

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

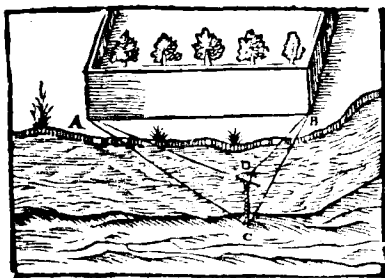
SOURCE DES IMAGES
Google Livres

LES QUINZE LIVRES DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

*Traduits en François par D. HENRION
Professeur és Mathematiques, revus & corrigez;
Avec des Commentaires beaucoup plus amples
& faciles, & des figures en plus grand
nombre que dans toutes les impressions
precedentes.*

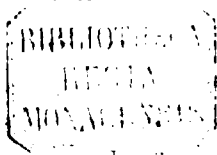
Plus, le Livre des **DONNEZ** du même Euclide,
aussi traduit en François par ledit Henrion.

TOME I.

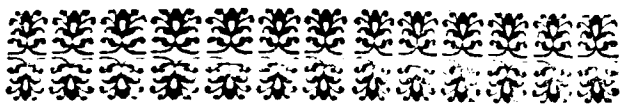


À ROUEN,
Chez JEAN LUCAS, rue aux Juifs, à côté de
la petite porte de l'Hôtel de Ville.

M. DC. LXXVI.



**Bayerische
Staatsbibliothek
München**



AU LECTEUR.



MY Lecteur, voicy le dernier des Ouvrages du sieur Henrion Professeur es Mathematiques, contenant les quinze Livres des Elements d'Euclide, traduits en François, avec des Commentaires beaucoup plus amples & faciles, & des figures mieux taillées qu'en toutes les traductions precedentes, auxquels il a ajouté le Livre des Donnez du même Euclide, aussi traduit en François, ce qui n'avoit point encores été fait jusques icy, quoy que l'usage de ce Livre soit fort commun par toutes les Mathematiques, & particulièrement en l'Analyse si aujourd'huy estimée & si recherchée, & qui a remis la Geometrie en son lustre autant qu'elle yfut jamais, avec

AU LECTEUR,

esperance d'une perfection beaucoup plus grande. Cet Ouvrage étoit imprimé dès le vivant de l'Auteur : & s'il ne l'a publié, c'est que son intention étoit d'y ajouter le reste de ce qui se trouve des œuvres d'Euclide, sçavoir l'Optique, & la Catoptrique, les Phenomenes, la Musique, & un fragment du leger & du pesant, toutes lesquelles parties il avoit déjà traduites, comme en font foy les Manuscrits qu'il a laissés, & qui sont entre les mains de sa veuve : ainsi il divisoit tous les Ouvrages d'Euclide en deux Tomes, dont le premier étoit celui-cy, & le dernier devoit contenir ce que nous venons de dire.



PREFACE.

A Geometrie se divise en doctrine des plans, qui est appelée du mot general Geometrie & doctrine des solides, que les Mathematiciens appellent par un nom propre & particulier Stereometrie. Car la Geometrie en general se propose, de considerer les plans & les solides, & de les comparer entr'eux ou de les diviser. Euclide nous voulant laisser en ses Elemens une parfaite connoissance de la Geometrie, traite des plans aux six premiers Livres, & aux cinq derniers des solides, recherchant leurs proprietéz. Et d'autant que toutes les choses Geometriques, & principalement ces cinq corps reguliers, qui ont de coûtume d'être appelez corps Platoniques, ne

P R E F A C E.

pouvoient être traittez parfaitement sans la connoissance des lignes commensurables & incommensurables, Euclide a mis son dixième Livre devant sa Stereometrie, auquel il traite de ces sortes de lignes ; Et sçachant que ce traité des lignes commensurables & incommensurables ne se peut faire sans la connoissance des nombres, il traite des proprietéz des nombres aux trois Livres qui precedent le dixième. C'est pourquoy tout ce volume des Elemens Geometriques compris en quinze Livres, (dont les deux derniers sont attribuez à Hypsicle Alexandrin) se pourra à bon droit diviser en quatre parties. La premiere partie contenuë en six premiers Livres, traite des plans : La seconde comprenant les trois Livres suivans, recherche les proprietéz des nombres : La troisième qui consiste au dixième Livre seul, traite des lignes

P R E F A C E.

commensurables & incommensurables: Et enfin la quatrième partie contenue aux cinq autres Livres, comprend la science des corps ou solides. La première partie se subdivise en trois : Car aux quatre premiers Livres, il est traité des plans absolument, & de leur égalité & inégalité: mais au cinquième Livre il est traité en general des proportions des grandeurs : & au sixième, sont examinées les proportions des plans.

Ce que c'est que Probleme, Theoreme, Proposition, Lemme, Corollaire & Scholie.

Toute démonstration de Mathématique, est ou Probleme ou Theoreme. Les Mathematiciens appellent *Probleme*, une démonstration qui enseigne à faire ou construire quelque chose : Et *Theoreme*, la démonstration laquelle recherche seulement quelque propriété d'une

P R E F A C E :

où plusieurs quantitez ensemble. Bref, les Problemes enseignent à trouver & construire quelque chose, & les Theoremes démontrent les affections & proprietéz des choses déjà faites & construites. Et tant le Probleme que le Theoreme, sont appelez *Proposition*, d'autant que l'un & l'autre nous propose quelque chose. On appelle *Lemme*, quelque Probleme ou Theoreme, qui étant nécessaire à une démonstration, se prend & prouve auparavant que de venir à cette démonstration principale, afin de la faire plus évidente & brève. On appelle *Corollaire*, une consequence que l'on tire de ce qui a été démontré en quelque proposition. Et enfin ce qu'on nomme *Scholie*, est une annotation qu'on fait seulement comme en passant sur quelque proposition.

ELEMENT



ELEMENT PREMIER.

DEFINITIONS.

1. Le point, est ce qui n'a aucune partie.



ES Physiciens disent que le point est le moindre objet de la veüe ; & iceluy peut être décuït avec ancre, ou autre chose : Mais les Mathematiciens rejettans cette définition, disent que le point est un objet de l'intellect si subtil, qu'il ne peut être divisé en aucunes parties : Et iceluy ne se peut écrire, mais seulement entendre & imaginer : Bien est vray, que pour le représenter à nos sens extérieurs, nous nous servons du point Physique. Le point n'a donc aucunes des dimensions Geometriques, c'est à dire qu'il n'a longueur, largeur, ny épaisseur, mais bien est-il principe d'icelles.

2. La ligne, est une longueur sans largeur.

Après le point, Euclide vient à la ligne, qui n'est autre chose que le flux ou coulement d'iceluy point, d'un lieu en un autre : car par ainsi l'intervale compris entre ces deux lieux-là, sera

une longueur sans largeur, puis que le point du coulement duquel elle est produite, n'en a aucune : & par conséquent la ligne (qui est la premiere espece de magnitude ou quantité continuë) a seulement une dimension, sçavoir est longueur, car n'ayant aucune largeur, il est certain qu'elle n'aura aussi aucune épaisseur ou profondeur.

Et pour tant mieux entendre cecy, qu'on imagine le point A être mû ou coulé depuis A jusques en B, & avoir laissé par son flux ou coulement la trace & vestige AB : or cette trace AB sera appelée ligne ; car l'intervalle compris entre les deux points A & B, est vraiment une longueur sans largeur & épaisseur, puis que le point A, par le coulement duquel elle est produite, est privé de toute dimension.

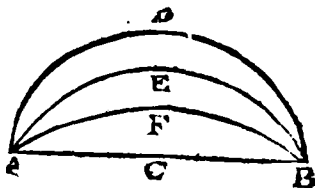


3. Les extrémitéz de la ligne, sont points.

Cecy est intelligible, puis que toutes lignes terminées commencent à un point, & achevent aussi à un point, comme les lignes précédentes AB, qui ont pour leurs extrémitéz les points A & B : car Euclide n'entend parler icy ny des lignes infinies, ny des circulaires, ny de toutes autres sortes de lignes, auxquelles on ne peut assigner aucun terme ny extrémité.

4. La ligne droite, est celle qui est également comprise & étendue entre ses points.

Les Mathématiciens ont de trois sortes de lignes, c'est à sçavoir la ligne droite, la ligne circulaire, qu'ils appellent aussi ligne courbe, & la ligne mixte : Euclide définit icy la droite, laquelle il dit être celle-là qui est également étendue entre ses points : ainsi la ligne ACB est dite ligne droite, pource que tous les points entremoyens d'icelle ligne, com-



me C, sont également posez entre les extrêmes A & B, l'un n'étant plus élevé ou abaissé que l'autre : ce qui n'advient aux trois autres lignes A D B, A E B, A F B, car il est manifeste que les points entremoyens D, E, F, sont bien plus élevez que les extrêmes A & B. Quelques autres Auteurs ont diversement défini la ligne droite : car Campanus dit, que c'est le plus court chemin d'un point iusqu'à un autre : &, selon Archimede, la ligne droite est la plus courte de toutes celles qui ont mêmes extrémitéz. Mais Platon dit, que c'est celle-là dont les points du milieu ombragent les extrêmes : comme par exemple, si en la ligne A C B, le point extrême A avoit la vertu d'illuminer, & le point du milieu C la force de cacher : iceluy point C empêcheroit que le point extrême B fût illuminé de l'autre extrême A : Et aussi l'œil étant au point extrême A, il ne pourroit voir l'autre extrême B, à cause du point C, posé entre iceux extrêmes : ce qui n'arriveroit pas aux lignes non droites, comme le démontrent les lignes ADB, AEB, & AFB.

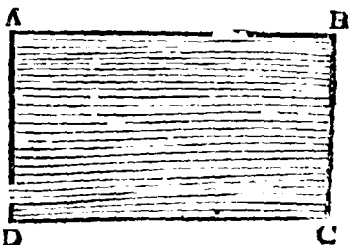
Or tout ainsi que les Mathématiciens conçoivent la ligne être décrite par le flux & mouvement imaginaire du point, ainsi aussi entendent-ils la qualité de la ligne décrite par la qualité d'iceluy mouvement : car si on entend que le point coule droit par le plus court chemin, ne se détournant çà ne là, la ligne ainsi décrite sera appelée ligne droite : mais si le point fluant vacille en son mouvement, & s'écarte çà & là, la ligne décrite sera appelée mixte : & finalement si le point fluant ne vacille en son mouvement, mais est porté en rond d'un certain mouvement uniforme & regulier, gardant toujours une égale distance à quelque certain point à l'entour duquel il est porté, cette ligne décrite sera appelée circulaire. Or Euclide ne traite icy que de deux simples lignes, sçavoir est de la droite & de la circulaire. Il a défini celle-là cy-dessus, & il définira cette cy à la 15. def. Mais quant à la mixte, il en obmet la définition, pource qu'elle n'a aucun usage en ses élémens Geométriques : il y en a de plusieurs sortes, & d'icelles traitent amplement Apollonius, Peisgeus, Nicomedes, Archimedes, & autres Auteurs.

5. Superficie, est ce qui a longueur & largeur tant seulement.

Après la ligne, qui est la premiere espece de quantité conti-

nuë, & qui a une seule dimension, Euclide définit la superficie, qui est la seconde espee de quantité, & a deux dimensions: car on n'y trouve pas la seule longueur comme en la ligne, mais aussi latitude, sans toutefois aucune profondeur, comme la quantité $A B C D$ comprise entre les lignes $A B$, $B C$, $C D$, $D A$, & considérée selon la longueur $A B$, ou $D C$, & selon la latitude $A D$, ou $B C$, sans aucune épaisseur ou profondeur, est appelée superficie.

Quelques-uns décrivent la superficie disent, que c'est l'extrémité du corps. Et comme dit Proclus, la superficie nous est fort naïvement



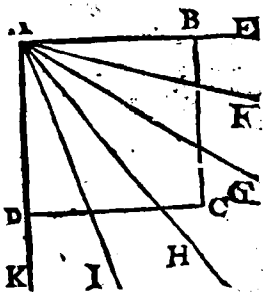
représentée par les ombres du corps: car veu qu'elles ne peuvent penetrer au dedans de la terre, elles seront seulement longues & larges. Davantage, comme les Mathématiciens entendent que la ligne est produite par le flux ou coulement du point, ainsi, disent-ils, que la ligne se mouvant en travers, produit la superficie: comme par exemple, si on entend que la ligne $A B$ se meuve vers la ligne $D C$, elle fera la superficie $A B C D$, laquelle n'aura aucune profondeur, puis que c'est la trace & vestige du mouvement de la ligne $A B$ qui n'a aucune profondeur.

Les extrémités de la superficie, sont lignes.

Il faut icy entendre des superficies bornées, & terminées par lignes droites, comme la superficie $A B C D$ cy-dessus, de laquelle les extrémités sont les lignes $A B$, $B C$, $C D$, & $D A$: car il y a bien plusieurs superficies encloses d'une seule ligne, comme de la circulaire, & autres, dont Euclide ne fait mention en ces Elemens-cy: mais, il n'en veut icy parler, non plus que de la superficie sphérique, qui circuit & environne un corps entièrement rond & sphérique. Comme donc la ligne terminée commence à un point, & finit à un autre point, ainsi aussi la superficie terminée commence par une ligne, & finit par une ligne, tant selon sa longueur, que selon sa largeur.

7. Superficie plane, est celle qui est également comprise entre ses lignes.

Cette définition de la superficie plane a quelque similitude & rapport à celle de la ligne droite: car comme la ligne qui est également étendue entre ses points, est appelée ligne droite; ainsi aussi la superficie qui est également étendue entre ses lignes, tellement que toutes les parties du milieu ne sont plus élevées ny abaissées que les extrêmes, est appelée superficie plane. Et derechef, comme la ligne droite est la plus courte d'entre ses extrémités, ainsi aussi la superficie plane est la plus courte, ou brève de toutes celles qui ont mêmes extrémités. C'est encore pour la même raison, que quelques autres décrivant la superficie plane, disent que c'est celle-là de laquelle toutes les parties du milieu ombragent ses extrêmes: ou bien celle-là à toutes les parties de laquelle une ligne droite peut être accommodée. Comme par exemple la superficie A B C D sera dite plane, si la ligne droite A E se mouvant à l'entour du point immobile A, en sorte qu'elle vienne à être la même que A F, puis la même que A G, & puis encore la même que A H, en après la même que A I, & finalement la même que A K; elle ne rencontre rien en la superficie de plus élevé ou abaissé l'un que l'autre, ains que tous les points de ladite superficie



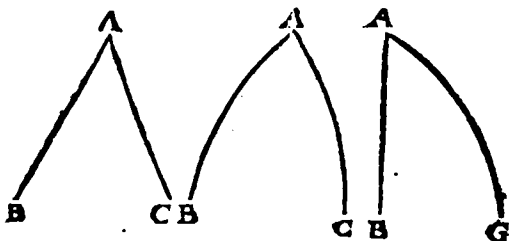
soient touchez d'icelle ligne mouvante A E, & en quelque sorte raclez par icelle. Mais toutes superficies esquelles il y a des endroits les uns plus élevez que les autres, tellement qu'on n'y peut pas accommoder une ligne droite par tous les lieux & endroits d'icelles, telle qu'est la superficie intérieure d'une voûte ou arcade, ou bien l'extérieure d'un globe, ou d'une colonne ronde, & aussi d'un cône, &c. sont appelées superficies courbes; & icelles sont de plusieurs sortes, c'est à sçavoir convexe, comme la superficie intérieure d'une voûte ou arcade: mais la con-

remplation de toutes ces choses appartient à la Stereometrie, dont traite Euclide és cinq derniers Livres ; c'est pourquoy il explique seulement icy la superficie plane, de laquelle il traite és six premiers Livres. Et cependant est à noter que cette superficie est souventesfois appelée plan par les Mathematiciens : tellement que quand ils parlent de plan, il faut toujours entendre une superficie plane.

8. Angle plan, est l'inclination de deux lignes, l'une à l'autre se touchant en un plan non directement.

Euclide enseigne icy que quand deux lignes constituées en quelque superficie plane concurrent en un point d'icelle superficie, & ne se rencontrent directement, alors l'inclination d'icelles deux lignes s'appelle angle plan. Comme par exemple, pour-

ce que
les
deux
lignes
AB, &
AC,
con-
cur-
rent
en A,
& ne
se ren-



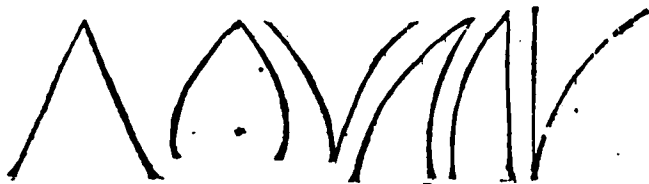
contrent pas directement ; le concours ou inclination qu'icelles deux lignes font au point A, s'appelle angle ; Et d'autant qu'iceluy angle est constitué au même plan qu'icelles deux lignes AB & AC, on l'appelle angle plan, à la difference d'autres angles, dont les uns sont nommez angles solides, desquels traite cy apres Euclide en la Stereometrie ; & les autres sont appelez angles spheriques, desquels traitent amplement Menelaus & Theodose en leurs éléments spheriques, comme nous avons aussi fait en nos triangles spheriques.

Or quant à l'angle plan cy-dessus définy est à remarquer, premierement que la grandeur ou quantité dudit angle plan

consiste en la seule inclination des lignes qui le constituent, & non pas en la longueur d'icelles lignes; car le prolongement desdites lignes n'augmente point leur inclination, ny par conséquent la grandeur de l'angle. En apres que quelques Geometres ont estimé qu'afin que deux lignes fassent angle, il étoit nécessaire qu'étans continuées du point de leur rencontre, elles s'entrecoupassent en iceluy, dont s'ensuiroit que deux cercles s'entretouchans en un plan, ou qu'une ligne droite touchant un cercle ne feroit angle, ce qui est contre l'intention d'Euclide, ainsi qu'il appert, tant par cette définition de l'angle plan, que par la 16. p. 3. & comme l'a aussi bien démontré Clavius sur la mesme proposition, où il refuse Pelletier, qui disoit que la ligne droite touchant le cercle, ne faisoit angle; c'est pourquoy ceux qui tiennent encore cette opinion, se moquent bien d'Euclide, de Clavius, & autres Geometres, qui disent qu'une ligne droite touchant un cercle, fait un angle contingent, ou d'attouchement.

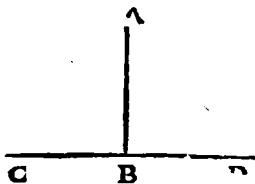
9. Que si les lignes comprenant l'angle sont droites, l'angle sera appellé rectiligne.

Tout angle plan est fait, ou de deux lignes droites, & alors il se comme angle rectiligne, comme dit icy Euclide; ou de deux lignes courbes, & alors on l'appelle angle curviligne; ou bien d'une ligne droite & d'une courbe, & alors on le nomme angle mixte. Or les angles curvilignes peuvent varier en trois manieres, & les mixtes en deux, à cause de la diverse inclination ou habitude des lignes courbes, ainsi qu'il appert manifestement aux angles plans de la figure cy apposée.



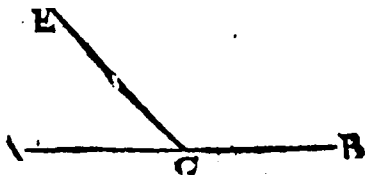
10. Quand une ligne droite tombant sur une autre ligne droite, fait les angles de part & d'autre égaux entr'eux, les angles sont droits, & la ligne tombante, est perpendiculaire à celle-là, sur laquelle elle tombe.

Il y a de trois sortes d'angles rectilignes, sçavoir est droit, obtus & aigu : le premier desquels Euclide définit icy avec la ligne perpendiculaire, & quant aux deux autres, il les définit aux deux définitions prochainement suivantes. Il dit donc icy que si une ligne droite tombe sur une autre ligne droite, en sorte qu'elle fasse les angles de part & d'autre égaux, ce qui advient lors que ladite ligne ne s'incline ou panche plus d'un côté que de l'autre ; chacun d'iceux angles est appelé angle droit, & la ligne ainsi tombante, est dite perpendiculaire à celle-là sur laquelle elle tombe. Comme par exemple, si la ligne droite A B tombe sur la ligne droite C D, en sorte qu'elle ne s'incline pas plus d'un côté que de l'autre, les deux angles, qu'elle fait au point B seront égaux entr'eux, & chacun d'iceux sera nommé angle droit ; mais la ligne A B sera dite perpendiculaire à C D, sur laquelle elle tombe. Par même raison, la ligne droite C B sera aussi dite perpendiculaire à la ligne droite A B, encore qu'icelle C B fasse un seul angle droit avec A B ; Et ce d'autant que si ladite ligne A B étoit prolongée directement de la part de B, elle y feroit un autre angle égal au premier. Parquoy en Geometrie, pour conclure que quelque angle est droit, ou que la ligne qui le constitue est perpendiculaire à une autre, il faut seulement prouver que ledit angle est égal à celui de l'autre côté. Semblablement, si quelque angle est dit droit, ou que l'une des lignes qui le constitue soit perpendiculaire à l'autre, on pourra aussi conclure que ledit angle est égal à celui de l'autre côté ; car si ces angles - là n'étoient égaux, ils ne seroient nommez angles droits, ainsi qu'il appert tant par la susdite définition, que par les deux suivantes.



11. Angle obtus , est,celuy qui est plus grand qu'un droit.
 12. Mais l'aigu, est celuy qui est plus petit qu'un droit.

Quand une ligne droite tombant sur une autre s'incline ou panche plus d'un côté que de l'autre , elle fait conséquemment deux angles inégaux, dont l'un est plus grand que l'angle droit, & se nomme angle obtus , mais l'autre est plus petit , & s'appelle angle aigu. Ainsi pource qu'en cette figure, la ligne droite E C tombant sur la ligne droite A B, s'incline & panche plus du côté de A C que de la part de B C, les deux angles du point C seront inégaux , & celui vers B, qui est plus grand & ouvert que le droit sera dit angle obtus ; mais celui de la part de A, qui est plus petit & fermé que l'angle droit , sera nommé angle aigu.



Et d'autant que souvente fois en un plan concurrent plus de deux lignes à un même point, & par conséquent y constituent plusieurs angles, les Geometres ont accoustumé (pour éviter confusion) d'exprimer l'angle dont ils parlent par trois lettres, desquelles celle du milieu dénote le point auquel les lignes constituent l'angle, & celles des extrêmes signifient les commencemens d'icelles lignes qui font iceluy angle : tellement qu'en la figure cy-dessus, l'angle obtus que nous avons dit être celui de la part de B, sera exprimé & entendu par ces trois lettres E C B, ou B C E, à cause qu'il est constitué au point C, & contenu par les deux lignes droites E C, & B C, qui commençant en E & B, se vont rencontrer au susdit point C. Mais l'angle aigu que nous avons dit être de la part de A, s'exprimera par ces trois lettres E C A, ou A C B, parce qu'il est constitué au point C, & fait par les deux lignes droites E C & A C, qui commencent en E & A, & se vont rencontrer au susdit point C. Co

qu'on doit bien noter, afin de connoître & discerner facilement les angles, dont sera fait mention és demonstrations suivantes.

13. Terme, est l'extrémité de quelque chose.

Ainsi les points sont termes ou extrémités des lignes, les lignes des superficies, & les superficies des corps.

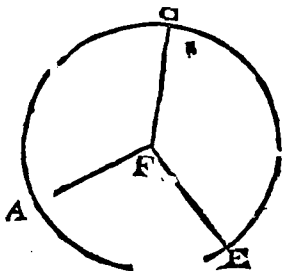
14. Figure, est ce qui est compris & environné d'un, ou de plusieurs termes.

Toute quantité ayant termes, n'est pas dite figure: mais seulement celles que les termes environnent: ainsi la ligne terminée par deux points, n'est pas dite figure: mais toutes superficies, & solides, finis & limitez, sont nommez figures, pource qu'ils sont environnez d'un seul, ou de plusieurs termes: d'un seul, comme le Cercle, l'Ellipse, & la Sphère: de plusieurs, comme le triangle, le quarré, le cube, la pyramide, &c.

15. Cercle, est une figure plane, contenuë par une seule ligne qu'on appelle circonference, vers laquelle toutes les lignes droites menées d'un seul point de ceux qui sont en icelle figure, sont égales entr'elles.

16. Et ce point-là est appelé centre du cercle.

De toutes les figures planes, la plus parfaite est le cercle, lequel, selon que le définit icy Euclide, est une figure plane contenuë & environnée d'une seule ligne, à laquelle toutes celles menées d'un seul point de ceux qui sont dedans la figure, sont égales entr'elles: & cette ligne à s'appelle periphère, ou circonference du cercle, & le susdit point, centre du cercle: Comme par exemple, si une superficie ou espace est environnée d'une seule ligne ACE,



& que de quelque point d'audedans d'icelle, comme de F, toutes les lignes droites menées au terme ou circuit ACE, comme FA, FC, & FE, sont égales entr'elles : telle figure plane sera appelée cercle, & le terme ou ligne ACE, qui circuit & environne icelle figure, s'appelle periphère, ou circonference du cercle : mais ledit point F, est nommé centre du cercle.

Quelques Geometres définissent autrement le cercle, & disent, que c'est une figure plane, décrite par une ligne droite finie, laquelle ayant un des points extrêmes fixe, est menée à l'entour d'iceluy jusques à ce qu'elle retourne au même lieu où elle a commencé à mouvoir : comme si la ligne droite AF ayant le point F fixe, est entendue se mouvoir à l'entour d'iceluy point F, tirant de A vers C, E, jusques à ce qu'elle revienne au même lieu FA, où elle a commencé son mouvement ; elle décrira par iceluy mouvement le cercle ou espace ACE, duquel la circonference est décrite & tracée par le point mobile A ; & le point fixe F, est le centre d'iceluy cercle, duquel centre toutes les lignes droites menées à la susdite circonference ACE, sont égales entr'elles, puis qu'elles proviennent toutes d'une seule & même mesure, c'est à sçavoir de la ligne FA.

17. Diametre du cercle, est une ligne droite menée par le centre du cercle, & finissant de part & d'autre à la circonference d'iceluy cercle, le divise en deux également.

Si dans un cercle on mene une ligne droite par le centre, qui aille de part & d'autre jusques à la circonference ; icelle ligne s'appellera diametre du cercle. Comme en cette premiere figure, la ligne droite AB, qui est tirée par le centre C, & va de part & d'autre jusques à la circonference du cercle, s'appelle diametre du cercle : Et iceluy, comme adjointe Euclide, coupe le cercle en deux parties égales, tellement que la partie AEB est égale à la partie ADB. Ce qui est assez manifeste, puisque ledit diametre AB passe par le milieu du cercle, c'est à sçavoir par le centre C : car s'il ne divisoit le cercle en deux parties égales, les lignes droites tirées du centre à la circonference, ne seroient pas égales, contre la définition du cercle : Neanmoins plusieurs Interpretes d'Euclide rapportent en cet endroit la de-

monstration que Proclus dit, en avoir été faite par Thales

Mileſien, qui eſt telle :

Imaginons nous que la partie de cercle $A B D$ ſoit ſuperpoſée & accommodée

à l'autre partie du cercle $A E B$, en ſorte que le diamètre $A B$ ſoit commun à l'une & à l'autre partie. Or

la circonférence $A D B$ ſe rencontrera totalement avec la circonférence $A E B$,

ou bien elle tombera au deſſus d'icelle, ou au deſſous :

Si elles ſe rencontrent & conviennent l'une à l'autre, il eſt évident que

ces deux parties là faites par le diamètre $A B$, ſont

égales entr'elles, puis-

que l'une n'excede l'autre. Mais ſi on dit que la circonférence

$A D B$ ne ſe rencontre pas avec la circonférence $A E B$, ainſi

qu'elle tombe au deſſus ou au deſſous d'icelle, comme en la 2.

figure, ſoit tirée du centre C une ligne droite, laquelle coupe

la circonférence $A D B$ en D , & la circonférence $A E B$ en E ;

les deux lignes droites $C D$ & $C E$, qui ſont tirées du centre à

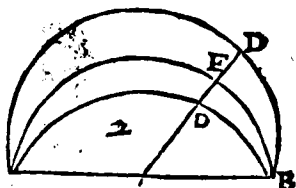
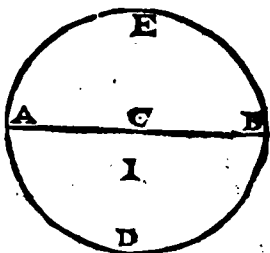
la circonférence d'un même cercle, ſeront égales entr'elles,

par la définition du cercle : Ce qui eſt abſurde, car l'une n'eſt

que partie de l'autre. Donc l'une de ces circonférences-là ne

tombera pas au deſſus ny au deſſous de l'autre ; mais ſe rencontreront & conviendront totalement l'une avec l'autre, & par

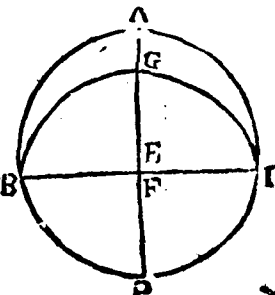
conſéquent ſeront égales : ce qu'il falloit demonſtrer.



De cette demonſtration il appert que le diamètre ne coupe pas ſeulement la circonférence en deux également, mais auſſi toute l'aire & ſuperficie du cercle : Car puis-que les demies circonſérences conviennent & s'accordent entr'elles, comme il a été demonſtré : les ſuperficies contenues & enclouſes entre le diamètre & chacune d'icelles demy circonſérences conviendront auſſi entr'elles, puis-que l'une n'excede l'autre ; & par conſéquent elles ſeront égales entr'elles.

18. Demy cercle, est une figure comprise du diametre, & de moitié de la circonference.
19. Portion ou segment de cercle, est une figure comprise d'une ligne droite, & de partie de la circonference.

An cercle precedent la figure AEB contenuë sous le diametre AB, & la moitié de la circonference AEB, est dite demy cercle ; car il a été démontré cy-dessus, qu'icelle figure est moitié du cercle AEBD, & ce à cause que le diametre, ou ligne droite AB, qui le divise en deux parties, passe par le centre C : Mais quant une ligne droite, qui ne passe pas par le centre du cercle, le divise en deux parties : chacune d'icelles parties contenuë sous ladite ligne droite, & une partie de la circonference, est nommée segment ou portion de cercle ; & ces deux parties sont inégales, car celle où est le centre est plus grande que l'autre. Comme par exemple, au cercle ABCD, duquel le centre est E, soit une ligne droite BFD, qui coupe ledit cercle en deux parties, sans passer par ledit centre E ; la partie BAD, composée sous la ligne droite BD, & la partie de circonference BAD, s'appelle segment ou portion de cercle, comme aussi BCD, qui est contenuë sous la même ligne droite BD, & la circonference BCD. Or il est assez évident que la portion BAD, en laquelle est le centre E, est plus grande que l'autre portion BCD, attendu que si de B par le centre E on menoit un diametre, il couperoit le cercle en deux moities, chacune desquelles seroit plus grande que la portion BCD, & moindre que l'autre portion BAD : Neanmoins Clavius & quelques autres Interpretes d'Euclide le demontrent ainsi. Soit conçu ou imaginé que par le centre E, soit mené le diametre AC perpendiculaire à BD : donc si les susdites portions BAD, & BCD, sont dites égales,



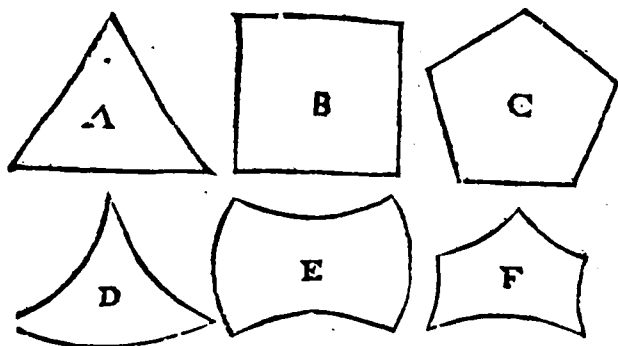
& que la portion BCD, soit entenduë se mouvoir à l'entour dē la ligne droite BD, en sorte qu'elle tombe sur l'autre portion BAD; cette portion là conviendra avec cette-cy, & la ligne droite CF à la ligne droite AF, à cause que par la 10. défin. les angles du point F sont droits & égaux : Parquoy la ligne droite FC, qui est maintenant la même que FA, sera plus grande que EA, qui n'est que partie d'icelle FA. Mais d'autant que EC, est égale à EA, érans toutes deux menées du centre F à la circonférence; FC sera pareillement plus grande qūe EC, la partie que le tout : Ce qui est absurde. Donc la portion BCD ne conviendra pas à la portion BAD; ains elle tombera dedans icelle, cōme est la portion BGD, de sorte que la ligne droite FG, qui sera lors la même que FC sera moindre que EA ou EC; car si on disoit qu'elle tombe dehors, comme si le cercle étoit BCDG, duquel le centre fust E; aussi la portion BCD tomberoit dehors BGD, ainsi que la portion BAD : Derechef FA, qui seroit lors la même que FC, seroit plus grande que EG, c'est à dire que EC; & partant la partie FC seroit derechef plus grande que le tout EC : Ce qui est absurde. Il est donc manifeste que la portion BAD, en laquelle est le centre E, est plus grande que l'autre portion BCD, puis que cette-cy est égale à la portion BGD, qui est partie de la portion BAD. Car puis qu'il a été démontré que la portion BCD, meūe à l'entour de la ligne droite BD, ne peut convenir sur la portion BAD, ne tomber hors icelle; elle tombera totalement au dedans comme BGD.

Or ces deux définitions n'étoient pas proprement de ce lieu, veu qu'elles ne sont employées en ce premier Livre, mais bien au troisième, auquel la dernière est répétée.

10. Figure rectiligne, est celle qui est comprise de lignes droites.

Après avoir définy le cercle, le demy cercle, & les portions de cercle, Euclide passe aux figures planes rectilignes, & dit, que ce sont ceiles contenuës & enclosēs de lignes droites, & telles sont les trois figures cy-dessous cottées A, B, C; par consequent les figures planes comprises & environnées de lignes courbes, comme celles cottées D E F, sont appellées figures courbeli-

gnes, ou curvilignes : mais les figures qui sont circonscrites &c



encloses en partie de lignes droites , & en partie de lignes courbes , sont nommées figures mixtes,

11. Figure de trois côtez , est celle qui est comprise de trois lignes droites.

Euclide voulant décrire divers genres de figures rectilignes, commence par les figures trilatères, ou de trois côtez , & dit que ce sont celles qui sont contenues & environnées de trois lignes droites : & d'autant que telles figures ont toujours trois angles, on les appelle communément triangles. Ainsi la figure A cy-dessus, laquelle est contenue sous trois lignes droites, qui constituent trois angles, sera nommée figure trilatère, ou plutôt triangle rectiligne ; & y en a de diverses espèces, qui seront déclarées cy-après : mais la figure D, circonscrite & enclose de trois lignes courbes, sera dite triangle curviligne.

12. Figure de quatre côtez , est celle qui est comprise de quatre lignes droites.

Après les figures trilateres viennent en ordre les quadrilateres, ou de quatre côtez, c'est à sçavoir les figures contenuës sous quatre lignes droites, lesquelles constituent aussi quatre angles; & pour ce sont-elles souvent appellées quadrangles: ainsi entre les figures precedentes celle cõtée B, comprise & enclose de quatre lignes droites qui constituent quatre angles, sera appellée quadrilatere, ou quadrangle rectiligne; & y en a de diverses especes cy-apres declarées: mais la figure cõtée E enclose de quatre lignes courbes sera dite quadrangle curviligne.

23. Figures multilateres, ou de plusieurs côtez, sont celles qui sont comprises de plus de quatre lignes droites.

Le nombre des especes de figures rectilignes étant infini, Euclide s'est contenté de définir, & particulièrement denommer les deux premieres especes cy-dessus declarées, c'est à sçavoir celles contenuës sous trois & quatre lignes droites: & quant aux autres especes de figures, qui sont contenuës & encloses par plus de quatre lignes droites, il les appelle de ce nom general, multilateres: mais les Geometres denominant particulièrement quelqu'un de ces figures multilateres, prennent leurs denominations du nombre de leurs angles: ainsi les figures cy-devant cõtées C, & F, lesquelles sont comprises & environnées de cinq lignes, qui constituent cinq angles, sont appellées *Pentagones*: Et celles contenuës de six lignes, sont nommées *Hexagones*; de sept, *Heptagones*; de huit, *Octogones*; de neuf, *Enneagones*; de dix, *Decagones*; de vnze, *Endecagones*; de douze, *Dodecagones*, &c.

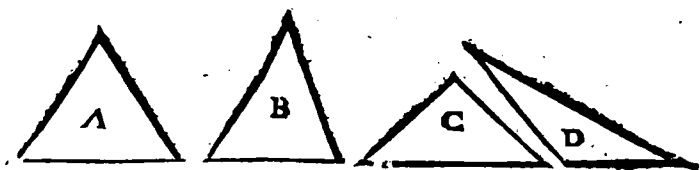
24. Or des figures de trois côtez, celle se nomme Triangle equilateral, qui a les trois côtez égaux.

25. Triangle Ifocele, qui a deux côtez égaux seulement.

26. Scalene, qui a les trois côtez inégaux.

Il y a diverses especes de triangles rectilignes, soit qu'on les considere

considere selon les côtez, soit qu'on ait égard à leurs angles :



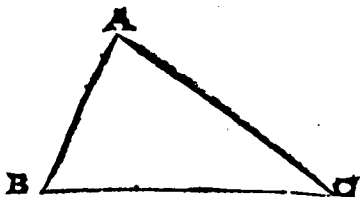
considerant les côtez il y en a de trois especes, lesquelles Euclide expose par ces trois definitions, & dit premierement que le triangle qui a tous les trois côtez égaux, comme le triangle A, s'appelle triangle equilateral : Mais les triangles qui n'ont que deux côtez égaux, comme B & C, s'appellent triangles isoscelles. Et finalement, le triangle qui a tous les trois côtez inégaux, comme D, est nommé triangle scalene. Or les triangles Equilateraux sont tousjours uniformes & d'une même sorte : mais les Isoscelles, & les Scalenes sont diversifiez en infinies manieres.

27. Encores des figures de trois côtez, celle se nomme triangle rectangle qui a un angle droit.
28. Ambligone, qui a un angle obtus.
29. Oxigone, qui a les trois angles aigus.

Euclide considere maintenant les triangles ayant égard à leurs angles, lesquels triangles sont de trois sortes, c'est à sçavoir rectangle, ambligone, & oxigone: les triangles rectangles sont ceux qui ont un angle droit; & tel est icy le triangle A : mais les triangles ambligones, sont ceux qui ont un angle obtus, comme est icy le triangle B : & les triangles oxigones, sont ceux qui ont tous les trois angles aigus, & tel est icy le triangle C.

Or est à noter qu'en tout triangle deux quelconques lignes

des trois qui le cōtiennent, éans prises pour deux cōtez, la troi-
sième restante a accoutumé d'être appellée par les Geometres, la
base du triangle, soit
qu'icelle ligne soit
le costé infime du
triangle, ou non :
tellement que cha-
cune desdites trois
lignes qui consti-
tuent & enserment le
triangle peust être
prise pour base :

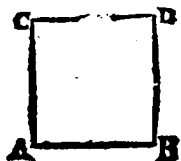


Ainsi au triangle A

B C, les lignes A B, & A C éans prises pour les deux costez, la
troisième ligne B C sera la base : mais si on prend A B, & B C
pour les deux costez, A C sera la base du triangle.

30. Mais des figures de quatre cōtez ; celle qui
a les quatre cōtez égaux, & les quatre angles
droits s'appelle quarré.

Après les figures trilateres, Euclide ex-
pose les quadrilateres, qui sont de cinq
sortes : la première d'icelles, qui est equi-
laterale & rectangle, s'appelle quarré. Ainsi
la figure quadrilatere A B C D, ayant tous
les quatre costez égaux, & tous les quatre
angles droits sera appellée quarré.



31. Quarré long, qui a les quatre angles droits,
mais non pas tous les cōtez égaux.

La seconde figure quadrilateres s'a-
pelle quarré long, à cause qu'étant
plus long d'une part que de l'autre,
elle a tous les quatre angles droits.
Ainsi la figure quadrilatere A B C D
sera appellée quarré long, car elle a
les quatre angles droits, & non pas



tous les costez égaux entr'eux, ains seulement les costez opposez A B, D C, qui sont plus longs que les deux autres opposez, A D, B C, qui sont aussi égaux entr'eux.

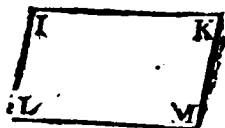
32. Rhombe, qui a les quatre côtez égaux, mais non pas les quatre angles droits.

I a troisiéme sorte de figure quadrilatere, laquelle on appelle Rhombe a bien tous les quatre costez égaux entr'eux, ainsi que le carré, mais elle n'a pas comme luy les quatre angles droits; ains elle en a deux opposez obtus, & deux opposez aigus. Ainsi le quadrilatere E F G H, duquel tous les quatre costez sont égaux entr'eux & les quatre angles non droits, ains obtus & aigus, sera appellé Rhombe.



33. Rhomboide, qui a les angles opposez, & les côtez opposez aussi égaux entr'eux, sans être equilateral, ny rectangle.

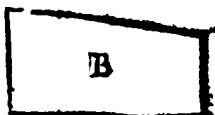
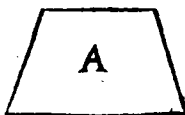
La figure quadrilatere qui n'est equilateralle ny rectangulaire, mais a les costez opposez égaux entr'eux, & les angles opposez aussi égaux entr'eux, s'appelle Rhomboide; & telle est icy la figure I K L M, de laquelle les costez opposez I K, L M sont égaux entr'eux, & plus longs que les deux autres costez opposez I L, K M, qui sont pareillement égaux entr'eux, mais les angles opposez I, M, égaux, & plus grands que les deux autres K, L, lesquels sont aussi égaux entr'eux.



34. Toute autre figure de quatre côtez, est appellée trapeze.

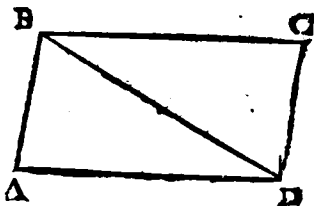
Toute autre figure quadrilatere differente des quatre susdites, c'est à sçavoir qui n'est ny carré, ny carré long, ny

Rhombes, ny
Rhomboïdes,
s'appellent trape-
sés & telles sont
ces deux figures
A & B, car l'u-



ne ny l'autre n'est equilateres ny rectangle, ny n'a les angles op-
posez égaux, ny tous les costez opposez aussi égaux.

Or est icy à noter que
quand d'un angle de
quelconque figure qua-
drilateres on tire une ligne
droite à l'angle opposé,
cette ligne est appelée
diametre par aucuns, &
diagonalle par d'autres ;
ainsi au quadrilateres A B
C D la ligne B D, menée
de l'angle B à son opposé D est dite diagonalle, ou diametre.



35. Lignes droites paralleles, sont celles qui étrans
sur un même plan, & prolongées infiniment
de part & d'autre ne se rencontrent jamais.

Afin que les lignes droites soient dites paralleles, ou equidi-
stantes, il ne suffit pas qu'étrans prolongées infiniment de part &
d'autre, elles ne viennent iamais à se rencontrer, mais il est aussi
nécessaire qu'elles soient en une même superficie plane : Car
plusieurs lignes droites n'étrans en une même superficie, pour-
roient bien être prolongées à l'infiny & ne se rencontrer iamais,
lesquelles toutesfois ne seroient dites paralleles. Comme par
exemple, si deux lignes droites posées de travers au milieu de
l'air ne se touchent point, bien qu'elles soient prolongées tant
qu'on voudra, elles ne se
rencontreront iamais, &
toutesfois elles ne seront
pas dites paralleles. Par-
quoy les deux lig. droites
A B, & C D, lesquelles
sont en une même superficie plane, & qui étrans prolongées à



l'infiny tant de la part de A, C, que de B, D, ne se rencontrent jamais, seront dites lignes paralleles.

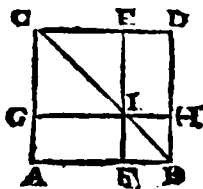
Or icy finissent les definitions du premier livre d'Euclide : Mais d'autant qu'en ce même Livre est souvent parlé de parallelogramme, & de leurs complemens, lesquels Euclide n'a point définy, nous ajouterons icy leurs definitions.

36. Parallelogramme, est une figure quadrilatere qui a les côtez opposez parallels, ou equidistans.

Telle figure est tousjours l'une de ces quatre: Quarré, Quarré long, Rhombe, & Rhomboïde, car elles ont toutes leurs côtez opposez parallels.

37. Mais quand en un parallelogramme on mene un diametre, & deux lignes droites paralleles aux côtez, lesquelles coupant iceluy diametre à un même point, divisent le parallelogramme en quatre autres parallelogrammes ; ces deux là par lesquels le diametre ne passe point, sont appelez complemens ; mais les deux autres par lesquels le diametre passe, sont dits être à l'entour du diametre.

Soit un parallelogramme ABDC, duquel le diametre est BC, & la ligne EF coupant iceluy diametre au point I, soit parallele aux côtez AC, BD ; mais la ligne GH coupant ledit diametre BC au même point I, soit parallele aux côtez AB, CD. Il est manifeste que tout le parallelogramme est divisé par lesdites deux lignes paralleles EF, GH, en quatre autres parallelogrammes, deux desquels, sçavoir AGIF, & DEIH, par lesquels le diametre BC ne passe point, sont appelez par les Geometres complemens, ou supplementes des deux autres parallelogrammes BF IH, CE IG, lesquels



sont dits être à l'entour du diametre, à cause que par iceux passe le diametre.

P E T I T I O N S O U D E M A N D E S.

1. D'un point donné à un autre point, mener une ligne droite.
2. Continuer infiniment une ligne droite donnée & terminée.
3. Décrire un cercle de quelque centre & intervalle que ce soit.

Euclide ne se sert en ces élémens-cy que de deux sortes de lignes simples, sçavoir est de la droite & de la circulaire, la description desquelles étant fort facile, il demande icy qu'on luy concède & accorde, sans qu'il soit contraint de démontrer qu'elle est possible; ce qui est toutefois manifeste; car puisque la ligne est un flux & coulement imaginaire du point, & partant la ligne droite être un flux procédant de droit chemin, & le plus court qui puisse estre d'un lieu à un autre, il est certain que si on entend quelque point se

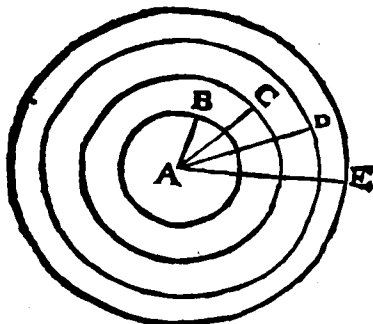
mouvoir directement à un autre, une ligne droite sera menée d'un point à l'autre. Parquoy on ne pût pas nier que depuis le point A, jusques à quelconque point B, on ne

A B

C D

puisse mener une droite ligne, comme A B, ainsi qu'Euclide requiert qu'on luy accorde par la première des trois pétitions susdites. Et si on entend le même point se mouvoir encore plus outre directement & sans aucunement décliner ça ne là, la ligne droite terminée sera prolongée; & ce prolongement se pourra faire à l'infiny, veu que nous pouvons entendre ce point là se mouvoir infiniment; Et partant personne ne pourra nier que la ligne droite A B cy-dessus, ne puisse être continuée jusques en C, puis encore jusques en D, & ainsi à l'infiny, comme Euclide demande qu'on luy accorde par la 2. pétition. Mais si on conçoit quelconque ligne droite terminée se mouvoir à l'entour d'un de ses points extrêmes qui demeure fixe, jusques à ce qu'elle retourne au même lieu où elle a commencé son mou-

ventent, sera décrit un cercle, & faire ce qui est requis par la 3. petition, comme il apert en ces quatre lignes droites AB , AC , AD , AE , chacune desquelles étant menée à l'entour du centre A , décrit un cercle selon la grandeur & intervalle d'icelle.



Aux trois petitions precedentes, Clavius a adjointé la suivante.

4. Etant donné quelconque grandeur, on en pût prendre une autre plus grande, ou moindre.

Car d'autant que toute quantité continuë peut être infiniment augmentée par addition, & diminuée par division, il ne se peut donner quantité continuë si grande, qu'il ne s'en puisse donner encore une plus grande; ny une si petite qu'il ne s'en puisse encore donner une plus petite. Ce qui est dit icy touchant l'addition, est aussi veritable aux nombres; car chaque nombre peut être augmenté à l'infiny par l'addition continuelle de l'unité, jaoit qu'en la diminution d'iceluy on parvienne à l'unité indivisible.

A X I O M E S O V

communes Sentences.

1. Les choses égales à une même, sont égales entr'elles.

A ce premier axiome, Clavius a adjointé, qu'une chose qui est

plus grande ou plus petite qu'une des égales, est aussi plus grande ou plus petite que l'autre : Et si l'une des choses égales est plus grande ou plus petite que quelque grandeur, l'autre est pareillement plus grande ou plus petite que la même grandeur.

2. Si à choses égales, on adjoute choses égales, les tous sont égaux.
3. Si de choses égales, on ôte choses égales, les restes sont égaux.
4. Si à choses inégales, on adjoute choses égales, les tous sont inégaux.

A cet axiome Clavius a adjouté, que si à choses inégales on adjoute choses inégales, c'est à sçavoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite, les tous sont inégaux, sçavoir est celui-là plus grand, & cettui-cy plus petit.

5. Si de choses inégales, on ôte choses égales, les restes sont inégaux.

A cette notion Clavius adjoute aussi, que si de choses inégales on ôte choses inégales, c'est à sçavoir de la plus grande, moins, & de la plus petite, plus; les restes sont inégaux, sçavoir est celui-là plus grand, & cettui-cy plus petit.

Or en toutes les quatre notions precedentes par le mot de choses ou quantitez égales, il faut aussi entendre une même commune à plusieurs; Car si à choses égales on y en adjoute une même commune, les tous seront égaux. Et si de choses égales on en retranche une commune, les restes seront aussi égaux. Et si à choses inégales on en adjoute une commune; ou à une même chose commune, on adjoute choses inégales, les tous seront inégaux. Et si de choses inégales, on en retranche une même commune, ou d'une même chose, on en retranche d'inégales, les restes seront inégaux.

6. Les choses doubles d'une autre sont égales entr'elles.

Clavius adjoute à cet axiome, que ce qui est double d'une

des choses égales est pareillement double de l'autre : Mais il est aussi manifeste que les choses qui sont triples d'une même, ou bien quadruple, ou quintuple, &c. sont égales entr'elles.

7. Les choses qui sont moitié d'une même, sont égales entr'elles.

Il est aussi évident que les choses égales entr'elles sont moitié d'une même : Et semblablement que les choses qui sont tierces parties d'une même, ou quarts, ou cinquièmes, &c. sont aussi égales entr'elles.

En ces deux derniers axiomes, par une même quantité on doit aussi entendre les quantitez égales, car les choses doubles, triples, quadruples, &c. de choses égales, sont aussi égales entr'elles ; Item, les choses qui sont moitié, ou tierces parties, &c. de choses égales, sont pareillement égales entr'elles.

8. Les choses qui conviennent entr'elles, sont égales entr'elles.

C'est à dire, que deux grandeurs seront égales entr'elles, si étransposées l'une sur l'autre, l'une n'excede l'autre, mais toutes deux ensemble s'ajustent entr'elles : comme deux lignes droites, seront dites être égales entr'elles, si l'une étant posée sur l'autre, celle qui est posée dessus s'ajuste à toute l'autre, tellement qu'elle ne l'excede, ny ne soit excédée d'icelle. Ainsi aussi deux angles rectilignes seront égaux entr'eux quand le sommet de l'un, étant posé sur le sommet de l'autre, l'un n'excede l'autre, mais les lignes de l'un tombent totalement sur celles de l'autre : car par ainsi les inclinations des lignes seront égales, combien que souventefois icelles lignes soient inégales entr'elles. Ainsi aussi deux superficies seront égales entr'elles, quand l'une étant posée sur l'autre, elle ne l'excede, ny n'est excédée par icelle, mais s'ajustent totalement entr'elles. Quelqu'un expliquant cette notion a dit que convenir, c'est avoir les extrémités sur les extrémités : ce qui n'est pas vray en toutes grandeurs ; Car pour exemple, une ligne droite peut bien avoir ses extrémités sur les extrémités d'une ligne courbe, laquelle néanmoins, ne luy sera égale. Ainsi aussi une ligne courbe peut bien avoir ses extrémités sur les extrémités d'une autre ligne courbe, laquelle ne luy sera pas pourtant égale. Or il est manifeste

que de cet axiome on peut bien convertir & prendre pour principe, *que les lignes droites égales conviennent* : Aussi *que les angles rectilignes égaux conviennent* : Semblablement, *Que les superficies planes égales & semblables conviennent*. On peut bien encore tirer quelques autres converses de cet axiome : mais de le vouloir convertir universellement (comme quelques-uns) c'est se moquer, veu que si on trouve une ligne courbe égale à une droite, elles ne conviendront pas pourtant : & aussi qu'à tout angle rectiligne, il s'en peut bailler un curviligne égal, lesquels néanmoins ne conviendront jamais : voire même faire un quarré égal à un triangle, ou à quelconque autre figure rectiligne : lesquels pourtant ne peuvent jamais convenir.

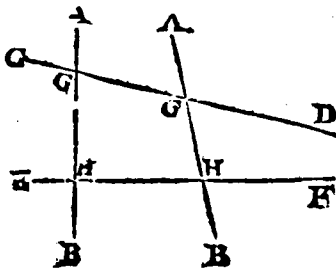
9. Le tout est plus grand que sa partie.

10. Tous les angles droits sont égaux entr'eux.

De ce principe, nous pouvons convertir & prendre pour maxime, que tout angle rectiligne égal à un angle droit, est aussi droit.

11. Si une ligne droite tombant sur deux autres lignes droites, fait les angles intérieurs d'un même côté plus petits que deux droits, icelles deux lignes étans continuées à l'infiny, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

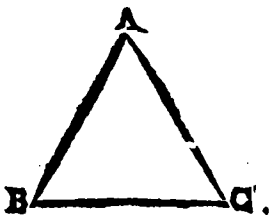
Comme par exemple, si la ligne droite A B, tombant sur les deux lignes droites C D, E F, & les coupant aux points G, H, fait les deux angles intérieurs D G H, F H G, pris ensemble plus petits que deux droits, icelles deux lignes C D, E F, étans continuées à l'infiny se rencontreront de la part de D, F, où les susdits angles intérieurs



sont faits moindres que deux droits : Car il est manifeste que de l'autre côté, sçavoir est vers C, E, l'espace d'entre lesdites deux lignes C D, E F, s'élargira tousjours de plus en plus; mais de certui-cy il s'étrecira en sorte que finalement icelles lignes se rencontreront à un point.

12. Deux lignes droites n'enferment pas un espace.

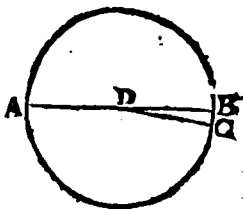
Une seule ligne courbe enferme bien un espace, comme font aussi une ligne droite & une courbe, mais deux droites ne le peuvent faire, ains il en faut du moins trois, pour contenir & enclore une espace, cōme il apert en cette figure, en laquelle les 2 lignes droites A B, & B C, qui font l'angle B, éans prolongées tant qu'on voudra de la part de A & C, ne se joindrōt point, mais au contraire elles se dilateront tousjours de plus en plus, tellement que pour enclore l'espace d'entre icelles deux lignes, il sera nécessaire d'en mener une troisième, comme A C.



A ces 12 axiomes, Clavius & autres Interpretes d'Euclide, ont eucore adjouté les 8 suivans.

13. Deux lignes droites se rencontrans indirectement n'ont pas un même & commun segment.

Combien que par la nature de la ligne droite, il soit assez manifeste que deux lignes droites, se rencontrans de travers, ne peuvent avoir aucune partie commune, tant petite qu'elle puisse étre, outre le point de leur rencontre, si est-ce toutesfois que Proclus le démontre ainsi. Que deux lignes droites A D B, A D C ayent, s'il est possible, une partie cōmune A D. Du centre D, & de l'intervale d'icelle A D, soit d'éciit un cercle coupant les deux



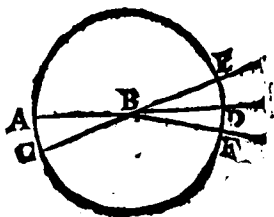
lignes droites proposées aux points B & C. Donc les circonferences AB, & ABC seront égales entr'elles: (car elles sont circonferences de deux cercles égaux, puis que ADB, ADC sont posés diamètres) la partie & le tout : ce qui est absurde. Donc deux lignes droites, &c.

Or nous n'avons pas rapporté cet axiome, ny aussi les sept autres suivans, tout de même qu'ils se trouvent dans Clavius & autres Interpretes d'Euclide, ains avons changé quelques mots aux uns, & ajouté aux autres, afin d'ôter de ceux-là tout doute & ambiguïté, & ne laisser en ceux-cy aucune défectuosité : comme par exemple, en cettuy-cy nous avons ajouté *se rencontrans indirectement*, pource que deux lignes droites peuvent bien avoir un commun segment, quand elles sont posées directement, & constituent comme



14. Deux lignes droites se rencontrans à un point indirectement, si elles sont toutes deux prolongées, elles s'entrecouperont necessairement en iceluy point.

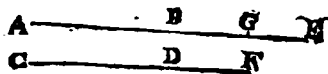
Cet axiome dépend aussi de la nature de la ligne droite, & toutesfois Clavius le démontre ainsi. Que deux lignes droites AB, CB se rencontrent indirectement au point B; ie dis qu'icelles lignes éans prolongées s'entrecouperont à iceluy point B, sçavoir est que CB prolongée tombera, comme en E, au dessus de AB prolongée. Car si CB continuée ne tomboit au dessus de AB prolongée, ou elle conviendrait avec icelle AB continuée, de sorte qu'elle passeroit par D, & par ainsi les deux lignes droites ABD, CBD auroient un même



segment BD commun, contre le precedent axiome : ou bien elle tomberoit au dessous de AB prolongée comme en F , tellement que CBF seroit une ligne droite : Donc du centre B , & de quelconque intervalle soit décrit un cercle $ACFD$. coupant les lignes droites AB , CB prolongées en D , F . Or puis que l'une & l'autre ligne droite ABD , CBF passe par le centre B , tant ACD que CF sera demy cercle par la 18. def. & conséquemment les circonferences ABD & CF seront égales entr'elles, le tout & la partie : ce qui est absurde.

15. Si à choses égales on ajoute choses inégales, l'excez des toutes sera le même que l'excez des ajoutées.

Aux grandeurs égales AB , CD , étrans ajoutées les inégales BE , DF , desquelles la difference ou excés



est GE , il est manifeste que la toute AE excedera la toute CF du même excés GE .

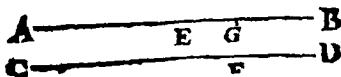
16. Si à choses inégales on ajoute choses égales, l'excez des toutes sera le même que l'excez de celles qui étoient au commencement.

Comme si (en la figure precedente) aux grandeurs inégales BE , DF , dont l'excez ou difference est GE , on ajoute les grandeurs égales AB , CD : il est manifeste que la toute AE excedera la toute CF du même excés GE .

17. Si de choses égales on retranche choses inégales, l'excez des restantes sera le même que l'excez des retranchées.

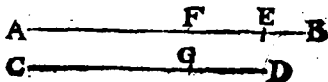
Des grandeurs égales AB , CD , étrans retranchées les inéga-

les, B E, D F, dont
l'excez est E G, il est
évident que le reste
C F excèdera le reste
A E, du même ex-
cez E G.



18. Si de choses inégales on ôte choses égales, l'ex-
cez des restantes sera le même que l'excez des
toutes.

Comme si des grandeurs inégales A B, C D, dont l'excez
est B E, on retranche les
grandeurs égales A F,
C G, il est manifeste
que le reste F B, excède-
ra le reste G D, du même
excez B E.



19. Le tout est égal à toutes ses parties prises en-
semble.
20. Si un tout est double d'un tout, & le retran-
ché du retranché ; le reste sera aussi double du
reste.

Comme par exemple, le nombre total 24. étant double du
nombre total 12 : & 18. retranché de celui-là, double de 5.
retranché de celui-cy, 14. reste du premier tout, sera aussi
double de 7. reste du second tout.



ELEMENT

PREMIER.

PROBL. I.

PROP. I.

Sur une ligne droite donnée & terminée , décrire un triangle equilateral.



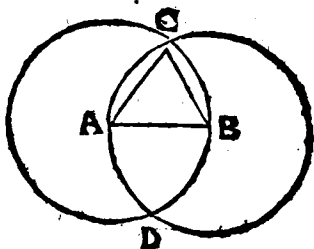
OIT la ligne droite donnée A B, sur laquelle il faut faire un triangle equilateral.

