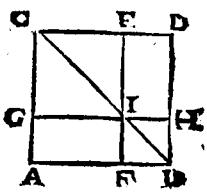
qu'ils ſont de même hauteur) c'eſt-à-dire ainſi P à Q: en raiſon eſgale ABC ſera à DEF, & BG à FH comme O à Q. Parquoy puiſ que la raiſon de O à Q eſt compoſee de la raiſon de O à P, c'eſt-à-dire de AI à DK, & de la raiſon de P à Q, c'eſt-à-dire de la baſe BC à la baſe EF: la raiſon du triangle ABC au triangle DEF: & du parallelogramme BG au parallelogramme FH, ſera compoſée des mêmes raiſons. Ce qui étoit proposé.

On peut demontrer en la même maniere, que le triangle DEF, qui a la moindre hauteur, eſt au triangle ABC, *& le parallelogramme FH au parallelogramme BG en la raiſon compoſee de celle de la baſe EF à la baſe BC, & de celle de la hauteur DK à la hauteur AI; & ce en faiſant que comme EF à BC ainſi Q à P; & puis comme DK à AI, ainſi P à O; & tout le reſte comme deſſus. Appert donc ce qui étoit proposé.*

THEOR. 18. PROP. XXIV.

En tout parallelogramme, les parallelogrammes qui ſont à l'entour du diametre, ayans un angle commun au total, ſont ſemblables entr'eux, & au total.

Soit le parallelogramme ABDC, duquel le diametre eſt BC, & à l'entour d'iceluy diametre ſoient les deux parallelogrammes GE & FH, ayans les angles B & C communs avec le total : Je dis qu'iceux parallelogrammes GE & FH ſont ſemblables entr'eux, & au total ABDC.



Car d'autant que les lignes AB & GH ſont paralleles, ſur leſquelles tombent les lignes CB & CA par la 29. prop. 1. l'angle externe CIG ſera égal à l'interne IBF, & l'externe CGI à l'interne A, auquel eſt auſſi égal l'externe IFB, attendu que BA tombe ſur les deux paralleles EF & CA. Parquoy les trois triangles CAB, CGI & IFB ayans chacun deux angles égaux à deux angles, chacun au ſien, les troiſiémes angles ſeront auſſi égaux, & conſequemment iceux triangles ſeront équiangles entr'eux. Et par même raiſon les trois autres triangles CDB, CEI & IHB, qui par la 34. pr. 1. ſont égaux aux trois precedents ſeront auſſi équiangles entr'eux : Donc les parallelogrammes compoſez d'iceux triangles, ſçavoir AD, GE & FH, ſeront pareillement équiangles entr'eux. Davantage, puis que le triangle CAB eſt équiangle au triangle CGI, & & le triangle CDB au triangle CEI, par la 4. prop. 6. comme CA ſera à AB, ainſi CG à GI : & par ainſi les côtez d'autour les angles égaux A & G, ſont proportionnaux. Derechef, comme AB eſt à BC, ainſi GI eſt à IC, & comme CB eſt à BD, ainſi CI eſt à IE. Donc en raiſon égale, comme AB ſera à BD, ainſi GI ſera à IE : & partant les côtez d'allentour les angles égaux

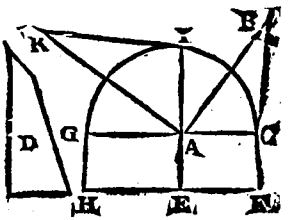
ABD, GIE ſont proportionnaux. On prouvera en la même maniere que les côtez d'allentour les autres angles égaux d'iceux parallelogrammes AD & GE ſont auſſi proportionnaux. Donc par la 1. def. 6. le parallelogramme GE ſera ſemblable au parallelogramme total AD. Et par mêmes raiſons, le parallelogramme FH ſe prouvera auſſi ſemblable au même parallelogramme AD. Donc par la 21. prop. 6. tous les trois parallelogrammes AD, GE & FH ſeront ſemblables entr'eux. Parquoy en tous parallelogrammes; les parallelogrammes qui ſont à l'entour du diametre, &c. Ce qu'il falloit démontrer,

PROBL. 7. PROP. XXV.

Décrire une figure rectiligne, ſemblable à une figure rectiligne donnée, & égale à une autre propoſée.

Soient deux figures rectilignes ABC & D : il faut faire une autre figure rectiligne égale à D, & ſemblable à ABC.

Sur la ligne AC (qui eſt l'un des côtez du rectiligne ABC, auquel on en doit faire un ſemblable) ſoit fait le rectangle ACFE égal à ladite figure ABC: Item ſur la ligne AE, ſoit conſtruit le rectangle GE égal à la figure donnée D, le tout par les 44. & 45. prop. 1. & aprés avoir trouvé AI, moyenne proportionnelle entre GA & AC : Sur icelle AI, ſoit décrite la figure AIK ſemblable & ſemblablement poſée à la figure ACB, par la 18. prop. 6. Je dis qu'icelle figure AKI ſera auſſi égale à la figure donnée D.



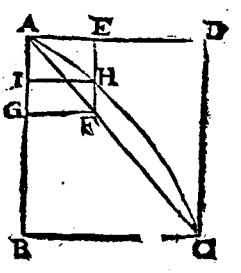
Car par la conſtruction le rectangle GE eſt égal au rectiligne D, & le rectangle AF au rectiligne ABC, & par la 1. prop. 6. AF eſt à GE, comme CA à AG : Mais les deux figures ſemblables ABC & AKI ſont l'une à l'au-

tre en la meſme raiſon de AC à AG, par le Corol. de la 19. ou 20. prop. 6. attendu qu'icelles figures ſont décrites ſur les deux premieres lignes des trois proportionnelles CA, AI & AG. Donc par la 11. prop. 5. ACB ſera à IKA, comme AF à GE : & en permutant ACB ſera à AF, comme IKA à GE, par la 16. prop. 5. & partant ACB étant égal à AF : auſſi IKA ſera égal à GE, & par conſequent égal à D : & par la conſtruction, iceluy rectiligne IKA eſt auſſi ſemblable, & ſemblablement poſé au rectiligne ABC. Nous avons donc décrit une figure rectiligne ſemblable à une autre donnée, & égale à une propoſée. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 19. PROP. XXVI.

Si d'un parallelogramme on oſte un parallelogramme ſemblable & ſemblablement poſé au tout, ayant un angle commun avec le tout; l'oſté ſera avec le tout à l'entour d'un meſme diametre.

Du parallelogramme ABCD ſoit retranché le parallelogramme AEFG ſemblable & ſemblablement poſé au total BD, & ayant l'angle A commun avec iceluy : Je dis qu'ils ſont tous deux conſtituez à l'entour d'un meſme diametre, c'eſt-à-dire qu'ayant mené au parallelogramme total BD le diametre AC, il paſſera par F, comme AFC.



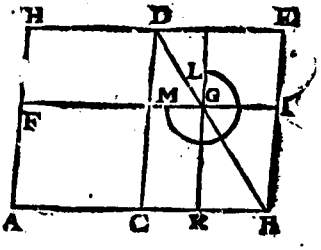
Autrement, ſoit (s'il eſt poſſible) un autre diametre AHC, qui ne paſſe par l'angle F du parallelogramme retranché EG : ains coupe le côté EF en H, & d'iceluy point ſoit menée HI parallele à AE, par la 31. prop. 1. donc le parallelogramme IE étant à l'entour d'un meſme diametre avec le total DB ſera ſemblable à iceluy, par la 24. prop. 6. auquel total, GE eſt auſſi ſemblable par

l'hypotheſe : & partant par la 21. prop. 6. les parallelogr. GE & IE ſeront ſemblables entr'eux : & par la 1. def. 6. AE ſera a EF comme AE à EH : mais AE étant égal à ſoy meſme, il faudroit auſſi par la 14. prop. 5. que EF 2e fuſt égale à EH 4e, c'eſt a ſçavoir le tout à la partie, ce qui eſt abſurde : donc le parallelogr. total BD, & le retranché GE, étoient conſtituez à l'entour d'un meſme diametre : car il adviendra toûjours la meſme abſurdité, ſi on dit que le diametre de BD couppe a quelconque autre point, ſoit le côté EF ou FG, du parallelogramme retranché GE. Si donc d'un parallelogramme on oſte un parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 20. PROP. XXVII.

De tous les parallelogrammes appliquez ſelon une meſme ligne droite, & defaillans de parallelogrammes ſemblables & ſemblablement poſez à un autre décrit ſur la moitié de la meſme ligne; le plus grand eſt celuy là qui eſt décrit ſur l'autre moitié de la ligne, & ſemblable au defaut.

Soit la ligne droite AB couppée en deux également en C, & ſur CB moitié d'icelle, ſoit conſtitué quelconque parallelogramme BCDE, duquel le diametre eſt BD : Si donc on accomplit tout le parallelogramme ABEH, le parallelogramme AD conſtitué ſur la moitié AC, ſera appliqué ſelon la ligne AB, & defaillant du parallelogramme CE, & ſemblable à icelny defaut CE. Je dis que de tous les parallelogrammes qui peuvent eſtre appliquez ſelon icelle ligne AB, & defaillans d'une figure ſemblable & ſemblablement poſée à CE, le plus grand eſt AD,



qui eſt décrit ſur la moitié AC, & defaillant du parallelogramme CE.

Car étant pris au diametre BD quelconque point G, & tirées par iceluy point les lignes droites FGI, KG, paralleles aux lignes droites AB, BE; le parallelogramme AKGF appliqué ſelon la ligne AB, ſera defaillant du parallelogramme KI, lequel par la 24. prop. 6. eſt ſemblable & ſemblablement poſé à CE. Et d'autant que par la 43. prop. 1. les complemens CG, GE, ſont égaux, ſi on leur adjouſte KI commun; auſſi CI, KE ſeront égaux. Mais CI, CF, étans ſur baſes égales, ſont pareillement égaux par la 36. prop. 1. donc auſſi CF, KE ſeront égaux, & leur adjouſtant CG commun, le parallelogramme AG ſera égal au gnomon LM. Parquoy puis que CE eſt plus grand qu'iceluy gnomon LM: (car CI, outre le gnomon, contient encore le parallelogramme DG) auſſi AD qui eſt égal à CF, par la 36 prop. 1. ſera plus grand que le parallelogramme AG, du même parallelogramme DG. Et en la même maniere ſera démontré que AD eſt plus grand que tous autres parallelogrammes, qui ſeront appliquez ſelon la même ligne droite AB, & defaillans de figures parallelogrammes ſemblables & ſemblablement poſées à CE. Parquoy de tous les parallelogrammes appliquez ſelon une même ligne droite, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

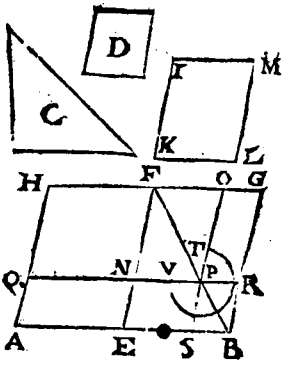
PROBL. 8. PROP. XXVIII.

A une ligne droite donnée, appliquer un parallelogramme égal à une figure rectiligne donnée, & defaillant d'un parallelogramme ſemblable à un autre donné, mais il faut que la figure rectiligne donnée ne ſoit plus grande que le parallelogramme, qui étant appliqué à la moitié de la ligne donnée, eſt ſemblable au parallelogramme donné.

Soit la ligne droite donnée AB, à laquelle il faut appliquer un parallelogramme égal à la figure rectiligne

donnée C, defaillant d'un parallelogramme ſemblable au parallelogramme donné D.

Ayant couppé AB en deux également en E, ſur la moitié EB ſoit décrit le parallelogramme EF, GB ſemblable & ſemblablement poſé à iceluy D, par la 18. prop. 6. & ſoit accomply le parallelogramme AHGB.



Maintenant, ſi AF eſt égal à C, on a ce que l'on demande : car il eſt appliqué ſelon la ligne AB, & defaillant du parallelogramme EG, qui eſt fait ſemblable à D. Mais ſi C eſt plus petit que AF, (car par l'hypotheſe il ne peut être plus grand) il ſera auſſi plus petit que EG égal à iceluy AF: ſoit donc trouvé l'excez de EG par deſſus C, (cette égalité ou inégalité, & excez ſera connu par ce que nous avons dit à la 45. prop. 1.) lequel excez par la 25. prop. 6. ſoit reduit en parallelogramme IKLM, ſemblable & ſemblablement poſé à EG : & vû que EG eſt plus grand que KM, il eſt évident que les côtez EE, FG, ſeront auſſi plus grands que les côtez homologues KI, IM : parquoy d'iceux EF, FG ſoient couppez FN, FO, égaux à iceux KI, IM, afin qu'étant accomply le parallelogramme NFOP, il ſoit égal à KM, & ſemblable & ſemblablement poſé au même KM ; & partant auſſi à EG : & par conſequent qu'étant tiré le diametre BF, iceux parallelogrammes EG, NO, ſoient autour d'iceluy diametre par la 26. prop 6. & aprés avoir continué de part & d'autre les côtez NP, OP, tant qu'il ſera de beſoin, ſera conſtitué le parallelogramme AP, lequel je dis être le parallelogramme demandé.

Car il eſt appliqué à la ligne AB, & defaillant du parallelogramme SR, lequel par la 24. prop. 6. eſt ſemblable à EG, partant auſſi à D. Item puis que IL eſt

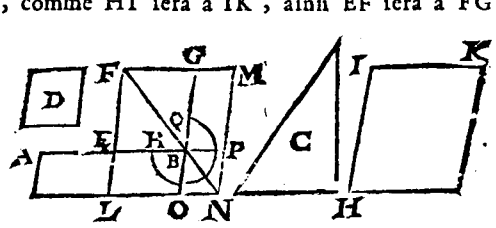
l'excez par lequel EG excede C, & qu'à iceluy excez eſt égal NO : Il eſt évident que le gnomon TV ſera égal à la figure C. Mais il eſt auſſi égal à AP ; comme il a été prouvé à la precedente : donc auſſi AP ſera égal à C : Mais il eſt appliqué à la ligne donnée AB, & defaillant du parallelogramme SR ſemblable au donné D. Nous avons donc à une ligne droite donnée appliqué un parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 9. PROP. XXIX.

A une ligne droite donnée, appliquer un parallelogramme égal à une figure rectiligne donnée, excedant d'un parallelogramme ſemblable à un autre donné.

Soit la ligne droite donnée AB, à laquelle il faut appliquer un parallelogramme égal au rectiligne donné C, mais excedant d'un parallelogramme ſemblable au parallelogramme donné D.

La ligne AB ſoit couppée en deux également au poinct E, & ſur la moitié EB ſoit décrit le parallelogramme EFGB ſemblable, & ſemblablement poſé à D par la 18. prop. 6. En aprés, ſoit décrit le parallelogramme HK égal aux deux figures C & EG, & ſemblable, & ſemblablement poſé à EG par la 25. prop. 6. & partant à cauſe de la ſimilitude d'iceux parallelogrammes HK, EG, comme HI ſera à IK, ainſi EF ſera à FG ; &



par conſequent HK étant plus grand que EG, auſſi les côtez HI, IK ſeront plus grands que les côtez EF, FG: étans donc prolongez les côtez FE, FG, tellement que

FL, FM, ſoient égales aux lignes IH, IK, & achevé le parallelogramme LFMN, il ſera ſemblable, & ſemblablement poſé à EG. Parquoy par la 26. prop. 6. les parallelogrammes LM, & EG ſeront conſtituez à l'entour d'un même diametre; lequel ſoit FN. Maintenant étant prolongez AB & GB juſques en P & O; & achevé le parallelogramme LA: le parallelogramme AN ſera appliqué à la ligne AB, l'excedant du parallelogramme OP, qui eſt ſemblable à EG par la 24. prop. 6. & partant à D. Mais je dis auſſi qu'iceluy parallelogramme AN eſt égal au rectiligne C; car puiſque par la 36. prop. 1. AL, EO ſont égaux, & par la 43. prop. 1. EO eſt égal au complement BM, auſſi AL ſera égal à iceluy BM: leur adjoûtant donc LP commun; le parallelogramme AN ſera égal au gnomon QR, lequel eſt égal au rectiligne C: (car puiſque HK, c'eſt-à-dire. LM, eſt égal aux rectilignes C & EG enſemble; ſi on ôte EG commun, reſteront égaux le gnomon QR, & le rectiligne C.) Donc auſſi le parallelogramme AN ſera égal au rectiligne C. A la ligne droite AB, nous avons donc appliqué le parallelogramme AN égal au rectiligne C, excedant du parallelogramme OP, qui eſt ſemblable à un autre donné D: Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 10. PROP. XXX.

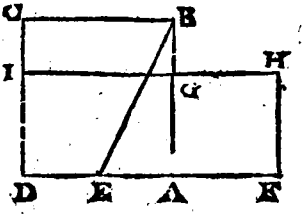
Coupper une ligne droite donnée & terminée, ſelon la moyenne & extréme raiſon.

Soit la ligne droite donnée AB, laquelle il faut couper ſelon la moyenne & extréme raiſon.

Ayant décrit ſur icelle ligne AB, le quarré AC, au côté DA ſoit appliqué par la 29. prop. 6. le rectangle DH égal à iceluy quarré AC, excedant du parallelogramme AH, ſemblable à iceluy AC; & la ligne AB ſera couppée en G, ſelon la moyenne & extréme raiſon.

Car premierement l'excez AH ſera quarré, puis qu'il eſt ſemblable au quarré AC; & d'autant que DH eſt fait égal à AC, ſi d'iceux on ôte le parallelogramme commun AI, reſteront égaux les parallelogrammes CG & AH,

& AH ; lesquels ont aussi les angles au poinct G égaux. Donc par la 14. prop. 6. les côtez d'alentour iceux angles seront reciproques ; tellement que comme IG est à GH, ainsi AG est à GB.



Mais par la 34. prop. 1. IG est égale à BC, c'est à dire à AB ; & GH à AG : Donc comme AB sera à AG, ainsi AG sera à GB. Et puisque AB 1. est plus grande que AG 3. par la 14. prop. 5. AG 2. est aussi plus grande que GB 4. Veu donc que la toute AB est au plus grand segment AG, comme iceluy plus grand segment AG est au plus petit GB ; icelle AB est couppée en G, selon la moyenne & extréme raison, par la 3. def. 6. Ce qu'il falloit faire.

Autrement. La ligne donnée AB soit couppée en G, par la 11. prop. 2. en sorte que le quarré de la partie AG soit égal au rectangle de la toute AB, & de la partie GB. Je dis que AB sera couppée selon la moyenne & extréme raison au point G.

Car puis que le quarré de AG est égal au rectangle de AB & GB, les trois lignes AB, AG & GB, seront continuellement proportionnelles, par la 17. prop. 6. c'est à dire que la toute AB sera au plus grand segment AG, comme iceluy segment AG est au plus petit segment GB ; & par la 3. def. 6. AB est couppée en G, selon la moyenne & extréme raison. Ce qu'il falloit faire.

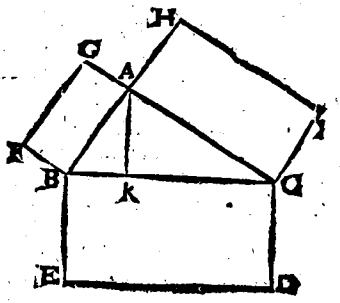
THEOR. 21. PROP. XXXI.

Aux triangles rectangles, la figure décrite sur le côté qui soûtient l'angle droit, est égale aux deux autres figures qui luy sont semblables, & semblablement décrites sur les deux autres côtez.

Soit le triangle rectangle ABC, ayant l'angle BAC, droit, & sur le côté BC, qui soûtient iceluy angle,

soit décrite quelconque figure rectiligne BD, & sur les deux autres côtez AB, AC, soient constituées les deux figures AF, AI semblables, & semblablement posées à BD : Je dis qu'icelle figure BD est égale aux deux autres AF, AI.

Car si du point A, on meine sur BC la perpendiculaire AK, par la 8. prop. 6. elle fera deux triangles semblables entr'eux, & au total ; & par ainsi les trois triangles BAK, ABC, CAK, seront semblables entr'eux, & par la 19. prop. 6. ils seront l'un à l'autre en raison doublée des côtez de même raison AB, BC, CA. Mais par la 20. prop. 6. les trois figures AF, BD & AI, étans semblables, & semblablement posées,



elles seront aussi l'une à l'autre en raison doublée de leurs côtez de même raison AB, BC, CA, qui sont les mêmes côtez des triangles : donc par la 11. prop. 5. les rectilignes AF, BD, AI, seront entr'eux, comme les triangles BAK, BAC, CAK entr'eux, c'est-à-dire, que comme le triangle BAK est au triangle ABC, ainsi le rectiligne AF est au rectiligne BD, & comme le triangle CAK est au triangle ABC, ainsi le rectiligne AI est au rectiligne BD : Donc par la 24. prop. 5. comme le composé des triangles BAK, CAK, 1. & 5. grandeurs, sera au triangle ABC, 2. grandeur, ainsi le composé des rectilignes AF, AI, 3. & 6. grandeurs, sera au rectiligne BD, 4. grandeur : mais le triangle BAC, est égal aux deux autres ABK, ACK : donc la figure BD sera aussi égale aux deux autres AF, AI. Parquoy aux triangles rectangles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

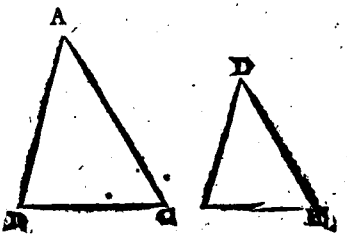
Autrement. D'autant que par la 20. prop. 6. les figures semblables sont en raison doublée de leurs côtez homologues, comme le quarré de AB 1. grandeur, est

au quarré de BC 2. grandeur, ainsi la figure AF 3. grandeur, est à la figure BD 4. grandeur : Mais aussi comme le quarré de AC 5. grandeur, est au quarré de BC 2. grandeur, ainsi la figure AI 6. grandeur, est à la figure BD 4. grandeur. Donc par la 24. prop. 5. le composé de la 1. & 5. grandeur, sçavoir le quarré de AB avec celuy de AC, sera à la 2. grandeur BC, comme le composé de la 3. & 6. grandeur, sçavoir la figure AF avec la figure AI, sera à la 4. grandeur BD. Mais par la 47. prop. 1. les deux quarrez de AB, AC, sont égaux au seul quarré de BC : donc aussi les deux figures AF, AI ensemble, seront égales à la figure BD. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 22. PROP. XXXII.

Si deux triangles ayans deux côtez proportionnaux à deux côtez, sont disposez selon un angle, tellement que les côtez de même raison soient parallels ; les deux autres côtez se rencontreront directement.

Soient deux triangles ABC & CDE, ayans les côtez BA & AC proportionnaux aux côtez CD & DE, disposez de telle façon qu'ils fassent l'angle ACD, & que BA soit parallele à CD, & AC à DE : Je dis que les deux autres côtez BC & CE se rencontreront directement.



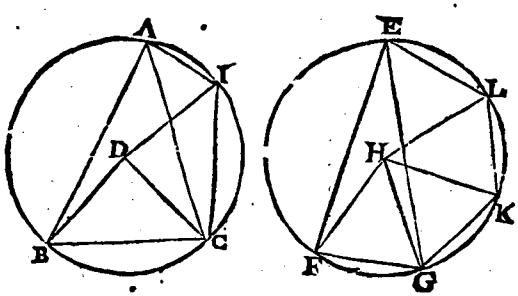
Car puisque BA & CD sont paralleles, l'angle ACD sera égal à son alterne A, par la 29. pro. 1. aussi AC étant parallele à DE, l'angle D sera égal à son alterne ACD : parquoy l'angle D sera égal à l'angle A. Mais par l'hypothese les côtez qui constituent iceux angles égaux,

ſont proportionnaux : donc par la 6. prop. 6. les deux triangles ABC, DCE, ſeront équiangles, & auront les angles B & DCE égaux : leur adjouſtant donc les égaux A & ACD, les deux B & A enſemble, ſeront égaux aux deux DCE, & ACD enſemble ; c'eſt à dire au ſeul angle ACE : parquoy adjoûtant derechef à ces angles égaux, le commun ACB, les deux angles ACE, ACB, ſeront égaux aux trois angles du triangle BAC, c'eſt à dire à deux droits par la 32. prop. 1. & par la 14. prop. 1. les deux lignes BC & CE ſe rencontreront directement. Si donc deux triangles ayans deux côtez proportionnaux à deux côtez, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Aux cercles égaux, les angles conſtituez tant aux centres qu'aux circonferences, ſont entr'eux, comme les circonferences qui les ſouſtiennent. Et les ſecteurs ſont auſſi de meſme entr'eux

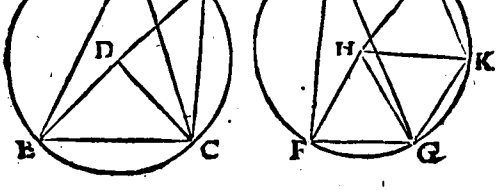
Soient deux cercles égaux ABC & EFG, deſquels les centres ſont D & H ; & ſoient les deux angles BDC, FHG aux centres ; mais les deux BAC, FEG, aux cir-



conferences. Je dis premierement, que comme la circonference BC eſt à la circonference FG, ainſi l'angle BDC eſt à l'angle FHG, & l'angle BAC à l'angle FEG.

Car ayant mené les deux lignes droites BC, FG, soient accommodées aux cercles des lignes droites, sçavoir CI égale à BC ; & GK, KL chacune égale à FG : puis soient menées les lignes ID, KH & LH. Veu donc que les deux lignes droites BC & CI sont égales, les arcs BC & CI seront aussi égaux par la 28. prop. 3. & partant les angles BDC & CDI, seront égaux par la 27. prop. 3. Pour mêmes raisons, tant les trois arcs FG, GK, & KL, que les trois angles FHG, GHK, & KHL sont égaux entr'eux : donc l'arc FGKL est autant multiplice de l'arc FG, comme l'angle FHL est multiplice de l'angle FHG : & l'arc BCI autant multiplice de l'arc BC, comme l'angle BDI, est multiplice de l'angle BDC, puisque les angles BDI, FHL sont divisez chacun en autant de parties égales, que les arcs BCI, FGKL, sur lesquels ils s'appuient : partant si l'arc BCI est égal à l'arc FGKL, l'angle BDI sera égal à l'angle FHL par la 27. prop. 3. si plus grand, plus grand ; & si plus petit, plus petit : donc puisque BCI, BDI, sont équemultiplices de BC, BDC, premiere & troisiéme grandeur ; & FGKL, FHL équemultiplices de FG, FHG 2e & 4e grandeur ; par la 6. def. 5. comme l'arc BC est à l'arc FG, ainsi l'angle BDC est à l'angle FHG.

Et d'autant que par la 15. prop. 5. l'angle BDC est à l'angle FHG, comme l'angle BAC est à l'angle FEG,



(car ceux-là sont doubles de ceux-cy par la 20. prop. 3.) il est évident par la 11. prop. 5. que l'angle BAC est aussi à l'angle FEG, comme l'arc BC est à l'arc FG.

Ce qu'on peut encore démontrer par les meſmes raiſons, & argumens employez pour les angles du centre, ſi on tire les lignes droites IA, KL, LE, &c.

Secondement, Je dis que le ſecteur BDC eſt au ſecteur FHG, comme l'arc BC eſt à l'arc FG : Car (demeurant la meſme conſtruction que deſſus) il eſt manifeſte que les cordes BC & CI étans égales, & leurs arcs auſſi égaux, les angles BAC, & CAI ſeront pareillement égaux par la 27. prop. 3. & conſequemment que les ſegmens ſur leſquels ils inſiſtent & s'appuient, ſont ſemblables & égaux entr'eux. Mais les deux triangles BDC, CDI, ſont auſſi égaux par la 4. prop. 1. leur adjouſtant donc les deux ſegmens égaux, les deux ſecteurs BDC, CDI ſeront égaux : Parquoy l'arc BCI ſera autant multiplice de l'arc BC, que le ſecteur BDI le ſera du ſecteur BDC : & par meſme diſcours, l'arc FGKL ſera montré autant multiplice de l'arc FG, que le ſecteur FHL l'eſt du ſecteur FHG. Partant ſi l'arc BCI eſt égal à l'arc FGKL, auſſi le ſecteur BDI ſera égal au ſecteur FHL; & ſi plus grand, plus grand; & ſi plus petit, plus petit. Donc les deux arcs BC, FG, avec les deux ſecteurs BDC, FHG, ſont quatre grandeurs, de la 1e & 3e deſquelles BCI, BDI, ſont equemultiplices, mais de la 2e & 4e ſont auſſi equemultiplices FGKL, FHL. Et puis que nous avons prouvé que ſi l'arc BCI eſt égal à l'arc FGKL; auſſi le ſecteur BDI eſt égal au ſecteur FHL; & ſi plus grand, plus grand; & ſi moindre, moindre : par la 6. def. 5. comme l'arc BC ſera à l'arc FG, ainſi le ſecteur BDC, ſera au ſecteur FHG. Parquoy aux cercles égaux, les angles conſtituez tant aux centres qu'aux circonferences, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

De cecy il s'enſuit que comme le ſecteur eſt au ſecteur, ainſi l'angle eſt à l'angle. Car l'une & l'autre raiſon eſt la même que de l'arc à l'arc; & partant par la 11. prop. 5. ils ſeront auſſi entr'eux en la même raiſon.

Il eſt auſſi évident que comme un angle au centre, eſt à quatre angles droits, ainſi eſt l'arc ſouſtendant iceluy angle, à toute la circonference : & au contraire, que comme quatre

angles droits ſont à un angle au centre, ainſi toute la circonference eſt à l'arc ſouſtendant iceluy angle.

Car comme l'angle au centre eſt à l'angle droit au centre, ainſi l'arc qui ſoûtient iceluy angle, eſt au quadrant qui ſoûtient l'angle droit par la 33. prop. 6. Parquoy comme l'angle au centre ſera au quadruple de l'angle droit, c'eſt à ſçavoir à quatre angles droits, ainſi l'arc ſouſtendant iceluy angle, ſera au quadruple du quadrant, c'eſt-à-dire à toute la circonference, par les choſes démontrées à la fin du Scholie de la 22. prop. 5. Puis aprés, d'autant qu'un angle au centre eſt à quatre angles droits, comme l'arc qui ſoûtient iceluy angle, eſt à toute la circonference; auſſi en permutant, comme quatre angles droits ſeront à un angle au centre, ainſi toute la circonference ſera à l'arc ſouſtendant l'angle au centre: Ce qui a été proposé.

Fin du ſixiéme Element.

ELEMENT SEPTIE'ME.

DEFINITIONS.

L'UNITE, eſt ſelon laquelle une chacune des choſes qui ſont, eſt appellée une.

Euclide ayant traité és 6. livres precedents de la premiere partie de Geometrie, ſçavoir eſt de celle-là qui conſidere les plans, auparavant que venir à l'autre partie, laquelle traitte des ſolides, il explique en ce ſeptiéme livre & és deux ſuivants, les proprietez & affections des nombres, pour puis aprés traitter au 10. *livre des lignes commenſurables & incommenſurables, neceſſaires pour avoir entiere & parfaite connoiſſance des proprietez des ſolides. Euclide commençant donc ſelon ſa coûtume par les principes, il définit premierement que c'eſt que l'unité, & dit que c'eſt cela ſelon quoy toute choſe qui eſt ſe nomme une : & ſelon cette unité nous avons de coûtume de dire une pierre, un animal, un corps, &c. Mais*

eſt à noter que tout ainſi qu'en la Geometrie le poinct n'a aucune partie étant indiviſible, auſſi és nombres l'unité ne reçoit aucune diviſion, mais eſt indiviſible ſelon nôtre autheur, lequel n'a égard en ces Elemens-cy qu'aux nombres entiers : mais nous y joindrons auſſi quelque choſe des fractions & nombres rompus, afin de faire voir que toutes les regles enſeignées en nôtre Arithmetique pratique, ne ſont moins veritables & certaines, que ſi elles étoient reſtraintes ſeulement aux nombres entiers dont traitte icy Euclide.

2. Nombre, eſt une multitude compoſée de pluſieurs unitez.

C'eſt-à-dire qu'étans aſſemblées pluſieurs unitez enſemble, leur aggregé & collection s'appelle nombre : dont s'enſuit qu'en tout nombre il y a autant de parties qu'il y a d'unitez qui le conſtituent : de ſorte que l'unité eſt la partie de chaque nombre dénommée par le même nombre duquel elle eſt partie : comme le nombre 4 compoſé de quatre unitez, ſe diviſe en autant de parties, ſçavoir eſt en quatre unitez, chacune deſquelles eſt ditte quatriéme partie du nombre 4. Ainſi auſſi le nombre 20 compoſé de vingt unitez ſe diviſe en autant de parties, chacune deſquelles eſt dite vingtiéme partie d'icelui nombre 20, &c. D'où reſulte que tous les nombres ſont commenſurables entr'eux, puis qu'ils ſont tous meſurez par une même & commune meſure, ſçavoir par l'unité, comme il eſt dit : ce qui ne peut pas convenir à toutes les grandeurs, puis que pluſieurs

d'icelles n'ont point de commune meſure, mais ſont incommenſurables, comme il ſera démontré au 10. livre.

3. Un nombre eſt partie d'un autre nombre, le plus petit du plus grand, lors que le plus petit meſure le plus grand.

C'eſt-à-dire, que lors qu'un nombre en meſure ou diviſe exactement un plus grand, ſans qu'il reſte rien, il eſt dit partie d'iceluy : comme 4 eſt dit partie de 12, d'autant qu'iceluy nombre 12 eſt diviſé exactement par 4 ſans qu'il reſte rien : ſemblablement chacun de ces nombres 2, 3, 6 et 9, eſt partie du nombre 18, puis que chacun le meſure ou diviſe exactement. Or toute partie, comme nous avons dit à la 1. def. 5. eſt appellée aliquote, & prend ſon nom du nombre par lequel elle en meſure un autre ; tellement que 2 eſt dit partie aliquote de 4 ; & ſe nomme $\frac{1}{2}$; pource que 2 meſure 4 par 2 : et cinq eſt dit partie aliquote de 15, c'eſt à ſçavoir $\frac{1}{3}$, pource que 5 meſure 15 par 3 : ainſi 4 qui meſure 28 par 7, eſt dit $\frac{1}{7}$, &c.

4. Mais un nombre eſt dit parties d'un autre plus grand, lors que le plus petit ne meſure pas le plus grand.

C'eſt-à-dire, que lors qu'un petit nombre n'en meſure pas un plus grand, il n'eſt pas dit partie d'iceluy, mais parties. Comme 6 eſt dit parties de 9 : car il ne le meſure pas préciſément, mais

eſt deux parties d'iceluy, ſçavoir eſt $\frac{2}{3}$: ainſi 12 eſt parties de 16, ſçavoir $\frac{3}{4}$ pource que 4, qui meſure l'un & l'autre nombre, eſt 3 fois en 12, & 4 fois en 16 : auſſi 15 eſt parties de 24, ſçavoir eſt $\frac{5}{8}$, puis que 3, qui eſt commune meſure, eſt 5 fois en 15, & 8 fois en 24. Semblablement 5 eſt parties de 7, ſçavoir eſt $\frac{5}{7}$: & 4 eſt parties de 9, ſçavoir eſt $\frac{4}{9}$, &c.

5. Mais un grand nombre eſt dit multiple d'un petit, lors que le petit meſure le grand.

Tout ainſi que tout petit nombre n'eſt pas dit partie d'un plus grand, ains ſeulement de celuy-là qu'il meſure precisément ; ainſi auſſi tout grand nombre n'eſt pas dit multiple, ou le pluſieurs fois de tout autre nombre plus petit, mais ſeulement de ceux là qui le peuvent precisément meſurer : tellement que de deux nombres inégaux, ſi le petit meſure precisément le grand, ce moindre eſt dit partie du grand, mais celuy-cy eſt auſſi dit multiple de cettuy-là : Ainſi 4 eſt bien dit partie de 12, mais auſſi iceluy 12. eſt dit multiple de 4. Pareillement 30 eſt dit multiple tant de 5 que de 6, qui ſont parties d'iceluy, puis que l'un & l'autre le meſure.

6. Nombre pair, eſt celuy qui peut être diviſé en deux également.

Comme tous ces nombres 2, 4, 8, 20, 50, ſont appellez nombres pairs, pource que chacun

d'iceux peut être diviſé en deux également, c'eſt-à-dire en deux parties égales ; car leurs moitiez ſont 1, 2, 4, 10, 25. &c.

7. Mais l'impair, eſt celuy qui ne peut être diviſé en deux également : ou bien celuy qui eſt different du nombre pair de l'unité.

Comme tous ces nombres-cy 3, 5, 7, 9, 11, 13, 51, ſont nommez impairs, pource qu'ils ne peuvent être diviſez en deux également : Ou bien d'autant qu'ils ſont differens de l'unité des nombres pairs, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 50, &c.

8. Nombre pairement pair, eſt celuy qu'un nombre pair meſure par un nombre pair.

C'eſt-à-dire, que ſi un nombre pair en meſure un autre par un nombre qui ſoit auſſi pair, le nombre meſuré ſera dit pairement pair : comme 32, lequel 8 meſure par 4, eſt dit nombre pairement pair : Semblablement 24 ſera dit nombre pairement pair, pource que 6 nombre pair le meſure par 4 nombre pair, &c.

9. Et pairement impair, eſt celuy qu'un nombre impair meſure par un nombre pair.

C'eſt-à-dire, que ſi un nombre pair en meſure un autre par un nombre impair, le meſuré ſera dit pairement impair : comme 42 eſt dit nombre

pairement impair, pource que 6, nombre pair le mesure par 7, nombre impair. Semblablement 24 sera dit nombre pairement impair, d'autant que 3, nombre impair le mesure par 8, nombre pair. Et est à noter, qu'il y a plusieurs nombres qui sont pairement pair, & pairement impair, comme 12, 24, 48, 96. &c. Et que ce soit l'intention d'Euclide, les 32, 33, & 34. prop. 9. le montrent assez.

10. Mais nombre impairement impair, est celuy qui est mesuré d'un nombre impair par un nombre impair.

Comme 15, lequel est mesuré de 5, par 3, est dit nombre impairement impair : & tels sont aussi les nombres suivans, 9, 21, 25, 27, 33, 35, &c.