Du centre A, & de l'intervale de A B soit décrit le cercle B C D: Item, du centre B, & de l'intervale de la même A B, soit décrit un autre cercle A C D, coupant le premier es points C & D, de l'un desquels, sçavoir de C, soient menées les deux lignes

droites C A, & C B: Je dis que le triangle A B C, construit sur la ligne droite donnée A B, est equilateral.

Car le costé A B, est égal au costé A C par la quinzième definition, d'autant qu'ils procedent de même centre vers même circonference: & par la même raison, le costé B A est égal au costé B C. Donc par la 1. com. sent. les costez C A,

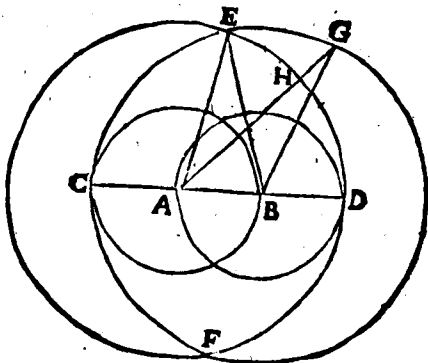
& CB seront égaux, chacun étant égal à AB : & partant le triangle ABC décrit sur AB , est équilateral ; qui est ce qu'il falloit faire.



S C H O L I E.

Quelques Interpretes ont icy enseigné à décrire aussi sur une ligne droite donnée un triangle Isoscèle, & un Scalene, ce que nous ferons aussi en cette maniere. Soit une ligne droite donnée AB , à l'entour de laquelle des centres A & B , soient décrits deux cercles, ainsi que dessus. En apres soit prolongée icelle AB , de part & d'autre vers les circonferences iusques en C & D : puis du centre A , & intervalle AD , soit décrit le cercle DEF ; Item du centre B , & intervalle B

C , le cercle CEF , comprenant le premier es points E & F , de l'un ou l'autre desquels, sçavoir de E , soient menées aux points A & B , les deux lignes EA ,



& B : Je dis que le triangle AEB , fait sur la ligne donnée

née

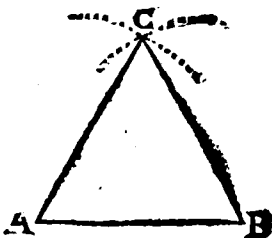
l'arc AB , est Iſoſcelle, qui eſt que les deux côtés AE , EB , ſont égaux entr'eux, & plus grands que AB . Car d'autant que par la 15. def. AE , eſt égale à la ligne droite, AD , & icelle AD eſt double de AB , ven que BA , & DB , ſont égales entr'elles; auſſi AE ſera double de AB . Derechef, parce que BE eſt égal à BC , & icelle BC eſt double de AB , auſſi BE ſera double d'icelle AB . Ven donc que l'un & l'autre côté AE & BE eſt double de la même AB , ils ſeront égaux entr'eux par la 6. com. ſent. & partant plus grands que la ligne AB . Donc le triangle AEB eſt Iſoſcelle. Maintenant, ſi du point A , on tire la ligne droite AG à la circonſerence EGF , qui ne ſoit la même que AE , ou AD , coupant la circonſerence EHD en H , & de G on mene à B la ligne droite GB , ſera conſtitué le triangle AGB ſur la ligne AB , lequel ſe dû être ſcalene. Car par la 15. def. tant AH , AD , que BG , BC ſont égales. Mais AD , BC ſont doubles de AB : d'icelle ſeront donc auſſi doubles AH , BG : & partant plus grandes qu'icelle AB . Ven donc que AG eſt plus grande que AH , ou que BG : le triangle AGB ſera ſcalene: ce qu'il falloit faire.

Or eſt icy à noter que pour brièveté nous mettrons ſouventes fois ce mot ligne au lieu de ligne droite: & quelques fois auſſi nous poſons ſimplement deux lettres capitales: comme par exemple AB , au lieu de dire la ligne droite AB , c'eſt pourquoy quand on trouvera ledit mot ligne poſé ſimplement, ou bien deux lettres capitales de ſuite, il faudra entendre une ligne droite. Semblablement quand on trouvera ce mot angle, ou trois lettres capitales poſées ſimplement de ſuite ſans aucune explication, il faudra entendre un angle rectiligne, le lieu duquel ſera toujours denoté par la lettre du milieu, ainſi que nous avons déjà remarqué à la 12. Def.

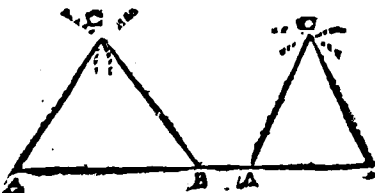
Et d'autant qu'en la conſtruction & démonſtration de la pluſpart des problèmes de ces Elements-cy, Euclid employe beaucoup de paroles, & tire pluſieurs lignes qui ne ſont neceſſaires pour pratiquer leſdits problèmes, nous enſeignerons en ſuite de leurs démonſtrations, comme on peut facilement & brièvement conſtruire leſdits problèmes, & principalement ceux qui ſont les plus en uſage chez les Mathématiciens, & en la pratique deſ-

quels on peut apporter quelque brièveté.

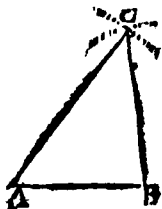
Premierement donc, pour décrire un triangle équilatéral sur une ligne droite donnée AB , des centres A & B , mais de l'intervalle d'icelle AB , soient décrits deux arcs de cercles s'entrecoûpans en C ; puis iceluy point C , soient tirées les lignes droites AC , BC , & sera fait le triangle équilatéral ACB .



Mais pour décrire un triangle Isoscèle sur ladite ligne AB ; des centres A & B , mais d'un intervalle plus grand qu'icelle AB , si on veut les côtes plus grands que la ligne donnée, ou moindre (& toutes-fois plus grand que la moitié d'icelle AB) si on veut les côtes moindres: & soient décrits deux



arcs s'entrecoûpans en C , puis tirées les deux lignes AC , BC , lesquelles feront sur AB le triangle Isoscèle ACB . Et pour construire un triangle scalene sur ladite AB , du centre B , & d'un intervalle plus grand que BA , soit décrit un arc, puis du centre A , & d'un intervalle encore plus grand que le précédent, soit décrit un autre arc qui coupe le premier en C , auquel point soient menées les deux lignes droites AC , BC , & sera fait le triangle scalene ACB .



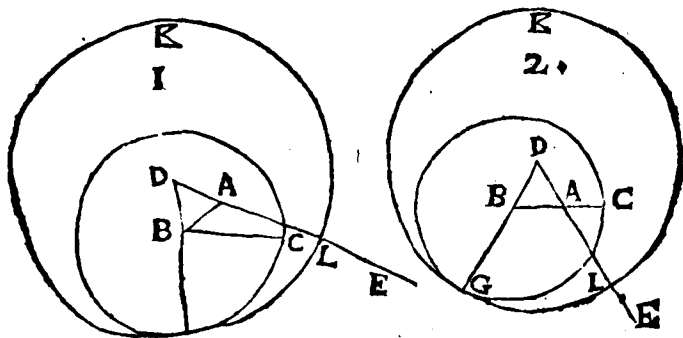
Voilà donc comme il faut décrire sur une ligne donnée un triangle ou équilatéral, ou Isoscèle, ou scalene, & sur la 22. prop. de ce Livre nous enseignerons comme il faut construire quelconque triangle ayant les trois côtes égaux à trois lignes droites données.

P R O B. 2. P R O P. II.

D'un point donné, mener une ligne droite égale à une ligne droite donnée.

Soit le point donné A, & la ligne droite donnée B C : & il faut du point A, mener une ligne droite égale à icelle donnée B C.

De l'un ou l'autre extrême de la ligne donnée B C, sçavoir de B, comme centre, & de l'intervale d'icelle B C, soit décrit le cercle C G : puis du point donné A, au centre B, soit



menée la ligne droite A B (sinon que le point A fut donné en la ligne B C, comme en la 2. fig.) sur laquelle ligne A B par la précédente proposition soit décrit le triangle équilateral ADB, & soit continué le costé DB, jusques à ce qu'il rencontre la circonférence en G : mais le costé DA tant qu'on voudra en E. En apres, du centre D, & de l'intervale de la ligne droite DG, soit décrit le cercle G K L coupant la ligne D E en L : Je dis que la ligne A L, qui est menée du point donné A, est égale à la ligne droite donnée B C.

Car les lignes droites DG & DL sont égales, d'autant qu'elles procedent de même centre vers une même circonférence, desquelles lignes si on ôte DA & DB, qui sont égales, étant DAB

triangle equilateral : les restantes BG & AL seront aussi égales par la 3. com. sent. Mais BG est égale à BC, parce qu'elle procede de même centre vers même circonference. Donc AL sera égale à BC, parce que les choses égales à une même sont égales entr'elles. Nous avons donc du point donné A mené la ligne droite AL égale à la ligne droite donnée BC. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE,

Ce problème peut avoir divers cas : car où le point donné est posé en la même ligne droite donnée, ou hors icelle : & selon chacune de ces positions il y peult encor avoir divers cas, deux desquels seulement nous avons rapporté icy, d'autant qu'en tous les autres cas il y a toujours une même construction & démonstration.

Que si en la construction on fait sur la ligne droite AB le triangle ABD isocelle au lieu qu'il a été fait équilateral, on démontrera en la même manière la ligne droite AL être égale à la ligne droite BC .

Quant à la pratique de ce problème, elle est fort facile: car il n'y a qu'à prendre la ligne donnée BC , & de son intervalle décrire un arc du centre A , & quelque ligne droite menée d'iceluy centre à cet arc, sera égale à la ligne droite donnée BC .

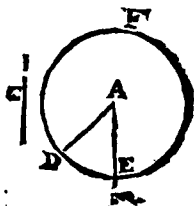
PROB. 3.

PROP. III.

Deux lignes droites inégales étans données, ôter de la plus grande, une ligne droite égale à la plus petite.

Soient les deux lignes droites inégales AB & C , desquelles AB est la plus grande : & d'icelle il faut ôter une ligne égale à C .

A l'un ou l'autre des extrêmes de la plus grande ligne A B, sçavoir est au point A, soit posée par la précédente prop. la ligne droite AD égale à la moindre C : puis du centre A, & de l'intervale AD, soit décrit un



ercle coupant AB en E. Je dis que la ligne AE est égale à C. Car d'autant que par la 15. def. les lignes droites AD, AE sont égales : & par la construction AD est égale à C; par la 1. com. sent. AE sera aussi égale à C. Nous avons donc ôté de AB la ligne AE égale à C, ainsi qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

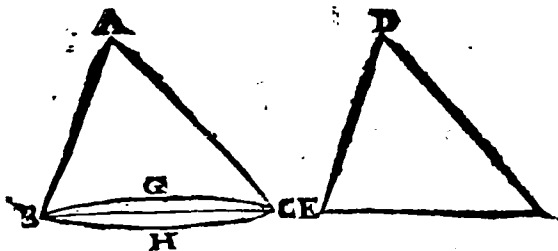
Il y peut bien avoir divers cas en ce problème, à cause des diverses positions auxquelles sa peuvent rencontrer les deux lignes données, mais en tous ces cas-là on peut toujours faire la même construction & démonstration que cy dessus, comme Proclus a fort bien remarqué sur cette prop.

Quant à la pratique de ce problème, elle est très-aisée, veu qu'il n'y a qu'à prendre la moindre ligne donnée, & de l'intervalle d'icelle, décrire de l'un ou l'autre extrême de la plus grande ligne un petit arc, qui coupera d'icelle, une ligne égale à la moindre donnée.

THEOREME I. PROP. IV.

Si deux triangles ont deux côtez égaux à deux côtez chacun au sien, & l'angle contenu d'iceux, égal à l'angle : la base fera égale à la base ; & les autres angles égaux aux autres angles, chacun au sien ; & le triangle égal au triangle.

Soient les deux triangles ABC & DEF, desquels le côté AB



soit égal au côté DE, & AC à DF, & l'angle A égal à l'angle D.

gle D : Je dis que la base BC sera égale à la base EF, & l'angle B égal à l'angle E, & l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC égal au triangle DEF.

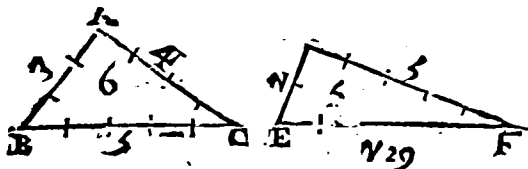
Qu'il ne soit ainsi, si on entend le triangle DEF, être posé sur le triangle ABC, en sorte que le point D soit sur le point A, & que DE tombe sur AB, aussi DF tombera sur AC : autrement l'angle A ne seroit pas égal à l'angle D. Et d'autant que les costez AB & AC sont égaux aux costez DE & DF, chacun au sien, ils conviendront par la 8. com. sent. convertie. & partant les extremités E & F tomberont sur les extremités B & C : ainsi la base EF conviendra avec la base BC, car si elle ne convenoit, elle tomberoit ou au dessus d'icelle BC, comme BGC, ou au dessous, comme BHC : ce qui est impossible, attendu que deux lignes droites ne peuvent enclore une espace par la 12. com. sent. Donc les deux bases BC, & EF conviendront, & partant seront égales entr'elle par la susdite 8. com. sent. Et par ainsi tout le triangle DEF conviendra avec tout le triangle ABC, conséquemment égal à iceluy, & l'angle B conviendra aussi avec l'angle E, & l'angle C avec l'angle F ; partant égaux. Si donc deux triangles ont deux costez égaux à deux costez, chacun au sien, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Euclide met deux conditions en ce theoreme qui y sont du tout necessaires ; la premiere desquelles est que deux costez d'un triangle soient égaux aux deux costez de l'autre chacun au sien : & la seconde, que les deux angles contenus d'iceux costez égaux, soient aussi égaux. car defaillant l'une ou l'autre de ces deux condition, ny les bases, ny les autres angles ne pourroient jamais être égaux : & la derniere defaillant, les triangles peuvent bien être quelquefois égaux, mais le plus souvent ils sont inégaux : ce que nous pourrions facilement démontrer icy n'étoit que plusieurs choses à ce requises n'ont encore été démontrées : néanmoins afin de rendre aucunement évidente la necessité des susdites conditions nous rapporterons icy ce qu'en dit Proclus sur cette proposition, & Clavius apres luy.

Pour la premiere condition de ce theoreme, soient deux triangles ABC, DEF, ayans les angles A & D égaux

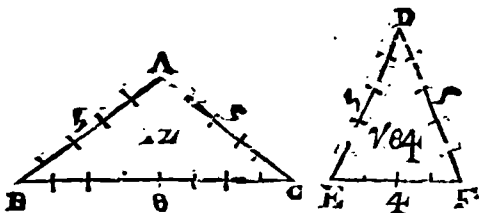
Savoir droites ; & les deux costez AB , AC égaux aux



deux costez DE , DF , non chacun au sien, mais ces deux pris ensemble égaux à ces deux-cy aussi pris ensemble : & soit AB 3, & AC 4, qui ajoutés ensemble font 7, mais DE soit 2, & DF 5, qui font aussi ensemble 7. Ce qu'étant ainsi, la base BC sera 8, & la base EF , racine quarrée de ce nombre 29, laquelle est plus grande que 5, mais moindre que 6, & l'aire ou superficie du triangle ABC sera 6 : mais l'aire du triangle DEF ne sera que 5. Finalement les angles sur la base BC ne seront pas égaux aux angles de dessus la base EF , chacun au sien. Toutes lesquelles inégalitez adviennent à cause de ce que les costez AB , AC ne sont pas égaux aux costez DE , DF chacun au sien.

Quant à la seconde condition : Les costez AB , AC du triangle

ABC
soient
égaux
aux co-
stez DE ,
 DF du
triangle
 DEF ,
chacun

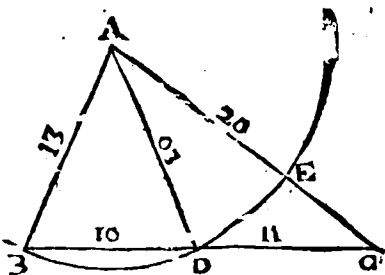


au sien, & chacun d'iceux soit 3, mais les angles A & D contenus d'iceux costez soient inégaux, & soit A plus grand que D . Toutes lesquelles choses étans ainsi, la base BC sera plus grande que la base EF , comme il sera démontré en la 24. prop. de ce Livre.

Que si nous posons la base BC être 8, & la base EF 4, l'aire du triangle ABC , sera 12 ; mais l'aire du triangle

DEF sera la racine quarrée de ce nombre 84, laquelle est plus grande que 9, mais moindre que 10. Ce qui est tres-bien connu des Geometres.

Et afin qu'on n'estime pas que cette inégalité advienne à raison de ce que tous les quatre costez des triangles sont égaux, & rendre tant plus manifeste la nécessité de la seconde condition de ce theoreme, soit un triangle *ABC* duquel le costé *AB* soit moindre que le costé *AC*, & aussi que la base *BC*. Du centre *A*, & de l'intervalle du petit costé *AB*, soit décrit un cercle *BDE* qui coupera tant le plus grand costé *AC*, que la base *BC*: Car autrement il passeroit ou par le point *C*, ou au dela d'iceluy; ce qui est absurde, veu que toutes les lignes droites tirées du centre *A* à la circonference du cercle *BDE*, doivent être égales entr'elles par la 15. def. Qu'il coupe donc la base *BC* en *D*, & soit tirée la ligne *AD*. Par la même 15. def. *AB* est égale à *AD*, & *AC* est commune à tous les deux triangles *ABC*, *ADC*, & partant iceux triangles auront les deux costez *AB*, *AC* égaux aux deux costez *AD*, *AC*, chacun au sien; mais l'angle *DAC*, contenu des deux costez *AD*, *AC*, n'est que partie de l'angle *BAC*, contenu des costez égaux à ceux-li; & partant la base *DC* ne sera aussi que partie de la base *BC*, & pareillement le triangle *ADC* partie du triangle *ABC*. Ce qui est aussi manifeste par l'application des nombres aux lignes: Car les Geometres sçavent tres-bien que le costé *AB* étant 13, le costé *AC* 20, & la base *BC* 21; le costé *AD* sera aussi 13, & la base *DC* 11; mais l'aire ou contenu du triangle *ABC* sera 126, & celui du triangle *DAC* ne sera que 66. Donc



afin que de deux triangles les bases soient égales entr'elles, & leurs angles aussi égaux entr'eux, & par

meilleurement les triangles égaux ; il est du tout nécessaire que non seulement chaque costé de l'un soit égal à chaque costé de l'autre, mais aussi que les angles contenus d'iceux costez, soient égaux entr'eux, comme a fort bien dit Euclide.

Finalement, nous remarquerons une fois pour toutes, qu'Euclide n'entend parler en ces Elements - cy que des triangles rectilignes, car combien que cette proposition & plusieurs autres se puissent faire generales étans véritables, tant au regard des triangles rectilignes que des spheriques, si est-ce toutesfois que cela n'advient pas en toutes propositions, comme on peut voir en notre traité des triangles spheriques ; c'est pourquoy nous entendrons toutes ses propositions seulement aux triangles rectilignes, encores qu'Euclide ne les spécifie pas.

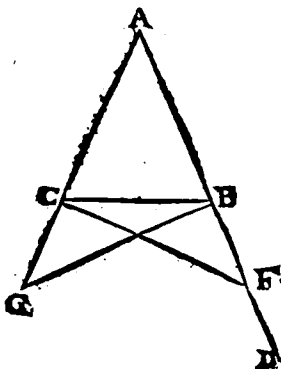
P R O P. V.

T H. 2.

Les triangles Isoceles, ont les angles sur la base égaux : & les côtez égaux étans continuez, les angles extérieurs sous la base sont égaux.

Soit le triangle Isocele ABC : Je dis premierement que les angles ABC, & ACB, sur la base BC, sont égaux.

Qu'il ne soit ainsi. Soient prolongez AB & AC, costez égaux jusques en D & G : & soit fait AF égale à AG par la 3. prop. & soient menées les lignes BG & CF. Les deux triangles ABG, & ACF, ayans l'angle A commun, ont les deux costez AB & AG égaux aux deux costez AC, & AF, chacun au sien ; & par 4. proposition, la base BG sera égale à la base CF, & l'angle ABG égal à l'angle AFG & l'angle G égal à l'angle F. Item les triangles GCB, FBC, ayant l'angle G égal à l'angle F, & les deux costez GB, & GC égaux aux



deux costez CF & FB : (Car CF a été prouvé tantost égal à BG ; & AG , AF étans égaux ; & AC , AB aussi égaux ; les restes CG , & BF seront aussi égaux) par la 4. prop. la base sera égale à la base ; & les autres angles égaux aux autres angles , chacun au sien : sçavoir est l'angle GBC , égal à l'angle FCB. Er qui des angles égaux ABG & ACF, ôste les angles égaux CBG & BCF ; les demeurans ABC & ACB, seront égaux.

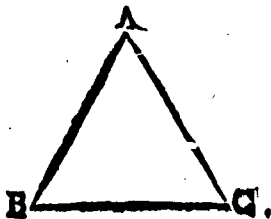
Pour la seconde partie. Que les costez égaux AB & AC étans continuez , les angles extérieurs sous la base BC, sont égaux , sçavoir FBC à BCG , elle a été suffisamment démontrée ; lors qu'on a prouvé que les triangles GBC, & CFB, avoient leurs angles égaux , chacun au sien. Patquoy les triangles Isoscelles , &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Cette proposition est aussi vraie des triangles équilatéraux. Car les deux costez AB, AC du triangle ABC étans égaux entr'eux , ou l'autre côté CB, est pareillement égal à iceux ; comme il a lieu au triangle équilatéral, ou bien inégal , comme il arrive au triangle Isoscele : Il s'ensuit nécessairement , que les angles de dessus la base BC, sont égaux entr'eux , & ceux de dessous la même base aussi égaux entr'eux , comme il appert par la démonstration cy-dessus.

COROLLAIRE.

De cette 5. proposition s'ensuit que tout triangle équilatéral est aussi équiangle , c'est à dire que les trois angles de quelconque triangle équilatéral sont égaux entr'eux. Car soit un triangle équilatéral ABC : Donc parce que les deux costez AB, AC sont égaux , par la 5. prop. les deux angles B & C seront égaux. Semblablement, pource que les deux costez AB, BC sont égaux, les deux angles A & C seront aussi égaux. Donc



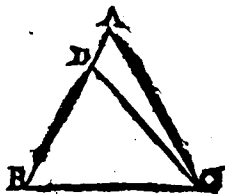
par la 1. com. sent. sous les trois angles A, B, C, seront égaux entr'eux. Cè qu'il falloit démontrer.

THEOR. 3. PROP. VI.

Si un triangle a deux angles égaux entr'eux; les côtez soutendans iceux angles, seront aussi égaux entr'eux,

Soit le triangle ABC, duquel les deux angles ABC, & ACB sur la base BC sont égaux : Je dis que les deux costez AB & AC qui soutendent les susdits angles égaux, sont aussi égaux.

Autrement, soit AB plus grand que AC, s'il est possible : on en pourra donc retrancher une partie égale à AC par la 3. prop. laquelle partie soit BD, & soit menée la ligne DC : les deux triangles DBC, & ACB, ont deux costez égaux à deux costez chacun au sien, & les angles compris d'iceux costez aussi égaux; car les deux costez BD & BC du triangle DBC sont égaux aux deux costez AC, & CB du triangle ACB, & l'angle B égal à l'angle ACB; & par la 4. prop. iceux triangles DBC, ACB, seront égaux ce qui est impossible : car l'une est partie de l'autre, Donc les costez AB, & AC n'étoient pas inégaux, ains égaux. Ce qu'il falloit démontrer.



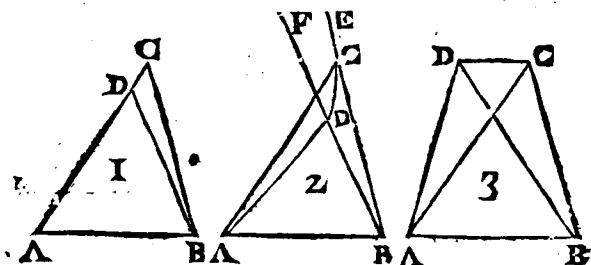
CORROLAIRE,

Il s'ensuit de cette proposition, que tout triangle équilatéral, c'est à dire qui a tous les angles égaux, est équilatéral: car par ce qui a été icy démontré, les angles ABC, ACB étant égaux, les deux costez AB, AC, seront pareillement égaux: Mais si les deux angles A & B étoient encore égaux, aussi les côtez CA, CB subtenant iceux angles, feroient aussi égaux: & partant tous les trois côtez AB, AC, BC égaux entr'eux, puis que les choses égales à une même, sont égales entr'elles.

PROP. VII. TH. IV.

Si des extremitéz de quelque ligne droite, on mene deux autres lignes droites, se rencontra à un point; des mêmes extremitéz, on n'en pourra pas mener deux autres égales à icelles, chacune à la sienne, & de même part, se rencontra à un autre point.

Soit la ligne AB , des extremitéz de laquelle soient menées deux lignes droites AC & BC se rencontra à quelconque

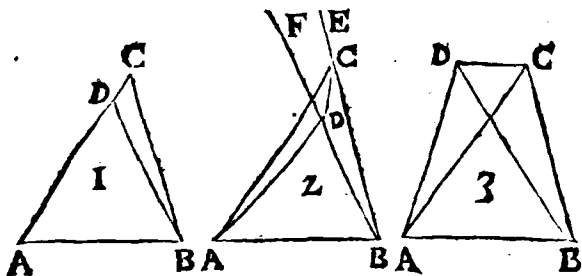


point c . Je dis que des mêmes extremitéz A & B , & de la même part que c , on ne peut mener deux autres lignes droites égales à icelles AC & BC chacune à la sienne, qui se rencontrent à un autre point que c ; c'est à dire que si de l'extrémité A on mene la ligne AD égale à AC , & de l'extrémité B la ligne BD égale à BC , il ne peut être que le point de rencontre D , soit autre que le point de rencontre c .

Car si faire se peut, que le point de rencontre D , tombe ailleurs qu'au point C : où iceluy point D tombera sur l'une ou l'autre des lignes AC , BC ; ou dans le triangle ACB ; ou hors iceluy.

Premierement, iceluy point de rencontre D , ne peut être sur la ligne AC , comme en la première figure: car il faudroit que les deux lignes AD , & AC fussent égales entr'elles, sçavoir est la partie au tout; ce qui est absurde: partant la rencontre D , ne se fera point sur AC , ny aussi sur BC , à cause de la même absurdité.

Soit donc iceluy point de rencontre D dans le triangle ABC, comme en la 2. figure : & apres avoir prolongé BC iusques en E, & BD iusques en F, soit menée CD. Puis que les deux li-



gnes AC, & AD sont posées égales, le triangle ACD sera Isoscele, & par la 5. proposition les deux angles ACD & ADC sur la base CD seront égaux. Mais l'angle ACD est moindre que l'angle DCE : (car il n'est que partie d'iceluy) donc l'angle ADC est aussi moindre que le même angle DCE : & par conséquent l'angle CDF, qui n'est que partie d'iceluy ADC, sera beaucoup moindre que le même angle DCE. Deroches, puis que les lignes BC, BD, sont posées égales, le triangle BCD doit être Isoscele, & partant les angles CDF & DCE sous la base DC, seront égaux par la même 5. prop. Mais il a été démontré que l'angle CDF est beaucoup moindre que l'angle DCE, donc le même angle CDF est moindre que l'angle DCE, & aussi égal à iceluy : ce qui est absurde.

Soit donc finalement iceluy point de rencontre D hors iceluy triangle ACB, comme en la 3. figure : apres avoir mené la ligne CD il s'ensuivra que les deux triangles ADC & BCD seront Isosceles : & partant qu'ils auront les angles sur la base CD égaux : seroit est ADC à ACD, & BDC à BCD. Mais iceluy BCD, est plus grand que ACD : donc aussi BDC sera plus grand que ADC, c'est à dire la partie que le tout : ce qui est absurde. Le point de rencontre D ne tombera donc pas hors le triangle ABC, ny dedans iceluy, ny sur les lignes AC & BC : Il faut donc qu'iceluy point de rencontre D tombe au premier point de rencontre C : Parquoy si des extrémités de quelque ligne droite, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Il est manifeste que si AD , BD prises ensemble étoient faites égales à AC , BC aussi prises ensemble, le point de leur rencontre D , seroit autre que le premier point C ; comme il seroit encore si on faisoit AD égale à BC , & BD égale à AC , mais en l'une ny l'autre maniere, icelles lignes AD , BD ne seroient pas selon l'intention d'Euclide: car il veut que non seulement les lignes AD , BD , soient égales aux lignes AC , BC chacune à la sienne, mais aussi que les lignes égales soient menées d'un même point, & de plus que ce soit de même part. Car il est tres evident qu'icelles AD , BD , peuvent bien être tirés de l'autre côté de C , c'est à sçavoir au dessous de la ligne AB . Donc sort à propos Euclide met en ce theorème que les lignes soient égales chacune à la sienne, & menées de même part, &c.

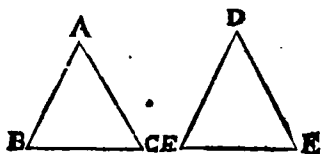
THEOR. 5. PROP. VIII.

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés chacun au sien, & la base égale à la base; ils auront aussi l'angle compris d'iceux côtéz égaux, égal à l'angle.

Soient deux triangles ABC , DEF , desquels le costé AB , est égal à DE ; AC à DF , & la base BC à la base EF : Je dis que les angles A & D compris d'iceux costez égaux, sont égaux.

Car puis que la base BC est égale à la base EF ; si on entend icelles être posées l'une sur l'autre, elles conviendront tombant le point B sur le point E , & C sur F : & par la 7. prop.

les deux lignes BD & FD , qui sont égales à BA & CA , se rencontreront au point A , & conviendront avec icelles lignes BA



& $c\bar{A}$: partant conviendront aussi les angles A & D contenus d'icelles lignes; & par conséquent seront égaux par la 8. com. sent. Donc si deux triangles, &c, Ce qu'il falloit demonst.

COROLLAIRE.

Puis que la base EF convient avec la base BC , & les costez DE, DF , conviennent aussi avec les costez AB, AC , il s'ensuit que non seulement l'angle A est égal à l'angle D ; mais aussi que l'angle E est égal à l'angle B , & l'angle F , égal à l'angle C , & sont le triangle égal à sont le triangle.

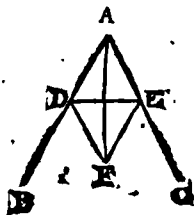
PROB. 4. PROP. IX.

Couper en deux également un angle rectiligne donné.

Soit l'angle rectiligne donné BAC , lequel il faut couper en deux également; c'est dire en deux angles égaux entr'eux.

Soient de AB & AC retranchées deux parties égales AD, AE ; & apres avoir mené la ligne DE , sur icelle soit décrit le triangle equilateral DEF par la premiere proposition, & soit menée la ligne AF : Je dis qu'icelle ligne coupe l'angle donné BAC en deux également.

Car puisque les lignes AD, AE ont été prises égales, & AF est commune aux deux triangles DAF, EAF ; les deux costez AD & AE , du triangle DAF , seront égaux aux deux costez AE & AF du triangle EAF , & la base DF égale à la base EF : (étant DEF triangle equilateral) donc par la 8. prop. l'angle DAF sera égal à l'angle EAF ; & partant l'angle BAC est coupé en deux également par la ligne AF . Ce qu'il falloit faire.

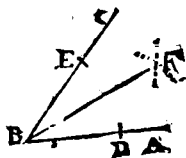


SCHOLIE.

Que si au lieu du triangle equilateral cy-dessus con-

struit, on en fait un Ifofcclle, la demonſtration ſera roû-
jours la même: Ce qu'on peut auſſi faire aux trois propoſi-
tions ſuivantes.

Quant à la pratique de cette propoſition, nous l'avons
enſignée en noſtre Geometrie pratique Probl. j. Et nean-
moins nous ne laifferons pas de la repeter icy; Et pource
ſoit un angle rectiligne ABC , qu'il faut couper en deux
également. Du centre B & de tel
intervalle qu'on voudra, ſoient cou-
pées BD , BE égales, puis des points
 D & E ſoient décrits deux arcs
ſ'entrecoupans en F , & d'icelle in-
terſection ſoit tirée par le point B ,
la ligne droite BF , laquelle divi-
ſera l'angle donné ABC en deux
également.



Or il apert par ce que deſſus qu'on
peut auſſi couper un angle rectiligne en quatre parties
égales, en huit, en ſeize, en trente-deux, & ainſi con-
ſecutivement, en procedant toujours par augmentation
double: Car apres qu'un angle rectiligne eſt coupé en
deux également, ſi on diviſe derechef chaque partie en
deux également, on aura quatre angles égaux. Que ſi on
coupe derechef chacun d'iceux en deux également, nous
aurons huit angles égaux, & ainſi conſequemment.

PROBL. 5. PROP. X.

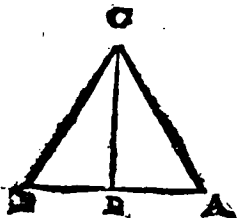
Couper en deux également une ligne droite
donnée & terminée.

Soit la ligne droite donnée & terminée AB : laquelle il faut
couper en deux également.

Sur icelle ligne AB ſoit conſtitué le triangle equilateral
 ACB par la 1. prop. & par la prec. l'angle C ſoit coupé en deux
également par la ligne CD , tirée juſques à ce qu'elle coupe
 AB en D . Je dis qu'icelle AB eſt coupée en deux également
en D .

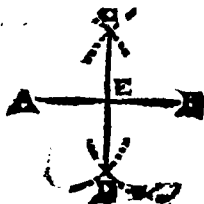
Car puis que les angles du point C ſont égaux, & le triangle
 ACB , eſt equilateral, les deux triangles ACD , & BCD , ont
deux

deux costez AC, CD, égaux à deux costez BC, CD, chacun au sien, & les angles du point C, qu'ils comprennent aussi égaux; partant par la 4. prop. la base AD, sera égale à la base DB. Donc AB est coupée en deux également en D. Ce qu'il falloit faire.



S C H O L I E.

Nous avons enseigné la pratique de cette proposition en nostre Geometrie pratique Prob. I. & ce fait ainsi: Pour diviser la ligne droite AB en deux parties égales, du centre A, & de quelque intervalle que ce soit (plus grand toutesfois que la moitié d'icelle AB) soient décrits deux arcs de cercle, l'un au dessus d'icelle ligne, comme C, & l'autre au dessous, comme D, puis du centre B, & du même intervalle soient décrits deux autres arcs qui coupent les precedens esdits points C & D, puis d'une intersection à l'autre, soit tirée la ligne droite CD, laquelle coupera AB en deux également au point E. Est à noter que si de part & d'autre de AB on ne pouvoit décrire deux arcs comme D, il faudroit ayant décrit les deux arcs C, ouvrir le compas d'un plus grand intervalle, & en décrire deux autres arcs au dessus de C, & la ligne menée d'une intersection à l'autre, & continuée jusques à AB, la couperait en deux également.



Or il apert par ce que dessus, qu'on peut aussi couper une ligne droite finie en quatre parties égales, en 8, en 16, en 32. &c. ainsi que nous avons dit, en la precedente prop. de la division de l'angle rectiligne. Mais comment on peut diviser une ligne droite terminée en tant de par-

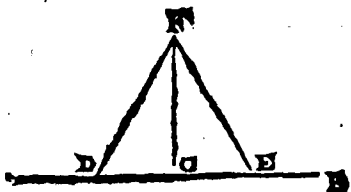
ries égales qu'on voudra, nous l'avons enseigné en nostre Geometrie pratique Probl. 7 : & ce tant Geometriquement que Mechaniquement avec le compas de proportion.

PROBL. 6. PROP. XI.

Sur une ligne droite donnée, & d'un point en icelle, élever une ligne droite perpendiculaire.

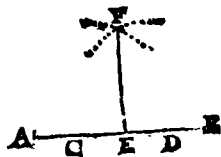
Soit une ligne droite donnée AB , & le point en icelle C : d'iceluy point il faut mener une ligne perpendiculaire à icelle AB .

Soient du point C prises les deux lignes égales CD & CE par la 3. proposition, & sur DE soit fait le triangle equilateral DFE , & de C à F soit menée la ligne CF : Je dis qu'icelle CF est la ligne perpendiculaire demandée. Car les triangles DFC & CFE ayans deux côtez égaux à deux côtez, chacun au sien, sçavoir DC à CE par la construction, & CF commun, & la base DF égale à la base EF , à cause que le triangle DFE est equilateral ; par la 8. prop. les angles au point C contenus des costez égaux, seront égaux ; & partant par la 10. def. ils sont dits droits, & la ligne CF perpendiculaire à AB , ainsi qu'il faloit faire.



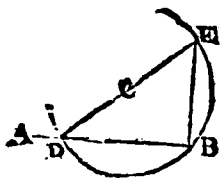
S C H O L I E.

La pratique de cette proposition est enseignée en nostre Geometrie pratique, Prob. 2. & neanmoins nous la representerons encore icy. Pour élever sur AB une ligne perpendiculaire du point C , soient marquées en icelle AB deux points

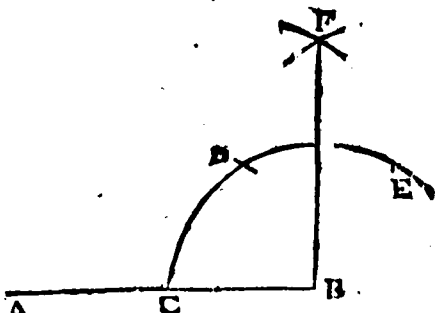


comme D, également distans de C, & d'iceux points, soient décrits deux arcs d'un même intervalle s'entrecoupans en E, de laquelle intersection soit tirée à C la ligne droite EC, qui sera perpendiculaire à ladite AB.

Que si le point donné étoit B à l'extrémité de la ligne, il faudroit continuer ladite ligne, & sur icelle étant continuée faire comme dessus : ou bien nous prendrions un point au dessus d'icelle ligne, comme C, lequel soit plus près du point donné B, que de l'autre extrémité A; puis d'iceluy point C, & de l'intervalle CB, nous décrirons la circonférence DBE, qui coupe la ligne donnée en D, & d'iceluy point D par C, nous tirerons la ligne droite DCE coupant la susdite circonférence en E, duquel point E soit tirée la ligne droite EB, laquelle sera perpendiculaire à AB.



Autrement, du point donné B, & de quelque intervalle que ce soit BC, moindres toutes fois que la ligne donnée, soit décrit un arc CDE plus grand que le tiers de la circonférence



entière du cercle, puis sur iceluy arc CDE soient pris deux intervalles CD, DE, chacun égal au semidiamètre BC, & des points D; E, soient décrits deux arcs de cercle s'entrecoupans au point F, duquel soit tirée au point B la ligne droite FB, qui sera perpendiculaire à AB.

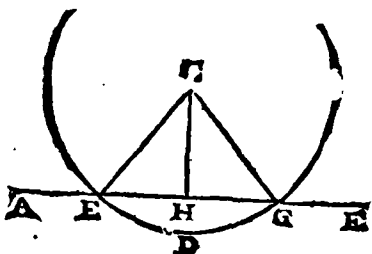
Est à noter qu'encore que le point donné B ne fut l'extrémité de la ligne, on pourroit néanmoins mener la perpendiculaire par l'une ou l'autre des deux manières cy-dessus.

PROBL. 7. PROP. XII.

Abaissier une ligne droite perpendiculaire sur une ligne droite indeterminée, & d'un point hors icelle.

Soit la ligne droite donnée & interminée AB , & le point hors icelle C , duquel il faut mener une ligne perpendiculaire sur AB .

Soit pris au delà de la ligne AB quelconque point D ; puis du centre C , & de l'intervalle CD , soit décrit le cercle EDG , coupant la ligne AB es points E & G , puis par la 10. prop. soit coupée EG en deux éga-



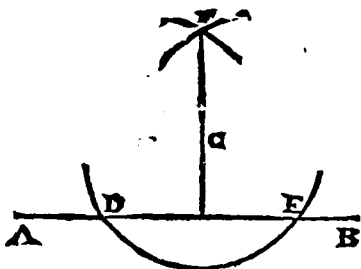
lement au point H , & soit menée la ligne CH , laquelle ie dis être perpendiculaire à AB .

Car étans tirées les lignes droites CE , CG ; les deux costez EH & HC ; du triangle EHG , seront égaux aux deux costez GH & HC du triangle GHC , un chacun au sien, & la base CE est égale à la base CG , étans icelles tirées du centre C à la circonference, & par la 8. prop. les angles du point H seront égaux; & partant par la 10. definit. ils seront droits, & la ligne CH . perpendicul. à AB . Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La pratique de ce probleme est enseignée en nostre Geometrie pratique probl. 3. & est icelle qu'il ensuit. Pour mener à une ligne donnée AB une perpendiculaire d'un point donné hors icelle, comme C ; d'iceluy point C soit décrit un arc qui coupe la ligne donnée en D & E , puis

deux points,
comme centres,
soient décrits
deux arcs de
cercles d'un
même interva-
le, qui s'entre-
coupent au point
F: (il n'importe
pas de quel
côté ce soit, au
dessus ou au



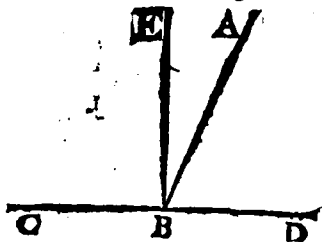
dessous de la ligne AB) puis d'iceluy point F , par celuy
donné C , soit tirée une ligne droite FCG , qui rencontre
la donnée en G , & icelle FCG sera perpendiculaire à
 AB .

THEOR. 6. PROP. XIII.

Quand une ligne droite tombant sur une ligne
droite fait angles, ou iceux feront deux an-
gles droits, ou égaux à deux droits.

Soit la ligne droite AB , laquelle tombant sur une autre li-
gne droite CD , fait les angles CBA , & DBA : Je dis qu'iceux
sont deux angles droits, ou égaux à deux droits.

Car ou icelle ligne AB est perpendiculaire à CD , ou elle ne
l'est pas: Si elle est perpendiculaire, les deux angles sont
droits par la 10. def. Si
elle ne l'est pas, soit le-
vée la perpend. BE par
la 11. prop. & les deux
angles CBE & DBE se-
ront droits par la susdite
def. mais par la 19.
com. sent. le seul an-
gle droit DBE est égal
aux deux angles DBA ,



ABE ensemble: parquoy si on leur ajoute le commun CBE ,
les trois angles DBA , ABE & CBE seront égaux aux deux
droits DBE , CBE . Derechef, d'autant que par la même

19. com. sent. les deux angles CBE , ABE ensemble sont égaux au seul ABC : si on ajoute le commun DBA , les deux angles ABC , DBA seront égaux aux trois CBE , ABE , DBA : mais ces trois-cy ont été démontrés égaux à deux droits : donc ces deux-là ABC , ABD seront aussi égaux à deux droits. Parquoy si une ligne droite tombante sur une autre ligne droite, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Cette démonstration de Theon est suivie par la plus-part des Interpretes d'Euclide, mais les autres ayant montré comme dessus, que les deux angles CBE & DBE sont droits, concluent incontinent par la 8. com. sent. que les deux ABC , & ABD ensemble, seront donc aussi égaux à deux droits, vu qu'ils occupent autant d'espace, voire le même, que les deux droits CBE , DBE , & conviennent avec eux.

Aussi Clavius a remarqué, que cette proposition semble dépendre de quelque commune notion de l'esprit: car de ce que l'angle ABC excède l'angle droit EBC , l'angle restant ABD est excédé par l'angle droit EBD ; car comme en celui-là l'excès est l'angle ABE , ainsi en celui-cy le défaut est le même angle ABE . Parquoy l'on pourra conclure, que les angles ABC , ABD sont égaux à deux droits, attendu que l'excès de l'angle obtus ABC , est le défaut de l'aigu ABD .

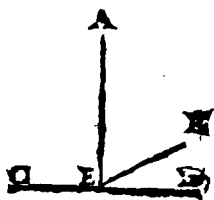
THEOR. 7. PROP. XIV.

Si à un point de quelque ligne droite se rencontrent deux autres lignes droites de part & d'autre d'icelle, faisant deux angles égaux à deux droits: icelles deux lignes se rencontreront directement,

Soit la ligne droite AB & en icelle le point B , auquel se rencontrent deux autres lignes droites CB & DB de part & d'autre d'icelle AB , faisant les deux angles ABC & ABD

égaux à deux droits : Je dis que CB & DB se rencontrent directement, c'est à dire que CBD est une ligne droite.

Autrement, si CBD n'est ligne droite, soit continuée CB directement de la part de B, & la continuation d'icelle tombera ou au dessus de BD, ou au dessous : qu'elle tombe donc au dessus, s'il est possible, comme BE, en sorte que CBE soit ligne droite. D'autant que AB tombe sur CBE, les deux angles ABC, & ABE, seront égaux à deux droits par la 31. prop. Mais par l'hypothese les deux ABC & ABD sont aussi égaux à deux droits, & par la 10. com. sent. tous les angles droits sont égaux entr'eux : d'où par la 1. cō. sent. ces deux angles ABC, & ABD seront égaux aux deux ABC, & ABE. Parquoy ôtant l'angle commun ABC, les restans ABD, & ABE, seront égaux, le tout & la partie ; ce qui est impossible. Parquoy la ligne droite CS étant prolongée, ne tombera pas au dessus de BD ; mais elle ne tombera pas aussi au dessous, car il adviendrait toujours la même absurdité : donc CB, & DB se rencontrent directement. Ce qu'il falloit démontrer.



THEOR. 8. PROP. XV.

Si deux lignes droites se coupent l'une l'autre, elles feront les angles opposez au sommet égaux.

Soient les deux lignes AB & CD, se coupans l'une l'autre au point E : Je dis que les angles opposez au sommet, sçavoir AEC, & DEB, sont égaux entr'eux.

Car d'autant que sur AB tombe la ligne CE, les angles AEC & BEC, sont égaux à deux droits par la 13. prop. Item, pour la même raison, CEB, & DEB, seront égaux à deux droits : partant les deux angles AEC & CEB, seront égaux aux deux CEB & DEB. Que si on ôte le commun CEB, le demeurant AEC



sera égal au demeurant DEB. Le même se peut aussi dire des deux angles opposez AED, & CEB. Parquoy si deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de cette demonstration, que deux lignes droites s'entrecompans, font au point de leur section quatre angles égaux à quatre angles droits. Est aussi manifeste qu'écrans constituez, tant d'angles qu'on voudra à l'entour d'un seul & même point, qu'ils seront seulement égaux à quatre angles droits, car so de E, en la précédente figure, on mene tant d'autres lignes droites, qu'on voudra, elles diviseront seulement les quatre angles constituez, au point E, en plusieurs parties; toutes lesquelles parties prises ensemble, seront égales aux quatre angles d'iceluy point E, par la 19. com. sent. c'est à dire à quatre angles droits.

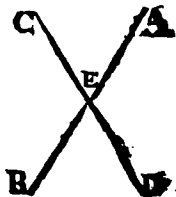
S C H O L I E.

Nous démontrerons icy la converse de cette 15. prop. qui, selon Proclus, est telle.

Si à un point de quelque ligne droite se rencontrent deux autres lignes droites, non de même part, faisant les angles au sommet égaux: icelles deux lignes se rencontreront directement.

Soit la ligne droite AB, & un point en icelle E, auquel soient menées les deux lignes droites CE, DE de part & d'autre de AB faisant les angles CEA, DEB. égaux entr'eux. le dit qu'icelles lignes CE, DE se rencontrent directement. Car adjoûtant aux angles égaux CEA, DEB, l'angle commun CEB:

les deux angles CEA, CEB seront égaux aux deux angles DEB, CEB par le 2. axiome. Mais les deux angles CEA, CEB sont égaux à deux droits par la 13. prop. Donc les deux DEB, CEB seront aussi égaux à deux droits.



Et par la 14. prop. les lignes droites CE , DE se rencontreront directement. Ce qui étoit proposé.

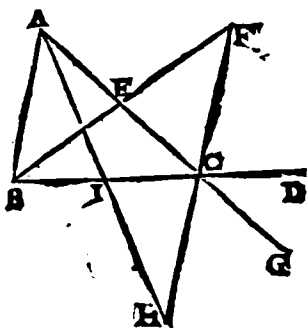
Pellerier a anciennement changé cette converse: car il dit que si quatre lignes droites AE , CE , BE , DE se rencontrant au point E y font quatre angles dont les oppoz. AEC , BED soient égaux entr'eux, & les oppoz. BEC , AED , aussi égaux entr'eux: les deux lignes opposées AE , BE se rencontreront directement, comme aussi les deux CE , DE . Ce qui est manifeste, car si aux angles égaux AEC , BED , on ajoute les égaux CEB , AED , par le 2. axiome les deux angles AEC , CEB seront égaux aux deux angles BED , AED . Donc tant ces deux-là, que ce: deux-cy, sont moitié des quatre angles faits au point E , lesquels par le Corol. prec. sont égaux à quatre droits. Parquoy les deux angles AEC , CEB , seront égaux à deux droits, & par la 14. prop. les deux lignes, AE , BE se rencontreront directement. Et pour même raison CE , DE feront aussi une seule ligne droite ED .

THEOR. 9. PROP. XVI.

Un côté de quelconque triangle étant prolongé; l'angle extérieur est plus grand que l'un ou l'autre des oppoz. intérieurs.

Soit le triangle ABC , duquel le côté BC soit continué jusques à D . Je dis que l'angle extérieur ACD est plus grand que l'oppoz. intérieur BAC : Et encore plus grand que ABC autre oppoz. intérieur.

Qu'ainsi ne soit: Après avoir coupé AC en deux également en E , soit menée la ligne BE , & continuée jusques en F : en sorte que EF soit faite égale à BE , & soit menée FC . Les deux triangles AEB , & CEF , auront les deux côtés AE & EF



égaux aux deux costez CE & EF, chacun au sien par la construction, & par la precedente prop. l'angle AEB est égal à l'angle CEF : donc par la 4. prop. les bases AB & FC seront égales, & les autres angles égaux, chacun au sien : & partant l'angle BAE, sera égal à l'angle ECF qui n'est que partie de l'angle ACD, lequel pour cette raison sera plus grand que l'opposé interieur BAC. Que si le costé AC est prolongé en G, & BC coupé en deux également en H, & on tire la ligne AH I, tellement que HI soit égale à AH, & soit menée CI : On démontrera par même raison que dessus, que l'angle externe BCG est plus grand que l'interne & opposé ABC. Mais par la proposition precedente à iceluy BCG, est égal l'externe ACD : donc iceluy ACD, est aussi plus grand que l'interne & opposé ABC. Parquoy en tout triangle, un costé estant prolongé, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

De cette proposition il s'ensuit (dit Proclus) que d'un même point on ne peut mener à une même ligne droite plus de deux lignes droites égales entr'elles. Car si faire se peut, soient menées du point A à la ligne BC, trois lignes droites AB, AC, AD, égales entr'elles : d'autant que les costez AB, AD, sont égaux, par la 5. prop. les angles ABD, ADB sur la base BD seront égaux. Devesch, pource que les costez AB, AC sont égaux, par la même 5. prop. les angles ABC, ACB sur la base BC seront égaux. Parquoy veu que chaque angle ADB & ACB, est égal à l'angle ABD, par la 1. com. sent. l'angle ABC sera égal à l'angle ADC, c'est à dire l'exterieur à l'opposé interieur : ce qui est absurde, puis que par cette 16. p. l'externe est plus grand que l'interne. Donc on ne pourra pas mener de A à BC plus de deux lignes droites égales entr'elles. Ce qui étoit proposé.

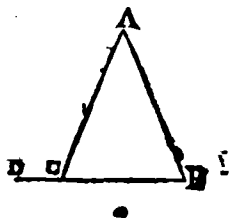


THEOR. 10. PROP. XVII.

Tout triangle a deux angles plus petits que deux droits, de qu'elle façon qu'ils soient pris.

Soit le triangle ABC : Je dis que les deux angles B , & ACB sont ensemble plus petits que deux droits ; comme aussi les deux A , & ACB : Item les deux A , & B .

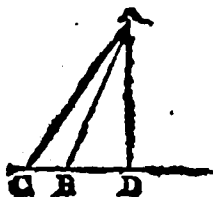
Car apres avoir continué le costé BC , jusques en D , il est evident par la 16. prop. que l'angle extérieur ACD est plus grand que l'opposé intérieur B : & par la 4. com. sent. si on leur adjoute l'angle commun ACB , les deux ACD & ACB seront plus grands que les deux B & ACB . Mais les deux ACD & ACB , sont égaux à deux droits, par la 13. prop. Partant ABC & ACB , sont plus petits que deux droits.



On démontrera pareillement que les deux angles A & ACB : Item, les deux angles A & B , en prolongeant un autre costé, sont moindres que deux droits. Parquoy tout triangle a deux angles plus petits que deux droits, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste que d'un même point on ne peut mener plus d'une ligne perpendiculaire sur une ligne droite. Car si faire se peut, soient menées de A sur la ligne droite BD , les deux perpendic : AD , AB . Donc au triangle ABD , les deux angles intérieurs ABD , ADB , seront égaux à deux droits, puis que chacun est droit. Ce qui est impossible : car il a été démontré cy-dessus, que deux angles d'un triangle sont moindres



dres que deux angles droits.

Il s'ensuit aussi de cette prop. qu'en tout triangle, duquel un angle est droit, ou obtus, que les autres sont aigus. Car puis qu'il a été démontré que deux angles quels qu'ils soient, sont moindres que deux droits, il est nécessaire que s'il y en a un droit ou obtus, celui qu'on voudra des deux autres soit aigu : car autrement en un triangle seroient deux angles droits, ou plus grands que deux droits.

S'ensuit encore de cette prop. que si une ligne droite AB , fait avec une autre ligne droite, CD , angles inégaux, savoir est ABD , aigu, & ABC , obtus, & de quelconque point d'icelle AB , on tire une perpendiculaire sur CD , comme AD : icelle perpendiculaire AD , tombera de la part de l'angle aigu ABD : car qu'elle tombe, s'il est possible, du costé de l'angle obtus ABC , comme AC . Donc au triangle ABC , les deux angles ABC , ACB , obtus & droit, sont plus grands que deux droits ; mais aussi moindres que deux droits par cette prop. ce qui est absurde. La perpendiculaire tirée de A , ne tombera donc pas du costé de l'angle obtus, & partant tombera du costé de l'angle aigu.

Est encore manifeste par cette prop. que tous les angles d'un triangle équilatéral, & les deux angles de dessus la base d'un triangle isocelle, sont aigus. Car puis que deux angles quels qu'ils soient, d'un triangle équilatéral, & les deux de dessus la base d'un isocelle sont égaux entr'eux par la 5. prop. & tant ces deux-cy ensemble, que ces deux-là, sont moindres que deux droits par cette prop. chacun d'iceux sera moindre qu'un droit, c'est à dire aigu : car s'il étoit droit, ou obtus, tous les deux ensemble seroient, ou égaux à deux droits, ou plus grands.

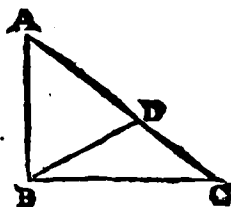
THEOR. II. PROP. XVIII.

De tout triangle, le plus grand côté soutient le plus grand angle.

Soit un triangle ABC , ayant le costé AC plus grand que le costé AB . Je dis que l'angle ABC , est plus grand que l'angle ACB .

Qu'il ne soit ainsi : Puis que AC est plus grand que AB , d'icelui soit retranchée AD , égale à AB , & soit menée BD . Le

triangle ABD est Isoscele, & par la 5. prop. les deux angles ABD , & ADB , sur la base BD , seront égaux. Or l'angle extérieur ADB , est plus grand que l'opposé intérieur C , par la 16. prop. Mais ABC étant plus grand que ABD , il sera aussi plus grand que son égal ADB : & à plus forte raison



ABC sera plus grand que C . Par même raison, si on pose le côté AC , plus grand que le côté BC ; on démontrera l'angle ABC être plus grand que l'angle BAC , sçavoir est, si de CA on coupe une ligne égale à BC , &c. Parquoy le plus grand côté de tout triangle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

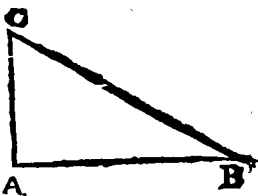
C O R R O L A I R E.

Il est donc manifeste par cette démonstration, que tous les trois angles d'un triangle scalene sont inégaux.

T H E O R. 12. P R O P. XIX.

En tout triangle, le plus grand angle est soutenu du plus grand côté.

Soit le triangle ABC duquel l'angle A est plus grand que l'angle C . Je dis que le côté BC , qui soutient le plus grand angle A , est plus grand que le côté AB , qui soutient un moindre angle C .



Autrement, il sera égal, ou plus petit : Il ne peut être égal, d'autant que le triangle seroit Isoscele, & par la 5. prop. les deux angles A & C seroient égaux contre l'hypothèse. Il ne peut aussi être plus petit, d'autant que par la 18. prop. l'angle A seroit plus petit que l'angle C , ce qui est aussi contre l'hypothèse. Il sera donc plus grand. Par même raison on prouvera le côté BC ,

être plus grand que le costé AC, si on pose l'angle A, être plus grand que l'angle B. Donc de tout triangle le plus grand angle est soutenu du plus grand costé. Ce qu'il falloit demontrer.

C O R O L L A I R E.

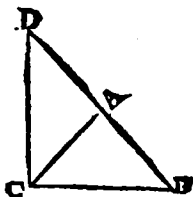
Il s'ensuit de cette proposition, que si de quelconque point on tire sur une ligne droite tant d'autres lignes droites qu'on voudra, l'une desquelles soit perpendiculaire, icelle perpendiculaire sera la plus petite de toutes, puis qu'elle sera toujours opposée à un angle aigu, & les autres à l'angle droit fait par icelle perpendiculaire.

THEOR. 13. PROP. XX.

En tout triangle, deux côtez de qu'elle façon qu'ils soient pris, sont plus grands que le troisième.

Soit le triangle ABC: Je dis que deux costez d'iceluy lesquels on voudra, sçavoir est AB & AC, sont plus grands ensemble que le troisième costé BC.

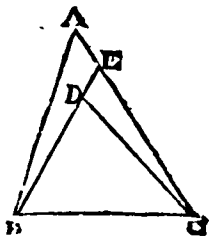
Qu'il ne soit ainsi apres avoir prolongé BA, jusques en D, & fait AD, égale à AC soit menée la ligne DC. Le triangle DAC, sera Isoscèle, & par la 5. prop. les deux angles ADC, & ACD, sur la base DC, seront égaux. Mais par le 9. ax. DCB, est plus grand que DCA: il sera donc aussi plus grand que son égal ADC: & partant par la 19. prop. BD, sera plus grand costé que BC. Mais BD, est égal aux deux costez AC, & BA: donc aussi iceux AC, & BA, seront plus grands que BC. On démontrera en la même maniere que deux autres costez tels que l'on voudra sont plus grands ensemble que l'autre. Parquoy. deux costez d'un triangle pris en quelque sorte que ce soit, sont plus grands que l'autre. Ce qu'il falloit demontrer.



THEOR. 14. PROP. XXI.

Si des extremittez d'un costé de quelconque triangle, on mène deux lignes droites se rencontrans au dedans d'iceluy : icelles seront plus petites que les deux autres costez du triangle, mais elles feront un plus grand angle.

Soit le triangle ABC , & des extremittez du costé BC , soient menées interieurement deux lignes droites BD , CD , se rencontrans au point D ; Je dis qu'icelles lignes BD , & CD ensemble sont plus petites que les costez BA , & CA , ensemble : mais que l'angle D , est plus grand que l'angle A .



Qu'ainsi ne soit continuée BD , jusques au point E . Donc par la 20. prop. les deux costez BA , & AE , du triangle BAE , seront plus grands que le troisiéme BE : Et si on leur ajoute chose commune EC , par la 4. comm. sont les tous CE , EB , seront tousiours plus petits que les tous CE , EA , AB , c'est à dire CA , AB . Pareillement les deux costez CE , ED , du triangle CED , sont plus grands que le troisiéme CD , auxquels si on ajoute chose égale, sçavoir DB , les tous CE , ED , DB , ou CE , EB , seront tousiours plus grands que les tous CD , & DB . Mais il a été démontré que CA , AB , sont plus grands que CE , EB : donc CA , AB , seront beaucoup plus grands que CD , BD . Ce qui étoit proposé en la premiere partie.

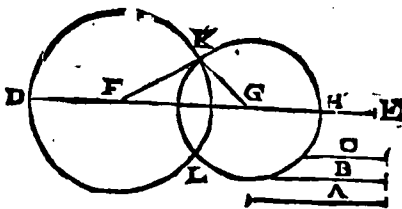
Pour la seconde partie, sçavoir que l'angle BDC est plus grand que l'angle A . D'autant qu'il est extérieur du triangle CED , il sera plus grand que son opposé interieur CED par la 16. prop. Mais pour la même raison, iceluy angle CED est aussi plus grand que son opposé interieur A : donc à plus forte raison BDC sera plus grand que A . Si donc des extremittez d'un costé de quelconque triangle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROB. 8. PROP. XXII.

Faire un triangle de trois lignes droites égales à trois autres données : mais il faut que deux d'icelles de qu'elle façon qu'elles soient prises, soient plus grandes que l'autre ; d'autant que de tout triangle, deux côtez de quelque façon qu'ils soient pris, sont plus grands que l'autre.

Soient trois lignes données A, B, & C, desquelles deux de qu'elle façon qu'elles soient prises, sont plus grandes que la troisième : car autrement d'icelles on ne pourroit pas constituer un triangle, comme il apert de la 20. prop. en laquelle il a été démontré que de tout triangle deux costez sont tousjours plus grands que l'autre. Il faut faire un triangle ayant les trois côtez egaux à icelles trois lignes données.

Soit prise une ligne droite, tant grande qu'il sera de besoin, comme DE, de laquelle soit retranchée DF, egale à A ; & puis du reste soit prise FG egale à B, & GH egale à C, & du centre F, & de l'intervalle FD, soit décrit un cercle DKL : Item un autre cercle HKL du centre G, & de l'intervalle GH, coupant le premier cercle au point K duquel soient menées les deux lignes KF, KG. Je dis que les costez du triangle FKG sont egaux aux trois lignes données A, B, C.



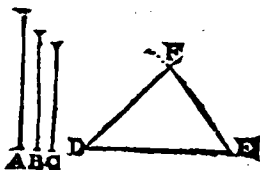
Car d'autant que FD, FK sont egales par la def. du cercle : Item GK & GH, les trois costez du triangle FKG, sont egaux aux trois lignes FD, FG, GH, lesquelles étant egales aux trois données par la construction ; aussi les costez du triangle FKG seront egaux à icelles lignes données A, B, C. Nous avons donc fait

fait un triangle de trois lignes droites égales aux trois lignes droites données A, B, C. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La pratique de ce probl. est enseignée en nostre Geometrie pratique Prob. II. &

est telle : Soit prise la ligne droite D E égale a quelconque des données comme a A, puis du point D, & intervalle de la ligne B, soit décrit un arc F : semblablement du point E, & de l'intervalle de l'autre ligne C,



soit décrit un autre arc qui coupe le premier au point F : puis a ladite intersection soient tirées les deux lignes droites DF, EF ; & sera fait le triangle DEF, ayant les trois costez égaux aux trois lignes droites données A, B, C.

PROBL. 9. PROP. XXIII.

Sur une ligne droite donnée, & à un point donné en icelle, faire un angle rectiligne égal à un angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnée AB, & le point en icelle A ; sur lequel il faut faire un angle rectiligne égal à l'angle rectiligne donné C.

Ayant pris és lignes CD, CE, qui constituent l'angle donné C quelconques points D, E, soit menée la ligne DE : & sur AB soit construit par la prop. précédente le triangle AFG, ayant les trois costez égaux aux trois costez du triangle CDE, sçavoir est les deux costez AF, AG, égaux aux deux costez CD, CE, & la base FG à la



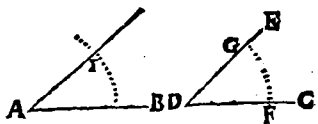
base DE. Il est donc évident par la 8. prop. que l'angle A

sera égal à l'angle C donné. Nous avons donc fait sur AB, & au point A, l'angle FAG égal à un donné DCE, ainsi qu'il étoit requis.

S C H O L I E.

Combien que la pratique de ce problème soit enseignée en nostre Geometrie pratique, neanmoins nous l'enseignons encore icy. Soit

une ligne donnée AB, & un point en icelle A, auquel il faut faire un angle rectiligne égal au donné CDE. Du centre D soit fait de tel in-

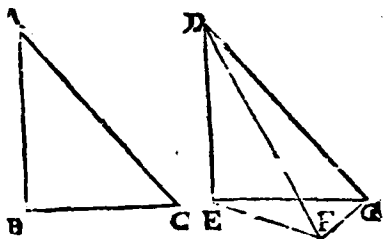


tervale qu'on voudra un arc FG, qui coupe les lignes de l'angle donné es points F, G: puis du même intervalle, soit décrit du centre A un arc interminé HI: En apres, soit prise la distance FG, & icelle portée sur l'arc HI, puis du point A par I, soit tirée la ligne droite AI, & sera fait l'angle HAI égal à l'angle donné CDE.

THEOR. 15. P R O P. XXIV.

Si deux triangles ont deux côtez egaux à deux côtez, chacun au sien, & l'angle contenu d'iceux côtez plus grand que l'angle, ils auront aussi la base plus grande que la base.

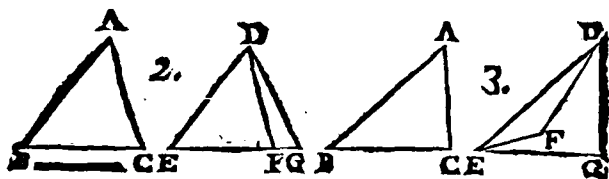
Soient deux triangles ABC & DEF, desquels deux costez AB, AC sont egaux aux costez DE, DF, chacun au sien: mais l'angle A est plus grand que l'angle F, D, F. Je dis que la base BC, est plus grande que la base EF.



Qu'ainsi ne soit. Sur la ligne DE, & au point D, soit fait par la précédente prop. l'angle EDG, égal à l'angle A, (& la ligne

droite DG, tombera hors le triangle DEF, puis que l'angle EDF, a été posé moindre que l'angle A & soit posée DG, égale à DF, c'est à dire à AC : Soit tirée puis apres la ligne EG, laquelle tombera ou au dessus de la ligne EF, ou sur icelle, ou au dessous d'icelle. Qu'elle tombe premierement au dessus de EF, & soit tirée la ligne FG. D'autant que les deux costez AB, AC, sont égaux aux deux costez DE, DG, un chacun au sien, & l'angle A égal a l'angle EDG par la construction : la base BC sera égale à la base EG, par la 4. prop. Et puis que les deux costez DF, DG, sont égaux entr'eux : les angles DFG, DGF seront aussi égaux entr'eux par la 5. prop. Mais l'angle DGF est plus grand que l'angle EGF par la 9. com. sent. donc aussi l'angle DFG sera plus grand que le même angle EGF : parquoy tout l'angle EFG sera beaucoup plus grand que le même angle EGF : donc au triangle FEG le costé EG sera plus grand que le costé EF par la 19. prop. Mais il a été démontré que EG est égale à BC : donc BC sera aussi plus grande que EF : Ce qui étoit proposé.

Maintenant, que EG tombe sur icelle EF : ainsi qu'en la 2. fig. d'autant que comme dessus la base EG, sera égale à la base



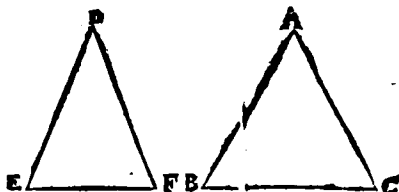
BC par la 4. prop. & GE est plus grande que EF par la 9. com. sent. aussi BC sera plus grande que EF : Ce qu'il étoit proposé.

En troisième lieu, que EG tombe au dessous de EF Il est évident que les deux lignes intérieures DF, EF sont plus petites que les deux costez DG, EG par la 21. prop. Mais par la construction DG est égale à DF : donc EG est plus grande que EF par la 5. com. sent. Mais comme dessus par la 4. prop. EG est égale à BC : donc aussi icelle BC sera plus grande que EF. Si donc deux triangles ont deux costez égaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 16. PROP. XXV.

Si deux triangles ont deux côtez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base plus grande que la base; ils auront aussi l'angle contenu d'iceux côtez egaux, plus grand que l'angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, de lesquels les deux côtez AB & AC, sont egaux aux deux DE & DF, chacun au sien : Mais la base BC est plus grande que la base EF. Je dis que l'angle A est plus grand que l'angle D.



Autrement, il sera egal, ou plus petit. Mais il ne peut être egal : d'autant que par la 4. prop. les bases BC & EF seroient egales contre l'hypothese. Pareillement il ne peust être plus petit; d'autant que par la 14. prop. la base BC seroit plus petite que la base EF, & elle a été posée plus grande. Parquoy l'angle A sera plus grand que l'angle D, puis qu'il ne peust être egal ny plus petit. Si donc deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 17. PROP. XXVI.

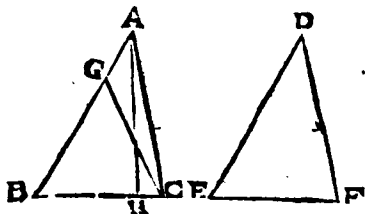
Si deux triangles ont deux angles egaux à deux angles, chacun au sien, & un côté egal à un côté, sçavoir est, ou celui aux extremittez duquel sont les angles egaux, ou bien celui qui soutient l'un d'iceux angles egaux : ils auront aussi les autres côtez egaux aux autres côtez, chacun au sien, & l'autre angle egal à l'autre angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, desquels les angles B &

$\angle ACB$, sont égaux aux deux E & F , chacun au sien, & soit premierement le costé BC , aux extremitez duquel sont les angles B & ACB , égal au costé EF , aux extremitez duquel sont les angles E & F . Je dis que les deux autres costez AB, AC , sont égaux aux deux autres costez DE, DF , chacun au sien, sçavoir est AB à DE , & AC à DF , & l'autre angle BAC égal à l'autre angle D .

Car si AB n'est égal à DE , l'un d'iceux sera plus grand: Soit donc AB plus grand, s'il est possible, & d'iceluy soit retranchée BG égale à DE : puis soit tirée la ligne droite CG . Donc puis que les costez BC, BG , sont égaux aux costez EF, DE , chacun au sien, & l'angle B égal à l'angle E , par la 4. prop. la base CG sera égale à la base FD , & les autres angles égaux

aux autres angles chacun au sien, c'est à sçavoir que l'angle BCG sera égal à l'angle F , auquel est aussi égal l'angle ABC par l'hypothese. Parant les deux angles ACB & GCB seroient égaux, la



partie au tout: ce qui est absurde. Donc le costé AB n'étoit pas inégal au costé DE , mais égal. Parquoy veu que les costez AB, BC sont égaux aux costez DE, EF , chacun au sien, & l'angle B égal à l'angle E ; la base AC sera égale à la base DF , & l'autre angle BAC égal à l'autre angle D , par la 4. prop. de ce livre. Ce qui étoit proposé.

Soient maintenant égaux deux autres costez sçavoir est AB à DE sous tendans angles égaux A & F . Je dis derechef que les deux autres costez AC, BC sont égaux aux deux autres costez DF, EF , chacun au sien, c'est à dire AC à DF , & BC à EF : & l'autre angle BAC égal à l'autre angle D . Car si le costé BC n'est égal au costé EF , soit le plus grand BC , duquel soit couppe BH égal à EF , puis tiré la ligne AH . Donc puis que les costez AB, BH sont égaux aux costez DE, EF , un chacun au sien, & l'angle B est égal à l'angle E par l'hypothese, par la 4. prop. la base sera égale à la base, & les autres angles égaux aux autres angles, c'est à sçavoir, que l'angle AHB sera

égal à l'angle F. Mais par l'hypothese l'angle ACB, est aussi égal à l'angle F. Donc l'angle AHB, sera aussi égal à l'angle ACB, l'exterieur à son opposé interieur : ce qui est absurde : car il est plus grand par la 16. prop. Le costé BC n'estoit donc pas plus grand que le costé EF, ains égal. Parquoy les deux costez AB, BC, sont égaux aux deux costez DE, EF, chacun au sien, & par la 4. prop. l'angle B estant égal à l'angle E, les bases AC, DF, seront égales, & les autres angles BAC & D aussi égaux. Parquoy si deux triangles ont deux angles égaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

Il est manifeste par la demonstration de cette proposition, que le triangle est aussi égal au triangle.

S C H O L I E.

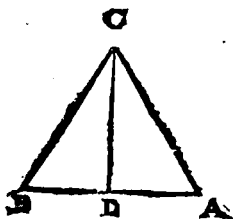
Nous démontrerons icy deux theorèmes assez utiles & necessaires en Geometrie : le premier est tel.

En un triangle equilateral, ou l'oscelle, étant menée une ligne droite de l'angle contenu des deux costez égaux, laquelle divise en deux également, ou l'angle, ou la base ; elle sera perpendiculaire à la base : & si elle coupe l'angle en deux également, elle coupera aussi la base en deux également : Mais si elle coupe en deux également la base, elle coupera pareillement l'angle en deux également. Et au contraire étant tirée une ligne droite perpendiculaire à la base, elle divisera en deux également, tant la base que l'angle.

Au triangle ABC soient deux costez égaux AC, BC, & la ligne droite CD divise premierement l'angle C en deux également. Je dis qu'icelle ligne CD est perpendiculaire à la base AB, & la divise en deux également. Car puis que les deux costez AC, CD, sont égaux aux deux costez BC, CD, & les angles qu'ils contiennent aussi égaux, par la quatrième prop. les bases AD, BD seront aussi égales, & les angles au point D égaux, & partant droits.

Que si la ligne droite CD divise en deux également la ligne AB : Je dis que la ligne droite CD est perpendiculaire à la ligne AB, & que l'angle C est coupé en deux

egalement. Car puis que les deux costez AD, DC , sont egaux aux deux costez BD, DC , & la base AC egale a la base BC , par la 8. prop. les angles du point D seront egaux, & partans droitz, & la ligne CD perpendiculaire, & par le Corol. de la 8. prop. les angles qui sont en C seront aussi egaux.



Maintenant soit la ligne droite CD perpendiculaire à AB : Je dis qu'elle coupe aussi la base BA , & l'angle C en deux egalement. Car par la 5. prop. les angles A & B seront egaux: parquoy puis que les deux angles A & D du triangle ACD , sont egaux aux deux angles B & D , du triangle BCD , un chacun aussi, & le costé CD opposé aux angles egaux A & B commun, par la 26. prop. les autres costez AD, BD , seront aussi egaux, & les autres angles du point C pareillement egaux, Ce qu'il falloit demonstrier.

Le second Theorème est tel.

Le triangle auquel une ligne droite tirée de l'un des angles perpendiculaire à la base, divise ou la base ou l'angle en deux egalement, a les deux costez comprenant iceluy angle egaux: Et si la base est divisée en deux egalement, l'angle sera aussi divisé en deux egalement: Mais si l'angle est divisé en deux egalement, aussi sera la base divisée en deux egalement.

Au même triangle ABC , soit CD perpendiculaire à la base AB , & la divise en deux egalement. Je dis que les costez AC & BC sont egaux, & les angles à C aussi egaux. Car puis que les deux costez AD, DC , sont egaux aux deux costez BD, DC , & les angles qu'ils comprennent aussi egaux, savoir droitz par la 4. prop. les bases AC, BC , & les angles à C seront pareillement egaux.

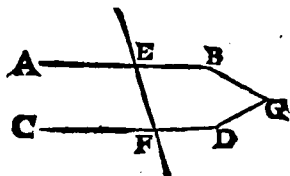
Maintenant, que la perpendiculaire CD coupe en deux egalement l'angle C : Je dis que les costez AC, BC sont egaux, & les lignes AD, BD aussi egaux: Car puis que les deux angles D, C du triangle ACD , sont egaux aux deux angles D, C du triangle BCD , & le costé CD est commun, par la 26. prop. les deux costez AC, BC , seront egaux, & les costez AD, BD , aussi egaux: Ce qu'il falloit demonstrier.

THEOR. 18. PROP. XXVII.

Si une ligne droite tombant sur deux lignes droites fait les angles oppoſez alternativement égaux ; icelles deux lignes ſeront paralleles entr'elles.

Soient deux lignes droites AB & CD , ſur leſquelles tombant la ligne droite EF , fait les angles BEF , & EFC alternativement égaux. Je dis que AB & CD ſont paralleles.

Car ſi eiles ne ſont paralleles, eſtans continuées elles ſe rencontreront : Que ſi elles ſe rencontroient, comme au point G , elles feroient un triangle avec le coſté EF , & l'angle extérieur CFE ſeroit plus grand que l'oppoſé intérieur FEB par la 16. prop. ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc les deux lignes AB , & CD ne ſe rencontreront jamais ; & par la 25. def. icelles lignes ſeront paralleles entr'elles. Parquoy ſi une ligne droite tombante ſur deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

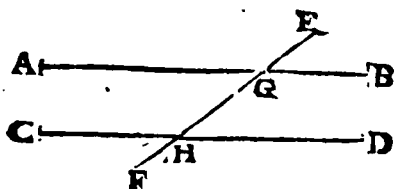


THEOR. 19. PROP. XXVIII.

Si une ligne droite tombant ſur deux lignes droites, fait l'angle extérieur égal à ſon oppoſé intérieur du meſme coſté ; ou bien les deux intérieurs de même coſté, égaux à deux droits ; icelles deux lignes ſeront paralleles entr'elles.

Soient deux lignes droites AB & CD , ſur leſquelles tombant une autre ligne droite EF , faſſe l'angle extérieur EGA égal à GHC ſon oppoſé intérieur du même coſté. Je dis que AB & CD ſont paralleles entr'elles.

Car puis que
l'angle GHC
est posé égal à
l'angle EGA ,
auquel est aussi
égal l'angle
 BGH par la 15
prop. les angle
alternes BCH ,



GHC , seront égaux par la première commune sentence : par tant les lignes droites AB , CD seront parallèles par la proposition précédente. Ce qui étoit proposé.

Pour la seconde partie. Je dis que si les deux angles intérieurs de même côté AGH , & CHG sont égaux à deux droits, aussi AB & CD seront parallèles. Car par la 13. proposition les deux angles GHC , & GHD sont égaux à deux droits ; partant aussi égaux aux deux AGH & GHC . Que si d'iceux angles égaux, on ôte le commun GHC , les demeurans AGH & GHD se trouveront alternativement égaux, & par la 27. prop. AB & CD seront parallèles. Si donc une ligne droite tombant sur deux lignes droites, &c. Ce qui falloit démontrer.

THE OR. 20 PROP. XXIX.

Si une ligne droite tombe sur deux lignes droites parallèles, elle fera les angles oppoſez alternativement égaux; & l'extérieur égal à ſon oppoſé intérieur du même côté : & les deux intérieurs de même côté égaux à deux droits.

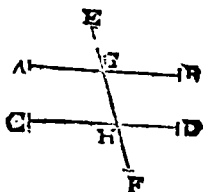
Soient deux lignes droites parallèles AB & CD , sur lesquelles tombe la ligne droite EF . Je dis en premier lieu que les angles AGH & GHD oppoſez alternativement sont égaux.

Autrement, s'ils ne sont égaux, AGH sera plus grand, ou plus petit que l'autre. Soit donc AGH plus petit, s'il est possible, que GHD ; & si à iceux angles inégaux on ajoute chose comm. ſçavoir l'angle GHC , les deux angl. AGH & GHC seront plus petits que les deux GHC & GHD , lesquels par la 13. prop. étant égaux à deux droits, AGH & GHC seront plus petits

que deux droites, & par la 11. com. sent. les deux lignes AB & CD ne sont point parallèles ; ce qui est contre nostre hypothese. Donc il falloit que l'angle AGH fust égal à l'angle GHD son alterne opposé.

Pour la seconde partie. Je dis que l'angle extérieur EGB est égal à son opposé intérieur de même costé GHD : ce qui est manifeste par ce qui a été démontré cy-dessus, sçavoir que les angles AGH & GHD étoient égaux, étant aussi EGB égal à AGH par la 15. proposition ; & par la 1. com. sent. EGB & GHD seront égaux, éans tous deux égaux au même AGH .

Pour la troisième partie : je dis que les deux angles intérieurs de même costé AGH & GHC sont égaux à deux droits : car s'il étoit autrement les lignes AB & CD ne seroient parallèles par la 11. com. sent. contre l'hypothese. Si donc une ligne droite tombe sur deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

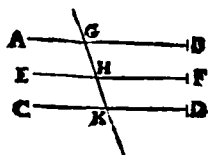


THEOR. 21. PROP. XXX.

Les lignes droites parallèles à une même ligne droite, sont parallèles entr'elles.

Soient les lignes droites AB , CD , parallèles à une même ligne droite EF . Je dis que AB & CD sont parallèles entr'elles.

Car d'autant que toutes ces lignes AB , EF , CD , sont posées en un même plan, soit tirée la ligne droite GKH , qui les coupe toutes trois, sçavoir est AB en G ; EF en H ; & CD en K . Et puis que AB est posée parallèle à EF , les angles alternes AGH , GHE , seront égaux entr'eux par la précédente proposition. De même, puis que CD est aussi posée parallèle à la même EF , l'angle DKH sera aussi égal au même angle GHE c'est à sçavoir l'intérieur à l'externe. Parquoy les angles AGH & DKH seront égaux entr'eux, lesquels éans alternes, les lignes AB &



CD sont paralleles entr'elles, par la 27. prop. Parquoy les lignes droites paralleles à une même ligne droite sont paralleles entr'elles. Ce qu'il falloit demontrer.

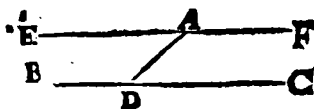
S C H O L I E.

Si quelqu'un disoit que AG & BG sont paralleles à EF, & toutesfois elles ne sont paralleles entr'elles, il faudroit répondre qu'icelles AG & BG ne sont pas deux lignes, mais seulement les deux parties d'une seule & même ligne : Car il faut entendre que toutes les paralleles dont parle icy Euclide, soient infiniment produites sans se rencontrer : mais il appert que AG étant prolongée se rencontre avec BG.

PROBL. 10. PROP. XXXI.

D'un point donné, mener une ligne droite parallele à une ligne droite donnée.

Soit le point donné A, duquel il faut mener une ligne droite parallele à la donnée BC.



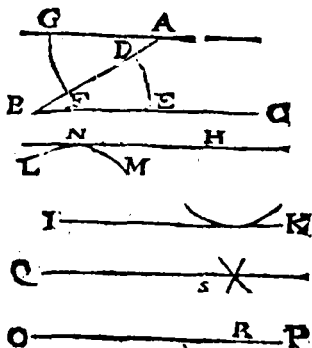
Soit menée la ligne AD faisant avec la ligne donnée BC, quelconque angle ADC. & sur icelle AD, & au point A soit fait l'angle DAE égal à l'angle ADC. Je dis que la ligne EA tirée tant qu'on voudra vers F, est parallele à BC. Car puis que par la construction les angles alternes ADC, DAE sont égaux, les lignes BC, FE seront paralleles entr'elles par la 27. prop. Nous avons donc d'un point donné A, mené une ligne droite EF parallele à une ligne droite donnée BC. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Il est manifeste par cette construction, que le point donné doit être tellement situé hors la ligne donnée, qu'icelle étant continuée directement ne rencontre iceluy. Quant à la pratique de cette proposition, nous l'avons enseignée en nos Memoires Mathematiques, Prob. 6. de la Geo-

metrie pratique, laquelle toutesfois nous repeterons icy. Du point donné *A* soit menée la ligne droite *AB* faisant avec la ligne donnée *BC*, l'angle *ABC*; puis de *A* & *B* comme centres, & d'un même intervalle, soient décrits les deux arcs *DE*, *FG*, & fait *FG* égal à *DE*, puis par les points *A* & *G* soit menée la ligne droite *AG* si grande qu'on voudra, & icelle sera parallele à *BC*.

Autrement, si du point *H* on veut mener une parallele à la ligne droite *IK*, du centre *H* soit fait un arc qui touche seulement la ligne donnée *IK*, puis du centre *I* (qui est l'extrémité de la ligne le plus éloigné de l'arc ja fait) & du même intervalle soit décrit un autre arc *LM*, puis du point *H* soit tirée la ligne droite *HN*, qui touche l'arc *LM*, & icelle ligne *HN* sera la parallele requise.



Encore autrement : Si du point *Q*, il faut tirer une ligne parallele à une ligne donnée *OP*, soit pris en icelle ligne quelconque distance, comme *OR*, avec laquelle soit décrit du centre *Q* un arc *S*; puis soit pris la distance ou intervalle *QO*, & d'iceluy soit aussi décrit du centre *R* un arc qui coupe le precedent en *S*, & d'icelle intersection soit tirée par le point donné *Q* la ligne droite *QS*, laquelle sera parallele à *OP*, ainsi qu'il étoit requis.

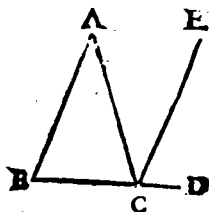
THEOR. 22. P R O P. XXXII.

En tout triangle, l'un des côtez étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux opposez intérieurs; & de chacun triangle les trois angles intérieurs sont égaux à deux droits.

Soit le triangle *ABC*, duquel le costé *BC*, soit prolongé

jusques en D : Je dis en premier lieu que l'angle extérieur ACD, est égal aux deux opposés intérieurs A & B.

Qu'il ne soit ainsi : qu'on mène CE parallèle à BA par la 31. prop. & d'autant que la ligne AC tombe sur les parallèles AB, EC, par la 29. prop. les angles BAC, & ACE, seront alternativement égaux :



Item l'extérieur ECD, sera égal à son opposé intérieur ABC. Partant il est manifeste que le total ACD, est égal aux deux A & B, opposés intérieurement.

Pour la seconde partie que les trois angles A, B, & C, intérieurs du triangle ABC sont égaux à deux droits, il est évident, étant ACD égal aux deux A & B. Mais ACD & ACB, sont ensemble égaux à deux droits par la 13. prop. Partant les trois angles intérieurs A, B, & ACB, seront aussi égaux à deux angles droits. Si donc de tout triangle, l'un des costez est prolongé, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

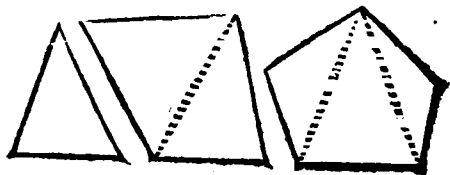
De cette proposition nous pouvons colliger à combien d'angles droits sont égaux tous les angles internes de quelconque figure rectiligne, qui n'en a point d'externe & ce par deux manières, dont la première est telle.

Tous les angles de quelconque figure rectiligne, sont égaux à deux fois autant d'angles droits, qu'icelle est entre les figures rectilignes.

C'est à dire, que tous les angles de la première figure rectiligne sont égaux à deux fois un droit, c'est à dire, à deux droits : Mais les angles de la seconde figure rectiligne, sont égaux à deux fois deux droits, savoir est à quatre droits : Mais ceux de la troisième figure, sont égaux à deux fois trois droits, c'est à dire à six droits, & ainsi des autres. Or le lieu qu'occupent chaque figure rectiligne entre les figures rectilignes, est montré par le nombre des costez, ou des angles, deux d'iceux ôtez ; d'autant que deux lignes droites n'enserment pas une superficie, & par conséquent ne consti-

tuent une figure : mais sont requises au moins trois lignes droites pour constituer une figure rectiligne : d'où viens que le triangle est la première figure rectiligne : Car de ses costez, en estans ostez deux, reste un : ainsi la figure ayant douze costez, ou douze angles, sera la dixième figure, puis que deux estans ostez de douze restent dix : & ainsi faut-il juger des autres. Parquoy puis que la figure contenue de douze costez, est la dixième, elle aura aussi douze angles equivallans à vingt angles droits, c'est à sçavoir à deux fois dix angles droits : Ainsi aussi tous les dix angles de la figure contenue de dix costez, equivallent à seize angles droits, puisqu'icelle figure est la huitième en ordre entre les figures rectilignes. Or la raison de cecy est, que toute figure rectiligne se divise en autant de triangles, qu'elle est quantième en ordre entre les figures, ou bien qu'elle a d'angles, ou de costez, deux estans ostez : Car de quelconque angle d'une figure, on peut tirer des lignes droites à tous les angles opposés : mais aux deux plus prochains on n'en peut pas tirer. Parquoy la figure sera divisée en autant de triangles qu'elle a d'angles, deux d'iceux estans ostez. Ainsi il est evident que le triangle ne se peut diviser en autres triangles : mais le quadrangle se coupe en

deux ; le
Penta-
gone en
trois,
&c. Vû
donc
que les
angles



d'iceux triangles constituent tous les angles de la fig. proposée, & tous les angl. s de quelconque triangle rectiligne sont égaux à deux droits : il est manifeste que tous les angles de quelconque figure rectiligne sont égaux à deux fois autant d'angles droits, qu'est le nombre des triangles esquels elle se divise, c'est à dire à deux fois autant d'angles droits, qu'icelle figure est quantième en ordre entre les figures rectilignes. Ce qu'on voit manifestement es figures cy-dessus apposées.

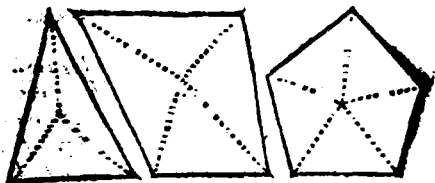
Le second moyen par lequel on sçaura la valeur des an-

gles de quelconque figure rectiligne, est ceuy-cy.

Tous les angles de quelconque figure rectiligne, sont égaux à deux fois autant d'angles droits, quatre étans oltez, qu'il y a en icelle d'angles, ou de costez.

C'est à dire, que les angles de chaque triangle sont égaux à deux fois trois droits, quatre oltez, c'est à sçavoir à deux droits : Ainsi aussi les angles de la figure de douze costez, vaudront deux fois douze angles droits, moins quatre, sçavoir est vingt angles droits, &c. Or la demonstration de cela est telle. Si de quelconque point pris dedâs la figure on tire des lignes droites à tous les angles, il y aura autant de triangles en ladite figure, qu'elle a d'angles ou de costez. Veu donc que les trois angles de chaque triangle par la 32. prop. sont égaux à deux droits, tous les angles d'iceux triangles, sont égaux à deux fois autant de droits qu'il y a de costez en la figure. Mais il est evident que les angles des mesmes triangles qui sont à l'entour du point pris dedâs la figure, n'appartiennent aux angles de ladite figure proposée : & parant si on olte ces angles-là, les autres angles des triangles qui constituent ceux de la figure proposée, seront aussi égaux à deux fois autant d'angles droits, ceux d'alentour le point pris étans oltez, qu'il y a de costez, ou d'angles à la figure. Mais tous ces angles-là d'alentour le point pris, sont

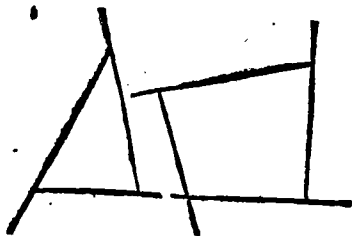
seulement
egaux à qua-
tre droits, ain-
si que nous
l'avons colligé
de la 15. prop.
Parquoy les
angles de
quelconque fi-



gure rectiligne sont égaux à deux fois autant de droits, quatre étans oltez, que ladite figure contient d'angles ou de côtés

Or il apert de ce que dessus, que si chaque côté de quelconque figure rectiligne, qui n'a que des angles intérieurs, est prolongé par ordre vers une même part, tous les angles extérieurs pris ensemble, seront égaux à quatre droits. Car par la 13. prop. les angles intérieurs pris avec les extérieurs, sont égaux à deux fois autant d'angles droits, qu'il y a d'angles, ou de costez, en la figure.

Mais les angles intérieurs sont égaux à deux fois autant de droits, quatre ostez, que ladite figure a d'angles, comme nous avons montré cy-dessus; partant les extérieurs sont toujours égaux à quatre droits. Par exemple : En quelconque triangle, les angles intérieurs & extérieurs ensemble, sont égaux à six droits : comme il apert en cette figure.



Mais par la 32. prop. les internes seuls sont égaux à deux droits. Donc les seuls extérieurs seront égaux à quatre droits. En un quadrangle, les angles extérieurs, & les intérieurs ensemble, sont égaux à huit droits. Mais les intérieurs seuls sont égaux à quatre droits; comme nous avons démontré; les extérieurs seuls seront donc aussi égaux à quatre droits. Toutes lesquelles choses peuvent être vues es figures apposées cy-dessus. Il y a la même raison en toutes autres figures, qui ont tous leurs angles intérieurs.

COROLLAIRE.

Il résulte de cette 32. prop. que les trois angles de quelconque triangle rectil. pris ensemble, sont égaux aux trois angles de quelconque autre triangle pris ensemble : Pour ce que tant ces trois-là, que ces trois-cy, sont égaux à deux droits : d'où vient que si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle de l'un sera aussi égal au troisième angle de l'autre; & de plus, si les deux angles de ce triangle-là sont égaux aux deux angles de de celui-cy, chacun au sien, les triangles seront equiangles.

Il appert aussi que tout triangle Isoscelle, duquel l'angle compris des costez égaux est droit, a chacun des autres angles demy droit : car ces deux ensemble font un droit, puis que par la 32. prop. les trois sont égaux à deux droits, & que le troisième est posé droit : Parquoy puis
que par

que par la 3. prop. les deux restés sont égaux entr'eux: chacun d'iceux sera demy droit. mais si l'angle cõrenu des côtés égaux étoit obtus, chacun des autres seroit moindre qu'un demy droit: car les deux ensemble seroient moindres qu'un droit, &c. Finalement si le dit angle étoit aigu, chacun des autres, seroit plus grand qu'un demy droit: pource que les deux ensemble seroient plus grands qu'un droit, &c. D'où résulte derechef que les triangles isoscèles, qui ont les angles du sommet égaux, sont equiangles; attendu que chacun des angles de dessus la base, sera la moitié du reste de deux droits.

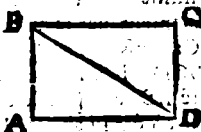
Il est pareillement manifeste, que chaque angle d'un triangle equilateral, est les deux tierces parties d'un droit, ou la tierce partie de deux droits. Car deux angles droits, auxquels sont égaux les trois angles d'un triangle equilateral par cette 32. propos. estans divisez en trois angles égaux, chacun d'iceux sera necessairement la tierce partie de deux droits, ou bien les deux tierces parties d'un droit.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Les lignes droites qui conjoignent deux lignes droites égales & paralleles, & de mesme part, sont aussi égales & paralleles.

Soient deux lignes droites AB & CD , qui conjoignent de mesme part deux autres lignes droites AD & BC égales & paralleles. Je dis que AB & CD , sont aussi égales & paralleles.

Qu'il ne soit ainsi & soit menée la diagonale BD : Icelle tombant sur les deux paralleles AD & BC , fera les angles ADB & CBD alternativement égaux par la 29. prop. Item AD & BC étant égales, les deux triangles ABD & CBD , auront deux costez égaux à deux costez chacun au sien, & les angles qu'ils comprennent aussi égaux, & par la 4. prop. la base AB sera égale à la base CD , & l'angle ABD sera égal alternativement à l'angle $CD'B$, & par la 27. prop. icelles lignes égales AB & CD , seront aussi paralleles.



Donc les lignes droites qui conjoignent deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

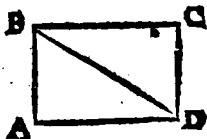
S C H O L I E,

Euclide a dit que les lignes égales & parallèles doivent être conjointes de même part, afin que celles qui les joindront soient aussi égales & parallèles pource que si on les conjoignoit de part & d'autre, comme de A à C, & de B à D il est manifeste que les lignes qui les joindroient ainsi, ne seroient jamais parallèles, ains s'entre-couperoiént toujours, & ne seroient que rarement égales.

THEOR. 24. P R O P. XXXIV.

En tout parallelogramme, les côtés & les angles opposez, sont égaux entr'eux; & la diagonale le coupe en deux également.

Soit le parallelogramme A B C D, auquel soit menée la diagonale B D. Je dis que le côté A B, est égal à son opposé C D, & aussi le côté A D égal au côté B C: Item que l'angle A est égal à son angle opposé C, & encore l'angle A B C égal à l'angle A D C: finalement qu'iceluy parallelogramme A B C D, est coupé en deux également par la diagonale B D.



Car puis que la figure quadrilatere A B C D est un parallelogramme, le côté A B sera parallèle au côté C D, & le côté A D au côté B C, & par la 29. propos. l'angle A B D sera alternativement égal à B D C. Item l'angle A D B alternativement égal à l'angle C B D. Ainsi les deux triangles B A D & D C B auront les angles A B D & B D A, égaux aux angles B D C & C B D, chacun au sien: & le côté B D commun à tous les deux susdits triangles: & partant par la 26. prop. les autres costez A B & A D, seront égaux aux autres costez C D & B C, chacun au sien, & l'autre angle A égal à l'autre

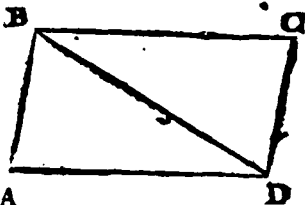
angle C. Et de plus il est évident que les deux angles du point B ensemble, seront égaux aux deux ensemble du point D. Encores par la 4. propos. les triangles ABD & CDB seront égaux; & partant le parallelogramme ABCD est couppé en deux également par la diagonalle BD. Donc en tout parallelogramme les costez & les angles, &c. Ce qui estoit à prouver.

S C H O L I E.

Euclide à bien dit icy que la diagonalle coupe le parallelogramme en deux également, mais il n'a rien dit des angles; pource qu'icelle diagonalle les coupe quelquesfois en deux également, & d'autres fois inegalement, ainsi qu'il est démontré au troisiéme Theoreme suivant.

1. Tout quadrilatere ayant les costez opposez égaux est parallelogramme.

An quadrilatere ABCD, les costez opposez AB, CD soient égaux, & aussi les opposez AD, BC. Je dis qu'iceluy quadrilatere ABCD est un parallelogramme. Car ayant mené la diagonalle BD, les deux costez AB, BD du triangle ABD seront égaux aux deux costez DC, BD du triangle BCD, chacun au sien, & la base BD, égale à la base BC. Donc par la 8. propos. l'angle ABD sera

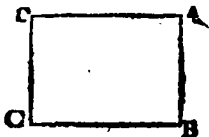


égal à l'angle CDB, qui luy est alterne, & encore ADB à son alterne CBD par le Corollaire d'icelle 8. prop. Et par la 27. p. les lignes AB, CD seront paralleles; comme aussi BC, AD; & par la 36. def. le quadrilatere ABCD est un parallelogramme. Ce qui estoit proposé.

De cecy resulte que les Rhombes, & les Rhomboides sont parallelogrammes, puis qu'ils ont leurs costez opposez égaux.

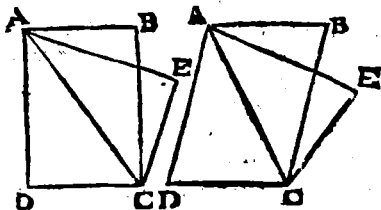
2. Tout quadrilatere qui a les angles opposez égaux, est parallelogramme.

Au quadrilatere $ABCD$, les angles oppozes A & C soient
 egaux, comme aussi les oppozes B & D . Je dis que $ABCD$
 est un parallelogramme. Car si aux angles egaux A & C ,
 on ajoute les angles egaux B & D : par le 2. Ax. les deux
 angles A & B seront egaux aux
 deux angles C & D : partant
 les deux A & B seront la moi-
 tié des quatre angles A, B, C
 & D . Mais ces quatre cy sont
 egaux à quatre droits, comme
 nous avons démontré au Scho-
 lie de la 32. prop. Donc les
 deux A & B seront egaux à deux droits, & par la 28. prop.
 les costez AD, BC seront parallels. Par mesme raison les
 costez AB, DC seront aussi parallels. Parquoy le quadri-
 latere $ABCD$ est un parallelogramme. Ce qui estoit pro-
 posé.



De cecy resulte que tout quadrilatere qui a tous les an-
 gles droits est parallelogramme, attienā que les deux an-
 gles A & B seront egaux à deux droits, comme aussi les
 deux D & C , &c. Consequemment tant le carré, que le
 carré long, sont parallelogrammes, puis qu'ils ont tous
 leurs angles droits.

Or par les deux Theoremes precedents sont converties
 les deux premieres parties de la 34. propos. mais quant à la
 3. partie, on ne la peut pas convertir, vu que tout quadri-
 latere qui est coupé en deux également par la diagonale,
 n'est pas parallelogramme. Car soit $ABCD$ un carré long,
 ou bien un Rhom-
 boide, lequel sera
 parallelogrammé,
 & consequemment
 étant tirée la dia-
 gonale AC , elle le
 coupera en deux
 également: & sur
 scelle soit con-
 struit le triangle

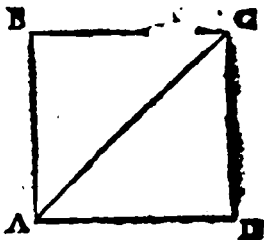


AEC , en sorte que le costé AE soit egal au costé AD , &
 le costé CE egal au costé CD : & sera fait le trapeze
 $ADCE$, duquel la diagonale sera AC , qui le coupera en

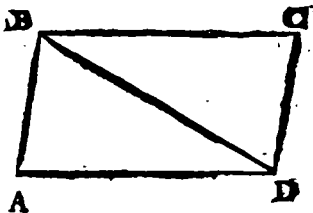
deux également, puis que les deux triangles ADC , AEC ayant tous leurs costez, égaux chacun au sien, sont conséquemment égaux.

3. Si un parallelogramme est equilateral, la diagonale coupera les angles en deux également : mais inégalement s'il n'est equilateral.

Soit un parallelogramme $ABCD$, auquel tous les costez soient égaux entr'eux, & soit menée la diagonale AC : Je dis qu'elle coupe les angles A & C en deux également. Ce qui est manifeste par la 8. propos. ven que les deux triangles ABC , ADC ont tous les trois costez, égaux, chacun au sien.

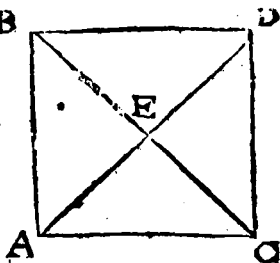


Soit derechef le parallelogramme $ABCD$, auquel le costé AD soit plus grand que le costé AB , & soit tirée la diagonale BD : Je dis qu'elle coupe inégalement les angles B & D . Car puis qu au triangle ABD le costé AD est plus grand que le costé AB , par la 18. propos. l'angle ABD sera plus grand que l'angle ADB . Mais par la 29 prop. l'angle ABD est égal à son alterne BDC , car AD est parallele à BC , puis que $ABCD$ est un parallelogramme. Donc aussi l'angle BDC sera plus grand que l'angle ADB : & partant tout l'angle D est coupé inégalement par la diagonale BD . Il y a même raison des autres angles. Parquoy apert ce qui étoit proposé.



4. Si un parallelogramme a tous les angles égaux, les deux diagonales seront égales entr'elles : mais inégales, si les angles sont inégaux.

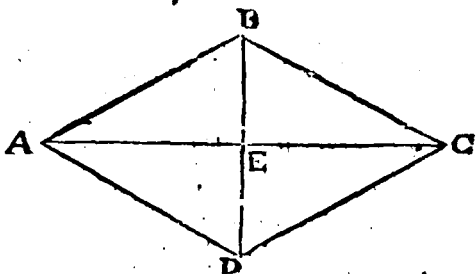
Soit premierement un parallelogramme $ABCD$, duquel sous les angles soient egaux, & soient menées les deux diagonales AC , BD : Je dis qu'icelles diagonales sont egales entr'elles. Car atten-
du que les deux costez AB , BC , du triangle ABC sont egaux aux deux costez DC , CB , du triangle BCD , chacun au sien, & l'angle B egal à l'angle C , par la 4. propos. la base AC sera egale à la base BD : ce qui étoit proposé. Partant au quarré, & au quarré long les diametres sont egaux, puis que l'un & l'autre a tous les angles egaux, sçavoir droits.



Maintenant au parallelogramme $ABCD$, duquel l'angle ABC soit plus grand que l'angle BAD , & soient les deux

dia-
gona-
les
 AC ,
 BD .

je dis
que
la
dia-
gona-
le
 AC ,



qui soient le plus grand angle B , est plus grande que la diagonale BD , qui soient le moindre angle A . Car d'autant qu'au triangle ABC les deux costez AB , BC , sont egaux aux deux costez AB , AD du triangle BAD . chacun au sien, & l'angle B plus grand que l'angle A , par la vingt-quatrième proposition, la base AC sera plus grande que la base BD . Ce qui étoit proposé.

De icy resulte qu'au Rhombe. ou Rhomboïde les diagonales sont inégales: car ils ont les angles obliques, & par consequent inégaux.

3. En tout parallelogramme, les diagonales s'entrecoupent en deux également : & tout quadrilatere auquel les diagonales s'entrecoupent en deux également, est parallelogramme.

Au parallelogramme $ABCD$ cy-dessus, soient les deux diametres AC, BD qui s'entrecoupent au point E : Je dis que chacun d'iceux diametres est coupé en deux parties egales en E , c'est à dire que AE, CE sont egales, & BE, DE aussi egales. Car d'autant que par la 29. prop. les deux angles EAB, EBA du triangle ABE , sont egaux aux alternes ECD, EDG du triangle CDE , un chacun au sien, & le costé AB egal au costé opposé CD par la 34. prop. le costé AE sera egal au costé CE , & le costé BE au costé ED par la 26. prop. Ce qui étoit premierement proposé.

Maintenant, au quadrilatere $ABCD$ soient les deux diagonales AC, BD , qui s'entrecoupent en deux également en E : Je dis qu'iceluy quadrilatere $ABCD$ est un parallelogramme. Car puis que les costez AE, BE du triangle AEB sont egaux aux costez CE, DE du triangle CED , chacun au sien, & que par la quinzième proposition les angles au sommet E sont aussi egaux ; par la quatrième proposition les bases AB, CD seront egales, & l'angle ABE egal à l'angle alterne CDE : Donc les lignes droites AB, CD seront paralleles par la 27. proposition. Par même raison AD, BC seront demonstrees paralleles. Parquoy $ABCD$ est un parallelogramme.

De cecy apert que si on veut promptement construire un parallelogramme, il faut tirer deux lignes droites interminées AC, BD , qui s'entrecoupent comme quoc soit en E ; puis prendre AE, EC egales, & BE, ED aussi egales, puis soient tirées les lignes AB, BC, CD, DA : & sera fait le parallelogramme $ABCD$: lequel sera un Rhombe, si les angles du point E sont faits droits, & s'ils sont obliques, ce sera un Rhomboïde : Mais les susdits angles étant droits, si on fait toutes les quatre lignes EA, EB, EC, ED egales entr'elles ; le parallelogramme constitué sera un carré ; Finalement lesdits angles du point E étant

obliques, & toutes les quatre susdites lignes égales, le parallelogramme constitué sera un carré long; le tout comme il apert des choses démontrées cy-dessus.

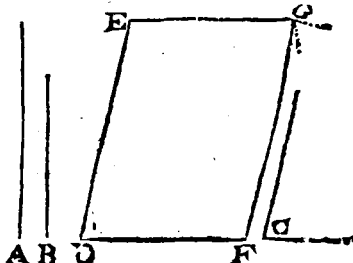
A ce que dessus nous ajouterons encore ce problème.

6. Construire un parallelogramme qui ait un angle egal à un angle donné, & les costez comprenant iceluy angle, egaux à deux lignes droites données.

Soient données deux lignes droites A, B , & un angle C : Il faut construire un parallelogramme

ayant un angle egal au donné C ; & les deux costez comprenant iceluy angle, egaux aux deux lignes données A & B .

Soit prise DE egale à A , puis à l'extrémité D , soit fait l'angle EDF egal au donné C , faisant DF egale à B : en apres du centre E , & du même intervalle B soit décrit un arc de cercle G , puis du centre F & intervalle A soit décrit un autre arc qui coupe le precedent G , & de l'intersection soient tirées les lignes droites EG, FG : & le quadrilatere $DEGF$, sera le parallelogramme requis, ainsi qu'il est manifeste par les choses cy-dessus démontrées.



THEOR. 25. PROP. XXXV.

Les parallelogrammes constituez sur une même base, & entre mêmes paralleles, sont egaux entr'eux,

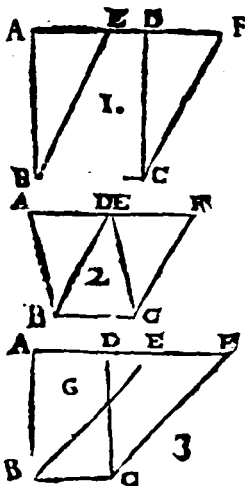
Soient deux parallelogramme $ABCD$ & $BCFE$, tous deux sur même base BC , & entre mêmes paralleles AF , & BC : Je dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Or le point E tombera, ou entre A & D , ou au point D , ou entre D & F : qu'il tombe premierement entre A & D , com-

me en la premiere figure. D'autant que par la 34. prop. au parallelogramme ABCD, le costé AD est egal au côté BC qui luy est opposé, & qu'au mesme BC est aussi egal EF costé du parallelogramme BEFD, par la 1. com. sent. les costez AD, EF seront egaux entr'eux : étant donc d'iceux la partie commune ED, les restes AE & DF seront egaux par la 3. com. sent. Mais par la même 34. prop. au parallelogramme ABCD, les costez oppozez AB, DC sont aussi egaux ; & puis qu'étranz parallèles, sur iceux tombe la ligne droite FA, l'angle extérieur CDF sera egal à l'angle intérieur BAE par la 29. prop. Donc les triangles ABE, DCF auront deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & les angles qu'ils comprennent aussi egaux ; & partant iceux triangles ABE, DCF seront egaux entr'eux par la 4. prop. leur ajoutant donc le trapeze commun BEDC, sera fait le parallelogramme ABCD egal au parallelogramme BEFC. Ce qui étoit proposé.

Maintenant, que le point E tombe avec le point D, comme en la deuxième figure, d'autant que comme dessus les lignes AD, EF seront egales entr'elles, & l'angle extérieur FEC egal à l'intérieur DAB ; les triangles BAD & CEF seront egaux par la quatrième proposition. Ajoutant donc à chacun le triangle commun BDC, seront faits egaux les parallelogrammes ABCD, & BEFC.

En troisième lieu, que le point E tombe entre D & F, comme en la troisième fig. D'autant que par la 34. propos. les côtés oppozez des parallelogrammes sont egaux, AD & BC seront egaux : Item BC & EF ; & partant AD & EF egaux, auxquels si on ajoute la ligne commune DE ; la toute AE sera egale à la toute DF. Item AB est egale à DC, lesquelles étant



parallèles, l'angle extérieur CDE sera égal à l'opposé intérieur EAB : & par la quatrième proposition les triangles BAE & CDF, seront égaux : desquels si on ôte le triangle commun GDE, les demeurans trapezes BADG & CGEF, seront égaux : auxquels si on ajoute le triangle commun BGC, le parallélogramme ABCD sera égal au parallélogramme BC FE: Donc les parallélogrammes constituez sur une même base, & entre mêmes parallèles, sont égaux entr'eux : Ce qui étoit à démontrer.

S C H O L I E.

Est icy à noter, que quand Euclide & les autres Geometres parlent de parallélogrammes constituez sur une même base, & entre mêmes parallèles, ils entendent que ladite base soit en l'une d'icelles parallèles comme aux exemples cy-dessus : Car entendant autrement cette proposition elle pourroit estre fausse, comme a fort bien remarqué le sieur

Douner, & ainsi qu'il appert en

ces deux parallélogrammes

ADFC, CFEB, lesquels sont tous

deux constituez sur la base CF, &

entre mêmes parallèles AB, DE:

& toutesfois il est evident, qu'ils

ne sont pas égaux : Ce qui advient

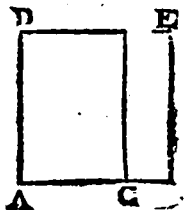
à cause de ce que leur base com-

mune CF, n'est pas en l'une ne

l'autre des parallèles AB, DE.

Le même se doit aussi entendre

des parallélogrammes, & des triangles mentionnez aux propositions suivantes, c'est à dire, qu'ils doivent tous avoir leurs bases en l'une des parallèles.



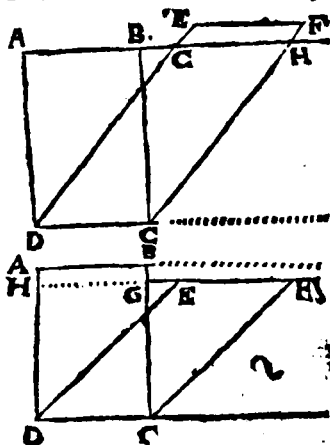
Clavius a converti cette 35 prop. ainsi :

Les parallélogrammes égaux constituez sur une même base, & de même part, seront entre mêmes parallèles.

Soient deux parallélogrammes égaux ABCD, CDEF, sur une même base CD, & d'une même part : le cas qu'ils sont entr'eux parallèles, c'est à dire, que prolongeant la ligne droite AB elle rencontrera directement EF. Car autrement si elle ne la rencontre elle tombera,

ou au dessus d'icelle EF ou au dessous. Premièrement, qu'elle tombe au dessous, s'il est possible, comme est AH, en la première figure. Donc par la 35. proposition le parallelogramme CDGH sera égal au parallelogramme ABCD: Mais à iceluy parallelogramme ABCD est posé égal le parallelogr. CDEF. Parquoy les parallelogrammes CDEF, CDGH seront égaux: le tout & la partie. Ce qui est absurde. Le prolongement & continuation directe de AB ne tombera donc pas au dessous de EF.

Secondement, que AB prolongée tombe s'il est possible, au dessus de EF, comme en la 2. figure: donc EF prolongée tombera au dessous de AB. Parquoy comme dessus les parallelogrammes ABCD, CDHG seront égaux, le tout & la partie. Ce qui est absurde. Dans puis que AB produite ne tombera pas au dessus de EF, ny au dessous, elle la rencontrera directement. Ce qui étoit proposé.



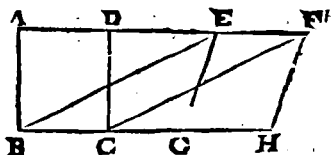
THEOR. 26. PROP. XXXVI.

Les parallelogrammes constituez sur bases égales, & entre mêmes paralleles, sont égaux entr'eux.

Soient les deux parallelogrammes ABCD & EFGH, ayans les bases BC & GH égales, & entre mêmes paralleles AF & BH. Je dis qu'ils sont égaux entr'eux.

Qu'il ne soit ainsi: soient menées les deux lignes BE, CF: d'autant que BC est posée égale à GH, & que par la 34. prop. la même GH est égale à son opposée EF, les deux lignes BC, EF seront égales entr'elles par la 1. com. sent. Mais elles sont aussi paralleles par l'hypothese: Donc les lignes BE, CF, qui les

conjoignent seront aussi égales & parallèles par la 33. propof. & par conséquent BEFC sera un parallélogramme constitué sur même base BC, & entre mêmes parallèles BH, AF



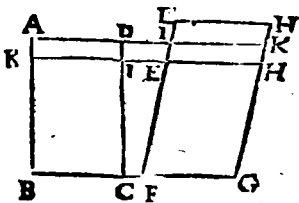
que le parallélogramme ABCD, & par la 35 prop. ils seront égaux; & par la même prop. il sera aussi égal au parallélog. EFGH, étant sur même base EF, avec iceluy, & entre mêmes parallèles AF, BH; Et par la 1. com. sent. les parallélog. ABCD, & EFGH, seront égaux entr'eux. Donc les parallélogrammes constitués sur bases égales, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Clavius a converty cette 36. propof. ainsi qu'il ensuit.

Les parallélogrammes égaux constitués sur bases égales : & de même part sont entre mêmes parallèles. Et si les parallélogrammes égaux constitués entre mêmes parallèles, n'ont une même base, ils seront sur bases égales.

Premièrement, soient deux parallélogrammes égaux ABCD, EFGH, constitués sur bases égales BC, FG, & de même part : Je dis qu'ils sont entre mêmes parallèles, c'est à dire que AD prolongée se rencontrera directement avec EH. Car autrement elle tomberoit ou au dessous d'icelle EH, ou au dessus; & il s'ensuivroit le tout estre égal à la partie: comme il a été dit en la converse de la précédente proposition.



Secondement, soient les parallélogrammes égaux ABCD, EFGH, entre mêmes parallèles AH, BG : Je dis que leurs bases BC, FG sont égales : Car autrement l'une sera plus grande que l'autre, & soit BC la plus grande, s'il est possible, & d'icelle soit retranchée BL égale à FG : puis soit

menée IK parallèle à AB .

Donc par la 36. prop. le parallélogramme $ABIK$ sera égal au parallélogramme $EFGH$; & puis aussi égal au parallélogramme $ABCD$, la partie au tout.

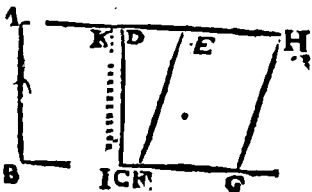
Ce qui est absurde. La base BC n'est donc pas plus grande que la base FG ; Et par mesme raison elle ne sera pas plus petite. Parquoy les bases BC , FG sont égales.

Clavins demontre encore icy cet autre Theoreme.

Si deux parallélogrammes constituez entre mesmes parallèles, ont leurs bases inégales; celuy-là sera le plus grand, qui aura la plus grande base. Et au contraire, si deux parallélogrammes inégaux sont entre mesmes parallèles; le plus grand aura une plus grande base que l'autre.

Soient les deux parallélogrammes $ABCD$, $EFGH$ de la figure précédente, entre les parallèles AH , BG . & soit la base BC plus grande que la base FG ; Je dis que le parallélogramme $ABCD$, qui est sur la plus grande base BC , est plus grand que le parallélogramme $EFGH$. Car de BC soit retranché BI égale à FG , & soit tirée IK parallèle à AB par la 31. propos. de ce Livre. Donc par la 36. prop. les parallélogrammes $ABIK$, $EFGH$ constituez sur bases égales, seront égaux; & puis que par le 9. ax. le parallélogramme $ABCD$ est plus grand que le parallélogramme $ABIK$, le même parallélogramme $ABCD$ sera aussi plus grand que le parallélogramme $EFGH$. Ce qui étoit proposé.

Soient derechef les parallélogrammes $ABCD$, $EFGH$ inégaux, & $ABCD$ le plus grand; Je dis que la base BC est plus grande que la base FG . Car si elle étoit égale, les parallélogrammes seroient égaux par la 33. proposition de ce livre. Ce qui est absurde, puis que $ABCD$ a été posé plus grand que $EFGH$. Mais si ladite base BC étoit moindre, le parallélogramme $EFGH$ seroit plus grand que le parallélogramme $ABCD$, comme il a été démontré cy-dessus; Ce qui est encore absurde. Donc puis que la base BC ne peut être égale, ny moindre que la base FG , elle sera plus grande. Ce qui étoit proposé.

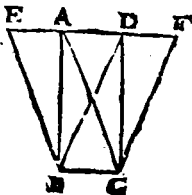


THE OR. 27. PROP. XXXVII.

Les triangles constituez sur une même base ; & entre mêmes paralleles , sont égaux entr'eux.

Soient deux triangles ABC, BDC , tous deux constituez sur la même base BC, & entre même paralleles EF, & BC. Je dis qu'ils sont égaux entr'eux.

Car si on mene BE parallele à CA, & CF parallele à BD, afin d'accomplir les parallelog. BEAC, & BCFD, iceux seront égaux par la 35. prop. attendu qu'ils sont constituez sur même base BC, & entre mêmes paralleles BC, EF. Mais les triangles donnez ABC, & DBC, sont moitié d'iceux parallelogrammes par la 34. prop. pource qu'ils sont coupeez en deux également par les diagonales AB, DC : dont aussi les triangles ABC ; DBC seront égaux, par la 7. corol. sent. Parquoy les triangles constituez sur une même base, & entre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

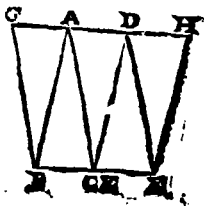


THE OR. 28. PROP. XXXVIII.

Les triangles constituez sur base égale ; & entre mêmes paralleles , sont égaux entreux.

Soient deux triangles ABC, DEF, constituez sur bases égales BC & EF, & entre mêmes paralleles GH & BF. Je dis qu'ils sont égaux entr'eux.

Car apres avoir mené BG, parallele à GA, & FH parallele à DE par la 31. prop. qui accomplissent les deux parallelogram. ACBG. DEFH : iceux étant constituez sur bases égales, & entre mêmes paralleles, seront égaux par la 36. prop. aussi égales seront leurs moitiés sçavoir les triangles proposez ABC



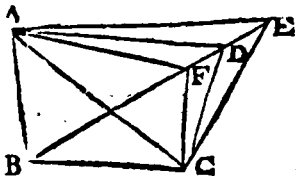
& DEF par la 34. prop. estans les parallelogrammes coupez en deux également par les diagonales BA & DF. Donc les triangles constituez sur bases égales, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 29 PROP. XXXIX.

Les triangles égaux constituez sur une même base, & de même part, sont aussi entre même paralleles.