11. Nombre premier, est celuy qui est mesuré par la seule unité.

C'est-à-dire, que si un nombre n'est mesuré par aucun autre nombre, mais seulement par soy même, & l'unité, il est nombre premier, & tels sont tous ceux-cy 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, &c. Car chacun d'iceux n'est mesuré par aucun autre nombre, mais par la seule unité.

12. Nombres premiers entr'eux, sont ceux-là qui n'ont autre commune mesure que l'unité.

C'est-à-dire, que si deux ou davantage de

nombres n'ont autre commune meſure que l'unité; ils ſeront dits premiers entr'eux, jaçoit que chacun d'iceux puiſſe être meſuré par quelque nombre outre l'unité. Comme ces deux nombres 15 & 8, ſont dits premiers entr'eux, pource qu'il n'y a que l'unité qui les puiſſe meſurer tous deux: car encore que le premier ſoit meſuré par 5 & 3, & le dernier par 4 & 2, ſi eſt-ce toutesfois qu'aucun d'iceux quatre nombres ne peut meſurer l'un & l'autre des propoſez, ains la ſeule unité eſt leur commune meſure.

13. Nombre compoſé, eſt celuy qui eſt meſuré par quelque autre nombre.

Comme 15 eſt appellé nombre compoſé, pource qu'il eſt meſuré par 5 & 3: Auſſi 27 eſt nombre compoſé, d'autant qu'il eſt meſuré par 9 & 3, &c.

14. Mais les nombres compoſez entr'eux, ſont ceux-là qui ont autre commune meſure que l'unité.

C'eſt-à-dire, que ſi deux ou davantage de nombres ſont meſurez par quelque nombre outre l'unité, comme par leur commune meſure, ils ſeront dits nombres compoſez entr'eux: ainſi les nombres 9 & 15 ſont compoſez entr'eux, d'autant que 3 meſure l'un & l'autre d'iceux, comme leur commune meſure. Auſſi 7, 21, & 28, ſont compoſez entr'eux, pource que le premier d'iceux meſure ſoy-même, & les deux autres.

15. Un nombre eſt dit multiplier un nombre, lors qu'il en eſt procreé un autre, qui eſt autant de fois compoſé de celuy qui eſt multiplié qu'il y a d'unitez au multipliant.

Comme 4 *ſera dit multiplier* 6, *ſi iceluy nombre* 6 *eſt pris ou compoſé quatre fois, c'eſt à ſçavoir autant de fois qu'il y a d'unitez au multipliant* 4; *& le nombre procreé, qu'on appelle vulgairement* produit, *ſera* 24. *Auſſi le nombre* 6 *ſera dit multiplier le nombre* 4, *ſi nous prenons iceluy nombre* 4, *ſix fois; c'eſt à ſçavoir autant de fois qu'il y a d'unitez en* 6 *nombre multipliant; & en ſera procreé le même nombre* 24. *Ainſi un nombre ſera dit être procreé ou produit de deux nombres, quand il ſera produit en multipliant l'un d'iceux nombres par l'autre. Comme le nombre* 36 *ſera dit être le produit de ces deux nombres* 4 *&* 9, *pource qu'il eſt procreé en multipliant le nombre* 4 *par le nombre* 9, *ou au contraire le nombre* 9 *par le nombre* 4.

Or de ce que deſſus il s'enſuit que le nombre produit de la multiplication d'un nombre par un autre, a même raiſon auquel on voudra d'iceux nombres que l'autre à l'unité. Car puis que ſelon la def. d'Euclide, pour avoir le produit de deux nombres il faut prendre autant de fois l'un d'iceux, qu'il y a d'unitez en l'autre, iceluy produit contiendra autant de fois l'un ou l'autre des nombres multiplians qu'il y a d'unitez en l'autre: & partant il y aura même raiſon du nombre pro-

duit à l'un ou l'autre des multiplians, que de l'autre multipliant à l'unité : parquoy la multiplication d'un nombre en un autre peut être définie ainsi.

La multiplication d'un nombre par un autre, est l'invention d'un nombre qui ait même raison auquel on voudra des nombres multiplians, que l'autre à l'unité.

Ainsi tu vois que de la multiplication de 5 par 7, est produit le nombre 35, lequel est à 5, comme 7 à 1; ou à 7, comme 5 à 1.

A cette définition Clavius adjoûte la suivante.

Un nombre est dit diviser un nombre, quand on en prend un autre, qui contient autant d'unitez que le nombre divisant est contenu de fois au nombre divisé.

Comme le nombre 6 sera dit diviser le nombre 24, si on prend le nombre 4; qui montre par ses quatre unitez, que le nombre 6 est contenu 4 fois au nombre divisé 24. Aussi le nombre 4 sera dit diviser le même nombre 24, si on prend le nombre 6, lequel dénotte par ses six unitez, que le nombre divisant est contenu six fois au divisé 24.

De cecy il advient que le nombre provenant de la division, lequel on appelle vulgairement quotient, *a même raison à l'unité, que le nombre divisé au diviseur. Car puis que, comme nous avons dit en la def. le quotient doit montrer & indiquer par ses unitez, combien de fois le nombre diviseur est contenu au divisé, iceluy quotient contiendra autant de fois l'unité, que le nombre divisé*

visé contient le diviseur; & partant il y aura même raison du quotient à l'unité, que du nombre diviſé au diviſeur. Parquoy la diviſion d'un nombre par un autre ſe peut auſſi définir ainſi.

La diviſion d'un nombre par un nombre, eſt l'invention d'un nombre qui ait même raiſon à l'unité, que le nombre diviſé au diviſant.

Ainſi appert que de la diviſion du nombre 24 par ſix, eſt provenu le nombre 4, lequel eſt à 1, comme 24 à 6. Item de la diviſion du même nombre 24, par 4, eſt produit le nombre 6, qui eſt à 1, comme 24 à 4.

De cecy il advient qu'étant diviſé un nombre par un nombre, le nombre diviſé ſera procreé de la multiplication du nombre trouvé, c'eſt-à-dire du quotient, par le nombre diviſeur. Car ayant diviſé le nombre A par B, le quotient ſoit C. Je dis que le nombre A ſera produit de la multiplication du nombre C par le nombre B. D'autant que par la def. de la multiplication le nombre procreé de C multiplié par B, eſt à B, comme C à l'unité D; & que par la def. de la diviſion A eſt auſſi à B, comme C à l'unité D; il eſt manifeſte que le nombre procreé par la multiplication de C en B eſt le nombre A, vû que tant iceluy nombre procreé, que le diviſé A, a même raiſon à B, que C à l'unité D.

A.	B.	C.	D.
48.	8.	6.	1.

Or ce que nous avons dit cy-deſſus touchant la multiplication & diviſion des nombres entiers, convient auſſi aux nombres rompus; tellement que le nombre $\frac{1}{2}$ ſera dit multiplier le nombre 20,

ſi le nombre 20 *eſt pris autant de fois qu'il y a d'unitez en* $\frac{1}{2}$, *& ſera procreé le nombre* 10 : *car d'autant que l'unité eſt ſeulement par ſa moitié en* $\frac{1}{2}$, *il faut auſſi prendre le nombre* 20 *par ſa moitié, qui eſt* 10. *Semblablement le nombre* 20, *ſera dit multiplier* $\frac{1}{2}$, *ſi* $\frac{1}{2}$ *eſt pris vingt fois, c'eſt à ſçavoir autant de fois que l'unité eſt en* 20 ; *& le produit ſera le même nombre* 10. *Item,* $\frac{1}{2}$ *&* $\frac{1}{3}$ *ſeront dits s'entremultiplier ; ſi on prend la troiſiéme partie de* $\frac{1}{2}$, *tout ainſi que* $\frac{1}{3}$ *contient ſeulement la troiſiéme partie de l'unité : ou bien ſi on prend la moitié de* $\frac{1}{3}$, *parce que* $\frac{1}{2}$ *contient ſeulement la moitié de l'unité : & par ainſi le produit ſera* $\frac{1}{6}$; *car c'eſt la troiſiéme partie du nombre* $\frac{1}{2}$, *ou de* $\frac{3}{6}$, *& la moitié du nombre* $\frac{1}{3}$, *ou* $\frac{2}{6}$.

Mais le nombre $\frac{1}{2}$ *ſera dit diviſer le nombre* 10, *ſi on prend le nombre* 20, *qui montre que le nombre diviſant* $\frac{1}{2}$ *eſt contenu vingt fois au nombre diviſé* 10 ; *tellement qu'il y ait la même raiſon du nombre procreé* 20 *à* 1, *que du nombre diviſé* 10 *au diviſant* $\frac{1}{2}$. *Ainſi auſſi* $\frac{1}{2}$ *ſera dit diviſer* $\frac{1}{6}$, *ſi on prend le nombre* $\frac{1}{3}$, *lequel montre que le nombre diviſant* $\frac{1}{2}$, *n'eſt pas tout contenu au diviſé* $\frac{1}{6}$, *ains ſeulement la troiſieſme partie d'iceluy : car puis que le nombre* $\frac{1}{2}$ *eſt le même que* $\frac{3}{6}$, *il eſt évident que la troiſieſme partie d'iceluy, c'eſt à ſçavoir* $\frac{1}{6}$, *eſt contenu en* $\frac{1}{6}$. *Or comme il faut faire & pratiquer non ſeulement la multiplication & diviſion en nombres rompus, mais auſſi toutes les autres regles & operations d'Arithmetique, nous l'avons enſeigné en nôtre Pratique d'Arithmetique, & à la fin de ce* 7. *livre d'Euclide nous en ferons les demonſtrations.*

16. Lors que deux nombres se multiplient l'un l'autre, le produit est appellé plan; & les nombres multiplians sont dits côtez d'iceluy plan.

C'est-à-dire que tout nombre produit de la mutuelle multiplication de deux nombres est appellé nombre plan: d'autant que chaque unité de l'un d'iceux nombres étant posée & étenduë d'ordre autant de fois qu'il y a d'unité en l'autre nombre, est representé un parallelogramme rectangle, duquel les côtez sont les deux nombres se multiplians, comme il a été dit au 2. livre. Ainsi le nombre 20 produit de 5 par 4 est dit nombre plan, & iceux nombres 5 & 4 sont dits côtez d'iceluy plan.

5 . . . .
. . . .
. . . .
4

17. Mais quand trois nombres se multiplient l'un l'autre, le produit est appellé solide, & les multiplians sont dits côtez d'iceluy.

Comme si on multiplie 6 par 5, & leur produit 30 par 4, sera procreé le nombre 120; lequel s'appellera nombre solide, & les trois nombres multiplians 6, 5 & 4, seront dits côtez d'iceluy solide.

18. Nombre quarré, est celuy qui est également égal: ou bien c'est le produit de deux nombres égaux.

Comme le nombre plan 16 est appellé quarré, pource qu'il est procreé de la multiplication de 4

par 4, & conſequemment égal de tous côtez. Ainſi auſſi 49, produit de la multiplication de 7 par 7, ſera appellé nombre quarré.

19. Nombre cube, eſt celuy qui eſt également égal également : ou bien c'eſt le produit de trois nombres égaux.

Comme ſi le nombre 4 eſt multiplié par 4, & puis leur produit 16 encore par 4, ſera procreé le nombre 64, qui s'appellera nombre cube.

20. Les nombres ſont proportionnaux, quand le premier eſt autant multiple, ou meſme partie, ou meſmes parties du ſecond, comme le troiſiéme du quatriéme.

C'eſt à dire, que quand un nombre eſt même partie, ou mêmes parties d'un nombre, qu'un autre d'un autre, iceux quatre nombres ſont dits proportionnaux. Ainſi pource que le nombre A eſt même partie du nombre B, que le nombre C du nombre D, c'eſt à ſçavoir la moitié, iceux quatre nombres A, B, C, D, ſont proportionnaux. Auſſi les quatre nombres E, F, G, H ſont proportionnaux, puis que E eſt mêmes parties de F, que G de H, c'eſt à ſçavoir deux troiſiémes parties.

A	*B*	*C*	*D*	
5.	10.	4.	8.	
E	*F*	*G*	*H*	
6.	9.	4.	6.	
I	*K*	*L*	*M*	
20.	5.	8.	2.	

Item les quatre nombres I, K, L, M, ſont auſſi proportionnaux, d'autant que comme I eſt quadruple de K, auſſi L eſt quadruple de M; ou bien pour-

ce que M eſt telle partie de L que K de I : Car il eſt évident que ſi le premier nombre I eſt autant multiple du ſecond K, que le troiſiéme L, l'eſt du quatriéme M : en prenant les meſmes nombres par ordre contraire, M ſera telle partie de L, que K de I, c'eſt à ſçavoir le quart. Parquoy on peut aſſurément conclurre que quatre nombres ſont proportionnaux, quand le moindre des deux premiers eſt même partie, ou meſmes parties de l'autre, que le moindre des deux derniers eſt de l'autre, moyennant qu'ils ſoient pris d'un même ordre, c'eſt-à-dire que ſi le moindre nombre des deux premiers eſt antecedant, le moindre des deux derniers ſoit auſſi antecedant ; & ſi conſequent, conſequent. Et c'eſt à mon advis ainſi qu'il faut entendre cette 20. def. pour la rendre univerſelle, car autrement on ne pourroit pas

	N	O	P	Q
conclurre par icelle la proportionnalité de pluſieurs nombres, comme	15.	12.	25.	20.

par exemple de ces quatre N, O, P, Q, vû que les prenant ſelon l'ordre qu'ils ſont poſez, le premier N n'eſt pas multiple du ſecond O, ny auſſi partie ou parties, puis qu'il eſt plus grand qu'iceluy ; & neanmoins ils ſont proportionnaux, vû que le moindre des deux premiers, c'eſt à ſçavoir O, contient autant de parties de l'autre N, que le moindre des deux autres, qui eſt Q, en contient de

	R	S	T	V
l'autre P, c'eſt à ſçavoir quatre cinquiémes parties. Semblablement ces quatre autres nombres	36.	27.	24.	18.

R, S, T, V, ſont proportionnaux, puis que V contient autant de parties de T, que S en con-

tient de R ; ou bien à cauſe que S eſt meſmes parties de R, que V de T, c'eſt à ſçavoir les trois quarts.

Clavius eſtimant que cette def. a été corrompuë, pour la reſtituer y a adjoûté ces mots : Ou bien quand le premier contient également le ſecond, & le troiſiéme le quatriéme, & en outre une même partie, ou meſmes parties d'iceluy. *Mais je n'eſtime pas que cette addition y ſoit neceſſaire, puis que le moindre nombre de chaque raiſon étant conferé à l'autre ladite def. convient à toutes ſortes de proportions : & que ce ſoit l'intention, d'Euclide, il appert aſſez par les démonſtrations des 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 & 13. prop. de ce 7. livre.*

Or Euclide définit ſeulement icy les nombres proportionnaux, qui ont une même raiſon d'inégalité : Car de la raiſon d'égalité, il eſt évident que le premier nombre étant égal au ſecond, auſſi le troiſiéme doit être égal au quatriéme, afin qu'ils ſoient dits proportionnaux.

De cette 20. def. reſulte appertement, que les nombres égaux ont même raiſon à un même nombre ; & au contraire qu'un même nombre a auſſi même raiſon à des eſgaux : Ce qui a été démontré en toutes grandeurs à la 7. prop. 5. Il en reſulte encore que les nombres qui ont même raiſon à un même nombre, ou auſquels un même nombre a même raiſon, ſont égaux entr'eux. Ce qui a auſſi été démontré en toutes ſortes de grandeurs en la 9. prop. 5.

De cette même def. on collige auſſi que de deux nombres inégaux, le plus grand a plus grande rai-

ſon à un même nombre, que le plus petit ; & au contraire qu'un même nombre a plus grande raiſon à un petit nombre, qu'à un plus grand. Item que des nombres inégaux, celuy qui a plus grande raiſon à un même, eſt le plus grand : & celuy auquel un même nombre a plus grande raiſon, eſt le plus petit : Toutes leſquelles choſes ſont claires, & évidentes, ſi cette def. eſt bien entenduë. Cecy a auſſi été démontré és grandeurs au 5. livre prop. 8. & 10.

Or cette définition, & tout ce que nous avons dit cy-deſſus, convient auſſi aux nombres rompus : Car ces quatre nombres $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ſont proportionnaux, attendu que le premier eſt autant multiple du ſecond, que le troiſiéme du quatriéme, ſçavoir double ; ainſi qu'il appert en reduiſant les deux premiers en même dénomination, ſçavoir à $\frac{2}{8}$ & $\frac{3}{8}$, mais les deux autres à $\frac{2}{4}$ & $\frac{1}{4}$. Semblablement ces quatre nombres $2\frac{3}{8}$, $4\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, ſont proportionnaux, puis que le premier eſt telle partie du ſecond, que le troiſiéme du quatriéme, ſçavoir la moitié, &c.

21. Les nombres ſemblables plans, ou ſolides, ſont ceux qui ont les côtez proportionnaux.

Comme 24 & 6, ſont nombres plans ſemblables, pource que 6 & 4, côtez de cettuy-là ſont proportionnaux à 3 & 2, côtez de celuy-cy : ainſi auſſi 192 & 24, ſont nombres ſolides ſemblables, pource que 8, 6, 4, côtez de cettuy-là ſont propert. à 4, 3, 2, côtez de celuy-cy. Et eſt à

noter que ces nombres plans, & solides semblables peuvent bien être aussi compris sous des côtez non proportionnaux ; mais toutesfois nous ne les considerons icy qu'entant qu'ils sont contenus sous leurs côtez proportionnaux.

22. Nombre parfait, est celuy qui est égal à toutes ses parties aliquotes.

Comme 6 est dit nombre parfait, pource que les parties aliquotes d'iceluy, sçavoir 1, 2, 3, prises ensemble, luy sont égales. Ainsi aussi 28, duquel les parties aliquotes, sçavoir est 1, 2, 4, 7, 14, étans prises ensemble, luy sont égales ; sera dit nombre parfait : & tels sont aussi 496, 8128, &c.

Mais quand toutes les parties aliquotes d'un nombre prises ensemble, sont plus grandes qu'iceluy, il est dit abondant ; & quand elles sont moindres, il est appellé diminué.

A ces définitions d'Euclide, Clavius en adjoûte quelques autres, touchant les raisons & proportions des nombres, comme de la raison égale, de l'alterne, de l'inverse, & autres dont est traitté en general au 5. livre : Mais pource que nous les avons tellement expliquées en ce lieu-là, qu'on les peut entendre & adapter, non seulement aux lignes, superficies & solides, mais aussi aux nombres, & en general à toutes sortes de grandeurs & quantitez soient continuës ou discrettes ; je n'estime pas qu'il soit besoin de les repeter icy, c'est pourquoy nous viendrons aux

PETITIONS OU DEMANDES.

1. Qu'à tout nombre donné on en puiſſe prendre tant qu'on voudra d'égaux ou multiples.
2. Qu'à tout nombre donné on en puiſſe prendre un plus grand,

Combien que ſelon nôtre Autheur le nombre ne puiſſe être diminué infiniment, ains ſeulement juſques à l'unité qu'il fait indiviſible, ſi eſt-ce toutesfois qu'il peut être augmenté infiniment par la continue addition de l'unité : Parquoy étant propoſé quelconque nombre, on en peut trouver un plus grand, c'eſt à ſçavoir celuy qui eſt produit de l'addition d'une ou de pluſieurs unitez au nombre donné.

AXIOMES OU COMMUNES SENTENCES.

1. LEs nombres equemultiplices de nombres égaux, ou d'un même nombre, ſont égaux entr'eux.
2. Et ceux deſquels un même nombre eſt equemultiplice, ou deſquels les equemultiplices ſont égaux, ſont auſſi égaux entr'eux.
3. Mais les nombres qui ſont une même partie, ou même parties de nombres égaux, ou d'un même, ſont égaux entr'eux.
4. Et ceux deſquels un même nombre, ou nombres égaux, ſont même partie, ou meſmes parties: ſont auſſi égaux entr'eux.
5. L'unité meſure tout nombre par les unitez qui ſont en iceluy, c'eſt-à-dire par le même nombre.
6. Tout nombre meſure ſoy-même par l'unité.
7. Si un nombre multipliant un nombre, en produit quelqu'un, le multipliant meſurera le produit

par le multiplié : mais le multiplié mesurera le même produit par le multipliant.

8. Si un nombre mesure un nombre ; aussi celuy par lequel il le mesure, mesurera le même par les unitez qui sont au mesurant, c'est-à-dire par iceluy nombre mesurant.

9. Si un nombre mesurant un nombre, multiplie celuy par lequel il le mesure, ou est multiplié par iceluy, sera produit celuy lequel est mesuré.

10. Le nombre qui en mesure deux ou davantage, mesure aussi le composé d'iceux.

11. Mais celuy qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré.

12. Et celuy qui mesure le tout, & le retranché, mesure aussi le reste.

THEOR. 1. PROP. I.

Si de deux nombres inégaux proposez, on soustrait toûjours alternativement le plus petit du plus grand, & que le plus petit reste ne mesure jamais le precedant jusques à ce qu'on ait pris l'unité ; les nombres proposez au commencement, seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres inégaux AB & CD, tels que si on soustrait continuellement le plus petit du plus grand ; le plus petit reste ne mesure jamais le precedant, jusques à ce qu'on parvienne à l'unité : Je dis qu'iceux nombres AB & CD, seront premiers entr'eux, c'est-à-dire, qu'ils ont pour commune mesure la seule unité. Autrement, s'ils ne sont premiers, ils seront composez, & par la 14. def. de ce livre ils seront mesurez par quelque nombre : soit iceluy E commune me-

A . . . . . 5 F . . 2 G. 1B	
C . . . 3 H . . 2 D	
E . . 2	

sure à tous les deux : ainsi CD plus petit nombre estant soustrait de AB, soit le reste FB plus petit que CD: item FB estant soustrait de CD, soit le reste HD plus petit que FB : Pareillement HD estant soustrait de FB, soit le reste GB, unité. Puis donc que E mesure CD, il mesurera aussi son égal AF; & d'autant qu'il mesure le tout AB, par la 12. com. sent. E mesurera aussi le reste FB, lequel mesure CH; & partant par la 11. com. sent. E mesurera aussi CH; & puis qu'il mesure le tout CD, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le reste HD, & par consequent son égal FG : mais il mesure aussi le tout FB; E mesurera donc pareillement l'unité restante GB, sçavoir le tout la partie : ce qui est impossible. Donc AB & CD ne peuvent estre mesurez par aucun nombre, ains par l'unité seulement : & partant ils sont nombres premiers entr'eux par la 12. def. de ce livre. Si donc de deux nombres inégaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Commandin demonstre icy la proposition suivante.

Estant proposez deux nombres composez entr'eux, si on soustrait toûjours alternativement le moindre du plus grand, la soustraction ne parviendra pas jusques à l'unité.

Ce qui est evident, car si on parvenoit à l'unité, les nombres proposez seroient premiers entr'eux, comme il a esté demonstré en la prop. cy-dessus : & ils sont posez composez.

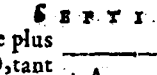
Or il est manifeste par ces choses, qu'estans proposez deux nombres, nous connoistrons facilement s'ils sont premiers entr'eux ou non. Car estant faite la soustraction, comme dit est, si on parvient jusques à l'unité, lesdits nombres proposez seront premiers entr'eux : mais si on n'y parvient pas, ils seront composez.

PROBL. 1. PROP. II.

Estans donnez deux nombres non premiers entr'eux ; trouver la plus grande commune mesure d'iceux.

Soient donnez deux nombres non premiers entr'eux AB & CD, desquels CD soit le moindre : il faut trouver la plus grande commune mesure d'iceux.

Soit soustrait le plus petit nombre CD, tant de fois que faire se pourra du plus grand AB: s'il reste quelque chose, comme EB,

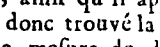


iceluy soit osté de CD, tellement qu'il reste encor FD; & ainsi soit soustrait continuellement le plus petit du plus grand, jusques à ce qu'on parvienne à un nombre qui mesure le precedent: ce qui aviendra necessairement: car si on parvenoit jusques à l'unité, les nombres AB, CD, par la prec. prop. seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Donc que FD mesurant EB, il ne reste rien. Je dis que FD est la plus grande commune mesure de AB & CD.

Car qu'il les mesure tous deux, nous le prouverons ainsi. D'autant que FD mesure EB, & EB mesure CF, par la 11. com. sent. FD mesurera aussi le mesme CF; & mesurant soy-mesme, il mesurera le tout CD, composé des deux CF, FD par la 10. com. sent. Mais iceluy CD mesure AE: donc FD mesurera aussi AE: Et puisqu'il mesure aussi EB; il mesurera le tout AB composé d'iceux AE, EB. Par ainsi FD mesure tous les deux nõbres AB & CD.

Il est aussi leur plus grande commune mesure; autrement en soit (s'il est possible) une autre plus grande, comme G. Veu donc que G mesure CD, il mesurera aussi AE; & mesurant le tout AB, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le reste EB; & par consequent il mesurera CF. Mais il mesure aussi le tout CD; il mesurera donc aussi le reste FD, sçavoir le plus grand nombre le plus petit: ce qui est impossible. Donc un plus grand nombre que FD ne mesure pas les nombres AB, CD: partant iceluy nombre FD est leur plus grande commune mesure.

Que si le moindre nombre CD mesuroit le plus grand AB; il est manifeste qu'il seroit la plus grande commune mesure, attendu qu'il mesure soy-mesme, ainsi qu'il appert icy. Nous avons donc trouvé la plus grande commune mesure de deux nombres, &c. Ce qu'il falloit faire.



COROLLAIRE.

De cecy eſt évident que qui meſure deux nombres, il meſure auſſi leur plus grande commune meſure, puis qu'il a été démontré que ſi G meſure AB, & CD, il meſurera auſſi FD leur plus grande commune meſure.

SCHOLIE.

Par les choſes cy-deſſus dites, nous connoiſtrons facilement ſi trois ou davantage de nombres propoſez ſont premiers entr'eux, ou non. Car ſoient donnez les trois nombres A, B, C. Premierement donc ſoit veu par ce qui eſt dit à la 1. prop. ſi les deux nombres A & B ſont premiers entr'eux, ou non; Que s'ils ſont premiers, il eſt évident que les trois nombres A, B, C, ne ſeront compoſez entr'eux. Mais ſi A & B étoient compoſez entr'eux, ſoit trouvée par la 2. prop. leur plus grande commune meſure D; que ſi elle meſure auſſi le nombre C, il eſt manifeſte que les trois nombres A, B, C, ſont compoſez entr'eux, puis qu'ils ont le nombre D pour commune meſure.

A.....12
B.....9
C.....6
D...3

Que ſi D plus grande commune meſure de A & B, ne meſure C; C, & D ſeront premiers entr'eux, ou non: s'ils ſont premiers, les trois nombres A, B, C, ne ſeront compoſez entr'eux, mais premiers: Car s'ils étoient compoſez, ils auroient une commune meſure, laquelle meſureroit auſſi le nombre D plus grande commune meſure de A & B, par le Corol. de cette prop. & partant C & D ne ſeroient premiers entr'eux, contre l'hypotheſe. Mais ſi C & D ne ſont premiers entr'eux, les trois nombres A, B, C, ſeront compoſez entr'eux. Car étant trouvée par la 2. prop. 7 E la plus grande commune meſure de C & D; iceluy nombre E meſurera auſſi

A.....9
B.....6
C.....5
D...3

A.....12
B.....8
C.....6
D....4 E..2

A & B par la 11. *com. sent. puis que D les mesure. Parquoy veu que le mesme E mesure aussi C ; il mesurera les trois A, B, C : & partant iceux seront composez entr'eux. Ce qui étoit proposé.*

En la mesme maniere sera examiné & connu si plus de trois nombres sont premiers entr'eux, ou non. Car s'il y a quatre nombres donnez, il en faudra éprouver premierement trois ; si cinq, quatre, &c. & achever comme nous avons dit, de trois nombres proposez.

PROBL. 2. PROP. III.

Estans donnez trois nombres, non premiers entr'eux ; trouver leur plus grande commune mesure.

Soient donnez trois nombres non premiers entr'eux A, B, C ; desquels il faut trouver la plus grande commune mesure.

A	12	D	4
B	8	E	2
C	6	F	3

Soit trouvé par la prec. prop. la plus grande commune mesure des deux nombres A & B, qui soit D. Si donc D mesure aussi C, nous avons ce que nous demandons : car si un plus grand nombre que D mesuroit A, B, C, par le Corol. de la prop. precedente, il mesureroit aussi D, la plus grande commune-mesure de A & B, sçavoir est, un grand nombre, un moindre : ce qui est absurde. Que si D ne peut mesurer C, si est-ce que D & C seront composez entr'eux, tant par l'hypothese, que par le susdit Corol. de la 2. prop. donc par icelle même proposition soit trouvée E plus grande commune mesure de C & D. Il est évident par la 11. com. sent. que E mesurera tous les trois nombres A, B, C, d'autant qu'elle mesure C & D ; lequel D mesure B & A. Je dis davantage que E est aussi la plus grande commune mesure. Autrement si elle n'est la plus grande, en soit une autre plus grande, sçavoir F, s'il est possible : Or mesurant A, & B, elle

meſurera auſſi D, leur plus grande commune meſure par le même Corol. de la 2. prop. & par la même raiſon meſurant C & D, elle meſurera auſſi leur plus grande commune meſure E, ſçavoir le plus grand, le plus petit : ce qui eſt impoſſible. Donc un plus grand nombre que E ne meſure pas les nombres donnez A, B, C ; & partant iceluy nombre E ſera leur plus grande commune meſure. Parquoy nous avons trouvé la plus grande commune meſure de trois nombres propoſez, non premiers entr'eux. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par cecy il eſt manifeſte qu'un nombre qui en meſure trois, meſurera auſſi la plus grande commune meſure d'iceux.

SCHOLIE.

En la même maniere, étans donnez plus de trois nombres non premiers entr'eux, ſera trouvée leur plus grande commune meſure ; C'eſt-à-dire, que s'il y a quatre nombres, il faudra premierement trouver la plus grande commune meſure de trois, ſi 5, de quatre : ſi 6, de cinq, &c. puis achever, comme il a été dit de trois nombres donnez. Et aura auſſi lieu le Corol. precedent ; tellement que le nombre qui en meſure quatre, meſurera auſſi leur plus grande commune meſure, &c.

THEOR. 2. PROP. IV.

Tout nombre moindre, eſt partie ou parties de tout nombre plus grand.

Soient deux nombres A & B inégaux, deſquels A ſoit le plus grand. Je dis que le plus petit B, eſt ou partie ou parties du plus grand A.

A.....6
B...3

Car ou B meſure A, ou non. S'il le meſure, il eſt partie par la 3. def. de ce livre : s'il ne le meſure pas, ou bien A & B, ſeront entr'eux nombre premiers, ou compoſez.

Premierement qu'ils soient premiers: d'autant que chaque unité de B est partie de A, il est évident que B est parties de A, à sçavoir autant de parties qu'il y a d'unitez en B.

A.....6
B.....5

Secondement A & B soient composez entr'eux : & puis que B ne mesure pas A, soit trouvée C leur plus grande commune mesure par la 2. p. 7. & soit divisé B, en parties BD, DE, chacune égale à C. Vû donc que C est partie de A, car il le mesure, BD sera aussi partie de A ; item DE. Partant tout le nombre B est parties de A, à sçavoir autant de parties que C est autant de fois en BE. Parquoy tout nombre moindre est partie, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A.....6
B. .2 D. .2 E
C. .2

THEOR. 3. PROP. V.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second, que le tiers du quart ; le premier & tiers ensemble, seront telle partie du second & du quart ensemble, qu'est le premier du second.

Soient quatre nombres A, BC, D & EF, desquels A 1. est telle partie de BC 2, que D 3, l'est de EF 4. Je dis que A & D ensemble sont telle partie de BC & EF ensemble, comme A l'est de BC.

Car puis que A est telle partie de BC, que D de EF, BC contiendra A autant de fois, comme EF contiendra D par la 3. def. Ayant donc divisé BC en autant de parties qu'il contient de fois A, sçavoir en BG & GC ; EF se divisera aussi en autant de parties égales à D, sçavoir en EH & HF : & d'autant que BG est égal à A, & EH à D, si à choses égales A & BG, on ajoûte choses égales, D & EH : A & D ensemble, seront égaux

A...3
B...3G...3C
D....4
E....4 H....4 F

à BG

à BG & EH enſemble : ſemblablement A & D enſemble, ſeront égaux à GC & HF enſemble, & ainſi de ſuite, s'il y avoit davantage de parties en BC & EF : & partant autant de fois que BC contient A, autant de fois BC & EF enſemble, contiendront A & D enſemble : Parquoy ſi de quatre nombres le premier eſt telle partie du ſecond, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

Le même eſt auſſi veritable en nombres rompus, ainſi qu'il appert en cet exemple, où le nombre A eſt telle partie du nombre BC, que le nombre D du nombre EF : & partant ſera démontré comme deſſus A, D, enſemble être la même partie de BC, EF enſemble que A de BC: Sçavoir eſt, ſi BC, EF ſont diviſez ès parties BG, GC ; EH, HF, égales à iceux nombres A & D, &c.

A $\frac{2}{7}$		D $\frac{3}{8}$
B $\frac{2}{7}$ G $\frac{2}{7}$ C	E $\frac{3}{8}$ H $\frac{3}{8}$ F	

Or cette 5. prop. peut être transferée à tant de nombres qu'on voudra ainſi.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra, qui ſoient même partie d'autant d'autres nombres, chacun du ſien correſpondant ; auſſi les touts ſeront même partie des touts, que l'un ſera de l'un ſon correſpondant.

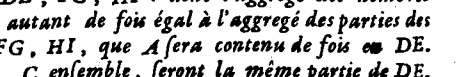
Soient les nombres A, B, C, une même partie des nombres DE, FG, HI, chacun de ſon correſpondant : Je dis que tous les nombres A, B, C, enſemble ſont la même partie de tous

A....4	B...3	C..2
D....4 K....4 E	F...3 L...3 G	H..2 M..2 I

les nombres DE, FG, HI enſemble, que A de DE. Car étans diviſez les nombres DE, FG, HI en parties égales à iceux A, B, C ; il y aura en DE autant de parties égales à A qu'en FG d'égales à B, & qu'en HI d'égales à C. Vû donc que A & DK, ſont égaux, ſi on leur adjoûte les égaux

B & FL ; A, B ensemble seront égaux à DK, FL ensemble ; & si à iceux on adjoûte encores les egaux C & HM : aussi A, B, C ensemble, seront egaux à DK, FL, HM, ensemble. Par même raison A, B, C ensemble seront égaux à KE, LG, MI ensemble : & ainsi de suitte, s'il y avoit davantage de parties en DE, FG, HI : donc l'aggregé des nombres A, B, C sera autant de fois égal à l'aggregé des parties des nombres DE, FG, HI, que A sera contenu de fois en DE. Parquoy A, B, C ensemble, seront la même partie de DE, FG, HI ensemble, que A de DE.

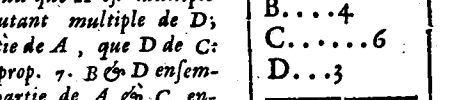
Or cecy convient aussi aux nombres rompus, soit qu'ils le soient tous, soit qu'avec iceux il y ait aussi quelque nombre entier, voire même l'unité, ainsi qu'en cette autre figure. Car il est évident que cette diversité de nombres ne peut apporter aucun changement en la démonstration cy dessus.



Commandin a demontré en ce lieu le theoreme suivant.

Si un nombre est autant multiple d'un nombre qu'un autre l'est d'un autre ; l'un & l'autre ensemble sera autant multiple de l'un & l'autre ensemble, qu'un seul l'est d'un seul.

Soit le nombre A autant multiple du nombre B, que le nombre C, l'est du nombre D : Je dis que A & C ensemble sera autant multiple de B & D ensemble, que A de B. Car puis que A est multiple de B, & C autant multiple de D ; B sera telle partie de A, que D de C : & par la 5. prop. 7. B & D ensemble sera telle partie de A & C ensemble, que A de B : partant A & C ensemble sera autant multiple de B & D ensemble, que A de B. Ce qu'il falloit démontrer.



Ce qui est icy démontré de deux nombres, se doit aussi entendre de davantage, tellement que la prop. se peut rendre universelle disant ainsi :

S'il y a tant de nombres qu'on voudra equemultiples d'autant d'autres nombres, chacun du ſien correſpondant; les touts ſeront autant multiple des touts, que l'un ſera multiple de l'un, ſon correſpondant.

Ce qui correſpond à ce qui a été démontré en toutes ſortes de grandeurs à la 1. prop. 5. Et neanmoins nous le démontrerons encor ainſi. Soient trois nombres A, B, C, equemultiplices de trois autres D, E, F, chacun de ſon correſpondant: ſe dis que les touts A, B, C, enſemble, ſont autant multiples des touts, D, E, F enſemble, que A eſt multiple de D. Car puis que A eſt autant multiple de D, que B de E, & C de F: au contraire D ſera telle partie de A, que E de B, & F de C. Donc par les choſes cy-deſſus démontrées, D, E, F enſemble, ſeront telle partie de A, B, C enſemble, que D de A: & par le contraire les toutes A, B, C enſemble, ſeront autant multiples des toutes D, E, F enſemble, que A de D. Et n'importe que les nombres propoſez ſoient nombres entiers, ou nombres rompus, car il eſt évident que la demonſtration des uns eſt la même que des autres.

A.....8	B.....6	C....4
D....4	E...3	F..2

THEOR. 4. PROP. VI.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du ſecond, que le tiers du quart: le premier & tiers enſemble, ſeront telles parties du ſecond & quart enſemble, que le premier du ſecond.

Soient quatre nombres AB, C, DE & F, deſquels le premier AB contient autant de parties du ſecond C, que le troiſiéme DE en contient du quatriéme F. Je dis que AB & DE enſemble, contiennent autant de parties de C & F enſemble, que AB de C.

A...3	G...3	B
C.....9		
D....4	H....4	E
F.....12		

Car d'autant que AB contient telles parties de C, que DE de F; étans AB & DE diviſez en AG, GB; & DH, HE, ſelon qu'ils ſont parties de C & F, il y aura autant de parties de C en AB, comme de F en DE, & par la pr. preced. AG & DH enſemble ſera telle partie de C & F enſemble, que AG de C. Item GB & HE enſemble, ſera telle partie de C & F enſemble, que GB de C; & ainſi de ſuite, s'il y avoit davantage de parties en AB & DE. Parquoy iceux AB & DE enſemble, ſeront telles parties de C & F enſemble, que AB de C. Donc ſi de quatre nombres le premier contient telles parties, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Cette même prop. avec ſa demonſtration a auſſi lieu en nombres rompus, comme il appert en cet exemple.