Soient deux triangles égaux ABC, & BCD constituez sur une mesme base BC, & de mesme part. Je dis qu'ils sont entre mesme paralleles c'est à dire, que si on mene la ligne droite AD, elle sera parallele à BC,

Autrement, du point A, on en pourra mener une autre qui sera parallele à BC (si AD ne l'est) par la 31. prop. laquelle tombera, ou bien au dessus de AD, ou au dessous. Qu'elle



tombe premierement au dessus, & soit icelle AE, s'il est possible; & apres avoir continué BD jusques en E, & mené EC, les deux triangles BAC, & BEC par la 37. prop. estans sur mesme base, & entre mesmes paralleles, seront égaux. Mais par l'hypothese les deux triangles BAC, & BDC sont aussi égaux: donc par la 1. com. sent. les triangles BEC & BDC seroient aussi égaux, la partie & le tout; partant la parallele menée du point A, ne tombera pas au dessus de AD. Le mesme inconvenient s'ensuivra si on la fait tóber au dessous de AD comme AF: car ayant mené CF. les triangles BFC & BDC se trouveroient égaux, ce qui ne peut estre: donc du point A on ne menera point d'autre ligne que AD parallele à BC. Parquoy les triangles égaux constituez sur mesme base, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

SCHOLIE.

Par cette prop. qui est la converse de la 37. il est aisé de demontrer comme a fait Commandin le Theor. suivant.

Tout quadrilatre qui est coupé en deux également par l'un

& l'autre diametre, est parallelogramme.

Le quadrilatere $ABDC$ soit divisé en deux également par l'un & l'autre diametre AD, BC ; Je dis qu'iceluy est parallelogramme. Car d'autant que les triangles ACD, BDC sont chacun moitié du quadrilatere $ABDC$, ils sont egaux entr'eux par le 7. ax. Et pource qu'ils ont une même base CD , & sont de même part, ils sont entre mêmes paralleles par la 39. prop. & passant AB est parallele à CD . Semblablement ven que les triangles ABC, ACD sont egaux & sur même base AC , icelle ligne AC sera aussi parallele à BD ; donc le quadrilatere $ABDC$ est parallelogramme, puis que les costez opposez d'iceluy sont parallels. Ce qui étoit proposé.



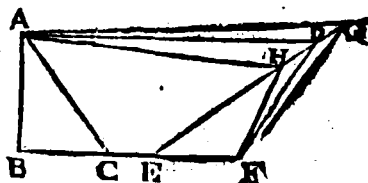
THEOR. 30. PROP. XL.

Les triangles egaux constituez sur bases egales, & de même part, sont aussi entre mêmes paralleles.

Soient deux triangles egaux ABC , & DEF , constituez sur bases egales BC & EF , & de même part. Je dis qu'ils sont aussi entre mêmes paralleles; c'est à dire, que si on mene une ligne droite de A en D , qu'icelle sera parallele à BF .

Autrement, du point A ou en pourra mener une autre qui sera parall. à BF (si AD ne l'est) par la 31. prop. laquelle tombera, ou au dessus de AD , ou au dessous.

Soit donc premierement au dessus, & soit icelle AG , s'il est possible, & apres avoir continué ED iusques à ce qu'il rencontre AG en G , & mené FG , les deux triangles BAC , & EGF seront egaux par la 38. prop. mais par l'hypothese



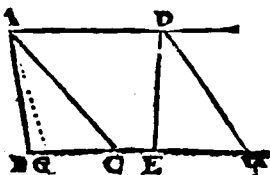
thèse les triangles BAC & DEF sont aussi égaux : donc par la 1. com. sent. le triangle EDF sera égal au triangle EGF , la partie au tout ; ce qui est impossible : Partant la parallèle menée du point A ne tombera point au dessus de AD . Le même inconvenient s'ensuivra si on la fait tomber au dessous, comme AH , car les triangles EHF & EDF , se trouveroient égaux : donc du point A ne pourra estre menée autre ligne que AD parallèle à BF . Parquoy les triangles égaux construez sur bases égales, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Commandin & Clavius apres luy, demontrent en ce lieu le Theoreme suivant.

Si les triangles égaux construez entre mêmes parallèles, n'ont une même base, ils seront sur bases égales.

Soient les triangles égaux ABC , DEF , entre mêmes parallèles AD , BF , & sur les bases BC , EF : Je dis qu'i-



celles bases sont égales entr'elles. Car si elles ne sont égales soit BC la plus grande, & d'icelle soit retranchée CG , égale à EF , & tirée AG . Donc par la 38. propos. le triangle ACG sera égal au triangle DEF : Mais à ce même triangle a été posé égal le triangle ABC . Donc par le 1. axiome les triangles AGC , ABC seront égaux, la partie & le tout : Ce qui est absurde. Donc les bases BC , EF , ne sont pas inégales, mais égales. Ce qui étoit proposé.

En suite de ce theoreme Clavius démontre encore le suivant.

Si deux triangles construez entre mêmes parallèles, ont leurs bases inégales, celui-là sera le plus grand, duquel la base sera la plus grande. Et au contraire, si deux triangles inégaux sont entre mêmes parallèles, la base du plus grand sera la plus grande.

En la figure précédente soient entre mêmes parallèles AD , BF , les triangles ABC , DEF , & soit la base BC plus grande que la base EF : Je dis que le trian-

gle ABC , est plus grand que le triangle DEF . Car ayant pris CG égale à EF , & tiré AG , les triangles AGC , DEF , seront égaux par la 38. proposition. Et puis que par le 9. axiome le triangle ABC est plus grand que le triangle AGC , le même triangle ABC sera plus grand que le triangle DEF .

Soient derechef les triangles inégaux ABC , DEF , & le plus grand soit ABC . Je dis que la base BC est plus grande que la base EF . Car si on dit qu'elle est égale, le triangle ABC sera égal au triangle DEF : ce qui est absurde, attendu qu'il a été posé plus grand. Et si on l'estime être moindre, le triangle DEF sera plus grand que le triangle ABC , comme il a été démontré cy-dessus: Ce qui est encore plus absurde, puis que ABC a été posé plus grand que DEF . Donc la base BC sera plus grande que la base EF , puis qu'elle ne peut être ny égale, ny moindre. Ce qui étoit proposé.

THEOR. 31.

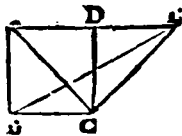
PROP. XLI.

Si un parallélogramme, & un triangle ont une même base, & sont entre mêmes parallèles; le parallélogramme sera double du triangle.

Soit le parallélogramme $ABCD$ sur la même base BC , que le triangle BCE , & tous deux entre même parallèles AE & BC . Je dis que le parallélogramme $ABCD$ est double du triangle BEC .

Car si on mène la diagonale AC , le triangle ABC sera la moitié du parallélogramme $ABCD$ par la 34. prop. Mais par la 37. prop. le même triangle ABC sera égal au triangle BEC . Donc par la 6. comment. le parallélogramme $ABCD$, qui est double de l'un, sera aussi double de l'autre. Si donc un parallélogramme & un triangle ont une même base, &c. Ce qu'il falloit prouver.

Si les bases étoient égales, on démontreroit encore la même chose, & en la même manière que dessus, tirant le diamètre du parallélogramme. Car d'autant que

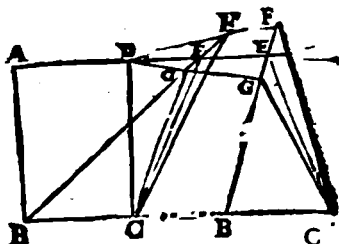


les triangles construez sur bases égales, & entre mêmes parallèles sont égaux entr'eux, le parallélogramme qui est double de l'un, seroit aussi double de l'autre.

Clavius a démontré apres Commandin la converse de cette 41. prop. ainsi qu'il ensuit.

Si un parallélogramme double d'un triangle est constitué sur une même base qu'iceluy, ou sur une base égale, & de même part; ils seront entre même parallèles. Et si un parallélogramme est double d'un triangle & entre même parallèles, leurs bases seront égales, si elles ne sont une même.

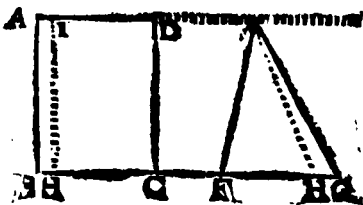
Soit le parallélogramme $ABCD$ double du triangle EBC , sur une même base, ou sur bases égales: Je dis qu'ils sont entre mêmes parallèles, c'est à dire que AD qui est parallèle à BC , étant prolongée directement,



tombera au point E . Car autrement elle tombera ou au dessus de E , ou au dessous. D'où adviendra comme il a été démontré en la 39. ou 40. prop. la partie être égale au tout. Car par la 41. prop. le parallélogramme sera pareillement double du triangle BFC , ou BGC : & par le 6. axiom. les triangles EBC , FBC , ou les triangles FBC , GBC seront égaux, la partie & le tout. Ce qui est absurde.

Soit maintenant le parallélogramme $ABCD$ double du triangle EFG , & entre mêmes parallèles. Je dis que la base BC est égale à la base FG . Car si l'une d'icelles sçavoir BC est plus grande, ayant pris CH égale à FG & tiré HI parallèle à BA , on démontrera les parallélogrammes $ABCD$, $IHCD$ être égaux, le tout & la partie; (pour ce que chacun est double du triangle EFG celui-là par l'hypothèse, & celui-cy par la 41. prop.) ce qui est absurde. On démontrera en core le même, si on dit la base FG être plus grande que la base BC : Car ayant fait IH égale à BC , & tiré la ligne droite

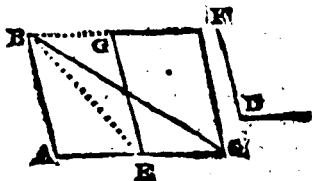
HE, les triangles EFH, EFG seront égaux, la partie & le tout; (d'autant que chacun est moitié du parallélogramme ABCD, celui-là par la 41. prop. & celui-cy par l'hypothese) Ce qui est absurde.



PROBL. II. PROP. XLII.

Faire un parallélogramme égal à un triangle donné, & qui ait un angle égal à un angle rectiligne donné.

Soit le triangle donné ABC, & l'angle rectiligne donné D il faut faire un parallélogramme égal au triangle donné ABC, & qui ait un angle égal à l'angle donné D.



L'un des costez du triangle, sçavoir, AC soit coupé en deux également en E, par la 10.

prop. puis soit fait l'angle CEG égal à l'angle D par la 23. prop. Et par la 31. prop. soit menée de B. la ligne BF parallèle à AC, laquelle coupe EG en G. Derechef, de C soit menée CF parallèle à EG, rencontrant BF en F : & sera constitué un parallélog. EGFC, ayant l'angle CEG égal au donné D, lequel parallélogramme, ie dis être égal au triangle donné ABC. Car étant tirée la ligne BE, iceluy parallélogramme EGFC. sera double du triangle EBC par la proposition précédente, duquel est aussi double le triangle ABC, iceluy étant égal aux deux ABE, EBC, qui sont égaux entr'eux par la 38. propos. Donc le parallélogramme EGFC, & le triangle ABC seront égaux entr'eux par la sixième commune sentence, & puis qu'iceluy parallélogramme à l'angle CEG égal au donné D par la con-

struction, nous avons construit un parallelogramme egal à un triangle donné, &c. Ce qu'il falloit faire.

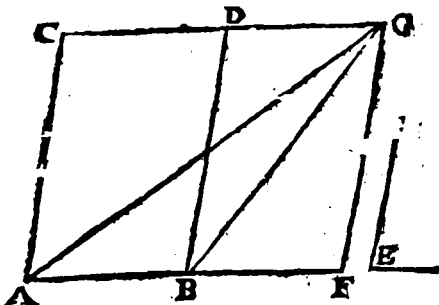
S C H O L I E.

La pratique de ce probleme est enseignée au 13. de nostre Geometrie pratique : Et est si facile à entendre par la construction cy-dessus, qu'il n'est besoin d'en dire autre chose : mais nous adjoûterons icy (apres Pelletier) la converse de cette 42. proposition, qui est telle.

Faire un triangle egal à un parallelogramme donné, & qui ait un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit donné le parallelogramme $ABDC$, & l'angle rectiligne E : il faut faire

un triangle egal au parallelogramme donné AD , ayant un angle egal au donné E . Soient prolongées CD , tant qu'il sera de be-



soin, AB en sorte que BF soit egale à icelle AB ; puis au point A soit fais l'angle FAG egal au donné E , tirant AG jusques à ce qu'elle rencontre CD prolongée en G , & étant joine FG , le triangle AGF sera le requis : Car l'angle FAG est egal au donné E , & étant tirée BG , les triangles AGB & BGF seront égaux par la 38. prop. & par tant le total AGF sera double de AGB : Mais par la 41. prop. le parallelogramme AD est aussi double d'iceluy triangle AGB . Donc le triangle AGF , & le parallelogramme $ACDB$ seront aussi égaux entr'eux. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

Il est évident par les deux demonstrations cy-dessus.

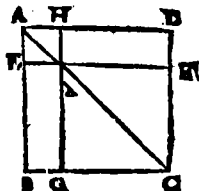
qu'un triangle qui a la base double de celle d'un parallelogramme constitué entre mêmes paralleles qu'iceluy, est egal à iceluy parallelogramme.

THEOR. 32. PROP. XLIII.

En tout parallelogramme les supplémens des parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre, sont egaux entr'eux.

Soit le parallelogramme ABCD, son diametre AC. à l'entour duquel sont les parallelogrammes AEKH & K GCF. Je dis que les parallelogrammes HKFD & EBGK, qu'on appelle supplémens, sont egaux entr'eux.

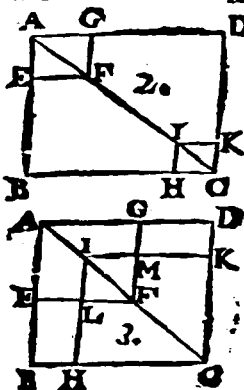
Car d'autant que par la 34. prop. les triangles ABC, ADC sont egaux entr'eux: Item les triangles CKG, CFK aussi egaux; si on oste ceux-cy de ceux-là, resteront egaux les trapezes ABGK, ADFK: Mais par la 34. prop. sont aussi egaux les triangles AEK, AHK; partant si on les oste des trapezes susdits, demeureront egaux les complemens EBGK, HKFD. Donc en tout parallelogramme les supplémens, &c. Ce qui étoit à prouver.



S C H O L I E.

'Si les deux parallelogrammes d'alenrour le diametre n'étoient conjoints au point K, ainsi qu'en la figure cy-dessus, mais que l'un fut éloigné de l'autre, comme en la 2. figure, ou bien qu'ils s'entrepassassent ainsi qu'en la troisieme, on démontreroit en la même maniere que dessus, être aussi egaux, les complemens ou restes, sçavoir en la 2. figure, les pentagones BEFIH, DGFJK, & en la 3. les parallelogrammes BELH, DGMK: Car puis que par la 34. prop. les triangles ABC, ADC, de l'une & l'autre figure sont egaux entr'eux, comme aussi les triangles AEF, AGF; les trapezes BEFC, DGFC seront pareillement egaux par le 3. axiome.

Parquoy si d'iceux trapezes de la seconde figure, on oste les triangles egaux HIC , KIC , resteraent encore egaux les pentagones $BEFIH$, $DGFIK$. Mais adjoignant aux trapezes de la troisieme fig. les triangles egaux LIE , $MI F$, les figures $BELIC$, $DGMIC$ seront egales entr'elles; desquelles si on oste les triangles egaux HIC , KIC , resteraent aussi egaux les parallelogrammes $BELH$, $DGMK$. Ce qui estoit propose.

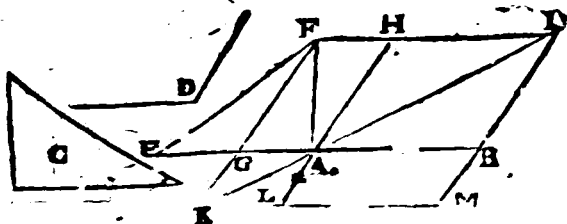


PROB. 12. PROP. XLIV.

Sur une ligne droite donnée, décrire un parallelogramme egal à un triangle donné, ayant un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit la ligne droite donnée AB , le triangle donné C , & l'angle rectiligne donné D . Il faut sur AB décrire un parallelogramme egal au triangle C , & qui ait un angle egal au donné D .

Soit prolongée la ligne donnée AB iusques en E , tellement



que AE soit egal à quelconque des costez du triangle C , & soit achevé de construire par la 22. proposition, le triangle AFE , ayant les costez egaux aux costez dudit triangle donné C , lequel luy sera aussi egal par le Corol. de la huitième

propof. Soit maintenant construit par la 42. prop. le parallélogr. AGFH, égal au triangle AFE, & ayant l'angle GAH égal au donné D : & après avoir continué la ligne FH jusques en I, tellement que HI soit égale à AB, soit menée IA jusques à ce qu'elle rencontre FG prolongée en K : (ce qui doit arriver, n'étant IA parallèle à FG par la 11. com. sent.) Puis du point K, soit menée KM parallèle à GB, jusques à ce qu'elle rencontre IB tirée en M : & finalement soit prolongée HA jusques à ce qu'elle rencontre KM en L. Je dis que le parallélogramme ABML est le requis.

Car il est constitué sur la ligne droite donnée AB, & à l'angle BAL égal à l'angle donné D, puis que par la 15. prop. il est égal à l'angle GAH, qui a été fait égal à l'angle D : Finalement il est égal au triangle donné C, puis que par la 43. propof. il est égal au parallélogramme AHFG, lequel a été fait égal au triangle AFE, ou C. nous avons donc décrit sur la ligne donnée AB un parallélogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

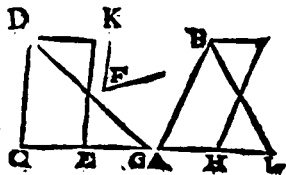
S C H O L I E.

Nous avons enseigné la pratique de ce Probl. en nos Memoires Mathematiques Probl. 15. de la Geometrie pratique, & ne differe de la construction cy-dessus. C'est pourquoy nous n'en dirons autre chose, mais nous ajouterons icy la converse de cette propof. laquelle est telle.

Sur une ligne droite donnée, construire un triangle égal à un parallélogramme donné, & qui ait un angle égal à un angle rectiligne donné.

Soit la ligne droite donnée AB, sur laquelle il faut décrire un triangle égal au parallélogramme CDKE, & qui ait un angle égal à l'angle donné F.

Soit prolongée CE, jusques en G, tellement que CE, EG soient égales, & soit menée DG, qui fera le triangle CDG. En après, par la précédente prop. soit construit sur AB le parallélogramme BH égal au triangle CDG, ayant l'angle BAH égal au donné F : puis soit prolongée AH jusques en L, de sorte que HL soit égale à AH, & ayant tiré BL, le triangle ABL, sera le requis. Car.



par le corol. de la 42. prop. iceluy triangle ABL est egal au parallelogramme BH . Mais iceluy parallelog. est egal par la construction au triangle DCG , lequel est egal au parallelog. CK par le même corol. Donc le triangle ABL sera aussi egal a iceluy parallelogramme CK : mais il a l'angle A egal au donné F , & est fait sur la ligne donnée AB parquoy appert être fait ce qui étoit proposé.

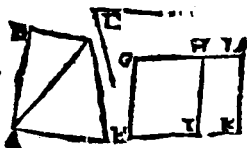
PROBL. 13.

PROP. XLV.

Faire un parallelogramme egal à une figure rectiligne donnée, ayant un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit la figure rectiligne donnée $ABCD$, & l'angle donné E : Et il faut faire un parallelogramme egal à icelle figure rectiligne $ABCD$, qui ait un angle egal au donné E .

Soit resoluë de la figure rectiligne donnée en triangles, sçavoir est menant la ligne droite AC : puis par la 42. propof. soit fait le parallelogramme $FGHI$ egal au triangle ADC , ayant l'angle F egal à l'angle donné E . Item sur HI soit fait le parallelogramme $HIKL$, egal au triangle ABC , ayant un angle H egal au donné E , & sera fait ce qui est requis. Car les deux parallelogrammes FH & IL , sont construits egaux à la figure rectiligne $ABCD$, & ont chacun un angle egal à l'angle donné E & ces deux parallelogrammes ensemble en font un seul. Car d'autant que chacun des angles GFI , HIL , est egal à l'angle donné E , ils le seront aussi entr'eux : auquel on ajoute l'angle commun FIH , les deux angles GFI , HIF , qui sont egaux à deux droits par la 29. prop. étant FH parallelogramme ; seront egaux aux deux angles HIL , HIF , lesquels partant seront egaux à deux droits, & par la 14. prop. les deux lignes FI , IL , se rencontreront directement. Pareillement les deux angles GHI , HLK estans égaux par la 34. prop. car ils sont opposez à angles egaux GFI , HIL , si à iceux on ajoute l'angle commun IHL ; par le même discours que cy



dessus les deux lignes GH & IH se rencontreront directement ainsi FK & GL étant lignes droites. & conjoignant de même part les égales & parallèles FG & KL, elles seront aussi égales & parallèles par la 33. prop. & partant FGI k sera parallélogramme; lequel nous avons construit égal à la figure rectiligne donnée ABCD, & l'angle F égal au donné E, ainsi qu'il étoit requis.

S C H O L I E.

S'il y eust en davantage de triangles en la figure donnée, il eust fallu construire sur KL un troisième parallélogramme égal au troisième triangle: puis sur le côté opposé à KL, un autre parallélogramme égal au 4. triangle, & ainsi proceder de triangle en triangle jusques à la fin. Et quant à la démonstration, ce sera toujours la même que dessus, répétée autant de fois qu'il sera de besoin. Or comme on décrira sur une ligne droite donnée un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée, & qui ait un angle égal à un angle rectiligne donné, il est assez manifeste par les choses cy-dessus dites: car pour exemple, si la ligne droite FG eust été donnée, nous eussions par la précédente prop. décrit sur icelle le parallélogramme FGHI: puis sur la même ligne FG, ou plutôt sur une égale à icelle HI, le parallélogramme HIKL, & ainsi consecutivement s'il y avoit d'avantage de triangle en la figure rectiligne donnée.

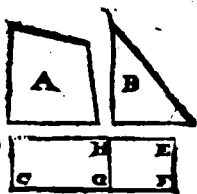
Pelletier a ajouté en ce lieu un Probleme fort utile, lequel nous rapporterons icy, mais beaucoup plus brièvement qu'il n'a fait.

Estans données deux figures rectilignes inégales, trouver l'excez de la plus grande par dessus la moindre.

Soient données deux figures rectilignes A & B, dont A est la plus grande: il faut trouver l'excez de A par dessus B. Par la 45. prop. soit fait le parallélogramme CDEF égal au rectiligne A, ayant quelconque angle C: puis sur la ligne CD soit fait le parallélogramme CDHG égal au rectiligne B, ayant l'angle C commun, & le pa-

paralelogramme $GHEF$ sera l'excès du rectiligne A par dessus le rectiligne B .

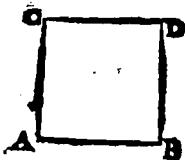
Car d'autant qu'iceluy paralelogramme GE est l'excès du paralelogramme CH egal à A , par dessus le paralelogramme CH egal à B ; le même paralelogramme GE sera aussi l'excès du rectiligne A par dessus le rectiligne B . Ce qu'il falloit faire.



PROB. 14. PROP. XLVI.

Sur une ligne droite donnée, décrire un quarré.

Soit la ligne droite donnée AB , sur laquelle il faut décrire un quarré. Du point A , soit menée AC ligne perpendiculaire à AB par la 11. prop. laquelle soit faite egale à icelle AB , & apres avoir mené CD parallele à AB , & BD parallele à AC , par la 31. prop. Je dis que le quadrilatere $ABDC$ est un quarré.



Car d'autant que par la construction il est paralelogramme, les costez & les angles oppozes sont egaux par la 34. propos. partant le costé AB est egal à CD , & AC à BD : mais AC étant egal à AB par la construction; il est evident que les quatre costez sont egaux entr'eux. Item l'angle A étant droit par la construction, aussi son opposé D sera droit. Et la ligne AC tombant sur deux lignes paralleles AB, CD , les deux angles interieurs A & C , sont egaux à deux droits par la 29. prop. Mais l'angle A est droit: donc l'angle C sera aussi droit: partant aussi droit son opposé B . Ainsi les quatre angles A, B, C, D seront droits: & par la def. du quarré la figure $ABDC$ sera quarrée. Nous avons donc décrit un quarré sur la ligne droite donnée AB . Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Nous avons enseigné la pratique de cette propos. en nostre Geometrie pratique Probl. 12. laquelle ne differe guere de la construction cy-dessus : car ayant mené la perpendiculaire AC, & icelle fait egale à AB, du même intervalle AB soient décrits des centres C & B, deux arcs qui s'entrecoüpent en D, duquel étrans tirées les lignes CD, BD, sera fait le quarré requis.

Proclus demontre icy : Que les quarréz de lignes egales sont egaux entr'eux : & que des quarréz egaux les lignes sont egales. Ce qui est aisé à prouver par la superposition d'un quarré sur l'autre : Car les lignes étrans egales, si l'une est posée dessus l'autre, elles conviendront entr'elles ; & les angles étrans aussi egaux, c'est à sçavoir droitz, ils conviendront pareillement entr'eux ; & partant tout le quarré conviendra à tout le quarré. Que si les quarréz sont egaux, ils conviendront entr'eux, à cause de l'egalité des angles ; donc aussi les lignes ; autrement un quarré seroit plus grand que l'autre. Nous avons laissé la demonstration de Proclus qui est tres-longue, pour suivre celle-cy qui est briève & facile.

THEOR. 33. PROP. XLVII.

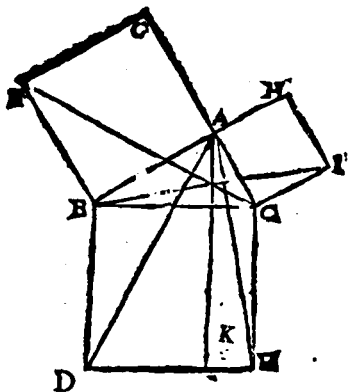
Aux triangles rectangles, le quarré du côté qui soutient l'angle droit, est egal aux quarréz des deux autres côtez.

Soit le triangle rectangle ABC, sur les côtez duquel soient décrits les trois quarréz BCED, ABFG, AHIC. Je dis que le quarré BCED décrit sur le costé BC, qui soutient l'angle droit BAC, est egal aux deux quarréz ABFG & ACIH, décrits sur les deux autres côtez AB & AC.

Car soit menée la ligne AK parallele à BD, ou à CE, & tirées les lignes AD, AE, CF & BI. D'autant que par la definition du quarré, les quatre angles au point A sont droitz, les lignes droites AB, AH se rencontreront directement, & ne feront qu'une ligne droite : Item, CA, AG par la 14. prop.

Derechef, puis que les angles ABF , CBD sont egaux, car ils

sont droits, si on leur ajoûte le commun ABC , le total FBC sera egal au total ABD . Le triangle ABD a donc les deux costez AB , BD , egaux aux deux costez FB , BC du triangle CBF , chacun au sien, & les angles ABD , CBF contenus d'iceux costez, egaux, & par la 4. p. les triangles ABD , CBF seront egaux.



Mais le quarré AF est double du triangle FBC par la 41. prop. car ils sont sur même base BF , & entre mêmes paralleles BF , GC : il sera donc aussi double de son egal ABD , duquel le parallelogramme BK est aussi double par la même 41. prop. & par conséquent le quarré AF sera egal au parallelogramme BK : car les choses doubles d'une même sont egales entr'elles. Par même discours on prouvera que le parallelog. CK est egal au quarré AI : partant les deux parallelogrammes ensemble BK & CK , seront egaux aux deux quarez ensemble AF & AI . Donc le quarré BE qui est composé d'iceux parallelogrammes BK , CK , sera aussi egal aux mêmes quarez AF , AI . Parquoy aux triangles rectangles; le quarré du costé, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Par ce theoreme on peut facilement entendre, qu'un triangles amblygones le quarré du costé opposé à l'angle obtus, est plus grand que les deux quarez ensemble des deux autres costez: Et qu'en tout triangle le quarré d'un costé opposé à un angle aigu est moindre que les deux quarez ensemble des deux autres costez. Car si l'angle obtus est resserré insques à ce qu'il vienne à

être droit, les costez, qui le comprennent demeurans les mêmes, le costé opposé usendra moindre par la 24. proposition. Mais si l'angle aigu est ouvert & élargi jusqu'à ce qu'il vienne droit, les costez, qui le contiennent demeurans les mêmes, le costé opposé à iceluy angle sera fait plus grand par la même 24. prop. ven donc qu'il a été démontré cy-dessus que le quarré du costé opposé à l'angle droit, est égal aux deux quarrez ensemble des deux autres costez; il est evident que le quarré du costé opposé à l'angle obtus, est plus grand que les deux quarrez ensemble des deux autres costez; & que le quarré du costé opposé à un angle aigu, est moindre que les deux quarrez ensemble des deux autres costez: Mais de combien celuy-là est plus grand, & de combien cettuy-cy est moindre, Euclide le démontrera es 12. & 13. prop. du second Livre.

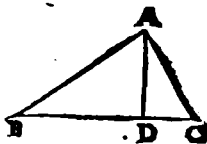
Or l'invention de ce celebre & tant renommé Theoreme est attribuée à Pythagoras, lequel en fut si content & joyeux, que pour en rendre grace aux Dieux, plusieurs disent qu'il sacrifia un Hecatombe, & d'autres rapportent qu'il ne leur sacrifia qu'un bœuf; ce qui est plus vray-semblable, que non pas qu'il en ait immolé cent, veu que ce Philosophe faisoit tres-grand scrupule d'épandre le sang des animaux. Mais quoy qu'il en soit, ce Theoreme est un des plus utiles aux choses Geometriques, encore qu'il ne semble pas si admirable que la 31. prop. du sixième Livre, où Euclide demontre qu'aux triangles rectangles, la figure décrite sur le costé qui soutient l'angle droit, est égale aux deux figures semblables, décrites & semblablement posées sur les deux costez, qui contiennent iceluy angle droit.

Par le moyen de cette 47. prop. il est fort aisé de démontrer cet autre Theoreme suivant.

Si de l'angle d'un triangle compris de deux costez inégaux, est tirée une perpendiculaire à la base, laquelle tombe dans le triangle; elle coupera la base en deux parties inégales, la plus grande desquelles sera vers le plus grand costé: Et au contraire, si la base est coupée inégalement par la perpendiculaire, les deux costez seront inégaux, & le plus grand sera celuy adjacent au plus grand segment.

— Au triangle ABC, auquel le costé AB est plus grand que

le costé AC , soit la ligne AD perpendiculaire à la base BC , laquelle tombe dedans le triangle : ce qui advient toujours quand l'un & l'autre angle d'icelle base est aigu, ainsi qu'il appert du Cor. de la 17. prop. Je dis que la partie BD est plus grande que la partie CD . Car par la 47. prop. le quarré de AB est égal aux deux quarréz de AD , BD ; & le quarré de AC , égal aux deux de



AD , CD : Mais le quarré de AB est plus grand que celui de AC , puis que le costé AB est plus grand que le costé AC ; donc aussi les deux quarréz de AD , BD , seront plus grands que les deux quarréz de AD , DC ; par quoy ôtant le commun quarré de AD , restera le quarré de BD plus grand que le quarré de CD ; & partant la ligne droite BD sera plus grande que la ligne droite CD .

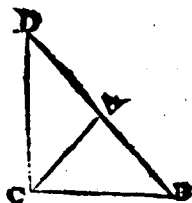
Mais remarque, que la ligne perpendiculaire AD fasse le segment BD plus grand que le segment CD . Je dis que le costé AB est plus grand que le costé AC . Car le quarré de BD sera plus grand que le quarré de CD , & adjoûtant le commun quarré de AD , les deux quarréz de BD , AD , seront plus grands que les deux de CD , AD . Mais par la 47. propos. le quarré de AB est égal aux deux de BD , AD , & celui de AC égal aux deux de CD , AD . Donc aussi le quarré de AB sera plus grand que le quarré de AC , & par conséquent le costé AB sera plus grand que le costé AC . Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 34. · PROP. XLVIII.

Si le quarré de l'un des côtez d'un triangle, est égal aux quarréz des deux autres côtez ; l'angle soutenu d'iceluy côté est droit.

Au triangle ABC , le quarré du costé BC soit égal aux quarréz des deux autres costez BA & AC . Je dis que l'angle BAC , soutenu d'iceluy costé BC , est droit.

Car après avoir mené AD perpendiculaire à AC, par la 11. prop. & fait icelle AD égale à AB, soit menée CD. Le triangle CAD sera rectangle, & par la 47. prop. le quarré de CD sera égal aux deux quarréz de CA & AD, lesquels sont égaux aux quarréz de BA & AC, étant leurs lignes égales; & par la 1. comm. sent. le quarré de BC sera égal au quarré de CD: partant la ligne CB égale à CD. Donc les triangles BAC, & CAD auront deux costez égaux à deux costez, chacun au sien, & la base BC égale à la base DC, & par la 8. prop. l'angle BAC sera égal à l'angle droit CAD: partant il sera aussi droit. Si donc le quarré de l'un des costez d'un triangle est égal, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

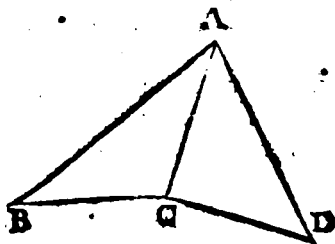


S C H O L I E.

A cette proposition, qui est converse de la precedente, nous ajouterons cet autre theoreme.

Si le quarré d'un costé de quelque triangle est plus grand que les deux quarréz ensemble des deux autres costez, l'angle soutenu d'iceluy costé est obtus: Et s'il est moindre, aigu.

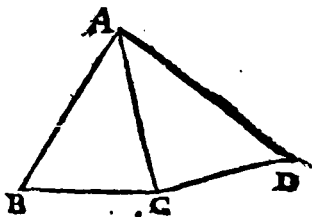
Au triangle ABC, le quarré du côté AB, soit plus grand que les deux quarréz ensemble des deux autres côtés AC, CB: Je dis que l'angle ACB opposé au côté AB est obtus. Car soit tiré de C perpendiculairement à AC, la ligne droite CD égale à BC, & soit joint AD. D'autant que par la 47. prop. le quarré de AD est égal aux deux quarréz de AC, CD, c'est à dire AC, CB, & le quarré de AB a



esté

esté posé plus grand que les quarréz, de AC , CB , le quarré de AD , sera moindre que le quarré de AB ; & partant la ligne AD moindre que ladite ligne AB . Parquoy venant que les costez BC , AC , du triangle ABC , sont égaux aux costez CD , AC , du triangle ACD , un chacun au sien, & la base AB plus grande que la base AD , par la 25. prop. l'angle ACB sera plus grand que l'angle ACD : Mais iceluy ACD est droit. Donc ACB est plus grand qu'un droit ; & partant obtus. Ce qui est proposé.

Ensuite, soit le quarré de AB moindre que les deux quarréz, des deux autres costez AC , CB : le dit que l'angle A CB soit un d'iceluy côté AB , est aigu. Car ayant fait comme auparavant le triangle rectangle ACD , on prouvera par les mêmes raisons que dessus, que la base AD est plus grande que la base AB , & l'angle droit ACD plus grand que l'angle ACB , qui partant est aigu. Ce qui est proposé.



Or d'autant que l'application des nombres aux costez des triangles rectangles est utile à plusieurs opérations, nous remarquerons icy que tout triangle est rectangle, auquel le plus grand côté contenant 3 parties égales, le moindre contient trois des mêmes parties, & l'autre 4. : on bien selon trois autres nombres, doublés, ou triples ou quadruples, &c. des trois susdits 3, 4, 3, comme 10, 8 & 6 : ou 15, 12 & 9 ; ou 20, 16 & 12 ; ou 30, 24 & 18 ; &c. Car il apert que le quarré du plus grand de trois tels nombres, est toujours égal aux quarréz, des deux autres nombres.

Mais si sans avoir égard aux nombres cy-dessus, on vouloit faire un triangle rectangle, ayant tous les trois costez, en nombre de parties égales sans fraction, on pourroit trouver lesdits nombres en deux manières ; dont la première qu'on attribue aussi à Pythagoras, est telle. Soit pris pour le moindre côté un nombre de parties impair, & iceluy nombre étant quarré, soit ôté l'unité de son dit quarré, & la moitié du reste à iceluy quarré

sera le moyen nombre , auquel adjoûtant l'unité viendra le plus grand nombre ; Comme par exemple , prenant 5 pour le nombre des parties du moindre côté, son quarré est 25, duquel ôtant l'unité restent 24, dont la moitié est 12, pour le nombre des parties du moyen côté, mais adjoûtant l'unité à iceluy , usendront 13 pour le nombre des parties du plus grand côté.

La deuxième maniere est attribuée à Platon , & est telle : Soit pris un nombre pair, & du quarré de la moitié d'iceluy soit ôtée l'unité, & restera l'un des deux autres nombres ; mais adjoûtant ladite unité au même quarré, viendra le troisième nombre : comme par exemple, prenant 6 pour l'un des nombres, le quarré de la moitié d'iceluy est 9, dont l'unité étant ôtée, restent 8, pour l'un des deux autres nombres ; mais adjoûtant ladite unité à iceluy quarré, viennent 10 pour le troisième nombre.

Fin du premier Element.



ELEMENT SECOND.

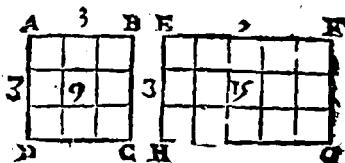
DEFINITIONS.

1. Tout parallelogramme rectangle, est dit être contenu sous deux lignes droites qui font l'angle droit.

La été dit en la 36. def. 1. que c'est qu'un parallelogramme, & qu'il y en a de quatre sortes : mais maintenant il faut entendre qu'un parallelogramme est dit rectangle, lors qu'il a tous les angles droits, & par consequent il y a seulement le quarré, comme $ABCD$, & le quarré long, comme $EFGH$, qui soient rectangles : car il n'y a que ces deux sortes de parallelogrammes qui aient les angles droits. Et est à noter, qu'en tout parallelogramme si un seul angle est donné droit, il est nécessaire que les trois autres soient aussi droits : comme par exemple, si l'angle E du parallelogramme $EFGH$ est droit. Je dis que les trois autres F, G, H , sont aussi droits. Car d'autant que les lignes EF, GH sont paral-

H 2

les, les angles internes E & H , sont égaux à deux droits par la 29. p. 1. Mais l'angle E est droit par l'hypothèse: donc aussi l'angle H sera droit: & par la 34. p. 1. leurs opposés G & F seront aussi droits. Et puis que par la 34. p. 1. tout parallélogramme a les costez opposés égaux, il n'y peut avoir en un parallélogramme que deux costez inégaux, lesquels constituent chaque angle d'ice-



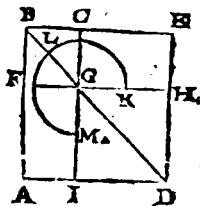
lux: C'est pourquoy Euclide dit icy, tout parallélogramme rectangle être contenu sous deux lignes droites, qui comprennent un angle droit; tellement que le parallélog. rectangle $EFGH$ sera dit être contenu sous les deux lignes droites EF , EH : ou sous les deux EH , FG : ou sous FG , GH : ou finalement sous GH , HE : ainsi deux lignes expriment toute la magnitude ou grandeur d'un parallélogramme rectangle: sçavoir l'une comme EF , ou HG , sa longueur: & l'autre comme EH , ou FG , sa largeur: & par le mouvement imaginaire de l'une de ces deux lignes en l'autre, se fait iceluy parallélogramme. Car si l'esprit conçoit que la ligne EF , en allant en bas au long de la ligne EH , se meuve en travers, tellement qu'elle fasse toujours angle droit avec icelle EH , jusques à ce que le point E parvienne au point H , & le point F au point G , sera décrit tout le parallélog. rectangle $EFGH$. Le même sera fait, si on pose EH se mouvoir en travers, selon la ligne EF . D'où advient que pour obtenir l'aire ou contenu de tout parallélogramme rectangle on multiplie un costé d'iceluy par l'autre: comme par exemple, le costé EF étant de cinq pieds, & l'autre costé EH de trois: si on multiplie un nombre par l'autre, seront produits quinze pieds quarrés, pour l'aire ou contenu de tout le parallélogramme $EFGH$. Pareillement au parallélogramme rectangle $ABCD$, le costé AB étant de trois pieds, & le costé AD aussi de trois pieds: multipliant l'un par l'autre, seront produits neuf pieds quarrés, pour l'aire d'iceluy rectangle, comme montre la figure cy-dessus.

Or est icy à noter, qu'en ce second Livre, & és autres suivans, Euclide appelle les parallélogrammes rectangles,

simplement rectangles; ce qu'observent aussi les autres Geometres, tellement que par le nom de rectangle, il faut toujours entendre parallelogr. rectangl. De rechef, que pour brieveté, & afin de ne repeter souventes fois toutes les lettres apposées aux parallelogrammes, les Geometres ont de coutume d'exprimer chaque parallelogramme soit rectangle ou non par deux lettres seulement, savoir celles qui sont diametralement opposées: tellement que pour denoter le parallelogramme $ABCD$, on dira seulement le parallelogramme AC ou BD .

2. En tout parallelogramme, l'un des parallelogrammes décrits à l'entour du diametre, avec les deux suppléments, est appellé Gnomon.

Au parallelogramme $ABED$, soit menée la diagonale BD ; & CGI parallele à AB couvant icelle diagonale en G , & par iceluy point G soit menée FGH parallele à AD : & le parallelogramme $ABED$ sera divisé en quatre parallelogrammes, deux desquels FC & HI , sont dits être décrits à l'entour du diametre ou diagonale, mais les deux autres EG , AG , sont appellez suppléments, ainsi que nous avons dit à la 37. def. du premier Livre. Or la figure composée d'iceux suppléments & de l'un ou l'autre des parallelogrammes d'alentour la diagonale, sera dit Gnomon: comme la figure $CEDAFG$, laquelle est composée des deux suppléments AG , GE , & du parallelogramme HI , qui est alentour du diametre; sera appellée Gnomon. Pour même raison la figure $ABEHGI$, qui est composée des deux suppléments IF , GE , & du parallelogr. FC , qui est alentour la diagonale, sera aussi dit Gnomon. Et à noter que pour brievement exprimer telles figures, les Geometres y décrivent quelquesfois une circonférence, comme le Gnomon susdit $ABEHGI$, auquel est décrite la circonférence KLM , sera exprimé & denoté par icelle circonférence KLM .

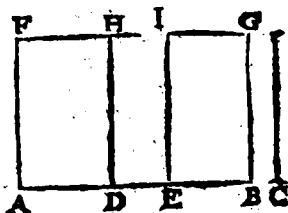


THEOR. I. PROP. I.

Si de deux lignes droites l'une est couppee en tant de parties que l'on voudra, le rectangle contenu sous les deux routes, est egal aux rectangles compris de la non couppee, & d'une chacune partie de celle qui est couppee.

Soient deux lignes droites AB & C, dont la premiere AB est couppee à l'avanture en plusieurs parties, sçavoir est en AD, DE, EB. Je dis que le rectangle compris d'icelles deux lignes AB & C, sera egal aux trois rectangles compris de la ligne non couppee, & d'une chacune partie de la couppee AB.

Qu'il ne soit ainsi: qu'on mene AF perpendiculaire à AB, par la 11. p. 1. laquelle soit faite egale à C, & du point F soit menée FG parallele à AB; & BG parallele à AF par la 31. prop. 1. Il est evident que le quadrilatere AFGB, sera un parallelog. rectangle, & qu'ice-



luy sera compris de deux lignes donnees AB & C, puis que AF est egale à C. Item soient menées les deux lignes DH & EI paralleles à AF par la 31. prop. 1. Donc par la deff. des parallelog. les trois quadrilateres AH, DI, EG, seront parallelogrammes rectangles compris des lignes egales AF, DH, EI, & des trois segmens AD, DE, EB, c'est à dire de la ligne C. & d'iceux trois segmens. Mais iceux trois parallelogrammes rectangles ensemble, conviennent au rectangle AG, compris des lignes donnees: & par la 8. com. sent. ils luy sont egaux. Parquoy si de deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

Ce qu'Euclide propose en lignes aux dix premiers Theoremes de ce second livre, nous l'avons appliqué

& démontré en nombres au Scholie de la 14. pr. 9. Neanmoins j'estime qu'il ne sera inutile de les expliquer dès icy par nombres, comme a fait Clavius: Car d'autant que ce qui proviens de la multiplication d'un nombre par un autre répond au produit d'une ligne en une autre, on peut facilement & brièvement montrer par nombres ce qui est icy démontré en lignes avec beaucoup de paroles.

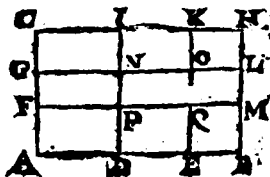
Soient donc proposez deux nombres, comme 10 & 6, le premier desquels soit divisé en trois autres nombres en parties, 5, 3 & 2. Or multipliant les deux nombres proposez, entr'eux, c'est à sçavoir 10 & 6, sera produit le nombre 60, auquel sera égale la somme de ces trois nombres 30, 18 & 12, lesquels sont produits multipliant chaque partie du nombre divisé 10, c'est à sçavoir 5, 3, 2, par le nombre non divisé 6; ainsi qu'il appert en l'opération cy-dessous:

				30
10	5	3	2	18
6	6	6	6	12
60	30	18	12	80

Or Commandin demontre icy deux autres Theoremes, dont le premier est tel.

S'il y a deux lignes droites, l'une & l'autre desquelles soit coupée en tant de parties qu'on voudra; le rectangle compris d'icelles deux lignes, est égal aux rectangles contenus de chaque segment de l'une, & d'un chacun des segments de l'autre.

Soient deux lignes droites AB, AC, contenant un angle droit A, & AB soit coupée par les points D & E, mais AC en points F & G. Je dis que le rectangle contenu sous AB, AC, est égal aux rectangles compris de chaque partie AD, DE, EB, & d'un chacun segment AF, FG, GC, c'est à dire égal aux rectangles contenus de

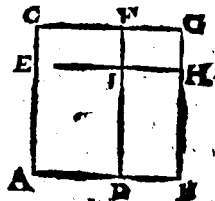


AD, AF; AD, FG; AD, GC: DE, AF; DE, FG, DE, GC: EB, AF; EB, FG; EB, GC. Car étant accompli le rectangle AH, soient tirées DI, EK parallèles à AC: Item FM, GL parallèles à AB, qui couperont les premières es points P, Q, N, O. Veu donc que le rectangle AP est contenu sous AD, AF: & NF sous AD, FG: & GI sous AD, GC, (pource que par la 34. prop. 1. les lignes FP, GN sont égales à icelle AD.) Item que les rectangles DQ, PO, NK, sont contenus sous DE, AF: DE, FG: DE, GC: (car DP, PN, NI sont égales à icelles AF, FG, GC: & PQ, NO, à icelle DE, par la 34. prop. 1.) Et par la même raison les rectangles EM, QL, OH, sont compris sous EB, AF: EB, FG: EB, GC. Il est évident que le rectangle contenu sous AB, AC, est égal aux rectangles compris sous chacune des parties AD, DE, EB, & un chacun des segments AF, FG, GC: ce qui étoit proposé.

Nous rendrons aussi manifeste ce Theoreme par nombres: & pource soient deux nombres 12 & 8, le premier desquels soit divisé en trois parties 6, 4 & 2: mais le dernier soit seulement divisé en deux parties 5 & 3. Or le produit de ces deux nombres proposez multipliez ensemble est 96, auquel est manifestement égale la somme de ces six nombres, 30, 20, 10; 18, 12, & 6, lesquels sont produits par la multiplication de chacune des parties 6, 4, 2, en chacune des parties 5 & 3, comme vouloit Commandin en ce premier Theor. Quand au second il est tel qu'il ensuit.

S'il y a deux lignes droites coupées comme on voudra, le rectangle compris sous icelles, avec celui compris sous une partie de l'une d'icelles lignes, & une partie de l'autre, est égal aux rectangles contenus sous les lignes totales, & les susdites parties reciproquement, avec le rectangle contenu des deux autres parties.

Soyent deux lignes droites AB, AC, faisant l'angle droit A, lesquelles soient coupées comme on voudra en D & E. Je dis que le rectangle compris sous AB, AC, avec celui compris sous les parties AD, EC, est égal aux rectangles contenus sous AB, EC: AC, AD: DB, AE. Car ayant accompli le rectangle AG, soit me-



née DE parallèle à AC ; & EH à AB , s'entrecompans en I .
 Ven donc que le rectangle AG est égal aux rectangles
 EG , AI , DH : si on leur ajoute le commun rectangle EF :
 les rectangles AG , EF , qui sont compris sous les sources
 AB , AC , & les parties AD , EC , seront égaux aux re-
 ctangles EG , AF . DH , compris sous AB , EC : AC , AD :
 DB , AE : ce qui étoit proposé.

Afin que ce theor. de Commandin soit aussi manifeste
 par nombres, soient proposez deux quelconques nombres
 9 & 5, le premier, desquels soit divisé en deux parties 3
 & 4 : mais l'autre soit divisé en 3 & 2 : Or le produit
 de ces deux nombres proposez, est 45, & celui de la par-
 tie 5, multiplié par la partie 3 est 15 ; & la somme de
 ces deux produits est 60, auquel nombre est manifeste-
 ment égale la somme & addition de ces trois nombres
 27, 25 & 8, qui sont produits de 9 par 3, de 5 par 5, &
 de l'autre partie 4 par l'autre partie 2.

COROLLAIRE.

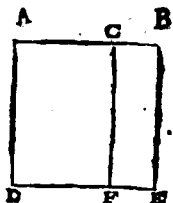
Parce que dessus est manifeste que s'il y a deux li-
 gnes droites, l'une & l'autre desquelles soit coupée
 comme on voudra, le rectangle compris sous scelles sera
 égal au rectangle compris sous une source, & un seg-
 ment de l'autre, & aux deux rectangles contenus de
 l'autre segment de cette - cy, & d'un chacun seg-
 ment de celle-là. Car le rectangle AG , qui est compris
 des deux sources AB , AC , est égal au rectangle EG ,
 contenu de la source. EH , c'est à dire AB , & du seg-
 ment EC , & aux deux rectangles AI , DH ; compris de
 l'autre segment AE , & des segments AD , DE . Iceluy
 rectangle AG est aussi égal aux trois rectangles AH , EF ,
 IG . Pareillement aux trois AF , DH , IG , comme aussi aux
 trois autres DG , AI , EF .

Le même se doit aussi entendre des nombres : car il
 est évident que les deux nombres cy dessus proposez,
 c'est assavoir 9 & 5, estans multipliez entr'eux pro-
 duisent 45, auquel sont égaux ces trois nombres 27, 10
 & 8, produits de la multiplication de 9 par la partie 3 :
 & de la partie 2 par chacune des parties 5, 4. Et ainsi de
 toute autre partie qu'on voudra prendre.

THEOR. 2. PROP. II.

Si une ligne droite est coupée comme on voudra : les rectangles compris de la toute & d'une chacune partie, sont egaux au quarré de la toute.

Soit la ligne droite AB , coupée en deux parties telles qu'on voudra au point C . Je dis que le rectangle de la toute AB , & de la partie AC , avec le rectangle de la toute AB , & de l'autre partie CB , sont ensemble egaux au quarré de la toute AB .



Qu'ainsi ne soit : Sur AB soit décrit le quarré $A E$, puis de C soit menée CF parallèle à AD , laquelle CF sera égale à icelle AD , c'est à dire à AB : car icelles AD, AB sont égales par la def. du quarré. Il est donc evident que les deux rectangles AF & CE , sont compris de la toute AB ou son égale CF , & des deux parties AC & CB , & si ils conviennent avec le quarré $A E$, & par conséquent luy sont egaux. Si donc une ligne droite est coupée comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonstret.

S C H O L I E.

Clavius demonstre encore ce Theoreme ainsi. Soit prise une ligne droite D égale à AB : Or puis que AB est coupée en C , le rectangle contenu sous la non coupée D , & la coupée AB (qui est le quarré de la toute AB) sera egal aux deux rectangles compris sous la non coupée D (c'est à dire sous AB) & un chacun des segments AC, CB par la prec. prop. Ce qui étoit proposé.

Pour accommoder ce Theoreme aux nombres. Soit le nombre 12 divisé en deux nombres 7 & 5 : il est evident qu'un quarré d'iceluy nombre, qui est 144, sont egaux

les deux nombres 84 & 60, qui sont produits du même nombre 12 multiplié par chacune des parties 7 & 5 : car ils sont aussi 144. comme nombre l'addition d'iceux.

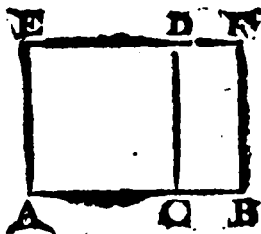
Or encore qu'en ce second Theoreme Euclide propose d'une ligne divisée en deux parties seulement, si est-ce toutesfois qu'en la même manière sera démontré : même, si la ligne est divisée en tant de parties qu'on voudra. Ce qui se peut aussi voir par nombres, ainsi qu'il ensuit. Soit le nombre 12 divisé en trois parties 5, 4 & 3. Le quarré dudit nombre 12 sera 144 ; auquel sont egaux ces trois nombres 60, 48 & 36, lesquels sont produits d'iceluy nombre proposé 12, multiplié par chacune des parties 5, 4 & 3.

Sera aussi démontré comme dessus, que si une ligne droite est coupée en tant de parties qu'on voudra ; le quarré de la toute est égal aux rectangles contenus sous chaque segment & un chacun segment. Ce que nous rendrons aussi manifeste par nombres : & pour ce soit le nombre 10 divisé en trois parties 5, 3 & 2 : Il est evident que le quarré du nombre total 10 est 100, & qu'à iceluy sont egaux ces neuf nombres 25, 9, 15, 10, 6 & 4, lesquels sont produits par chacune des parties multipliée par chacune d'icelles.

THEOR. 3. PROP. III.

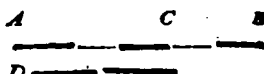
Si une ligne droite est coupée comme on voudra ; le rectangle compris de la toute, & de l'une des parties, est égal au rectangle compris d'icelles parties, & au quarré de la partie premierement prise.

Soit la ligne droite AB coupée comme on voudra au point C. Je dis que le rectangle compris de la totale AB, & de l'une ou l'autre partie, comme AC, est égal au rectangle compris des deux parties AC & CB, & au quarré de la partie AC, laquelle avoit esté premierement prise.



Qu'il ne soit ainsi : Sur la partie AC soit fait le quarré AD par la 46. pr. 1. puis soit menée BF parallèle à CD par la 31. prop. 1. rencontrant ED prolongée en F. Il est donc évident que AD est le quarré de la partie AC ; & CF le rectangle de parties AC & CB ; (car CD est égale à AC par la définition du quarré) & AF le rectangle de la toute AB & de la partie AC, sur laquelle a esté fait le quarré. Or le quarré AD, & le rectangle CF ensemble, conviennent avec le rectangle AF ; & par conséquent égaux à iceluy. Si donc une ligne droite est coupée comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Clavius demontre encore ce Theor. ainsi. Soit prise la ligne droite D égale a la partie AC. D'autant que la ligne droite AB est divisée en C, par la 1. pr. de ce livre ; le rectangle contenu sous D & AB (c'est à dire sous AC & AB) sera  égal au rectangle compris sous D & CB (c'est à dire sous AC, CB) & au rectangle contenu sous D & BC, c'est à dire au quarré de la partie AC. Ce qui est proposé.

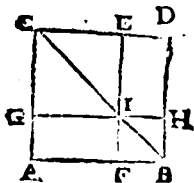
Pour accommoder ce Theor. aux nombres, soit quelconque nombre 12 divisé en deux parties telles qu'on voudra 7 & 5. Or multipliant ledit nombre proposé 12 par sa partie 7, viendront 84, auquel produit sont égaux ces deux nombres 35 & 49, lesquels sont produits de 7 multipliez par 5, & de 7 par soy même. Mais multipliant le même nombre 12 par l'autre partie 5, sera produit le nombre 60, auquel sont aussi égaux ces deux nombres 35 & 25, qui sont les produits des deux parties 7 & 5, multipliées entr'elles, & de la partie 5 en soy même : Et partant apers ce qui a esté proposé.

THEOR. 4. PROP. IV.

Si une ligne droite est coupée comme on voudra; le quarré de la route est egal aux deux quarréz des parties, & à deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne donnée AB , coupée comme on voudra au point F . Je dis que les deux quarréz décrits sur les parties AF & FB , avec deux fois le rectangle d'icelle AF & FB sont ensemble egaux au quarré de la totale AB .

Qu'ainsi ne soit. Sur la ligne totale AB soit décrit le quarré AD ; & apres avoir mené la diagonale BC ; du point F , soit menée la ligne droite FE parallele à AC coupant la diagonale BC en I , & de rechef par iceluy point I soit menée GH parallele à AB , le tout par la 31. prop. 1. Je dis premierement que les quadrilateres HF & EG sont quarréz.



Car déjà il appert qu'ils sont parallelogrammes, étans décrits entre lignes paralleles. Item puis que AD est quarré, les deux costez AB & AC seront egaux, & le triangle ABC est Isoscele: & par la 5. prop. 1. les deux angles sur la base BC , sçavoir est ABC & ACB seront egaux. Pareillement la ligne BC tombant sur les deux paralleles AC & FE fera l'angle extérieur FIB egal à l'opposé intérieur ACB par la 29. prop. 1. lequel estant egal à ABC par la 1. com. sent. ABC & FIB seront egaux, & par la 6. prop. 1. les deux costez BF & FI seront egaux: & par la 34. prop. 1. le parallelogramme HF aura les quatre costez egaux: & partant il sera quarré; car l'angle FBI estant droit, les trois autres seront aussi droits, comme nous avons démontré à la 1. def. de ce livre. Par mesme discours on montrera GE estre aussi quarré. Maintenant, d'autant que AI & ID sont décrits entre lignes paralleles, & les angles A & D sont droits, il appert qu'ils sont parallelogrammes rectangles,

& egaux entr'eux par la 43. prop. 1. & sont compris des deux parties AF, FB, étant, EI égale à AF, & HI, IF à FB par la 34. prop. 1. & def. du quarré. Partant AI & ID sont deux fois le rectangle de AF & FB, lesquels avec les deux quarréz FH & GE conviennent avec le quarré total AD, & par la 8. comment. ils luy seront egaux. Si donc une ligne droite est coupée comme on voudra, le quarré de la toute est égal, &c. Ce qu'il falloit demonstrez.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par la demonstration cy-dessus, que les parallelogrammes décrits à l'entour de la diagonale d'un quarré, & qui ont un angle commun avec iceluy, sont aussi quarréz. Et de plus, il est évident que la diagonale coupe en deux également les angles du quarré; Ce que nous avons aussi démontré au 3. Theor. du Scholie de la 34. p. 1.

SCHOLIE.

Clavius demontre encore apres Campanus ce 4. Theor. d'Euclide ainsi. D'autant que la ligne droite AB est coupée en F, par la 2. prop.

2. le quarré de la toute A F B
 AB sera égal aux rectangles 
 compris sous la toute AB,

& chacune des parties AF, FB. Mais par la 3. prop. 2. le rectangle contenu sous AB, AF est égal au rectangle compris sous AF, FB avec le quarré de la partie AF. Item le rectangle de AB, FB est égal au rectangle de FB, AF, avec le quarré de la partie FB. Donc le quarré de AB est aussi égal aux quarréz des parties AF, FB, & aux rectangles contenus sous AF, FB & sous FB, AF. Ce qui est proposé.

Pour accommoder ce Theoreme aux nombres; Soit le nombre 10 divisé en deux parties 6 & 4: Il est manifeste que le nombre 100, qui est le quarré du nombre total 10, est égal à 36 & 16, qui sont les quarréz des parties 6 & 4, avec deux fois 24, nombre produit desdites parties 6 & 4 multipliées entr'elles: car tous ces

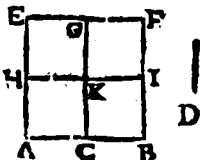
quatre nombres 36, 16, 24 & 24, font ensemble 100, ainsi qu'il appert en l'operation suivante.

10	6	4	6	36
10	6	4	4	16
—	—	—	—	24
100.	36.	16.	24.	24
				—
				100.

Clavius demontre aussi en ce lieu le Theoreme suivant.

Si une ligne droite est double d'une autre, le carré de celle-là est quadruple du carré de cette-cy : & si un carré est quadruple d'un autre carré, le côté de celui-là est double de cetui-cy.

Soient deux lignes droites AB & D , desquelles AB est double de D . Je dis que le carré de AB est quadruple du carré de D . Car ayant divisé AB en deux également en C , si on fait telle construction qu'en cette 4. propos. il est evident que les 4. parallelogrammes AK , CI , HG , KF . seront carrez, & egaux entr'eux. Mais le carré AF est egal à iceux quatre carrez : donc le carré de AB sera quadruple du carré de AC , c'est à dire de D , qui luy est egal : Car AB est double de l'une & de l'autre.



Pour la seconde partie : Soit le carré de AB quadruple du carré de D . Je dis que AB est double de D . Car AB étant coupé en deux également en C , le carré de AB sera quadruple du carré de AC , comme il a été demontre cy-dessus. Mais le carré de AB a été posé aussi quadruple du carré de D : donc les carrez des lignes AC & D sont egux, & parant icelles lignes AC & D aussi egales. Mais AB est double de AC : donc aussi double de D .

Ce Theoreme est aussi manifeste en nombres : Car soient

deux quelconques nombres 10 & 5, dont le premier est double de l'autre. Il apert que 100, quarré du premier nombre 10, est quadruple de 25, quarré du dernier nombre 5.

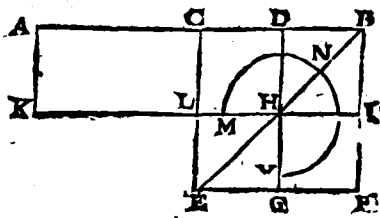
THEOR. 5. PROP. V.

Si une ligne droite est coupée en deux parties egales, & en deux inegales; le rectangle contenu d'icelles parties inegales avec le quarré de la partie du milieu, sont egaux au quarré de la moitié de la toute.

Soit la ligne donnée AB coupée en deux parties egales au point C, & en deux inegales au point D. Je dis que le rectangle compris des deux parties inegales AD & BD, avec le quarré de la partie du milieu CD, sont egaux au quarré de la moitié CB.

Car sur la ligne CB soit décrit le quarré CF par la 46. prop. 1. & apres avoir mené DG parallele à BF soit menée la diagonale BE coupant DG au point H, par lequel soit menée interminément IK parallele à AB, coupant CE en L; puis du point A, soit aussi menée AK paral-

lele à DH, rencontrant KI en K. Donc par le Corol. de la prec. pr. DI, LG seront quarrés; & passant la li-



gne DH sera egale à la ligne DB: & par la 34. prop. 1. LH est aussi egale à CD: parquoy le rectangle AH est compris des deux segmens AD, DB; & IG sera quarré de la partie du milieu CD. Il faut donc prouver que le rectangle AH, avec le quarré GI, est egal au quarré CF, fait sur la ligne CB moitié de la toute AB.

Or le rectangle AL est egal au rectangle CI par la 36. pr. 1. d'autant

d'autant qu'ils sont sur bases egales AC & CB, & entre mêmes parallèles AB & KI. Pareillement les suppléments CH & HF sont egaux par la 43. prop. 1. auxquels si on ajoûte le carré commun DI, les tous CI & DF seront egaux : & par la 1. com. sent. DF sera egal à AL, auxquels si on ajoûte aussi le supplément commun CH, le Gnomon MNX sera egal au rectangle AH. Mais iceluy Gnomon, & le carré GL, conviennent avec le carré CF, & partant sont egaux par la 8. com. sent. Donc aussi le rectangle AH, & le carré GL seront egaux au carré CF par la 1. com. sent. Parquoy si une ligne droite est coupée en deux parties egales, & en deux inegales, &c. Ce qu'il faisoit demonstren.

S C H O L I E.

Nous ajoûterons tant en ce Theor. qu'aux 3. suivans les demonstrations qu'en a fait le doct^r Maurolycus. D'autant que par la 4. p. 2. le carré de CB est egal aux quarrés de CD & DB, avec deux fois le rectangle de CD, DB, avec deux fois le rectangle de AC, DB, & que par la 3. p. 2. le rectangle de CB, DB est egal au rectangle de CD, DB, avec le carré de DB : le carré de CD sera egal à l'autre carré de CD, avec le rectangle de CB, DB, & celui de CB, DB, ou de AC, DB. Mais par la 1. prop. 2. le rectangle des routes AD, DB, est egal aux rectangles de DB, AC, & de DB, CD. Donc le carré de CB sera egal au carré de CD, avec le rectangle de AD, DB. Ce qui étoit proposé.

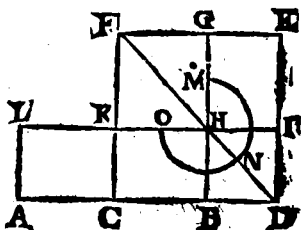
Pour accommoder ce Theoreme aux nombres, soit le nombre 12 divisé en deux parties egales 6 & 6; Et aussi en deux parties inegales 8 & 4; & par ainsi la plus grande partie de 8 excède la moitié 6 du nombre 2, qui est la partie du milieu. Il est evident que 32, nombre produit des deux nombres inegaux 8 & 4, avec 4 qui est le carré de 2, est egal à 36, qui est le carré de 6, moitié du nombre proposé.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, & qu'on luy ajoûte directement quelque autre ligne droite : le rectangle de la toute & de l'ajoûtée comme d'une, & de l'ajoûtée, avec le quarré de la moitié, est égal au quarré qui est fait de la moitié & de l'ajoûtée comme d'une.

Soit la ligne droite AB coupée en deux également au point C, & à icelle AB soit ajoûtée directement la ligne BD. Je dis que le rectangle compris de la totale AD, & de l'ajoûtée BD, avec le quarré de la moitié CB, est égal au quarré de la ligne CD, laquelle est composée de la moitié CB, & de l'ajoûtée BD.

Qu'ainsi ne soit : sur la ligne CD soit décrit le quarré CE, & tracé la diagonale DE ; & après avoir du point B, mené BG parallèle à DE, laquelle coupe la diagonale au point H ; par iceluy point H soit menés interminément IKL parallèle à AD par la 31. prop. 1. Item AL parallèle à DI, rencontrant IL en I.



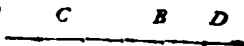
Premièrement le rectangle AI est compris de la toute & ajoûtée comme d'une AD, & de l'ajoûtée DI (car icelle DI est égale à l'ajoûtée BD étant BI quarré par le Cor. de la 4. p. de ce livre.) Item KG, qui est quarré par le mesme Cor. est fait sur HK égale à la moitié CB par la 34. prop. Je dis donc que le rectangle AI, & le quarré KG sont ensemble égaux au quarré CE. Car les deux suplemens CH & HE estans égaux par la 43. pr. 1. Item les deux rectangles AK & CH aussi égaux par la 36. prop. 1. d'autant qu'ils sont sur bases égales, & entre mesme parallèles : & par la 1. cor. sent. AK sera égal à HE, & en a ôtant à chacun d'eux le rectangle commun CI, le Gnomon MNO sera égal au rectangle AI. Mais iceluy

Gnomon avec le carré GK, sont égaux au carré CE : donc le rectangle AI avec le carré KG sera égal au même carré CE. Parquoy si une ligne droite est coupée en deux parties égales. &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Autrement. D'autant que par la 4. pr. 2. le carré de CD est égal aux deux carrés de CB, BD avec deux fois le rectangle d'icelles CB : BD; &

que par la 1. pr. 2. le rectangle des sommes AD, BD est



égal aux trois rectangles de DB, AC, DB, CB; & DB, DB; (qui est le carré de DB) le carré de CD sera égal à l'autre carré CB avec le rectangle de AD, BD. Ce qu'il falloit démontrer.

Pour appliquer ce Theor. aux nombres, soit le nombre 12 divisé en deux nombres égaux 6 & 6; & à iceluy nombre 12 soit ajouté 3. Il est évident que le nombre 45 produit de tout le nombre composé 15 multiplié par l'ajouté 3, avec 36 carré de la moitié 6. font 81, tout ainsi que le carré de 9, composé de ladite moitié 6, & de l'ajouté 3.

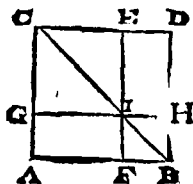
THEOR. 7. PROP. VII.

Si une ligne droite est coupée comme on voudra; le carré de la toute, & le carré de l'une des parties, sont égaux au carré de l'autre partie, & deux fois le rectangle compris de la totale, & de la partie premièrement prise.

Soit la ligne AB coupée comme on voudra au point F. Je dis que les deux carrés de la totale AB & de la partie AF, sont égaux au carré de l'autre partie FB, & deux fois le rectangle de AB, AF.

Qu'il ne soit ainsi : sur AB soit décrit le carré AD avec sa diagonale BC : & apres avoir mené du point F, la ligne FE paralele à AC, laquelle coupe la diagonale BC au point I;

d'iceluy point soit menée GH parallèle à AB par la 12. pr. 1. Donc FH & GE seront quarréz par le Cor. de la 4. prop. de ce liv. & puis que par la 34. pr. 1. GI est égale à AF; GE sera quarré du segm. AF. Recherchez pource que AC est égale à AB, le rectangle AE sera compris sous la toute AB & le segm. AF. Par même raison le rectangle GD sera compris sous les mêmes lignes AB, AF : (car CD, CG sont égales à AB, AF, à cause des quarréz AD, GE.) Vû donc que les rectangles AE & ID, avec le quarré FH sont égaux au quarré AD : si on leur ajoute le commun quarré EG, les quarréz AD, EG seront égaux aux rectangles AE, GD, (chacun desquels est compris de la toute AB & de la partie AF) avec le quarré FH. Parquoy si une ligne droite est coupée comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



S C H O L I E.

Autrement. D'autant que par la 4. pr. 2. le quarré de AB est égal aux deux quarréz de AF, FB, & deux fois le rectangle d'icelles AF, FB; si on ajoute le quarré commun de AF, les quarréz de AB, AF seront égaux aux trois quarréz de AF, AF, FB, avec deux fois le rectangle de AF, FB. Mais par la 3. p. 2. le rectangle de AB, AF est égal au rectangle de AF, FB, avec le quarré de AF; & partant deux fois le rectangle de AB, AF, est égal à deux fois le rectangle de AF, FB, avec deux fois le quarré de AF : donc les quarréz de AB, AF, sont égaux à l'autre quarré de FB, avec deux fois le rectangle de AB, AF. Ce qui étoit à démontrer.

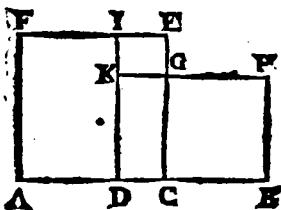
Pour accommoder ce Theor. aux nombres, soit divisé le nombre 12 en deux tels nombres qu'on voudra 7 & 5. Or il est évident que 144 nomb. quarré de 12, & 49 nombre quarré de la partie 7, sont ensemble égaux à 193, qui est fait de 25 nombre quarré de l'autre partie 5, & deux fois 84, produit de 12 multiplié par 7. Semblablement 144 & 25, nombres quarréz de 12 & 5, sont ensemble égaux à 169,

fait de 49 quarré de 7, & deux fois 60, produit de 12 multiplié par la partie.

Commandin demontre en ce lieu le Theor. suivant.

Si une ligne droite est coupée en deux parties inegales, les quarez d'icelles parties sont egaux au rectangle contenu deux fois sous icelles parties, & au quarré de la ligne, dont la plus grande partie excède la moindre.

Soit la ligne droite AB coupée en deux parties inegales AC , CB , desquelles AC est la plus grande, & d'icelle AC , soit prise AD egale à BC , afin que DC soit l'excès de la partie AC par dessus BC . Je dis que les quarez des parties AC , CB sont egaux au rectangle contenu deux fois sous AC , CB , & au quarré de DC . Car soient construits les quarez AE , CH , & mené DI parallele à CE : puis prolongée HG jusques à ce qu'elle rencontre DI en K . Or d'autant que les lignes BC , AD sont egales, leur ajoutant la commune DC , la route AC , c'est à dire CE , sera egale à la route DB . Mais CG est aussi egale à CB : donc aussi le reste GE sera egal au reste DC : & partant puis qu'aussi IE est egale à DC par la 34.



pr. 1. GE , IE seront egales: & partant IG sera le quarré de l'excès DC . Et d'autant que les rectangles AI , DH sont contenus sous les parties AC , CB : (car AC est egale à l'une & à l'autre ligne AF , DB : & CB à l'une & à l'autre AD , BH .) Il est manifeste que les quarez AE , CH , des parties AC , CB sont egaux aux rectangles AI , DH , qui sont contenus sous les parties AC , CB , & à IG quarré de l'excès DC , Ce qui étoit proposé.

Le même est aussi manifeste par nombres: car le nombre 12 étant divisé en deux parties inégales 7 & 5: dont la plus grande excède la moindre de 2: les quarez d'icelles parties seront 49 & 25, qui sont ensemble 74, auquel nombre sont egaux deux fois 35 produit de 7 multiplié par 5, avec 4 quarré de l'excès 2.

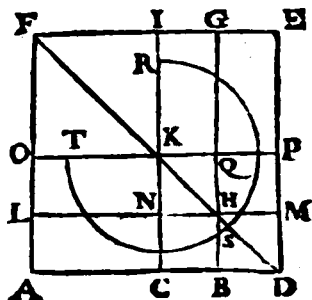
THEOR. 8. PROP. VIII.

Si une ligne droite est coupée comme on voudra ; quatre fois le rectangle compris de la route & de l'une des parties , avec le carré de l'autre partie , est égal au carré de la route , & d'icelle partie premièrement prise comme d'une seule ligne.

Soit la ligne donnée AB coupée comme on voudra au point C. Je dis que quatre fois le rectangle, compris de AB & de l'une ou l'autre partie, sçavoir BC, avec le quarré de l'autre partie AC, sont ensemble égaux au quarré de AD composée de la totale AB, & de la partie BC.

Qu'il ne soit ainsi : Soit prolongée AB vers D, & pris BD égale à BC, puis sur la totale AD soit fait le carré AE avec sa diagonale FD & des deux points B & C, soient menées BG & CI parallèles à DE. Item des points H & K, auxquels elles coupent la diagonale FD, soient menées LM & OP parallèles à AD, par la 31. prop. 1. lesquelles coupent les premières parallèles en N & Q.

Premièrement, par ce qui résulte de la 4. prop. de ce Livre les rectangles OI , NQ , BM au long de la diagonale seront quarréz. Item, d'autant que CB est égale à $BD : CH$, & BM , seront égaux & quarréz : (étant l'un d'eux



quarré) pareillement NQ & HP aussi égaux quarréz; ainsi les quarré CH , BM , NQ , HP , seront quarréz, & égaux: & par la 43. p. 1. les deux suppléments LK & KG seront aussi égaux entr'eux, & par la 36. pr. 1. LK est égal à AN ; & KG à QE : & par conséquent iceux quatre rectangles sont aussi

egaux entr'eux. Mais comme aux précédentes, il est évident que AH est une fois le rectangle de AB & BH , (égale à BD) qui est un des quatre rectangles avec un des quatre petits quarrés égaux : donc iceux quatre rectangles avec iceux quatre quarrés faisant le Gnomon RST seront égaux à quatre fois le rectangle de AB & BD ; lequel Gnomon avec le quarré de OK (égale à AC par la 34. p. 1.) sçavoir est OI , contiennent avec le quarré AE : & partant par la 8. com. sens. ils luy seront égaux : Si donc une ligne droite est coupée, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Autrement, D'autant que par la 4. prop. 2. le quarré de AD est égal aux quarrés de AB , BD , & à deux fois le rectangle d'icelles AB , BD , c'est à dire, aux quarrés de AB , BC avec deux fois le rectangle de AB , BC : & que par

$A \qquad \qquad \qquad C \quad B \quad D$

la précédente les quarrés de AB , BC sont égaux au quarré de AC avec deux fois le rectangle de AB , BC : le quarré de AD sera égal à quatre fois le rectangle de AB , BC , avec le quarré de AC . Ce qu'il falloit démontrer.

Pour accommoder ce theoreme aux nombres, sois le nombre 12, divisé comme on voudra en 7 & 5. Or ledit nombre 12 multiplié par la partie 7, fait 84, qui pris quatre fois avec 25 quarré de l'autre partie 5, font 361, qui est le nombre quarré de 19. composé de 12 & 7. Semblablement le nombre 140, qui est fait du nombre proposé 12, multiplié quatre fois par la partie 5, étant adjoint avec 49, quarré de l'autre partie 7, font 289, tout ainsi que le quarré de 17, nombre composé du donné 12. & de la partie 5.

THEOR. 9. P R O P. IX.

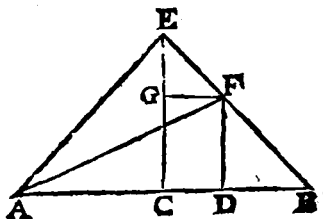
Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, & en deux inégales : les quarrés d'icelles parties inégales seront doubles des quarrés de la moitié, & de la partie du milieu.

Sois la ligne donnée AB coupée en deux également au point

C, & en deux inegalement en D. Je dis que les quarez de AD & DB parties inegales, sont doubles des quarez de AC moitié, & de CD partie du milieu.

Qu'il ne soit ainsi : au point C soit levée la perpendiculaire CE, qu'on fera egale à CA, & apres avoir mené AE & BE, soit levée la perpendiculaire DF, coupant BE en F, duquel point soit menée FG parallele à AB, coupant CE en G : & finalement soit menée AF.

Premierement, les triangles ACE, & ECB seront Iſoſcelles, & feront les angles ſur les baſes AE & EB egaux par la 5. prop. 1. étant l'angle ECB droit pour être CE perpendiculaire. Item FDB étant droit, & DBF demy



droit, auſſi, par la 32. pr. 1. DFB ſera demy droit, & par la 6. pr. 1 les coſtez DB & DF, du triangle BDF. ſeront egaux entr'eux. Par le meſme diſcours ſera demonſtré que les coſtez GF, GE, du triangle FGE, ſont egaux entr'eux. Item il eſt evident que l'angle AEB ſera droit, étant compoſé des deux demy droits AEC, & BEC.

Maintenant par la 47. pr. 1. au triangle rectangle ACE, le quarré de AE, côté qui ſoutient l'angle droit, eſt double du quarré de AC ; étant egal à tous les deux de AC & CE. Par même diſcours, le quarré de EF eſt double du quarré de GF, ou de CD ſon egal par la 34. p. 1. partant les deux quarez de AE & EF, ſeront doubles des deux de AC & CD. Pareillement le quarré de AF étant egal aux deux de AE & EF par la 47. p. 1. iceluy ſera double des deux de AC & CD. Mais par la même 47. pr. 1. le quarré de AF eſt egal aux deux de AD & DF, ou DB ſon egal : donc les deux quarez de AD & DB ſeront doubles des deux de AC & CD. Si donc une ligne droite eſt coupée, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

S C H O L I E.

Autrement. D'autant que par la 4. prop. 2. Le quarré de la ligne AD eſt egal aux deux quarez de AC, CD, & à deux fois le rectangle d'icelles AC, CD : ſi on ad-

joindre le commun carré de DB, les deux carrés de AD, DB, seront égaux aux trois carrés de AC, CD & DB, avec deux fois le rectangle de AC, CD, ou de BC, CD. Mais $A \quad C \quad D \quad B$
 par la 7. prop. 2. les carrés de -----
 BC ou AC, & de CD, sont égaux
 au carré de DB avec deux fois le rectangle de BC, CD.
 Donc les carrés de AD, DB sont égaux à deux fois les
 carrés de AC, CD : & partant doubles d'eux : Ce qu'il
 falloit démontrer.

Commandin démontre encore cette proposition autrement ; ainsi qu'il ensuit. D'autant que AC est égale à CB, & icelle CB excède CD de DB, aussi AC excédera la même CD de DB. Parquoy comme il a été démontré à la 7. prop. 2. les carrés de AC, CD, sont égaux à deux fois le rectangle de AC, CD, avec le carré de DB, & partant les trois carrés de AC, CD, DB, avec deux fois le rectangle de AC, CD, sont doubles des carrés de AC, CD. Mais par la 4. propos. 2. le carré de AD est égal aux carrés de AC, CD, avec deux fois le rectangle de AC, CD. Donc les carrés de AD, DB sont doubles des carrés de AC, CD.

Pour aussi rendre manifeste ce Theor. par nomb. soit le n. 32 divisé en deux parties égales, 6 & 6, & en deux inégales 8 & 4. de sorte que la partie du milieu sera 2. Or il est évident que 64 & 16, qui sont les carrés des parties inégales 8 & 4, sont ensemble doubles de 36 & 4, qui sont les carrés de la moitié 6, & de la partie du milieu 2, comme veut la prop.

THEOR. 10. PROP. X.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, & on luy ajoute directement quelque autre ligne droite ; le carré de la toute avec l'ajoutée comme d'une, & le carré de l'ajoutée, sont doubles des carrés de la moitié, & de la moitié, & de l'ajoutée, comme d'une.

Soit la ligne droite AB coupée en deux également au point

PROBL. I. PROP. XI.

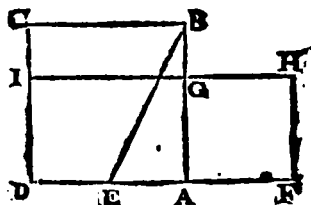
Couper une ligne droite donnée , tellement que le rectangle de la toute , & de l'une des parties, soit egal au quarré de l'autre partie.

Soit la ligne droite donnée AB , laquelle il faut diviser selon le requis de la proposition.

Après avoir construit sur icelle AB le quarré AC , soit divisée AD en deux également au point E , & après avoir mené EB, & prolongé EA vers F , tellement que EF soit égale à EB, sur AF soit fait le quarré AH ; & soit continuée HG jusques en I. Je dis que la ligne AB est coupée au point G, en sorte que le rectangle CG , compris de BC égale à BA ; & de BG partie de BA , est egal au quarré de l'autre partie AG , sçavoir est à GF.

Car la ligne AD estant coupée en deux également en E , & on luy ajoute directement AF , & le quarré de la moitié & de l'ajoutée comme d'une , sçavoir EF , ou de son égale EB , est egal au rectangle de DE,

AF, au quarré de AE par la 6. p. de ce livre. Mais le quarré de EB est egal aux deux de BA & AE par la 47. prop. 1. ainsi les deux quarrés de BA & AE , seront egaux au rectangle de DE , AF, & au quarré de AE : ôtant



donc le quarré de AE commun , les demeurans quarré de AB, sçavoir AC , & le rectangle de DE , AF , sçavoir FI , seront egaux ; desquels AC & FI , si on ôte le rectangle commun AI ; le demeurant quarré FG, sera egal au demeurant rectangle GC. Parquoy nous avons coupé la ligne droite AB en G , tellement que le rectangle d'icelle & de la partie GB est egal au quarré de l'autre partie AG. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Nous avons enseigné en nos Memoires Mathe.

matiques Probl. 72. de la Geometrie pract. à cou-
per une ligne droite, non seulement comme ensei-
gne icy Euclide, mais aussi en sorte que le rectan-
gle de la toute, & de l'une des parties soit double,
ou triple, ou quadruple, &c. ou moitié, ou tiers, ou
quart, &c. du quarré de l'autre partie : bref qu'iceluy
rectangle soit au quarré, selon quelconque raison don-
née.

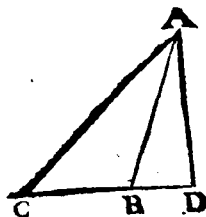
Quand aux nombres, ils ne se peuvent accommoder
à ce probleme, sinon qu'on y employe les nombres irra-
tionaux : Car aucun nombre absolu ne peut être di-
visé en deux autres tels que le nombre produit du
tout, multiplié par l'une des parties soit egal au nom-
bre quarré de l'autre partie, comme il sera démontré
au Scholie de la 14. p. 9. auquel les 10. theoremes pre-
cedens seront demontrez en nombres ; Neanmoins
pour le contentement de ceux qui entendent les opera-
tions des nombres irrationaux, nous appliquerons les
nombres aux lignes & superficies mentionnez en la
demonstration cy-dessus. Que la ligne AB soit 8 :
donc sa moitié AE sera 4, & leurs quarrés seront
64 & 16, qui font ensemble 80, pour le quarré de BE ,
ou EF , qui par consequent sera irrationnelle, c'est à
sçavoir $\sqrt{80}$: & d'icelle EF , osons EA 4, & resle-
ront pour AF , ou AG , $\sqrt{80} - 4$, qui ostez de la toute
 AB 8, resteront pour l'autre partie BG $8 - \sqrt{80} - 4$,
c'est à dire $12 - \sqrt{80}$, qui multipliez par le nombre
total 8, feront 96 -- $\sqrt{5120}$ pour le rectangle GC , &
autant est le quarré AH ; car la partie AG , qui
est $\sqrt{80} - 4$, multipliée par soy-même fait aussi
96 -- $\sqrt{5120}$, comme vouloit ce probleme.

THEOR. II. PROP. XII.

Aux triangles ambligones, le quarré du côté qui soutient l'angle obtus, est plus grand que les quarréz des deux autres côtez, de la quantité de deux fois le rectangle, compris d'un des côtez contenant l'angle obtus, sçavoir celui sur lequel étant prolongé tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

Soit le triangle ambligone ABC , duquel soit prolongé le côté CB jusques en D , & du point A soit menée la perpendiculaire AD par la 12. prop. 1. Je dis que le quarré du costé AC qui soutient l'angle obtus ABC , est plus grand que les quarréz de AB & CB , de deux fois le rectangle de CB & BD , sçavoir CB qui est l'un des costez faisant l'angle obtus, celui sur lequel étant prolongé tombe la perpendiculaire AD , & BD prise dehors entre l'angle obtus, & la perpendiculaire, c'est à dire que le quarré du costé AC est égal aux deux quarréz des costez AB , BC , avec deux fois le rectangle de CB , BD .

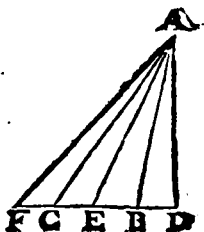
Qu'il ne soit ainsi: Puis que la ligne CD est coupée en B , le quarré d'icelle CD sera égal aux deux quarréz de CB , BD , & au rectangle compris deux fois sous CB , BD , par la 4. prop. de ce Livre: Adjoûtant donc le commun quarré de AD , les deux quarréz de CD , DA , seront égaux aux trois quarréz de CB , BD , DA , & au rectangle compris deux fois sous CB , BD . Mais par la 47. pr. 1. le quarré de AC est égal aux quarréz de CD , DA : donc aussi le quarré de AC sera égal aux trois quarréz de CB , BD , DA , & au rectangle compris deux fois sous CB , BD . Et puis que par la 47. p. 1. le quarré de AB est égal aux quarréz de BD , DA ; le quarré de AC sera égal aux quarréz de CB , AB , & deux fois le rectangle de



CB, BD. Parquoy aux triangles ambliques, le carré du côté qui soutient l'angle obtus, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Or que la perpendiculaire tirée de A, doive tomber sur le côté CB prolongé de la part de l'angle obtus, comme l'a pris icy Euclide, nous le démontrerons ainsi : Soit le triangle ABC ayant l'angle B obtus, & le côté CB prolongé de la part de B. Je dis que la perpendic. tirée de A tombe hors le triangle sur le côté CB prolongé, comme est la ligne droite AD. Car si elle tomboit dans le triangle, comme est la ligne AE, les deux angles ABE, AEB seroient plus grands que deux droits, contre la 17. prop. 1. Mais si elle tomboit hors le triangle sur le côté BC prolongé de la part de C, comme est AF; derechef, au triangle ABF, les deux angles ABF, AFB, seroient plus grands que deux droits : ce qui est absurde.

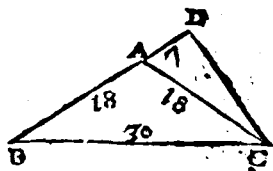


Or afin de pouvoir par le moyen des nombres faire paroître la vérité de ce theoreme, nous enseignerons icy certaines regles, par lesquelles on pourra construire divers triangles ambliques, ayant les costez commensurables en nombre entier, & aussi la ligne d'entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

R E G L E I.

Pour construire un triangle amblique Isoscele, ayant les costez, & la ligne prise dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus commensurables en nombre entier, soit fait le segment extérieur, d'autant de parties egales que le nombre d'icelles parties se puisse diuiser exactement par 7. comme de 7. ou de 14. ou de 21. ou de 28. ou 35. &c. puis

apres soit posé pour chaque costé egal, le doublé d'iceluy segment. & outre ce $\frac{4}{7}$ d'iceluy, mais pour le plus grand costé, le quadruple & $\frac{2}{7}$ dudit segment exterieur: comme au triangle ABC , ou le segment AD est posé de 7. & l'un & l'autre des costez AB , AC de 18, qui est double & $\frac{4}{7}$ de 7; mais



le plus grand costé BC de 30, qui est le quadruple & $\frac{2}{7}$ de 7. Or que ce triangle ABC composé comme dessus soit ambligone, il est evident: Car le quarré du costé BC est 900, & ceux des costez AB , AC font seulement ensemble 648, chacun d'iceux étant 324: & partant parce que nous avons démontré au Scholie de la 48 p. 1. l'angle BAC sera obtus. Donc le triangle ABC duquel les costez & la ligne exterieure AD sont commensurables en nombre entier, est ambligone. Parquoy le quarré dudit costé BC , qui est 900 sera egal à la somme des quarréz des deux autres costez AB , AC , & de deux fois BA en DA , c'est à dire à la somme de ces quatre nombres 324, 324, 126, 126, qui font aussi 900, comme veut cette 12. proposition.

R E G L E II.

Pour construire un triangle Ambligone scalene duquel non seulement les costez, & la ligne prise dehors entre la perpendiculaire tombant sur le moindre costé prolongé & l'angle obtus, mais aussi ladite perpendiculaire, soient commensurables en nombre entier

sier; soit posé le segment extérieur d'autant de parties qu'on voudra qui se puissent exactement diviser par 5; comme de 5, 10, 15, 20, &c. puis au double d'icelles parties ajoutez $\frac{1}{5}$ pour avoir le petit costé, $\frac{3}{5}$ pour avoir le moyen, & $\frac{2}{5}$ pour avoir la perpendiculaire, mais le quadruple dudit segment sera le plus grand costé. Ou bien posez le segment extérieur de 9, ou 18, ou 27, ou d'autre nombre de parties qui se puisse partir exactement par 9: puis pour le petit costé prenez $\frac{7}{9}$ dudit segment; pour avoir le moyen, ajoutez à iceluy segment $\frac{2}{9}$, pour la perpendiculaire $\frac{1}{9}$, & pour le grand costé ajoutez $\frac{2}{9}$ au double d'iceluy segment: Comme si nous posons que le segment extérieur soit de 9 parties égales, le plus petit costé sera 7 d'icelles parties, le moyen 15, la perpendiculaire 12, & le plus grand costé 20. Or le quarré d'iceluy costé est 400, auquel est égale la somme de ces quatre nombres 225, 49, 63, 63, qui sont les quarrés des deux costez 15 & 7, & deux fois le produit de 9 multiplié par 7, c'est à dire le segment extérieur par le moindre costé. Parquoy appert que le triangle ainsi construit est amblygone, & cette 12. prop. estre véritable.

R E G L E III.

Pour construire un triangle amblygone Scalene, auquel les costez & le segment extérieur du moyen costé prolongé jusques à la rencontre de la perpendiculaire tombant sur iceluy costé, soient commensurables en nombre entier: Soit pris ledit segment extérieur de 5 parties, ou de 10, ou de 15, &c. puis soit ajousté $\frac{2}{5}$ au triple d'iceluy segment, & viendra le moindre costé, le double duquel donnera le moyen costé, mais

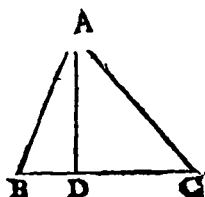
multipliant ledit segment par 8, nous aurons le plus grand costé : comme si nous posons le segment extérieur de 5 parties, ajoutans $\frac{1}{5}$ d'iceluy segment a son triple 15, nous aurons 16 pour le moindre costé, & doublant iceluy costé viendront 32 pour le moyen costé : & finalement multipliant ledit segment par 8, nous aurons 40 parties pour le plus grand costé du triangle : lequel sera amblygone, veu que le quarré d'iceluy costé 40, est 1600, & la somme des quarez des deux autres costez 16 & 32 n'est que 1280 ; mais ces deux quarez estans ajoutez a deux fois 160 procrez de la multiplication du moyen costé 32 par le segment extérieur 5, font aussi 1600, comme veut Enclide en cette 12. prop.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Aux triangles Oxigones, le quarré du côté qui soutient l'angle aigu, est plus petit que les quarez des deux autres côtez, de deux fois le rectangle contenu de l'un des côtez qui font l'angle aigu, sçavoir celui sur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise au dedans entre la perpendiculaire & l'angle aigu.

Soit le triangle ABC, ayant les angles B & C aigus, mais de l'angle A tombe AD perpendiculaire au côté BC. Je dis que le quarré du côté AB, qui soutient l'angle aigu C, est plus petit que les deux quarez des deux autres côtez AC & CB, de

deux fois le rectangle de BC & CD : ſçavoir BC, l'un des côtez qui font l'angle aigu C, ſur lequel tombe la perpendiculaire, & CD priſe entre la perpendiculaire, & iceluy angle aigu C.



Car d'autant que la ligne BC eſt coupée en D, les quarrés de BC, CD, ſont égaux au carré de BD, & deux fois le rectangle de BC, CD par la 7. pr. de ce livre, auxquels ſi on ajoute le carré commun de AD, les trois quarrés de BC, CD, AD, ſeront égaux aux deux quarrés de BD, AD, & deux fois le rectangle de BC, CD. Mais les deux triangles ADB, ADC étans rectangles, le carré de AB eſt égal aux deux quarrés de AD, DB : & le carré de AC aux deux quarrés de AD, DC par la 47. prop. 1. Donc les deux quarrés de AC, BC ſeront égaux au carré de AB, & deux fois le rectangle de BC, CD : en ôtant donc iceux deux rectangles, le carré de AB ſera d'autant plus petit que les quarrés de AC, BC : ce qui étoit propoſé à prouver. On démontrera en la même maniere que le carré du côté AC, qui ſoutient l'angle aigu, B, eſt plus petit que les deux quarrés des deux autres côtez AB, BC, de deux fois le rectangle de CB, BD. Donc aux triangles Oxigones, le carré du côté qui ſoutient l'angle aigu, &c. Ce qu'il falloit démonſtrer.

C H O L I E.

Or combien qu'Euclide propoſe ce Theoreme des

triangles oxigones seulement : toutesfois le mesme est aussi veritable és triangles rectangles & ambli-gones, la perpendiculaire tombant de l'angle droit ou obtus : Car il est manifeste par la 17. pr. 1. que les deux autres angles sont aigus : & partant la perpendiculaire tombera tousjours dans le triangle, comme Euclide l'a pris en la demonstration cy-dessus : Ce qui est aussi facile à prouver. Car si elle tomboit hors le triangle, il s'ensuivroit qu'un angle aigu seroit plus grand que le droit. Ce qui est absurde.

Et comme au precedent Scholie nous avons enseigné à construire divers triangles ambli-gones ayans les côtez & le segment compris entre la perpendiculaire & l'angle obtus commensurables en nombres entiers, afin de pouvoir plus facilement faire apparoir en nombres la verité de ce qu'Euclide a démontré en la 12. prop. aussi enseignerons nous icy quelques regles pour construire divers triangles oxigones ayant les costez & les segmens de la base commensurables en nombres entiers, afin de faire aussi paroistre en nombre la verité de cette 13. prop.

R E G L E I.

D'autant qu'au triangle equilateral, & à l'Isoscelle la perpendiculaire tombant de l'angle compris des deux costez egaux fait les segmens de la base egaux, ainsi qu'il a esté démontré sur la 26. prop. 1. il sera fort aisé de construire tels triangles qui ayent les costez & les segmens commensurables en nombre entier, c'est pourquoy il n'est pas besoin de nous y arrêter : Mais quand est requis un triangle Isoscelle. au quel la base soit plus grande que chaque costé, & que

la perpendiculaire tombe sur l'un d'iceux costez
 egaux; elle le coupera en deux segmens inegaux,
 comme nous avons démontré à la 47. prop. 1. le
 moindre desquels segmens il faut poser d'autant de
 parties qu'on voudra. & icelles estans multipliées
 par 8. produiront le plus grand segment, mais les
 multipliant par 12, sera produit la base, & les deux
 segmens estans adioustez, l'on aura l'une & l'autre
 des iambes: ce qu'on aura aussi multipliant le moi-
 dre segment par 9. Comme par exemple, ayant po-
 sé le moindre segment de 4 parties, nous les multi-
 plierons par 8, & viendront 32 pour le plus grand
 segment: mais les multipliant par 12, viennent 48
 pour la base, & par 9 viennent 36 pour chaque côté.
 Or que ce triangle Isocele soit oxigone, il est ma-
 nifeste parce que nous avons démontré au Scholia
 de la 48. prop. 1. car veu que le quarré de la base
 48 n'est que 2304, & la somme des quarez des
 deux iambes est 2592, chacun d'iceux estant 1296,
 l'angle compris d'iceux costez sera aigu, & par
 consequent les autres seront aussi aigus, puis qu'ils
 sont plus petits par la 18. propos. 1. Et si à iceluy
 quarré 2304, nous adioustons 288, qui sont deux
 fois 144, nombre produit de 36, costé sur lequel tom-
 be la perpendiculaire, par 4, segment compris entre
 la perpendiculaire & l'angle opposé à ladite base,
 viendront aussi 2592. Pareillement 1296, quarré de
 l'une des iambes est moindre que 3600, somme des
 quarez de la base & de l'autre iambe, de deux fois
 1152, nombre produit du costé 36, multiplié par le
 grand segment 32: car ces trois nombres 1296, 1152,
 1152 sont ensemble le mesme nombre 3600. Parquoy
 apert estre veritable ce que dit Euclide en cette 13. pr.

R E G L E I I.

Que s'il est requis que le triangle soit Isofceller ayant la base moindre que chacune jambe, & que sur l'une d'icelle tombe la perpendiculaire: il faudra poser le moindre segment, d'autant de parties que l'on voudra en nombre pair, & multipliant la moitié d'iceluy nombre par 7, on aura le plus grand segment, mais multipliant ledit moindre segment par 3, on aura la base, & finalement la somme des deux segmens fera chacune des jambes: qu'on aura aussi multipliant la moitié du moindre segment par 9. Parquoy ayant posé le moindre segment de 4, je multiplie sa moitié 2, par 7, & viennent 14 pour l'autre segment, tellement que toute la jambe sera 18, & multipliant ledit segment 4 par 3, viennent 12 pour la base. Or que ce triangle soit oxigone, il est evident, attendu que le quarré du costé 18 n'est que 324, & la somme des quarez des deux autres costez est 468: Et de plus, iceluy quarré 324 est moindre que ladite somme 468, de deux fois 72, nombre produit de la multiplication de 18, costé sur lequel tombe la perpendiculaire par 4, segment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle opposé à l'autre jambe: partant il apert estre veritable ce que dit Euclide en cette 13. prop.

R E G L E I I I.

Que s'il est requis que le triangle soit scaleno, & la perpendiculaire tombe sur le moindre costé, il faudra poser le moindre segment de 70 parties, ou de

140, ou de quelque autre nombre qui se puisse diviser exactement par 70; puis adjoûter à iceluy nombre $\frac{29}{70}$. & viendra le plus grand segment, & la somme de ces deux segmens sera le moindre costé; mais ayant doublé le moindre segment, & à iceluy double adjouste $\frac{42}{70}$ c'est à dire $\frac{3}{5}$ du dit segment, sera procréé le moyen costé; & finalement si à ce double du moindre segment on adjouste $\frac{55}{70}$, c'est à dire $\frac{11}{14}$, on aura le plus grand costé. Comme si nous posons le moindre segment de 70, & à iceluy adjoutons $\frac{29}{70}$, nous aurons 99 pour le plus grand segment, & par consequent le moindre costé sera 169; mais adjoustant $\frac{42}{70}$ au double d'iceluy moindre segment, viendront 182 pour le moyen costé: & adjoustant au même double $\frac{55}{70}$, viendront 195 pour le plus grand costé. Or que ce triangle soit oxigone, il est evident, attendu que le quarre du plus grand costé 195 n'est que 38025, & la somme des quarrez des deux autres costez est 61680: parquoy le plus grand angle est aigu, & consequemment les autres sont aussi aigus. Que si à iceluy quarre 38025, on adjouste deux fois 11830, nombre produit de la multiplication de 169, costé sur lequel tombe la perpendiculaire par le moindre segment 70, viendra le mesme nombre 61685. Parquoy apert encore estre veritable ce que dit Euclide en cete 13. p.

R E G L E I V.

Que si au triangle scalene il est requis que la perpendiculaire tombe sur le moyen costé, soit posé le moindre segment de 5 parties, ou de 10, ou de

quelqu'autre nombre qu'on puisse exactement diviser par 5, puis à iceluy segment soient ajoutée $\frac{4}{5}$, & on aura le plus grand segment; & la somme d'iceux sera le moyen côté: mais ajoutant $\frac{3}{5}$ au double d'iceluy moindre segment, on aura le moindre côté, & le plus grand sera le triple dudit segment. Parquoy si nous posons le moindre segment de 10 parties, ajoutant à iceluy les $\frac{4}{5}$, nous aurons 18 pour l'autre segment, & conséquemment tout le moyen côté sera 28. Mais ajoutant 6, qui sont les $\frac{3}{5}$ du moindre segment 10, au double d'iceluy segment, viennent 26 pour le moindre côté; & le plus grand sera 30, triple dudit moindre segment. Or qu'iceluy triangle soit oxigone, il est manifeste: car le quarré du plus grand côté 30, n'est que 900, & la somme des quarez des deux autres costez 26 & 28 est 1460; & partant le plus grand angle est aigu, & conséquemment les autres angles sont aussi aigus. Maintenant si nous multiplions le costé sur lequel tombe la perpendiculaire, sçavoir 28 par le moindre segment 10, nous aurons 280, & pour le double 560, qui ajoutées au susdit quarré de 30 sçavoir 900, font le mesme nombre 1460 somme des deux quarez des deux autres costez 26 & 28, qui sont 676 + 84. Pareillement le quarré du moindre côté 26, n'est que 676, & la somme des quarez des deux autres costez est 1684: tellement qu'il est moindre que cette dite somme de deux fois 504, nombre produit de la multiplication de 28, costé sur lequel tombe la perpendiculaire par 18, segment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle opposé à iceluy moindre côté. Parquoy appert derechef être veritable ce que dit Euclide en cette 13. proposition.

R E G L E V.

Et finalement, s'il estoit requis que la perpendiculaire tombe sur le plus grand costé, soit encore posé le moindre segment de 5 parties, ou de 10, ou de 15, &c. puis au triple d'iceluy segment soit adjointé $\frac{1}{2}$, & viendra le plus grand segment, tellement que la somme d'iceux segmens sera le plus grand costé: mais adjouuant $\frac{3}{4}$ au double d'iceluy moindre segment, on aura le moindre costé, & le moyen sera le quadruple dudit segment. Par ainsi le moindre segment estant posé de 5 parties, le plus grand sera de 16, & le plus grand costé 21, le moindre 13, & le moyen 20. Or le quarre de ce plus grand costé 21, n'est que 441, & la somme des deux quarrez des deux autres costez 20 & 13 est 569: parquoy l'angle opposé à iceluy costé, qui est le plus grand par la 18. prop. 1. est aigu, & consequemment le triangle susdis est oxigone. Davantage le quarre du moindre costé 13, sçavoir 169, est plus petit que la somme des quarrez des deux autres costez 20 & 21, sçavoir est 841, de deux fois 336, nombre produit de la multiplication de 21, costé sur lequel tombe la perpendiculaire par 16, segment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle opposé à iceluy moindre costé. Pareillement le quarre du moyen costé 20, sçavoir 400, est moindre que 610, somme des quarrez des deux autres costez 13, & 21, de deux fois 105, nombre produit de 21 multiplié par le moindre segment 5. Parquoy apert encore par ce 5. triangle estre veritable, ce que dit Euclide en cette 13. prop.

Mais il est aussi evident tant par la demonstration d'Euclide, que par l'application des nombres cy-devant faite, que ce qu'il dit icy des triangles oxigones seulement, est aussi veritable tant aux triangles rectangles qu'aux ambligones, tellement qu'on peut dire qu'en tout triangle, le quarré du costé qui soustient un angle aigu, est plus petit que la somme des quarrés des deux autres costez, de deux fois le rectangle contenu du costé sur lequel tombe la perpendiculaire. & de la ligne comprise entre icelle perpendiculaire, & ledit angle aigu.

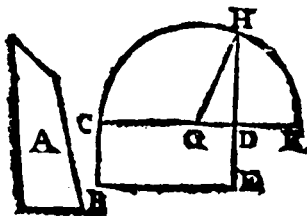
PROBL. 2. PROP. XIV.

Faire un quarré egal à une figure rectiligne donnée.

Soit donnée la figure rectiligne A, à laquelle il faut faire un quarré egal.

Soit premierement fait le parallelogramme BD egal à la figure donnée A, ayant un angle droit par la 45. prop. 1 puis soit prolongé un côté, comme CD, jusques en F, & fait DF egal à l'autre côté DE : & apres

avoir coupé CF en deux egale-ment au point G, & d'iceluy point G & intervalle GC ou GF, décrit le demy cercle



CHF, soit continuée ED jusques à ce qu'elle ren-

contre la circonference du demy cercle en H. Je dis que le quarré de DH est egal à la figure rectiligne A.

Car puisque CF est coupée en deux également au point G, & en deux inegalement au point D; le rectangle de CD & DF, sçavoir BD, avec le quarré de la partie du milieu GD, est egal au quarré de la moitié GF par la 5. prop. de ce livre, ou de son egale GH, lequel est egal aux deux quarez de GD & DH par la 47. prop. 1. Que si on oste le quarré commun de GD, le demeurant quarré de DH se trouvera egal au demeurant rectangle BD : & par consequent à la figure rectiligne donnée A. Nous avons donc trouvé le côté d'un quarré egal à une figure rectiligne donnée A. Ce qu'il falloit faire.

Fin du second Element,



ELEMENT

TROISIE'ME.

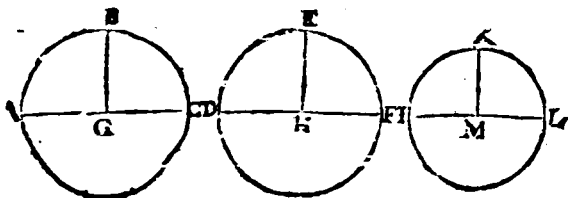
DEFINITIONS.



CERCLES egaux , sont ceux desquels les diametres sont egaux , ou desquels les lignes droites menées des centres aux circonferences , sont egales.

D'autant qu'Euclide demontre en ce 3. Livre diverses proprietéz & affections du cercle , il explique auparavant quelques termes dont l'usage sera fort frequent en iceluy : Il dit donc premierement que ces cercles-là sont egaux , desquels les diametres ou semidiametres sont egaux. Car puis que le cercle est décrit par le mouvement & revolution du demy diametre à l'entour d'une de ses extremittez fixe & immobile , comme nous avons

dit à la 15. def. du 1. Livre ; il est evident que ces cercles-là sont egaux , desquels les demy diametres , ou les lignes droites menées des centres aux circonferences sont egales entr'elles : ou bien desquels les diametres entiers sont egaux entr'eux. Comme

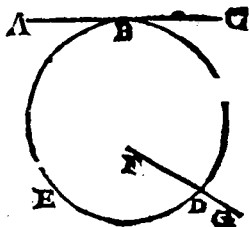


si les diametres AC, DF , ou les lignes droites GB, HE , menées des centres $G \& H$, sont egales entr'elles, les cercles ABC, DEF seront egaux entr'eux. Et au contraire , si les cercles sont egaux , leurs diametres ou les lignes droites menées des centres aux circonferences, seront aussi egales.

De cecy il appert , que les ceroles sont inegaux quand les diametres, ou les lignes droites menées des centres aux circonferences, sont inegaux ; & que celuy est le plus grand, duquel le diametre , ou demy diametre est le plus grand. Comme si les diametres DF, IL , ou les lig. droites HD, MK , menées des centres aux circonfer. sont inegaux, les cercles DEF, IKL seront inegaux ; & si le diametre DF est le plus grand, aussi le cercle DEF sera le plus grand. Et au contraire ; des cercles inegaux, les diametres ou semidiametres seront inegaux , c'est à sçavoir celuy du plus grand cercle, plus grand, & celuy du moindre , plus petit.

2. Vne ligne droite est dite toucher le cercle, laquelle touchant le cercle, si elle est continuée ne le coupe point.

Comme la ligne droite AB sera dite toucher le cercle BDE en B , si elle l'y touche, en sorte qu'étant prolongée vers C , elle ne le coupe point, ains demeure totalement dehors iceluy cercle. Mais d'autant que la ligne droite GD atteint le mesme cercle au point D , en telle sorte qu'estant prolongée iusques à F , elle coupe le cercle, & tombe dedans iceluy, elle ne sera pas dite toucher le cercle, mais le couper.



3. Les cercles sont dits se toucher l'un l'autre, quand en se touchant ils ne se coupent point.

Ainsi les deux cercles ABC , DBE seront dits se toucher l'un

l'autre en

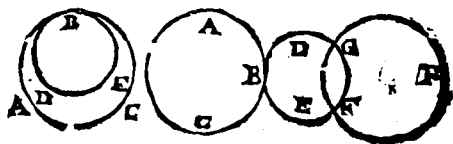
B , s'ils s'y

touchent en

sorte qu'ils

ne s'entre-

coupent point.

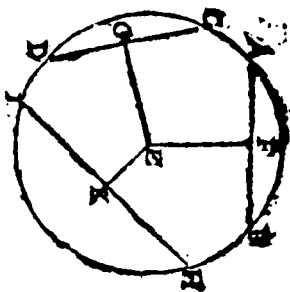


Or cet attouchement des cercles est de

deux sortes; Car les cercles s'entretoûchent ou en dedans, ou en dehors: Ils se toûchent en dedans, quand l'un est posé dedans l'autre; & en dehors, quand l'un est constitué hors de l'autre, comme il apert icy. Mais si deux cercles s'atteignent de telle sorte que l'un coupe l'autre, comme font icy les deux cercles DGE, FGH, ils seront dits se couper, & non pas se toûcher.

4. Au cercle, les lignes droites sont dites être également distantes du centre, lors que les perpendiculaires tirées du centre sur icelles, sont égales. Mais celle-là est dite estre plus éloignée du centre, sur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.

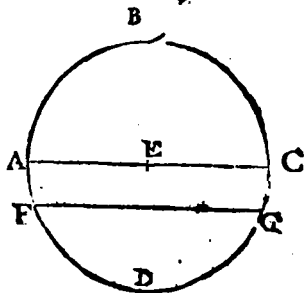
Comme au cercle $ABDC$, les lignes droites AB , CD , seront dites estre également distantes & éloignées du centre E , si les perpendiculaires EF , EG , sont égales: Mais la ligne droite AB sera dite estre plus éloignée du centre E que la ligne HI , si la perpendiculaire EF est plus grande que la perpendiculaire EK .



5. Segment, ou portion de cercle, est une figure comprise d'une ligne droite, &

de la circonference du cercle.

Si dans un cercle, comme $ABCD$, on mene une ligne droite qui coupe le cercle en deux parties, comme fait la ligne droite FG ; tant la figure FBG contenuë sous ladite ligne droite FG , & la partie de circonference FBG , que la figure FDG comprise sous la mesme ligne droite FG , & la partie de circonference FDG , sera dite segment ou portion de cercle. Mais est icy à noter qu'il y a de trois sortes de segmens de cercle. Car si la ligne droite passe par le centre du cercle, comme AEC , elle divisera le cercle en deux segmens egaux ABC , ADC , chacun desquels s'appelle proprement demy cercle, comme il a été dit au premier livre.



Mais quand la ligne ne passe point par le centre, comme FG , elle divise le cercle en deux parties inegales FBG , FDG , l'une desquelles, sçavoir FBG , dans laquelle est le centre E , est plus grande que le demy cercle, & s'appelle portion ou segment majeur: mais l'autre portion FDG , est plus petite que le demy cercle, & s'appelle segment mineur. Davantage la ligne droite FG est appelée corde par plusieurs Geomettres, & la partie de circonference FBG , ou FDG , arc.

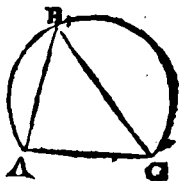
6. L'angle

6. L'angle du segment, est celuy compris d'une ligne droite, & de la circonference du cercle.

Euclide vient maintenant à définir trois sortes d'angles qu'on considere aux cercles, & commence par l'angle du segment, disant que l'angle mineur BFA , ou BGF , qui en la figure prec. est contenu sous la ligne droite FG , & la circonference FAG , s'appelle angle du segment. Que si le segment est un demy cercle, l'angle d'iceluy sera appelé angle du demy cercle, & tel est l'angle EAB , ou ECB . Mais si le segment est plus grand que le demi cercle l'angle d'iceluy, comme BFG , ou BGF , sera dit angle du segment majeur. Et si le segment est plus petit que le demi cercle, l'angle d'iceluy, comme DFG , ou DGF , sera appelé angle du segment mineur.

7. Un angle se dit être au segment, ou en la portion, lors qu'à un point pris en la circonference du segment, sont menées deux lignes droites des extremitéz de la ligne qui sert de base au segment; & cet angle-là est celuy compris d'icelles deux lignes.

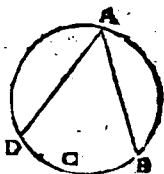
Soit un segment de cercle ABC , duquel la base est la ligne droite AC , des extremitéz de laquelle soient menées au point B , pris en la circonference les deux lignes droites AB , CB , qui constituent l'angle rectiligne ABC ; iceluy angle est dit être au segment ABC .



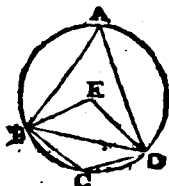
8. Mais quand les lignes droites qui comprennent l'angle embrassent quelque circonference, l'angle est dit être, ou s'appuyer sur icelle.

En la circonference du cercle $ABCD$ soit pris quelconque

point A , & d'iceluy à deux autres points B & D d'icelle circonférence, soient menées deux lignes droites AB , AD , qui constituent l'angle rectiligne DAB , & embrassent la circonférence BCD : Iceluy angle BAD sera dit estre ou s'appuyer sur icelle circonférence BCD .



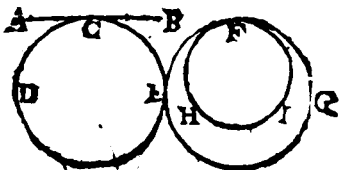
Est icy à noter que quelques Interpretes n'ont fait aucune différence entre cet angle-cy & le precedent, mais les ont pris pour un même: & toutesfois si on les considere bien, on y trouvera une grande discrepancy: Car celuy-là se refere au segment auquel il est constitué, & cestuy-cy se rapporte à la circonférence qui luy sert de base: Comme par exemple, si au cercle $ABCD$ on prend quelque segment de cercle BCD , l'angle qui est en ce segment ne sera pas le même que celuy qui insiste, ou est appuyé sur la circonférence d'iceluy segment: car l'angle qui est en iceluy sera BCD , & l'angle qui insiste ou s'appuie sur la circonférence d'iceluy sera l'angle BAD .



Une autre chose est encore à remarquer icy, c'est que les angles qui s'appuient sur la circonférence, peuvent être non seulement constitués en la circonférence, comme il a été dit cy-dessus, mais peuvent aussi être constitués au centre du cercle; comme par exemple, l'angle BED constitué au centre E par les deux lignes droites BE , DE , sera aussi dit s'appuyer sur la circonférence BCD , tellement qu'il y a icy deux angles appuyez sur ladite circonférence BCD , savoir BAD constitué en la circonférence, & BED constitué au centre.

Or outre les trois sortes d'angles cy-dessus définis & expliqués, les Geometres en considerent encore un autre qu'ils appellent angle de contingence ou d'accrochement & cet angle est contenu d'une ligne droite touchant le cercle, & de la circonférence d'iceluy cercle, ou bien de deux circonférences se touchant l'une l'autre au dehors ou au dedans. Comme par exemple, si la ligne droite AB touche le cercle CDE au point C , l'angle mixte ACD ,

ou BCE sera dit angle de contingence ou d'assouchement. De-
 rechef, si le cercle
 EFG touche le cercle
 CDE au dehors en E ,
 & le cercle en HFI
 au dedans en F , tant
 l'angle curviligne
 CEF , que EFH ou GFI , sera appelé angle de contingence
 ou d'assouchement.



9. Secteur de cercle, est une figure contenuë sous
 deux lignes droites qui font un angle au centre,
 & la circonférence comprise entre icelles li-
 gnes.

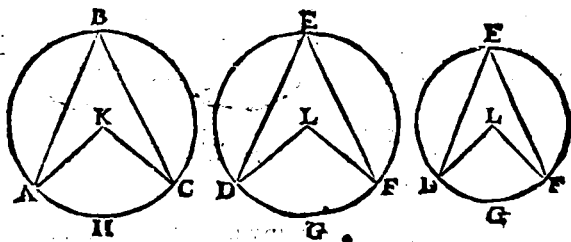
Si au cercle $ABCD$, duquel le centre est E , les deux li-
 gnes droites AE , CE , constituent
 au centre E , l'angle AEC ; la fi-
 gure $AECD$, compoñue des deux
 lignes droites AE , EC , & de la
 circonférence ADC comprise en-
 tre icelles lignes, sera appelée
 secteur de cercle. Item la figure
 $ABCE$, comprise des mêmes li-
 gnes droites AE , EC , & de la circonférence ABC , sera
 aussi dite secteur de cercle.



10. Semblables portions de cercle, sont celles qui
 reçoivent angles égaux; ou bien esquelles les
 angles sont égaux entr'eux.

Comme si aux cercles ABC , DEF , les angles rectilignes
 B , E , sont égaux; les segments ABC , DEF , qui reçoivent
 iceux angles égaux, ou esquels sont les susdits angles
 égaux, seront dits segments semblables: Et les circonféren-
 ces ABC , DEF , seront pareillement dites semblables, c'est
 à dire que le segment ABC sera telle partie de tout le cer-

de $ABCH$, que le segment DEF est partie de tout le cercle $DEFG$: & la circonférence ABC sera aussi sel-



le partie de toute la circonférence $ABCH$, que la circonférence DEF est de toute la circonférence $DEFG$. Par même raison, les arcs ou circonférences AHC , DGF , sur lesquelles s'appuient angles égaux, sont aussi dites semblables : Comme si aux mêmes cercles ABC , DEF , les angles ABC , DEF ou AKC , DLF sont égaux ; les arcs ou circonférences AHC , DGF , sur lesquelles s'appuient les susdits angles, seront dits arcs semblables.

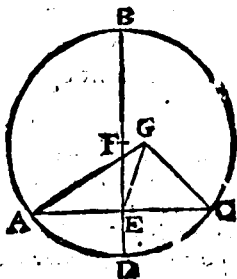
Des choses susdites, l'on peut colliger que les semblables portions d'un même cercle, ou de cercles égaux, sont aussi égales entr'elles, attendu qu'elles sont parties égales d'une même chose, ou de choses égales.

PROBL. I. PROP. I.

Trouver le centre d'un cercle donné.

Soit le cercle donné ABC , duquel il faut trouver le centre.

Soit tirée en iceluy la ligne droite AC , qui coupe la circonférence, comme que ce soit, és points A & C : puis par les 10. & 11. prop. 1. soit icelle AC coupée en deux également, & à droits angles par la ligne droite BD , se terminant à la périphérie és points B & D : & fina-



lement icelle BD soit aussi coupée en deux également en F, par la fufdite 10. prop. 1. Je dis que F est le centre du cercle proposé.

Car en icelle ligne droite BD, un autre point que F ne sera pas le centre, vu que tout autre point la divise inégalement.

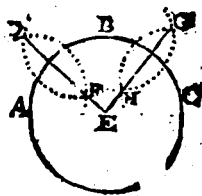
Si donc le point F n'est pas le centre, le point G hors la ligne BD soit le centre, (s'il est possible) duquel soient menées les trois lignes droites GA, GE & GC. D'autant que G étant le centre, par la def. du cercle les lignes droites AG & GC seront égales : mais par la construction AE & EC sont aussi égales, & GE est commune aux deux triangles GEA & GEC : donc iceux triangles ont deux costez égaux à deux costez, chacun au sien, & la base AG égale à la base CG, & par la 8. pr. 1. les angles AEG & CEG seront égaux : & partant droits, & la ligne EG perpendiculaire par la 10. def. 1. Mais l'angle BEA par la construction est droit, & tous les angles droits sont égaux par la 10. com. sent. donc les deux angles AEG & BEA seront égaux, sçavoir le tout à la partie : ce qui est absurde. Donc le point G n'est pas le centre. Le même inconvenient s'ensuivra prenant tout autre point hors la ligne BD. Partant le point F sera le centre du cercle ABC, requis à trouver.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, que si au cercle une ligne droite coupe une autre ligne droite en deux également, & à angles droits, le centre du cercle sera en icelle coupante. Car il a esté démontré qu'il est impossible que le centre du cercle ABC soit ailleurs qu'au point F, milieu de la ligne BD, laquelle coupe la ligne AC en deux également, & à angles droits en E.

S C H O L I E.