A $\frac{1}{9}$ G $\frac{1}{9}$ B	D $\frac{2}{7}$ H $\frac{2}{7}$ E
C $\frac{3}{9}$	F $\frac{6}{7}$

Mais cette 6. prop. peut auſſi être eſtenduë à tant de nombres qu'on voudra, ſoient entiers, ou rompus, ainſi qu'il enſuit.

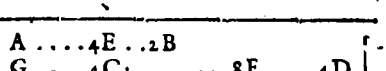
S'il y a tant de nombres qu'on voudra, qui ſoient meſmes parties, d'autant d'autres nombres, chacun d'un chacun; auſſi les touts ſeront meſmes parties des touts, que l'un de l'un ſon correſpondant.

Car c'eſt la même demonſtration que deſſus; obſervant ſeulement qu'au lieu de la 5. prop. il ſe faut ſervir icy de l'univerſelle démontrée au Scholie d'icelle 5. prop.

THEOR. 5. PROP. VII.

Si un nombre eſt telle partie d'un autre nombre, que le retranché du retranché; le reſte ſera auſſi telle partie du reſte, comme le tout eſt du tout.

Soit le nombre AB telle partie du nombre CD que le retranché AE eſt du retranché CF. Je dis que le reſte EB, ſera telle partie du reſte FD, que le tout AB eſt du tout CD.



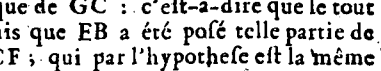
Car étant pris le nombre GC, en ſorte que telle partie qu'eſt le retranché AE du retranché CF, telle partie le reſte EB ſoit d'iceluy GC; par la 5. prop. les deux nombres AE & EB enſemble ſeront telle partie des nombres GC & CF enſemble, qu'eſt AE de CF, c'eſt-à-dire qu'eſt le tout AB du tout CD: & partant puis que le nombre AB eſt telle partie du nombre CF que de CD: iceux nombres GF, CD ſeront égaux entr'eux par la 4. com. ſent. en ôtant donc le nombre commun CF, les demeurans GC & FD ſeront égaux: & partant le reſte EB ſera telle partie du reſte FD, que de GC: c'eſt-à-dire que le tout AB du tout CD, puis que EB a été poſé telle partie de GC, que AE de CF; qui par l'hypotheſe eſt la même que AB de CD. Si donc un nombre eſt telle partie d'un autre nombre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Cette prop. avec ſa démonſtration convient auſſi aux nombres rompus: Et encore le theoreme ſuivant, lequel Commandin démontre en cét endroit.

Si un nombre eſt autant multiple d'un autre nombre que le retranché du retranché; auſſi le reſte ſera autant multiple du reſte, que le tout du tout.

Soit le nombre AB autant multiple du nombre CD, que le retranché AE du retranché CF: Je dis auſſi que le reſte EB eſt autant multiple du reſte FD, que le tout AB l'eſt du tout CD. Car puis



que AB, AE ſont equemultiplices de CD, CF, par le contraire

le tout CD ſera telle partie du tout AB, que le retranché CF du retranché AE : & partant par la ſuſdite prop. 7. auſſi le reſte FD, ſera telle partie du reſte EB, que le tout CD du tout AB : donc au contraire EB ſera autant multiple de FD, que le tout AB eſt multiple du tout CD. Ce qui étoit propoſé à démontrer.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si un nombre contient telles parties d'un autre nombre, que le retranché du retranché : auſſi le reſte contiendra telles parties du reſte, que le tout du tout.

Si le nombre total AB contient telles parties du total CD, que le retranché AE du retranché CF : Je dis que le reſte EB contiendra telles parties du reſte FD, que le total AB, du total CD.

G..2 A.....6 E..2 B
C.....9 F...3 D

Car ſi on poſe GA contenir telles parties de FD, que AE de CF, ou AB de CD, par la 6. prop. les deux nombres GA, AE enſemble, ſeront telles parties des deux CF, FD enſemble, (c'eſt-à-dire le tout GE du tout CD) que GA de FD, ou AB de CD: & partãt puis que GE & AB contiennent telles parties de CD, l'un que l'autre, ils ſeront égaux: parquoy en oſtant le nombre commun AE, reſteront GA & EB égaux. Mais GA contient telles parties de FD, que AB de CD : Donc auſſi EB contiendra telles parties d'iceluy FD, que AB de CD. Parquoy ſi un nombre contient telles parties d'un autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

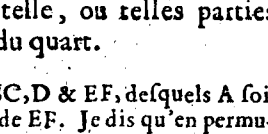
SCHOLIE.

Que ſi aux nombres entiers cy-deſſus appoſez l'on ſubſtituë des nombres rompus, tu démontreras en la même maniere cette 8. prop. être auſſi veritable en fractions ; & ſemblablement les 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, *&c.*

THEOR. 7. PROP. IX.

Si de quatre nombres, le premier eſt telle partie du ſecond, que le tiers du quart; auſſi en permutant le premier ſera telle, ou telles parties du tiers, que le ſecond du quart.

Soient quatre nombres A, BC, D & EF, deſquels A ſoit telle partie de BC, que D eſt de EF. Je dis qu'en permutant, A ſera telle partie, ou contiendra telles parties de D, que BC de EF, pourvû que A & BC ſoient plus petits que D & EF, chacun au ſien; car ainſi ſe doit entendre cette propoſition.



Qu'ainſi ne ſoit : d'autant que par l'hypotheſe, A eſt telle partie de BC comme D de EF : BC contiendra autant de parties égales à A que EF en contient d'égales à D : ſoit donc diviſé le nombre BC és parties BG, GC, chacune égale à A ; & le nombre EF és parties EH, HF chacune égale à D. Et puis que A eſt poſé moindre que D, par la 4. prop. de ce livre, A eſt partie ou parties de D, & ainſi conſequemment des autres, ſçavoir BG de EH, & GC de HF : mais parce que BG eſt égale à GC, & EH à HF ; BG ſera telle ou telles parties de EH, que GC de HF : & partant par la 5. ou 6. prop. BG, GC enſemble, c'eſt-à-dire BC, ſera telle ou telles parties de EH, HF enſemble, ſçavoir EF, que BG de EH, c'eſt-à-dire que A de D. Parquoy ſi de quatre nombres le premier eſt telle partie, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 8. PROP. X.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du ſecond, que le tiers du quart; auſſi en permutant le premier contiendra telle ou telles parties du tiers, que le ſecond du quart.

Soient quatre nombres AB C, DE & F, desquels AB contienne telle parties de C, que DE de F. Je dis qu'en permutant, AB sera telle ou telles parties de DE, que C est de F, moyennant que AB & C soient plus petits que DE & F, chacun au sien, car cette prop. aussi bien que la precedente se doit ainsi entendre.

A..2 G..2 B
C.....6
D.....5 H.....5 E
F.....15

Car AB estant divisé en AG, GB parties de C; & DE en DH, HE parties de F; AB sera divisé en autant de parties que DE, & tant AG que GB sera telle partie de C, que DH & HE de F; donc en permutant par la 9. prop. de ce livre, AG sera telle partie ou parties de DH, & GB de HE, que C de F: & partant AG sera telle partie, ou parties de DH, que GB de HE. Donc par la 5. ou 6. prop. AG, GB ensemble, sçavoir est le premier nombre AB, sera aussi telle partie, ou parties de DH, HE ensemble, c'est-à-dire du troisiéme nombre DE, que AG de DH, c'est-à-dire que le second nombre C du quart F: Parquoy si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 9. PROP. XI.

Si le tout est au tout, comme le retranché au retranché; aussi le reste sera au reste, comme le tout au tout.

Soit le tout AB au tout CD, comme le retranché AE au retranché CF: Je dis que le reste EB est au reste FD, comme le tout AB au tout CD.

Car puis que AB est à CD, comme AE à CF; AB estant plus petit nombre que CD, il sera telle ou telles parties d'iceluy CD, que AE de CF,

A....4 E..2 B
C.....6 F...3 D

& par la 7. ou 8. prop. le reſte EB ſera telle ou telles parties du reſte FD, que le tout du tout : & partant par la 20. def. le reſte EB ſera au reſte FD, comme le tout AB au tout CD. Ce qu'il falloit demontrer.

SCHOLIE.

Or combien qu'en cette démonſtration Euclide poſe le nombre AB plus petit que le nombre CD, ſi eſt-ce toutesfois qu'elle auroit auſſi lieu, ſi AB étoit plus grand que CD. Car ou iceluy nombre CD meſureroit AB, ou il ne le meſureroit pas. Que CD meſure donc premierement AB ; & d'autant que comme

A.....8E.....6B
C....4F...3D

AB eſt à CD, ainſi AE eſt à CF, par la 20. def. AB, AE, ſeront equemultiplices de CD, CF, c'eſt-à-dire que CD ſera telle partie de AB, que CF de AE ; & par la 7. prop. le reſte FD ſera auſſi même partie du reſte EB, que le tout CD du tout AB : donc par le contraire AB, EB, ſeront equemultiplices d'icelles CD, FD : & par la 20. def. convertie, comme le tout AB ſera au tout CD, ainſi le reſte EB ſera au reſte FD.

Maintenant que CD ne meſure pas AB : derechef puis que comme AB eſt à CD, ainſi AE eſt à CF, telles parties que CD eſt de AB, telles parties CF eſt auſſi de AE par la ſuſdite 20. def. & par la 8. prop. le reſte FD ſera même parties du reſte EB, que le tout CD du tout AB : donc par la même def. convertie, le reſte EB ſera au reſte FD, comme le tout AB ſera au tout CD. Ce qu'il falloit démontrer.

A.....6E...3B
C....4F..2D

THEOR. 10. PROP. XII.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra proportionnaux; comme l'un des antecedans ſera à ſon conſequent, ainſi tous les antecedans ſeront à tous les conſequens.

Soient tant de nombres qu'on voudra proportionnaux A, B; C, D; E, F; c'eſt à ſçavoir qu'il y ait telle raiſon de A à B, que de C à D, & que de E à F. Je dis que tous les antecedans A, C, E enſemble, ſeront à tous les conſequens B, D, F enſemble, comme A, l'un des antecedans, eſt à B ſon conſequent.

A.....6	C....4	E..2
B.....9	D.....6	F...3

Car puis que les ſuſdits nombres ſont proportionnaux, & A, C, E, ſont moindres que B, D, E; par la 20. def. A ſera telle ou telles parties de B, que C de D, & E de F; & par la 5. ou 6. prop. de ce meſme livre A & C enſemble ſeront telle, ou telles parties de B & D enſemble, que A de B, ou E de F. Derechef, puis que A, C enſemble comme un ſeul, eſt telle partie, ou parties de B, D enſemble, comme un ſeul, que E de F, auſſi par les meſmes prop. A, C enſemble avec E, ſeront telle ou telles parties de B, D enſemble avec F, que A de B: parquoy par la ſuſdite 20. def. convertie tous les antecedans A, C, E enſemble, auront même raiſon à tous les conſequens B, D, F enſemble, que A à B: Si donc il y a tant de nombres qu'on voudra proportionnaux, comme l'un des antecedans, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

Euclide n'ayant démontré cette prop. qu'en quatre nombres, nous avons delaiſſé ſa demonſtration pour prendre celle cy, qu'on peut eſtendre à tant de nombres qu'on voudra: & combien qu'en cette démonſtration nous ayons poſé, comme il a fait, les nombres antecedans moindres que les conſequens, ſi eſt-ce toutesfois qu'étans plus grands la démonſtration n'en ſera differente, ſinon en ce qu'il faudra, comme au Scholie precedent, prendre iceux antecedans equemultiples des conſequens; & puis aprés iceux conſequens meſmes parties deſdits antecedans, &c.

THEOR. 11. PROP: XIII.

Si quatre nombres ſont proportionnaux: auſſi en permutant ils ſeront proportionnaux.

Soient quatre nombres proportionnaux A, B, C, D, sçavoir qu'il y ait telle raison de A à B, que de C à D : Je dis qu'en permutant, il y aura telle raison de A à C, que de B à D.

Car puis que comme A est à B, ainsi C à D, par la 20. def. A étant plus petit que B, & C que D; A sera telle ou telles parties de B, que C est de D, & partant en permutant par la 9. ou 10. prop. de ce livre A sera telle ou telles parties de C, que B est de D, & par la susdite 20. def. convertie, il y aura même raison de A à C que de B à D. Parquoy si quatre nombres sont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A 6
B 9
C 8
D 12

SCHOLIE.

Cette demonstration d'Euclide a seulement lieu, quand les nombres antecedans sont moindres que les consequens, & que A est moindre que C : mais s'ils sont plus grands, & que A soit plus grand que B, & moindre que C, la demonstration s'en fera ainsi. D'autant que comme A est à B ainsi C est à D, par la 20. def. B sera même partie, ou mesmes parties de A, que D de C : donc en permutant par la 9. ou 10. prop. 7. B sera même partie ou parties de D, que A de C : & par la susdite 20. def. A sera à C, comme B à D.

A 4
B . . . 3
C 8
D 6

Que si A est plus grand que B, & que C, on argumentera ainsi. D'autant que comme A est à B ainsi C est à D, par la 20. def. D sera même partie ou parties de C que B de A : donc en permutant par la 9. ou 10. prop. 7. C sera telle partie, ou telles parties de A, que D de B; & partant par la même def. A sera à C, comme B à D.

A 9
B 6
C . . . 3
D . . 2

Finalement ſi A eſt moindre que B, & plus grand que C, on dira ainſi: d'autant que comme A eſt à B, ainſi C eſt à D, par la 20. def. 7. C eſt même partie ou parties de D, que A de B : donc en changeant par la 9. ou 10. prop. 7. C ſera même partie, ou parties de A, que D de B; & par la ſuſdite 20. def. convertie, A ſera à C, comme B à D.

A	4
B	8
C	2
D	4

THEOR. 12. PROP. XIV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra d'un côté, & autant d'un autre, qui ſoient pris de deux en deux, & en meſme raiſon; iceux en raiſon égale, ſeront auſſi en meſme raiſon.

Soient tant de nombres qu'on voudra A, B, C, & autant d'autres D, E, F; & qu'il y ait telle raiſon de A à B, que de D à E, & de B à C, que de E à F. Je dis qu'en raiſon égale, il y aura telle raiſon de A à C, que de D à F.

A	9	D 6
B	6	E 4
C	3	F 2

Car puis que comme A eſt à B, ainſi D à E, en permutant par la preced. prop. comme A ſera à D, ainſi B à E: ſemblablement auſſi puis que comme B eſt à C, ainſi E à F, en permutant comme B ſera à E, ainſi C à F. Donc comme A ſera à D, ainſi C ſera à F (car puis que A eſt à D, & C à F, en meſme raiſon que B à E, auſſi A ſera à D en la meſme raiſon que C à F, comme ſera incontinent démontré) & partant en permutant, comme A ſera à C, ainſi D ſera à F: Ce qu'il falloit prouver.

LEMME.

Or que A eſtant à D, & C à F, en même raiſon que B à E, ils ſoient de même raiſon entr'eux, nous le demon-

trerons ainſi. D'autant que comme A eſt à D, ainſi B à E ; E plus petit ſera telle ou telles parties de B, que D de A : Derechef puis que comme B à E, ainſi C à F ; F moindre ſera telle, ou telles parties de C, que E de B : Parquoy F ſera telle ou telles parties de C, que D de A : & partant par la 20. def. convertie, comme A ſera à D, ainſi C ſera à F. Donc les raiſons des nombres qui ſont de même à une, ſont auſſi de même entr'elles. Ce qui a eſté demontré en toutes grandeurs au 5. livre prop. 11.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si l'unité meſure quelque nombre autant de fois qu'un tiers meſure un quart ; auſſi en permutant le ſecond meſurera le quart autant de fois que l'unité meſure le tiers.

Soit l'unité A, qui meſure BC autant de fois que D meſure EF : Je dis qu'en permutant BC meſurera EF autant de fois que A meſure D.

Car ayant diviſé BC ſelon les unitez BG, GH, HC; il y aura en EF autant de parties égales à D, leſquelles ſoient EI, IK, KF; & partant BG ſera meſme partie de EI, que GH de IK, & HC de KF : donc par la 20. def. BG eſt à EI, comme GH à IK, & HC à KF : & partant par la 12. prop. tous les antecedans BC ſeront à tous les conſequents EF, comme BG à EI, ou leurs égaux A à D : & par la ſuſdite 20. def. convertie BC ſera meſme partie de EF que A de D ; & par conſequent BC meſure EF autant de fois que A meſure D. Parquoy ſi l'unité meſure quelque nombre, &c. Ce qui étoit à prouver.

A .1
B .1 G .1 H .1 C
D. .2
E . .2 I . .2 K . .2 F

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux nombres ſe multiplient l'un l'autre, leurs produits ſeront égaux entr'eux.

Soient deux nombres A & B; & que A multipliant B produise C ; & B multipliant A produise D : Je dis qu'iceux deux produits C & D sont égaux entr'eux.

Car puis que A multipliant B produit C ; B sera autant de fois en C, que l'unité en A par la 15. def. & partant mesurera C autant de fois que l'unité mesure A, & par la 15. prop. en permutant A mesurera C autant de fois que l'unité mesurera B. Item B multipliant A & produisant D; A sera autant de fois en D, qu'il y a d'unitez en B par la même 15. def. & par consequent mesurera D autant de fois que l'unité mesure B : mais nous avons prouvé que A mesureroit aussi C autant de fois que l'unité mesure B : donc A mesure C & D également, & partant par la 1. com. sent. C & D seront égaux entr'eux: Parquoy si deux nombres se multiplient l'un l'autre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

Vnité.	
A . . . 3	B 4
C	12
D	12

SCHOLIE.

On demontrera cette prop. en nombres rompus ainsi. D'autant que A multipliant B produit C ; par la def. de la multiplication C sera à B comme A à l'unité : & en permutant C sera à A comme B à l'unité. Mais par la même def. comme B est à l'unité, ainsi aussi D est à A, pource que B multipliant A a produit D. Donc comme C sera à A ainsi D sera au même A, par le Lemme de la 14. prop. &c. partant C & D sont égaux entr'eux.

Vnité.	
A $\frac{2}{3}$	B $4\frac{5}{7}$
D $3\frac{1}{7}$	C $3\frac{1}{7}$

THEOR. 15. PROP. XVII.

Si un nombre en multiplie deux autres, les produits seront entr'eux en même raison que les multipliez.

Soit le nombre A, lequel multipliant les nombres B & C faſſe D & E : Je dis que les deux produits D & E ſont entr'eux ? comme B à C.

Car par la 15. def. B multiplié par A eſt autant de fois contenu en ſon produit D, que l'unité en A ; & C dans ſon produit E, comme la meſme unité en A : & partant B meſurera autant de fois D, que C meſure E. Donc B ſera telle partie de D, que C de E : & par la 20. def. B ſera à D, comme C à E ; & en permutant par la 13. prop. 7. comme B ſera à C, ainſi D ſera à E : Si donc un nombre en multiplie deux autres, &c. Ce qu'il falloit prouver.

Vnité.
A . . 2
B . . . 3 C 4
D 6
E 8

SCHOLIE.

Cette prop. a auſſi lieu en nombres rompus, & ſe demontre ainſi. D'autant que A multipliant B *&* C*, produit D &* E *; par la def. de la multiplication il y aura telle raiſon tant de D à* B*, que de* E *á* C*, comme de A á l'unité, & partant par le Lemme de la 14. prop. 7. comme D ſera á* B*, ainſi* E *á* C *: donc en permutant comme D ſera á* E*, ainſi* B *á* C*.*

A $\frac{1}{2}$	
B $\frac{3}{4}$	C $7\frac{1}{5}$
D $\frac{3}{8}$	E $3\frac{3}{5}$

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si deux nombres en multiplient un autre, les produits ſeront entr'eux, en meſme raiſon que les multiplians.

Soient deux nombres A & B, qui multiplians C produiſent D & E. Je dis que comme A eſt à B, ainſi D eſt à E.

Car puis que A multipliant C produit D, auſſi C multipliant A produit le meſme D par la 16. prop. Semblablement, puis que

A...3 B....4
C..2
D.....6 E.....8

B multipliant C produit E, auſſi C multipliant B produira le meſme E : vû donc qu'un meſme nombre C multipliant A & B, produit D & E, comme A eſt à B, ainſi D eſt à E par la prop. prec. Parquoy ſi deux nombres en multiplient un autre, &c. Ce qui eſtoit à prouver.

SCHOLIE.

Vû que la demonſtration tant de cette prop. que des deux ſuivantes, eſt la même en nombres rompus, qu'en nombres entiers, nous ne nous y arrêterons davantage; mais dirons icy que Clavius a accommodé (aprés Campanus) tant cette prop. que la precedente á tant de nombres qu'on voudra; en cette ſorte.

Si un nombre multiplie tant de nombres qu'on voudra, ou quelconques nombres en multiplient quelque autre; les produits ſeront entr'eux en meſmes raiſons que les multipliez, ou multiplians.

Car le nombre A multipliant les nombres B, C, D, ou étant multiplié par iceux, ſoient produits les nombres E, F, G. Je dis que E, F, G, *ſont entr'eux comme les nombres multipliez ou multiplians B, C, D; c'eſt-à-dire que comme B*

A...3
B..2 C...3 D....4
E.....6 F.....9 G.....12

eſt á C, ainſi E á F; *& comme C á D, ainſi* F *á* G. *Car puis que* E, F *ſont produits de A multipliant B, C; ou de B, C, multipliez par A, comme B ſera á C, ainſi E ſera á* F *par la* 17. *ou* 18. *prop. Semblablement pource que* F, G, *ſont produits de A en C, D, ou de C, D par A, auſſi comme C ſera á D, ainſi* F *ſera á* G, *& ainſi des autres. Appert donc ce qui étoit propoſé.*

THEOR.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si quatre nombres ſont proportionnaux, le produit du premier multiplié par le quart, ſera égal au produit du ſecond par le tiers: Et ſi le produit du premier multiplié par le quart, eſt égal au produit du ſecond par le tiers, iceux quatre nombres ſont proportionnaux.

Soient quatre nombres proportionnaux A, B, C, D, ſçavoir que comme A eſt à B, ainſi C eſt à D; & que le premier A multiplié par le dernier D produiſe E, & le ſecond B par le tiers C produiſe F. Je dis que E & F ſont égaux.

A.....6 B....4
C...3 D..2
E.....12
F.....12
G.....18

Qu'ainſi ne ſoit: Soit multiplié A par C, & le produit ſoit G: d'autant que A multiplié par C & D, produit G & E, il y aura telle raiſon de G à E, que de C à D, par la prop. prec. Pareillement d'autant que C multipliant A & B, produit G & F, il y aura telle raiſon de G à F, que de A à B, par la 17. prop. ou de C à D, qui ſont en meſme raiſon que A & B. Parquoy G eſtant à E, & G à F en meſme raiſon que C à D, par le Lemme de la 14. prop. comme G ſera à E, ainſi G ſera à F; parquoy G aura même raiſon à E qu'à F; & partant E & F ſeront nombres égaux, ainſi que nous avons dit ſur la 20. def.

Pour la ſeconde partie, ſoit E produit de A multiplié par D, égal à F, produit de B multiplié par C: Je dis que A eſt à B comme C eſt à D.

Car ſi G eſt produit de A multiplié par C, E & F nombres égaux auront même raiſon à G, comme nous avons dit en la ſuitte de la 20. def. Mais il y a telle raiſon de G à E, comme de C à D, par la preced. prop. & telle raiſon de G à F, comme de A à B par la 17. prop. & partant par le Lemme de la 14. prop. A ſera à B, comme

C à D : si donc quatre nombres sont proportionnaux, le produit du premier & quart, &c. Ce qu'il falloit prouver.

CHOLIE.

Clavius adjoûte icy cet autre Theoreme, la demonstration duquel a lieu tant en nombres entiers qu'en fractions.

Si de quatre nombres, le premier a plus grande raison au second, que le troisiéme au quatriéme; le produit du premier multiplié par le quatriéme sera plus grand que le produit du second multiplié par le troisiéme; & si le nombre produit du premier & quatriéme est plus grand, que celuy du second & troisiéme, il y aura plus grande raison du premier au second que du troisiéme au quatriéme.

Soient quatre nombres A, B, C, D, & qu'il y ait premierement plus grande raison du premier A au second B, que du troisiéme C au quatriesme D : je dis que le nombre procreé de A en D est plus grand que celuy fait de B en C. Car si on pose que E soit à B, comme C à D, il y aura aussi plus grande raison de A à B, que de E à B; & partant A sera plus grand que E, comme nous avons annotté sur la 20. def. 7. Parquoy il se fera un plus grand nombre de A en D, que de E par le même D. Mais par la 19. prop. 7. le produit de E en D est esgal à celuy de B en C : donc aussi le nombre procreé de A en D sera plus grand que celuy fait de B en C. Ce qu'il falloit prouver.

A.....7	E.....6
B....4	
C.....9	
D.....6	

Maintenant que le nombre procreé de A en D, soit plus grand, que celuy fait de B en C : je dis qu'il y a plus grande raison de A à B, que de C à D. Car si on entend que le nombre E en D face le même nombre, que de B en C;

A.....5	E.....6
B....4	
C...3	
D..2	

le produit de A en D sera aussi plus grand que celuy de E par le même D : & partant A sera plus grand que E. Parquoy il y aura plus grande raison de A à B, que de E au même B. Mais par la 19. prop. 7. comme E est à B, ainsi C est à D: donc aussi la raison de A à B sera plus grande que de C à D. Ce qu'il falloit prouver.

Que s'il y avoit moindre raison du premier nombre au second, que du troisiesme au quatriesme, le nombre fait du premier multiplié par le quatriesme seroit moindre, que celuy fait du second par le troisiesme : Et si le nombre procreé du premier multiplié par le quatriesme estoit moindre, que celuy fait du second par le troisiesme, il y auroit moindre raison du premier nombre au second, que du troisiesme au quatriesme. La demonstration n'est differente à la precedente, sinon en ce qu'il faut changer plus grand en moindre.

A ce Theoreme nous en adjoûterons un autre fort utile, qui est tel.

Si trois ou davantage de nombres se multiplient entr'eux, le produit sera toûjours le même, en quelque façon & ordre qu'on les multiplie.

Soient trois nombres A, B, C, & le produit de A multiplié par B soit D, lequel multiplié par C produise E : Mais changeant d'ordre le produit de B par C soit F, & iceluy multiplié par A produise G : changeant derechef d'ordre, le produit de A en C soit H, qui multiplié par B fasse I. Je dis que les trois produits E, G, I, sont un même nombre. Car puis que B multipliant A & C produit D, F, par la 17. prop. 7. comme A est à C, ainsi D à F, & par la 19. prop. 7. le produit de A en F, qui est G, sera esgal au produit de C en D, qui est E. Item puisque C multipliant A & B, produit H & F, comme A est à B, ainsi H à F ; & partant le produit de A en F, qui est G, sera esgal au produit de B en H, qui est I. Par ainsi les deux nombres E & I estans esgaux au nombre G, tous les trois E, G, I, sont esgaux entr'eux, c'est-à-dire un même nombre : Ce qu'il falloit prouver.

A 3.	B 4.	C 5.
D 12.	F 20.	H 15.
E 60.	G 60.	I 60.

Maintenant soient quatre nombres A, B, C, D, & multipliant A par B, & le produit par C, soit fait E, qui multiplié par D produise F : Mais changeant d'ordre, & multipliant D par C, & le produit par B, soit fait G, qui multiplié par A, face H : Je dis que F & H sont un même nombre, & qu'en quelque autre façon qu'on multiplie entr'eux les quatre nombres proposez A, B, C, D, sera toûjours produit le même nombre. Car puis que multipliant d'un côté les trois nombres A, B, C entr'eux, & d'un autre côté les trois D, C, B,

A 2.	B 3.	C 4. D 5.
E 24.	I 12.	G 60.
F 120.		H 120.

aussi entr'eux sont produits les deux E & G, soient multipliez B & C entr'eux, & le produit soit I. Or par ce qui a esté demontré cy-dessus de trois nombres, le nombre E qui se fait multipliant A par B, & le produit par C, se fera aussi multipliant B par C, & le produit (sçavoir I) par A. Par même discours, on prouvera que G seroit produit multipliant D par I. Vû donc que I multipliant A & D, produit E & G, comme A est à D, ainsi E est à G, par la 17. prop. 7. & partant le produit des extrémes A & G sera le même que des moyens D & E par la 19. prop. 7. donc F & H sont un même nombre. Et par semblable discours on prouvera toûjours le même : Car de quatre nombres en multipliant trois entr'eux d'un côté, & trois d'un autre, il se rencontrera que de trois pris d'un côté, & d'autre, il y en aura toûjours deux qui seront communs de part & d'autre, & par ainsi la mesme demonstration aura toûjours lieu.

Que si l'on propose cinq nombres ; on en prendra quatre d'un côté, & quatre d'un autre, & s'en trouvera toûjours trois qui seront communs d'un côté & d'autre : tellement que s'aydant de ce qui a esté demontré en trois, & en quatre nombres, on accomplira la demonstration en la mesme sorte. Et si on propose six nombres, l'on se servira de ce qui aura esté demontré en cinq, & ainsi toûjours en augmentant de nombre en nombre, si on en propose davantage. Ce que le docte Bachet a aussi demontré en ses Problemes plaisans ; & est veritable en toutes sortes de nombres, soient entiers ou fractions.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si trois nombres sont proportionnaux, le produit des extrémes est égal au produit du milieu : & si le produit des extrémes est égal à celuy du milieu, iceux trois nombres seront proportionnaux.

Soient trois nombres proportionnaux A, B, C, sçavoir que comme A est à B, ainsi B à C : Je dis que le produit de A, 1. multiplié par C, 3e, est égal au produit du moyen B multiplié par soy-mesme.

A	9
B	6
D	6
C	4

Car étant pris D égal à B, comme A sera à B, ainsi D sera à C; & par la prec. prop. le produit de A par C, sera égal au produit de B par D, c'est-à-dire de B par soy-même.

Pour la seconde partie ; soit le produit de A, 1. multiplié par C, 3e, égal au produit de B moyen multiplié par soy-même : Je dis que les nombres A, B, C, sont proportionnaux.

Car derechef étant pris D égal à B, comme A sera à B, ainsi D sera à C; & par la prop. prec. le produit de A par C sera égal au produit de B par D, c'est à dire de B par soy-même, puis que D luy est égal : partant les trois nombres A, B, C, sont proportionnaux. Si donc trois nombres sont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Que s'il y a plus grande raison du premier nombre au second, que du second au troisiéme ; le nombre procreé du premier multiplié par le troisiéme sera plus grand, que celuy fait du second multiplié par soy-même : & si le nombre fait du premier multiplié par le troisiéme est plus grand que du second en soy-même, il y aura plus grande raison du premier au second, que du second au troisiéme. Item s'il y a moindre raison du premier au second, que du second au troisiéme, le produit du premier

par le troisiéme sera moindre que le produit du second par soy-même: & si un moindre nombre est fait du premier multiplié

A.....8	A....4
B.....6	B.....6
D.....6	D.....6
C.....5	C.....7

par le troisiéme, que du second en soy; il y aura moindre raison du premier nombre au deuxiéme, que du deuxiéme au troisiéme: Ce qui sera évident par ce qui est démontré au Scholie precedent, ayant posé le nombre D égal au second nombre B, afin qu'il y ait quatre nombres: Car alors il y aura plus grande raison du premier au deuxiéme, que du troisiéme au quatriéme, ou moindre, &c. Comme il appert aux exemples cy apposés, soit que les nombres soient entiers ou rompus.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont la même raison avec iceux, mesurent également les nombres qui ont la même raison, sçavoir le plus grand, le plus grand; & le plus petit.

Soient deux nombres A & B, les plus petits en leur raison, & deux autres nombres plus grands C & D, en même raison qu'iceux A & B, c'est à dire comme A est à B, ainsi C à D: Je dis que A & B mesurent également C & D, c'est à dire que A mesure C autant de fois que B mesure D.

A...3	B....4
C.....6	D.....8

Car puis que iceux A, B, C, D, sont proportionnaux, en permutant par la 13. prop. A sera à C comme B à D: & puis que A & B sont plus petits que C & D, par la 20. def. ils seront même partie ou parties d'iceux C & D. Or ils ne peuvent être parties: car il est évident qu'ils ne se-

roient les plus petits nombres de leur raiſon, contre l'hypotheſe. Donc A eſt même partie de C, que B de D : & partant A meſure C, autant de fois que B meſure D : Parquoy les plus petits nombres de tous ceux qui ont une même raiſon, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois nombres d'un côté, & autant d'un autre, leſquels pris de deux en deux ſoient en même raiſon, la proportion étant troublée, en raiſon égale, ils ſeront proportionnaux.

Soient trois nombres d'un côté A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, leſquels pris de deux en deux ſoient en même raiſon, & leur proportion troublée, ſçavoir que A ſoit à B, comme E à F, & B à C, comme D à E : Je dis qu'en raiſon égale A ſera à C, comme D à F.

A....4	D.....12
B...3	E.....8
C..2	F.....6

Car puis que A eſt à B, comme E à F, le produit de A multiplié par F, ſera égal au produit de B multiplié par E, par la 19. prop. Item, puis que B eſt à C, comme D à E, le même produit de B multiplié par E, ſera égal au produit de C multiplié par D, par la même prop. & partant le produit de A par F, ſera égal au produit de C par D, & par la ſuſdite 19. prop. il y aura même raiſon de A à C que de D à F : Parquoy s'il y a trois nombres d'un côté, & autant d'un autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

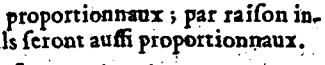
SCHOLIE.

Il eſt evident que cette démonſtration convient auſſi aux nombres rompus. Et d'autant que de ſix moyens d'argumenter és proportions, leſquels Euclide a expliqué en grandeur, & démontré au 5. livre, il en démontre en celuy-cy ſeulement deux en nombres ; il ne ſera hors de propos de démontrer auſſi en

nombres les quatre autres moyens, comme ont fait plusieurs Interpretes.

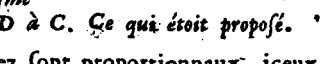
1. Si quatre nombres sont proportionnaux ; par raison inverse, ou en changeant, ils seront aussi proportionnaux.

Soit A à B comme C à D. Je dis qu'en changeant comme B à A, ainsi D à C. Car puis que comme A à B, ainsi C à D, en permutant par la 13. prop. comme A sera à C, ainsi B à D. Derechef puis que B est à D comme A à C, par la mesme prop. B sera à A comme D à C. Ce qui étoit proposé.



2. Si les nombres composez sont proportionnaux, iceux divisez seront aussi proportionnaux.

Soit AB à CB comme DE à EF. Je dis qu'aussi en divisant, comme AC à CB, ainsi DF à FE. Car puis que comme AB à CB, ainsi DE à FE : en permutant par la 13. prop. comme le tout AB au tout DE, ainsi le retranché CB au retranché FE : & partant par la 11. pr. comme le tout AB est au tout DE, ainsi le reste AC sera au reste DF : c'est à dire AC à DF comme CB à FE : donc en permutant comme AC sera à CB, ainsi DF sera à EE. Ce qui étoit proposé.



Par la même maniere nous démontrerons comme au livre 5. la division converse, & contraire de raison. Car soit premierement comme AB à CB, ainsi DE à FE ; Je dis que, par division converse de raison, comme CB à AC, ainsi FE à DF. Car puis que comme AB à CB, ainsi DE à FE : en divisant, comme AC sera à CB, ainsi DF à FE : & en changeant, comme CB sera à AC, ainsi FE sera à DF.

Soit maintenant comme AC à AB, ainsi DF à DE. Je dis par division contraire de raison, que comme AC est à CB, ainsi DF à FE. Car puis que comme AC à AB, ainsi DF à DE : en changeant comme AB sera à AC, ainsi DE à DF. Donc en divisant comme CB à AC, ainsi FE à DF : & en changeant, comme AC sera à CB, ainsi DF à FE. Ce qui étoit proposé.

3. Si les nombres diviſez ſont proportionnaux, iceux compoſez ſeront auſſi proportionnaux.

Soit AB à BC, comme DE à EF. Je dis qu'en compoſant comme AC eſt à BC, ainſi DF, à EF. Car puis que comme AB à BC, ainſi DE à EF, en permutant par la 13. prop. comme AB à DE, ainſi BC à EF, & partant par la 12. prop. comme AB, BC enſemble, à DE, EF enſemble, c'eſt-à-dire le tout AC au tout DF, comme BC à EF: & en permutant par la 13. prop. comme AC à BC, ainſi DF à EF. Ce qui eſtoit propoſé.

A . . . . . 6 B . . . 3 C
D . . . 4 E . . 2 F

Semblablement nous demontrerons icy comme au 5. livre la compoſition converſe & contraire de raiſon. Car ſoit premierement comme AB à BC, ainſi DE à EF. Je dis par compoſition converſe de raiſon, que comme [illegible] eſt à AB, ainſi DF à DE. Car vû que AB eſt à BC, comme DE à EF: en changeant comme BC ſera à AB, ainſi EF à DE: & en compoſant comme AC ſera à AB, ainſi DF ſera à DE.

Maintenant ſoit derechef AB à BC, comme DE à EF. Je dis que par compoſition contraire de raiſon, comme AB eſt à AC, ainſi DE à DF: car puis que comme AB à BC, ainſi DE á EF: en changeant comme BC ſera á AB, ainſi EF á DE. Donc en compoſant, comme AC á AB, ainſi DF á DE: & en changeant comme AB ſera á AC, ainſi DE á DF.

4. Si les nombres compoſez ſont proportionnaux, ils le ſeront auſſi par converſion de raiſon.

Soit comme AB à CB, ainſi DE à FE. Je dis que par converſion de raiſon, comme AB eſt à AC, ainſi DE à DF. Car puis que comme AB à CB, ainſi DE à FE: en permutant par la 13. prop. comme le tout AB ſera au tant DE, ainſi le retranché CB ſera au retranché FE: & partant par la 11. prop. comme le tout AB au tout DE, ainſi le reſte AC au reſte DF. Donc en permutant comme AB ſera à AC, ainſi DE à DF. Ce qui eſtoit propoſé.