Combien que la pratique de ce Probleme soit aisée par la construction d'iceluy, si est-ce toutesfois qu'elle est encore plus brève & facile, ainsi qu'il ensuit. Pour trouver le centre du cercle ABC; soient pris en la circonferance d'iceluy les trois points A, B, C, comme en

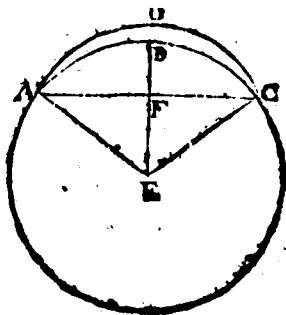


voudra ; puis des deux points A & B, soient décrits d'un même intervalle, deux arcs qui s'entrecoüperent es points D & E, par lesquels soit menée la ligne droite DFE interminement : en après, des points B & C, soient aussi décrits d'un même intervalle deux autres arcs s'entrecoüperans es points G & H, par lesquels soit menée la ligne droite GH, qui coupe DF en E, & iceluy point sera le centre requis.

THEOR. I. PROP. II.

Si en la circonférence d'un cercle, on prend deux points comme on voudra ; la ligne droite menée de point à autre, tombera dans le cercle.

Soit le cercle ABC, & en la circonférence d'iceluy soient pris deux points tels qu'on voudra A & C. Je dis que la ligne droite menée du point A au point C tombera dedans le cercle ; car si elle ne tombe au dedans, elle tombera, ou sur la circonférence, ou hors du cercle. Qu'elle tombe donc hors le cercle, s'il est possible, comme la ligne ADC : & ayant trouvé le centre E par la prec. prop. d'iceluy soient menées aux points A & C les lignes droites EA, EC, & à quelque point D de la ligne ADC, soit aussi menée ED, qui coupe la circonférence du cercle ABC en B. Or d'autant que les deux costez EA, EC sont égaux, le triangle AEC aura les angles EAD, ECD, sur la base ADC, égaux par la 5. prop. 1. Mais puis que du triangle AED, le costé AD est prolongé, l'angle extérieur EDC sera plus grand que son opposé intérieur EAD, par la 16. proposition 1. Donc le même angle EDC sera aussi plus grand que l'angle ECD, qui est égal à EAD. Parquoy EC opposé au plus grand angle EDC



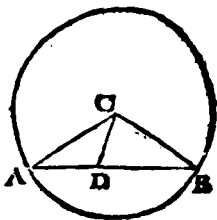
sera plus grand que ED par la 19. prop. 1. & partant EB égale à EC, sera aussi plus grande que ED; la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc la ligne droite menée de A à C ne tombera pas hors le cercle. On démontrera par même raison qu'elle ne peut pas aussi tomber sur la circonférence ABC. Il faut donc qu'elle tombe dedans le cercle, comme la ligne droite AFC. Parquoy si en la circonférence d'un cercle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Ce même Theoreme peut aussi être démontré affirmativement ainsi qu'il ensuit.

En la circonférence du cercle AB, dont le centre est C, soient pris deux points tels qu'on voudra A & B. Je dis que la ligne droite AB menée d'un point à l'autre tombe dans iceluy cercle.

Car soit pris en icelle ligne droite AB quelconque point comme D, entre ses extremes A & B, puis du centre C, soient menées les lignes droites CA, CD, CB. D'autant que les deux costez AC, BC, du triangle ACB sont égaux, les angles BAC, ABC seront égaux par la 5. prop. 1. Mais l'angle externe ADC est plus grand que l'angle interne ABC par la 16. prop. 1. donc le même angle ADC sera plus grand que l'angle BAC: & partant par la 19. prop. 1. le costé AC sera plus grand que le costé CD: parquoy puis que CA est tirée de centre jusques à la circonférence, la ligne droite CD ne parviendra pas jusques à icelle circonférence, & par consequent le point D tombe dans le cercle. Le même sera démontré de tout autre point qu'on voudra prendre en icelle AB. Donc toute la ligne droite AB tombe dedans le cercle proposé. Ce qu'il falloit prouver.



C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste, qu'une ligne droite touchant un cercle, le touche seulement à un point: car si elle le tou-

choit à deux points, la partie de la ligne d'entre icelluy points tomberoit dans le cercle par cette proposition, parquoy elle couperoit le cercle, contre l'hypothèse.

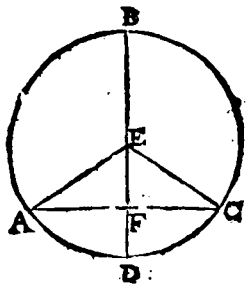
THEOR. 2. PROP. III.

Si dans le cercle quelque ligne droite passe par le centre, & coupe en deux également une autre ligne droite qui ne passe point par le centre, elle la coupera à angles droits : & si elle la coupe à angles droits, elle la coupera aussi en deux également,

Au cercle ABCD soit la ligne droite BD, laquelle passant par le centre E, coupe en deux également la ligne droite AC, laquelle ne passe point par le centre ; Je dis que BD coupe aussi AC en angles droits au point F.

Car étans menées les deux lignes droites CE & AE, les deux triangles AEF, CEF, auront les deux côtes AF, FE, égaux aux deux costez CF, EF, chacun au sien, & la base AE égale à la base EC ; & par la 8. prop. 1. les deux angles au point F seront égaux, & parant droits par la 10. def. 1.

Je dis pareillement, que si BD coupe AC à angles droits au point F ; qu'elle la coupera aussi en deux également. Car les deux angles au point F étans droits, ils seront égaux, & l'angle A est égal à l'angle C par la 5. prop. 1. étant AFC triangle isocelle, & le costé EF commun aux deux triangles AEF, CEF, & par la 26. prop. 1. AF sera égale à CF. Parquoy si dans le cercle quelque ligne droite passe par le centre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

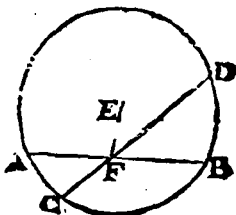


THEOR. 3. PROP. IV.

Si dans le cercle, deux lignes droites ne passant

point par le centre, s'entre coupent; elles ne se couperont pas l'une l'autre en deux également.

Au cercle ACBD, duquel le centre est E, soient deux lignes droites AB & CD, s'entre coupans au point F, & desquelles ny l'une ny l'autre ne passe par le centre E. Je dis que l'une ou l'autre est coupée également. Car du centre E estant menée la ligne EF; si icelles lignes AB, CD s'entre coupent en deux également au point F, la ligne EF les coupera au mesme point aussi en deux également, & à droits angles par la pr. prec. & les angles AFE, EFB seront droits, & egaux à CFE, EFD aussi droits, & egaux: ce qui est impossible, n'étant AFE que partie de CFE: ainsi les lignes droites AB, CD ne s'entre coupoient pas en deux également. Parquoy si dans le cercle deux lignes droites ne passant point par le centre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

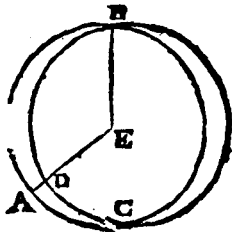


THEOR. 4. PROP. V.

Si deux cercles se coupent l'un l'autre, ils n'auront pas même centre.

Soient les deux cercles ABC, BCD se coupans l'un l'autre en B & C. Je dis qu'ils ne sçauroient avoir un même centre.

Car s'il est possible, soit leur centre commun E, duquel soient tirées deux lignes droites, sçavoir EB à la section B: Mais EA coupant l'une & l'autre circonférence en A & D. Donc puis que E est posé centre du cercle BCD, la ligne droite ED sera égale à la ligne droite EB par la 15. def. 1. Derechef, puis que E est aussi posé centre du

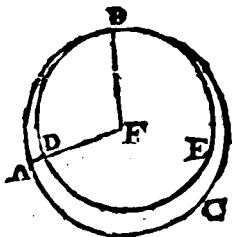


cercle ABC, la ligne droite EA sera aussi égale à la même ligne EB, & par là 1. com. sent. ED, EA seront égales entr'elles, la partie au tout; ce qui est impossible: partant les deux cercles ne pouvoient avoir un même centre. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 5. PROP. VI.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dedans, ils n'auront pas même centre.

Soient les deux cercles ABC, & DBE se touchans l'un l'autre au dedans en B. Je dis qu'ils n'auront pas même centre. Car s'il est possible, soit leur centre commun F, & d'iceluy soient menées les deux lignes FA & FB: sçavoir est FB à l'attouchement B; & FA, coupant l'un & l'autre cercle en D, A. D'autant que F est posé centre du cercle ABC, les lignes droites FA, FB seront égales: derechef, d'autant que F est aussi posé centre du cercle BDE, la ligne FD sera égale à la ligne FB, à laquelle a été démontré estre aussi égale FA, donc FA, FD seront égales entr'elles; la partie au tout. Ce qui est absurde. Parquoy B ne pouvoit estre centre commun des cercles s'entretouchans intérieurement en B. Ce qu'il falloit démontrer.



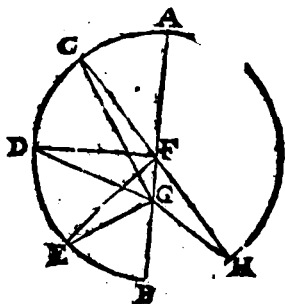
SCHOLIE.

Euclide a proposé ce Theoreme des cercles s'entretouchans seulement au dedans; d'autant que des cercles qui se touchent par dehors, il appert assez, que leurs centres sont divers: ven qu'un des cercles est dehors l'autre, & le centre est toujours au milieu de son cercle.

THEOR. 6. PROP. VII.

Si au diamètre du cercle l'on prend quelque point qui ne soit pas le centre du cercle, & d'iceluy point tombent quelques lignes droites à la circonference; la plus grande sera celle en laquelle est le cêtre, & la plus petite celle qui reste: Mais des autres tøjours la plus proche de celle qui est menée par le centre, est plus grande que la plus éloignée: Et du même point ne peuvent être menées à la circonference que deux lignes droites égales, de part & d'autre de la plus petite,

Au diamètre AB du cercle $ACDB$, duquel le centre est F , soit pris quelque point G outre le centre; & d'iceluy point G tombent tant qu'on voudra de lignes droites GC, GD, GE , en la circonference. Je dis en premier lieu, que de toutes les lignes menées de G à la circonference; GA en laquelle est le centre, est la plus grande. Car du centre F estas menées à C, D & E , les lignes FC, FD & FE : le triangle GFC aura les deux costez GF, FC , plus grands que le costé GC par la 20. pr. 1. Mais les lignes droites GF, FC sont égales aux lignes droites GF, FA , c'est à dire à toute la ligne GA : donc GA sera aussi plus grande que GC . Par même raison GA sera aussi plus grande que GD , & que GE : parquoy la ligne GA est la plus grande de toutes celles menées de G à la circonference.

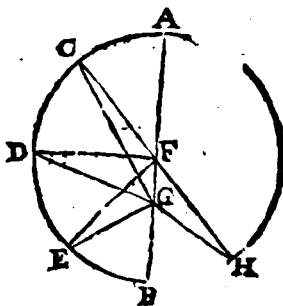


Secondement, ie dis que GB est plus petite que GD , ou autre quelconque: car au triangle DGF , les deux costez DG &

GF, seront plus grands que le troisième DF par la 20. prop. 1. ou que son égale BF. Que si on oste la ligne commune GF, le demeurant GD sera plus grand que le demeurant GB. Par même raison GB, sera aussi plus petite que GE, & que GC, ou autre quelconque tombant de G à la circonférence.

Tiercement, ie dis que GC plus proche de la ligne AG que GD, est plus grande qu'icelle GD: & pour la même raison GD plus grande que GE, & ainsi des autres s'il y en avoit davantage de tirées de G à la circonférence. Car les deux costez GF, FC du triangle GFC, sont égaux aux deux costez GF, FD du triangle GFD, chacun au sien: mais l'angle CFG est plus grand que l'angle DFG, & partant par la 24. p. 1. la base GC sera plus grande que la base GD. Pour même raison GC sera aussi plus grande que GE: Item GD plus grande qu'icelle GE. Parquoy la ligne la plus proche de celle qui est menée par le centre, est plus grande que celle qui en est plus éloignée.

Finalement, ayant fait l'angle BFH égal à l'angle BFE, & tiré GH: ie dis que les lignes GE, GH, sont égales entr'elles, & qu'on n'en peut mener de G à la circonférence aucune autre



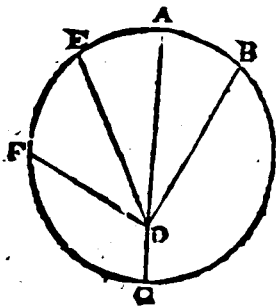
égale à icelles. Car d'autant que les costez EF, FG du triangle EFG, sont égaux aux costez HF, FG du triangle HFG, & les angles EFG, HFG aussi égaux: les lignes GH, GE, qui sont de part & d'autre du diamètre, sont égales entr'elles. Et il est évident qu'on ne pourra tirer du point G une autre ligne dans le cercle, qui ne s'approche ou recule de la ligne BA, tombant de costé ou d'autre de GE, ou GH: & par ce qui a esté montré cy-dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles GE, GH. Donc du point G à la circonférence ne se peuvent tirer plus de deux lignes droites qui soient égales entr'elles. Parquoy si au diamètre d'un cercle on prend quelconque point qui ne soit pas le centre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E,

Sapost qu'Euclide ait seulement démontré que des lignes droites tirées de mesme part du diametre, la plus proche de celle tirée par le centre est plus grande que la plus éloignée, toutesfois cela est aussi vray, si elles sont tirées de diverse part: comme si la ligne droite GD est plus proche de GA que la ligne droite GH; icelle GD sera plus grande que GH: car si de la part de GD on fait l'angle BGE egal à l'angle BGH les lignes GE, GH seront egales, attendu qu'elles sont également distantes de GA, & le point E tombera entre B & D, puis que GD a esté posée plus proche de GA que GH. Mais par cette prop. GD est plus grande que GE: donc la mesme GD sera aussi plus grande que GH. Quelques Interpretes veulent convertir cette 7. prop. ainsi qu'il ensuit.

Si on prend un point dedans le cercle, & d'iceluy point tombent des lignes droites à la circonference, entre lesquelles soient la plus grande & la plus petite qui puissent être menées de ce point-là à ladite circonference: mais des restantes; les unes soient inegales, & les autres egales: la plus grande passera par le centre du cercle, & la plus petite sera le reste du diametre: mais des autres les plus grandes seront les plus proches du centre, & les egales en seront également distantes.

Au cercle ABC soit pris le point D, duquel tombent en la circonference sans qu'on vaudra de lignes droites DA, DB, DC, DE, DF, desquelles DA soit la plus grande qui puisse estre tirée d'iceluy point à ladite circonference, & DC la moindre: mais des autres, DE soit plus grande que DF, & egale à DB. le dû premierement que DA passe par le centre du cercle: Car si elle n'y passe, étant tirée



quelque ligne droite de D par ledit centre, elle sera la plus grande de toutes celles tombantes de D par la 7. propos. 3. Ce qui est absurde, puis que DA est posée la plus grande. Donc DA passe par le centre.

En second lieu, je dis que DC est le reste du diamètre, c'est à dire qu'elle est directement à DA : Car autrement icelle DA étant prolongée directement, son prolongement sera autre que DC , & la plus petite ligne qui puisse tomber de D à la circonférence, par la 7. propos. 3. Ce qui ne peut être, puis que DC a été posée la plus petite: donc DC est l'autre partie du diamètre.

Tiercement, je dis que DE est plus proche de DA que DF . Car elle n'y pourroit pas être également distante, attendu que par la susdite prop. elles seroient égales, & elles ont été posées inégales. Mais DE ne peut pas aussi être plus éloignée de la même DA que DF : car elles seroient plus petites qu'icelle DF , par la même proposition, & elle a été posée plus grande.

En dernier lieu, je dis que DB , DB sont également distantes de DA : Car si l'une en étoit plus proche elle seroit plus grande que l'autre par la même 7. prop. & elles ont été posées égales.

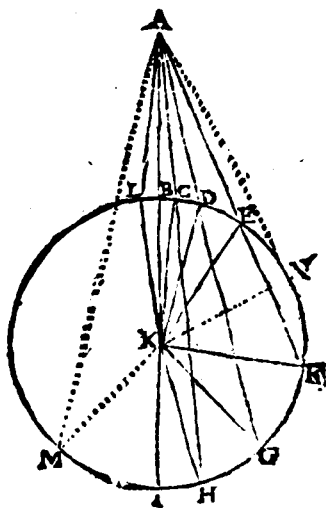
THEOR. 7. PROP. VIII.

Si on prend quelque point hors le cercle, & d'iceluy point soient menées quelques lignes droites dans iceluy cercle, desquelles l'une passe par le centre, & les autres où l'on voudra: celle qui passe par le centre sera la plus grande de toutes celles qui seront menées en la circonférence concave. Quant aux autres, toujours la plus proche de celle qui passe par le centre est plus grande que la plus éloignée. Mais de celles qui tombent à la circonférence convexe, la plus petite est celle qui est comprise entre le point & le diame-

tre : Quant aux autres, la plus éloignée de la plus petite est plus grande que celle qui en est plus proche : Et d'iceluy point ne peuvent tomber à la circonférence que deux lignes droites egales de part & d'autre de la plus petite.

Du point A hors le cercle BCDE, le centre duquel est K, soient menées les lignes droites AF, AG, AH & AI coupant ledit cercle, desquelles lignes AI passe par le centre K, & les autres comment que ce soit. Je dis premierement que AI qui passe par le centre, est la plus grande de toutes icelles lignes tirées à la circonférence concave : puis apres, que AH qui est la plus proche d'icelle AI est plus grande que AG, qui en est plus éloignée : Et pour même raison AG, plus grande que AF. et au contraire, ie dis que AB comprise entre le point A & la circonférence convexe, est la plus petite ligne de toutes celles qui sont hors le cercle : puis apres, que la ligne AC plus prochain de la plus petite AB, est moindre que AD, qui en est plus éloignée : et par même raison icelle AD moindre que AE. Finalement, ie dis que de A, on peut seulement mener deux lignes droites egales de part & d'autre de la plus petite AB.

Car du centre K étant menées aux points C, D, E, F, G, & H, les lignes droites KC, KD, KE, KF, KG & KH ; les deux costez AK, KH, du triangle AKH, sont plus grands que la li-



que AH par la 20. pr. 1. Mais les lignes AK , KH sont égales aux lignes AK , KI , c'est à dire à toute la ligne droite AI : icelle AI sera donc aussi plus grande que AH . Pour la même raison AI sera plus grande que AG , & aussi que AF . Parquoy la ligne AI est la plus grande de toutes celles qui tombent du point A dans le cercle.

Puis après, d'autant que les costez Ak & KH du triangle AKH sont égaux aux costez AK , KG du triangle AkG , chacun au sien, & l'angle AKH plus grand que l'angle AKG ; la base AH sera plus grande que la base AG , par la 24. prop. 1. Par même raison AH sera plus grande que AF ; item AG plus grande que la même AF . Parquoy la ligne plus proche de celle qui passe par le centre, est plus grande que celle qui en est plus éloignée.

Derechef, puis qu'au triangle ACK la ligne AK , est moindre que les deux AC , CK ; si on ôte les égales BK , CK , demeurera encore AB moindre que AC . Par semblable raison AB sera plus petite que AD , & aussi que AE . Parquoy la ligne AB est la plus petite de toutes celles qui sont menées de A à la circonférence convexe.

Derechef, d'autant que dans le triangle ADK tombent deux lignes droites AC , CK , des extremités du côté AK , icelles AC , CK , seront moindres que AD , DK par la 21. prop. 1. desquelles si on ôte les égales CK , Dk , restera encore AC moindre que AD . Par même raison on prouvera que AC est moindre que AE : Item AD moindre que la même AE . Parquoy la ligne la plus proche de la plus petite AB , est moindre que la plus éloignée.

Finalement, soit fait l'angle AxL égal à l'angle AxC , tirant xL , jusques à ce qu'elle rencontre la periphèrè en L , & soit menée la ligne AL . D'autant que les costez Ax , xL du triangle AxL ; & les angles AxC , AxL aussi égaux, les lignes droites AC , AL de part & d'autre de la moindre AB , seront égales entr'elles par la 4. prop. 1. Or que nulle autre puisse estre égale à icelles, il est évident; car si on en mene une autre du point A , il faudra qu'elle soit plus proche ou plus éloignée de AB ; & par ce qui a été démontré cy-dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles AC , AL . Donc du point A tomberont seulement deux lignes droites égales de part & d'autre de la moindre AB . Parquoy si on prend quelque point hors le cercle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE

S C H O L I E.

Par même raison de *A* ne peuvent tomber en la circonférence concave que deux lignes droites égales de part & d'autre de la plus grande *AI*. Car ayant fait l'angle *AKM* égal à l'angle *AKG*, & mené *AM*, les triangles *AKM*, *AKG* auront les bases *AG*, *AM* égales par la 4. prop. 1. & on ne peut de *A* mener à ladite circonférence concave d'autre ligne égale à icelle *AG*, *AM*, attendu qu'elle seroit plus proche ou plus éloignée de *AI*, & par conséquent plus grande ou plus petite qu'icelles, ainsi qu'il appert par ce qui a été démontré cy-dessus.

Il appert aussi que quand l'une des lignes tombantes de *A*, touche le cercle, comme *AN*, qu'icelle touchante est plus petite qu'aucune de celles qui tombent en la circonférence concave, car étant tirée du centre à l'attachement la ligne droite *KN*, les deux costez *AK*, *KF* du triangle *AKF*, seront égaux aux deux costez *AK*, *KN* du triangle *AKN*, chacun au sien, & l'angle *AKF* est plus grand que l'angle *AKN*, & par la 24. pr. 1. la base *AF* sera plus grande que la base *AN*: Et par même raison toute autre ligne tombante en la circonférence concave sera plus grande qu'icelle *AN*.

Mais la même ligne touchante *AN* sera la plus grande de toutes les autres lignes qui tombent de *A* en la circonférence convexe. Car puis que par la 21. prop. 1. les deux costez *AE*, *EK* sont moindres que les deux costez *AN*, *NK*, si on en ôte les lignes égales *KE*, *KN*, restera *AE* moindre que *AN*; & ainsi des autres.

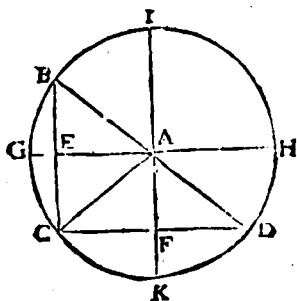
Au reste ce qu'Euc. de a démontré en cette 8. prop. avenir aux lignes menées d'une même part de la plus grande ou plus petite, aviendra encore, les lignes estans menées de diverses parts, c'est à dire, que si *AH* est plus proche de *AI* que *AM*: icelle *AH* sera aussi plus grande que ladite *AM*, j'ajoute qu'elles ne soient toutes deux d'une même part; & si *AD* est plus éloignée de *AI* que *AL*, elle sera aussi plus grande qu'icelle *AL*. Ce qu'on peut démontrer procédant, ainsi qu'au précédent Scholie pour les lignes tirées de diverse part.

THEOR. 3. PROP. IX.

Si on prend quelque point au dedans d'un cercle, & d'iceluy point tombent à la circonference plus de deux lignes droites egales, le point pris est le centre du cercle.

Soit pris le point A au cercle BCD, & d'iceluy point tombent à la circonference les trois lignes droites egales AB, AC, AD. Je dis que le point pris A, est le centre du cercle.

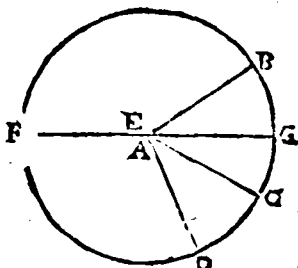
Qu'il ne soit ainsi : soient menées les lignes droites BC & CD, & apres les avoir coupées en deux également aux points E & F, d'iceux points au point A, soient menées les deux lignes droites EA, FA, & prolongées de part & d'autre en la circonference. D'autant que les deux triangles BEA & CEA,



ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & les bases AB, AC aussi egales, les deux angles au point E seront egaux, & partant droits, & par le Corol. de la 1. prop. de ce livre le centre du cercle sera en ligne droite GAH, puis qu'elle divise la ligne droite BC en deux également, & à angles droits en E. Par même discours le centre du cercle se trouvera aussi en la ligne droite KI. Il faut donc que ce soit à leur commune section A, n'y ayant point d'autre point commun. Parquoy si on prend quelque point dedans un cercle, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

Autrement. Si le point A n'est le centre du cercle, soit iceluy centre au point E, si faire se peut, duquel soit mené par A le diametre FG. D'autant donc qu'au diametre FG,

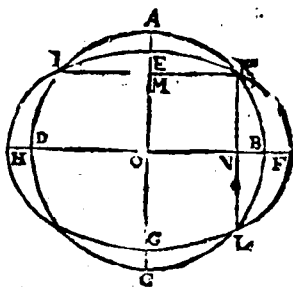
est pris le point A outre le centre, duquel tombent en la circonference les lignes droites AD, AC; icelle AD qui est plus proche de AF tirée par le centre E, sera plus grande que AC par la 7. p. 3. Ce qui est absurde, car icelles AB, AC ont été posées égales. La même absurdité s'ensuivra toujours si on pose le centre être à un autre point que A: parquoy iceluy point A sera le centre du cercle ABC. Ce qu'il falloit prouver.



THEOR. 9. PROP. X.

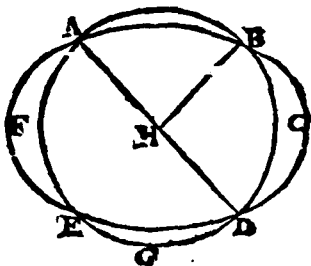
Un cercle ne coupe pas un autre cercle en plus de deux points.

Soient les deux cercles ABCD & EFGH, se coupans aux trois points I, K & L, s'il est possible. Item soient menées les deux lignes droites IK & KL, lesquelles soient coupées en deux également aux points M & N par la 10. prop. 1. & soient menées les lignes droites MC, NH, à droits angles sur Ik & KL. Il faudra par le Corol. de la 1. pr. de ce livre que les deux centres des deux cercles soient en la ligne AC; ils seront aussi en la ligne FH: Ce sera donc au point de la commune section O, & en ce faisant les deux cercles auroient même centre contre la 5. prop. de ce livre. Donc les cercles ABCD &



E F G H ne se pouvoient pas couper en plus de deux points :
Ce qu'il falloit démontrer.

Autrement. Que les deux cercles ABCDEF, & ABDGE se coupent, s'il est possible, en plus de deux points, c'est à sçavoir en A, B, D : & soit trouvé le centre du cercle ABDGE, lequel soit H, & d'iceluy soient menées les lignes droites HA, HB, HD, lesquelles seront égales entr'elles par la défin. du cercle. Et d'autant qu'au cercle ABCDEF on a pris le point H, duquel tombant à la circonférence plus de deux lignes égales, iceluy point H sera le centre dudit cercle, par la 9. prop. 3. Mais il est aussi le centre du cercle ABDGE. Donc deux cercles s'entrecoupans ont même centre. Ce qui est absurde.

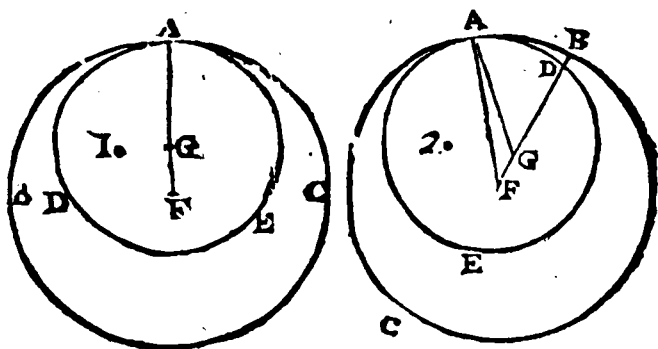


THEOR. 10. PROP. XI.

Si ayant pris les centres de deux cercles qui se touchent l'un l'autre au dedans, on conjoint iceux centres par une ligne droite; icelle ligne étant prolongée tombera en l'attouchement des cercles.

Soient deux cercles ABC & ADE s'entretouchans intérieurement au point A, & par la 1. pr. 3. soit trouvé le centre du cercle ABC, lequel soit F; puis que par la 6. pr. 3. deux cercles s'entretouchans au dedans ne peuvent avoir un même centre, F ne sera pas le centre du cercle ADE: Soit donc aussi trouvé son centre, qui soit G. Je dis que la ligne droite menée du centre F au centre G, & prolongée de ce costé là jusques à la circonférence du plus grand cercle ABC, tombera au point de l'attouchement A, comme à la première figure. Car

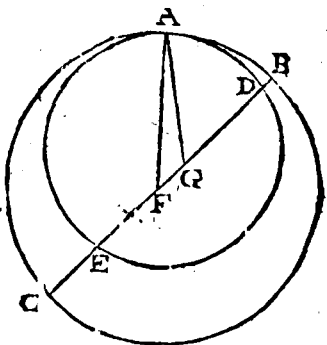
autrement il faudra qu'elle tombe à quelqu'autre point de ladite circonference, car d'autant que les deux centres F & G sont au dedans du cercle A B C, ladite ligne FG étant conti-



nuee, elle ira necessairement rencontrer la circonference d'ice-luy cercle : & si quelqu'un dit que ce n'est pas au point d'arouchement, soit, s'il est possible, à quelconque autre point, comme B en la 2 figure ; tellement que la ligne FGB coupe la circonference du moindre cercle A D E au point D. D'autant donc que les centres F & G, & le point d'arouchement A ne sont pas en une ligne droite, si dudit point A on mene des lignes droites aux deux centres F & G, elles feront un triangle avec la ligne FG, qui est la distance d'un centre à l'autre, lequel triangle soit AFG. Donc puis que par la 20. prop. 1. les deux costez AG, FG dudit triangle AFG, sont plus grands que l'autre costé FA ; & iceuy FA est egal à la ligne FB, (pource que F est le centre du cercle ABC) aussi les lignes AG, GF seront plus grandes que FB : ostant donc FG commune, restera GA, plus grande que GB. Et partant, puis que GA est egale à GD ; (car G est le centre du cercle ADE) GD sera aussi plus grande que GB, la partie que le tout : ce qui est absurde. Donc la ligne droite conjoignant les deux centres des cercles A B C, ADE, & produite, ne tombera pas ailleurs qu'à l'arouchement A. Parquoy si deux cercles se touchent l'un l'autre au dedans, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

SCHOLIE.

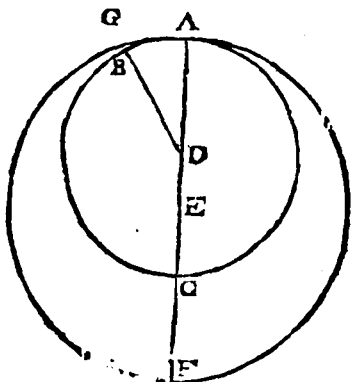
Candalle, Errard & quelques autres Interpretes demontrent cette 11. prop. ainsi qu'il ensuit. Soient deux circonferences ABC & ADE se touchans interieurement au point A , & de la plus grande ABC , le centre soit F , duquel au point d'atouchement A soit menée la ligne droite AF : le dis que le centre de la plus petite circonference ADE est en icelle ligne AF . Autrement, qu'il soit hors d'icelle, s'il est possible, comme au point G , & soit conjoint FG , & prolongé de la part de G jusques à ce qu'il coupe les deux circonferences aux points D & B , puis soit menée GA . D'autant que par



la 20. prop. 1. les deux costez AG , FG du triangle AFG sont plus grands que l'autre costé FA , & iceluy FA est egal à la ligne FB , puis que F est le centre du cercle ABC ; aussi AG , FG seront plus grandes que FB . Ostant donc FG commune, restera GA plus grande que GB ; mais GA est egal à GD (car G a été posé centre du cercle ADE .) Donc aussi GD sera plus grande que GB ; la parrie que le tout; ce qui est absurde. Parquoy le centre de l'autre circonference ADE ne sera pas hors la ligne FA : & partant les deux centres des circonferences ABC & ADE seront en ladite ligne FA . Donc la ligne conjoignant iceux centres & prolongée tombera au point d'atouchement A .

Encore autrement selon Pelletier & Billingsley. Soient deux cercles ABC , AFG s'entretouchans au dedans en A , & par la 1. pr. 3. soit trouuvé le centre du cercle ABC , qui soit D , & aussi le centre de AFG , lequel soit E : le dis que la ligne droite menée du centre E à D & prolongée jusques à la circonference du plus grand cercle tombera au

point de l'atouchement A. Car autrement elle tombera de part ou d'autre, d'iceluy atouchement A ; qu'elle tombe donc, s'il est possible, à un autre point, comme G : tellement que FEDG



soit diamètre du grand cercle AGF, & CEDB du petit cercle ABC, & soit tirée DA. D'autant qu'un diamètre FEDG,

le point D est autre que le centre E, la ligne droite DA sera plus grande que DG par la 7. pr. 3. Mais DB est égale à DA par la def. du cercle : donc DB sera aussi plus grande que DG, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Parquoy la ligne ED prolongée vers A ne pourra tomber ailleurs qu'à iceluy point d'atouchement A.

THEOR. II.

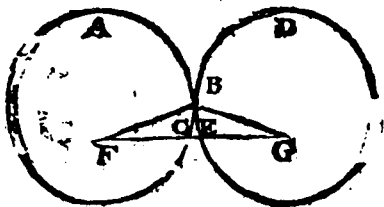
PROP. XII.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dehors, la ligne droite menée d'un centre à l'autre, passera par l'atouchement.

Soient deux cercles ABC, DBE se touchans l'un l'autre au dehors au point B, desquels les centres soient F & G. Je dis que si d'un centre à l'autre on mène une ligne droite, qu'icelle passera par le point d'atouchement B.

Autrement, il s'ensuivra absurdité : car si icelle ligne ne passe par le point d'atouchement B, qu'elle passe ailleurs, s'il est possible, sçavoir aux points C & E, où elle coupe les deux circonferences, & du point d'atouchement B soient menées les deux

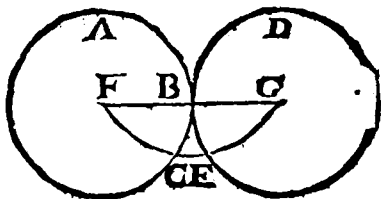
lignes droites FB , GB , lesquelles par la 20. prop. 1. feront plus grandes que FG , & par la def. du cercle, il s'ensuit que FC , étant égale à FB , & GB à GB , que les deux lignes FC & GB , seront plus grandes que FG , la partie que le tout. La ligne droite menée d'un centre à l'autre, passera donc par l'atouchement B . Parquoy si deux cercles se touchent l'un l'autre au dehors, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



SCHOLIE.

D'autant qu'en cette démonstration d'Euclide, les centres ne demeurent en leurs vraies places, & que cela pourroit peut-être causer quelque doute, Oronce & Schubelin en ont ajouté une autre où les centres retiennent leurs places, laquelle est telle. Que les cercles ABC , DBE s'entretouchent au dehors en B , & d'iceux les centres soient F & G : Je dis que la ligne droite menée d'un centre à l'autre passera par le point d'atouchement B , c'est à dire que si on mène à iceluy

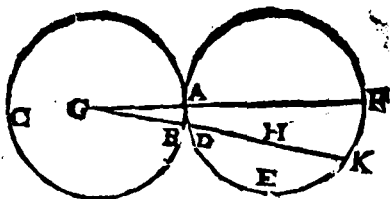
point B les lignes droites FB , GB , elles feront une seule ligne droite FBG . Car autrement elles feront un angle à iceluy point B , & de F à G



on pourra mener une ligne droite, laquelle soit (s'il est possible) $FCEG$, qui coupe les circonferences en C & E . Donc icelle ligne droite $FCEG$ constituera un triangle avec les

deux lignes FB, GB, puis qu'on a posé qu'elles s'inclinent & font angle au point B: & par la 20. p. 1. icelles FB, GB sont plus grandes que FCEG: Mais par la def. du cercle FC est égale à FB, & GE à GB: donc FC & GE seront aussi plus grandes que la même FCEG, la partie que le tout: (car icelle FCEG outre FC, GE contiens encore la ligne droite CE,) Ce qui est absurde.

Pellier, & apres luy Billingsley demonstrent encore ce-
 1712. pr. ainsi. Soient les deux cercles ABC & DEF qui
 s'encrentrent par dehors au point A ; & que G soit le cen-
 tre du cercle ABC, duquel soit tirée par l'atouchement des
 cercles, la ligne droite GA jusques à ce qu'elle rencontre la
 circonference DEF au point F : Je dis que le centre du cer-
 cle ADE est en icelle ligne droite GAF. Autrement
 qu'il soit hors d'icelle, s'il est possible, comme au point
 H, & du centre G à iceluy centre H soit tirée la ligne
 droite GHR jus-
 ques à ce qu'elle
 rencontre la
 circonference en
 K, comparant la
 peripherie ABC
 en B, & la cir-
 conference ADE
 en D. D'autant
 que du point G,
 qui est hors le

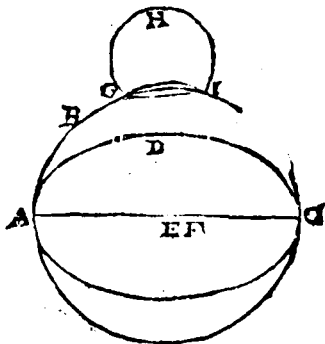


cercle ADE , sont tirées à iceluy cercle les deux lignes droites GK , GF , desquelles GK passe par le centre H , par la 8. pr. 3. la partie extérieure GD sera moindre que GA partie extérieure de GF . Mais AG est égale à GB par la def. du cercle: donc aussi GD sera moindre que GB , le sont que la partie: ce qui est absurde. Donc le centre du cercle ADE ne sera pas hors la ligne GA , & passant les deux centres des cercles ABC , & ADE seront en icelle ligne GF ; parquoy la ligne conioignant iceux centres passera par l'arouchement des cercles.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Un cercle ne touche point un autre cercle à plus d'un point, tant dehors que dedans.

Soient les deux cercles ABC , & ADC se touchans intérieurement aux deux points A & C , s'il est possible ? & d'autant qu'ils ne peuvent avoir un même centre par la 6. pr. de ce livre, soient les deux centres divers E & F , par lesquels étant tirée la ligne droite EF , & produite de part & d'autre, il faut qu'elle tombe és points d'atouchement A & C par la 11. pr. de ce même livre : & par la def. du cercle, il faut que les lignes droites EA & EC soient égales. Item FA & FC . Mais FA est plus grande que EA . Partant FC le sera aussi plus grande que EC , la partie que le tout : ce qui est impossible. Donc les



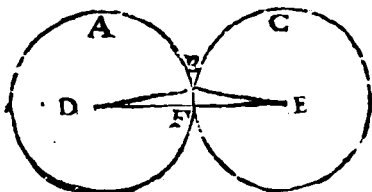
deux cercles ne se toucheront point en deux points au dedans.

Paraillement, il est impossible qu'ils se touchent extérieurement à plus d'un point : car si le cercle GHI pouvoit toucher en dehors le cercle ABC en deux points, comme G & I , il faudroit que la ligne droite GI menée par lesdits deux points, tombast dedans l'une & l'autre cercle par la 2. pr. 3. ce qui est impossible : car icelle ligne droite GI tombant dedans le cercle ABC , elle ne peut pas tomber dedans le cercle GHI , puis qu'iceluy est tout dehors ABC . Parquoy les cercles ne se touchent point à plus d'un point, tant dehors que dedans. Ce qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E.

Cette 2. partie est encore démontrée par plusieurs Interprètes ainsi. Que les deux cercles AB & CB , dont les centres sont D & E , s'entretouchent par dehors au point F : Je dis qu'ils ne se peuvent toucher à un autre point. Car ayant mené du centre D au centre E la ligne droite DE , elle passera par ledit atouchement F par la precc-

dense prop. & si les cercles se touchoient encore à un autre point, comme B, la ligne droite menée d'un centre à l'autre passeroit aussi par iceluy atouchement B; & par ainsi les deux lignes droites DFE, DBE enclorroient une superficie, ce qui est impossible.



Clavius demontre en ce lieu le Theoreme suivant.

Si au demy diametre d'un cercle produit, on prend un point outre le centre, le cercle décrit d'iceluy point comme centre, par le point extrême du demy diametre, touchera le premier cercle en iceluy point extrême du semy-diametre, & tombera tout dehors le même cercle.

Soit le cercle ABC, (voyez la dernière figure de la page 182.) duquel le centre est D, & au demy diametre AD prolongé, soit pris quelconque point comme E, duquel & de l'intervalle EA soit décrit le cercle AFG, lequel je dis toucher le cercle ABC au seul point A. Car ou le point E est dans le cercle ABC, ou dehors. S'il est dedans: d'autant que AE est plus grand que AD, c'est à dire que DC, & à plus forte raison que EC; la ligne EF qui est égale à EA sera aussi plus grande que EC: & partant le point F est hors le cercle ABC: & le cercle AFG hors le même cercle près du point F. Iceluy point F tombera beaucoup davantage hors le cercle ABC, si E est hors le même cercle ABC. Si donc le cercle AFG ne tombe tout dehors le cercle ABC, tellement qu'il le touche au seul point A, que le cercle AFG coupe ou touche le cercle ABC, en un autre point B, si faire se peut, & soit tirée la ligne DB. Vû donc qu'un diametre du cercle AFG est pris le point D, outre le centre E, la ligne DA sera la plus petite de toutes les lignes droites tom-

bantes de D à la circonférence, par la 7. prop. 3. Donc DA est moindre que DB , ce qui est absurde; car DA , DB tombant du centre D en la circonférence d'un même cercle ABC , sont égales. Donc le cercle AFG ne coupe ou touche le cercle ABC en un autre point que A , mais tombe tout dehors iceluy: ce qui étoit proposé.

Que si au semy-diametre non produit, on prend un point outre le centre, le cercle décrit d'iceluy point comme centre, par le point extrême du semy-diametre touchera pareillement le premier cercle au susdit point extrême du demy-diametre, & tombera sous dedans le même cercle. Comme si au semy-diametre AE , du cercle AFG , on prend le point D , duquel & de l'intervale DA , on décrit le cercle ABC , iceluy tombera totalement dedans AFG , & le touchera au seul point A . Car puis qu'il a été démontré cy-dessus que le cercle AFG tombe tout dehors le cercle ABC , pareillement tout celui-ci tombera dedans celui-là, tellement qu'ils s'entretouchent au seul point A : & par ainsi apert ce qui étoit proposé.

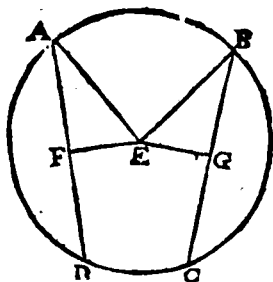
THEOR. 13. PROP. XIV.

Dans le cercle, les lignes droites égales, sont également distantes du centre; & les également distantes du centre sont égales entr'elles.

Au cercle $ABCD$, duquel le centre est E , soient deux lignes droites égales AD & BC . Je dis qu'elles seront également distantes du centre E .

Qu'ainsi ne soit, par la 12. prop. 1. du centre E soient menées les deux lignes EF , EG , perpendiculaires aux deux lignes droites AD , BC : puis soient tirées les deux lignes AE & BE . Or les deux lignes droites AD & BC , étant coupées en angles droits par les perpendiculaires EF & EG , elles seront aussi coupées en deux également par la 3. p. 3. & puis qu'icelles AD , BC sont posées égales, la moitié AF sera égale à la moitié BG . Pareillement AE étant égale à BE par la def. de cercle. le quarré de AE sera égal au quarré de BE . Mais iceluy quarré de AE est égal aux deux quarrés de

AP, FB, par la 47. prop. 1. & le quarté de BE est égal aux deux quartez de BG, GE. Donc les deux quartez de AF, FE seront égaux aux deux quartez de BG, GE. Mais puis que les lignes AF, BG sont égales, le quarté de AF est égal au quarté de BG, & par conséquent le quarté de FE, est égal au quarté de GE. Parquoy la ligne FE sera égale à la ligne GE, & par la 4. def. du 3. AD & BC seront également distantes du centre E.



Quant à la seconde patrie. Je dis que si AD, BC sont également distantes du centre E, qu'elles seront égales entr'elles : car ayant construit, comme dessus, les perpendiculaires EF & EG seront égales par la 4. def. de ce liv. & couperont AD, BC en deux également par la 3. pr. de ce même liv. & par deduction de la 47. p. 1. comme cy-dessus, AF se trouvera égale à BG, & par conséquent aussi leurs doubles AD & BC seront égales entr'elles. Si donc au cercle les lignes droites égales, &c. Ce qui étoit à démontrer.

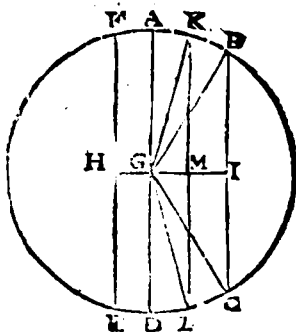
THEOR. 14. PROP. XV.

Dans le cercle, la plus grande ligne est le diamètre : quant aux autres toujours la plus proche du centre est plus grande que la plus éloignée.

Au cercle ABCDEF, duquel le centre est o soit le diamètre AD, & la ligne FE la plus proche d'iceluy. mais BC la plus éloignée. Je dis que de toutes ces lignes AD est la plus grande, & que FE est plus grande que BC.

Car soient tirées du centre o les lignes droites GH, GI perpendiculaires aux lignes droites FE, BC : & pource que BC est plus éloignée du centre que FE ; la perpendiculaire

GI sera plus grande que GH, par la 4. def. de ce Livre. Soit donc coupé d'icelle GI, la ligne GM égale à GH, & par M soit menée KML perpendiculaire à GI, & soient tirées les lignes GK, GB, GC, GI. Donc puis que les perpendiculaires GM, GH sont égales, les lignes droites KL, FE seront également distantes du centre par la 4. def. de ce Livre, & partant égales entr'elles par la prop. précédente. Derechef, puis que GK, GL, sont plus grandes que KL par la 20. prop. 1. & icelles GK, GL sont égales au diamètre AD; iceluy diamètre AD sera aussi plus grand que KL ou FE. Par mesme raison on démontrera que AD est plus grande que toutes les autres lignes.



Item, d'autant qu'aux triangles GKL & GBC, les costez GK, GL, GB, GC sont égaux par la définition du cercle, & l'angle GKL est plus grand que l'angle GBC, par la 24. prop. 1. la base KL, ou son égale FE, sera plus grande que la base BC, & ainsi des autres. Parquoy dans le cercle la plus grande ligne est le diamètre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

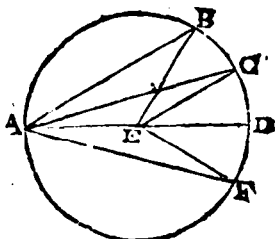
SCHOLIE

Clavius demontre icy le Theoreme suivant pris de Commandin.

Si en la circonference du cercle on prend un point, & d'iceluy l'on mene quelque ligne droite au cercle, l'une desquelles passe par le centre, & les autres où l'on voudra : celle qui passe par le centre sera la plus grande de toutes : mais des autres les plus proches de celle-là qui passe par le centre seront plus grandes que les plus éloignées : & n'y en peut avoir que deux égales de part & d'autre de la plus grande.

En la circonference du cercle AB, CD soit pris le point

A, & d'iceluy soient menées plusieurs lignes droites AB, AC, AD, desquelles AD passe par le centre E: ie dis que AD est la plus grande de toutes, & AC estre plus grande que AB, qui est plus éloignée d'icelle AD. Car estans menées les lignes BE, CE; au triangle AEC les deux costez AE, EC seront plus grands que le costé AC par la 20. pr. 1. Mais icelles lignes AE, EC sont égales aux lignes droites AE, ED, c'est à dire à la ligne droite AD. Donc icelle AD sera plus grande que AC: & par mesme raison elle sera aussi plus grande que AB, & ainsi des autres.



En apres, d'autant qu'au triangle AEC les deux costez AE, EC sont égaux aux deux costez AE, EB du triangle AEB, chacun au sien, & tous l'angle AEC plus grand que l'angle AEB, la base AC sera plus grande que la base AB par la 14. propos. 1. Et par mesme raison AC sera plus grande que toute autre ligne plus éloignée du centre E.

En 3. lieu: ie dis que du point A on ne peut mener au cercle que deux lignes droites égales entr'elles de part & d'autre de la plus grande AD. Car ayant fait l'angle AEF égal à l'angle AEC, & joint AF, les deux costez AE, EC seront égaux aux deux costez AF, EF, & les angles AEC, AEF, continus d'iceux costez, aussi égaux, & par la 4. prop. 1. les bases AC, AF sont égales: & il est évident que du mesme point A on ne peut tirer dans le cercle une autre ligne, qui ne s'approche ou éloigné de AD; & partant plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles AC, AF. Donc du point A ne se peuvent tirer dans le cercle que deux lignes droites égales entr'elles.

Que si de AB, AF, tirées de diverses parts du diamètre AD, on dit que AF est plus proche d'iceluy diamètre AD; on démontrera, comme au Scholie de la 7.

THEOR. 15. PROP. XVI.

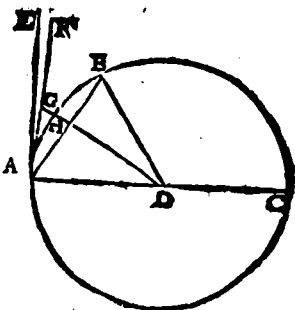
Si à l'extrémité du diamètre d'un cercle, on lève une ligne perpendiculaire, elle tombera hors le cercle : & entre icelle perpendiculaire & la circonférence ne tombera pas une autre ligne droite, & l'angle du demy cercle est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & celuy qui reste plus petit.

Du cercle ABC , soit le centre D , & le diamètre AC , sur l'extrémité duquel A , soit levée la ligne perpendiculaire AE , par la 11. prop. 1. Je dis premièrement qu'icelle ligne AE tombe hors le cercle.

Car si elle tomboit dans iceluy, ainsi que AB , étant tirée DB , les deux angles DAB, DBA , seront égaux par la 5. prop. 1. Mais DAB est droit par la construction : donc DBA sera aussi droit : ce qui est absurde, puis que par la 17. prop. 1.

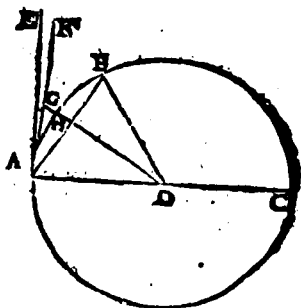
deux angles d'un triangle sont moindres que deux droits. Donc la perpendiculaire ne tombera pas dans le cercle. Pour la même raison elle ne tombera pas aussi en la circonférence, mais dehors, comme est AE .

Maintenant, je dis que de A ne peut tomber entre la perpendiculaire AE , & la circonférence AB une autre ligne droite. Car s'il est possible que quelque ligne droite y tombe, comme AF , de D soit menée sur icelle la perpendiculaire DG , coupant la circonférence en H , laquelle tombera nécessairement de la part de l'angle aigu DAF par le Corol. de la 17. prop. 1. Veu donc qu'au triangle DAG , les deux angles DAG, DGA ,
sont



sont moindres que deux droits par la 17. prop. 1. & par la construction DGA est droit, l'angle D A G sera moindre qu'un droit, & partant la ligne DA, ou son égale DH, sera plus grande que DG, par la 19. pr. 1. la partie que le tout : ce qui est absurde. Entre la perpendiculaire AE, & la circonférence AB ne tombera donc pas une autre ligne droite.

Je dis finalement, que tout l'angle du demy cercle BAC contenu du diamètre AC, & de la circonférence AB, est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & que celui qui reste BAE contenu de la ligne droite AE, & de la circonférence AB est plus petit que tout angle rectiligne aigu. Car puis que CAE est angle droit divisé par la seule circonférence



AB, & qu'entre icelle circonférence AB & la ligne droite AE, ne peut tomber une autre ligne droite ; l'angle B A E ne peut estre divisé par aucune ligne droite, & par ainsi ne sera diminué par aucune ligne droite, ny par conséquent l'angle B A C ne sera augmenté par aucune ligne droite. Si donc à l'extrémité du diamètre d'un cercle on leve une perpendiculaire, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

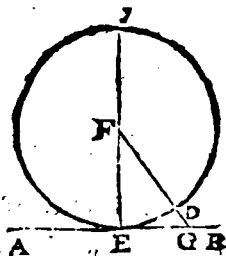
Par ces choses est manifeste qu'une ligne droite tirée perpendiculairement de l'extrémité du diamètre, touche le cercle en un seul point. Car il a esté démontré qu'elle tombe hors le cercle ; & partant elle le touche seulement au point extrême du diamètre. Parquoy s'il étoit requis tirer une ligne droite par le point A donné on la circonférence du cercle, laquelle touchast le cercle en A nous tirerions de A au centre D la ligne droite AD, & sur icelle seroit élevée la perpendiculaire AE, laquelle toucheroit le cercle en A, comme il a été démontré.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si une ligne droite touche un cercle : & du centre à l'atouchement on mene une ligne droite, elle sera perpendiculaire à la touchante.

Soit la ligne droite AB touchant le cercle CDE , au point E , & d'iceluy point d'atouchement soit menée la ligne droite EC passant par le centre F . Je dis qu'elle sera perpendiculaire à AB .

Car si elle ne l'est, soit menée FG perpendiculaire à AB , coupant la circonférence en D . Veu donc qu'au triangle FEG les deux angles FEG , FGE sont moindres que deux droits, par la 17. prop. 1. & FGE est droit par la construction FEG sera moindre qu'un droit, & par la 10. p. 1. la ligne FE , ou FD son égale sera plus grande que FG , la partie que le tout; ce qui est absurde. Donc FE est perpendiculaire à AB . Parquoy si une ligne droite touche un cercle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



SCHOLIE.

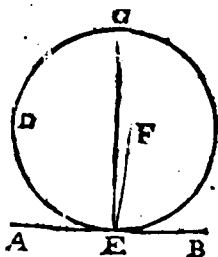
Clavius démontre encore cette prop. ainsi. Si EC n'est perpendiculaire à AB , l'un des angles qu'elle fait au point E sera obtus, & l'autre aigu. Soit donc CEB aigu; & veu qu'il est plus grand que l'angle du demy cercle CED , l'angle du demy cercle sera plus petit que quelque angle rectiligne aigu: ce qui est contre la 16. pr. 3. & parant absurde.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si une ligne droite touche un cercle, & au point de l'atouchement est levée une perpendiculaire; en icelle sera le centre du cercle.

Soit la ligne droite AB , touchant le cercle CDE au point E ; & d'iceluy soit levée EC perpendiculaire à AB . Je dis que le centre du cercle sera dans icelle ligne perpendiculaire EC .

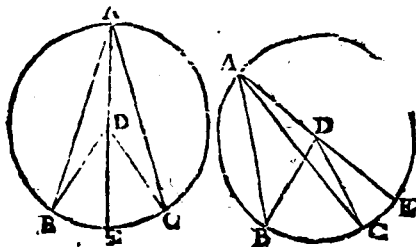
Autrement, il sera dehors icelle ligne ; soit donc au point F , s'il est possible, & d'iceluy point soit menée la ligne droite EF au point de l'attouchement E ; icelle ligne EF sera aussi perpendiculaire à AB par la prec. prop. ce qui est impossible : car les deux angles AEC , AEF seroient droits & égaux, la partie au tout : partant le centre du cercle n'estoit pas hors la ligne EC , ains dedans. Si donc une ligne droite touche un cercle, &c. Ce qu'il falloit prouver.



THEOR. 13. PROP. XX.

Au cercle, l'angle du centre est double de l'angle de la circonférence, quand iceux angles ont une même circonférence pour base.

Au cercle ABC , duquel le centre est D , soient constituez



les deux angles BAC & BDC , sçavoir BAC en la circonférence

ce, & BDC au centre, ayant pour base une mesme circonference DC. Je dis que l'angle BDC sera double de l'angle BAC.

Car premierement, si les lignes droites AB, AC enclofent les lignes DB, DC, comme en la premiere figure; étant menée par le centre D la ligne droite ADB, & les lignes DA, DB & DC, étrans égales, les deux triangles ADB & ADC seront Isosceles, & par la 5. pr. 1. ils auront les angles égaux sur les bases AB & AC. Mais l'angle extérieur BDE par la 32. p. 1. est égal aux deux angles intérieurs DAB & DBA, qui sont égaux; partant il sera double du seul DAB: par mesme discours EDC se trouvera aussi double de DAC, & par conséquent les deux ensemble BDC seront doubles des deux ensemble BAC.

Que si l'angle de la circonference BAC est comme en la seconde figure, il s'ensuivra toujours le mesme, sçavoir que l'angle BDC sera double de l'angle BAC.

Car apres avoir mené par le centre D la ligne ADB, par la 32. pr. 1. l'angle extérieur BDE sera égal aux deux oppozez intérieurs ABD, DAB, & double du seul DAB, le triangle étant Isoscele: par mesme discours CDE sera double de CAD, & par la 20. com. sent. si de BDE double de DAB on ôte CDE, double de CAD, le demeurant BDC sera double du demeurant BAC. Parquoy au cercle, l'angle du centre est double de l'angle de la circonference, &c. Ce qu'il falloit prouver.

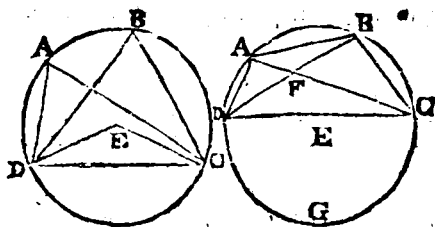
THEOR. 19. PROP. XXI.

Au cercle, les angles qui sont en une même portion, sont égaux entr'eux.

Toute portion de cercle, est ou plus grande, ou plus petite que le demy cercle. Soit donc premierement au cercle ABCD, le centre duquel est E, une plus grande portion DABC, en laquelle soient les angles DAC & DBC. Je dis qu'ils sont égaux entr'eux.

Car si du centre E on mene les deux lignes ED & EC, l'angle du centre DEC sera double de l'angle en la circonference DAC par la prop. prec. & par la même prop. il sera aussi dou-

ble de
l'autre
angle
D B C.
Mais les
choses
qui sont
moitié
d'une
même ,
sont



égales entr'elles : Donc aussi les angles A & B seront égaux entr'eux.

Soit maintenant une portion plus petite que le demy cercle, comme en la 2. figure. Je dis que les deux angles DAC, DBC, étans en la même portion DABC sont égaux.

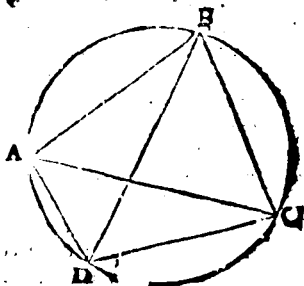
Car si on mene la ligne droite AB, il se fera une portion BGA, plus grande que le demy cercle ; & comme nous avons démontré cy-dessus, les deux angles ADB & BCA, qui sont en une même portion AGB, seront égaux : pareillement aux deux triangles DAF & CBF, les angles opposés au point F sont égaux par la 15. pr. 1. & par ce qui a été démontré à la 32. pr. 1. le troisième angle DAF sera égal au troisième angle CBF. Donc au cercle, les angles qui sont, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Les figures de quatre côtes inscrites au cercle, ont les angles opposés égaux à deux angles droits.

Soit le cercle ABCD, auquel soit inscrite la figure de quatre côtes ABCD. Je dis que les angles opposés ABC, ADC ; item BAD, BCD, sont égaux à deux droits. Car si on mene les deux diagonales AC & BD, les deux angles ACD & ABD, étans en une même portion ABCD, seront égaux par la pr. préc. Pareillement les deux angles DBC & CAD, étans en une même portion DABC, seront égaux ; donc les deux angles sous le point B, seront égaux aux deux DAC & DCA, lesquels avec les deux du point D, sont égaux à

deux droits, par la 32. pr.
 2. partant aussi les deux
 sous le point B avec les
 deux sous le point D : c'est
 à dire le total ABC, avec
 le total ADC, seront égaux
 à deux droits. Nous de-
 montrerons en la même
 manière que les deux an-
 gles BAD, BCD, sont
 égaux à deux droits. Car
 de eachet les deux angles
 ABD, ACD, sont égaux.
 Item les deux BCA, BDA;
 & partant tout l'angle BCD



sera égal aux deux ABD, ADB, lesquels avec BAD sont
 égaux à deux droits par la 32. p. 1. Donc aussi les deux BCD,
 BAD, seront égaux à deux droits. Parquoy les figures de qua-
 tre costez inscrites au cercle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

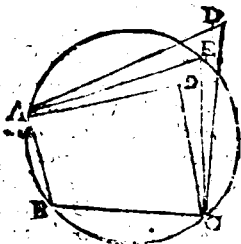
S C H O L I E.

La converse de cette 22. prop. peut être démontrée ainsi
 qu'il insuit.

Si deux angles opposez d'un quadrilatere sont égaux à deux
 droits, le cercle décrit par trois angles d'iceluy passera aussi par
 le quatrième angle.

An quadrilatere ABCD, les deux angles opposez B &
 D soient égaux à deux droits, & par les trois angles A,
 B, C, soit décrit un cercle; le dis qu'il passera aussi par le
 4 angle D. Car s'il n'y passoit, il passeroit ou au dedans de D,
 ou au delà. Soient donc tirées

les deux lignes droites AE,
 CE, en telle sorte que ne
 coupant les lignes droites
 CD, AD, elles constituent
 au cercle un quadrilatere



ABCE. Donc par la 22. pr.
 3. les deux angles opposez B &
 E sont égaux à deux droits.
 Mais par l'hypothèse les deux
 angles B & D, sont aussi é-
 gaux à deux droits; & partant les deux angles B & E

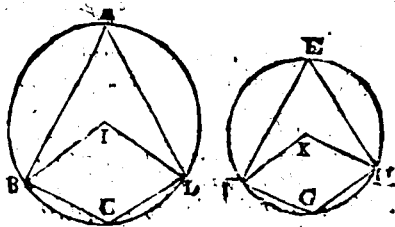
seront égaux aux deux B & D . Parquoy en ôtant l'angle commun B , resteront les angles D & E égaux : Ce qui est absurde, car étant tirée la ligne droite CA , l'angle D sera plus grand que l'angle E par la 21. pr. 1. ou au contraire l'angle E sera plus grand que l'angle D . Le cercle passera donc par le point D .

Nous démontrerons encore icy quatre theoremes non seulement utiles aux choses Geometriques, mais aussi nécessaires aux Astronomiques.

1. Aux cercles, les angles qui s'appuyent sur arcs semblables sont égaux entr'eux, soit qu'ils soient constituez aux centres ou aux circonferences : & au contraire, les arcs auxquels s'appuyent angles égaux constituez aux centres ou aux circonferences, sont semblables.

Aux cercles $ABCD$, $EFGH$, desquels les centres I & K , soient premierement les arcs semblables BCD , FGH , auxquels insistent & s'appuyent les angles I & K aux centres & les angles A & E aux circonferences. Je dis que tant ces deux là, que ces deux-cy sont égaux entr'eux. Car étant consti-

tuez en iceux arcs les angles C , G , qui par la 10. d. 3. seront égaux & par la 22. p. 3. tant les deux angles C , A , que les deux G , E , sont



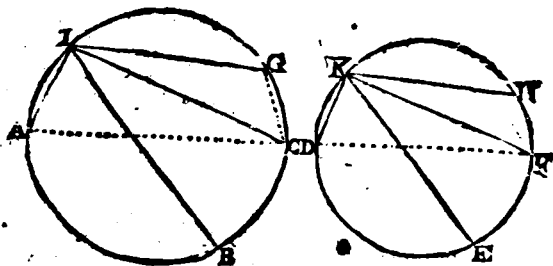
égaux à deux droits. Ôtant donc les égaux C , G , les restans A , E seront aussi égaux : Mais d'iceux sont doubles les angles I , K , par la 20. prop. 3. & par consequent ils sont aussi égaux. Ce qui étoit proposé.

Secondement, soient égaux tant les angles I , K , que A , E , lesquels s'appuyent sur les arcs BCD , FGH : Je dis qu'iceux arcs BCD , FGH sont semblables. Car A & E sont égaux ; & par la 22. prop. 3. tant les deux angles A & C que les deux E & G sont égaux à deux droits, les deux autres C & G seront aussi égaux ; & par conséquent les arcs

BCD , FGH , auxquels insistent les angles A , E aux circonferences, seront semblables par la 10. d. 3. Mais si les angles I & K aux centres sont égaux, leurs moitiés A & E , seront aussi égales. Parquoy comme dessus, les arcs BCD , FGH sont semblables. Ce qu'il falloit démontrer.

2. Si aux demy cercles, ou autres segmens semblables, l'on ajoute des segmens semblables; les totaux segmens seront aussi semblables; & si des cercles, demy cercles, ou autres segmens semblables, on oste des segmens semblables; les segmens restans seront aussi semblables.

Aux cercles ABC , DEF , soient les segmens ou arcs semblables ABC , DEF qui soient demy cercles ou non, & à iceux soient ajoutez les arcs semblables CG , FH . Je dis que tout l'arc ABG est semblable à tout l'arc DEH . Car étans pris aux arcs y estans les deux points I , K , comme on voudra, soient menées les lignes droites AI , CI , GI ; DK , FK , HK . D'autant que les arcs ABC , DEF sont semblables, les angles AIC , DkF , seront



égaux par le prec. Theor. Et par mesme raison les angles FIG , FkH seront aussi égaux, à cause des arcs semblables CG , FH . Donc tout l'angle AIG sera égal à tout l'angle DKH ; & par le mesme theor. prec. les arcs ABG , DEH seront semblables: Ce qui étoit proposé.

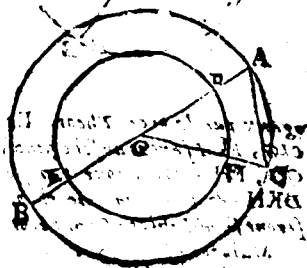
Maintenant, que des segmens ou arcs semblables ABC , DEF , soient retranchez les arcs semblables AB ,

DE. Je dis que les arcs restans BC , EF , sont aussi semblables. Car estant pris derechef les deux points I , K , aux peripheres restantes des arcs donnez, soient menées les lignes droites AI , BI , CI ; DK , EK , FK . Donc puis que tout l'arc ABC est semblable à tout l'arc DEF , tout l'angle AIC sera egal à tout l'angle DKF par le prec. theor. Et par mesme raison l'angle retranché AIB sera egal à l'angle retranché DKE , à cause des arcs semblables AB , DE : donc aussi l'angle restant BIC sera egal à l'angle restant EKF ; & consequemment les arcs BC , EF , seront semblables. Ce qu'il falloit demonstrier.

Que si des cercles entiers on oste les segmens semblables IAC , KDF , les segmens restans CGI , FHK seront aussi semblables. Car ayant pris aux arcs d'iceux segmens les points A , G , D , H , soient menées les lignes droites IA , CA , IG , CG ; KD , FD , KH , FH . D'autant que les segmens IAC , KDF sont semblables, les angles IAC , KDF seront egaux par la 10. def. 3. Et puis que par la 22. prop. 1. tant les deux angles oppozés A , G , que les deux D , H , sont egaux à deux droits; en ostant les deux angles egaux A & D , les deux restans G & H seront aussi egaux, & partant les segmens IGC , KHF seront semblables par la mesme def. Ce qui estoit proposé.

3. Si deux ou plusieurs cercles sont décrits d'un mesme centre, & d'iceluy soient menées deux ou d'avantage de lignes droites, qui coupent les circonferences, les arcs compris entre deux quelconques d'icelles lignes, seront semblables.

Soient deux cercles ABC , DEF , décrits d'un mesme centre G , duquel soient menées les deux lignes droites GB , GC , qui coupent les circonferences en B , C , & E , F : Je dis que les arcs EF , BC , sont semblables: Car estant prolongée la ligne BG jusques en A , & tirées les lignes droites AC , DE , l'angle G constitué au centre sera double de chacun des angles A , D ,

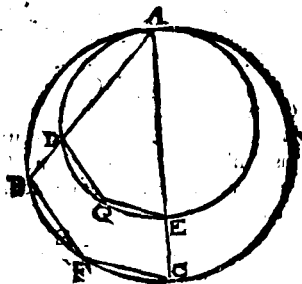


en la circonférence par la 10. prop. 3. Donc par le 1. de ces theor. les arcs BC , EF , sur lesquels ils s'appuyent seront semblables. Ce qui estoit proposé.

Autrement. D'autant que sur les arcs EF , BC s'appuyent angles égaux au centre ; ou plutôt un seul & mesme angle BGC ; iceux arcs EF , BC seront semblables par le theor. susdit.

4. Si deux ou davantage de cercles s'entretouchent au dedans, & du point d'atouchement soient tirées deux ou davantage de lignes droites qui coupent les cercles ; les arcs compris entre deux quelconques d'icelles lignes seront semblables ; comme aussi les arcs compris entre le point d'atouchement, & laquelle on voudra d'icelles lignes.

Que les deux cercles ABC , ADE s'entretouchent en dedans au point A , duquel soient menées les deux lignes droites AB , AC , qui coupent les cercles en B , C , & D , E : Je dis que sans les arcs BC , DE , que AB , AD : & ACB , AED sont semblables. Car ayant pris les deux points F , G , & tiré les lignes droites, BF , GF , DG , EG ; les deux angles DAE , DGE , seront égaux aux deux angles BAC , BFC , attendu que tant ces deux-là, que ces deux cy sont égaux à deux droits par la 22. pr. 3. & partant l'angle commun BAC étant ôté, les deux autres angles DGE , BFC demeureront égaux : & par la 10. def. 3. les arcs DE , BC seront semblables.

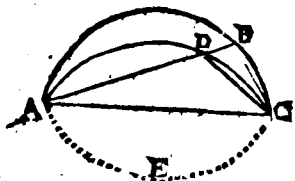


Es d'autant que si on conçoit ôtre. tirée la ligne droite AC par le centre du cercle, elle tombera en l'atouchement A par la 11. prop. 3. & en la même manière que dessus les arcs DE , BC seront semblables, lesquels estans ôtez, des deux cercles semblables, resteront aussi semblables les arcs AD , AB , qui sont des circonférences entières, resteront encore les arcs AED , AGB semblables, comme nous avons démontré au 2. theor. Ce qui estoit proposé.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Deux portions de cercles, semblables & inégales, ne se mettront pas dessus une même ligne droite, & de même part.

Car si faire se peut, soient deux portions de cercles semblables, & inégales ABC & ADC , sur la ligne droite AC , & de même costé. Il est évident qu'elles s'entre couperont seulement es points A & C , puis que par la 10. pr. de ce livre un cercle ne coupe pas un autre cercle en plus de deux points; & partant la circonference d'une portion sera toute dehors la circonference de l'autre. Soit donc menée la ligne droite AB coupant les circonférences en D & B , & tirées les deux lignes droites BC & DC ; par la définition des semblables portions, les deux angles ABC & ADC seront égaux, ce qui est absurde: car par la 16. pr. 1. l'angle extérieur ADC doit être plus grand que l'opposé intérieur B . Donc les deux portions ABC & ADC , estans semblables & inégales, ne se pouvoient mettre sur une même ligne droite AC , & de même part. Ce qu'il falloit démontrer.



S C H O L I E.

Encore qu'en cette 23. prop. & démonstration d'icelles les portions de cercles soient constituées de même part, si est-ce toutesfois que la prop. sera aussi véritable, si lesdites portions sont passées de diverse part; comme sont les portions ABC & AEC . Car si on conçoit que l'une d'icelles portions, comme AEC , soit, même à l'entour de la ligne droite AC , & vienne à être de même part que ABC , il aviendra toujours la même absurdité que dessus, attendu qu'une portion ne conviendra point à l'autre, à cause de leur inégalité.

D'avantage , il est évident , que ce qui est dit icy de deux portions constituées sur une même ligne droite , se doit aussi entendre de celles constituées sur lignes droites égales : car l'une d'icelles lignes étant superposée à l'autre , elle luy conviendra , & passant les deux portions seront lors posées sur une même ligne droite , ainsi que dessus , &c.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Semblables portions de cercles étans constituées sur lignes droites égales , sont égales entr'elles.

Soient deux portions de cercles semblables ABC & DEF constituées sur lignes droites égales AC , & DF Je dis qu'icelles portions sont égales entr'elles

Autrement , si elles estoient inégales il s'en suivroit que deux portions semblables & inégales , pour-



roient être posées sur lignes droites égales , ou bien sur une même , contre la prop. précédente : donc les deux portions ABC & DEF constituées sur lignes droites égales , seront égales ; Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Il est aisé de démontrer la converse tant de cette prop. que de la précédente , c'est à sçavoir que les égaux segmens de cercles constitués sur lignes droites égales , ou sur une même , sont semblables. Car à cause de l'égalité desdits segmens , ou portions de cercles , l'une conviendra à l'autre , & passant sous les angles construits en icelles sont égaux : Parquoy icelles portions seront semblables. Que si quelqu'un dit que lesdites portions ne conviennent entr'elles , il faudroit ou que l'une

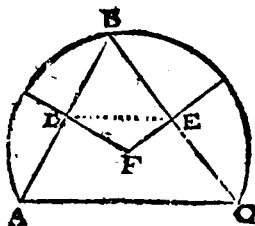
tombast toute hors de l'autre, & elles ne seroient égales entr'elles, contre l'hypothèse; ou bien que la circonférence de l'une compast la circonférence de l'autre, & par ainsi un cercle en couperoit un autre à plus de deux points, contre la 10. prop. 3.

PROBL. 3. PROP. XXV.

La portion d'un cercle étant donnée, décrire le cercle duquel elle est portion.

Soit une portion de cercle ABC, de laquelle il faut trouver le centre pour achever le cercle d'icelle.

En la circonférence d'icelle portion soient pris comme on voudra les trois points A, B, C, & après avoir mené les deux lignes droites AB & BC, & icelles coupées en deux également en D & E par la 10. prop. 1. d'iceux points soient levés par la 11. prop. 1. les perpendiculaires DF, & EF, se rencontrans au point F: (or elles se doivent rencontrer, pour ce que si on menoit une ligne droite de D à E, comme DE, seroient faits deux angles EDF, DEF, moindres que deux droits.) Je dis que le point F est le centre cherché.

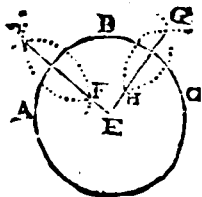


Car par le Corol. de la 1. prop. de ce livre le centre sera en la ligne DF: Il sera aussi en EF: ce sera donc au point F, qui leur est commun. Parquoy nous avons trouvé le centre du cercle, duquel le segment donné ABC est portion: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La pratique de cette prop. n'est différente à celle de la

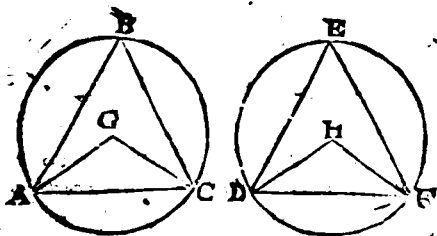
premiere, c'est à sçavoir qu'ayant pris en la circonference les trois points A, B, C , il faut des points A & B , décrire d'un même intervalle deux arcs qui s'entre-coupent en D, F , & par iceux mener une ligne droite $D F E$: en apres, des points B & C , décrire encore d'un même intervalle deux autres arcs qui s'entre-coupent en G & H , par lesquels soit menée une ligne droite $G H E$, qui coupe la precedente $D F$ en E , qui sera le centre requis.



THEOR. 23. PROP. XXVI.

Aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent sur circonférences egales, soit qu'ils s'appuyent étans constituez aux centres, ou aux circonférences.

Soient les cercles egaux ABC & DEF , lesquels les centres sont G & H , & à iceux soient constituez les angles egaux G , H : Item les angles B, E constituez aux circonférences, soient

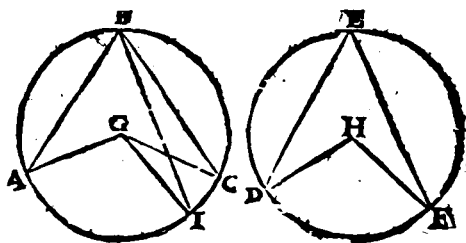


aussi egaux. Je dis que les circonférences AC & DF , sur lesquelles iceux angles s'appuyent, sont égales.

Car d'autant que les cercles sont égaux, les lignes tirées du centre à la circonférence seront égales par la 1. déf. de ce livre. Parquoy ayant tiré les deux lignes droites AC , DF , les deux triangles AGC , & DHF , auront deux costez égaux à deux costez, chacun au sien, & l'angle G égal à l'angle H : & par la 4. prop. 1. la base AC sera égale à la base DF , Pareillement l'angle B étant égal à l'angle E , la portion ABC sera semblable à la portion DEF , par la 10. déf. de ce livre. & par la 24. prop. elles seront égales ; & qui de cercles égaux ôte portions égales, sçavoir ABC & DEF , le demeurant AC sera égal au demeurant DF : ainsi les angles égaux s'appuyent dessus circonférences égales AC , DF . Donc aux cercles égaux, les angles égaux s'appuyent sur circonférences égales, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Que si les susdits angles étoient inégaux, le plus grand s'appuyeroit sur un plus grand arc que le moindre : Car aux cercles égaux ABC , DEF , soit l'angle AGC au



centre G , plus grand que l'angle DHF au centre H . Item l'angle ABC en la circonférence, plus grand que l'angle DEF en la circonférence. Je dis que l'arc AC est plus grand que l'arc DF . Car ayant fait l'angle AGI égal à l'angle DHF , & l'angle ABI égal à l'angle DEF ; par ce qui a été démontré cy-dessus, les arcs AI , DF seront égaux ; & partant AC sera plus grand que DF .

Or çà

Or ce qu'Euclide dit des cercles égaux en cette proposition, & aux trois prochaines suivantes, se doit aussi entendre d'un même cercle; c'est à dire qu'en un même cercle, les angles égaux s'appuyent sur circonferences égales, &c. Car toujours la même démonstration qui se fera en deux ou plusieurs cercles égaux, aura aussi lieu en un même cercle.

THEOR. 24. PROP. XXVII.

Aux cercles égaux, les angles qui s'appuyent dessus circonferences égales, sont égaux entr'eux, soit qu'ils s'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.

Soient deux cercles égaux ABC & DEF, les centres desquels sont G & H, & sur les circonferences égales AC & DF, soient les angles ABC & DEF, tous deux en la circonferance. Item AGC & DHF au centre: ie dis premierement qu'iceux angles AGC & DHF, seront égaux.

Autrement, l'un d'iceux angles sera plus grand que l'autre:

Soit donc AGC

plus grand que

DHF, s'il est pos-

sible, & par la 23.

pr. 1. sur AG soit

fait l'angle AGI

égal à DHF, &

par la precedente

prop. les circonfe-

sences AI & DF

seront égales; ce

qui est contre nôtre hypothese; car nous avons posé AC égale

à DF. Il faudroit doncques que AC & AI fussent égales, contre

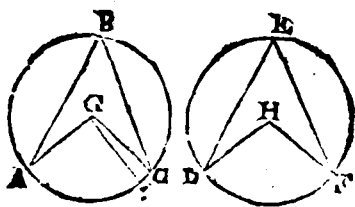
la 8. com. sent. Donc l'angle AGC n'étoit point plus grand que

l'angle DHF, & partant égal: ce qui estoit proposé.

Or l'égalité des angles du centre estant prouvée, les angles

de la circonferance sont entendus égaux, puis qu'ils sont inci-

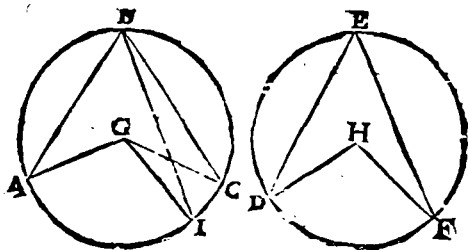
siez d'iceux par la 20. proposition de ce livre. Donc aux



cercles égaux les angles qui s'appuyent dessus circonferences éga-
les, sont égaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Que si les arcs étoient inégaux, l'angle insistant sur le
plus grand arc seroit plus grand que celui du moindre.
Comme en la figure du Scholie précédent, soit l'arc AC
plus grand que l'arc DF : Je dis que l'angle AGC est
plus grand que l'angle DHF, & l'angle AEC, plus grand



que l'angle DEF. Car ayant fait l'arc AI égal à l'arc DF,
& tiré les lignes droites GI, BI ; tant les angles AGI,
DHF, que les angles ABI, DEF, seront égaux, com-
me il a esté démontré cy-dessus : & partant l'angle AIC
sera plus grand que l'angle DHF, & l'angle ABC plus
grand que l'angle DEF.

THE OR. 25. PROP. XXVIII.

Aux cercles égaux, les lignes droites égales pren-
nent circonferences égales, sçavoir la plus grande
à la plus grâde, & la plus petite à la plus petite.

Soient deux cercles égaux ABC & DEF, desquels les cen-
tres sont G & H, & dans ces cercles soient deux lignes droites
égales AC & DF : Je dis que les circonferences qu'elles
coupent, sont égales, sçavoir la petite AIC à la petite DKF,

& la grande ABC à la grande DEF.

Qu'il ne soit ainsi ; des centres G & H , soient menées les lignes GA , GC , HD , HF , qui seront égales par la 1. def. de ce livre , estans les cercies égaux ; & la ligne droite AC estans

égale à la ligne droite DF , les deux triangles AGC & DHF , auront les trois côtes égaux aux trois costez , chacun au sien : & par la 8. pr. 1. l'angle G sera

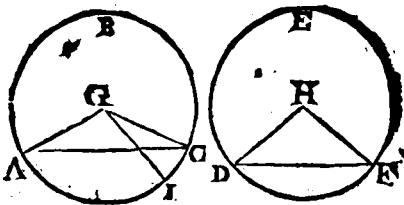
égal à l'angle H , & par la 26. pr. de ce livr. ils s'appuyent dessus circonferences égales AIC , DKF ; & qui de cercles égaux ôste icelle ; circonferences égales , resteront les circonferences ABC DEF , aussi égales. Donc aux cercles égaux , les lignes droites égales prennent circonferences égales , &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

S C H O L I E

Que si les lignes droites étoient inégales , la plus grande prendroit aux segmens mineurs une plus grande circonférence que la moindre : mais une moindre aux segmens majeurs.

Comme aux cercles égaux ABC , DEF , desquels les centres sont G & H , soit la ligne droite AC plus grande que la ligne droite DF : Je dis que

la circonférence AC moindre que le demy cercle est plus grande que la circonférence DE : & que la circonférence ABC est moindre que la periphère DEF. Car étans tirées les lignes droites AG , GC , DH & HF : les costez AG , GC du triangle AGC , seront égaux aux costez DH , HF du triangle DHF : & la base AC est posée plus grande que la base



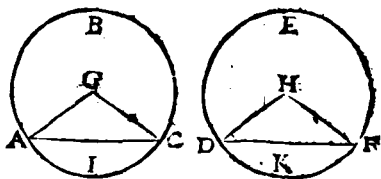
DE : Donc l'angle AGC sera plus grand que l'angle DHF par la 25. pr. 1. Parquoy soit fait l'angle AGI égal à l'angle DHF par la 23. prop. 1. & par la 26. pr. 3. l'arc AI sera égal à l'arc DI, & passant la circonférence AIC sera plus grande que la circonférence DE, & conséquemment le reste ABC sera moindre que le reste DEF.

THEOR. 26. PROP. XXIX.

Aux cercles égaux, les circonférences égales, soutendent lignes droites égales.

Es cercles égaux ABC & DEF, desquels les centres sont G & H, soient les circonférences ABC, DEF égales : item les circonférences AIC, DKF aussi égales & soutendues des lignes droites AC & DF. Je dis qu'icelles lignes soutendantes sont égales.

Qu'ainsi ne soit : des centres G & H soient menées les lignes droites GA, GC, HD, HF. Or d'autant que l'on pose les circonférences AIC, DKF égales, les angles G & H qui s'appuyent dessus icelles circonférences, seront égaux par la 27. proposition de ce livre & pareillement les côtesz GA & GC, étans égaux aux côtesz HD & HF par 1. d. 3. la base AC sera égale à la base DF par la 4. proposition 1. Donc aux cercles égaux les circonférences, &c. Ce qui estoit à prouver.



SCHOLIE.

Mais si les circonférences étoient inégales, la plus grande seroit soutendue d'une plus grande ligne que la moindre, lesdites circonférences étans moindres que le

demycercle : Car si elles étoient plus grandes , la moindre d'icelles circonf. seroit soustendue d'une plus grande ligne que la plus grande. Comme aux cercles égaux ABC , DEF , desquels les centres sont G & H , soient les circonférences AC , DF , chacune moindre que le demy cercle, & soit AC plus grande que DF , & partant ABC moindre que DEF : Je dis que la ligne droite AC est plus grande que la ligne droite DF . Car étans tirées les lignes droites AG , GC , DH , & HF , l'angle AGC sera plus grand que l'angle DHF par le Scholie de la 27. prop. de ce livre ; & puis que les côtez AG , GC , du triangle AGC sont égaux aux côtez DH , HF du triangle DHF , par la 24. prop. 1. la base AC sera plus grand que la base DF .

Clavius, apres Commandin, demontre en ce lieu les quatre Theoremes suivans.

1. Les cercles, desquels les lignes droites égales retranchent semblables circonférences, sont égaux.

Soient deux cercles ABC , DEF , desquels les lignes droites égales AC , DF , coupent semblables circonférences ABC , DEF : Je dis qu'iceux cercles sont égaux. Car si les segmens ABC , DEF sont semblables, les segmens restans AIC , DKF , seront aussi semblables, comme nous avons démontré au Scholie de la 22. prop. de ce livre. D'orechef, pource que sur les lignes droites égales AC , DF , sont constituez des semblables segmens ABC , DEF , ils seront égaux par la 24. p. 3. Par mesme raison seront aussi égaux les semblables segmens AIC , DKF . Donc les cercles entiers ABC , DEF , seront égaux : Ce qui étoit proposé.

2. Des cercles inégaux, les lignes droites égales coupent circonférences dissemblables.

En la mesme figure precedente les lignes droites AC , DF soient prises égales, & les cercles ABC , DEF , inégaux. Je dis que les circonférences ABC , DEF , sont dissemblables. Car si elles étoient semblables, les cercles seroient égaux, comme nous avons démontré cy-dessus, contre l'hypothese. Donc les circonférences ABC , DEF , sont dissemblables. Par mesme raison les circonférences AIC , DKF , seront aussi dissemblables. Ce qu'il falloit démontrer.

3. Les lignes droites, qui prennent circonferences semblables de cercles inegaux, sont inegaux.

En la mesme figure soient posez les cercles inegaux, & les circonferences ABC , DEF semblables : Je dis que les lignes droites AC , DF sont inegaux. Car si elles étoient egales, les cercles seroient egaux par le premier Theor. cy-dessus, contre l'hypoth. icelles lignes droites AC , DF , sont donc inegaux.

4. Les lignes droites, qui de quelconques cercles prennent circonferences semblables & inegaux, sont inegaux.

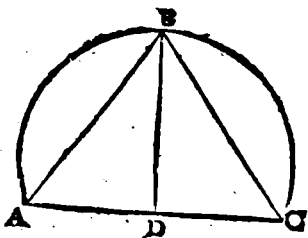
En la mesme figure, soient posées les circonferences ABC , DEF semblables & inegaux. Je dis que les lignes droites AC , DF sont inegaux. Car les cercles sont ou egaux, ou inegaux : Soient premierement egaux. Si donc les lignes droites AC , DF , sont dites egales, par la 28. prop. 3. les circonferences ABC , DEF , seront egales : ce qui est contre l'hypoth. Icelles lignes droites AC , DF , ne sont donc pas egales. Soient puis apres les cercles inegaux. Donc les lignes droites AC , DF , étant les circonferences ABC , DEF , semblables, seront inegaux, comme il a été démontré au precedent Theor. En la mesme maniere nous démontrerons les lignes droites AC , DF estre inegaux, si les circonferences AIC , DKF , sont posées semblables & inegaux.

PROBL. 4. PROP. XXX.

Couper une circonference donnée en deux également.

Soit la circonference donnée ABC , laquelle il faut couper en deux également.

Soit menée la ligne droite AC , laquelle soit coupée en deux également au point D , duquel point soit élevée la perpendiculaire DB par la 11. prop. 1. qui rencon-

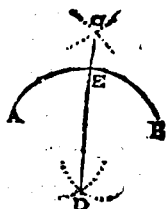


tre la circonference en B. Je dis que la circonference ABC est coupée en deux également en B.

Qu'il ne soit ainsi : soient menées les lignes droites AB & BC. D'autant que les deux costez AD & DB du triangle ADB, sont égaux aux deux costez CD & DB du triangle CDB, chacun au sien, & les deux angles au point D égaux : par la 4. p. 1. la base AB sera égale à la base BC, & par la 28. prop. de ce livre les circonférences AB & BC seront égales. Nous avons donc coupé la circonférence donnée en deux également. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

La pratique de cette proposition est fort aisée, car il n'y a qu'à décrire deux arcs de cercles de chaque extrémité de la circonférence donnée A & B, qui s'entrecoupent es points C & D, desquels points étant menée une ligne droite CD, elle coupera la circonférence donnée AB en deux également au point E.



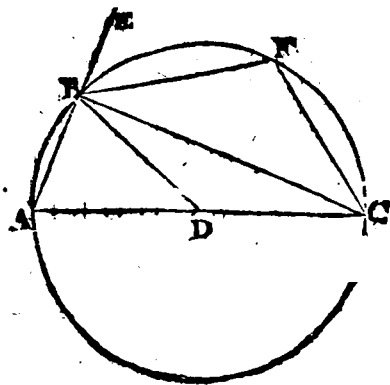
THEOR. 27. PROP. XXXI.

Au cercle, l'angle qui est au demy cercle est droit ; & celui qui est en la plus grande portion, est plus petit qu'un droit ; mais celui qui est en la plus petite, est plus grand qu'un droit. Et davantage, l'angle de la plus grande portion, est plus grand qu'un droit : mais l'angle de la plus petite portion est moindre qu'un droit.

Au cercle ABC, duquel D est le centre, & AC le diamètre soit constitué au demy cercle ABC, l'angle rectiligne ABC ; & en la plus grande portion BAC, l'angle BAC ; mais en la moindre portion BFC ; l'angle CEB. Je dis en premier lieu

que l'angle ABC au demy cercle, est droit.

Car apres avoir mené la ligne BD , & continué AB jusques en E : il est evident que les triangles ABD & CBD sont Ifofcles, & par la 5. p. 1. ils auront les angles sur la base egaux, sçavoir BAD à ABD , & CBD à BCD : & partant les deux ensemble ABD , CBD , seront egaux aux deux ensemble



BAD & BCD . Mais par la 32. p. 1. l'exterieur CBE est egal à iceux deux angles BAD , BCD : & partant les deux au point B , faisant le seul ABC , seront aussi egaux à l'exterieur CBE , & par la 10. def. 1. les deux angles ABC & CBE , seront deux droits,

Je dis en second lieu, que l'angle BAC , qui est en la plus grande portion CAB , est plus petit qu'un droit : ce qui est aisé à prouver par la 32. pr. 1. d'autant qu'au triangle BAC , l'angle ABC , étant droit, les deux autres ensemble ne vaudront qu'un droit : & partant le seul angle BAC est plus petit qu'un angle droit, & ainsi des autres.

Je dis tiercement, que l'angle BFC , qui est en la petite portion CEB , est plus grand qu'un droit : car par la 22. p. de ce livre la figure de quatre costez $ABFC$ inscrite au cercle, a les deux angles opposez A & F , egaux à deux droits. Mais nous avons prouvé A estre plus petit qu'un droit, par consequent F sera plus grand.

Je dis en quatrième lieu, que l'angle de la plus grande portion, sçavoir CBA , compris de la ligne droite BC , & de la periphère BAC , est plus grand qu'un angle droit : ce qui

est evident; car l'angle droit rectiligne ABC n'est que partie d'iceluy angle mixte CBA.

Finalement, je dis que l'angle de la petite portion, compris de la ligne droite BC & de la circonference BFC, c'est à dire l'angle mixte CBF est moindre qu'un droit, car iceluy n'est que partie de l'angle droit CBE. Donc au cercle, l'angle qui est au demy cercle est droit, &c. Ce qu'il faisoit demonstrier.

COROLLAIRE.

De ce que dessus, est manifeste qu'un angle d'un triangle estant egal aux deux autres, est droit.

SCHOLIE.

La converse de cette prop. est manifestement vraie, c'est à sçavoir que

Le segment de cercle, auquel est constitué un angle droit, est demy cercle, & celuy auquel est un angle aigu, est segment majeur: mais celuy auquel est un angle obtus, est segment mineur: Et le segment duquel l'angle est plus grand qu'un droit est plus grand que le demy cercle; mais celuy duquel l'angle est moindre que le droit, est ou demy cercle, ou moindre que le demy cercle.

Car l'angle étant droit, si le segment n'est pas un demy cercle, il sera ou plus grand, & ainsi l'angle sera aigu; ou moindre, & ainsi l'angle sera obtus: contre l'hypothese. Derechef, l'angle étant aigu, si le segment n'est pas plus grand que le demy cercle, il sera ou demy cercle, & ainsi l'angle en iceluy sera droit: ou moindre que le demy cercle, & ainsi l'angle en iceluy sera obtus: Ce qui est aussi contre l'hypothese. Finalement, l'angle étant obtus, si le segment n'est moindre que le demy cercle, il sera ou demy cercle, & ainsi l'angle en iceluy sera droit; ou plus grand, & ainsi l'angle sera aigu: Ce qui est semblablement contre l'hypothese. Davantage, quand l'angle du segment est plus grand qu'un droit, si le segment n'est pas plus grand que le demy cercle, il sera ou demy cercle, ou moindre que le demy cercle, & ainsi l'angle d'iceluy sera moindre qu'un droit, contre la position. Et quand l'angle du segment est moindre qu'un

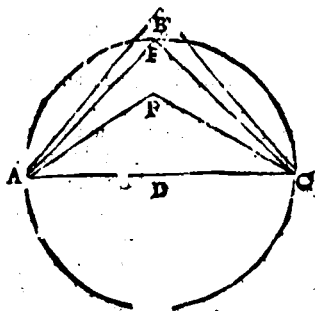
droit, si le segment n'est pas demy cercle, ou moindre que le demy cercle, il sera plus grand, & par ainsi l'angle d'iceluy sera pareillement plus grand que le droit; ce qui est contre l'hypothese.

Clavius demontre en ce lieu le theoreme suivant.

Si le costé opposé à l'angle droit d'un triangle rectangle est coupé en deux également, & du point de la section est décrit un cercle de l'intervalle de la moitié d'iceluy costé; iceluy cercle passera par l'angle droit du triangle.

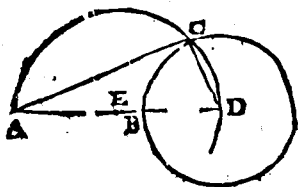
Au triangle rectangle ABC , le costé AC opposé à l'angle droit B , soit coupé en deux également au point D , duquel & de l'intervalle DA , ou DC , soit décrit le cercle AEC , lequel je dis passer par B . Car s'il passoit au dessus de B , ou au dessous,

étant tirées les lignes droites AE , CE , tellement qu'elles ne coupent les lignes droites AB , BC , ains qu'elles tombent au deçà d'icelles, ou au delà: l'angle AEC au demy cercle sera droit par la 31. p. 3. & conséquemment les angles B & E seront égaux, étant droits: ce qui est absurde, vu que l'angle E par la



21. prop. 1. est nécessairement ou plus grand, ou plus petit que l'angle B . Le cercle AEC passera donc par le point de l'angle droit B . Ce qui étoit proposé.

Or de la demonstration de la premiere partie de ceste pr. nous colligeons un facile moyen pour d'un point donné hors un cercle mener une, ou deux lignes droites qui touchent iceluy cercle, ce qui se fait ainsi. Soit



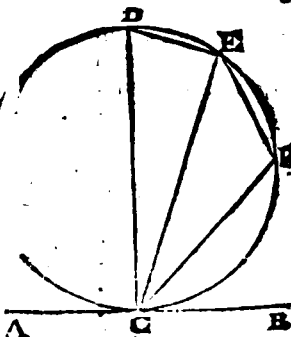
donné le point *A* hors du cercle *BC*, le centre duquel est *D* : & il faut mener de *A* une ligne droite, qui touche iceluy cercle donné. Ayant mené la ligne *AD*, soit coupée icelle en deux également en *E* par la 10. p. 1. & de *E* comme centre, & de l'intervale *EA* soit décrit un cercle *ACD* qui coupe le donné en *C*, auquel point *C* soit menée la ligne droite *AC*, & icelle touchera le cercle donné en *C*. Car étant tirée la ligne droite *CD*, l'angle *ACD* au domy cercle sera droit par ladite 11. pr. 3. & partant la ligne droite *AC*, touchera le cercle *BC* en *C* par le Cor. de la 16. p. 3. Et si du même point *A*, on vouloit encore tirer une autre ligne qui touche semblablement ledit cercle *BC*, il n'y auroit qu'à décrire le cercle entier *ACD*, & il couperoit encore la circonférence *BC* à un'autre point au dessous de *AD*, &c.

THEOR. 28. PROP. XXXII.)

Si quelque ligne droite touche le cercle, & de l'atouchement on mene une autre ligne droite coupant le cercle, les angles qu'elle fait à la touchante sont égaux à ceux qui sont aux segmens alternes du cercle.

Soit la ligne droite *AB* touchant le cercle *CDE*, au point *C*, & d'iceluy point soit menée la ligne droite *CE*, coupant le cercle en deux portions *CDE*, *CFE*. Je dis que l'angle *ECB*, est égal à tout angle qui peut être fait en la portion alterne *CDE*, & que l'angle *ECA* est aussi égal à tout angle qui peut être fait en la portion alterne *CFE*.

Qu'il ne soit ainsi, apres avoir mené par le centre



le diametre CD, soient menées les lignes droites DE, EF, FC, Maintenant par la prop. precedente l'angle DEC dans le demy cercle est droit, & par la 31. p. 1. les deux autres D & ECD sont egaux à un droit, c'est à dire à DCB, lequel est droit par la 18. prop. de ce livre, desqueis si on oste l'angle commun ECD, le demeurant ECB sera egal au demeurant D. Pareillement par la 22. prop. la figure de quatre costez inscrite au cercle CFED, aura les angles oppolez F & D, egaux à deux droits : c'est à dire aux deux ECA, ECB, desquels si on oste choses egales, c'est à sçavoir les angles egaux D & ECB, les demeurans F & ECA seront egaux.

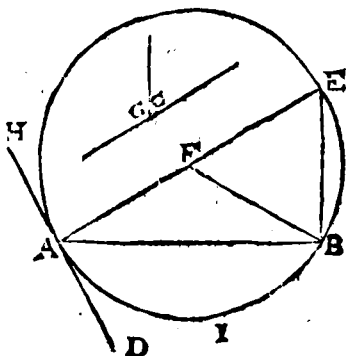
Que si la ligne coupant le cercle étoit le diametre d'iceluy, tous les angles qui se feroient tant en l'un qu'en l'autre demy cercle, seroient droits par la prop. prec. & par tant appert ce qui est proposé. Si donc quelque ligne droite touche le cercle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

PROBL. 5. PROP. XXXIII.

Dessus une ligne droite donnée, décrire une portion de cercle capable d'un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnée AB, & l'angle rectiligne C : il faut sur icelle ligne décrire une portion de cercle comprenant un angle egal à l'angle donné C.

Soit construit sur icelle ligne AB. & à l'extremité A, l'angle BAD egal à l'angle donné C par la 23. pt. 1. & au point A soit levée AE perpendiculaire à AD; puis sur la ligne AB & au point B, soit fait l'angle ABF egal à l'angle BAE par la 23. prop. 1. tirant la ligne BF jusques à ce qu'elle rencontre la perpendiculaire AE au point



F : donc par la 6. pr. 1. les costez FA , FB , seront égaux : Partant le cercle décrit du centre F & de l'intervalle FA , passera aussi par le point B : & apres avoir mené la ligne droite BE . Je dis que l'angle E , qui est en la portion AFB est égal à l'angle donné C . Car d'autant que la ligne droite AE passe par le centre F , & qu'à icelle AE , la ligne DA est perpendiculaire ; par le Corol. de la 16. prop. de ce livre le cercle touchera icelle DA en A . Parquoy par la preceden. prop. l'angle BAD , qui par la construction est égal à l'angle C , sera égal à l'angle E , décrit dans la portion alterne AEB , par consequent iceluy angle E sera égal à l'angle C . Nous avons donc décrit une portion de cercle sur la ligne donnée AB , capable d'un angle égal à un angle donné C .

Que si l'angle donné eût esté obtus, comme G , il eût falu construire l'angle BAH égal à iceluy, & chercher le centre F comme dessus, pour décrire le cercle $AEBI$, & par la prop. precedente la portion mineure AIB eust compris un angle égal à l'angle donné G .

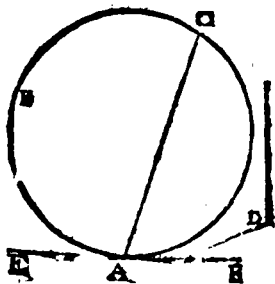
Que si l'angle donné eût esté droit, il n'eust falu que décrire un demy cercle sur la ligne donnée, attendu que tout angle fait au demy cercle est droit par la 31. pr. 3. Or nous avons donc construit sur la ligne donnée AB , un segment de cercle, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 6. PROP. XXXIV.

D'un cercle donné, ôter une portion capable d'un angle égal à un angle rectiligne donné.

Soit le cercle donné ABC ; duquel il faut ôter une portion capable d'un angle rectiligne égal à l'angle donné D .

Soit menée la ligne droite EF touchant le cercle en A : puis par la 23. prop. 1. soit fait sur icelle ligne, & au point A , l'angle rectiligne FAC égal au donné D , faisant que la ligne droite AC coupe le cercle en deux portions. Je dis que tout angle qui sera fait en la portion alterne ABC sera égal au donné D . Car il sera égal à l'angle FAC par la 32.



prop. de ce livre, lequel est égal à D par la construction. Nous avons donc du cercle donné ABC coupé une portion, &c. Ce qu'il falloit faire.

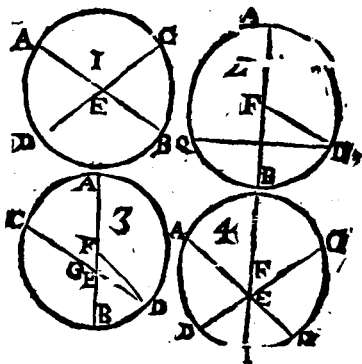
THEOR. 29. PROP. XXXV.

Si dans un cercle, deux lignes droites se coupent l'une l'autre; le rectangle contenu des deux parties de l'une, est égal au rectangle compris des deux parties de l'autre.

Soient deux lignes droites AB, CD dans le cercle ACBD s'entrecoupans en E. Je dis que le rectangle compris des deux parties AE & EB, est égal au rectangle contenu des deux parties CE & ED.

Or les lignes qui se coupent dans le cercle, ou elles passent toutes deux par le centre, ou bien l'une d'icelles seulement, ou ny l'une ny l'autre. Que si elles passeroient toutes deux par le centre comme en la premiere figure, les quatre parties seront égales; & par ainsi la proposition est evidente.

Que si la seule AB, passe par le centre F, & divise DC en deux également comme en la seconde figure, elle la divisera aussi à droits angles, par la 3. prop. de ce livre. Et apres avoir mené FD, il est évident par la 5. pr. 2. que le rectangle de AE, & EB avec le quarré de EF, sera égal au quarré de FB, ou FD, (car la ligne AB est coupée en deux également au point F, & en deux inégalement en E) & par la 47. prop. 1. le quarré de FD étant égal aux deux quarrés de FE & ED, en ôtant le



quarré commun de FE, le demeurant rectangle de AE & EB, se trouvera egal au quarré de ED, c'est à dire au rectangle de CE & ED, puis que CD est coupée en deux également en E.

Que si la ligne AB passant par le centre F (comme en la troisième figure) divise inegalement CD, ne passant point par le centre, il s'ensuivra la mesme chose. Car apres avoir mené la perpendiculaire FG, & la ligne droite FD : pour autant que AB est coupée en deux également en F, & en deux inegalement en E, le rectangle de AE & EB, avec le quarré de EF, sera egal au quarré de FB, ou de son egale FD par la 5. prop. 2. Mais le quarré de PE est egal aux deux de FG & GE par la 47. pr. 1. Pareillement le quarré de FD, est egal aux deux de FG & GD par la 47. prop. Donc aussi le rectangle de AE & EB, avec les deux quarrés de FG & GE, sera egal aux deux quarrés de FG & GD : & partant en ôtant le quarré commun de FG le demeurant quarré de GD, sera egal au rectangle de AE & EB, & quarré de GE. Mais le mesme quarré de GD est aussi egal au rectangle de CE & ED, avec le quarré de GE ; par la 5. prop. 2. puis que CD est coupée en deux également en G, par la perpendiculaire FG & en deux inegalement en E. Parquoy iceluy rectangle de CE & ED avec le quarré de GE sera egal au rectangle de AE & EB avec le quarré de GE : en ôtant donc le quarré commun de GE, le rectangle de AE, EB, se trouvera egal au rectangle de CE & ED.

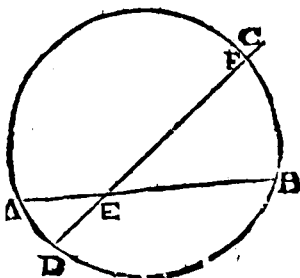
Que si ny l'une ny l'autre des deux lignes ne passe par le centre F, (comme en la 4. figure) il s'ensuivra le mesme : car si on mene le diametre HI, passant par le point commun E de la 4. figure, le rectangle de IE & EH, sera egal au rectangle de CE & ED, comme cy-dessus a esté dit ; & par mesme raison il sera aussi egal au rectangle de AE & EB, & par la 1. comm. sent. les deux rectangles de AE, EB ; Item de CE, ED, seront egaux. Si donc dans un cercle, deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E.

Nous convertirons cette 35. prop. ainsi.

Si deux lignes droites s'entrecoupent, tellement que le rectangle compris des segmens de l'une soit egal au rectangle contenu sous les segmens de l'autre, le cercle décrit par trois des points extrêmes d'icelles lignes quels qu'ils soient, passera aussi par le 4 point.

Que les lignes droites AB , CD s'entrecoupent en E , & que le rectangle compris sous AE , EB soit égal au rectangle compris des parties CE , ED . Je dis que les quatre points A , D , B , C , tombent en la circonférence d'un cercle, c'est à dire qu'estant décrit un cercle passant par les trois points A , D , B , il passera nécessairement par l'autre point C . Car s'il n'y passe, il passera, ou au dela de C , ou au



dela, comme par le point F . D'autant que par la 35. proposition 3. le rectangle compris sous FE , ED est égal au rectangle compris de AE , EB , & que le rectangle contenu sous CE , ED est aussi posé égal au même rectangle de AE , EB ; les rectangles compris sous CE , ED , & sous FE , ED , seront égaux, la partie au tout: ce qui est absurde. Par même raison le cercle ne passera pas au dela du point C . Donc le cercle décrit par les trois points A , D , B , passera par le quatrième point C . Ce qu'il falloit démontrer.

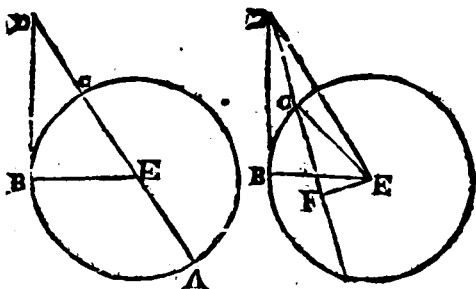
THEOR. 30. PROP. XXXVI.

Si dehors le cercle on prend quelque point, & d'iceluy vers le cercle tombent deux lignes droites, l'une desquelles coupent le cercle, & l'autre le touche; le rectangle contenu de toute la coupante, & de sa partie prise dehors entre le point & la circonférence convexe, est égal au carré de la touchante.

Hors le cercle ABC soit pris le point D , duquel soit menée la ligne DA , coupant le cercle en C , & la ligne DB touchant iceluy cercle en B . Je dis que le rectangle de la toute AD & de la partie CD , prise entre le point donné & le cercle, est égal au carré de la touchante BD .

Premierement

Premierement que la ligne AD pallée par le centre E, com-



me en la premiere figure, & d'iceluy centre E au point d'at-
touchement B, soit menée la ligne EB, laquelle par la 18. pr.
de ce livre sera perpendiculaire à icelle touchante BD: & pour
autant que la ligne AC est coupée en deux également au point
E, & à icelle est ajoutée directement CD, le rectangle de la
totale AD, & de la partie CD avec le quarré de CE; ou BE
son egale, est egal au quarré de ED par la 6. pr. 1. ou aux deux
de DB & BE par la 47. pr. 1. Que si on ôte le quarré commun
de BE, le demeurant quarré de BD, sera egal au demeurant
rectangle de AD & CD, par la 1. com. sent.

Que si la ligne AD ne passe par le centre du cercle proposé,
comme en la seconde figure, il faudra demontrer en cette sor-
te: du centre E soient menées les lignes EB, EC, ED, & la
perpendiculaire EF, laquelle coupera AC en deux également
par la 3. prop. de ce livre. Et par la 6. pr. 1. comme cy-dessus,
le rectangle de AD & CD, avec le quarré de CF, sera egal au
quarré de DF, auxquelles choses egales si on ajoute le quarré
commun de EF, le rectangle de AD & DC, avec les deux
quarrez de CF & FE, ou le seul de CE par la 47. pr. 2. sera
egal aux deux quarrez de DF & FE, ou au seul de DE par la
47. pr. 1. ou aux deux de DB & BE par la même 47. pr. 1. Que
si on oste les quarrez egaux de CE & BE, les demeurans quarré
de DB, & le rectangle de AD & CD, seront egaux. Parquoy
si hors le cercle on prend quelque point, &c. Ce qu'il falloit
demontrer.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste, que si d'un point pris hors le cercle, sont tirées plusieurs lignes droites, coupant le cercle; les rectangles compris sous chacune d'icelles & sa partie extérieure, seront égaux entr'eux: pource que chacun de ces rectangles-là, sera égal au carré de la ligne touchante.

Appert aussi que deux lignes droites tirées d'un même point, & touchant le cercle, sont égales entr'elles: puis que le carré de chacune d'icelles sera égal au rectangle de la ligne tirée du même point, & coupant le cercle, & de la partie extérieure d'icelle.

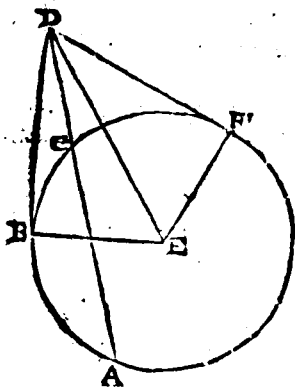
Est aussi évident que d'un même point pris hors le cercle, peuvent être seulement tirées deux lignes droites qui touchent le cercle: Car il faudroit qu'elles fussent toutes égales entr'elles: & partant du point D pourroient être menées plus de deux lignes droites égales de part & d'autre de DE, contre la 8. prop. de ce troisième livre.

THEOR. 31. PROP. XXXVII.

Si dehors le cercle on prend quelque point, & d'iceluy point tombent deux lignes droites au cercle, l'une desquelles coupe le cercle, & l'autre l'atteint: Si le rectangle compris de toute la coupante, & de la partie prise entre le point & la circonférence convexe, est égal au carré de celle qui atteint; celle qui atteint touchera le cercle.

Hors le cercle ABC soit pris le point D, & d'iceluy soit menée la ligne droite DA qui coupe le cercle au point C, & la ligne DB qui atteint le cercle au point B: & soit le rectangle de la toute AD & de la partie CD, égal au carré de DB. Je dis que DB touche le cercle en B.

Car du point D, étant menée la ligne DF touchant le cercle au point F, & du centre E les lignes EB, ED, EF, par la proposition précédente, le carré de DF sera égal au rectangle de AD & CD. Mais par l'hypothèse le carré de DB, est aussi égal à iceluy rectangle : & partant les carrés, & les lignes DF & BD, seront égales. Item EF & EB, sont aussi égales par la def. du cercle, & ED à soy-même : ainsi les deux triangles DBE & DFE, ayans les trois côtes égaux aux trois côtes, chacun au sien, les angles B & F, seront égaux par la 8. p. 1. & F étant droit par la 18. prop. de ce livre, aussi B sera droit ; & par le Cor. de la 16. prop. 3. la ligne DB touchera le cercle. Parquoy si dehors le cercle on prend quelque point, &c. Ce qu'il falloit prouver.



Fin du troisième Element.



ELEMENT

QUATRIEME.

DEFINITIONS.



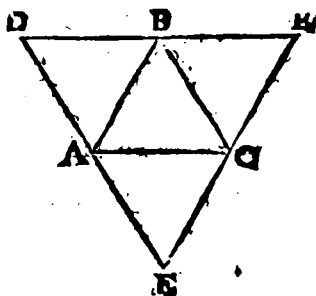
NE figure rectiligne se dit être inscrite en une figure rectiligne, lors qu'un chacun des angles de la figure inscrite, touche un chacun costé de la figure en laquelle elle est inscrite.

2. Semblablement aussi une figure se dit être circonscrite à une figure, quand un chacun côté de la circonscrite touche un chacun angle de l'inscrite.

Ainsi le triangle ABC, duquel chaque angle touche un chacun costé du triangle DEF est dit estre inscrit en iceluy triangle DEF. Et au contraire, à cause que chaque costé d'iceluy triangle DEF touche chaque angle du triangle ABC, il est dit estre circonscrit à iceluy triangle ABC.

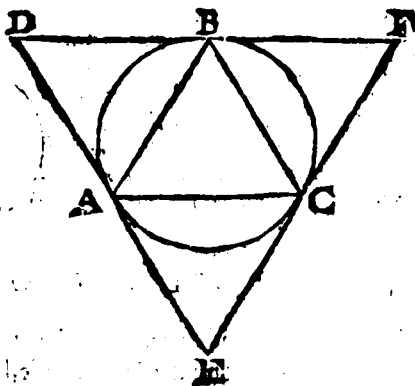
Il faut entendre le mesme des inscriptions & circonscptions des autres figures rectilignes; & j'ajouté qu'il

Les soient proprement dites estre inscrites, ou circonscrites quand le nombre des costez de l'inscrite est egal au nombre des costez de la circonscrite, & le nombre des angles aussi egal : si est-ce toutes-foies qu'il n'est pas du tout necessaire, veu que plusieurs Geometres ont enseigné à inscrire un quarté, un pentagone, &c. dedans un triangle, &c.



3. Mais une figure rectiligne se dit être inscrite au cercle, quand un chacun angle de la figure inscrite, touche la circonference du cercle.
4. Et une figure rectiligne se dit être circonscrite au cercle, quand un chacun des côtez de la figure circonscrite, touche la circonference du cercle.

Ainsi le triangle ABC sera dit être inscrit au cercle ABC, à cause que chaque angle d'iceluy triangle touche la circonference dudit cercle ABC. Mais le triangle DEF sera dit être circonscrit au cercle



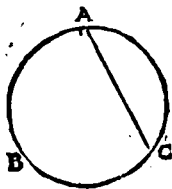
ABC, pource que chaque costé d'iceluy triangle DEF touche la circonference dudit cercle es points *A*, *B*, *C*.

5. Semblablement aussi le cercle se dit être inscrit en une figure rectiligne, quand la circonference du cercle touche un chacun costé de la figure en laquelle il est inscrit.
6. Mais le cercle se dit être circonscrit à une figure, quand la circonference du cercle touche un chacun des angles d'icelle figure à l'entour de laquelle il est décrit.

Comme par exemple, en la figure prec. le cercle ABC est dit estre inscrit au triangle DEF, à cause qu'il touche chaque costé d'iceluy triangle es points A, B, C: mais le même cercle ABC est dit estre circonscrit au triangle ABC, pource qu'il touche chaque angle d'iceluy triangle.

7. Une ligne droite se dit être accommodée au cercle, quand les extremitéz d'icelle sont en la circonference du cercle.

Ainsi la ligne droite AC sera dite estre accommodée au cercle ABC, à cause que les extremitéz d'icelle ligne AC sont en la circonference dudit cercle.



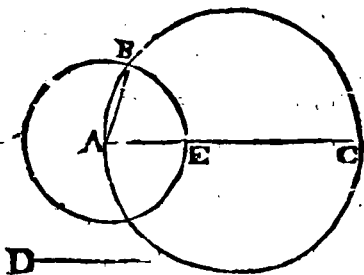
PROBL. I. PROP. I.

Au cercle donné, accommoder une ligne droite égale à une ligne droite donnée, laquelle ne soit pas plus grande que le diametre du cercle.

Soit le cercle donné ABC , dans lequel il faut accommoder une ligne droite égale à la ligne droite donnée D , qui n'est pas plus grande que le diamètre d'iceluy cercle.

Soit mené le diamètre AC , & si la ligne donnée est égale à iceluy diamètre, on

aura accommodé au cercle ABC la ligne AC égale à la donnée D . Mais si D est moindre que le diamètre AC , d'iceluy soit retranchée la partie AE égale à ladite ligne D . En apres du centre A , & de l'intervale AE , soit décrit le cercle BE



coupant le cercle donné au point B , & soit menée la ligne droite AB : icelle sera accommodée au cercle, & égale à D .

Car les extremités d'icelle AB sont en la circonference du cercle ABC étant menée de l'extremité du diamètre A au point de l'interfection B . Mais par la def. du cercle les lignes droites AB & AE sont égales, & par la construction, icelle AE est égale à D : donc par la 1. com. sent. AB & D seront égales entr'elles. Nous avons donc accommodé au cercle donné une ligne droite, &c. Ce qu'il falloit faire.

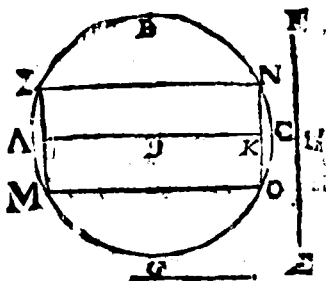
S C H O L I E

Commandin adjointe en cet endroit le probl. suivant.

En un cercle donné accommoder une ligne droite égale à une ligne droite donnée, qui ne soit pas plus grande que le diamètre du cercle, & parallele à une autre ligne droite donnée.

Soit le cercle donné ABC , duquel le centre est D , auquel il faut accommoder une ligne droite égale à une donnée EF , qui n'est pas plus grande que le diamètre du cercle, & laquelle soit parallele à la ligne droite donnée G . Par le centre D soit tiré le diamètre ADC parallele à la ligne donnée G . Que si EF est égale au diamètre AC , sera fait ce qui estoit requis; Mais si elle n'est égale à

iceluy diamètre, soit icelle coupée en deux également au point H, & soit prise DI égale à EH, & DK égale à HF, afin que la souce IK soit égale à la souce EF : puis par les points I, K, soient tirées à angles droits LM, NO, & soit joint MO : Icelle MO accommodée au cercle sera égale à EF, & parallèle à G. Car puis que LM, NO



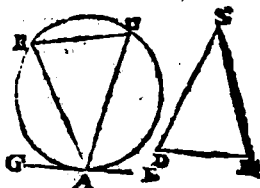
sont également distantes du centre D, elles seront égales entr'elles par la 14. pr. 3. & par la 3. prop. 3. elles seront coupées en deux également en I & K, étant coupée à angles droits par le diamètre AC ; & partant IM, KO sont égales entr'elles ; & pource qu'elles sont aussi parallèles par la 28. pr. 1. semblablement IK, MO seront égales & parallèles par la 33. pr. 1. Parquoy venant que IK est égale à EF & parallèle à G, aussi MO sera égale à icelle EF, & parallèle à G par la 30. pr. 1. Par même raison, si on tire LN, elle sera égale à EF, & parallèle à G. Donc au cercle ABC, est accommodée la ligne droite MO, ou LN, égale à EF & parallèle à G. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 2. PROP. II.

Dans un cercle donné, inscrire un triangle equiangle à un triangle donné.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inscrire un triangle equiangle au donné DSF.

Soit menée la ligne droite GH, qui touche le cercle au point A, auquel point soient faits les deux angles GAB égal à l'angle D, & HAC égal à l'angle F, par la 23. pr. 1. tirant les lignes AB, AC, jusques à ce qu'elles rencontrent la circonférence en B & C : puis soit menée BC. Je dis



que le triangle inscrit ABC est equiangle au donné DSF .

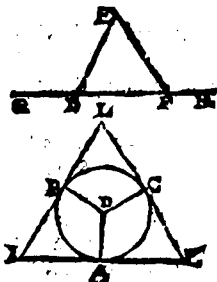
Car puis que la ligne GH touche le cercle, & la ligne AB le coupe en deux portions, l'angle C en la portion BCA sera egal à l'angle de l'atouchement GAB , & par consequent à l'angle D son egal par la 32. pr. 3. & par la même raison, la ligne AC coupant le cercle, l'angle B sera aussi egal à l'angle F , & par la 32. pr. 1. le troisiéme angle A sera aussi egal à l'angle S ; & par consequent les triangles DSF , BAC seront equiangles. Au cercle donné nous avons donc décrit un triangle equiangle à un triangle donné. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 3. PROP. III.

A l'entour d'un cercle donné, décrire un triangle equiangle à un triangle donné.

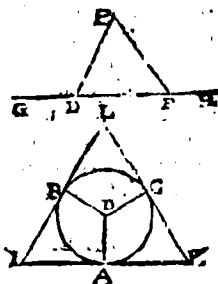
Soit le cercle donné ABC , à l'entour duquel il faut décrire un triangle equiangle au triangle donné DEF .