A . . . . . 6 C . . . 3 B
D . . . 4 F . . 2 E

A ces quatre theoremes nous adjoûterons les quatre suivans.

5. S'il y a tant de nombres qu'on voudra d'un côté, & autant d'un autre, lesquels pris de deux en deux soient en même raison; comme tous les nombres du premier ordre ensemble seront à l'un d'iceux, ainsi tous les nombres de l'autre ordre ensemble seront au correspondant à iceluy pris du premier ordre.

Soient quatre nombres A, B, C, D d'un côté, & quatre d'un autre E, F, G, H, & que A soit à B, comme E à F; & B à C comme F à G; & C à D comme G à H: Je dis que comme tous les nombres A, B, C, D, ensemble, seront au dernier D, ainsi tous les nombres E, F, G, H, ensemble seront au dernier H. Car d'autant que comme A est à B, ainsi E est à F; en composant comme A, B, ensemble seront

A...3 B....4 C..2 D.....5	
E.....6 F.....8 G....4 H.....10	

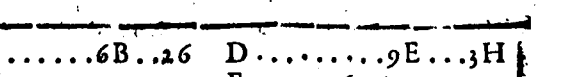
à B, ainsi E, F ensemble seront à F. Mais comme B est à C, ainsi F à G: donc en raison esgale, comme AB, ensemble sont à C. Ainsi E, F ensemble sont à G; parquoy, en composant comme A, B, C ensemble seront à C, ainsi E, F, G, ensemble seront à G. Mais comme C à D, ainsi G à H: donc en raison esgale comme A, B, C ensemble seront à D, ainsi E, F, G ensemble seront à H: Et en composant comme A, B, C, D ensemble sont à D, ainsi E, F, G, H ensemble seront à H. Ce qu'il falloit prouver.

D'où est manifeste que comme l'un des nombres du premier ordre est à son correspondant de l'autre ordre, ainsi tous les nombres du premier ordre ensemble seront à tous ceux du second ordre ensemble. Car puisque comme A, B, C, D ensemble sont à D, ainsi E, F, G, H ensemble sont à H; en permutant A, B, C, D ensemble sont à E, F, G, H ensemble, comme D à H.

6. Si le premier a même raison au second, que le troisiéme au quatriéme, & que le cinquiéme ait aussi mê-

me raiſon au ſecond, que le ſixiéme au quatriéme : le compoſé du premier & cinquiéme aura même raiſon au ſecond, que le compoſé du troiſiéme & ſixiéme au quatriéme.

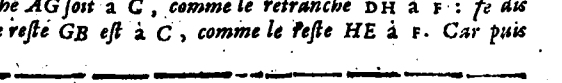
Soit AB premier á C deuxieſme, comme DE troiſieſme á F quatrieſme. Item ſoit BG cinquieſme á C deuxieſme, comme EH ſixieſme á F quatrieſme. Ie dis que AG, compoſé du premier & du cinquieſme eſt á C deuxieſme, comme DE compoſé du troiſieſme & ſixieſme eſt á F quatrieſme. Car



puis que comme BG eſt á C, ainſi EH á F, en changeant comme C ſera á BG, ainſi F á EH. Vû donc que comme AB à C, ainſi DE a F, & comme C à BG, ainſi F à EH ; en raiſon eſgale, comme AB eſt à BG, ainſi DE eſt à EH : & en compoſant, comme AG à BG, ainſi DH à EH ; partant puis que derechef comme AG à BG, ainſi DH à EH, & comme BG à C, ainſi EH à F ; en raiſon eſgale, comme AG ſera à C, ainſi DH à F. Ce qui eſt propoſé.

7. Si le premier a même raiſon au ſecond, que le troiſiéme au quatriéme ; & que le premier ait auſſi la même au cinquiéme, que le troiſiéme au ſixiéme ; auſſi le premier aura même raiſon au compoſé du ſecond & cinquiéme, que le troiſiéme au compoſé du quatriéme & ſixiéme.

Soit le tout AB à C, comme le tout DE à F : Item le retranché AG ſoit à C, comme le retranché DH à F : Ie dis que le reſté GB eſt à C, comme le reſte HE à F. Car puis



que comme AG à C ainſi DH à F, en changeant comme C ſera à AG ainſi F à DH. Vû donc que comme AB à C, ainſi

DE à F, *& comme* C *à AG, ainſi* F à DH ; *en raiſon eſgale, comme* AB à *AG, ainſi* DE à DH. *Parquoy en diviſant comme* GB à *AG, ainſi HE à* DH. *Mais puis que derechef, comme* GB à *AG, ainſi HE* à DH, *& comme AG* à C, *ainſi* DH à F; *en raiſon eſgale, comme* GB *ſera* à C, *ainſi* HE *ſera á* F. *Ce qui eſt proposé.*

8. Si deux nombres, & des retranchés d'iceux, ont une même raiſon à deux nombres ; auſſi les reſtes auront même raiſon aux meſmes nombres.

Soit A premier à *BC deuxieſme, comme* D *troiſieſme* à EF *quatrieſme: & comme A premier* CG *cinquieſme, ainſi* D *troiſieſme* à FH *ſixieſme. Ie dis que comme A premier eſt* à BG, *compoſé du deuxieſme & cinquieſme, ainſi* D, *troiſieſme* à EH *compoſé du quatrieſme & ſixieſme. Car puis que comme A eſt* à BC, *ainſi* D à EF, *en changeant comme* BC *ſera* à *A, ainſi* EF à D. *D'autant donc que comme*

A.....6 D.....9
B....4 C..2 G E.....6 F....4H

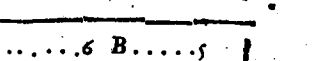
BC à *A, ainſi* EF à D, *& comme A* à CG, *ainſi* D à FH; *en raiſon eſgale, comme* BC à CG, *ainſi* EF à FH: *& en compoſant comme* BG à CG, *ainſi* EH à FH, *& en changeant comme* CG à BG, *ainſi* FH à EH. *Vû donc que comme A* à CG, *ainſi* D à FH, *& comme* CG à BG, *ainſi* FH à EH; *en raiſon eſgale, comme A ſera* à BG, *ainſi* D à EH. *Ce qui eſt proposé.*

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Les nombres premiers entr'eux, ſont les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon avec iceux.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B. Je dis qu'ils ſont les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon qu'eux.

Car s'il n'eſt ainſi, ſoient, s'il eſt poſſible, C & D plus petits en la même raiſon ; & par la 21. prop. ils meſureront A & B, l'un comme l'autre : qu'ils les meſurent donc par le nombre E. Donc E ſera commune meſure des nombres A & B, ainſi ils ne ſeroient pas premiers entr'eux, mais compoſez, contre l'hypotheſe. A & B ſont donc les plus petits de tous ceux qui ſont en meſme raiſon qu'eux. Parquoy les nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

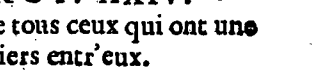


THEOR. 22. PROP. XXIV.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont une meſme raiſon, ſont premiers entr'eux.

Soient les nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon : Je dis qu'ils ſont premiers entr'eux.

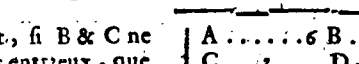
Autrement, s'ils ne ſont premiers, que C les meſure tous deux, s'il eſt poſſible, ſçavoir A autant de fois qu'il y a d'unitez en D, & B autant de fois qu'il y a d'unitez en E. Vû donc que C meſure A par les unitez qui ſont en D, & B par les unitez qui ſont en E ; C multipliant D & E, produira A & B par la 9. com. ſent. Parquoy par la 17. prop. il y aura meſme raiſon de A à B que de D à E : & partant puis que D & E ſont parties d'iceux A & B, ils ſont moindres : ainſi A & B ne ſeront pas les plus petits nombres de tous ceux qui ont la meſme raiſon, ce qui eſt contre noſtre hypotheſe : A & B ſont donc nombres premiers entr'eux. Parquoy les plus petits nombres de tous ceux, &c. Ce qu'il falloit prouver.



THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, celuy qui en meſurera l'un ſera premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, l'un ou l'autre desquels sçavoir A, soit mesuré par le nombre C. Je dis que C est premier à l'autre B.

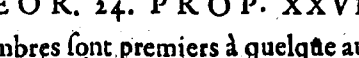


Autrement, si B & C ne sont premiers entr'eux, que D les mesure tous deux, s'il est possible. Vû donc que D mesure C, & C mesure A, par la 11. com. sent. D mesurera aussi A : mais il mesure pareillement B. Donc A & B ne sont premiers entr'eux, contre l'hypothese. C est donc premier à B. Si quelque nombre mesure B, on prouvera en la mesme maniere qu'il sera premier à l'autre A. Parquoy si deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si deux nombres sont premiers à quelque autre ; le produit des deux sera aussi premier à cet autre.

Soient deux nombres A & B, tous deux premiers à C, & que A multiplié par B produise D. Je dis que D est aussi premier à C.



Autrement, si D & C ne sont premiers entr'eux qu'ils soient composez, & que E les mesure tous deux, sçavoir D par le nombre F. Donc E multipliant F, produit D par la 9. com. sent. comme fait aussi A par B : Parquoy A, E, F, B, seront proportionnaux par la 19. prop. Et d'autant que A & C sont premiers entr'eux, E mesurant C sera premier à A par la prop. precedente ; & par la 23. prop. A & E estans premiers, ils seront les plus petits de leur raison ; & partant ils mesureront également F & B, qui sont en la mesme raison, sçavoir A mesurera F, & E mesurera B par la 21. pr. Mais il mesure aussi C : donc B & C ne seroient pas premiers, contre l'hypothese. Parquoy D sera premier à C. Si donc deux nombres sont premiers à quelque autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, le produit de l'un d'iceux multiplié par ſoy, eſt premier à l'autre.

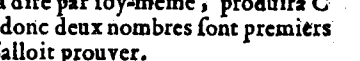
Soient deux nombres premiers A & B, & que l'un ou l'autre d'iceux, ſçavoir A, multiplié par ſoy produiſe C. Je dis que B & C ſont premiers entr'eux.

Car ſi on prend D, égal à A; B ſera auſſi premier à D. Ainſi A & D eſtans premiers à B par la 26. p. 7. A multiplié par D, c'eſt à dire par ſoy-même, produira C premier au meſme B. Si donc deux nombres ſont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si deux nombres ſont premiers à deux autres; (l'un & l'autre à l'un & à l'autre) leurs produits ſeront auſſi premiers entr'eux.

Soient deux nombres A & B premiers à deux autres C & D, & que E ſoit le produit de A multiplié par B, & F produit de C multiplié par D: Je dis que E, & F ſont premiers entr'eux.

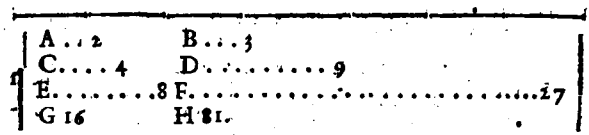


Car A & B eſtans premiers à C, leur produit E ſera auſſi premier au meſme C par la 26. p. Par le meſme diſcours E ſera auſſi premier à D; ainſi C & D eſtans premiers à E, leur produit F ſera auſſi premier à E par la même 26. prop. Si donc deux nombres ſont premiers à deux autres, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 27. PROP. XXIX.

Si deux nombres premiers entr'eux ſont multipliez chacun par ſoy, leurs produits ſeront premiers entr'eux: Et ſi iceux produits ſont encore multipliez par les nombres propoſez au commencement, leurs produits ſeront encores premiers entr'eux: & cecy aviendra toûjours environ les extrémes.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, & que A multiplié par ſoy-meſme produiſe C, mais B multiplié auſſi par ſoy produiſe D. Je dis que C & D, ſeront premiers entr'eux. Item ſi A multipliant C produit E, & B multipliant D produit F. Je dis que E & F ſeront auſſi premiers entr'eux.



Car par la 27. pr. A & B eſtans premiers, C produit de A multiplié par ſoy, ſera premier au reſtant B: par meſme raiſon B & C eſtans premiers entr'eux, D ſera auſſi premier à C. Derechef, puis que A & B ſont premiers, par la meſme 27. prop. C ſera auſſi premier à B, & D à A: Mais il a été demontré que C eſt auſſi premier à D: parquoy l'un & l'autre nombre A, C, ſera premier à l'un & à l'autre nombre B, D; & partant par la 28. prop. E produit de A en C, ſera premier à F, produit de B par D.

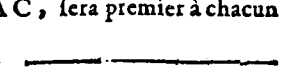
Que ſi encore A, multipliant E produit G; & B multipliant F produit H: G & H ſeront auſſi premiers entr'eux. Car puis que A & C ſont premiers à B, leur produit E ſera auſſi premier à B par la 26. prop. Par meſme raiſon F ſera auſſi premier à A: Ainſi les deux nombres A, E, ſeront premiers

premiers aux deux B, F, sçavoir l'un & l'autre, à l'un & à l'autre ; & partant par la 28. prop. G produit de A en E, sera aussi premier à H produit de B en F, & ainsi à l'infiny. Parquoy, si deux nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 28. PROP. XXX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le composé d'iceux sera premier à chacun d'eux : & si le composé de deux nombres est premier à quelqu'un d'iceux, ils seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres premiers entr'eux A B & B C : Je dis que le composé des deux A C, sera premier à chacun d'iceux A B, B C.



Car si A C, A B ne sont premiers, soit D leur commune mesure, s'il est possible : si donc D mesure le tout A C, & la partie A B ; il mesurera aussi le reste B C, par la 12. com. sent. Ainsi A B & B C ne seroient premiers entr'eux ; contre l'hypothese. Parquoy A C sera premier à A B : on demontrera par la mesme maniere que A C est aussi premier à B C.

Secondement, si le tout A C est premier à A B ou à B C. Je dis qu'iceux A B & B C seront premiers entr'eux. Autrement ; que D les mesure s'ils ne sont premiers ; il mesurera aussi le composé des deux A C, par la 10. com. sent. Ainsi A C ne seroit premier à A B, & B C, ce qui est contre l'hypothese. A B & B C sont donc premiers entr'eux. Si donc deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de cecy, que si un nombre composé de deux, est premier à l'un d'iceux, il sera aussi premier à l'autre. Car si A C est premier à A B : A B, B C seront premiers entr'eux par la seconde partie de cette prop. Donc aussi A C sera premiere à

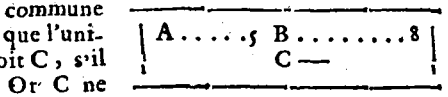
BC par la premiere partie de la meſme prop. ce qui a eſté propoſé.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Tout nombre premier, eſt premier à tout autre nombre qu'il ne meſure pas.

Soit un nombre premier A, qui ne meſure le nombre B : Je dis que A & B ſont premiers entr'eux.

Car s'ils ne le ſont, ils auront une commune meſure autre que l'unité; laquelle ſoit C, s'il eſt poſſible. Or C ne peut eſtre égal à A puis



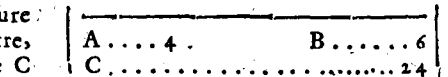
que nous avons poſé que A ne meſure pas B : & par ainſi A eſtant meſuré par quelque autre nombre, il ne ſeroit premier contre l'hypotheſe. Parquoy A & B ſont premiers entr'eux. Donc tout nombre premier, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Si deux nombres ſe multiplient l'un l'autre, & que quelque nombre premier meſure leur produit, il meſurera auſſi l'un d'iceux nombres poſez au commencement.

Soient deux nombres A & B, de la multiplication deſquels ſoit produit C, & que D nombre premier meſure iceluy C. Je dis qu'il meſurera auſſi l'un ou l'autre d'iceux A & B, s'il ne les meſure tous deux.

Autrement, s'il ne meſure l'un ny l'autre, qu'il meſure C par le nombre E : Si donc D ne meſure A,



par la prop. prec. il ſera premier à iceluy, & par la 23. prop. ils ſeront les plus petits de leur raiſon. Mais d'autant que D multiplié par E fait C, auſſi bien que A multiplié par B, par la 19. prop. A ſera à D, comme E à B, & par la 21. prop. A & D meſureront également E & B, c'eſt-à-dire que A meſurera E, & D meſurera B. En la meſme maniere ſera demontré que ſi D ne meſure pas B, qu'il meſurera A. Si donc deux nombres ſe multiplient l'un l'autre, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Tout nombre compoſé eſt meſuré par quelque nombre premier.

Soit le nombre compoſé A. Je dis qu'il ſera meſuré par quelque nombre premier.

Car puis qu'il eſt compoſé, il ſera meſuré de quelque nombre par la 13. def. & ſoit de B, lequel ſera compoſé ou non : s'il eſt premier, la prop. eſt manifeſte : mais s'il eſt compoſé, il ſera meſuré par un autre nombre, & ſoit C, lequel ſera premier ou non : s'il eſt premier, puis qu'il meſure B; & B meſure A, auſſi C meſurera A par la 11. com. ſent.

A 8	
B . . . 4	
C . . 2	

Mais ſi C eſt compoſé, il ſera meſuré par quelque nombre : Et pource qu'un nombre ne ſe diminuë infiniment, nous viendrons finalement à quelque nombre que nul autre ne meſurera; & partant à un nombre premier, lequel meſurant tous les precedents, meſurera auſſi le compoſé A. Parquoy tout nombre compoſé eſt meſuré par quelque nombre premier. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Tout nombre eſt premier, ou bien meſuré par quelque nombre premier.

Soit quelconque nombre A : Je dis qu'iceluy eſt ou nombre premier, ou que quelque nombre premier le meſure.

Car s'il n'eſt nombre premier, il eſt nombre compoſé, & par la prec. prop. tout nombre compoſé, eſt meſuré par quelque nombre premier. Parquoy tout nombre eſt premier, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A 5
A 6

PROBL. 3. PROP. XXXV.

Tant de nombres qu'on voudra étans donnez, trouver les plus petits nombres de tous ceux qui auront même raiſon.

Soient donnez tant de nombres qu'on voudra A, B, C: & il faut trouver les plus petits en la même raiſon.

Leſdits nombres A, B, C ſont ou nombres premiers, ou nombres compoſez : s'ils ſont premiers entr'eux, ou à ce que l'on cherche par la 23. prop. mais s'ils ſont compoſez, ſoit trouvé D plus grande commune meſure d'iceux A, B, C, par la 3. prop. laquelle meſure A ſelon E; B ſelon F; & C ſelon G. Je dis que E, F & G ſont les plus petits nombres qui ſoient en la raiſon de A, B, & C.

Car il eſt évident qu'iceux E, F, G ſont és mêmes raiſons que A, B, C, d'autant que D meſurant iceux A, B, C, par les nombres E, F, G;

D multipliant iceux E, F, G, ſeront produits A, B, C, par la 9. com. ſent.	A 6	B 4	C 8
		D . .2	
	E . . .3	F . .2	G 4
	H-	I-	K- L-

& par ce que nous avons démontré à la 18. prop. E, F, G, auront la même proportion entr'eux que les multipliez A, B, C. Et qu'ils ſoient les plus petits, on le démontrera ainſi. S'ils ne ſont tels, ſoient H, I, K, les plus petits nombres ayans même proportion qu'iceux A, B, C : ils

les mesureront donc également par la 21. prop. & soit par le nombre L ; ce qu'étant, par la 9. com. sent. L multipliant H, I, K, seront produits les nombres A, B, C. Veu donc que D multipliant E, fait A ; & L multipliant H, fait le même A ; par la 19. prop. il y aura telle raison de D à L, que de H à E : mais H est moindre que E : donc D sera aussi moindre que L : & puis que H, I, K mesurent A, B, C par L ; L mesurera aussi iceux A, B, C par la 8. com. sent. & ainsi D ne sera pas la plus grande commune mesure d'iceux A, B, C : ce qui est contre l'hypothese. Il n'y a donc point d'autres nombres moindres que E, F, G, qui soient en même raison, que les proposez A, B, C. Parquoy étans donnez quelconques nombres, nous avons trouvé les plus petits, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Il appert icy que la plus grande commune mesure de quelconques nombres, mesure iceux par les nombres qui sont les plus petits de tous ceux qui sont en la même raison qu'iceux proposez.

SCHOLIE.

Par ces choses appert le moyen de trouver les deux plus petits nombres qui ont la même raison, que tant de nombres qu'on voudra donner continuellement proportionnaux. Comme si on propose les nombres A, B, C, continuellement proportionnaux, nous trouverons les deux moindres en la même raison, si par ce prob. nous prenons E & F en la même raison des deux A & B, c'est à sçavoir ces nombres-là, par lesquels D plus grande commune mesure d'iceux A & B, mesure iceux. Car par le corol. cy dessus, E & F seront les plus petits de tous ceux qui sont en la même raison que A à B : c'est à dire en la raison des continuellement proportionnaux A, B, C.

Or il advient quelquesfois qu'un des nombres E, F, G, trouvez par cette 35. prop. est l'unité, c'est à sçavoir quand D, plus grande commune mesure des nombres proposez A, B, C, est égal à l'un d'iceux : & alors les nombres trouvez E, F, G sont les plus petits en la continuation de leur proportion, puis qu'il ne se peut donner un nombre moindre que l'unité.

PROBL. 4. PROP. XXXVI.

Trouver le plus petit nombre que peuvent mesurer deux nombres donnez.

Soient les nombres donnez A & B : il faut trouver le plus petit nombre mesuré par iceux.

Si le plus petit nombre des deux donnez mesure le plus grand, il est évident qu'iceluy plus grand sera le nombre que nous cherchons : que si l'un ne mesure l'autre, ou A & B seront premiers entr'eux, ou non ; si premiers, soit multiplié A par B, & le produit soit C. Je dis que C est le plus petit nombre mesuré par A, & par B. Car par la 7. com. sent. il est évident que C sera mesuré par l'un & par l'autre, & s'il n'est le moindre nombre mesuré par iceux A, B, en soit un autre plus petit D, s'il est possible, lequel A mesure selon le nombre E, & B selon le nombre F. Ce qu'étant, D sera produit tant de A multiplié par E, que de B par F, par la 9. com. sent. & partant par la 19. prop. A sera à B comme F à E. Item A & B, étans premiers, ils seront les plus petits de leur raison par la 23. prop. & A mesurera F par la 21. prop. & d'autant que B multipliant A produit C, & multipliant F produit D, il y aura telle raison de C à D, que de A à F, par la 17. prop. Mais nous avons montré que A mesuroit F : donc C mesurera aussi D, sçavoir le plus grand mesurera le plus petit, ce qui est impossible. C étoit donc le moindre nombre que A & B peuvent mesurer.

A . . . 3	B 4		
C 12			
D ---			
E --	F-		

Soient maintenant les deux nombres A & B composez, & par la prec. prop. soient trouvez C & D les plus petits nombres de la même raison, tellement que ces 4. nombres A, B, C, D, soient proportionnaux : Quoy posé par la

A 4	B 6		
C . . 2	D . . . 3	E 12	

19. prop. le produit de A multiplié par D, ſera égal au produit de B multiplié par C : iceluy produit ſoit E. Donc E ſera meſuré par B, & par A : & par le même diſcours de la precedente démonſtration, on montrera qu'il eſt le plus petit nombre meſuré par A, & par B. Nous avons donc trouvé le plus petit nombre, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

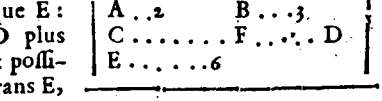
De cecy il s'enſuit, que ſi deux nombres multiplient les plus petits de leur raiſon, ſçavoir le plus grand, le plus petit, & le plus petit le plus grand; le produit ſera le plus petit nombre qu'ils meſurent. Car C & D eſtans poſez les plus petits en la raiſon de A à B, il a eſté prouvé que E produit de A plus petit multiplié par D, plus grand; & de B plus grand par C plus petit, eſt le plus petit nombre meſuré par A & B.

THEOR. 33. PROP. XXXVII.

Si deux nombres meſurent un autre nombre; le plus petit qu'ils meſurent, meſurera auſſi cet autre nombre.

Soient deux nombres A, & B, qui en meſurent un autre CD, & que le plus petit nombre qu'ils meſurent ſoit E. Je dis que E meſurera auſſi CD.

Autrement, ſi E ne meſure CD; aprés avoir ôté E de CD, tant de fois que l'on pourra, il reſtera un nombre moindre que E : qu'il laiſſe donc FD plus petit que E, s'il eſt poſſible : A & B meſurans E, ils meſureront auſſi CF par la 11. com. ſent. Mais ils meſurent le tout CD par la 12. com. ſent. ils meſureront donc auſſi le reſte FD plus petit que E, ce qui eſt impoſſible, étant le plus petit qu'ils meſurent. Parquoy E meſurera CD : Si donc deux nombres meſurent un autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouver.



PROBL. 5. PROP. XXXVIII.

Trouver le plus petit nombre que peuvent mesurer trois nombres donnez.

Soient trois nombres donnez A, B, C; il faut trouver le plus petit nombre qu'ils peuvent mesurer.

Soit trouvé D plus petit nombre que peuvent mesurer A & B, par la 36. prop. Or C mesure aussi D, ou il ne le mesurera pas : s'il le mesure; Je dis qu'il est aussi le plus petit qu'iceux A, B, C, peuvent mesurer : car s'il ne l'est, en soit quelque autre plus petit E, s'il est possible, lequel tous les trois A, B, C mesurent. D'autant que A & B mesurent E moindre que D, iceluy D, ne sera le moindre que A & B mesurent, ce qui est contre l'hypothese. D est donc le moindre nombre que peuvent mesurer les nombres proposez A, B, C.

A..2 B...3 C.....6
D.....6
E—

Que si D n'est aussi mesuré par C : par la même 36. prop. soit trouvé E plus petit nombre mesuré par C & D: Je dis que E sera le plus petit nombre mesuré par A, B, C.

Car premierement E est mesuré par A, B, C : d'autant que C & D le mesurent; & A & B mesurant D, par la 11. com. sent. ils mesureront aussi E mesuré par D. Que si on dit que E n'est le plus petit nombre mesuré par A, B, C, soit F plus petit, s'il est possible : donc A & B mesurant F; D le plus petit mesuré par eux, mesurera aussi F par la prec. prop. Mais C mesure aussi F; (car A, B & C le mesurent) donc C & D mesureront F. Et par la même prop. E plus petit mesuré par C & D, mesurera aussi F; le plus grand un plus petit; ce qui est impossible. Donc E étoit le plus

A..2 B...3 C....4
D.....6
E.....12
F------

petit nombre mesuré par A, B, C. Estant donc donnez trois nombres nous avons trouvé le plus petit qu'ils peuvent mesurer : Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, que si trois nombres en mesurent quelque autre ; le plus petit qu'ils mesureront, mesurera aussi cet autre. Car il a été démontré que A, B, C, mesurant F ; aussi E le plus petit nombre mesuré par A, B, C, mesure le même nombre F.

SCHOLIE.

Par même raison étans donnez plus de trois nombres, nous trouverons le plus petit nombre qu'ils mesurent. Car si 4. nombres sont donnez, il faudra trouver le moindre que trois mesurent : si 5, il faudra trouver le plus petit que 4 mesurent, &c. procedant au reste tout ainsi qu'il a été dit de trois nombres.

THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si un nombre mesure un autre nombre ; le mesuré aura une partie dénommée par le mesurant.

Soit le nombre A, lequel mesure le nombre B. Je dis qu'iceluy B contiendra une partie dénommée par A.

Qu'ainsi ne soit ; que A mesure B selon C, c'est-à-dire, autant de fois qu'il y a d'unitez en C ; par la 15. prop. C mesurera B autant de fois que l'unité mesure A ; & C sera telle partie de B que l'unité de A. Mais l'unité est une partie de A, dénommée par iceluy A, comme nous avons dit en la 2. def. de ce 7. livre : donc aussi C sera une partie de B dénommée par A. Si donc un nombre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

	Vnité.		
A ... 3	B 6	C . . 2	

THEOR. 35. PROP. XL.

Si un nombre a une partie quelle qu'elle ſoit, le nombre nommant cette partie le meſurera.

Soit le nombre A, ayant la partie B dénommée par le nombre C. Je dis que C meſure A.

Car puis que B eſt partie dénommée par C; & l'unité eſt une partie de C, dénommée par le même C; comme l'unité meſure C, ainſi B meſure A : & par la 15. prop. en permutant comme l'unité meſurera B, ainſi C meſurera A. Parquoy ſi un nombre a quelconque partie, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A.....12
B...3 C....4

PROBL. 6. PROP. XLI.

Trouver le plus petit nombre, qui ait les parties données.

Soient les parties données A, B, C; il faut trouver le plus petit nombre qui ait icelles parties.

Soient pris les trois nombres D, E, F, dénommez par icelles parties A, B, C; & par la 38. prop. ſoit trouvé G, le plus petit nombre que peuvent meſurer D, E, F: Je dis qu'iceluy nombre G contient les parties A, B, C.

Car puis que D, E, F meſurent G; par la 39. prop. G aura les parties dénommées par D, E, F, c'eſt-à-dire les parties A, B, C. Je dis auſſi que G eſt le plus petit nombre qui ait icelles parties. Car s'il ne l'eſt, ſoit H plus petit, s'il eſt poſſible, ayant icelles parties. Et H ſera meſuré par les nombres D, E, F dénommées par les parties A, B, C,

A *deuxiéme*	D	.2
B *tiers*	E	.3
C *quart.*	F	4
G		12
H-----		

par la precedente propoſition : & partant puis que H eſt moindre que G ; iceluy nombre G ne ſera pas le plus petit que peuvent meſurer les nombres D, E, F, contre l'hypotheſe. Donc G eſt le moindre nombre, ayant les parties données A, B, C. Parquoy nous avons trouvé le plus petit nombre ayant les parties données : Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Combien que nous ayons remarqué en ce 7. livre les prop. & démonſtrations qui conviennent & ont lieu auſſi bien aux nombres rompus qu'aux entiers ; ſi eſt-ce neanmoins que pour donner une entiere & parfaite intelligence des regles & preceptes enſeignez en nôtre Pratique d'Arithmetique touchant les fractions, nous avons eſtimé être beſoin d'adjoûter icy les prop. ſuivantes.

DEMONSTRATIONS DES fractions, ou nombres rompus.

1. Si deux fractions ont un même dénominateur, & que l'unité ſoit le numerateur de l'une d'icelles fractions ; elles auront même raiſon entr'elles que les numerateurs.

Soient deux fractions AB, CB, *ayans un même denominateur* B, *& le numerateur* C *ſoit l'unité : je dis que le nombre rompu* AB *eſt au nombre rompu* CB, *comme le numerateur* A *eſt au numerateur* C. *Car vû que la fraction* AB *ſe diviſe en autant de fractions eſgales à la fraction* CB *qu'il y a d'unitez en* A, *chacune d'icelles fractions ayant le numerateur* C, *& le denominateur* B ; *autant de fois que l'unité* C *eſt contenuë en* A, *autant de fois la fraction* CB *eſt contenuë en la fraction* AB : *parquoy l'unité* C *eſt même partie du nombre* A, *que la fraction* CB *de la fraction* AB ; *& partant par la 20. def. 7. comme l'unité* C *eſt à* A, *ainſi la fraction* CB *eſt à la fraction* AB ; *& en changeant, le numerateur* A *ſera au numerateur* C, *comme la fraction* AB *ſera à la fraction* CB. *Ce qui eſtoit à prouver.*

A 5	C 1
B 8	B 8

2. Le numerateur de quelconque fraction a même raiſon au dénominateur, qu'icelle fraction a à l'entier duquel elle provient.

Soit quelconque fraction AB : *je dis que le numerateur* A *eſt au denominateur* B *comme la fraction* AB *eſt à ſon entier. Soit pris une fraction* CB *dont le numerateur* C *eſt l'unité, & le denominateur eſt le même* B ; *mais ſoit une autre fraction* DB, *de laquelle le numerateur* D *ſoit eſgal au meſme denominateur* B, *afin qu'icelle fraction* DB *ſoit eſgale à l'entier de la fraction* AB. *D'autant que par la prop. prec. comme A eſt à* C, *ainſi la fraction* AB *eſt à la fraction* CB: *& comme* C *eſt à* D, *ainſi la fraction* CB *eſt à la fraction* DB ; *en raiſon eſgale, comme A ſera à* D, *c'eſt-à-dire le numerateur* A *au denominateur* B, (*car* E *eſt eſgal à* D) *ainſi la fraction* AB *ſera à la fraction* DB, *c'eſt-à-dire à l'entier : ce qui a eſté proposé.*

A 5	C 1	D 8
B 8	B 8	B 8

3. Les fractions qui ont un même dénominateur ſont entr'elles en même raiſon que leurs numerateurs.

Soient quelconques fractions AB, CB, *ayans un meſme denominateur* B : *je dis que la fraction* AB *eſt à la fraction* CB, *comme le numerateur A eſt au numerateur* C. *Car puis que par la prop. prec. comme* A *eſt à* B, *ainſi la fraction* AB *eſt à ſon entier, & que comme* B *eſt à* C, *ainſi l'entier eſt à la fraction* CB ; (*car par la meſme prop. prec. comme* C *à* B, *ainſi la fraction* CB *à ſon entier, & en changeant comme* B *à* C, *ainſi l'entier à la fraction* CB) *en raiſon eſgale, comme le numerateur A ſera au numerateur* C, *ainſi la fraction* AB *ſera à la fraction* CB. *Ce qui eſtoit à demontrer.*

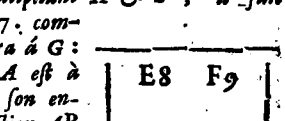
A 7	C 5
B 21	B 21

S'il y avoit plus de deux fractions, on prouveroit en la meſme maniere que la ſeconde ſeroit à la troiſieſme, comme le numerateur au numerateur ; & puis aprés la troiſieſme à la quatrieſme, & ainſi conſecutivement de fraction en fraction.

4. S'il y a tant de fractions qu'on voudra, & qu'on multiplie le numerateur de chacune d'icelles par les dénominateurs de toutes les autres, les nombres produits seront entr'eux, en même proportion que les fractions.

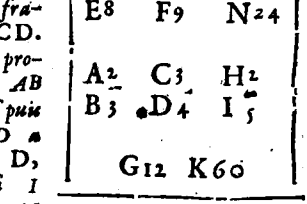
Nous disons le numerateur d'une fraction être multiplié par le denominateur de toutes les autres, quand iceluy numerateur est multiplié par le denominateur de l'une des autres fractions, & puis encore le produit par le denominateur de l'une des restantes, & ainsi continuellement tant qu'il y aura de fraction : & n'importe par quel ordre on les prenne, puis que le produit est toûjours le mesme, comme nous avons demontré au Scholie de la 19. prop. 7.

Soient premierement deux fractions AB, CD, *& de* A *en* D *soit fait* E, *mais de* C *en* B *soit fait* F : *je dis que le produit* E *est au produit* F, *comme la fraction* AB, *est à la fraction* CD. *Qu'ainsi ne soit ; de* B *en* D *soit fait* G : *donc puis que* D *multipliant* A *&* B, *a fait* E *&* G, *par la* 17. *prop.* 7. *comme* A *sera à* B, *ainsi* E *sera á* G : *Mais par la* 2. *prop. comme* A *est à* B, *ainsi la fraction* AB *est à son entier. Donc aussi comme la fraction* AB *sera à son entier, ainsi* E *sera à* G. *Derechef, pource que* B *multipliant* D *&* C *a fait* G *&* F, *par la mesme* 17. *prop.* 7. *comme* D *sera à* C, *ainsi* G *sera à* F. *Mais comme* D *est à* C, *ainsi l'entier est à la fraction* CD : *(car puis que par la* 2. *prop. comme* C *à* D, *ainsi la fraction* CD *à son entier, en changeant comme* D *à* C, *ainsi l'entier à la fraction* CD.) *Donc comme* G *sera à* F, *ainsi l'entier sera à la fraction* CD. *Parquoy la fraction* AB, *l'entier, & la fraction* CD *seront en mesme proportion que les trois produits* E, G, F. *Donc en raison esgale comme* E *sera à* F, *ainsi la fraction* AB *sera à la fraction* CD. *Ce qui a esté proposé.*



Soient maintenant les trois fractions AB, CD, HI, *& que de* A *en* D *soit fait* E, *& de* E *en* I *soit produit* L : *mais que de* C *en* B *soit fait* F, *& de* F *en* I *vienne* M : *fina-*

blement que de B en D ſoit fait G, & de G en H vienne N: je dis que les trois produits L, M, N ſont entr'eux en meſme proportion que les fractions propoſées AB, CD, HI. Car puis que I multipliant E & F fait L & M, par la 17. prop. 7. comme E eſt á F, ainſi eſt le produit L au produit M: par la demonſtration prec. comme E eſt à F, ainſi la fraction AB eſt à la fraction CD. Donc le produit L eſt au produit M comme la fraction AB à la fraction CD. Derechef puis que B multipliant C & D a fait F & G, comme C à D, ainſi F à G: Mais auſſi I multipliant F & G a fait M & K. Donc iceux produits M & K ſeront entr'eux comme F à G, c'eſt-à-dire comme C à D. Mais par la 2. prop. comme C à D, ainſi la fraction CD à ſon entier: Donc auſſi comme la fraction CD ſera à l'entier, ainſi ſera M à K. Semblablement G multipliant I & H, fait K & N; partant comme I. à H, ainſi K à N. Mais il appert par ce qui a eſté demontré cy-deſſus, que comme I eſt à H, ainſi eſt l'entier à là fraction HI. Donc comme l'entier ſera à la fraction HI, ainſi K ſera à N. Parquoy la fraction CD, l'entier, & la fraction HI, ſeront en même proportion que les produits M, K & N: donc en raiſon eſgale, comme la fraction CD ſera à la fraction HI, ainſi le produit M ſera au produit N. Mais nous avons déja demontré cy-deſſus, que comme la fraction AB eſt à la fraction CD, ainſi eſt le produit L au produit M: donc les trois produits L, M, N ſeront entr'eux en même proportion que les trois fractions AB, CD, HI. Ce qu'il falloit prouver.



Que s'il y a quatre fractions, on demontrera en la même ſorte que comme la troiſieſme ſera à la quatrieſme, ainſi le produit correſpondant à cette là ſera au produit correſpondant à cette-cy; & ainſi continuellement de fraction en fraction, repetant toûjours la demonſtration cy-deſſus.

Or il appert de cette demonſtration que ſi les ſuſdits produits eſtoient eſgaux, les fractions ſeroient auſſi eſgales: & au contraire que les fractions eſtans eſgales, leſdits produits ſeront pareille-

ment eſgaux : Mais qu'eſtans ineſgales, le produit de la plus grande ſera le plus grand, & de la moindre, le moindre, & ainſi des autres.

5. L'entier a même raiſon à la ſomme de deux ou davantage de fractions, que le nombre produit des dénominateurs multipliez entr'eux à la ſomme des produits du numerateur de chaque fraction multiplié par les dénominateurs de toutes les autres fractions.

Soient trois fractions AB, CD, EF, *& que de* B *en* D *& F ſoit procreé* K; *& de A en D & F ſoit fait G; mais de C par B & F ſoit produit H; & de E par B & D ſoit fait I: Je dis que l'entier eſt à la ſomme des fractions* AB, CD, EF, *comme le produit* K *eſt à la ſomme des produits G, H, I. Car puiſque par la prop. prec. les fractions* AB, CD, EF, *ſont entr'elles comme les produits G, H, I, par le 5. theor. du Scholie de la 22. prop. 7. comme la ſomme d'icelles fractions AB, CD, EF eſt à la fraction EF, ainſi la ſomme des produits G, H, I eſt au produit I. Mais comme la fraction* EF *eſt à l'entier, ainſi I eſt à K: (car par la 2. pro.*

G 16	H 12	I 18
A 2 / B 3	C 1 / D 2	E 3 / F 4
	K 24	

comme la fraction EF eſt à l'entier, ainſi E eſt à F, & par la 18. prop. 7. comme E à F, ainſi I à K, pource que E, F multipliant le produit de B *en* D *ont fait I & K.) Donc en raiſon eſgale comme la ſomme des fractions* AB, CD, EF *eſt à l'entier, ainſi la ſomme des produits G, H, I eſt à K: & au contraire, comme l'entier eſt à la ſomme des fractions* AB, CD, EF, *ainſi K eſt à la ſomme des produits G, H, I. Ce qu'il falloit demontrer.*

6. Si deux fractions ont un même numerateur, comme la premiere fraction ſera à la ſeconde, ainſi le dénominateur de la ſeconde ſera au dénominateur de la premiere.

Soient deux fractions AB, AC, *ayans un même nume-*

vateur A : Je dis que la fraction AB *eſt à la fraction AC, comme le denominateur* C *eſt au denominateur* B. *Car de A en C ſoit fait D, & de A en B ſoit produit* E. *Or puis que A multipliant* C *&* B, *fait D &* E, *par la* 17. *prop.* 7. *comme* C *ſera à* B, *ainſi D ſera à* E. *Mais par la* 4. *prop. comme D eſt à* E, *ainſi la fraction* AB *eſt à la fraction AC: Donc auſſi la fraction* AB *ſera à la fraction AC, comme* C *ſera à* B. *Ce qu'il falloit prouver.*

D 10	E 6
A 2 / B 3	A 2 / C 5

7. Les fractions deſquelles les numerateurs ont une même raiſon aux dénominateurs ſont égales entr'elles : Et des fractions égales, les numerateurs ont une même raiſon aux dénominateurs : Mais des inégales, celles dont le numerateur a plus grande raiſon au dénominateur, eſt la plus grande : Et de la plus grande, le numerateur a plus grande raiſon au dénominateur.

Soient deux fractions AB, CD, *& qu'il y ait même raiſon du numerateur A au denominateur* B, *que du numerateur C au denominateur D : Je dis qu'icelles fractions* AB, CD, *ſont eſgales. Car ayant fait* E *de A en D, &* F *de* B *en C ; comme la fraction* AB *eſt à la fraction CD, ainſi* E *à* F, *par la* 4. *prop. Mais puis que comme A eſt à* B, *ainſi* C *eſt à D ; par la* 19. *prop.* 7. *les deux produits* E *&* F *ſeront égaux : donc auſſi la fraction* AB *ſera égale à la fraction* CD. *Ce qu'il falloit prouver.*

E 12	F 12
A 2 / B 3	C 4 / D 6

Soient maintenant deux fractions égales AB, CD : *Je dis que comme A eſt à* B, *ainſi* C *à D : Car comme á la prec. démonſt. ayant fait* E *de A en D, &* F *de* B *en C, comme* AB *ſera á* CD, *ainſi* E *á* F. *Mais* AB *eſt égale á* CD : *donc auſſi* E *ſera égal á* F ; *& par la* 19. *prop.* 7. *comme A ſera á* B, *ainſi* C *ſera á D : Ce qu'il falloit démontrer.*

En troiſiéme lieu, qu'il y ait plus grande raiſon de A à B, *que de* C *á D : Je dis que la fraction* AB *eſt plus grande que la fraction* CD. *Car ayant fait* E *de A en D, &* F *de* B *en C, par la* 4. *prop. comme la fraction* AB *ſera á la fraction* CD, *ainſi*

ainſi E à F. *Mais par le Scholie de la* 19. *prop.* 7. *le nombre* E *eſt plus grand que le nombre* F : *donc auſſi la fraction* AB *ſera plus grande que la fraction* CD. *Ce qu'il falloit prouver.*

E 14	F 9
A 2 / B 1	C 3 / D 7

Finablement, que la fraction AB *ſoit plus grande que la fraction* CD : *je dis que la raiſon de* A *à* B *eſt plus grande que celle de* C *à* D. *Car comme deſſus la fraction* AB *ſera à la fraction* CD, *comme* E *à* F. *Mais par l'hypotheſe la fraction* AB *eſt plus grande que la fraction* CD : *donc auſſi* E *ſera plus grand que* F. *Et puis que* E *eſt le produit de* A *en* D, *&* F *celuy de* B *en* C, *par le Scholie de la* 19. *prop.* 7. *il y aura plus grande raiſon de* A *à* B, *que de* C *à* D. *Ce qu'il falloit prouver.*

8. Les fractions dont les numerateurs ſont en même raiſon que les dénominateurs, ſont égales entr'elles. Et des fractions égales, les numerateurs ont même raiſon entr'eux, que les dénominateurs. Mais des fractions inégales, celle dont le numerateur a plus grande raiſon au numerateur, que le dénominateur au dénominateur, eſt la plus grande; & de la plus grande, le numerateur a plus grande raiſon au numerateur, que le dénominateur au dénominateur.

Soient deux fractions AB, CD, *&qu'il y ait même raiſon du numerateur A au numerateur C, que du dénominateur* B *au dénominateur* D : *je dis qu'icelles fractions* AB, CD, *ſont égales. Car en raiſon permutée* A *ſera à* B, *comme* C *à* D; *& partant par la propoſition precedente les fractions ſont égales. Ce qu'il falloit prouver.*

A 2	C 4
B 3	D 6

Mais ſoient les fractions AB, CD, *égales : je dis que comme* A *eſt à* C, *ainſi* B *eſt à* D. *Car par la prop. prec. comme* A *ſera à* B, *ainſi* C *ſera à* D; *& en permutant, comme* A *ſera à* C, *ainſi* B *ſera à* D. *Ce qui étoit à prouver.*

A 5	C 2
B 6	D 3

Maintenant, qu'il y ait plus grande raiſon de A *à* C, *que de* B *à* D : *je dis que la fraction* AB

eſt plus grande que la fraction CD. *Car en permutant il y aura plus grande raiſon de* A *á* B, *que de* C *á* D; *& par la prec. prop. la fraction* AB, *ſera plus grande que la fraction* CD : *Ce qu'il falloit prouver.*

En dernier lieu, ſoit la fraction AB *plus grande que la fraction* CD : *Je dis qu'il y a plus grande raiſon de* A *á* C *que de* B *á* D. *Car par la prec. prop. il y aura plus grande raiſon de* A *á* B, *que de* C *á* D; *& partant en permutant, la raiſon de* A *á* C *ſera plus grande que de* B *á* D: *Ce qu'il falloit prouver.*

9. Reduire les fractions de diverſes dénominations à autant d'autres fractions de même dénomination, qui leur ſoient égales, chacune à la ſienne.

Soient premierement les deux fractions AB, CD, *ayans divers dénominateurs* B, D : *& il faut les reduire á deux autres fractions qui leur ſoient égales, & d'une même dénomination. Soit fait* E *de* A *en* D; *&* F *de* B *en* C; *mais* G, *de* B *en* D : *Je dis que les fractions* EG, FG, *qui ont un même dénominateur* G, *ſont égales aux fractions* AB, CD, *chacune á la ſienne, c'eſt-á-dire que* EG *eſt égale á* AE, *&* FG *á* CD. *Car d'autant que A & B multipliant* D, *ont fait* E *&* G : *par la* 18. *prop.* 7. *comme A á B, ainſi* E *á* G : *& par la* 7. *prop. les fractions* EG, AB *ſont égales. Par même raiſon on prouvera que la fraction* FG *eſt égale á la fraction* CD.

E8	F9
A2	C3
B3	D4
G12	

Maintenant, ſoient trois fractions de diverſes dénominations AB, CD, EF, leſquelles il faut reduire á trois autres d'une même dénomination, qui leur ſoient égales, chacune á la ſienne. Tout ainſi que deſſus ſoit fait G de A en D, & H de B en C; mais I de B en D : puis aprés ſoit fait K de G en F; L de H en F; M de I en E; & N de I en F. Je dis que les trois fractions KN, LN, & MN, qui ont un même dénominateur N, ſont égales aux trois fractions AB, CD, EF, chacune á la ſienne.

K12	L16	
G3	H4	M18
A1	C2	E3
B2	D3	F4
16	N24	

Car premierement, il appert par ce qui a été démontré cy-deſſus, que G I eſt égale á AB, & H I á C D : Mais puis que F multipliant G, H I, a produit K, L, N, par le Scholie de la 18. prop. 7. iceux produits ſont entr'eux en même proportion, que G, H, I. Parquoy K N ſera auſſi égale á A B, & L N á C D. Semblablement, pource que I multipliant E & F, fait M & N, comme E eſt á F, ainſi M á N, & par la 7. prop. la fraction MN ſera égale á la fraction EF. Par ainſi nous avons trouvé les trois fractions K N, L N & M N, qui ont un meſme dénominateur N, & ſont égales aux trois propoſées A B, C D, E F, chacune á la ſienne. Ce qu'il falloit faire.

Que s'il y avoit quatre fractions, il faudroit en reduire premierement trois comme deſſus, puis multiplier chaque numerateur d'icelles par le dénominateur de la quatriéme fraction, & leur dénominateur commun tant par le numerateur que dénominateur d'icelle quatriéme fraction : & ainſi on auroit quatre fractions d'une méme dénomination égales aux propoſées. Bref, il appert aſſez que quelque nombre qu'il y ait de fractions de diverſes dénominations á reduire á une méme dénomination, que multipliant le numerateur de chacune d'icelles fractions par les dénominateurs de toutes les autres, viendra le numerateur de chacune, & puis multipliant tous les dénominateurs entr'eux, ſera procreé le dénominateur commun : & ce en quelconque ordre & façon qu'on faſſe leſdites multiplications, puis que par le 2. Theor. du Scholie de la 19. prop. 7. lors que trois ou davantage de nombres ſe multiplient entr'eux, le produit eſt toûjours un méme en quelque façon, & ordre qu'on les multiplie.

10. Reduire quelque entier que ce ſoit à une fraction dont le dénominateur eſt donné.

Premierement l'entier ſoit l'unité A, qu'il faut reduire à une fraction dont le dénominateur eſt B. Soit pris le numerateur C égal au dénominateur B : ſe dis que la fraction CB eſt égale à l'unité A ; Car par la 2. prop. comme C eſt à B, ainſi la fraction CB eſt à l'entier A. Mais C eſt égal à B; donc auſſi la fraction CB eſt égale à l'entier A, c'eſt à dire à l'unité.

	C 4
A 1	B 4

Maintenant que l'entier ſoit le nombre A, lequel il faut réduire à la fraction dont le dénominateur eſt B. De A en B ſoit fait le numerateur C : ſe dis que la fraction CB eſt égale au nombre entier A. Soit poſée l'unité D au deſſous de A, afin que la fraction AD ſoit égale à autant d'unitez qu'il y en a au nombre A. Or d'autant que de la multiplication de A en B eſt fait C, par la 15. def. 7. le nombre B ſera auſſi autant de fois en C, qu'il y a d'unitez en A. Donc comme A ſera à D, ainſi C ſera à B. Parquoy des fractions AD, CB les numerateurs A & C, ont une même raiſon aux denominateurs D & B : partant elles ſeront égales entr'elles par la 7. prop. Mais la fraction AD eſt égale à l'entier A, à cauſe que le dénominateur D eſt l'unité : Donc auſſi la fraction CB ſera égale au même entier A. Nous avons donc fait ce qui étoit requis.

A 5 C 35
D 1 B 7

11. Doubler & medier une fraction donnée.

Premierement qu'il faille doubler la fraction AB. Soit doublé le numerateur A, afin que ſoit fait le numerateur C demeurant le même dénominateur B : Ou bien lors que le dénominateur B eſt pair on ſoit pris la moitié, afin d'avoir le dénominateur D, demeurant le même numerateur A. ſe dis que chaque fraction CB, AD, eſt double de la fraction AB. Car puis que les fractions AB, CB, ont un même dénominateur B, par la 3. prop. comme le numerateur C ſera au numerateur A, ainſi la fraction CB ſera à la fraction AB. Mais par la conſtruction C eſt double de A : donc auſſi la fraction CB ſera double de la fraction AB.

A 5 C 10 A 5
B 12 B 12 D 6

Derechef, pource que les fractions AB, AD, ont un même numerateur A, par la 6. prop. comme le dénominateur B ſera au dénominateur D, ainſi la fraction AD ſera à la fraction AB. Mais par la conſtruction B eſt double d'iceluy D : donc auſſi la fraction AD ſera double de la fraction AB.

Maintenant qu'il faille prendre la moitié de la fraction AB. Soit doublé le dénominateur B, afin qu'il en vienne le dénominateur C, demeurant le même numerateur A : Ou bien quant le numerateur A eſt pair, en ſoit pris la moitié, qui ſoit D, avec le même dénominateur B. ſe dis que chaque fraction

AC, DB eſt moitié de la fraction AB. Car puis que les fractions AB, AC ont un même numerateur par la 6. prop. comme B ſera à C, ainſi la fraction AC ſera à la fraction AB. Mais par la conſtruction B eſt la moitié de C: Donc auſſi la fraction AC ſera moitié de la fraction AB.

A8	A8	D4
B9	C18	B9

Derechef, puis que les fractions AB, DB, ont un même dénominateur, par la 3. prop. comme D ſera à A, ainſi la fraction DB ſera à la fraction AB. Vû donc que par la conſtruction D eſt moitié de A, auſſi la fraction DB ſera moitié de la fraction AB. Nous avons donc doublé, & pris la moitié de la fraction donnée AB. Ce qu'il falloit faire.

En la même maniere une fraction donnée ſera triplée, quadruplée, &c. ſi on triple, quadruple, &c. le numerateur demeurant le même dénominateur: Ou bien ſi on prend (quand il ſe peut faire) le tiers, le quart, &c. du dénominateur, demeurant le même numerateur. Pareillement on aura le tiers, le quart, &c. D'une fraction donnée, ſi on triple, quadruple, &c. le dénominateur, demeurant le même numerateur: Ou bien ſi on prend (lors qu'il ſe peut faire) le tiers, le quart, &c. du numerateur, le même dénominateur demeurant: Ce qu'on démonſtrera en la même maniere que deſſus.

12. La fraction de fraction eſt égale à la fraction ſimple, de laquelle le numerateur eſt procreé de la multiplication des numerateurs entr'eux, & le dénominateur eſt produit des dénominateurs auſſi multipliés entr'eux.

Soit premierement AB une fraction de la fraction CD, la valeur de laquelle au reſpect de l'unité, ou du nombre entier E, ſoit exprimée par F; mais de A en C ſoit fait G, & de B en D ſoit produit H: ſe dis que la fraction de fraction donnée eſt égale à la ſimple fraction GH, au reſpect de l'entier E. Car ſoit encore fait I de B en C; & par la 2. prop. comme A eſt à B, ainſi la fraction AB eſt à ſon entier, c'eſt à ſçavoir à la fraction CD, de laquelle l'entier eſt E. Mais par la 18. prop. 7. comme A eſt à B ainſi G à I, pource que A, B, multiplians C, produiſent iceux G, I: donc auſſi comme la fraction AB ſera à la fraction CD, ainſi ſera G à I. Derechef, pource que par la 2. prop. comme C eſt à D, ainſi la fraction CD

est à son entier E, & que par la 17. prop. 7. comme C à D, ainsi I à H : aussi la fraction CD sera à son entier E, comme I à H. Vû donc que comme la fraction AB est à la fraction CD, ainsi G est à I ; & comme la fraction CD est à son entier E, ainsi est I à H ; en raison égale, comme AB fraction de la fraction CD est à l'entier E, ainsi G est à H : Mais nous avons posé qu'à icelle fraction de fraction soit esgale la simple fraction F : donc aussi la fraction F sera à l'entier E, comme G à H. Mais par la 2. prop. comme G est à H, ainsi la fraction GH est au même entier E : Donc les fractions simples F & GH seront égales ; & partant puis que la fraction F est égale à la fraction de fraction donnée, aussi la fraction GH sera esgale à la fraction AB au respect de la fraction CD, duquel l'entier est E. Ce qu'il falloit prouver.

G6	I9		
A2	C3	E1	F2/5
B3	D5	E20	
H15			

Soit maintenant AB fraction de CD, qui est aussi fraction de la fraction EF ; & soit fait G de A en C ; & H de B en D : Item I de G en E ; & K de H en F : Je dis que la fraction IK est égale à la fraction de fraction donnée. Ce qui est manifeste, veu que par la démonstration prec. la fract. GH est esgale à AB, fraction de la fraction CD ; tellement qu'icelle GH est fraction de la fraction EF, à laquelle est aussi esgale la fraction IK, par la même démonstration.

G10	I30	
A5	C2	E3
B6	D3	F4
H18		

Que s'il y avoit davantage de fractions, c'est à dire que EF fust encore fraction d'une autre fraction, le produit de I, K, par cette autre fraction, donneroit pareillement la fraction simple esgale à la fraction de fraction donnée ; & ainsi continuellement s'il y avoit davantage de fractions.

Il appert donc qu'estant donnée une fraction de tant de fractions qu'on voudra on la reduira en une simple fraction, multipliant tous les numerateurs entr'eux, & puis aussi tous les denominateurs entr'eux.

13. Reduire une fraction donnée à minimes termes.

Soit une fraction AB, qu'il faut reduire aux plus petits termes d'icelle. Or les nombres A, B, ſeront premiers entr'eux, ou non ; s'ils ſont premiers, la fraction AB ne pourra être reduite à plus petite dénomination. Car ſoit reduite, s'il eſt poſſible, à moindres termes C, D, tellement que la fraction CD ſoit égale à la fraction AB. D'autant que par la 7. prop. comme A eſt á B, ainſi C á D, & que les nombres C, D, ſont moindres que les nombres A, B; iceux A, B, ne ſeront les moindres termes de cette raiſon : Mais par la 23. prop. 7. ils ſont auſſi les plus petits, veu qu'ils ſont premiers entr'eux : Ce qui eſt abſurde.

A 7 C.
B 8 D.

Maintenant que A, B, ne ſoient premiers entr'eux : & par la 2. prop. 7. la plus grande meſure d'iceux ſoit C, qui meſure A par D ; & B par E : Ie dis que la fraction DE eſt égale á la fraction AB, & conſtituée aux plus petits termes qu'elle puiſſe eſtre. Car puis que C meſure A & B par D & E ; par la 7. com. ſent. 7. Iceux A, B, ſeront produits de C en D, E, & par la 19. prop. 7. comme A ſera á B, ainſi D á E, & partant par la 7. prop. les fractions AB, DE, ſeront eſgales. En apres, pource que C, plus grande meſure des nombres A, B, les meſure par D, E; par le corol. de la 35. prop. 7. iceux D, E, ſeront les plus petits nombres de tous ceux qui ont même raiſon que A á B. Nous avons donc reduit la fraction donnée AB en ſa plus petite denomination DE : Ce qu'il falloit faire.

A 6 D 2
B 9 E 3
C 3

14. Eſtant donnée une fraction, la reduire (ſi faire ſe peut.) à une autre égale de dénomination donnée.

Soit donnée la fraction AB, qu'il faut reduire á une autre eſgale, de laquelle le dénominateur ſoit C. De A en C, ſoit fait D, lequel B meſure par E : Ie dis que la fraction EC, qui a le denominateur donné C eſt eſgale á la fraction donnee AB. Car puis que B meſure D par E, par le 9. ax. 7. D ſera fait de B en E : Mais il a auſſi eſté fait de A en C. Donc par la 19. propoſition 7. comme A ſera á B, ainſi E ſera á C ; & par la 7. propoſition les fractions AB, EC ſeront eſgales.

A 2 E 6
B 3 C 9
D 18

Que ſi B ne meſure D procreé de A en C, la fraction donnée ne ſe pourra reduire à la dénomination donnée C. Car ſoit reduitte, s'il eſt poſſible, à la fraction EC. Donc puiſque les fractions AB, EC ſont égales, comme A ſera à B, ainſi E ſera à C par la 7. prop. & partant par la 19. prop. 7. le nombre produit de B en E ſera égal à celuy fait de A en C, c'eſt à ſçavoir D. Donc par le 7. ax. 7. B meſurera D par E : Ce qui eſt abſurde, puis qu'on a poſé que B ne meſure D.

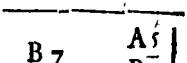
A 2 E ·
B 5 C 7
D 14

Or la reduction de fraction, qui en l'Arithmetique pratique, eſt vulgairement appellée Evaluation, *deſpend de cette prop. veu qu'evaluer une fraction n'eſt autre choſe, que trouver une fraction égale à la donnée, qui ait pour dénominateur le nombre & valeur de l'entier propoſé. Comme par exemple, quand on veut évaluer les $\frac{2}{5}$ d'une livre, ce n'eſt autre choſe que trouver une autre fraction égale à $\frac{2}{5}$, qui ait pour dénominateur le nombre 20, qui eſt la valeur de la livre : & ſuivant ce qui eſt icy démontré, ſi ayant multiplié ledit nombre 20 par 2, numerateur de la fraction donnée, on diviſe le produit 40 par le dénominateur 5, viendra 8 pour le numerateur de ladite fraction cherchée, c'eſt à dire, que la fraction $\frac{8}{20}$ ſera égale à la donnée $\frac{2}{5}$; au lieu de laquelle fraction $\frac{8}{20}$, on peut auſſi dire 8 ſols, puis que l'entier auquel ſe reſeroit la fraction donnée vaut 20 ſols.*

A 2 E 8
B 5 C 20
D 40

15. Quand un nombre eſt diviſé par un autre plus grand, le quotient eſt une fraction de laquelle le nombre à diviſer eſt numerateur, & le diviſeur dénominateur.

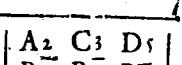
Soit le nombre A, qu'il faut diviſer par un plus grand nombre B : je dis que le quotient eſt la fraction AB, de laquelle le nombre à diviſer A, eſt numerateur, & le diviſeur B dénominateur.



Car d'autant que par la 7. prop. comme A eſt à B, ainſi la fraction AB eſt à l'entier, c'eſt-à-dire à l'unité par la def. de la diviſion (La diviſion d'un nombre par un nombre eſt l'invention d'un nombre qui ait même raiſon à l'unité que le nombre dividande au diviſeur) la fraction AB ſera quotient du nombre A diviſé par le nombre B. Ce qu'il falloit prouver.

16. Adjoûter pluſieurs fractions en une ſomme.

Qu'il faille premierement adjoûter enſemble deux fractions AB, CB d'une même dénomination. Soient adjoûtez enſemble les numerateurs A, C, la ſomme deſquels ſoit D, au deſſous de laquelle ſoit poſé le même dénominateur B : je dis que la fraction DB, eſt la ſomme de l'addition des fractions AB, CB. Car d'autant que les fractions ont un même dénominateur, par la 3. prop. comme A ſera à C, ainſi la fraction AB ſera à la fraction CB ; & en compoſant, comme A, C,



enſemble à C, ainſi les fractions AB, CB enſemble à la fraction CB. Mais par la même 3. prop. comme C à D, ainſi la fraction CB à la fraction DB. Donc en raiſon égale, comme AC, enſemble à D, ainſi les fractions AB, CB enſemble à la fraction DB. Vû donc que par la conſtruction A, C, enſemble ſont égales à D, auſſi les fractions AB, CB enſemble, ſeront égales à la fraction DB.

Soient maintenant trois fractions de diverſes dénominations AB, CD, EF, leſquelles il faut adjoûter enſemble. Les fractions propoſées ſoient reduites à autant d'autres fractions de même dénomination GK, HK, IK, par la 9. prop. puis ſoient adjoûtez enſemble les numerateurs G, H, I, dont la ſomme ſoit L, à laquelle ſoit ſuppoſé le dénominateur commun K, & la fraction LK, ſera la ſomme des trois fractions propoſées. Car d'autant que par la 3. prop. les numerateurs G, H, I, ſont en même proportion que les fractions GK, HK, IK, par le 5. Theor. du Scholie de la 22. prop. 7. G, H, I enſemble ſeront à I, comme les trois fractions AB, CD, EF enſemble ſeront à la fraction EF. Mais par la 3. prop. comme I eſt à L, ainſi auſſi la fraction EF eſt à la fraction LK. Donc en raiſon égale, comme les trois nombres G, H, I enſemble ſeront à L, ainſi les trois

G 12	H 16	I 18	
A 1 / B 2	C 2 / D 3	E 3 / F 4	L 46 / K 24
	K 24		

fractions AB, CD, EF enſemble ſeront à LK. Mais par la conſtruction le nombre L eſt égal aux trois G, H, I : Donc auſſi la fraction LK ſera égale aux trois propoſées AB, CD, EF. Nous avons donc fait ce qui étoit requis.

Or ayant reduit les fractions propoſées à une même dénomination, & adjoûté enſemble les numerateurs trouvez, puis à la ſomme L, ſuppoſé le dénominateur commun K ; on prouvera encore que la fraction LK eſt égale aux propoſées en cette ſorte. D'autant que par la 5. prop. comme l'entier eſt à la ſomme des fractions AB, CD, EF, ainſi le dénominateur commun K eſt à la ſomme des produits G, H, I, c'eſt-à-dire L ; en changeant, comme la ſomme des fractions AB, CD, EF, ſera à l'entier, ainſi L ſera à K. Mais par la 2. prop. comme L eſt à K, ainſi auſſi la fraction LK eſt au même entier. Donc comme la ſomme des fractions AB, CD, EF, eſt à l'entier, ainſi la fraction LK eſt au même entier ; & partant la ſomme des fractions AB, CD, EF, ſera égale à la fraction Lk. Ce qui étoit propoſé.

Que ſi les fractions propoſées à adjoûter ne ſe referoient à l'unité, ains à quelque nombre entier, la ſomme d'icelles ſe rapporteroit au même nombre. Par exemple s'il falloit adjoûter $\frac{2}{3}$ du nombre 60 avec les $\frac{2}{5}$ du même nombre, la ſomme d'icelles fractions ſeroit $\frac{19}{15}$, qui ſe refereroient auſſi au même nombre 60 ; tellement que ce ſeroit 76 : car les $\frac{2}{3}$ de 60 ſont 40, & les $\frac{3}{5}$ ſont 36, leſquels deux nombres adjoûtez enſemble, font le ſuſdit nombre 76.

27. Oſter une petite fraction d'une plus grande.

De la fraction AB, qu'il en faille ôter une moindre fraction CB, laquelle eſt de même dénomination. Soit ôté le numerateur C du numerateur A, & au deſſous du reſte D, ſoit poſé le même dénominateur B : Je dis que la fraction DB eſt ce qui reſte aprés avoir ſouſtrait la fraction CB de la fraction AB. Car puiſque C ôté de A, reſte D ; A eſt compoſé de C & D : donc la fraction AB, de laquelle le numerateur A eſt l'aggregé des numerateurs C, D, eſt la ſomme des deux fractions CB, DB, comme il a été démontré en la prec. prop. Parquoy ayant ôté la fraction CB de la fraction AB, reſtera la fraction DB.

A 3	C 1	D 2
B 4	B 4	B 4

Mais ſi de AB, il faut ôter une moindre fraction CD, qui a un autre dénominateur que AB : par la 9. prop. icelles fractions AB, CD, ſoient reduittes à deux autres d'une même dénomination EG, FG : puis ſoit ôté le numerateur F du numerateur E, & reſte H, au deſſous duquel ſoit apposé le dénominateur commun G : Je dis qu'aprés avoir ôté la fraction CD de la plus grande fraction AB, reſte la fraction HG, ainſi qu'il appert par la démonſtration cy-deſſus. Ce qu'on peut encore démontrer ainſi, d'autant que D multipliant A, B fait E, G, par la 17. prop. 7. comme A ſera à B, ainſi E ſera à G. Mais par la 2. prop. comme A eſt à B, ainſi la fraction AB eſt à l'entier.

Donc auſſi comme E à G, ainſi la fraction AB eſt à l'entier. Derechef, pource que B multipliant C, D, fait F, G, comme C ſera D; ainſi F à G. Mais auſſi comme C à D, ainſi la fraction CD eſt à l'entier. Donc comme F à G, ainſi la fraction CD eſt à l'entier. Vû donc que comme F premiere eſt à G deuxiéme, ainſi la fraction CD troiſiéme eſt à l'entier quatriéme, & que par la 2. prop. comme H cinquiéme eſt au même G deuxiéme, ainſi la fraction HG ſixiéme eſt au même entier quatriéme par le 6. Theor. du Schol. de la 22. prop. 7. comme F, H, premiere & cinquiéme enſemble ſera à G deuxiéme, ainſi les fractions CD, HG, troiſiéme & ſixiéme enſemble, ſera à l'entier quatriéme. Mais comme F, H, enſemble ſont à G, ainſi E égal à iceux F, H (Car F ôté de E reſte H) eſt au même nombre G. Donc auſſi comme E ſera à G, ainſi les fractions CD, HG enſemble ſeront à l'entier. Mais il a été démontré que comme E à G, ainſi la fraction AB à l'entier. Donc auſſi comme la fraction AB ſera à l'entier, ainſi les fractions CD, HG enſemble ſeront au même entier: Et partant les fractions CD, HG enſemble ſeront égales à la fraction AB. Parquoy ayant ôté la fraction CD de la fraction AB, le reſte ſera la fraction HG. Ce qu'il falloit faire.

E 15	F 8	
A 3	C 2	H 7
B 4	D 5	G 20
	G 20	

Or ſi les fractions propoſées ne ſe referoient à

l'unité, ains à quelque nombre entier, le reſte ſe refereroit auſſi au même nombre. Par exemple, s'il falloit ſouſtraire $\frac{2}{5}$ du nombre 40, des $\frac{3}{4}$ du même nombre, le reſte $\frac{7}{20}$ ſe refereroit au même nombre 40; & partant ce ſeroit 14 : car par la 15. prop. les $\frac{2}{5}$ de 40, ſont 16, & les $\frac{3}{4}$ ſont 30.

18. Multiplier une fraction par une fraction.

Soit une fraction AB, qu'il faut multiplier par la fraction CD : de la multiplication des numerateurs A, C, entr'eux ſoit fait E, au deſſous duquel ſoit poſé F produit des dénominateurs B, D, multipliez entr'eux : Je dis que la fraction EF eſt le produit des fractions AB, CD, multipliées entr'elles. Car

H45	G30	
A2	C3	E6
B3	D5	F15

ſoit fait G de E en D; & H de C en F : Et par la 4. prop. comme la fraction EF ſera à la fraction CD, ainſi G à H. Mais pource que C multipliant A, F, fait E, H, par la 17. prop. 7. comme A ſera à F, ainſi E à H; & en permutant, comme A ſera à E, ainſi F ſera à H. Derechef, pource que D multipliant E, B fait G, F, par la 17. prop. 7. comme E ſera à B ainſi G à F. Parquoy les trois nombres A, E, B ſont proportionnels aux trois G, F, H en proportion troublée : donc en raiſon égale, comme A ſera à B, ainſi G à H. Mais nous avons demontré que comme G eſt à H, ainſi la fraction EF eſt à la fraction CD; & par la 2. prop. comme A eſt à B, ainſi la fraction AB.

eſt à l'entier, c'eſt-à-dire á 1. Donc auſſi comme la fraction EF eſt á la fraction CD ; ainſi la fraction AB eſt á 1. Et par la def. de la multiplication (La multiplication d'un nombre en un nombre eſt l'invention d'un nombre qui ait même raiſon á l'un des multiplians que l'autre à l'unité) la fraction EF eſt produite de la multiplication de la fraction AB en la fraction CD: parquoy nous avons fait ce qui eſtoit requis.

Or quand on multiplie des fractions, qui ne ſe rapportent pas à l'unité, ains à quelque nombre entier donné ; il ne faut pas referer le nombre produit de la multiplication d'icelles fractions, au nombre entier propoſé, ainſi qu'en l'addition et ſouſtraction ; mais il le faut comparer au quarré d'iceluy nombre donné : Car vû que la comparaiſon ſe doit faire entre choſes ſemblables, & que de la multiplication de deux nombres eſt produit un nombre plan : il faudra referer le nombre produit de la multiplication avec le plan du nombre entier propoſé, c'eſt-á-dire avec ſon quarré, ſi toutes les deux fractions ſe referent á un même nombre entier, pource qu'iceluy nombre (ſuivant ce que nous avons dit á la 14. prop.) leur eſt comme dénominateur, & par conſequent il le faut multiplier par ſoy-même afin d'avoir le dénominateur du produit deſdites fractions. Mais ſi les fractions ſe referoient à divers nombres entiers, il faudroit referer le produit de leur multiplication au nombre plan fait des nombres entiers propoſez. Ainſi lors qu'on multiplie les $\frac{2}{5}$ d'une livre, c'eſt-à-dire les $\frac{2}{5}$ de 20 ſols, par $\frac{1}{2}$ du même nombre 20, le produit eſt cette fraction $\frac{2}{10}$, laquelle il ne faut pas rapporter au nombre en-

tier proposé 20, mais à son quarré 400; tellement que ce produit $\frac{2}{10}$ est 80, & il ne seroit que 4, si on le referoit seulement au nombre proposé 20. Ce qui est apparent, car par la 14. prop. les $\frac{2}{5}$ du nombre 20. sont 8 & $\frac{1}{2}$ du même nombre 20, est 10; & de 8 en 10, est fait 80, qui est $\frac{2}{10}$ du nombre 400, quarré du nõbre 20, entier proposé. Nous dirons donc que $\frac{2}{5}$ d'une livre multipliez par $\frac{1}{2}$ livre, ne produisent pas $\frac{2}{10}$ d'une livre, qui sont seulement 4 sols, mais produisent $\frac{2}{10}$ de 400, qui sont 80 s. ou 4 livres. Mais lors qu'on multiplie les $\frac{2}{5}$ du nombre entier 20, par les $\frac{3}{4}$ du nombre entier 24, le produit est $\frac{6}{20}$, ou $\frac{3}{10}$ du nombre 480, c'est-à-dire 144 : Car par la 14 prop. les $\frac{2}{5}$ du nombre entier 20 sont 8, ou $\frac{8}{20}$, & les $\frac{3}{4}$ de 24 sont 18, ou $\frac{18}{24}$, qui multipliez comme dit est cy-dessus, produisent 144, ou la fraction $\frac{144}{480}$: tellement que les $\frac{6}{20}$ trouvez ne se doivent referer à l'un ny à l'autre entier proposé 20 & 24, ains au nombre plan 480, produit d'iceux entiers.

19. Diviser une fraction par une fraction.

Soit la fraction AB, qu'il faut diviser par la fraction CD : & premierement que les nombres de cette-cy C, D, mesurent les nombres de celle-là AB, par E, F; tellement que A étant divisé par C le quotient soit E, & ayant divisé B par D, le quotient soit F : Je dis que la fraction EF, est le quotient de la fraction AB divisée par la fraction CD. Car d'autant que C mesure A par E.

A 5	C 5	E 1
B 12	D 6	F 2
A 4	C 2	E 2
B 9	D 9	F 1
A 9	C 3	E 3
B 10	D 5	F 2

par E, & D mesure B par F par le 9. ax. 7. A est procreé de C en E; & B de D en F. Donc par la prec. prop. la fraction AB, est produite de la multiplication de la fraction EF par la fraction CD: & partant par la def. de la multiplication, comme la fraction AB sera à la fraction CD, ainsi la fraction EF sera à l'unité. Parquoy puis que comme AB, fraction divisée, est à CD, fraction divisante, ainsi la fraction EF est à l'unité, par la def. de la division, la fraction EF sera le quotient de la division de la fraction AB par la fraction CD. Ce qui estoit proposé.

Maintenant, que les nombres de la fraction CD, ne mesurent les nombres de la fraction AB: Par la 9. prop. les fractions proposées AB, CD, soient reduites à deux autres égales de même dénomination EG, FG; puis des deux numerateurs E & F, soit fait à part la fraction EF. Je dis qu'icelle fraction EF est le quotient de la fraction AB divisée par la fraction CD. Car par la 3. prop. la fraction EG est à la fraction FG, comme le numerateur E est au numerateur F; & par la 2. prop. comme E est à F, ainsi la fraction EF est à son entier,

E12 F10	E8 F9
A4 C2 E12 / B5 D3 F10	A2 C3 E8 / B3 D4 F9
G15	G12

c'est-à-dire à l'unité. Donc aussi comme la fraction EF est à l'unité, ainsi la fraction EG est à la fraction FG, c'est-à-dire la fraction AB à la fraction

CD, puis qu'elles leur ſont égales par la conſtruction ; & partant par la def. de la diviſion, la fraction EF ſera le quotient de la fraction AB diviſée par la fraction CD. Ce qui étoit propoſé.

Or il appert aſſez que cette démonſtration a lieu en toutes fractions, ſoit que les nombres de la fraction diviſante meſurent ou non les nombres de la fraction à diviſer ; & auſſi que le dénominateur commun G n'entre point au quotient de la diviſion, ains ſeulement les deux numerateurs E, F ; c'eſt pourquoy en la pratique d'Arithmet. il ſuffit de multiplier le numerateur de la fraction à diviſer par le dénominateur de la fraction diviſante, pour avoir le numerateur du quotient ; mais le numerateur de la fraction diviſante par le dénominateur de la fraction à diviſer pour avoir le dénominateur d'iceluy quotient.

Il eſt auſſi manifeſte que ſi les nombres de la fraction diviſante ſont changez de lieu à autre, que la diviſion ſe fera comme la multiplication, c'eſt à ſçavoir en multipliant les numerateurs entr'eux, & puis après les dénominateurs. Comme par exemple, voulant diviſer $\frac{5}{6}$ par $\frac{2}{3}$, nous changerons les nombres de cette fraction $\frac{2}{3}$, & aurons $\frac{3}{2}$, par leſquels nous multiplierons $\frac{5}{6}$, c'eſt à ſçavoir 5 par 3, & 6 par 2, & viendront $\frac{15}{12}$ pour le quotient de $\frac{5}{6}$ diviſez par $\frac{2}{3}$.

Fin du ſeptiéme Element.

ELEMENT HUITIE'ME.

THEOR. 1. PROP. 1.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que les extrémes ſoient premiers entr'eux ; ils ſeront les plus petits de leur raiſon.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C ; & que les extrémes A & C, ſoient premiers entr'eux : Je dis que A, B, C, ſont les plus petits qui ſoient en la même raiſon.

A....4	D—	
B.....6	E—	
C.....9	F—	

Car s'ils ne ſont tels, ſoient D, E, F, plus petits en la même raiſon, s'il eſt poſſible. Par ainſi il y a d'un côté les trois nombres A, B, C, & d'un autre les trois D, E, F, qui prins de deux en deux ſont en même raiſon : Donc en raiſon égale ; D ſera à F, comme A eſt à C par la 14. prop. 7. & parce que A & C ſont premiers entr'eux, ils ſeront les plus petits de leur raiſon, par la 23. prop. 7. & par la 21. prop. 7. ils meſureront également D & F : ce qui eſt impoſſible, pour être plus petits qu'iceux. Donc A, B, C, étoient les plus petits en la même raiſon,

Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBL. 1. PROP. II.

Trouver tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, les plus petits en une raison donnée.

Soient deux nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la même raison : il faut premierement trouver trois nombres continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison donnée de A à B.

Que A multiplié par soy-même produise C ; A par B produise D ; & B par soy produise E : Je dis premierement que C, D, E, sont continuellement proportionnaux en la raison de A à B. Car puis que A multipliant A & B, produit C & D; comme A sera à B, ainsi C sera à D par la 17. prop. 7. Derechef, puis que B multipliant A & B, produit D & E, comme A sera à B, ainsi D sera à E : Parquoy C, D, E, seront continuellement proportionnaux en la raison de A à B. Je dis aussi qu'ils sont les plus petits d'icelle raison donnée. Car d'autant que A & B sont les plus petits de leur raison, par la 24. prop. 7. ils sont premiers entr'eux, & par la 29. prop. 7. C & E seront aussi premiers entr'eux : & par la precedente prop. les trois nombres C, D, E, seront les plus petits en la raison donnée de A à B.

	C4.	F8.
A2.	D6.	G12.
B3.	E9.	H18.
		I27.

Maintenant, qu'il en faille trouver quatre. Que A multipliant les trois trouvez C, D, E, produise F, G, H, & B multipliant le dernier E fasse I : Je dis que les quatre nombres F, G, H, I, sont continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de A à B. Car d'autant que A multipliant C, D, E a fait F, G, H,

iceux ſont en la même raiſon que C, D, E; c'eſt-à-dire en la raiſon de A à B. Derechef, puis que A & B multipliant E ont fait H & I, par la 18. prop. 7. comme A ſera à B, ainſi H ſera à I: & partant F, G, H, I, ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon donnée de A à B. Davantage, puis que A & B étans les plus petits de leur raiſon, ſont premiers entr'eux par la 24. prop. 7. auſſi les extrémes F & I ſeront premiers entr'eux par la 29. prop. 7. attendu que A & B multipliez par eux-mêmes, ont produit C & E, & iceux multipliez par les mêmes A & B, ont produit les extrémes F & I. Donc par la prop. prec. les quatre nombres F, G, H, I, ſeront les plus petits de leur raiſon. Et en cette façon on en trouvera tant que l'on voudra. Nous avons donc trouvé des nombres continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Il reſulte de cecy que trois nombres continuellement proportionnaux, étans les plus petits de leur raiſon, les extrémes ſeront quarrez: s'il y en a quatre, qu'iceux extrémes ſeront Cubes. Car des trois C, D, E, les extrémes C & E, ont été produits de A & B multipliez par eux-mêmes; & des quatre F, G, H, I, les extrémes F & I, ont été produits de la multiplication de A & B par leurs quarrez C & E.

Il reſulte encore que les extrémes des nombres continuellement proportionnaux trouvez ſelon cette prop. ſont premiers entr'eux. Car il a été démontré par les 24. & 29. prop. 7. que les extrémes C, E, & F, I, ſont premiers entr'eux.

THEOR. 2. PROP. III.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont la même raiſon: les extrémes ſeront premiers entr'eux.

Soient quatre nombres A, B, C, D continuellement proportionnaux, les plus petits de tous ceux qui ſont en

la même raiſon : Je dis que les extrémes A & D, ſont premiers entr'eux.

Car ſoient trouvez par la 35. prop. 7. les plus petits qui ſoient en la raiſon de A à B, ſçavoir F & G : ils ſeront premiers entr'eux par la 23. prop. 7. & comme il a été enſeigné en la preced. ſoient trouvez des nõbres continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raiſon de F à G, ſçavoir premierement les trois H, I, K ; puis aprés les quatre L, M, N, O ; & ainſi conſecutivement un plus, juſques à ce qu'on en air autant qu'il y en aura de propoſez : il ne faut donc icy que ces quatre L, M, N, O. Or iceux étans les plus petits en la raiſon de F à G, ils ſeront égaux aux quatre A, B, C, D, qui ſont auſſi les plus petits en la même raiſon. Et comme les extrémes L & O, ſont premiers entr'eux par le córol. de la preced. les extrémes A & D ſeront auſſi premiers entr'eux. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

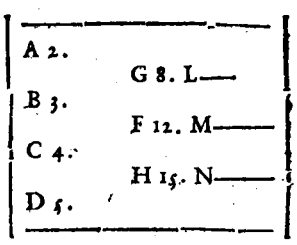
A 8.			L 8.
		H 4.	
B 12.	F 2.		M 12.
		I 6.	
C 18.	G 3.		N 18.
		K 9.	
D 27.			O 27.

PROBL. 2. PROP. IV.

Eſtans données tant de raiſons qu'on voudra en nombres les plus petits d'icelles raiſons ; trouver tant de nombres qu'on voudra les plus petits continuellement proportionnaux ſelon les raiſons données.

Soient données les deux raiſons de A à B, & de C à D, aux plus petits termes d'icelles : il faut trouver trois nombres en continuelle proportion, les plus petits de ceux qui ſont ſelon les raiſons données.

Soit trouvé par la 36. p. 7. le plus petit nombre qui soit mesuré par B, & par C, lequel soit F: en après, soit trouvé G, autant de fois mesuré par A, que F par B: Pareillement H autant de fois mesuré par D que F par C. Je dis que les trois nombres G, F, H sont continuellement proportionnaux, les plus petits qui soient selon les raisons données.



Car d'autant que A mesure autant de fois G, que B mesure F; & par consequent A & B multiplians un même nombre (sçavoir celuy par lequel ils mesurent G & F) ont produit G & F: par la 18. p. 7. G est à F, en mesme raison que A à B. Et par mesme discours F sera à H, comme C à D: Donc G, F, H, sont continuellement proportionnaux, selon les raisons données. Mais ils sont aussi les plus petits, selon icelles raisons données: car s'il n'est ainsi, en soient trouvez de plus petits L, M, N, s'il est possible, & qui répondent aux raisons données, comme les trois G, F, H. Or vû que A & B sont les plus petits en leur raison, par la 21. p. 7. ils mesureront également L & M, iceux estans en la mesme raison, c'est à sçavoir le consequent B, le consequent M: Par mesme discours C & D mesureront également M & N, sçavoir l'antecedant C l'antecedant M. Parquoy B & C mesurans M; par la 37. p. 7. F, qui est le plus petit nombre qu'ils mesurent, mesurera aussi M, sçavoir est, le plus grand, le plus petit: ce qui est impossible. Partant les nombres G, F, H, estoient les plus petits selon les raisons données.

Maintenant soient données trois raisons aux plus petits termes A à B, C à D, & F à G, selon lesquelles il faut trouver quatre nombres tels que requiert la proposition.

Soient trouvez les trois nombres I, H, K, comme dessus: ce fait, ou F mesurera K, ou non. S'il le mesuroit, il faudroit prendre L autant de fois mesuré

par G, que K par F : & par la precedente demonſtration, il eſt évident qu'on auroit ſatisfait. Que ſi F ne meſure K, ſoit trouvé O le plus petit nombre meſuré par F, & par K, par la 36. p. 7. Et que G meſure autant de fois P, que F meſure O. Item que comme K meſure O, ainſi H meſure N, & I meſure M. Je dis que M, N, O, P ſont les quatre nombres continuellement proportionnaux requis.

A 2.		
	I 8.	M 16.
B 3.		
	H 12.	N 24.
C 4.		
	K 15.	O 30.
D 5.		
F 6.	L —	P 35.
G 7.		

Car puiſque I, H, K meſurent également M, N, O, comme dit eſt cy-deſſus, I ſera à H ainſi que M à N, & comme H ſera à K, ainſi N à O. Mais il y a meſme raiſon de I à H que de A à B, & de H à K que de C à D, pource que A & B meſurent également iceux I & H, & C, D, également H & K. Donc comme A à B, ainſi M à N ; & comme C à D, ainſi N à O ; auſſi comme F à G, ainſi O à P, à cauſe que F, G meſurent également O, P. Les quatre nombres M, N, O, P, ſont donc continuellement proportionnaux és raiſons données. Et qu'ils ſoient les plus petits, on le demontrera en la meſme façon qu'on a fait cy-deſſus de trois nombres.

Or en la meſme maniere ſera procedé, ſi 4, ou davantage de raiſons ſont données aux plus petits termes. Parquoy eſtans données tant de raiſons qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 3. PROP. V.

Les nombres plans ſont l'un à l'autre en la raiſon compoſée de leurs coſtez.

Soient deux nombres plans A & B, les coſtez de A, ſoient C & D ; & les coſtez de B, ſoient E & F. Je dis

que le plan A eſt au plan B, en la raiſon compoſée de C à E, & de D à F.

Qu'il ne ſoit ainſi. Que D multiplié par E produiſe G. Donc D multipliant C & E, produira A & G, qui ſeront en meſme raiſon que C à E, par la 17. p. 7. Et par meſme diſcours E multipliant D & F, produira G & B, qui ſeront auſſi en meſme raiſon que D à F. Parquoy les trois nombres A, G, B ſont continuellement proportionnaux és raiſons de C à E, & de D à F, coſtez. Mais par la 5. d. 6. la raiſon de A à B eſt compoſée de A à G, & de G à B. Donc la raiſon du nombre plan A au nombre plan B, ſera compoſée de la raiſon des coſtez C à E, & D à F. Parquoy les nombres plans ſont l'un à l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

	C 3.
A 12.	
	D 4.
G 8.	
	E 2.
B 18.	
	F 9.

THEOR. 4. PROP. VI.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que le premier ne meſure le ſecond, auſſi pas un autre ne meſurera pas un autre.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D, E; & que A premier ne meſure B 2e. Je dis que pas un autre n'en meſurera pas un autre.

Car premierement, comme A ne meſure B, ainſi B ne meſurera C; ny C ne meſurera D; ny D, E, d'autant qu'ils ſont en meſme raiſon: par ainſi aucun d'iceux nombres ne meſure ſon prochain ſuivant. Je dis auſſi qu'en paſſant quelqu'un, les extrémes ne ſe pourront

A 16. B 24. C 36. D 54. E 81. F 4. G 6. H 9.

mesurer, comme A ne pourra mesurer C. Car ayant trouvé trois nombres F, G, H les plus petits en la raison de A à B, ou de A, B, C par la 35. p. 7. en raison égale A sera à C comme F à H, par la 14. p. 7. & puis que par l'hypothese, A ne mesure B, aussi F ne mesurera G; & partant F ne sera pas l'unité, autrement il mesureroit G, vû que l'unité mesure tout nombre. Et d'autant que par la 3. prop. de ce livre F & H sont nombres premiers, & que F n'est pas l'unité; iceluy F ne mesurera pas H : Mais nous avons demontré que comme A est à C, ainsi F est à H. Donc comme F ne mesure H, aussi A ne mesurera C. Par mesme discours on prouvera que B ne mesurera D, ny C ne mesurera E. Que si on prend quatre nombres les plus petits en la raison de A à B, on demontrera en la mesme maniere que A ne mesurera le quatriéme D, ny B un quatriéme E, & ainsi des autres. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 5. PROP. VII.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux, & que le premier mesure le dernier, il mesurera aussi le second.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D; & que le premier A mesure le dernier D. Je dis qu'il mesurera aussi le second B.

| A 3. B 9. C 12. D 24. |

Car par la precedente, si A ne mesuroit B, aussi pas un autre ne mesureroit pas un autre, & par consequent A ne mesureroit pas D, contre l'hypothese. A mesurera donc B. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux, il en tombera autant entre deux autres, estans en la mesme raison.

Soient les nombres A & B, entre lesquels tombent C & D continuellement proportionnaux : & qu'il y ait telle raison de E à F, que de A à B. Je dis qu'entre E & F se trouveront autant de nombres moyens continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

A 3. C 9. D 27. B 81.
G 1. H 3. I 9. K 27.
E 2. L 6. M 18. F 54.

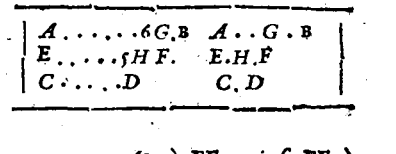
Car ayant trouvé par la 2. prop. 8. les quatre nombres G, H, I, K, continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de A, C, D, B; en raison égale, comme A sera à B, ou E à F (car c'est la même raison) ainsi G à K par la 14. prop. 7. Mais G & K sont premiers entr'eux par la 3. prop. 8. & les plus petits nombres de leur raison par la 23. prop. 7. & par la 21. prop. 7. ils mesureront également E & F. Donc autant de fois que G & K mesureront E & F; qu'autant de fois H & I mesurent d'autres nombres L & M : tellement que les nombres G, H, I, K, mesurent également les nombres E, L, M, F, par la 9. com. sent. G, H, I, K, multiplians le nombre par lequel ils mesurent E, L, M, F, produisent iceux E, L, M, F, lesquels seront entr'eux comme G, H, I, K, ainsi que nous avons démontré à la 18. prop. 7. Mais G, H, I, K, sont continuellement proportionnaux : donc aussi E, L, M, F, seront continuellement prop. & partant puis que la multitude E, L, M, F, est égale à la multitude A, C, D, B, il tombera autant de moyens proportionnaux entre E & F, qu'entre A & B. Parquoy si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver,

SCHOLIE.

De cette démonstration appert non seulement, qu'il tombe autant de moyens prop. entre E & F, qu'entre A & B, mais aussi que la proportion des nombres E, L, M, F, est la même que des nombres A, C, D, B. Car il a été démontré que la proportion de E, L, M, F, est la même que celle des nombres G, H, I, K : Mais iceux sont par la construction en la même proportion que A, C, D, B : donc aussi E,

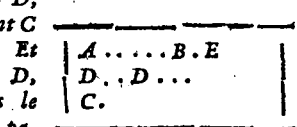
L, M, F, *ſont en même proportion que* A, C, D, B.

Il appert auſſi de ce Theoreme, qu'entre nombres de raiſon double, ou ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente, ne peut tomber un nombre moyen proportionnel. Car puis que la raiſon double, és moindres nombres, eſt trouvée entre le binaire & l'unité; mais la ſuperparticuliere, entre les nombres differens ſeulement de l'unité; & la ſuperbipartiente, entre les nombres, deſquels la difference eſt le binaire: ſi entre deux nombres de raiſon double, ou ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente, tombe un moyen prop. il en tombera pareillement un (par ce Theor.) entre le binaire & l'unité; ou entre les nombres differens de la ſeule unité, ou du binaire; c'eſt à ſçavoir entre les plus petits nombres qui ont la même raiſon que ceux-là; ce qui eſt impoſſible. Car il eſt tout évident qu'entre le binaire & l'unité, ny entre deux nombres differens ſeulement de l'unité, ne peut tomber aucun nombre moyen prop. Et quant aux nombres differens ſeulement du binaire, tombe ſeulement un nombre, qui differe à l'un & l'autre de l'unité: lequel nous démontrerons ne pouvoir être milieu prop. entre iceux. Soient les nombres AB & CD, *differens du binaire, entre leſquels tombe le nõbre* EF *moindre que* AB *de l'unité, mais plus grand que* CD, *auſſi de l'unité. Je dis que* EF *n'eſt moyen prop. entre* AB, CD. *Car ſi on dit que comme* AB *à* EF, *ainſi* EF *à* CD: *étant ôté de* AB, *le nombre* AG *égal à* EF, *afin qu'il reſte l'unité* GB; *& de* EF, *le nombre* EH *égal à* CD, *afin qu'il reſte auſſi l'unité* HF; *pareillement comme* AB *ſera à* EF, *ainſi le retranché* AG *ſera au retranché* EH. *Donc auſſi le reſte* GB *ſera au reſte* HF; *c'eſt-à-dire l'unité à l'unité, comme le tout* AB *au tout* EF, *le plus grand au moindre: Ce qui eſt abſurde; dont* EF *n'eſt pas moyen prop. entre* AB *&* CD.



Parquoy entre les nombres de raiſon triple ne peut tomber un nombre moyen prop. Autrement il en tomberoit auſſi un entre 3 & 1, *les plus petits nombres de la raiſon triple, qui different entr'eux du binaire: Ce qui eſt impoſſible, comme nous venons de démontrer.*

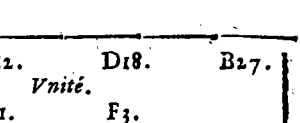
Par même raiſon, ne peut auſſi tomber un moyen prop. entre deux nombres de quintuple raiſon. Car s'il y en tomboit un, il en tomberoit auſſi un (par ce Theor.) entre 5 *&* 1, *les plus petits nombres de la raiſon quintuple : ce qui ne ſe peut faire. Car s'il eſt poſſible qu'entre le quinaire* AB *& l'unité* C, *tombe un moyen prop.* D *binaire, ou ternaire ; tellement que* AB *ſoit à* D, *comme* D *à* C : *en changeant* C *ſera à* D *comme* D *à* AB. *Et pource que l'unité* C *meſure* D, *auſſi* D *meſurera* AB. *Mais le binaire, ou ternaire* D *meſure pareillement le ſenaire* AE : *donc* D *meſurera le tout* AE, *& le retranché* AB ; *& partant par la* 11. *com. ſent. auſſi* D *meſurera le reſte* BE *unité. Ce qui eſt abſurde. La même abſurdité adviendra toûjours, ſi on dit qu'un nombre quartenaire ſoit moyen prop. entre iceluy quinaire* AB, *& l'unité* C. *Il ne tombera donc point de milieu prop. entre* 5 *&* 1. *& par conſequent entre quelconques nombres de raiſon quintuple.*



THEOR. 7. PROP. IX.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, autant de nombres continuellement proportionnaux qui tomberont entre iceux, autant en tombera-il entre chacun d'iceux, & l'unité.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, entre leſquels tombent quelques nombres continuellement proportionnaux C & D. Je dis qu'entre chacun d'iceux A, B, & l'unité, il tombera autant de nombres cõtinuellement proportionnaux, qu'entre A & B.



Car ayant posé l'unité, soient pris E & F, les plus petits nombres qui soient en la raison de A à C, par la 35. prop. 7. puis par la 2. prop. 8. soient trouvez les trois plus petits en la même raison G, H, I: puis les quatre K, L, M, N: & ainsi consequemment jusques à ce que la multitude des pris soit égale à la multitude A, C, D, B. D'autant que les extrémes A, B, sont premiers entr'eux, par la 1. prop. 8. A, C, D, B, seront les plus petits en la raison de E à F: Mais leurs égaux en multitude K, L, M, N, sont aussi les plus petits en la même raison par la construction. Donc K, L, M, N, sont égaux à iceux A, C, D, B, chacun au sien, comme K à A, & N à B. Et pource que (comme il appert par la démonstration de la 2. pr. 8.) E multipliant soy-même a produit G; & multipliant G a fait K, par la 7. com. sent. E mesurera G par E; & G iceluy K par le même E: mais par la 5. com. sent. l'unité mesure iceluy E par E. Donc l'unité mesurera également E; & E iceluy G; & G iceluy K: & partant l'unité sera même partie de E, que E de G, & G de K. Donc par la 20. def. 7. l'unité & les nombres E, G, K, sont continuellement proportionnaux. Par même discours l'unité & les trois nombres F, I, N, seront aussi prouvez continuellément proportionnaux. Et puis que tant la multitude E, G, K, que F, I, N, avec l'unité, est égale à la multitude K, L, M, N, ou A, C, D, B; il s'ensuivra qu'entre l'unité & le nombre K ou A, qui luy est égal; & aussi entre l'unité & le nombre N ou B, tomberont autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre les nombres A & B. Parquoy si deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 8. PROP. X.

Autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'unité & chacun de deux nombres proposez; autant en tombera-t'il entre iceux deux nombres.

Soient deux nombres proposez A & B, & qu'entre

l'unité C, & chacun d'iceux, tombent quelques nombres continuellement proportionnaux, comme D & E, entre C & A : Item F & G, entre C & B. Je dis qu'il en tombera auſſi deux continuellement proportionnaux entre A & B.

A 8. I 12. K 18. B 27.
E 4. H 6. G 9.
D 2. F 3.
C 1.

Car ſi on vient à multiplier, comme en la 2. prop. 8. pour trouver les trois nombres H, I, K, c'eſt à ſçavoir que H ſoit le produit de D multiplié par F ; I, le produit de D par H : & K, le produit de F par H. Puis que comme C à D, ainſi D à E, & E à A ; & que par la 5. com. ſent. C unité meſure D, par les unitez qui ſont en D ; auſſi D meſurera E, par les unitez qui ſont en D ; & E meſurera A, par les mêmes unitez de D ; ainſi il eſt évident que D multiplié par ſoy-même produit E, & E multiplié par D, a produit A. Par même diſcours ſe prouvera que F multiplié par ſoy-même, a produit G, & que G par F a produit B.

Maintenant, puis que D multiplié par ſoy-même, & par F a produit E & H, par la 17. prop. 7. comme D à F, ainſi E à H. Pareillement F multiplié par D, & par ſoy-même, a produit H & G ; auſſi H ſera à G comme D à F : parquoy les trois nombres E, H, G, ſeront continuellement proportionnaux. Davantage D multipliant E & H, produit A & I ; & partant comme E ſera à H, ainſi A ſera à I, par la 17. prop. 7. & puis que D & F multipliant H, produiſent I & K ; I ſera à K, comme D à F. Par la 18. prop. 7. Par même diſcours K ſera à B, comme H à G, étans les produits de H & G multipliez par F. Parquoy A, I, K, B, ſont continuellement proportionnaux ; & partant les deux nombres I & K ſont tombez en continuelle proportion entre A & B, c'eſt à ſçavoir autant qu'il y en a entre chacun d'iceux A & B, & l'unité C. Parquoy autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'unité, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 9. PROP. XI.

Entre deux nombres quarrez tombe un moyen proportionnel : & le quarré eſt au quarré en raiſon doublée du côté au côté.

Soient deux nombres quarrez A & B, deſquels les côtez ſoient C & D. Je dis qu'entre iceux quarrez A & B, tombera un moyen proportionnel : & que le quarré A eſt au quarré B en la raiſon doublée du côté C au côté D.

A 4.	E 6.	B 9.
C 2.	D 3.	

Car le nombre C multiplié par D, produiſe E : Et puis que C eſt le côté de A; iceluy C multiplié par ſoy-même produit A; & par D fait E : donc comme C à D, ainſi A à E par la 17. prop. 7. Derechef, puis que D multipliant C produit E, & multipliant ſoy-même fait le quarré B, par la 17. prop. 7. comme C à D, ainſi E à B. Partant E eſt moyen proportionnel entre A & B.

Pour la ſeconde partie : puis que A, E, B ſont continuellement proportionnaux, A 1. eſt à B 3. en raiſon doublée de A 1. à E 2. par la 10. deff. 5. qui eſt la même raiſon que de C à D, ainſi qu'il a été démontré cy deſſus. Parquoy entre deux nombres quarrez tombe un moyen proportionnel, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 10. PROP. XII.

Entre deux nombres cubes tombent deux moyens proportionnaux : & le cube eſt au cube en raiſon triplée du côté au côté.

Soient deux nombres cubes A & B, deſquels les côtez ſoient C & D. Je dis que entre iceux cubes A & B, tomberont deux moyens proportionnaux : & que la raiſon du cube A au cube B, eſt la raiſon triplée du côté C au côté D.

Qu'il

Qu'il ne ſoit ainſi. Que C ſe multipliant ſoy-même produiſe E ; & D par ſoy produiſe F ; mais C & D l'un par l'autre produiſe G : & iceluy G multiplié par l'un & l'autre C & D, produiſe H & I. Or puis que C multipliant C & D a fait E & G ; comme C ſera à D, ainſi E à G par la 17. prop. 7. Item puis que D multipliant C & D a fait G & F ; auſſi G ſera à F comme C à D : Partant E, G, F, ſont continuellement proportionnaux en la raiſon de C à D. Derechef, pource que C multipliant E fait le cube A, & multipliant G a fait H, par la même prop. A ſera à H, comme E à G, c'eſt-à-dire comme C à D. Item puis que D multipliant G a fait I, & multipliant F eſt produit le cube B ; par la 17. prop. 7. I ſera à B ; comme G à F, c'eſt-à-dire comme C à D. Mais par la 18. prop. 7. H eſt auſſi à I, comme C à D, attendu que C, D, multiplians G, ont fait H & I : donc A, H, I, B ſeront continuellement proportionnaux ſelon la raiſon de C à D. Partant H & I, ſeront deux moyens proportionnaux entre les nombres cubes A & B.

A 27. H 36. I 48. B 64.
E 9. G 12. F 16.
C 3. D 4.

Quant à la ſeconde partie, elle eſt manifeſte, car d'autant que A, H, I, B ſont continuellement proportionnaux, A 1. eſt à B 4e en raiſon triplée de A 1. à H 2e par la 10. def. 5. Mais comme A eſt à H, ainſi C eſt à D. Donc le cube A eſt au cube B en raiſon triplée du côté C au côté D. Parquoy entre deux nombres cubes, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. II. PROP. XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra ſont continuellement proportionnaux, iceux étans multipliez chacun par ſoy, leurs produits ſeront auſſi continuellement proportionnaux : & ſi chacun multiplie encores ſon produit, les

derniers produits ſeront auſſi continuellement proportionnaux : & cela adviendra toûjours environ les extrémes.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C, leſquels multipliez chacun par ſoy-même, produiſent D, E, F; & que les mêmes A, B, C, multiplians chacun ſon produit faſſent G, H, I, & ainſi continuellement. Je dis que D, E, F, & G, H, I, ſont continuellement proportionnaux.

		A 2.	B 4.	C 8.		
	D 4.	N 8.	E 16.	O 32.	F 64.	
G 8.	P 16.	Q 32.	H 64.	R 128.	S 256.	I 512.

Qu'il ne ſoit ainſi, que N ſoit le produit de A multiplié par B : & O celuy de B par C. Pareillement que A multipliant N, E faſſe P & Q : mais B multipliant O, F produiſe R, S. Donc par la 17. prop. 7. A multipliant ſoy-même, & B, les produits D & N ſeront en la même raiſon de A à B : & par même diſcours B multipliant A & ſoy-même, les produits N & E ſeront auſſi en la même raiſon de A à B, & ainſi des autres : Partant D, N, E, O, F, ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon de A à B : par ainſi D, N, E; & E, O, F, ſont continuellement proportionnaux en une même raiſon ; & partant en raiſon égale, comme D ſera à E, ainſi E à F : parquoy D, E, F, ſeront continuellement proportionnaux.

Pareillement d'autant que A multipliant D, N, E a fait G, P, Q; par ce que nous avons demontré à la 18. prop. 7. G, P, Q ſeront entr'eux, comme les proportionnaux D, N, E; c'eſt-à-dire comme A à B. Item pource que A & B multiplians E ont produit Q & H, auſſi par la 18. prop. 7. comme A ſera à B, ainſi Q à H. Donc G, P, Q, H, ſont proportionnaux en la raiſon de A à B. Par meſme diſcours H, R, S, I, ſeront prouvez proportionnaux en la meſme raiſon de A à B : & partant en raiſon égale, comme G ſera à H, ainſi H à I : parquoy G, H, I ſeront continuellement proportionnaux. S'il

y a donc tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 12. PROP. XIV.

Si un nombre quarré mesure un nombre quarré; aussi le costé mesurera le costé : que si le costé mesure le costé, aussi le quarré mesurera le quarré.

Soit le nombre quarré A qui mesure le nombre quarré B ; & d'iceux quarrez les costez soient C & D. Je dis en premier lieu que le costé C mesurera aussi le costé D.

A 4. E 12. B 36.
C 2. D 6.

Car ayant multiplié C par D, il est évident par la demonstration de la 11. prop. 8. que le produit E est moyen proport. entre A & B, en la raison de C à D : mais de ces trois nombres A, E, B, le premier A mesure le dernier B : donc par la 7. prop. 8. il mesurera aussi le second E. Parquoy puis que comme A à E, ainsi C à D : aussi le costé C mesurera le costé D.

Je dis en second lieu, que si le costé C mesure le costé D, aussi le quarré A mesurera le quarré B. Car comme dessus A, E & B seront continuellement proportionnaux en la raison de C à D : Et puisque C mesure D, aussi A mesurera E, & E mesurera B, & par consequent A mesurera aussi B, car qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré, par la 11. com. sent. Parquoy si un nombre quarré mesure un nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si un nombre cube mesure un nombre cube : aussi le costé mesurera le costé : & si le costé mesure le costé ; aussi le cube mesurera le cube.

Soit un nombre cube A, qui mesure un autre nombre cube B, & d'iceux cubes les costez soient C & D. Je dis premierement que le costé C mesurera aussi le costé D.

Car que chaque côté C, D multipliant soy-même fasse E, F, mais se multipliant l'un l'autre fassent G, & multipliant derechef G, produisent H, I. Il est évident par la démonstration de la 12. prop. 8. que tant E, G, F, que A, H, I, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de C à D. Et puis que par l'hypothese A 1. mesure B dernier, il mesurera aussi H 2e, par la 7. prop. 8. Mais A étant à H, comme C à D, aussi le côté C mesurera le côté D.

A 8.	H 24.	I 72.	B 216.
E 4.	G 12.	F 36.	
C 2.	D 6.		

Secondement, que le côté C mesure le côté D: Je dis que le cube A mesurera le cube B. Car comme il a été dit cy-dessus A, H, I, B, seront continuellement proportionnaux en la raison de C à D: Parquoy le côté C mesurant le côté D, aussi le cube A mesurera son prochain moyen proport. H, lequel mesurera l'autre moyen proport. I, & iceluy l'autre cube B; & par consequent le cube A mesurera l'autre cube B par la 11. com. sent. Si donc un nombre cube, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si un nombre quarré ne mesure un nombre quarré, aussi le côté ne mesurera le côté; que si le côté ne mesure le côté, aussi le quarré ne mesurera le quarré.

Soient les nombres quarrez A & B, desquels les côtez sont C & D; mais que le quarré A ne mesure le quarré B: Je dis premierement que le côté C ne mesurera pas le côté D.

Car par la 14. prop. de ce livre, si ledit côté C mesuroit le côté D, aussi le quarré A mesureroit le quarré B, contre l'hypothese.

A 16.	B 81.
C 4.	D 9.

Secondement que le côté C ne mesure pas le côté D: Je dis que le quarré A ne mesurera

pas auſſi le quarré B. Cecy eſt auſſi manifeſte, car ſi le quarré A meſuroit le quarré B, auſſi le côté C meſureroit le côté D par la ſuſdite 14. prop. 8. contre l'hypotheſe. Si donc un nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 15. PROP. XVII.

Si un nombre cube ne meſure un nombre cube, auſſi le côté ne meſurera le côté : que ſi le côté ne meſure le côté, auſſi le cube ne meſurera le cube.

Soient les nombres cubes A & B, dont les côtez ſont C & D ; & que A ne meſure B : Je dis que le côté C ne meſure pas auſſi le côté D : & davantage que ſi le côté C ne meſure pas le côté D, auſſi le cube A ne meſurera pas le cube B.

Cette démonſtration ſe fait par l'impoſſible de la 15. prop. 8. Car par icelle, ſi le côté meſuroit le côté, auſſi le cube meſureroit le cube, ce qui eſt contre l'hypotheſe.

A 8.	B 27.
C 2.	D 3.

Et pour le ſecond : Si le cube meſuroit le cube, auſſi le côté meſureroit le côté, par la ſuſdite 15. prop. 8. ce qui eſt auſſi contre l'hypotheſe. Parquoy ſi un nombre cube ne meſure un nombre cube, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Entre deux nombres plans ſemblables, il y a un moyen proportionnel : & le plan eſt au plan en raiſon doublée des côtez de ſemblable raiſon.

Soient deux nombres plans ſemblables A & B, & leurs côtez ſoient C D, & E, F. Je dis qu'entre iceux plans A & B ſe trouvera un moyen proportionnel ; & que A eſt à B en raiſon doublée de C à E, ou de D à F, côtez de même raiſon.

A 12.	G 18.	B 27.
C 6.	D 2.	E 9. F 3.

Car puis que les plans

A & B ſont ſemblables, par la 21. def. 7. C ſera à D comme E à F ; & ſi A ſera le produit de C par D : Item B le produit de E par F, par la 17. def. 7. Maintenant que D multipliant E produiſe G : par la 17. prop. 7. puis que D multipliant C & E produit A & G : A ſera à G, comme C à E, ou D à F (car puis que comme C à D, ainſi E à F, en permutant, comme C à E, ainſi D à F.) Item E multipliant D & F, produit G & B : partant iceux G & B ſeront l'un à l'autre comme D à F : ainſi A, G, B, ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon de C à E, & partant G ſera un moyen proportionnel entre A & B.

Quant à la ſeconde partie, elle eſt évidente : car puis que A, G, B, ſont continuellement proportionnaux en la raiſon de C à E : par la 10. def. 5. A eſt à B en raiſon doublée de A à G, qui eſt la même raiſon que de C à E, ou de D à F, côtez de ſemblable raiſon. Parquoy entre deux nombres plans ſemblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Entre deux nombres ſolides ſemblables, tombent deux moyens proportionnaux ; & le ſolide eſt au ſolide en raiſon triplée des côtez de ſemblable raiſon.

Soient deux nombres ſolides ſemblables A & B ; & de A les côtez ſoient C, D, E, mais ceux de B ſoient F, G, H.

Je dis qu'entre A & B, on trouvera deux moyens proportionnaux, & que	A 30. M 60. N 120. B 240. I 6. L 12. K 24. C 2. D 3. E 5. F 4. G 6. H 10.

A eſt à B en raiſon triplée de C à F, ou de D à G, ou E à H, côtez de *même* raiſon.

Car I ſoit le produit de C multiplié par D : K le produit de F par G : L le produit de F par D, & finalement M & N, ſoient les produits de L par E & H.

Maintenant puis que par la 21. def. 7. les côtez C, D, E, sont proportionnaux aux côtez F, G, H : en permutant, ils seront aussi proportion. c'est-à-dire que comme C sera à F, ainsi D sera à G, & E à H. Et puis que D multipliant C & F, a produit I & L, par la 17. prop. 7. I sera à L comme C à F, c'est-à-dire comme D à G, ou E à H. Semblablement F multipliant D & G, a produit I & K; parquoy I sera à K comme D à G : & partant I, L, K, sont continuellement proportionnaux en la raison de D à G, ou C à F, ou E à H. Pareillement puis que le solide A, est le produit de la multiplication des trois nombres C, D, E : & I, le produit de C par D : aussi A sera le produit de I par E: Item le solide B étant produit de la multiplication des trois nombres F, G, H : & K le produit de F en G: aussi B sera le produit de K par H. Donc puis que par la 17. prop. 7. E multipliant I & L, produit A & M en la raison de I à L : & semblablement que L multipliant E & H, produit M & N en la raison de E à H, qui est la même que de I à L : aussi H multipliant L & K, les produits N & B seront en la raison de L à K, qui est la même que de I à L. Et partant les quatre nombres A, M, N, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de I à L, c'est-à-dire de C à F : & M, N seront deux moyens proportionnaux entre A & B.

Pour la seconde partie, elle est évidente : car puis que les quatre nombres A, M, N, B, ont été prouvez continuellement proportionnaux en la raison de C à F, par la 10. def. 5. A est à B en raison triplée de A à M : Mais A est à M, comme C à F, ou D à G, ou E à H : donc A sera à B en raison triplée de C à F, ou D à G, ou E à H, côtez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres solides semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si entre deux nombres, tombe un moyen proportionnel : iceux seront nombres plans semblables.

Soient deux nombres A & B, entre lesquels tombe

un moyen proportionnel C. Je dis que A & B ſont nombres plans ſemblables.

Car ayant pris D & E, les plus petits termes en la raiſon de A, C, B : par la 21. prop. 7. iceux D & E meſureront également A & C; qu'ils les meſurent par F : Ils meſureront auſſi également C & B, qui ſont en la même raiſon : qu'ils les meſurent par G. Donc F multipliant D & E, ſera produit A & C par la 9. com. ſent. Item G multipliant les mêmes D & E, ſeront produits C & B. Vû donc que E multipliant F & G a fait C & B ; comme C ſera à B, ainſi F à G par la 17. prop. 7. Mais comme C eſt à B, ainſi étoit D à E. Donc comme D ſera à E, ainſi F ſera à G ; & en permutant comme D ſera à F, ainſi E à G. Et puis que E multipliant D a fait A, iceluy A ſera un plan duquel les côtez ſont D, F. Item pource que G multipliant E a fait B ; B ſera le plan duquel E & G ſont les côtez. Mais ces côtez ont été démontrez proportionnaux, c'eſt-à-dire D être à F, comme E à G. Donc par la 21. def. 7. A & B ſeront plans ſemblables. Parquoy ſi entre deux nombres tombe un moyen proportionnel, &c. Ce qui étoit à prouver.

A 12. C 18. B 27.
D 2. E 3. F 6. G 9.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si entre deux nombres, tombent deux moyens continuellement proportionnaux ; iceux ſeront nombres ſolides ſemblables.

Soient deux nombres A & B, entre leſquels tombent deux moyens continuellement proportionnaux C & D. Je dis que A & B ſont nombres ſolides ſemblables.

Qu'il ne ſoit ainſi. Soient trouvez par la 2. prop. 8. les trois nombres E, F, G, les plus petits en la raiſon de A, C, D, B. Veu donc qu'entre E & G tombe un moyen proportionnel F, par la preced. pro. E & G ſeront plans ſemblables : Soient

A 16. C 24. D 36. B 54.
E 4. F 6. G 9.
H 12. I 12. M 18. K 3. L 3. N 6.

leurs côtez H, I ; & K, L, lesquels seront proportionnaux par la 21. def. 7. & puisque E, F, G sont les plus petits en la raison de A, C, D, ils les mesureront également par la 21. prop. 7. soit selon le nombre M: c'est-à-dire que E, F, G, étans multipliez par M produisent A, C, D. Item par le même discours E, F, G, mesureront également les trois nombres C, D, B, chacun le sien: soit selon le nombre N, c'est à dire, que N multipliant E, F, G, produise C, D, B. Il est donc évident, que A & B sont nombres solides, desquels les côtez sont H, I, M, & K, L, N. Mais d'autant que M & N multiplians F, produisent C & D, par la 18. prop. 7. M sera à N en la raison de C à D; & C est à D en même raison que E à F par la 17. prop. 7. pource que N multipliant E & F a produit iceux C & D; mais aussi E est à F en la même raison que H à K, ou I à L. Donc aussi H sera à K, ou I à L, comme M à N; & en permutant, H sera à I, comme K à L; & I à M comme L à N: & partant les côtez H, I, M sont proportionnaux aux côtez K, L, N; & par la 21. def. 7. A & B seront nombres solides semblables: Parquoy si entre deux nombres tombent, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si trois nombres sont continuellement proportionnaux, & que le premier soit quarré; le troisiéme sera aussi quarré.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C, desquels le premier A soit quarré : Je dis que le troisiéme C est aussi quarré.

Car puisque entre A & C tombe un moyen proportionnel, par la 20. prop. de ce livre, ils seront plans semblables; & partant l'un d'iceux étant quarré, aussi sera l'autre.

A 4. B 6. C 9.

Si donc trois nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si quatre nombres ſont continuellement proportionnaux, & que le premier ſoit cube, auſſi le quart ſera cube.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux, A, B, C & D, le premier deſquels A ſoit cube: Je dis que le quatriéme D eſt auſſi cube.

Car puiſque entre A & D tombent deux moyens proportionnaux B & C, par la 21. prop. de ce livre, iceux A & D ſeront ſolides ſemblables: mais l'un eſt cube, & partant auſſi ſera l'autre. Parquoy ſi quatre nombres ſont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A 8.	B 12.	C 18.	D 27.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Si deux nombres ſont l'un à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré; & que l'un d'iceux ſoit quarré, auſſi ſera l'autre.

Soient deux nombres A & B, leſquels ſoient entr'eux, comme le quarré C au quarré D, & ſoit A quarré. Je dis que B eſt auſſi quarré.

Car puiſque A eſt à B comme C à D; & par la 11. prop. 8. il tombe entre C & D, un moyen proportionnel, ſçavoir eſt E; il en tombera auſſi un entre A & B par la 8. prop. 8. & ſoit F. Vû donc que les trois nombres A, F, B, ſont continuellement proportionnaux, & le premier A eſt quarré; auſſi par la 22. prop. 8. le troiſiéme B ſera quarré. Parquoy ſi quatre

A 16.	F 24.	B 36.
C 4.	E 6.	D 9.

nombres ſont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

Il appert des choſes cy-deſſus dites, que la raiſon de quelque nombre quarré que ce ſoit à quelconque nombre non quarré, ne peut être exhibée en deux nombres quarrez : Car ſi elle y eſtoit exhibée, par la 24. prop. 8. les deux premiers nombres ayans la même raiſon que les quarrez de la raiſon exhibée ſeroient auſſi quarrez, puis que l'un eſt poſé quarré. Ce qui eſt abſurde : car l'un eſt poſé non quarré. D'où vient que les nombres ayant la raiſon double, ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré. Car tous ces nombres cy 4. 8. 16. 32, &c. ſeroient quarrez ; d'autant que 4 eſtant quarré, par la 24. prop. 8. auſſi 8 ſeroit quarré : donc auſſi 16 & 32, &c. Ce qui eſt abſurde. Car entre 4 & 8 ; & entre 8 & 16 ; & entre 16 & 32, &c. tomberoit un moyen proportionnel, s'ils eſtoient quarrez, par la 11. prop. 8. & nous avons démontré au Scholie de la 8. prop. 8. qu'il ne peut tomber de moyen proportionnel entre quelconques nombres de la raiſon double.

Semblablement les nombres en raiſon quintuple, ne ſont auſſi comme nombre quarré à nombre quarré. Car s'ils y eſtoient, par la 11. prop. 8. il tomberoit entre iceux un milieu proportionnel : donc auſſi entre 5 & 1, les plus petits nombres de la raiſon quintuple par la 8. prop. 8. Ce qui eſt impoſſible, comme nous avons démontré au Scholie de la même propoſition.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres ſont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube, & que l'un d'iceux ſoit cube, auſſi ſera l'autre.

Que A ſoit à B, comme le cube C au cube D, & que A ſoit cube : Je dis que B eſt auſſi cube.

A 8. G 12. H 18. B 27.
C 64. E 96. F 144. D 216.

Car puiſque A eſt à B comme C à D, il tombera deux moyens proportion-

naux entre les deux cubes C & D par la 12. prop. de ce livre, leſquels ſoient E & F : Mais par la 8. prop. 8. il en tombera auſſi deux entre A & B, & ſoient iceux G & H. Veu donc que les quatre nombres A, G, H, B ſont continuellement proportionnaux, & que le premier A eſt cube, auſſi ſera le quatriéme B par la 23. prop. 8. Parquoy ſi deux nombres ſont l'un à l'autre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il appert auſſi des choſes cy-deſſus, que la raiſon de quelque nombre cube que ce ſoit à quelconque nombre non cube, ne ſe peut exhiber par deux nombres cubes.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Les nombres plans ſemblables, ſont l'un à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré.

Soient deux nombres plans ſemblables A & B. Je dis que A ſera à B comme nombre quarré à nombre quarré.

Car par la 18. prop. 8. il tombera entre A & B un moyen prop. & ſoit C : ſi donc on prend les trois nombres D, E, F, les plus petits en la raiſon continuë de A, C, B, les extrémes D & F ſeront quarrez par le corol. de la 2. prop. 8. Parquoy puis qu'en raiſon égale A eſt à B, comme D à F, il eſt manifeſte que A eſt à B comme nombre quarré à nombre quarré, c'eſt à ſçavoir comme le nombre quarré D au nombre quarré F. Parquoy les nombres plans ſemblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A 20. C 30. B 45.
D 4. E 6. F 9.

SCHOLIE.

Clavius a démontré aprés Commandin la converſe de cette propoſition c'eſt à ſçavoir :

Que les nombres qui ſont l'un à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré, ſont plans ſemblables.

Car les nombres A *&* B *étans entr'eux, comme les quarrez* D *&* F, *par la* 11. *prop.* 8. *Il tombera un moyen prop. entre iceux quarrez : & auſſi un entre* A *&* B, *par la* 8. *prop.* 8. *& partant* A *&* B *ſont plans ſemblables.*

Et par cecy eſt manifeſte que les nombres plans qui ne ſont ſemblables, ne ſont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Les nombres ſolides ſemblables, ſont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube.

Soient deux nombres ſolides ſemblables A, B. Je dis que A ſera à B, comme nombre cube à nombre cube.

Car par la 16. prop. 8. entre A & B tomberont deux moyens proportionnaux, & ſoient iceux C & D. Que ſi on prend les plus petits termes de la raiſon de A à C, & qu'en la raiſon d'iceux on trouve, par la 2. prop. 8. les quatre nombres E, F, G, H, en continuelle proportion, les extrémes E & H ſeront cubes par le corol. de la 2. prop. 8. & en raiſon égale comme E à H, ainſi A à B : Parquoy les nombres ſolides ſemblables ſont l'un à l'autre, &c. Ce qui étoit à démontrer.

A 16. C [illegible] D 36. B 54.
E 8. [illegible] G 18. H 27.

SCHOLIE.

Clavius démontre auſſi aprés Commandin la converſe de cette propoſition ſçavoir eſt:

Que les nombres qui ſont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube, ſont ſolides ſemblables.

Car les nombres A *&* B, *étans entr'eux, comme les cubes* E *&* H, *par la* 12. *prop.* 8. *il tombera deux moyens prop.*

entre les nombres cubes E & H ; il en tombera auſſi deux entre A & B par la 8. prop. 8. & partant par la 21. prop. 8. A & B ſont ſolides ſemblables.

Il eſt évident par toutes les choſes cy-deſſus dites, qu'aucuns nombres ayans raiſon double, ou ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente, ne ſont plans, ou ſolides ſemblables. Car s'ils étoient plans ſemblables, par la 18. prop. 8. un moyen proportionnel tomberoit entr'eux, ce qui ne ſe peut faire, comme il a été démontré au Scholie de la 8. prop. 8. Ils ne ſeront pas auſſi ſolides ſemblables, puis qu'entre iceux ne peuvent tomber deux moyens prop. car autrement il en tomberoit auſſi deux entre les plus petits nombres des meſmes raiſons par la 8. prop. 8. Ce qui ne ſe peut faire, pource qu'iceux ſont ſeulement diſtans entr'eux de l'unité ou du binaire, comme il a été dit au ſuſdit Scholie, entre leſquels il eſt certain que deux nombres moyens proport. ne peuvent tomber.

Semblablement deux nombres premiers, quels qu'ils ſoient, ne peuvent être plans, ou ſolides ſemblables, pource qu'ils ne peuvent avoir les côtez proportionnaux. Car quelque nombre plan que ce ſoit étant nombre premier, a ſeulement ſoy-méme & l'unité pour côtez encore improprement. Comme ces nombres plans 7 & 13 [illegible] quels les côtez ſont 7, 1; & 13, 1, puis qu'ils ſont pr[illegible] de la multiplication d'iceux côtez; leſquels appert n'être proportionnaux. Et le nombre ſolide, qui auſſi eſt nombre premier, a ſeulement pour côtez ſoy-méme, & deux unitez : & par conſequent il eſt manifeſte qu'ils ne peuvent être proportionnaux.

Pareillement deux nombres premiers entr'eux, n'étans quarrez, ou cubes, ne peuvent être plans, ou ſolides ſemblables: Car s'ils étoient tels, par la 18 ou 19. prop. 8. tomberoit entre iceux, un ou deux moyens prop. & puis que les extrémes ſont poſez premiers entr'eux, tous les trois, ou les quatre ſeroient premiers entr'eux, pource que aucun nombre ne ſera commune meſure d'iceux, les extrémes n'en ayans point : Parquoy il eſt évident par la 23. prop. 7. qu'ils ſeront les plus petits en leur prop. Et partant par le corol. de la 2. prop. 8. les deux extrémes ſeront quarrez, ou cubes. Ce qui eſt abſurde: car ils ont été poſez n'être quarrez ny cubes.

De ces choſes s'enſuit que s'il y a deux nombres plans, ou ſolides ſemblables, deſquels le moindre ſoit premier, il méſurera le plus grand. Car autrement par la 31. prop. 7. iceux

deux nombres proposez seroient premiers entr'eux : & partant (comme nous venons de prouver) ils ne seroient plans ou solides semblables. Ce qui est absurde : car ils ont été posez tels.

De cecy est évident que deux nombres premiers entr'eux, desquels le moindre est premier, ne peuvent être plans, ou solides semblables. Car s'ils l'étoient, le moindre mesureroit le plus grand, comme appert cy-dessus. Vû donc qu'il se mesure aussi soy-méme, ils ne seroient premiers entr'eux, mais composez : Ce qui est contre l'hypothese.

Parquoy il est facile de trouver deux nombres plans, ou solides non semblables. Car si on prend deux nombres ayans raison double, ou superparticuliere, ou superbiparciente ; ou certainement deux nombres premiers, ou deux premiers entr'eux, desquels l'un ny l'autre soit quarré, ou cube ; il est évident par ce que dessus, qu'ils seront plans, ou solides dissemblables.

Derechef, s'il y a deux nombres, desquels l'un soit quarré, & l'autre non quarré, comme 16 & 20 ; ils ne sont plans semblables. Car autrement par la 26. prop. 8. ils seroient comme quarré à quarré : & 16 étant quarré, par la 24. prop. 8. 20 seroit aussi quarré, contre l'hypothese. Par méme raison, si de deux nombres, l'un est cube, & l'autre ne l'est pas ; comme 27 & 40 ; ils ne sont pas solides semblables. Car s'ils l'étoient, par la 27. prop. 8. ils seroient comme cube à cube : & 27 étant cube, par la 25. prop. 8. 40 seroit aussi cube, contre l'hypothese.

Fin du huitiéme Element.

ELEMENT NEUFIE'ME.

THEOR. 1. PROP. 1.

Si deux nombres plans ſemblables ſe multiplient l'un l'autre, le produit ſera quarré.

SOIENT deux nombres plans ſemblables A & B, leſquels ſe multiplians mutuellement, produiſent C. Je dis que C eſt quarré. Car A ſe multipliant ſoy-même produit D quarré. Et puis que A multipliant A & B a produit D & C, comme A ſera à B, ainſi D à C par la 17. prop. 7. Mais A & B étans plans ſemblables, il tombera entr'eux un moyen proportionnel par la 18. prop. 8. Il en tombera donc auſſi un entre D & C, par la 8. prop. 8. & ſoit E. Et puiſque des trois nombres continuellement proportionnaux D, E, C, le premier D eſt quarré par la conſtruction; le tiers C ſera auſſi quarré par la 22. prop. 8. Parquoy ſi deux nombres plans ſemblables, &c. Ce qui étoit à prouver.

A 4. B 9.
D 16. E 24. C 36.

THEOR.

THEOR. 2. PROP. II.

Si deux nombres se multiplians l'un l'autre produisent un nombre quarré, iceux seront plans semblables.

Soient deux nombres A & B qui se multiplians l'un l'autre, produisent C quarré. Je dis que A & B sont plans semblables.

Car que A se multipliant soy-même produise D quarré. Veu donc que A multipliant A & B a produit D & C, comme A sera à B, ainsi D à C par la 17. prop. 7. Et par la 11. pro. 8. entre les quarrez D & C tombe un moyen proportionnel: il en tombera donc aussi un entre A & B, par la 8. prop. 8. & partant par la 20. prop. 8. A & B seront plans semblables. Parquoy si deux nombres se multiplians l'un l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

A 4.	B 9.
D 16.	C 36.

THEOR. 3. PROP. III.

Si un nombre cube se multiplie soy-même, le produit sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel se multipliant soy-même produise B. Je dis que B est nombre cube.

Car soit C côté du cube A: & de C multiplié en soy, soit produit D; il est manifeste que C multipliant D, produit le cube A. Vû donc que C multipliant soy-même a fait D, par la 7. com. sent. C mesurera D par C. Mais par la 5. com. sent. l'unité mesure aussi C par C. L'unité sera donc même partie de C, que C de D; & partant comme l'unité est à C, ainsi C à D par la 20. def. 7. De-

A 8.		
E 16.	D 4.	
F 32.	C 2,	
B 64.	*Unité.*	

rechef, puiſque C multipliant D a fait A, par la 7. com. ſent. D meſurera A par C. Mais auſſi C meſure D par C. Donc C eſt même partie de D, que D de A; & partant comme C à D, ainſi D à A; mais comme C à D, ainſi étoit l'unité à C. Donc comme l'unité à C, ainſi C à D, & D à A: ainſi entre l'unité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D. Derechef, pource que A meſure B par A; (car B a été fait de A multiplié en ſoy.) & que l'unité meſure auſſi A par A; l'unité ſera même partie de A, que A de B: partant comme l'unité ſera à A, ainſi A ſera à B. Parquoy puis qu'entre l'unité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D, par la 8. prop. 8. il en tombera auſſi deux entre A & B, & ſoient iceux E & F. Et vû que les quatre nombres A, E, F, B ſont continuellement proportionnaux, & que A premier eſt cube, auſſi B quatriéme ſera cube par la 23. prop. 8. Parquoy ſi un nombre cube, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 4. PROP. IV.

Si un nombre cube multiplie un nombre cube, le produit ſera cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant le nombre cube B, produiſe C: Je dis que C eſt auſſi nombre cube.

Car ſi on prend D, produit de A multiplié par ſoy-même, il ſera cube par la 4. prop. precedente: & pource que A multipliant B & ſoy-même, a produit C & D; il y aura telle raiſon de D à C, que de A à B, par la 17. prop. 7. Et par la 12. prop. 8. il tombera deux moyens proportionnaux entre A & B: il en tombera donc auſſi deux entre D & C, par la 8. prop. 8. Et partant D étant cube, par la 23. prop. 8. C ſera auſſi cube. Si donc un nombre cube, &c. Ce qui étoit à prouver.

A 8.	B 27.
D 64.	C 216.

THEOR. 5. PROP. V.

Si un nombre cube multipliant quelque autre nombre, produit un nombre cube, le multiplié ſera auſſi cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant quelque nombre B, produiſe le nombre cube C. Je dis que B multiplié eſt auſſi nombre cube.

Car ſi on prend D, produit de A multiplié par ſoy-même, il ſera cube par la 3. prop. 9. & d'autant que A multipliant A & B, a fait D & C, par la 17. prop. 7. A ſera à B comme D à C, & par la 8. prop. 8. entre A & B ſe trouveront deux moyens proportionnaux, comme entre les deux nombres cubes D & C. Et par la 23. prop. 8. A étant cube, B multiplié ſera auſſi nombre cube. Parquoy ſi un nombre cube, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A 8. B 27.
D 64. C 216.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si un nombre ſe multipliant ſoy-même produit un nombre cube; iceluy nombre ſera auſſi cube.

Soit le nombre A, lequel multiplié par ſoy-même produiſe le nombre cube B. Je dis que A eſt auſſi nombre cube.

Car ſi on prend C produit de A multiplié par B, il ſera cube par la definition du nombre cube; & par la 5. prop. 9. A ſera auſſi cube. Si donc un nombre ſe multipliant ſoy-même, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A 8. B 64. C 512.

THEOR. 7. PROP. VII.

Un nombre compoſé étant multiplié par quelque autre nombre le produit ſera ſolide.

Soit le nombre compoſé A, lequel étant multiplié par quelque nombre B produiſe C. Je dis que C eſt nombre ſolide.

Car puiſque A eſt compoſé, quelque nombre outre l'unité le meſurera par la 13. def. 7. Que D meſure donc A par E. Ce qu'étant poſé, D

A 6. B 5. C 30.
D 2. E 3.

multipliant iceluy E, produira A par la 9. com. sent. Et puisque B multipliant A a produit C, iceluy C sera procreé de la mutuelle multiplication des trois nombres D, E, B; partant par la 17. prop. 7. il sera nombre solide, duquel les côtez sont D, E, B. Parquoy un nombre composé, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, le troisiéme depuis l'unité sera quarré, & tous les autres qui en laisseront un : Mais le quatriéme sera cube, & tous les suivans qui en laisseront deux : & le septiéme sera cube & quarré ensemble, & tous les suivans qui en laisseront cinq.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux depuis l'unité, A, B, C, D, E, F, G, H, I. Je dis que le troisiéme B sera quarré, ensemble tous les autres qui en laisseront un de l'ordre, comme D, F & H : en aprés, que le quatriéme C est

Vnité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.	I.
	1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.	2187.	6561.	19683.

cube, & tous les autres nombres qui en intermettent ou laissent deux, comme F & I : Pareillement que le septiéme nombre F est cube & quarré ensemble, comme aussi tous les autres qui pourroient suivre en laissant toûjours cinq nombres.

Pour la premiere partie : puis que les nombres sont continuellement proportionnaux, comme l'unité mesure A, selon les unitez qui sont en A, par la 5. com. sent. ainsi chacun mesurera son suivant selon les unitez de A: partant B troisiéme, qui sera en ce faisant le produit de A multiplié par soy, sera quarré : & par la 22. prop.

8. puis que B, C, D, ſont continuellement proportionnaux, & B eſt quarré, auſſi D ſera quarré. Par même [illegible]rs en prenant les trois continuellement proportionnaux D, E, F; vû que D eſt quarré, auſſi F ſera quarré; & ainſi de tous les autres nombres qui en laiſſent un.

Pour la ſeconde partie: puis que A multiplié par ſoy produit B; & B par A produit C; Il eſt évident par les définitions du 7. que C ſera cube, & par la 23. prop. 8. C, D, E, F, étans continuellement proportionnaux, F ſera auſſi cube: par même raiſon, étans prins les quatre continuellement proportionnaux F, G, H, I, puis que F eſt cube, auſſi I ſera cube; & ainſi de tous les autres nombres, en laiſſant deux, ſi davantage y en avoit.

Pour la troiſiéme partie. D'autant que par les deux precedentes parties F a été prouvé quarré & cube; iceluy ſera cube & quarré enſemble: Et il en ſera ainſi de tous les autres. Si donc depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui ſuit l'unité ſoit quarré, auſſi tous les autres ſeront quarrez: & s'il eſt cube, auſſi tous les autres ſeront cubes.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux depuis l'unite A, B, C, D, E, F. Je dis premierement que ſi le premier A eſt quarré, que tous les autres ſeront auſſi quarrez.

Unité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	4.	16.	64.	256.	1024.	4096.

Car puis qu'iceux nombres A, B, C, D, E, F, ſont continuellement proportionnaux depuis l'unité, par

la prec. prop. le troisiéme nombre B sera nombre quarré, comme aussi tous les autres qui en laissent deux, sçavoir D & F. Mais pource que A, B, C sont continuellement proport. & que A est quarré par l'hypothese; par la 22. prop. 8. C sera aussi quarré : & par la même raison prenant les continuellement proportionnaux C, D, E, le premier C étant quarré, aussi le sera le troisiéme E: partant tous les nombres A, B, C, D, E, F sont quarrez : Et ainsi de tous autres.

Je dis en second lieu, que si A est cube, aussi tous les autres seront cubes : Car d'autant que A, B, C, D, E, F sont continuellement proport.

Vnité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	8.	64.	512.	4096.	32768.	262144.

depuis l'unité, C quatriéme est cube, & tous les autres qui en laissent deux, sçavoir F, par la prec. prop. Or que les autres nombres B, D, E, soient aussi cubes, nous le prouverons ainsi. D'autant que par l'hypothese l'unité est à A, comme A à B; l'unité mesurera A, & iceluy A le nombre B également. Mais par la 5. com. sent. l'unité mesure A par le même A : donc A mesurera aussi B par le même A : & par la 9. com. sent. A multiplié en soy produira B, lequel A étant cube, B sera aussi cube par la 3. prop. 9. Mais tous les autres nombres suivans sont en la raison de A à B, & partant par la 23. prop. 8. ils seront tous cubes. *Si donc depuis l'unité il y a tant de nombres*, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 10. PROP. X.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'unité, ne soit nombre quarré : aussi pas un autre ne sera quarré, sinon le troisiéme depuis l'unité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent un. Que si celuy qui suit l'unité n'est nombre cube, aussi

pas un autre ne ſera cube, ſinon le quatriéme depuis l'unité, & tous les autres qui en l'ordre en laiſſent deux.

Soient depuis l'unité tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D, E, F; & premierement que A qui ſuit l'unité, ne ſoit nombre quarré. Je dis que pas un autre ne ſera quarré, ſinon le troiſiéme B, & tous les autres qui en l'ordre en laiſſent un, ſçavoir D & F.

Car par la 8. prop. 9. B, D, F ſont quarrez : Et ſi quelqu'un

Unité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

veut dire qu'il y en a auſſi d'autres, comme C, il faudroit par la 22. prop. 8. que A fuſt auſſi nombre quarré, (étans C, B, A, continuellement proportionnaux & C quarré) ce qui eſt contre l'hypotheſe. Par même raiſons on démontrera qu'aucun autre ne peut être quarré, ſinon les ſuſdits.

Maintenant, que A proche de l'unité ne ſoit nombre cube : Je dis qu'aucun autre ne ſera cube, ſinon C quatriéme depuis l'unité, & tous les autres qui en laiſſeront deux, comme F, &c.

Car par la 8. prop. 9. C & F ſont cubes : Et ſi quelqu'un veut dire que D ſoit auſſi cube, d'autant que D, C, B, A ſont continuellement proportionnaux, il faudroit par la 23. prop. 8. que A fut pareillement cube, ce qui eſt contre l'hypotheſe : donc D n'eſt pas cube. Par mêmes raiſons on démontrera qu'aucun autre, outre les ſuſdits, ne peuvent être cube. Si donc depuis l'unité, il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 11. PROP. XI.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux : le plus petit meſurera le plus grand ſelon quel-

qu'un de ceux qui ſont entre les proportionnaux.

Depuis l'unité A, ſoient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux B, C, D, E, F. Je dis que le plus petit nombre B meſurera le plus grand F par quelqu'un des nombres C, D, E.

Car d'autant que A, B, C, D, E ſont en même raiſõ que B, C, D, E, F, en raiſon égale, l'unité A ſera à E,

A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	243.

comme B eſt à F. Et par la 20. def. du 7. l'unité meſurera E; & le nombre B le nombre F, également. Mais par la 5. com. ſent. l'unité A meſure E par E : donc auſſi B meſurera F par E. Le même peut-on dire des autres. Parquoy ſi depuis l'unité, il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Il appert par ce que deſſus, que le plus grand nombre eſt autant éloigné du grand qui le meſure, que l'unité eſt diſtante d'iceluy nombre par lequel le moindre meſure le grand : & ce d'autant qu'il y doit avoir une même raiſon du moindre nombre au plus grand, que de l'unité à celuy par lequel le moindre meſure le grand, comme il appert icy.

Ainſi B meſurera F par D; & C meſurera F par C, c'eſt-à-dire par ſoy-même, &c. Pource que tant entre B & F, qu'entre l'unité & D ſe trouvent trois nombres : & tant entre C & F, qu'entre l'unité & C ſont interpoſez deux nombres.

Unité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

Il appert encore que quelconque de ces nombres multiplié par ſoy-même, en produit un autre, qui entre les proportionnaux eſt autant éloigné d'iceluy, comme il eſt diſtant de l'unité. Mais ſi un petit nombre en multiplie un grand, celuy qui en proviendra ſera autant éloigné du

grand que le moindre de l'unité : Car si un nombre qui en mesure un autre, multiplie celuy par lequel il le mesure, sera produit celuy-là qui est mesuré, par la 9. com. sent. Ainsi C multipliant soy-même produit F, qui est autant éloigné de C, qu'iceluy C de l'unité. Pareillement B multipliant D, sera le même F, pource que D mesure iceluy nombre F par B, &c.

THEOR. 12. PROP. XII.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux : tous les nombres premiers qui mesurent le dernier, mesureront aussi celuy qui est proche de l'unité.

Soient depuis l'unité A, tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, B, C, D, E. Je dis que tous les nombres premiers qui se trouveront mesurer le dernier E, mesureront aussi B, lequel suit l'unité ; c'est à dire que si quelque nombre premier que ce soit, comme F, mesure iceluy dernier nombre E, il mesurera aussi B.

A. B. C. D. E. F.
1. 3. 9. 27. 81. 3.

Car si ledit nombre premier F mesurant E dernier, ne mesure pas aussi B ; B & F seront nombres premiers par la 31. prop. 7. Et d'autant que B multiplié par soy produit C ; comme nous avons dit au Scholie de la prop. preced. C & F seront aussi premiers par la 27. prop. 7. Item B multipliant C produit D : D & F seront donc aussi premiers par la 26. prop. 7. Pareillement B multipliant D produit E : partant E & F seroient aussi nombres premiers, & par ainsi F ne mesureroit pas E : ce qui est contre l'hypothese : Donc F mesuroit aussi B. Parquoy si depuis l'unité il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que ce-

luy d'aprés l'unité ſoit premier: Le plus grand ne ſera meſuré par aucun autre nombre, ſinon par ceux qui ſont entre les proportionnaux.

Depuis l'unité A ſoient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux B, C, D, E, & que B qui ſuit l'unité ſoit premier. Je dis que le plus grand nombre E ne ſera meſuré par aucun autre que d'iceux B, C, D.

A 1. B 3. C 9. D 27. E 81.
K -- I -- H -- G --

Autrement, s'il eſt poſſible, que quelque autre nombre, comme G, meſure E: Or G ſera premier ou compoſé: s'il eſt premier, & meſurant E extréme, par la prec. prop. il meſurera auſſi B, premier proche de l'unité: ce qui eſt abſurde. Donc G n'eſt premier, mais compoſé, & meſuré par quelque nombre premier par la 33. prop. 7. qui ne peut être autre que B: d'autant qu'il meſurera E, par la 11. com. ſent. & par la prop. preced. il faudroit qu'il meſuraſt auſſi B nombre premier: ce qui eſt abſurde. Il n'y a donc point d'autre nombre premier que B, qui meſure G. Que maintenant B meſure G par H: & puis que par les choſes dites au Scholie de la 11. prop. de ce livre, B multipliant D & H produit E & G, par la 17. prop. 7. comme E ſera à G, ainſi D à H: mais G meſure E: donc auſſi H meſurera D. On prouvera comme deſſus qu'il ne peut être premier ny meſuré par un autre nombre premier que B: Car ſi H étoit premier, meſurant D, il meſureroit auſſi B: ce qui ne ſe peut faire, ayant été poſé premier. Que ſi H eſt compoſé, celuy nombre premier qui le meſurera ſera B, ou ſi c'eſt un autre, cet autre meſurera auſſi D, & celuy qui meſure D, c'eſt à ſçavoir B, par la 11. com. ſent. ce qui eſt abſurde. Il n'y a donc que le nombre premier B qui meſure H: & poſant que ce ſoit par le nombre I. On prouvera auſſi comme deſſus, que comme H meſure D, ainſi I meſure C, & que I ne peut être nombre premier, ny meſuré par aucun autre nombre premier ſinon B. Donc que I meſure C par le nombre K: par mêmes raiſons, comme I meſure C,

ainſi K meſurera B nombre premier : il faut donc qu'à tout le moins il luy ſoit égal, ce qui eſt impoſſible : d'autant que B eſt moyen proportionnel entre K & I, par la 20. prop. 7. puis que C eſt produit de K multiplié par I, & qu'il eſt auſſi le produit de B multiplié par ſoy-même. Partant aucun nombre ne meſurera E, ſinon B, C, D, qui le meſurent, par la 11. prop. 9. Parquoy ſi depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Le plus petit nombre de tous ceux qui peuvent être meſurez par certains nombres premiers, ne ſera meſuré par aucun autre nombre premier, que par ceux qui le meſuroient au commencement.

Soit A le plus petit nombre de tous ceux qui peuvent être meſurez par les trois nombres premiers B, C, D. Je dis qu'aucun nombre premier autre que B, C, D, ne meſurera A.

Autrement, s'il eſt poſſible, que E autre nombre premier meſure A par F : donc par la 9. com. ſent. E multiplié par F produira A, lequel eſt meſuré par B, C, D, & par la 32. prop. 7. iceux B, C, D, meſureront l'un des deux E, F : Or ils ne meſureront pas E, autre nombre premier que pas un d'iceux ; ils meſureront donc F, qui eſt plus petit que A : ce qui eſt abſurde ; puis que A eſt poſé le plus petit de tous ceux qui peuvent être meſurez par B, C, D. Donc E ne pouvoit meſurer A. Parquoy le plus petit nombre de tous ceux qui peuvent être meſurez, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

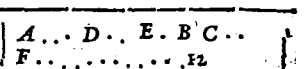
A. B. C. D.
30. 2. 3. 5.
E--- F--

SCHOLIE.

Nous démontrerons icy en nombres (aprés Commandinus & Clavius) les 10 premiers Theoremes, qui ſont démontrez en lignes au ſecond livre.

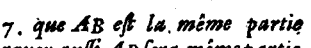
1. S'il y a deux nombres, l'un ou l'autre desquels soit couppé en tant de parties qu'on voudra, le nombre plan compris sous iceux deux nombres, est égal aux nombres plans contenus du nombre indivisé, & de chaque partie de celuy qui est couppé.

Soient deux nombres, AB & C, desquels AB est divisé en AD, DE, EB, & soit fait F de C en AB : Item GH de C en AD, & HI de C en DE, & IK de C en EB. : Je dis que F est égal aux nombres GH, HI, IK, c'est-à-dire à tout le nombre GK composé d'iceux. Car puisque C multipliant AB, a produit F, AB mesurera F par C : c'est-à-dire que AB sera la partie d'iceluy F, dénommée par C. Par la même raison AB sera la partie de GH ; & DE de HI ; & EB de IK, dénommée par C, sçavoir est, la même que AB de F. Mais il est évident par la 5. prop. 7. que AB est la même partie de GK, que AD de GH, parquoy aussi AB sera même partie de GK, que AB de F : & partant par la 4. com. sent. F & GK seront égaux entr'eux. Ce qui étoit proposé.

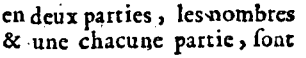


2. Si un nombre est couppé en deux parties, les nombres plans comprins sous le tout, & une chacune partie, sont égaux au nombre quarré du tout.

Car le nombre AB soit divisé en AC, CB. Je dis que les nombres qui seront produits du total AB, és parties AC, CB seront ensemble égaux au quarré de AB. Car étant pris le nombre D égal à AB, par le 1. Theor. le nombre fait de D, c'est-à-dire de AB, en AB, sçavoir est le quarré d'iceluy AB, sera égal aux nombres qui seront produits de D, c'est-à-dire de AB, en AC, & en CB : Ce qui étoit proposé.



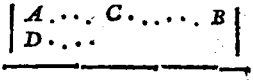
Le même sera démontré, si AB est couppé en plus de deux parties, comme on peut voir par la seconde figure icy apposée. Car par



la même raiſon, le nombre fait de E, c'eſt-à-dire de AB, en AB, c'eſt à ſçavoir le quarré de AB, ſera eſgal aux nombres, qui ſeront produits de E, c'eſt-à-dire de AB, en chaque partie AC, CD & DB.

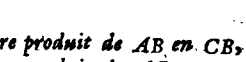
3. Si un nombre eſt couppé en deux parties; le nombre plan compris du total, & de l'une des parties, eſt égal à celuy-là contenu des parties, & au quarré fait d'icelle partie premierement priſe.

Soit le nombre AB diviſé en AC, CB. Je dis que le nombre plan produit de AB en la partie AC, eſt eſgal à celuy fait des parties AC, CB, & au quarré d'icelle partie AC. Car eſtant pris le nombre D eſgal à la ſuſdite partie AC; par le 1. Theor. le nombre fait de D, c'eſt-à-dire de AC, en AB; ou (qui eſt le même) de AB en AC, ſera eſgal aux nombres faits de D, c'eſt-à-dire de AC, en CB, & de D, c'eſt-à-dire de AC, en AC, ſçavoir eſt le quarré de AC. Ce qui eſtoit propoſé.



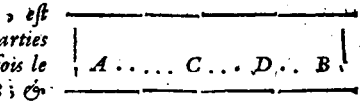
4. Si un nombre eſt diviſé en deux parties; le quarré fait du tout eſt égal aux deux quarrez faits des deux parties, & a deux fois le nombre plan contenu d'icelles parties.

Soit le nombre AB diviſé en AC, CB. Je dis que le nombre quarré fait de AB, eſt eſgal aux quarrez des parties AC, CB, avec deux fois le nombre plan fait de AC en CB. Car par le 2. Theor. le nombre quarré de AB, eſt eſgal aux nombres faits de AB en AC, & en CB. Mais par le 3. Theor. le nombre fait de AB en AC, eſt eſgal au nombre produit de AC en CB, & au quarré d'iceluy AC: Item le nombre produit de AB en CB, eſt par même raiſon eſgal au nombre produit de AC en CB, & au quarré de CB. Donc le nombre quarré fait de AB, eſt pareillement eſgal aux nombres quarrez des parties AC, CB, & a deux fois le nombre fait de AC en CB. Ce qui eſtoit propoſé.



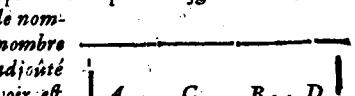
5. Si un nombre eſt diviſé en deux parties égales, & en deux inégales; le nombre plan contenu des parties inégales, avec le quarré du nombre qui eſt entre les deux ſections, eſt égal au quarré fait de la moitié du nombre total.

Soit le nombre AB, couppé en deux parties eſgales AC, CB, & en deux ineſgales AD, DB. Je dis que le nombre plan compris des parties ineſgales AD, DB, avec le quarré du nombre CD, eſt eſgal au quarré du nombre BC. Car puis que par le Theor. preced. le nombre quarré de CB, eſt eſgal aux quarrez des parties CD, DB, avec deux fois le nombre fait de CD, DB; & par le 3. Theor. le nombre plan compris de CD, DB, enſemble avec le quarré de DB, eſt eſgal au nombre produit de CB en DB, ſera fait que ſi ce nombre fait de CB, en DB, eſt pris pour le quarré de DB, avec le nombre fait de CD, en DB, auſſi le nombre quarré de CB, eſt eſgal à l'autre quarré de CD, enſemble à l'autre nombre fait de CD en DB, & au nombre produit de CB, c'eſt-à-dire de AC en DB: & partant par le 1. Theor. le nombre fait du total AD en DB, eſt eſgal aux nombres produits de CD en DB, & de AC en DB. Donc le quarré de CB, ſera eſgal au quarré de CD, & au nombre fait de AD en DB. Ce qui eſtoit propoſé.



6. Si un nombre eſt diviſé en deux parties égales, & à iceluy eſt adjoûté quelque autre nombre; le nombre qui eſt fait du tout avec l'adjoûté en l'adjoûté, avec le quarré de la moitié du nombre, eſt égal au quarré du nombre compoſé de la moitié & de l'adjoûté.

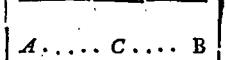
Soit le nombre AB couppé en deux parties eſgales AC, CB, & à iceluy ſoit adjoûté le nombre BD. Je dis que le nombre fait du tout AB & de l'adjoûté BD comme un ſeul, ſçavoir eſt de AD en l'adjoûté BD, avec le quarré de la moitié CB, eſt eſgal au quarré fait de la moitié CB & adjoûté BD comme



un seul, c'est-à-dire au quarré de CD. Car puis que par le 4. Theor. le quarré de CD est esgal aux quarrez des parties CB, BD, *avec deux fois le nombre plan compris de CB, BD, c'est-à-dire aux quarrez des parties CB, BD, & aux nombres contenus de CB, BD, & de AC,* BD : *Mais par le premier Theor. le nombre fait de AD en* BD, *est esgal aux nombres contenus sous* CB, BD, *& sous AC,* BD, *& sous AD,* BD, *c'est-à-dire au quarré de* BD. *Donc prenant le nombre fait de AD en* DB, *pour le quarré de la partie* BD, *avec les nombres faits de* CB *en* BD, *& de AC en* BD, *le quarré de CD sera esgal à l'autre quarré de* CB, *ensemble avec le nombre fait de AD en* BD : *c'est-à-dire que le nombre fait de AD en* BD, *avec le quarré de CB, est esgal au quarré de CD. Ce qui estoit proposé.*

7. Si un nombre est divisé en deux parties, le quarré du tout avec le quarré de l'une des parties, est égal à deux fois le nombre fait du tout en icelle partie, ensemble avec le quarré de l'autre partie.

Soit le nombre AB *coupé és parties* AC, CB. *Je dis que le quarré de* AB, *avec celuy de la partie* CB, *est esgal à deux fois le nombre fait de* AB *en* CB, *ensemble avec le quarré de l'autre partie AC. Car puisque par le 4. Theor. le quarré de* AB *est esgal aux quarrez des parties AC,* CB, *& a deux fois le nombre fait d'icelles AC,* CB;

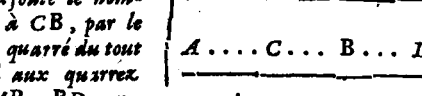


si on adjoûte le commun quarré de CB, *les quarrez de* AB, CB, *seront ensemble esgaux aux quarrez de AC,* CB, *avec deux fois le nombre produit de AC en* CB : *mais par le 3. Theor. le nombre fait de AC en* CB *avec le quarré de* CB, *est esgal au nombre produit de AB en* CB; *& partant le double de l'un est esgal au double de l'autre. Donc si pour le double du nombre fait de AC en* CB, *& quarré de* CB, *on prend le double du nombre produit de AB en* CB, *les quarrez des nombres AB, CB seront ensemble esgaux à deux fois le nombre de AB en CB, avec le quarré de l'autre partie AC. Ce qui estoit proposé.*

8. Si un nombre est divisé en deux parties, quatre fois le nombre fait du tout en une partie, avec le quarré de

l'autre partie, eſt égal au quarré du nombre compoſé du tout & de la partie premierement priſe.

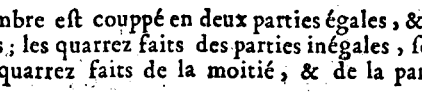
Soit le nombre AB couppé és parties AC, CB. Je dis que le nombre fait de AB en la partie CB, enſemble avec le quarré de l'autre partie AC, eſt eſgal au quarré du nombre compoſé de AB & de la partie CB.



Car eſtant adjoûté le nombre BD eſgal à CB, par le 4. Theor. le quarré du tout AD eſt eſgal aux quarrez des nombres AB, BD, enſemble avec le nombre double de AB en BD, c'eſt-à-dire aux quarrez des nombres AB, CB, enſemble avec deux fois le nombre de AB en CB : Mais par le 7. Theor. les quarrez de AB, CB, ſont eſgaux à deux fois le nombre contenu de AB, CB, avec le quarré de AC : donc ſi pour les quarrez de AB, CB, on prend le nombre double de AB en CB, & le quarré de AC ; le quarré fait de AD eſt eſgal à quatre fois le nombre fait de AB en CB, enſemble avec le quarré de l'autre partie AC. Ce qui eſtoit propoſé.

9. Si un nombre eſt couppé en deux parties égales, & en deux inégales ; les quarrez faits des parties inégales, ſont doubles des quarrez faits de la moitié, & de la partie du milieu.

Soit le nombre AB diviſé és parties eſgales AC, CB, & és ineſgales AD, DB. Je dis que les quarrez des parties ineſgales AD, DB, ſont doubles des quarrez de la moitié AC, & du nombre entre-moyen CD.

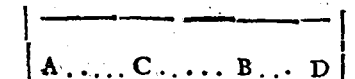


Car puiſque par le 4. Theor. le quarré du nombre AD eſt eſgal aux quarrez des nombres AC, CD, enſemble avec deux fois le nombre fait de AC en CD ; ſi on adjoûte le commun quarré de DB, les quarrez des parties AD, DB, ſeront eſgaux aux quarrez des parties AC, CD, BD, enſemble avec deux fois le nombre produit de AC en CD, c'eſt-à-dire de CB en CD. Mais par le 7. Theor. les quarrez de CB, c'eſt-à-dire de AC, & CD, ſont eſgaux au quarré de DB, & à deux fois le nombre de CB en CD. Donc ſi pour le quarré de DB, & deux

deux fois le nombre fait de CB *en* CD, *on prend les quarrez de* AC, CD, *les quarrez de* AD, DB *seront eſgaux au double des quarrez des parties* AC, CD; *& partant ces quarrez-là ſont doubles de ceux-cy. Ce qui eſtoit propoſé.*

10. Si un nombre eſt diviſé en deux parties égales, & à iceluy on adjoûte quelque autre nombre; le quarré du nombre compoſé d'iceux, & le quarré de l'adjoûté, ſont enſemble doubles des quarrez de la moitié, & de celuy fait du nombre compoſé d'icelle moitié & de l'adjoûté.

Soit le nombre AB *diviſé en deux parties eſgales* AC, CB, *& à iceluy ſoit adjoûté le nombre* BD. *Je dis que le quarré du nombre* AD *compoſé du tout* AB, *& de l'adjoûté* BD, *& le quarré d'iceluy nombre adjoûté* BD, *ſont enſemble doubles des quarrez faits de la moitié* AC, *& de* CD, *compoſé de la moitié* CB *& de l'adjoûté* BD. *Car puiſque par le* 4. *Theor. le quarré de* AD *eſt eſgal aux quarrez de* AC, CD, *& a deux fois le nombre produit de* AC, *c'eſt-à-dire de* CB, *en* CD; *ſi on adjoûte le commun quarré du nombre* BD, *les quarrez des nombres* AD, BD, *ſeront eſgaux aux quarrez des parties* AC, CD, BD, *enſemble avec deux fois le nombre produit de* CB *en* CD. *Mais par le* 7. *Theor. les quarrez de* CB, *ou* AC, *&* CD *ſont eſgaux au quarré de* BD, *& a deux fois le nombre fait de* CB *en* CD. *Donc ſi pour le quarré de* BD, *& deux fois iceluy nombre produit de* CB *en* CD, *on prend les quarrez des nombres* CB, CD, *c'eſt-à-dire des nombres* AC, CD: *les quarrez des nombres* AD, BD *ſeront eſgaux à deux fois les quarrez des nombres* AC, CD: *& partant ceux-là ſont doubles de ceux-cy. Ce qui eſtoit propoſé.*



Or voila quant aux 10. *premieres prop. du* 2. *liv. mais la* 11e. *ne ſe peut accommoder aux nombres, c'eſt-à-dire qu'on ne peut pas* diviſer un nombre propoſé, en telle ſorte que le nombre plan fait du tout & de l'une des parties, ſoit égal au nombre quarré de l'autre partie.

Car, s'il eſt poſſible, ſoit diviſé AB *en* AC, CB, *en ſorte que le nombre plan fait du tout* AB, *& de la partie* CB, *ſoit eſgal au quarré de l'autre partie* AC. *Donc quatre fois le nom-*

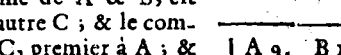
bre de AB en CB, ſera quadruple du quarré de AC : & partant quatre fois le nombre plan d'iceluy AB en CB, avec le quarré de AC, ſera quintuple d'iceluy quarré de AC.

Mais quatre fois le nombre plan de AB en CB, avec le quarré de AC, eſt quarré, vû que par le 8. Theor. il eſt eſgal au nombre quarré, qui eſt fait du nombre compoſé de AB & de CB. Donc deux nombres quarrez (ſçavoir celuy qui eſt fait de AB en CB quatre fois avec le quarré de AC ; & le quarré de AC) ont même raiſon, que 5 à 1, ou 25 à 5. Ce qui eſt abſurde, ainſi qu'il appert du corol. de la 24. prop. 8. Le nombre AB ne peut donc pas être diviſé, en ſorte que le nombre plan fait du tout en une des parties ſoit eſgal ou quarré de l'autre partie. Ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 15. PROP. XV.

Si trois nombres ſont continuellement proportionnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont même raiſon avec iceux : le compoſé de deux tels que l'on voudra d'iceux, ſera premier à l'autre.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C, les plus petits de tous ceux qui ont la même raiſon. Je dis que le compoſé de deux quels on voudra d'iceux, comme de A & B, eſt premier à l'autre C ; & le compoſé de B, C, premier à A ; & de A, C, premier à B.



Car ſi on prend D & E les plus petits qui ſoient en la même raiſon par le Scholie de la 35. prop. 7. il eſt évident par ce qui a été démontré à la 2. prop. 8. que A & C ſont les quarrez de D & E, & que B eſt le produit de D multiplié par E : & par le 3. Theor. du Scholie precedent le compoſé de D, E, multiplié par D, produira un nombre égal au compoſé de A & B. Mais D & E étans premiers entr'eux par la 24. prop. 7. auſſi leur compoſé ſera pre-

mier à E, par la 30. prop. 7. & partant auſſi a ſon quarré C, par la 27. prop. 7. Et par même raiſon D ſera premier à C, & par la 26. prop. 7. le produit du compoſé de D & E multiplié par D, ſera auſſi premier à C. Mais nous avons montré que ce produit eſt égal au nombre compoſé de A & B : Donc auſſi le compoſé de A & B ſera premier à C.

En aprés, puiſque comme deſſus le compoſé des deux nombres D, E eſt premier à chacun d'iceux ; par la 26. prop. 7. le produit du compoſé de D, E, multiplié par E ſera premier à D. Mais par le ſuſdit Theor. iceluy produit eſt égal à C fait de E en ſoy, & au nombre B fait de D en E. Donc le nombre compoſé de ces deux B & C ſera auſſi premier à D ; & partant auſſi à A par la 27. propoſition 7.

Finablement D & E étans premiers entr'eux par la 24. prop. 7. & premiers au compoſé de deux par la 30. prop. 7. leur produit B ſera premier au compoſé des deux par la 26. prop. 7. & par la 27. prop. 7. le produit de D, E comme un ſeul nombre, multiplié par ſoy, ſera premier à B. Mais par le 4. Theor. du Scholie precedent, iceluy produit de D E comme un ſeul nombre multiplié en ſoy, eſt égal à A & C & deux fois B enſemble : donc A & C avec deux fois B, ſont premiers à B. Or en oſtant les deux fois B, il eſt manifeſte que le reſte compoſé de A & C, ſera premier à B. Car autrement ils ſeroient compoſez, & leur commune meſure meſureroit auſſi deux fois B ; & par conſequent auſſi le compoſé de A & C & deux fois B, qui ne ſeroit en ce faiſant premier à B, contre ce qui a été démontré cy-deſſus. Donc le compoſé de A & C eſt premier à B. Parquoy ſi trois nombres ſont continuellement proportionnaux, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 16. PROP. XVI.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, il ne ſera pas comme le premier au ſecond, ainſi le ſecond à quelque autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux, A & B. Je dis que comme A eſt à B, ainſi B n'eſt pas à quelque au-

tre, c'eſt-à-dire qu'à A & B, on ne peut trouver un troiſiéme proportionnel.

Autrement, s'il eſt poſſible, ſoit que comme A eſt à B, ainſi B ſoit à un autre, ſçavoir C. Par la 23. prop. 7. A & B étans premiers, ils ſeront les plus petits qui ſoient en la même raiſon; & par la 21. prop. 7. A meſurera B, & B meſurera C. Mais auſſi A meſure ſoy-même; donc A meſure iceux A & B. Ainſi A & B ne ſeroient premiers, contre l'hypotheſe. Donc il n'eſt pas comme A a B, ainſi B à C. Par même raiſon, il ne ſera pas comme B à A, ainſi A à quelque autre. Si donc deux nombres ſont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A 3. B 5. C--

SCHOLIE.

Ce qui eſt dit & démontré tant en cette 16. prop. qu'aux trois ſuivantes, ſe doit entendre des nombres entiers : car ſi on les vouloit étendre aux fractions, il eſt certain & manifeſte qu'à deux nombres quels qu'ils ſoient, on en peut trouver un troiſiéme proportionnel; puis que le quarré du ſecond nombre étant diviſé par le premier, en eſt produit un troiſiéme proportionnel. Comme aux deux nombres premiers trois & cinq, ſi le quarré du ſecond nombre 5, ſçavoir 25 eſt diviſé par le premier 3, proviendra $8\frac{1}{3}$ *pour le troiſiéme proportionnel, &c.*

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si tant de nombres qu'on voudra ſont continuellement proportionnaux, deſquels les extrémes ſoient premiers entr'eux, il ne ſera pas comme le premier au ſecond, ainſi le dernier à quelque autre.

Soient A, B, C, continuellement proportionnaux, desquels les extrémes A & C soient premiers entr'eux. Je dis qu'il ne se peut faire que comme A est à B, ainsi C soit à quelque autre.

A 4.	B 6.	C 9.	D---

Car, s'il est possible, comme A est a B, ainsi soit C à D. En permutant comme A sera à C, ainsi B a D : & par la 23 prop. 7. A & C étans premiers, ils seront les plus petits en leur raison : & par la 21. prop. 7. ils mesureront également B & D ; sçavoir est A iceluy B ; & C iceluy D, et pource que comme A à B, ainsi B a C ; & A mesure B, aussi B mesurera C : & par la 11. com. sent. A mesurera aussi C ; & iceux A mesurant soy-même, il mesurera iceux A & C premiers entr'eux : ce qui est absurde. A n'est donc pas a B, comme C a D. Par mêmes raisons, il ne sera pas comme C à B, ainsi A a quelque autre. Parquoy si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBL. 1. PROP. XVIII.

Deux nombres estans donnez, considerer si on pourra trouver un troisiéme proportionnel à iceux.

Soient donnez les deux nombres A & B : Il faut considerer si à iceux on peut trouver un troisiéme nombre proportionnel.

La solution de cette proposition est aisée: Car il n'y a qu'à considerer si C, produit du second nombre B multiplié par soy-même, peut être mesuré, c'est-à-dire divisé par le premier A : car s'il peut être mesuré ou divisé, comme en la premiere formule, il est évident par la 20. prop. 7. que le quotient D sera troisiéme nombre proportionnel ; sinon,

A 4.	B 6.	D 9.	C 36.
A 6.	B 7.	D---	C 49.

on n'en trouvera point, puis que par la susdite 20. prop. 7. trois nombres étans prop. le produit des extrémes doit être égal au produit du milieu.

PROBL. 2. PROP. XIX.

Estans donnez trois nombres, considerer si on pourra trouver un quatriéme proportionnel à iceux.

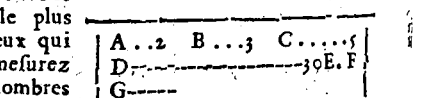
Soient donnez trois nombres A, B, C; & il faut considerer si à iceux on peut trouver un quatriéme proportionnel.

La solution de cette prop. est aussi aisée. Car il faut seulement considerer si D, qui est le produit des second & troisiéme nombres B & C, peut être mesuré par le premier A : s'il peut être mesuré ou divisé, il est évident par la 19. prop. 7. que le quotient E sera quatriéme proport. sinon, on n'en trouvera point, puis que par la susdite 19. prop. 7. quatre nombres étans proport. le produit du second & troisiéme doit être égal au produit du premier & quatriéme.

THEOR. 18. PROP. XX.

Quelque multitude de nombres premiers qu'on propose, il s'en trouvera encores d'autres.

Soit quelconque multitude de nombres premiers, A, B, C. Je dis qu'il s'en trouvera encores d'autres.



Car si on trouve le nombre DE, le plus petit de tous ceux qui peuvent être mesurez par les trois nombres A, B, C, par la 37. prop. 7. & à iceluy DE on adjoûte l'unité EF, le tout DF sera premier ou

non : S'il eſt premier, on a un nombre premier autre que pas un des propoſez : Mais ſi DF n'eſt premier, il ſera meſuré par quelque nombre premier, par la 34. prop. 7. Soit donc meſuré par G ; il eſt évident que G ne peut pas être un des trois A, B, C : car s'il étoit quelqu'un d'iceux, il meſureroit comme eux DE. Donc G meſurant le tout DF, & le retranché DE, par la 12. com. ſent. il meſureroit auſſi le reſte DF, ſçavoir un nombre l'unité : Ce qui eſt abſurde. Donc G eſt autre nombre premier que pas un des propoſez. Et en cette façon on en peut trouver infiny autres. Parquoy quelque multitude de nombres premiers qu'on propoſe, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si tant de nombres pairs que l'on voudra ſont adjoûtez ; le tout ſera pair.

Soient adjoûtez tant de nombres pairs que l'on voudra AB, BC, CD : Je dis que tout le compoſé AD, eſt pair.

Car d'autant que par la 6. def. 7. tout nombre pair a moitié, iceux AB, BC, CD, auront chacun moitié : Soit donc EF moitié de AB ; & FG de BC ; & GH de CD. D'autant que comme AB à EF, ainſi BC à FG, & CD à GH (la raiſon étant toûjours double) auſſi par la 12. prop. 7. comme AB ſera à EF, ainſi AD à EH. Mais AB eſt double d'iceluy EF : Donc auſſi AD ſera double de EH ; & partant iceluy nombre AD ayant moitié eſt pair par la ſuſd. 6. def. Parquoy ſi tant de nombres pairs, &c. Ce qu'il falloit prouver.

A.....6 B....4 C.....8 D
E...3 F..2 G....4 H

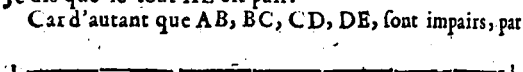
THEOR. 20. PROP. XXII.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra ſont

adjoûtez, & que la multitude d'iceux soit pair; le tout sera pair.

Soient adjoûtez tant de nombres impairs que l'on voudra, desquels la multitude AB, BC, CD, DE, soit pair: Je dis que le tout AE est pair.

Car d'autant que AB, BC, CD, DE, sont impairs, par

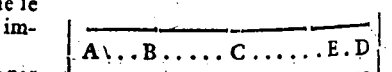


la 7. def. 7. chacun sera different du nombre pair de l'unité: & partant si de chacun d'iceux l'on retranche l'unité on les rendra tous pairs, & par la 21. prop. 9. le composé d'iceux sera pair: Et d'autant que leur multitude est en nombre pair, les unitez retranchées feront aussi un nombre pair, lequel adjoûté avec tout le reste, qui est déja nombre pair, le tout AE sera pareillement pair par la susdite 21. prop. 9. Parquoy si tant de nombres impairs, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra sont ajoûtez, & que la multitude d'iceux soit impair, le tout sera impair.

Soient adjoûtez tant de nombres impairs que l'on voudra, la multitude desquels comme AB, BC, CD soit impair: Je dis que le tout AD est impair.



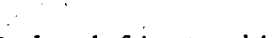
Car puis que par la def. du nombre impair, il differe du nombre pair de l'unité, ayant retranché l'unité ED du nombre impair CD, le reste CE sera pair. Mais par la prec. prop. AC composé des impairs AB, BC, pairs en multitude, est pair: Donc aussi AE composé des pairs AC, CE, sera pair: Et partant si à ice-

suy AE, l'on adjoûte l'unité ED, le tout AD sera impair, puis que par la susd. def. le nombre impair differe du pair de l'unité. Parquoy si tant de nombres impairs, &c, Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Si d'un nombre pair, on oste un nombre pair, le reste sera pair.

Soit un nombre pair AB, duquel soit retranché un nombre pair CB: Je dis que le reste AC est aussi pair.

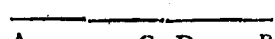


Ce qui est évident: Car s'il n'étoit pair, en ostant l'unité AD on le rendroit pair: Et le retranché avec iceluy, sçavoir DB, seroit aussi un nombre pair par la 21. prop. 9. & partant luy adjoûtant l'unité ostée AD, le tout AB seroit impair; ce qui est absurde, puis qu'il a été posé pair. Si donc d'un nombre pair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si d'un nombre pair, on oste un nombre impair, le reste sera impair.

Du nombre pair AB, soit retranché le nombre impair CB: Je dis que le reste AC est impair.



Car ayant retranché l'unité CD du nombre impair CB, le reste DB sera pair. Et d'autant que le tout AB est posé pair, par la preced. le reste AD sera aussi pair. Et partant si on en oste l'unité CD, le reste AC sera impair. Si donc d'un nombre pair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si d'un nombre impair on oste un nombre impair, le reste sera pair.

Soit un nombre impair AB, duquel soit retranché un nombre impair CB : Je dis que le reste AC est pair.

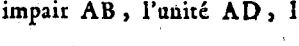
Car ayant retranché des nombres impairs AB, CB, l'unité DB, les nombres restans AD, CD, seront pairs. Et d'autant que du nombre pair AD, est retranché le nombre pair CD; par la 24. prop. 9. le reste AC sera pair. Parquoy si d'un nombre impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si d'un nombre impair on oste un nombre pair, le reste sera impair.

Du nombre impair AB, soit retranché un nombre pair CB : Je dis que le reste AC est impair.

Car ayant retranché de l'impair AB, l'unité AD, le reste DB sera pair ; duquel étant retranché le pair CB, par la 24. prop. 9. le reste DC sera aussi pair : & partant l'unité AD y étant adjoûtée, AC sera impair. Parquoy si d'un nombre impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

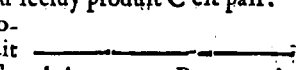


THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si un nombre impair multiplie un nombre pair, le produit sera pair.

Soit un nombre impair A, lequel multipliant le nombre pair B, fasse C : Je dis qu'iceluy produit C est pair.

Car d'autant que C est produit de A en B ; iceluy produit C sera composé d'autant de nombres égaux à B, qu'il y a d'unitez en A. Mais B est pair; & partant C sera composé



d'autant de nombres pairs égaux à B qu'il y a d'unitez en A : & par la 21. prop. 9. C sera pair. Parquoy si un nombre impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

On demontrera en la même maniere, que si un nombre pair multiplie un nombre pair, le produit sera aussi pair. Car derechef C sera composé d'autant de nombres pairs égaux à B qu'il y a d'unitez en A, &c.

A . . 2	B 4
C 8	

COROLLAIRE.

De ce que dessus, il s'ensuit qu'un nombre pair multiplié par soy-même produira un nombre pair ; comme il est manifeste, en posant les nombres pairs A & B égaux.

THEOR. 27. PROP. XXIX.

Si un nombre impair multiplie un nombre impair; le produit sera impair.

Que le nombre impair A, multipliant le nombre impair B, face C : Je dis qu'iceluy produit C est impair.

Car puis que C est le produit de A en B, il sera composé d'autant de nombres égaux à B qu'il y a d'unitez en A : Et partant puis que tant A que B est nombre impair, leurdit produit C sera composé d'autant de nombres impairs égaux à B, qu'il y a d'unitez au nombre impair A : parquoy la multitude d'iceux sera impair, & par la 23. prop. 9. ledit produit C sera nombre impair. Si donc un nombre impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A . . . 3	B 5
C 15	

COROLLAIRE.

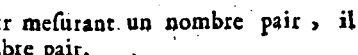
De cecy est manifeste qu'un nombre impair multiplié par soy-même produit un nombre impair.

SCHOLIE.

Clavius demontre en cet endroit (aprés Campanus) les deux Theoremes suivans.

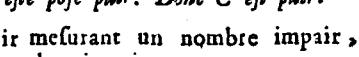
1. Un nombre impair mesurant un nombre pair, il le mesure par un nombre pair.

Soit le nombre impair A, lequel mesure le nombre pair B par C. Je dis que C est pair. Car s'il est impair, B produit de A impair multiplié par C impair, sera impair, par la 29. prop. 9. ce qui est absurde : car il a esté posé pair. Donc C est pair.



2. Un nombre impair mesurant un nombre impair, il le mesure par un nombre impair.

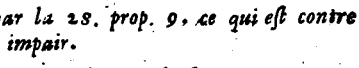
Soit le nombre impair A, qui mesure le nombre impair B par C. Je dis que C est impair : Car s'il est pair ; B fait de A impair par C pair, sera pair par la 28. prop. 9, ce qui est contre l'hypothese ; donc C est impair.



A ces deux Theor. nous adjoûterons le suivant.

Tout nombre qui mesure un nombre impair, est aussi impair.

Soit le nombre impair A, lequel B mesure par C. Je dis que B est impair. Car C estant multiplié par B produira A par la 9. com. sent. & si B n'est impair, mais pair, le produit A sera pair par la 28. prop. 9. ce qui est absurde, puis qu'il a esté posé impair. Donc B qui mesure A impair, n'est pas nombre pair, mais impair.

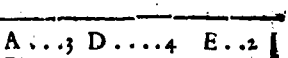


THEOR. 28. PROP. XXX.

Si un nombre impair mesure un nombre pair, il mesurera aussi sa moitié.

Soit le nombre impair A, qui mesure le nombre pair B. Je dis qu'il mesurera aussi sa moitié C.

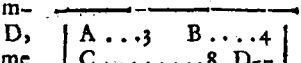
Car puis que A mesure B, soit par le nombre D : celuy D sera pair, comme nous avons démontré au Scholie du precedent Theor. 1. & partant il se pourra diviser en deux également par la 6. def. du 7. E soit donc la moitié de D. Parquoy comme D sera à sa moitié E, ainsi B sera à sa moitié C : & en permutant, comme D sera à B, ainsi E sera à C. Mais A mesurant B par D, aussi D mesurera B par A par la 8. com. sent. & partant D sera la partie de B dénommée par A : donc aussi E sera la partie de C dénommée par le même A : & partant A mesurera C, par la 40. prop. 7. Si donc un nombre impair mesure un nombre pair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



THEOR. 29. PROP. XXXI.

Si un nombre impair est premier à quelque nombre, il sera aussi premier à son double.

Soit le nombre impair A, premier à quelque nombre B, duquel le double soit C. Je dis que A est aussi premier à C. Car si A & C ne sont premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera, & soit D, lequel sera impair, comme nous avons démontré au Scholie de la 29. prop. 9. Et puis qu'il mesure le nombre pair C (car C est pair puis qu'il a moitié B) il mesurera aussi sa moitié B par la prop. prec. Mais il mesure aussi A. Donc D mesure iceux A & B premiers entr'eux : ce qui est absurde. Il n'y aura donc point de nombre qui mesure A & C ; & partant ils seront premiers entr'eux. Si donc un nombre impair est premier à quelque nombre, &c. Ce qu'il falloit prouver.



THEOR. 30. PROP. XXXII.

Tous les nombres qui ſuivent le binaire en progreſſion double, ſont ſeulement pairement pairs.

Soient depuis le binaire A tant de nombres qu'on voudra B, C, D, E, continuellement proportionnaux en raiſon double. Je dis que B, C, D, E ſont tant ſeulement pairement pairs.

Vnité.	A2.	B4.	C8.	D16.	E32.

Qu'il ne ſoit ainſi. Soit priſe l'unité; & puiſque depuis l'unité, A, B, C, D, E, ſont continuellement prop. le plus petit meſurera le plus grand ſelon quelqu'un de ceux qui ſont entre les proportionnaux par la 11. prop. 9. leſquels étans tous pairs, il eſt évident par les def. du 7. que B, C, D, E, ſeront pairement pairs, & tous les autres qui pourroient ſuivre en la même progreſſion. Mais d'autant que A prochain de l'unité eſt nombre premier, à ſçavoir binaire, par la 13. prop. 9. aucun autre nombre ne meſurera aucun de tous ceux qui ſont en la progreſſion, ſinon ceux de la même progreſſion, leſquels étans tous pairs, un nombre pair meſurera chacun d'iceux par un nombre pair; & partant iceux nombres ſeront ſeulement pairement pairs. Parquoy tous les nombres qui ſuivent le binaire, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

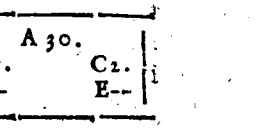
THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Si la moitié d'un nombre eſt impair, iceluy nombre ſera ſeulement pairement impair.

Soit le nombre A, duquel la moitié B eſt impair: Je dis que A eſt ſeulement pairement impair.

Car puiſque B impair eſt moitié de A, il le meſurera par le nombre binaire C, & par la 9. def. 7. A ſera pairement impair. Mais qu'il ſoit ſeulement pairement impair,

on le prouvera ainſi. S'il étoit pairement pair, un nombre pair, comme D, le meſureroit par quelque nombre pair, comme E. Et par la 9. com. ſent. A eſt fait de D en E : mais le même A eſt auſſi fait de la moitié B par le binaire C. Parquoy par la 19. prop. 7. le produit de C par B, étant égal au produit de E en D, comme C ſera à E, ainſi D à B. Mais C nombre binaire meſure E : Il faudroit donc auſſi que D pair meſuraſt B impair : ce qui eſt impoſſible. Donc A n'eſt pairement pair : & partant il eſt ſeulement pairement impair. Parquoy ſi la moitié d'un nombre eſt impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

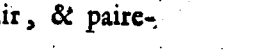


THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Si un nombre pair n'eſt de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, & que ſa moitié ne ſoit nombre impair, il ſera pairement pair, & pairement impair.

Le nombre pair A, ne ſoit de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, & que ſa moitié ſoit pair : Je dis que A eſt pairement pair & pairement impair.

Qu'il ſoit pairement pair, il eſt évident. Car d'autant que ſa moitié eſt pair, le binaire, qui eſt pair, le meſurera par icelle moitié : & par la 9. def. 7. il ſera pairement pair.



Or il eſt auſſi pairement impair : car puis que iceluy nombre A n'eſt de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, ſi on le diviſe toûjours en deux également on viendra enfin à un nombre impair auparavant que parvenir juſques au binaire, lequel nombre impair meſurera A par un nombre pair : Car ſi c'eſtoit par un impair, attendu que par la 29. prop. 9. un nombre impair multipliant un nombre impair, produit un nombre impair, A ſeroit impair ; ce qui

est absurde, étant posé pair. Vû donc qu'un nombre impair mesure A par un nombre pair, & qu'un nombre pair le mesure aussi par un nombre pair; iceluy nombre A sera pairement pair, & pairement impair. Parquoy si un nombre pair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 33. PROP. XXXV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que l'on retranche du second & du dernier, un nombre égal au premier; comme le reste du second sera au premier, ainsi le reste du dernier sera à tous les precedens.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux A, B, C, D, & que du second B l'on retranche FG égal au premier A: Et du dernier D l'on retranche KL aussi égal à A: Je dis que comme le reste BF sera à A, ainsi l'autre reste DK sera à tous les trois precedens A, B, C, ensemble.

A						8		
B		4		F			8	G
C								18
D	9	H	6	I	4	K	8	L

Car si de DL on retranche LI égal à BG, il est évident que KI sera égal à BF, (étant KL égal à FG) & si on retranche LH égal à C; comme les quatre nombres D, C, B, A, sont continuellement proportionnaux, aussi seront leurs égaux DL, HL, IL, KL: & en divisant, DH sera à HL, comme HI à IL, ou IK à KL; & partant par la 12. prop. 7. tous les antecedans DH, HI, IK, (c'est-à-dire DK) seront à tous les consequens HL, IL, KL, (c'est-à-dire A, B, C,) comme l'un des antecedans IK, est à l'un des consequens KL, ou leurs égaux BF à A. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR.

THEOR. 34. PROP. XXXVI.

Si depuis l'unité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raison double, jusques à ce que le tout composé soit nombre premier : iceluy tout multiplié par le dernier produira un nombre parfait.

Soient depuis l'unité tant de nombres qu'on voudra A, B, C, D, continuellement proportionnaux en raison double, la somme desquels & de l'unité soit E nombre premier, & que E multiplié par le dernier D face FG : Je dis que le produit FG est nombre parfait.

Car ayant pris HI double de E ; K double de HI ; & L double de K, & ainsi de suitte tant qu'il y aura de nombres proposez : iceux nombres E, HI, KL, seront continuellement proportionnaux en la raison de A, B, C, D ; & partant en raison égale, A sera à D comme E à L ; & par la 19. prop. 7. le produit de A multiplié par L, sera égal au produit de D par E, sçavoir FG : mais A étant binaire, FG sera double de L : ainsi E, HI, K, L, FG, seront continuellement proportionnaux en raison double. Maintenant de HI second soit retranché HM égal à E premier ; & de FG dernier, soit retranché FN, aussi égal à E premier : par la prec. prop. comme MI est égal à E, (d'autant que HI étoit double de E) ainsi NG sera égal à E, HI, K, L, ensemble. Mais FN égal à E, est aussi égal à l'unité & à A, B, C, D ensemble. Et par consequent FG sera égal à l'unité, & à A, B, C, D, E, HI, K, L, ensemble :

Vnité.
A . . 2
B 4
C 8
D 16
E 31
H 31 M 31 I
K 124
L 248
F 31 N 465 G
O-- P--

& puis que FG a été fait de E multiplié par D, par la 7. com. sent. D mesurera FG ; & partant par la 11. com. sent. l'unité, & les nombres A, B, C, qui par la 11. prop. 9. mesurent D, mesureront le même FG. Derechef puis que L mesure FG ; aussi par la 11. com. sent. les nombres E, HI, K, lesquels par la 11. prop. 9. mesurent L à cause de la raison double : mesureront le même FG : ainsi l'unité & tous les nombres A, B, C, D, E, HI, K, L mesurent iceluy FG, lequel ne peut être mesuré par aucun autre nombre que ceux-cy, comme nous montrerons incontinent : & partant par la 22. def. du 7. il sera nombre parfait, étant égal à toutes ses parties aliquottes.

Que si on pense que FG puisse être mesuré par quelque autre nombre que les susdits ; que O le mesure, s'il est possible, selon P : donc O multipliant P produira FG par la 9. com. sent. Mais le même FG est aussi produit de E en D. Donc un même nombre est fait de E premier par D 4e, & de P second en O 3e, & partant comme E à P, ainsi O à D par la 19. prop. 7. & puis que A, B, C, D, sont continuellement proportionnaux depuis l'unité, & que A proche de l'unité est premier, par la 13. prop. 9. nul autre nombre que A, B, C mesurera le dernier D : & O est posé n'être le même qu'aucuns d'iceux A, B, C ; O ne mesurera donc pas iceluy D. Mais comme O à D, ainsi étoit E à P : Donc aussi E ne mesurera P : & puis que E est premier par la 31. prop. 7. E & P seront premiers entr'eux : & partant les moindres en leur raison par la 23. prop. 7. & par la 21. prop. 7. E mesurera O, comme P mesurera D. Mais nul autre que A, B, C mesure iceluy D. Donc P sera le même que l'un d'iceux A, B, C. Soit donc le même que B : & d'autant que B, C, D, & E, HI, K, sont continuellement proportionnaux en raison double, par raison égale comme B sera à D, ainsi E à K, & partant par la 19. prop. 7. le produit de B par K, sera égal au produit de D en E. Mais le produit de D en E est égal à celuy de P en O. Donc un même nombre sera fait de P en O, que de B en K ; & partant par la 19. prop. 7. comme P sera à B, ainsi K à O. Mais P étoit le même que B : Donc aussi K sera le même que O : Ce qui est

absurde, car O a été posé autre que tous ceux-cy A, B, C, D, E, HI, K, L. Il n'y aura donc point d'autres nombres que A, B, C, D, E, HI, K, L, qui mesurent FG, & lequel ils composent. Iceluy est donc nombre parfait. Parquoy si depuis l'unité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raison double, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Il appert de ce Theor. que pour trouver des nombres parfaits, & leurs parties aliquottes, il faut poser d'ordre tant de nombres qu'on voudra continuellement doubles depuis l'unité, puis adjoûter tous ces nombres-là ensemble, & si la somme d'iceux est nombre premier, icelle étant multipliée par le dernier nombre, le produit sera nombre parfait. Mais si la susdite somme n'est nombre premier, il faudra poursuivre la position des nombres doubles jusques à ce que ladite somme de tous les nombres posez vienne à être nombre premier, laquelle étant, comme dit est cy-dessus, multipliée par le dernier des nombres doubles sera procreé un nombre parfait. Et si on prend autant de nombres continuellement doubles du susdit nombre premier (iceluy compté) qu'on en aura posé depuis l'unité, (icelle exclusé) tous ces nombres avec ladite unité, seront les parties aliquottes que peut avoir le nombre parfait trouvé. Ce qui est évident par la démonstration de cette prop. & neanmoins nous joindrons encore icy quelques exemples. Ayant posé 1 & 2, leur somme 3 est nombre premier, lequel étant multiplié par 2, produit 6, nombre parfait, duquel les parties aliquottes sont 1, 2, 3. Item 1, 2, 4, sont ensemble 7, nombre premier: parquoy iceluy étant multiplié par le dernier nombre 4, le produit 28 est nombre parfait, & les parties aliquottes d'iceluy sont 1, 2, 4, 7 & 14. Mais d'autant que la somme de ces nombres 1, 2, 4, 8, sçavoir 15, n'est pas nombre premier, il faut continuer la proportion double, & on aura 1, 2, 4, 8, 16, dont la somme 31, est un nombre premier, qui multiplié par le dernier nombre 16, produit le nombre parfait 496, duquel les parties aliquottes sont 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, & 248.

Fin du neufiéme Element.