Soit prolongé le costé DE de part & d'autre jusques en G & H , & du centre D soit menée comme on voudra la ligne DA , sur laquelle & au point D , soient construits les deux angles ADB egal à EDG , & ADC egal à l'angle HFE par la 23. pr. 1. & aux trois lignes DA , DB , DC , soient menées les trois lignes perpendiculaires IK , IL , KL , lesquelles toucheront le cercle es points A , B , C , par le Corol. de la 16. pr. 3. & icelles se rencontrans aux trois points I , K , L , feront le triangle IKL , lequel ie dis estre le triangle demandé.



Car il apert déjà qu'il est circonscrit au cercle; puis que tous les costez d'iceluy le touchent es points A , B , C . Et d'autant que toute figure de quatre costez à les quatre angles egaux à quatre angles droits (comme nous avons démontré à la 32. pr. 1.) le trapeze $ADBI$ aura les quatre angles egaux à quatre

droits. Mais les deux A & B estans droitz par la construction, les deux autres D & I , seront egaux à deux droitz; c'est à dire egaux aux deux GDE & FDE , qui sont egaux à deux angles droitz par la 13. proposition. 1. & par la construction ADB est egal à GDE : donc l'angle I sera egal à l'angle EDF . Par mesme discours l'angle K se trouvera egal à l'angle DEF . Et par la 32. pr. 1. le troisième L sera egal au troisième E : ainsi le triangle circonscrit IKL sera equiangle au triangle donné DEF : Parquoy nous avons fait ce qui estoit requis.

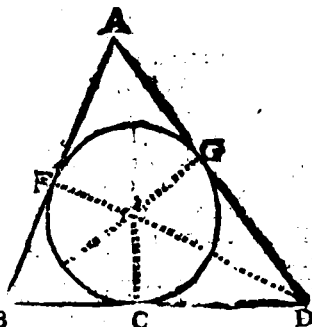


PROBL. 4. PROP. IV.

Dans un triangle donné, décrire un cercle.

Soit le triangle donné, ABC , dans lequel il faut décrire un cercle.

Par la 9. prop. 1. les deux angles B & C soient coupez en deux également par les deux lignes BD & CD , se rencontrans au point D : Item d'iceluy point de rencontre D , soient menées les trois perpendiculaires DE , DF , DG , par la 12. pr. 1. & du centre D , & intervalle DE soit décrit le cercle EFG . Je dis qu'iceluy cercle est inscrit au triangle donné ABC .



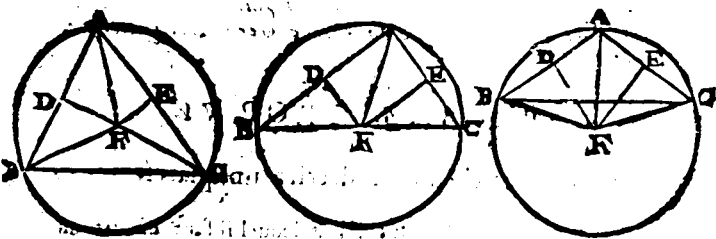
Car d'autant que l'angle DEB est droit, il sera egal à l'angle DFB, qui est pareillemēt droit, & le total B étant coupé en deux également, les deux DEB & DBE, seront egaux aux deux DFB & FBD, & le costé DB estant cōmun, le costé FD sera egal au costé DE par la 26. pr. 1. Par mesme discours DG se prouvera egale à DE, & par la 1. cor. sent. les trois lignes DE, DF, DG, seront egales entr'elles : ainsi le cercle EFG décrit de l'intervale DE, le sera aussi de l'intervale des deux autres : & partant il passera par les points E, F, G, & en iceux touchera les trois costez du triangle par le Corol. de la 16. pr. 3. pource qu'à iceux costez sont perpendiculaires les demy diametres DE, DF, DG. Donc par la 5. def. de ce livre, le cercle EFG sera inscrit au triangle donné : Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 5. PROP. V.

A l'entour du triangle donné décrire un cercle.

Soit le triangle donné ABC, à l'entour duquel il faut décrire un cercle.

Soient coupez en deux également les deux costez AB & AC aux points D & E par la 10. pr. 1. & par la 11 pr. 1. d'iceux points D & E, soient levés les perpendiculaires DF, EF, se rencontrans au point F, lequel sera ou dans le triangle, ou au costé BC, ou hors le triangle ; & apres avoir mené les trois lignes



FA, FB, FC, les deux triangles ADF, BDF, auront les côtez AD, BD egaux, & DF commun, & les deux angles au point D egaux pour estre droits ; donc les bases AF, BF, seront egales par la 4. prop. 1. Par mesme discours AF, CF, seront aussi ega-

les : & par la 1. con. sent. les trois lignes FA , FB , FC , seront égales entr'elles : & partant le cercle décrit de F , & de l'intervalle FA , passera aussi par les points B & C . Nous avons donc décrit un cercle à l'entour du triangle donné ABC ; Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste, que si le centre tombe dans le triangle, les trois angles sont aigus : car ils sont tous en une grande portion de cercle : mais s'il tombe en l'un des costez, l'angle opposé à iceluy sera droit, attendu qu'il sera au demy cercle : si finalement il tombe hors le triangle, l'angle opposé sera obtus, car il sera en une moindre portion de cercle.

Et au contraire, il est évident que si le triangle est oxigone, le centre tombera dedans iceluy : mais s'il est rectangle, il tombera au costé opposé à l'angle droit : & finalement s'il est amblygone, le centre tombera dehors.

SCHOLIE.

On peut aussi colliger de ce Problème la manière de décrire un cercle par trois points donnez, lesquels ne soient en une ligne droite : car ayant joint iceux points par lignes droites, on aura un triangle, à l'entour duquel il faudra décrire un cercle, comme il est enseigné en ce Prob. Ceci se pratique aussi plus facilement, comme nous avons enseigné en nostre Geometrie pratique, Probl. 21.

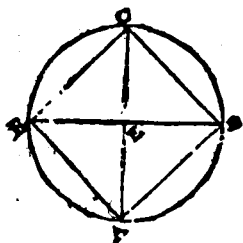
PROBL. 6. PROP. VI.

Dans un cercle donné, décrire un quarré.

Soit le cercle donné ABC , dans lequel il faut décrire un quarré.

Soient menées les deux diamètres AC & BD se coupans au centre E en angles droits, & soient menées les quatre lignes droites AB , BC , DC , & DA . Je dis que le quadrilatere $ABCD$ est un quarré inscrit au cercle donné.

Car d'autant que les quatre angles au point E sont droits, & égaux par la construction, les 4. arcs auxquels ils insistent seront égaux par la 16. pr. 3. & partant les lignes droites qui soutiennent iceux arcs seront aussi égales par la 29. prop. 3. donc tous les costez du quadrilatere ABCD seront égaux entr'eux. Mais par la 31. prop. 3. les angles d'iceluy quadrilatere sont droits, chacun d'iceux étant au demy cercle: donc le quadrilatere ABCD est un quarré inscrit au cercle proposé. Ce qu'il falloit faire.

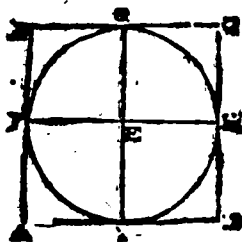


PROBL. 7. PROP. VII.

A l'entour d'un cercle donné décrire un quarré.

Soit le cercle donné F G S I à l'entour duquel il faut décrire un quarré.

Soient menez les deux diametres FS & GI le coupans à angles droits au centre E, & par la 31. pr. 1. des points G & I, soient menées les deux lignes BC, AD paralleles au diametre FS: Item par les points F & S soient aussi menées les deux lignes AB, DC paralleles à GI, & icelles 4. lignes paralleles se rencontrans aux points A, B, C, D, seront le quadrilatere ABCD, lequel ie dis estre le quarré demandé.



Car en premier lieu, il est evident par la construction qu'il est parallelogramme, & par la 34. prop. 1. les quatre costez seront égaux, chacun d'iceux étant égal à l'un des deux diametres FS, GI, qui sont égaux entr'eux. Pareillement par la mesme trente-quatre proposition 1. les quatre angles

A, B, C, D, sont égaux aux quatre qui sont au point E, chacun à son opposé, d'autant que ce sont parallelogrammes. Mais chacun d'iceux angles du point E étant droit, aussi chacun des quatre A, B, C, D, sera droit; & par conséquent le parallelogramme ABCD, aura les quatre costez égaux, & les quatre angles droits, & partant il sera quarré, les costez duquel touchent le cercle es points, F, G, S, I, par le Corol. de la 16. prop. 3. Parquoy nous avons décrit un quarré à l'entour d'un cercle donné. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 8. PROP. VIII.

Dans un quarré donné, décrire un cercle.

Soit le quarré donné ABCD, (en la fig. ptec.) dans lequel il faut décrire un cercle.

Soient coupez en deux également les quatre costez du quarré aux points F, G, S, I; & après avoir mené les deux lignes FS & GI s'entrecoupans au point E, d'iceluy point E, & de l'intervale EF, soit décrit un cercle FG SI, lequel sera le demandé.

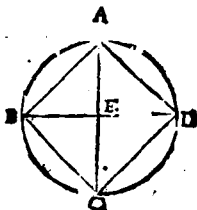
Car d'autant que AD, BC sont égales & paralleles, leurs moitez AI, BG seront aussi égales & paralleles, & par la 33. pr. 1. AB sera égale & parallele à IG. Semblablement CD sera égale & parallele à la mesme IG: & par mesmes raisons on démontrera que AD, BC sont égales & paralleles à FS. Donc le quarré donné sera aussi divisé en quatre parallelogrammes, lesquels par la 34. prop. 1. auront les costez opposez égaux: ainsi AF & IE seront égaux; Item FE & AI; FB & EG; ID & ES; mais toutes icelles moitez des costez du quarré sont égales entr'elles; parrant EF, EG, ES, EI, seront aussi égales entr'elles. Parquoy le cercle décrit du point E, & de l'intervale de l'une d'icelles, comme EF, passera aussi par les points G, S, I, & touchera le quarré aux mesmes points F, G, S, I, par le Corol. de la 16. prop. 3. pour ce que les angles à iceux points sont droits. Nous avons donc décrit un cercle dans le quarré donné ABCD: Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 9. PROP. IX.

A l'entour d'un quarré donné, décrire un cercle.

Soit le quarré donné $ABCD$, à l'entour duquel il faut décrire un cercle.

Soient menées les deux diagonales AC & BD , s'entrecoupans au point E : puis du centre E , & de l'intervale EA , soit décrit le cercle $ADCB$. Je dis qu'il sera le demandé, c'est à dire qu'il passera par les quatre angles du quarré donné $ABCD$.



Car le costé AB étant égal au costé AD , le triangle BAD sera Ifoſcele : & par la 5. prop. 1. les angles ABD & ADB , ſur la baſe BD ſeront égaux, & chacun demy droit par la 32. prop. 1. eſtant l'angle BAD droit par la def. du quarré. Par meſme diſcours, nous démontreronſ que tous les autres angles des points A, B, C, D , ſeront auſſi demy droits : & partant égaux entr'eux : ainſi au triangle AED les deux angles EAD & EDA ſeront égaux, & par conſequent les lignes droites EA, ED , auſſi égales par la 6. prop. 1. & par meſme diſcours ED ſera égale à EC , & EC à EB ; comme auſſi EB à EA : & partant les quatre lignes droites EA, ED, EC & EB , ſeront égales entr'elles. Parquoy le cercle décrit du centre E , & de l'intervale de l'une d'icelles lignes paſſera par l'extremité des autres, qui ſont les angles du quarré donné $ABCD$. Nous avons donc décrit un cercle à l'entour d'un quarré donné : ce qu'il falloit faire.

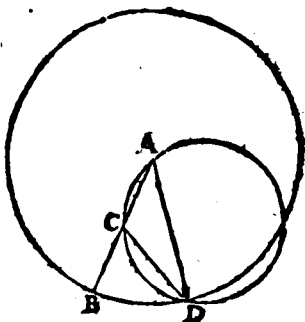
PROBL. 10. PROP. X.

Décrire un triangle Ifoſcele, ayant un chacun des angles de deſſus la baſe double de l'autre.

Soit pris quelconque ligne droite AB ; laquelle par la 11.

p. 2. soit coupée en C, en sorte que le rectangle compris de AB, BC, soit égal au carré de AC : puis du centre A, & de l'intervalle AB soit décrit un cercle, dans lequel soit accommodée la ligne droite BD égale à AC : & après soit menée la ligne AD. Je dis que ABD est un triangle Isoscele ayant chacun des angles ABD, ADB double de l'autre angle A ; ainsi qu'il étoit requis.

Car en premier lieu, il apert assez qu'iceluy triangle ABD est Isoscele, puis que les deux costez AB, AD, procedent du centre A à la circonference BD : & après avoir mené CD, à l'entour du triangle ACD, soit décrit le cercle ACD par la 5. p. 4. D'autant que par la construction le rectangle de AB & BC est égal au carré de CA, ou de son égale DB ; par la 17. pr. 1. la ligne DB touchera le cercle ACD en D, & par la 31. pr. 3. l'angle CDB



sera égal à l'angle A, qui est au segment alterne CAD : & si à iccux angles on ajoute le commun ADC, les tous seront égaux ; sçavoir le total ADB, au deux CAD & ADC ; mais l'angle extérieur DCB, est aussi égal aux deux opposez intérieurs CAD & ADC par la 32. pr. 1. partant il sera aussi égal à l'angle ADB, ou ABD, qui luy est égal par la 5. p. 1. puis que le triangle est Isoscele : & par la 6. p. 1. le triangle DCB sera aussi Isoscele, & le costé CD égal à DB : & partant aussi égal à CA ; & le triangle DCA estant Isoscele, il aura les deux angles sur la base AD égaux par la 5. prop. 1. & l'angle extérieur DCB (qui est égal à tous les deux) sera double du seul A ; aussi sera son égal B, & partant aussi son autre égal ADB. Nous avons donc construit le triangle Isoscele ABD, ayant chacun des angles de dessus la base BD double du troisième : Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

Pource que les trois angles du triangle ABD , sont égaux à deux droits, c'est à dire à cinq cinquièmes de deux droits : Il est évident que l'angle A est la cinquième partie de deux droits, & chacun des autres B & D , les deux cinquièmes parties : Item A estre les deux quins d'un droit; & chacun des deux B & D les quatre quins, puis que tous les trois sont égaux à deux droits, c'est à dire à dix quins d'un droit.

S C H O L I E.

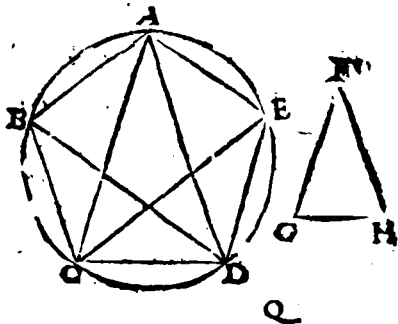
Or par quelle maniere on doit construire un triangle isoscele, ayant un chacun des angles de dessus la base, non seulement double de l'autre, comme fait icy Euclide, mais aussi selon quelque raison donnée, nous l'avons enseigné (après Pappus & Clavius) en nostre Geometrique pratique Prob. 37. & Scholie du 126.

P R O B L. II. P R O P. XI.

Dans un cercle donné, décrire un pentagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné $ABCDE$, dans lequel il faut inscrire le pentagone demandé.

Soit par la prec. prop. construit le triangle FGH isoscele, qui ait chacun des angles G & H double de l'angle F : puis au cercle donné soit inscrit le triangle ACD equiangle au triangle FGH



par la 2. p. 4. Et ayant coupé les angles ACD, ADC en deux également par les lignes droites CE & DB par la 9. p. 1. soient menées les lignes droites CB, BA, AE, ED. Je dis que le pentagone ABCDE inscrit au cercle donné, est equiangle & equilateral.

Car puisque le triangle FGH à chacun des deux angles sur la base GH, double du troisième F; le triangle ACD, qui est equiangle à iceluy FGH, aura aussi chacun des angles de dessus la base CD double du troisième A, lesquels étans coupez en deux également par les lignes droites CE & DB, les cinq angles ADB, BDC, CAD, DCE, ACE seront egaux, & par la 26. prop. 3. ils auront circonferences egales pour bases: mais les egales circonferences comprennent lignes droites egales par la 29. pr. 3. donc tous les cinq costez AB, BC, CD, DE & EA, étans egaux, le pentagone sera equilateral.

Aussi est-il manifeste par la 27. prop. 3. qu'il est equiangle, d'autant que chaque angle d'iceluy est souvenu de circonferences egales, sçavoir de trois arcs comprenans trois costez du pentagone, vû que nous avons prouvé que tous iceux arcs sont egaux. Nous avons donc décrit dans un cercle donné un pentagone equiangle, & equilateral: Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cecy, il s'ensuit, que l'angle du pentagone equilateral & equiangle, comprend les trois cinquièmes parties de deux droits, ou bien les 6 quints d'un droit. Car puis que les trois angles BAC, CAD, DAE sont egaux par la 27. prop. 3. & CAD est le quint de deux droits, ou les deux quints d'un droit; le total BAE, qui est composé de ces trois, sera les trois quints de deux angles droits, ou bien les six quints d'un droit.

SCHOLIE.

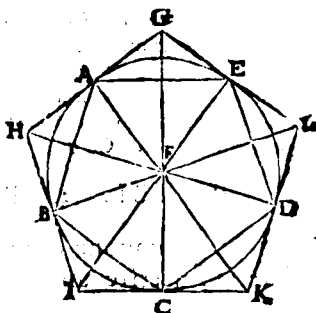
Clavius enseigne en ce lieu-cy deux manieres pour décrire un pentagone equilateral, & equiangle sur une ligne droite donnée & terminée, la plus facile desquelles nous avons enseignée en nostre Geometrie pratique Prob. 38. c'est pourquoy nous n'en ferons icy repetition.

PROBL. 11. PROP. XII.

A l'entour d'un cercle donné, décrire un pentagone, equiangle & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDE, à l'entour duquel il faut décrire un pentagone equilateral & equiangle.

Dans iceluy cercle soit décrit le pentagone ABCDE par la prec. prop. & apres avoir mené du centre F les 5 lignes FA, FB, FC, FD, FE, soient menées sur icelles les 5 lignes perpendiculaires GH, HI, IK, KL, LG par la 11. prop. 1. se rencontraux aux cinq points G, H, I, K, L: (elles se doivent rencontrer; car puis que les angles GAE, CEA sont moindres que deux droits, éans parties des angles droits GAF, GFE par la 11. cor. sent. les lignes droites AG, EG se rencontreront de la part de G, & ainsi des autres.) Je dis que GHIKL est le pentagone demandé.



Car il est évidemment circonscrit au cercle donné, puis que par le Coroll. de la 16. p. 3. les lignes droites GH, HI, IK, KL, LG touchent ledit cercle és points A, B, C, D, E: En apres si on mène les cinq lignes FG, FH, FI, FK, FL; d'autant que les angles FAG, FEG sont droits par la 47. prop. 1. le quarré de FG sera egal aux deux quarréz de FA, AG; il sera aussi egal aux deux de FE, & EG, & par consequent les deux quarréz de FA, AG, seront égaux aux deux de FE, EG. Mais les quarréz de FA, FE sont égaux (éans décrits sur lignes égales.) Donc ceux de AG, & EG seront aussi égaux, & les lignes AG & EG égales: Parquoy les deux costez AE, FG du triangle AGF sont égaux aux deux costez EF, EG du triangle EGF, chacun au sien, & la base AG égale à la base GE & par la 8. prop. 1. les angles AFG, EFG seront égaux:

& partant AFE sera double de AFG. Par mesme discours AFB, qui est egal à AFE par la 27. p. 3. (car ils ont egales circonferences pour bases) sera aussi double de AFH, & par consequent AFG & AFH seront egaux : Donc les triangles AGF, AHF ont deux angles egaux à deux angles, chacun au sien, & le costé AF commun : & par la 26. prop. 1. AG sera egale à AH. Par mesme discours GE & EL se trouveront egales : mais AG & EG estans egales, aussi leurs doubles GH & GL seront egales. Par mesme discours on prouvera tous les autres costez egaux, & partant le pentagone GHIKL sera equilateral.

Qu'il soit aussi equiangle, il est evident ? car nous avons montré que les angles des triangles AGF, EGF sont egaux, sçavoir est, les angles AGF, EGF : Item AGF, AHF : & qu'on en pouvoit dire autant des autres : donc les deux angles sous le point G, seront egaux aux deux angles sous le point H, & ainsi des autres : partant le pentagone sera equiangle & equilateral. Nous avons donc décrit à l'entour d'un cercle donné un pentagone, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 13. PROP. XIII.

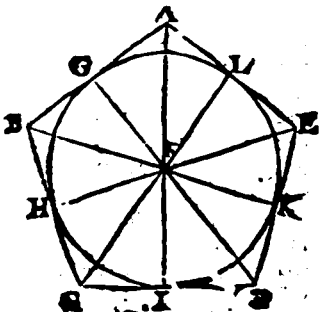
Dans un pentagone donné equiangle, & equilateral, décrire un cercle.

Soit donné un pentagone equiangle, & equilateral ABCDE, dans lequel il faut inscrire un cercle.

Par la 9. prop. 1. soient coupez en deux également deux des angles d'iceluy A & B, par les lignes AF & BF se rencontrans au point F, & par la 12. pr. 1. d'iceluy point F soient menées FG, FI, FH, FK, FL, perpendiculaires sur les costez du pentagone, puis du centre F, & intervalle FG soit décrit le cercle GHIKL.

Je dis qu'il est inscrit au pentagone donné.

Car ayant mené les li-



gues droites FC , FD & FE : d'autant que les deux costez AB , BF , du triangle ABF , sont egaux aux deux costez CB , BF du triangle BFC , chacun au lieu, & les angles ABF , CBF , contenus d'iceux costez, egaux par la construction; les bases AF , CF seront egales, & les angles BAF , BCF aussi egaux par la 4. p. 1. Mais puis que les angles du pentagone A & C sont posez egaux, & que par la construction l'angle BAF est moitié de BAE ; l'angle BCF sera aussi moitié de BCD , & consequemment iceluy BCD , est divisé en deux également par la ligne FC . Par même raison nous montrerons que les deux autres angles du pentagone D & E , sont divisés en deux également par les lignes FD & FE . Maintenant puisque par la construction les deux angles sous le point A sont egaux, ayant esté le total coupé en deux également, & que l'angle droit G est egal à l'angle droit L , & le costé FA commun aux deux triangles AGF , ALF , par la 26. prop. 1. les deux autres costez seront egaux, sçavoir AG à AL , & FG à FL : par mesme discours FH , FI , FK , se trouveront egales : & partant le cercle décrit de F & intervalle FG , passe par les points G , H , I , K , L , esquels il touche les costez du pentagone proposé par le Cor. de la 16. p. 3. Le cercle $GHKL$ est donc inscrit au pentagone donné. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 14. PROP. XIV.

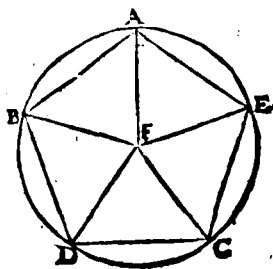
A l'entour d'un pentagone donné, lequel est equiangle, & equilateral, décrire un cercle.

Soit le pentagone equiangle, & equilateral donné $ABCDE$, à l'entour duquel il faut décrire un cercle.

Soient coupez les deux angles A & B en deux également par la 9. p. 1. avec les lignes droites AF & BF se rencontrans au point F , & d'iceluy point F ; & intervalle de l'une d'icelles deux lignes, soit décrit le cercle $ABCDE$. Je dis qu'il sera circonscrit au pentagone donné.

Car ayant mené les trois lignes FC , FD , FE , nous démontrerons comme au precedent Probl. qu'elles couperont en deux également les angles C , D , E . En apres, puis que le pentagone est equiangle, & chaque angle d'iceluy est coupé en deux également, au triangle AFB les deux angles sur la base BA se-

ront égaux, & par la 6. prop. 1. les deux costez AF & BF, seront aussi égaux : par le même discours BF & FC seront aussi égaux, & ainsi des autres coupantes ; & par la 1. com. sent. il est évident qu'icelles 5. lignes FA, FB, FC, FD, FE seront égales entr'elles, & partant que le cercle décrit de l'intervalle de l'une d'icelles, passera par les extremitez des autres, qui sont aussi les cinq angles du pentagone donné. Parquoy nous avons décrit un cercle à l'entour d'un pentagone equiangle, & equilateral donné. Ce qu'il falloit faire.



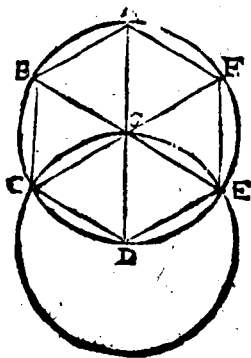
PROBL. 15. PROP. XV.

Dans un cercle donné, inscrire un hexagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDEF, dont le centre est G ; dans lequel cercle il faut inscrire un hexagone equiangle, & equilateral.

Soit mené le diametre AD, puis du centre D, & intervalle DG, soit décrit le cercle GCE, comptant le donné aux points C & E, desquels points soient menées les deux lignes CGF, EGB : finalement, soient menées les lignes droites AB, BC, CD, DE, EF, FA ; & on aura décrit au cercle donné l'hexagone ABCDEF, que je dis être equilateral, & equiangle.

Car il est évident (demontrant comme en la 1. p. 1.) que les deux triangles CDG, DEG construits sur la ligne DG sont equilateraux, & par le Cor. de



la 5. p. 1. chacun d'iceux sera aussi equiangle, & par la 32. p. 1. un chacun de leurs angles vaudra le tiers de deux angles droits : & puis que par la 13. p. 1. les deux angles CGE ; EGF sont egaux à deux droits, l'angle EGF vaudra aussi le tiers de deux angles droits : donc tous les angles du point G seront egaux entr'eux, valant chacun un tiers de deux angles droits ; puis que par la 15. p. 1. les opposez au sommet sont egaux : partant les six bases AB, BC, CD, DE, EF, FA, seront egales, & les angles sur icelles aussi egaux par la 4. p. 1. Donc l'hexagone ABCDEF sera equilateral : mais il est aussi equiangle. Car puis que tous les angles des six triangles sont egaux, les deux du point A seront egaux aux deux du point B, & ainsi des autres. Nous avons donc décrit dans un cercle donné un hexagone equiangle & equilateral : Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

Par cecy est manifeste que le costé de l'hexagone est egal au demy diametre du cercle ; car le costé de l'hexagone DC, est egal au semidiametre DG par la def. du cercle.

P R O B L. 16. P R O P. XVI.

Dans un cercle donné, décrire un quindecagone equiangle & equilateral.

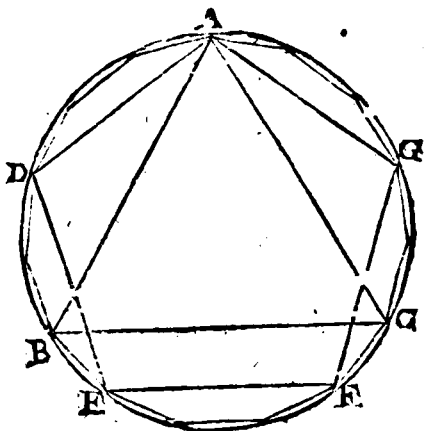
Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inscrire un quindecagone equiangle & equilateral.

Soit premierement décrit dans iceluy cercle le triangle equilateral ABC par la 2. p. de ce livre ; les trois costez érans egaux, la circonference sera divisée en trois également par les 26. ou 28. pr. 3. pareillement, soit en iceluy cercle inscrit le pentagone ADEFG par la 11. prop. de ce livre, ayant l'un des angles au point A. Je dis qu'ayant mené la ligne droite BE, ce sera le costé du quindecagone demandé.

Car, comme il a esté dit, l'arc ADB est le tiers de toute la circonference ; partant doit contenir cinq costez du quindecagone. Item la ligne droite AD, costé du pentagone, soustient l'arc AD, cinquième partie de la circonference ; par-

tant doit contenir trois costez du quindecagone : & conséquemment les deux arcs AD & DE contiendront six costez du quindecagone. Mais l'arc ADB en contient cinq : donc l'arc BE sera la quinzième partie de toute la circonference : & partant la ligne droite BE sera le costé du quindecagone, & si par la 1.

p. de ce livre on accommodé au cercle encorés 14 lignes droites égales à icelle BE, sera inscrit au cercle un quindecagone equilateral, & aussi equiangle par la 27. pr. 3. puis que tous ses angles sous-tendent arcs égaux, cha-



- cun d'iceux angles étant composé de 13 arcs égaux. Nous avons donc au cercle donné décrit un quindecagone, &c. Ce qu'il falloit faire.

Pareillement aussi, tout ainsi qu'au pentagone, si par les quinze points des divisions égales du cercle, nous tirons des lignes droites qui le touchent, se décrira un quindecagone equilateral & equiangle à l'entour dudit cercle : & davanrage nous décrirons & circonscriurons un cercle à un quindecagone equilateral & equiangle donné, suivant la même methode pratiquée au pentagone.

Fin du quatrième Element.



ELEMENT

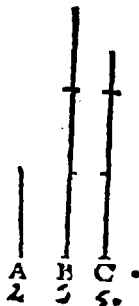
CINQUIÈME.

DEFINITIONS.



Artie est une grandeur tirée d'une autre plus grande, lors que la plus petite mesure la plus grande,

C'est à dire que lors qu'une grandeur en mesure une autre plus grande, elle est dite partie d'icelle : Comme *A* qui est contenu 3 fois en *B*, est dit partie d'iceluy. Or entre les *Mathematiciens* il y a deux sortes de partie : car il y en a une qui mesure son tout ; comme *A*, lequel repeté 3 fois constituë son tout *B* : & l'autre sorte ne me-



sûre pas son tout, mais prise ie ne sçay combien de fois excède iceluy, ou defaut au même, comme A. lequel étant pris 3 fois excède C, mais étant pris seulement 2 fois, il est excédé par le même C : Or la premiere est dite partie aliquote ; & l'autre, partie aliquante : de cette-là seulemēt parle icy Euclide, puis que cette-cy ne mesure son tout, & aussi ne l'appelle-il pas partie au 7. livre, mais parties.

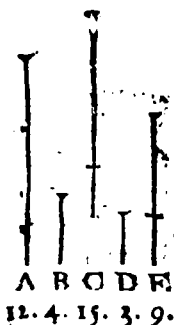
2. Multiplíce, est une grandeur plus grande qu'une autre plus petite, quand la plus grande est mesurée de la plus petite.

C'est à dire que si la grandeur A, est mesurée par B, moindre grandeur qu'icelle A, elle est dite multiplíce de B : ainsi aussi la grandeur C, qui est mesurée 5. fois par D, est dite multiplíce d'icelle D.

Or quand deux petites grandeurs en mesurent également deux autres plus grandes, c'est à dire, qu'une moindre est contenuë autant de fois en une plus grande, qu'une autre moindre en une autre plus grande, ces deux plus grandes là sont dites

equimultiplíces d'icelles moindres : comme les grandeurs A & E sont dites equimultiplíces de B & D, pour ce que tout ainsi que A contient trois fois B, ainsi aussi E contient trois fois D. Et le même se doit entendre, si plusieurs moindres grandeurs en mesurent également plusieurs grandes.

3. Raison, est une habitude de deux grandeurs de 'même genre, comparées l'une à l'autre selon la quantité.



C'est à dire que quand deux quantitez de même genre, comme deux nombres; deux lignes, deux superficies, deux solides, &c. sont comparez entr'eux selon la quantité, c'est à dire selon que l'une est plus grande que l'autre, ou moindre, ou egale, telle comparaison est apelée raison. & par quelqu'uns proportion; Parquoy on ne peut pas dire, qu'il y ait quelque raison d'une ligne à une superficie; ou d'un nombre à une ligne, puis que ny la ligne & la superficie, ny le nombre & la ligne, ne sont pas quantitez de même genre. Semblablement si on confere une ligne avec une ligne selon la qualité, c'est à dire, selon que l'une est blanche, & l'autre noire; ou bien que l'une est chaude, & l'autre froide, &c. encore que l'une & l'autre soient de même genre, cette comparaison n'est pas dite raison, pource qu'elle n'est pas faite selon la quantité.

Or jaçoit que la raison se trouve proprement es seules quantitez, si est-ce toutesfois que toutes autres choses, qui en quelque maniere prennent la nature de la quantité, cōme sont les temps, les sons, les voix, les lieux, les mouvemens, les pois, & les puissances, sont aussi dites avoir raison, si leur habitude est considérée selon la quantité, comme quand nous disons un temps être plus grand qu'un autre temps, ou moindre; ou deux temps être egaux, &c. telle habitude sera dite raison, pource qu'alors les temps sont considerez ainsi que certaines quantitez.

En toute raison cette quantité-là, qui est referée à une autre, est dite par Euclide, & autres Geometres, antecedant de la raison; & celle-là à laquelle elle est referée, est dite consequent d'icelle raison: Comme en la raison de A à B ; A est dit antecedant de la rai-

son, & B consequent; Que si au contraire B est comparé à A; B sera apellé antecédant, & A consequent.

A———
B———

Or cette raison définie par Euclide, est divisée en raison rationnelle, & Irrationnelle.

La rationnelle, est celle qui se peut exprimer en nombres: comme la raison d'une ligne de 10 pieds à une autre de cinq pieds, laquelle est exhibée par ces nombres 10 & cinq. Mais l'irrationnelle, est cette raison-là qui ne se peut exprimer en nombres: comme la raison du diamètre d'un quarré au côté d'iceluy, laquelle ne se peut trouver ny exprimer en nombre: comme est démontré par Euclide, en la dernière proposition du 10. livre.

Autres disent que la raison ou portion rationnelle, est celle qui a les deux quantitez commensurables, c'est à dire, qui ont une commune partie aliquote, ou bien qui sont mesurées par une même commune mesure: comme la raison d'une ligne de 20 pieds à une autre de 8 pieds: car une ligne de 4 pieds ou de 2, est partie aliquote de l'une & l'autre de ces deux-là, & par consequent mesure icelles. Mais la raison ou proportion irrationnelle, est celle (disent-ils) qui a les deux quantitez incommensurables, c'est à dire, qui n'ont nulle partie aliquote, ou desquelles on ne peut trouver aucune commune mesure. Comme la raison du costé d'un quarré à sa diagonale, & de plusieurs autres lignes dont est traité au 10. livre.

Cette raison se divise aussi en raison d'égalité, & d'inegalité: La raison d'égalité, est quand deux quantitez égales se coparent entr'elles, comme 10 à 10; une ligne de 12 pieds à une autre ligne de 12 pieds, &c. Mais la raison d'inegalité, est quand deux

quantitez inegales se comparent entr'elles, comme 10 à 4 est raison d'inegalité; telle est aussi celle de 5 à 3; celle d'une ligne de 7 pieds à une autre de 15 pieds &c.

Cette raison d'inegalité, est subdivisée en raison d'inegalité majeure, & d'inegalité mineure. La raison d'inegalité majeure, est quand la plus grande quantité est comparée à la moindre: comme la raison de 8 à 5, est dite raison d'inegalité majeure: item la raison d'une ligne de 10 pieds à une de 4, &c. Mais la raison d'inegalité mineure, est quand on compare la moindre quantité à la plus grande: comme la raison de 7 pieds à 9, s'appelle raison de moindre inegalité: item celle d'une ligne de 9 pieds à une autre de 12 pieds, &c.

La raison rationnelle d'inegalité majeure, est divisée en cinq genres, sçavoir raison multiple, superparticulière, superpartiente, multiple superparticulière, & multiple superpartiente: les trois premières desquelles sont simples, & les deux dernières composées d'icelles premières.

La raison multiple, est quand l'antecedant d'icelle contient le consequent plusieurs fois précisément: & cette raison contient sous soy diverses especes. Car si l'antecedant contient le consequent deux fois précisément, elle est dite double: si trois fois, triple, si 4, quadruple: si dix, decuple, &c. Comme la raison de 20 à 4 est dite quintuple, pource que l'antecedant 20 contient le consequent 4, cinq fois, & la raison d'une ligne de 18 pieds, à une autre de 3 pieds, est dite sextuple, d'autant que 18 contient 3 six fois, & ainsi des autres.

La raison superparticulière, est quand l'antecedant

contient le consequent une fois, & en outre une partie aliquote d'iceluy consequent : & cette raison a diverses especes. Car si ceste partie aliquote est moitié d'iceluy consequent, est constituée une raison sesquialtere, comme la raison de 3. à 2, en laquelle l'antecedant, 3. contient le consequent 2, une fois & encore $\frac{1}{2}$ d'iceluy; si elle est tierce partie, sesquiterce, si une quarte partie, sesquiquarte; si une cinquième partie, sesquiquinte, &c. Commençant tousiours le nom de ladite raison par sesqui, & se terminant par le denominateur de la partie aliquote.

La raison superpatiente, est quand l'antecedant contient le consequent une fois, & en outre plus d'une partie aliquote d'iceluy : & a aussi cette raison plusieurs especes. Car si l'antecedant contient le consequent une fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'iceluy, est constituée une raison superbipatiente tierces comme la raison de 20 à 12, en laquelle le nombre 20 contient 1, une fois & $\frac{2}{3}$ d'iceluy : si $\frac{3}{4}$, sera constituée une raison supertripatiente quarte, comme la raison d'une ligne de 63 pieds à une de 36, & ainsi des autres; le nom d'icelles commençant tousiours par super, & prenant à son milieu le numerateur de la partie aliquote, & le denominateur à la fin d'iceluy.

La raison multiple superparticuliere, est quand l'antecedant contient le consequent plusieurs fois, & encore une partie aliquote d'iceluy : cette-cy est composée de la premiere & de la deuxième: & tout ainsi que chacune d'icelles contient plusieurs especes, aussi fait celle-cy. Car si l'antecedant contient le consequent 2 fois, & encore $\frac{1}{2}$ d'iceluy, cette raison sera apellée double sesquialtere, comme la raison de 5 à 2, en laquelle 5 contient 2 deux fois & $\frac{1}{2}$ d'iceluy : si $\frac{1}{3}$, comme d'une

ligne de 7 pieds à une autre de 3 pieds, cette raison s'appellera double sesquiterce : & la raison de 29 à 7 s'appellera quadruple sesquiséptuple, d'autant qu'en 29.7. est cōtenu 4 fois $\frac{1}{7}$ d'iceluy, & ainsi des autres.

La raison multiple superpatiente, est quand l'antecedant contient le consequent plusieurs fois, & plusieurs parties aliquotes d'iceluy : cette raison est composée de la premiere & troisieme ; & tout ainsi que chacune d'icelles contient sous soy plusieurs especes, aussi fait cette-cy : comme si l'antecedant contient le consequent, 2 fois, encore $\frac{2}{3}$ parties d'iceluy, cette raison sera appellée double superbipartiente tierce, comme est la raison de 8 à 3 : mais s'il le contient 3 fois, & encore $\frac{1}{4}$ d'iceluy, elle s'appellera triple superpatiente quarte, comme est la raison de 15 à 4 s'il le contient 4 fois, & encore $\frac{1}{7}$ d'iceluy, elle sera dite quadruple supersextupartiente septuple, comme est la raison de 34 à 7. & ainsi des autres.

Or tout ce qui a été dit cy-dessus des cinq especes de raison rationnelle d'inegalité majeure, se doit aussi entendre des cinq especes de l'inegalité minore, excepté qu'il faut toujours aposer cette syllabe sub, disant submultiple au lieu de multiple, subsuperparticuliere, au lieu de superparticuliere, & ainsi des autres.

Et pource que les denominateurs des raisons rationnelles cy-dessus exposées sont assez utiles, nous enseignerons icy par quels nombres elles se dénomment. Nous appellons denominatedeur d'une raison, le nombre qui exprime distinctement, & apertement la quantité de la grandeur antecedante au respect de la consequente : comme le dominateur de la raison quintuple est 5, pource que ce nombre là montre que la grandeur ou quantité antecedante contient 5 fois la consequente,

Semblablement le denominatedeur de la raison sesquiquarte est $1 \frac{1}{4}$, pource qu'iceluy nombre signifie que la quantité antecedante contient la consequente une fois & $\frac{1}{4}$ d'icelle : Item le denominatedeur de la raison subtriple est $\frac{1}{3}$, car il demontre que l'antecedant est la tierce partie du consequent : & ainsi des autres. C'est pourquoy, comme j'estime, Euclide au 6. livre, & autres Mathematiciens, appellent le denominatedeur de quelconque raison la quantité d'icelle, car il denomme & exprime comme nous avons dit, combien une grandeur est au respect d'une autre avec laquelle elle est conferée, ainsi qu'il apert par les exemples proposez.

Or de ces choses on peut facilement colliger le denominatedeur de quelconque raison. Car le denominatedeur de la raison multiple, est le nombre entier contenant autant d'unités, que l'antecedant de la raison contient de fois le consequent. Comme le denominatedeur de la raison double, est 2, de la sextuple, 6; de la centuple 100, &c. Mais le denominatedeur de quelconque raison submultiple, est un nombre rompu, duquel le numerateur est toujours l'unité : mais le denominatedeur est le nombre denommant la raison multiple correspondante. Comme le denominatedeur de la raison subdouble est $\frac{1}{2}$: de la subsextuple $\frac{1}{6}$ de la subcentuple $\frac{1}{100}$, &c. Il est donc facile de trouver le denominatedeur de quelconque raison multiple ou submultiple, puis que la proposition montre le denominatedeur de la raison, comme il est evident par les exemples proposez cy-dessus.

Le denominatedeur de quelconque raison superparticuliere est l'unité avec la partie aliquote que l'antecedant doit comprendre outre le consequent. Comme le denominatedeur de la raison sesquialtere, est $1 \frac{1}{2}$: de la sesquiterce $1 \frac{1}{3}$; &c. Il n'est donc pas difficile de trou-

Sur le denominateur d'une raison superparticuliere, puis que la prolation d'icelle raison exprime le denominateur par sa partie aliquote, comme il apert par les exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison subsuperparticuliere est un nōbre rompu, duquel le numerateur est moindre que le denominateur seulement d'une unité. Comme le denominateur de la raison subsequalterre, est $\frac{2}{3}$: & celuy de la subsequisierce, est $\frac{3}{4}$ &c. Donc le denominateur de telle raison sera aisément trouvé, car il n'y a qu'à prendre pour numerateur de la fraction, le denominateur de la partie aliquote : & pour le denominateur d'icelle fraction, le nombre plus grand de l'unité. Comme le denominateur de la raison subsequisiquinte est $\frac{5}{6}$: & celuy de la raison subsequisseptieme est $\frac{7}{8}$: mais celuy-là de la raison subsequisneufieme, est $\frac{9}{10}$.

Le denominateur de quelque raison superpartiente, est une unité avec les parties aliquotes que l'antecedant doit contenir outre le consequant. Comme le denominateur de la raison supertripartiente quarte, est $1\frac{3}{4}$: celuy de la raison superquadripartiente quintes, est $1\frac{4}{5}$: & ainsi des autres. Or les denominateurs de telles raisons sont faciles à trouver, pource que la prolation même de la raison exhibe le propre denominateur d'icelle, comme il apert es exemples cy-dessus. Mais le denominateur de quelconque raison subsuperpartiente, est un nombre rompu, duquel le numerateur est moindre que le denominateur, d'autant d'unitex, que la quantité consequente contient de parties aliquotes par dessus l'antecedante. Comme le denominateur de la raison subsupertripartiente quarte est $\frac{4}{7}$; celuy de subsuperquadripartiente quinte, est $\frac{5}{8}$ &c. On trouvera donc le denominateur de telle raison, si pour le numerateur de

la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes exprimées en la raison proposée, auquel si on ajoute le nombre d'icelles parties, on aura le denominateur d'icelle fraction: comme le denominateur de la raison subsupertripartiente quinte est $\frac{5}{5}$, pource que le numerateur de cette fraction est le nombre denommant les quintes, sçavoir 5, auquel est ajouté le nombre 3, des trois parties, afin de faire 8, denominateur de la fraction: mais le denominateur de la raison subsuperquadrupartiente neuvième est $\frac{9}{9}$: & ainsi des autres.

Le denominateur de quelconque raison multiple superparticuliere est le nombre entier denommant la raison multiple proposée avec la partie que la quantité antecedante doit contenir outre la consequente. Comme le denominateur de la raison triple sesquiseptième est $3\frac{1}{7}$: mais celui de la raison quadruple sesquiquinte, est $4\frac{1}{5}$, &c. Le denominateur de telle raison est aisé à exhiber, pource que la prolation de la raison exprime distinctement tant le denominateur de la multiple raison, que la partie aliquote, comme il se voit es exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison submultiple superparticuliere est une fraction dont le numerateur est le nombre denommant les parties aliquotes contenuës en la raison. Comme le denominateur de la raison subtriple sesquiquarte, est $\frac{3}{4}$; de subquintuple sesquineuvième, $\frac{5}{9}$, &c. On trouvera le denominateur de telle raison, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur de la partie aliquote, & iceluy étant multiplié par le denominateur de la raison multiple, si on ajoute 1 au produit, on aura le denominateur de la fraction, comme il est manifeste par les exemples cy-dessus.

Le denominateur de quelconque raison multiple su-

perpartiente, est le nombre entier, denommant la raison multiple obtenue en icelle, avec les parties aliquotes que la quantité antecedente doit contenir de la consequente. Comme le denominateur de la raison triple superbi-partiente tierces, est $3\frac{2}{3}$; de quadruple supertripartiente quintes, $4\frac{3}{5}$, &c. Il est facile de trouver le denominateur de telles raisons, pource que la prolation exprime distinctement, tant le denominateur de la raison multiple, que les parties aliquotes, comme apert es exemples cy-dessus: & le denominateur d'une raison submultiple superpartiente, est une fraction, dont le numerateur est le nombre denommant les parties aliquotes d'icelle raison: comme le denominateur de la raison subtriple superbi-partiente tierces, est $\frac{3}{2}$; de subquadruple supertripartiente quintes $\frac{5}{3}$, &c. Le denominateur de telles raisons sera trouvé, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes: lequel étant multiplié par le denominateur de la raison multiple, & ce nombre produit ajouté le nombre des parties aliquotes, deviendra le denominateur de la fraction, ainsi qu'il apert es exemples posez cy-dessus.

Finalement le denominateur de la raison d'egalité est toujours l'unité, pource que les termes ou quantitez d'icelle raison sont egales entr'elles; & partant l'un contient l'autre une fois precisément.

4. Proportion, est une similitude de raisons.

Tout ainsi que la comparaison de deux quantitez entr'elles est dite raison; ainsi la comparaison & ressemblance de deux ou plusieurs raisons entr'elles, est dite proportion: comme si la raison de A à B, est semblable à la raison de C à D. L'habitude d'entre ces raisons fera dite proportion. Et c'est ce que les Grecs apellent

analogie. & quelques Latins proportionalité: Selon Boëtius & Iordanus il y en a de plusieurs sortes, dont les principales qu'ils appellent Medieté, sont la proportion Arithmetique, la Geometrique, & l'Harmonique.

Mais Euclide ne traite icy que de la Geometrique, laquelle est ou

A.	B.	C.	D.
8.	12.	18.	27

continuë, ou discrete: la proportion continuë, est celle de laquelle les grandeurs entre moyennes sont prises deux fois, tellement qu'il ne se fait nulle interruption de raisons, ains chaque quantité entre moyenne est antecedent & consequent, sçavoir antecedant de la quantité subsequente, mais consequent à la quantité antecedante: comme si on dit que telle qu'est la raison de A à B, telle est celle de B à C, où la quantité B est antecedant de la quantité C, & consequent de la quantité A. Mais la proportion discrete ou non continuë, est celle en laquelle chaque quantité entre moyenne, est prise seulement une fois, tellement qu'il se fait interruption de raisons, & aucune quantité n'est antecedant & consequent: mais seulement antecedent ou consequent: comme quand on dit que la raison de A à B, est comme celle de C à D.

3, Les grandeurs sont dites avoir raison l'une à l'autre, lesquelles étans multipliées se peuvent excéder l'une l'autre.

• Euclide ayant en la 3. def. appelé raison l'habitude de deux grandeurs de même genre, il explique en cette-cy quelle chose requierent deux quantitez de même genre, afin qu'elles soient dites avoir raison, sçavoir est, que l'une ou l'autre d'icelles étant multipliée, elle s'augmente en sorte, que finalement elle surpasse l'au-

tre : ainsi il y a raison entre le costé d'un quarré, & le diametre d'iceluy, puis que le costé multiplié par 2, c'est à dire pris deux fois, excède le diametre. Car d'autant que deux costez du quarré & le diametre, constituent un triangle Isocele, par la 20. p. 1. les deux costez du quarré seront plus grands que le diametre. Ainsi paréillement entre la circonference d'un cercle & le diametre d'iceluy, il y a raison (laquelle toutes fois n'est encore connue) puis que le diametre multiplié par 4, c'est à dire pris 4 fois, excède la circonference: car toute la circonference, comme il est démontré par Archimede, ne contient que trois fois le diametre, & encore une particule peu moindre qu'une septième partie d'iceluy diametre. Mais il s'ensuit de cette def. qu'une ligne finie n'aura raison à une infinie, encores qu'icelles deux lignes soient de mesme genre de quantité: car en quelque sorte que ce soit multipliée la ligne finie elle ne pourra surpasser l'infinie. S'ensuit aussi qu'il n'y a point de raison entre un angle rectiligne, & un angle contingent. Car il apert de la 16. pr 3. qu'iceluy angle contingent, ne peut jamais excéder un angle rectiligne.

6. Les grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, comme la troisième à la quatrième, quand les equimultiplices de la première & troisième, aux equemultiplices de la seconde & quatrième, en quelque multiplication que ce soit, défont ensemble, sont egaux, ou excèdent, un chacun à un chacun, prenant ceux-là qui s'entre-répondent.

Ayât esté dit par Euclide, que c'est que raison, & quelles grandeurs sont dites avoir raison l'une à l'autre, main-

tenant il declare quelle condition requierent les grandeurs pour être en même raison. sçavoir est, que les equemultiples de la premiere & troisieme grandeur excedent, soient egaux ou defaillent aux equemultiples de la deuxieme & quatrieme en quelque multiplication que soient pris iceux equemultiples, comme apert en ces quatre quantitez A, B, C, D, ou les equemultiples de A & C, premiere & 3, sont E & F, & les equemultiples de B & D, 2^e & 4^e quantitez sont G & H: tel-



lement qu'il se voit qu'ayant multiplié A & C, par un même nombre; & B, D, par quelconque même nombre, si le multiple E excède le multiple G qui luy correspond, aussi le multiple F excède le multiple H; si il est egal, l'autre sera aussi egal; si il defaut aussi fera l'autre. & ce en quelconque multiplication qu'on prenne les equemultiples: & partant il y a même raison de A premiere quantité à B seconde, que de C troisieme à D quatrieme.

Par la converse de cette def. si il y a telle raison de la premiere à la seconde, que de la troisieme à la quatrieme, il s'ensuit que les equemultiples de la pre-

miere & troisiéme excèdent , sont egaux , ou defail-
lent aux equemultiplices de la deuxiéme & quatrié-
me , engendrées de quelque multiplication que ce soit.

Et aussi s'il n'y a même raison de la premiere à la se-
conde, que de la tierce à la quatriéme, il s'ensuivra que
les equemultiplices de la premiere & troisiéme n'ex-
cederont, ne seront egaux ou ne defaundront aux equem-
multiplices de la deuxiéme & quatriéme produite de
quelque multiplication que ce soit.

Or ce qui est dit icy de quatre grandeurs se doit aussi
entendre de trois , prenant celle du milieu deux fois,
afin qu'il y en ait quatre.

7. Les grandeurs qui sont en même raison
sont apelées proportionnelles.

Comme si des grandeurs A .

B, C, D , il y a mesme raison de
A à B . que de C à D . icelles
grandeurs sont dites proportion-
nelles.

A	—————	12
B	—————	8
C	—————	6
D	—————	4

Et les grandeurs E, F, G, les-
quelles sont en proportion conti-
nuë, sont aussi dites continuelle-
ment proportionnelles.

E	—————	12
F	—————	6
G	—————	3

8. Quand des equemultiplices, celui de la
premiere grandeur excède celui de la se-
conde, & le multiplie de la troisiéme n'ex-
cède celui de la quatriéme , lors il y aura
plus grande raison de la premiere grandeur
à la seconde , que de la troisiéme à la qua-
triéme.

Euclide declare icy quelle condition doivent avoir 4. grandeurs, afin que la premiere soit dite avoir plus grande raison à la seconde que la tierce à la 4^e, disant qu'ayans pris les equemultiplices de la premiere & de la 3^e, & les equemultiplices de la deuxieme & 4^e, si la multiplie de la premiere excède la multiplie de la 2^e mais la multiplie de la 3^e n'excede la multiplie de la 4^e il y aura plus grande raison de la premiere grandeur à la seconde, que de la 3^e à la 4^e, comme il apert en l'exemple ici posé, auquel sont prises E & F, doubles de A & C, premiere & 3^e grandeurs, mais G & H triples de B & D, deuxieme & 4^e grandeurs: & pource que E multiplie de A premiere est plus grand que G multiple de B 2^e, & F multiplie de C 3^e n'est pas plus grand que H multiplie de D 4^e, la raison de A premiere grandeur à B 2^e, est dite plus grande que la raison de C 3^e à D 4^e.



Or afin que quatre grandeurs soient dites être en même raison, il est nécessaire que les equemultiplices d'icelles pris selon quelconques multiplications, excèdent, soient égaux ou defaillent, comme il a été exposé en la 6. def. Mais afin que la premiere grandeur soit dite avoir plus grande raison à la 2^e, que la 3^e à la 4^e: c'est assez que des equemultiplices pris selon quelque multiplication, celui de la premiere grandeur excède celui de la deuxieme: & le multiplie de la troisieme n'excede celui de la quatrieme. encore que selon plusieurs autres multiplications ces equemultiplices ne soient tels. Parquoy pour conclurre on quelque demonstration qu'il y a plus grande raison d'une grandeur à une au-

tes, que d'une troisième à une quatrième. Il suffira de démontrer que selon quelque multiplication, le multiple de la première grandeur excédant celui de la seconde, le multiple de la troisième n'excede celui de la quatrième.

Es convertissant cette 8^e def. s'il y a plus grande raison de la première grandeur à la deuxième, que de la troisième à la quatrième, le multiple de la première excédant celui de la deuxième, il se peut faire quelque multiplication par laquelle le multiple de la troisième n'excede celui de la quatrième.

Que si au contraire d'icelle def. le multiple de la première grandeur ne surmonte celui de la deuxième, & le multiple de la tierce excède celui de la quarte, la première grandeur sera dite avoir moindre raison à la deuxième que la tierce à la quarte. La conversion se a aussi lieu.

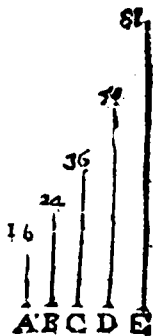
9. Proportion ne peut être constituée sur moins de trois termes.

Puis qu'il a été dit en la 3. def. que raison est l'habitude de deux quantitez, & que proportion par la 4. def. est une similitude de deux ou plusieurs raisons: il s'ensuit qu'il n'y peut avoir moins de trois quantitez ou termes en une proportion, si elle est proportion continuë, mais il en faut quatre au moins, si elle est proportion discrete.

10. Quand trois grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir à la troisième la raison doublée de la première

à la seconde : mais s'il y en a quatre, la première est dite être à la quatrième, en raison triplée de la première à la seconde : & toujours d'un même ordre une plus, jusques à ce que la proportion soit achevée.

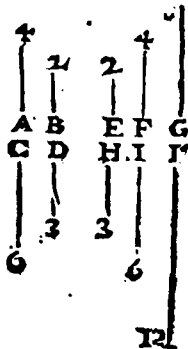
Comme si les grandeurs A, B, C, D, E , sont continuellement proportionnelles, la première quantité A est dite avoir à la 3^e quantité C , la raison doublée de celle de A à la 2^e B , pour ce qu'entre A & C sont deux raisons, qui sont égales à la raison de A à B , sçavoir est la raison de A à B , & celle de B à C , tellement que la raison de A à C , prend par ce moyen la raison doublée de A à B , c'est à dire posée deux fois d'ordre. Mais la raison de la première grandeur A à la 4^e D , est dite triplée de celle de A à B , pour ce qu'entre A & D , se trouvent 3 raisons, lesquelles sont égales à celle de A à B , c'est à sçavoir la raison de A à B , celle de B à C , & celle de C à D : & partant la raison de A à D encloft par ce moyen la raison triplée de A à B , c'est à dire posée trois fois d'ordre. Et ainsi pareillement la raison de A à E , est dite quadruplée de la raison de A à B , pour ce qu'entre A & E sont encloses 4 raisons, qui sont égales à celle de A à B , &c.



II. Les grandeurs sont dites homologues, ou de semblables raisons, les antecedans aux antecedans, & les consequens aux consequens.

C'est à dire que si plusieurs quantitez. sont proportionnelles, comme A, B, C, D , sçavoir que comme A est à B , ainsi C soit à D , les quantitez

A & C , antecedentes de chaque raison, seront dites homologues, ou de semblable raison, comme aussi les quantitez consequentes B & D . Ainsi pareillement, si les quantitez E, F, G , sont proportionnelles aux quantitez H, I, K : les termes E & H , seront dits homologues, ou de semblable raison: comme aussi le terme F sera dit homologue au terme I : & aussi G à K : ainsi les côtez, des figures évan-



comparez entr'eux, on entend quels costez doivent estre antecedans des raisons, & quels consequens.

12. Raison alterne, est prendre l'antecedant compare à l'antecedant, & le consequent au consequent.

Euclide explique en cette def. & es suivâtes, aucuns moyens d'argumenter es proportions, desquels l'usage est fort frequen en la Geometrie. Il dit donc icy que la raison alterne ou permutée, est quand de quatre grandeurs proportionnelles proposées: comme A, B, C, D , sçavoir que comme A est à B , ainsi C est à D : on vient à conclurre qu'il y a mesme raison de l'antecedant A à l'antecedant C , que du consequent B au consequent D : & ceste maniere d'argumenter (laquelle est démontré à la 16. p. de ce liv.) se concho ordinairement ainsi: comme A est à B , ainsi



ainsi C est à D : Donc en permutant comme A sera à C , ainsi B à D . Et est à noter qu'en cette maniere d'argumenter, les quatre grandeurs doivent être de même genre.

13. Raison inverse ou transposée, est lors qu'on prend le consequent comme antecédent pour le comparer à l'antecedant, comme si c'étoit le consequent,

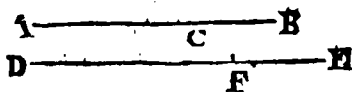
Comme si A est à B , ainsi que C à D , nous infererons que par raison inverse, comme B est à A , ainsi que D est à C , c'est à dire les consequens aux antecédans. En cette sorte d'argumenter les Auteurs parlent presque toujours ainsi : comme A est à B , ainsi C est à D : donc en changeant, ou au contraire, B sera à A , comme D à C . Cette maniere d'argumenter sera démontrée au Corrolaire de la 4. proposition de ce livre.

A ————
 B ————
 C ————
 D ————

14. Composition de raison, est lors qu'on prend l'antecedent avec le consequent, comme une seule chose, pour le comparer au même consequent.

Comme si AC est à CB , comme DF à FE , & on vient à conclure que la route AB est à CB , comme la route DE à FE ; c'est à dire que la composée de l'antecedant AC & du consequent CB , est au même consequent CB , comme la composée de l'antecedant DF , & du consequent FE , est à iceluy consequent.

F Eicette man-
niere d'argu-
menter sera
ditte compo-
sition de raison.



Et se pronon-
ce ainsi ; comme AC est à CB , ainsi DF à FE : dont
en composant AB sera à CB , comme DE à FE : la-
quelle sorte d'argumenter sera démontrée en la 18. pr.
de ce livre.

A ce moyen d'argumenter, par la composition de
raison, en peuvent estre ajoutées deux autres : le pre-
mier peut estre dit composition converse de raison : sça-
voir quand on prend l'antecedant & le consequent
comme un seul, pour le comparer à l'antecedant. Com-
me si AC est à CB , comme DF à FE ; & nous infe-
rons, donc comme AB composée de l'antecedant &
du consequent, est à l'antecedant AC , ainsi DE com-
posée de l'antecedant & du consequent est à l'antec-
edant DF : laquelle façon d'argumenter nous demon-
trerons estre valable sur la 18 p. 5.

L'autre moyen d'argumenter peut estre dit compo-
sition contraire de raison ; c'est à sçavoir quand l'ante-
cedant est comparé à l'antecedant & consequent com-
me un seul. Comme si AC est à CB , ainsi que DF à
 FE , & nous inferons par composition contraire de
raison : donc comme AC antecedant sera à la toute
 AB , composée de l'antecedant & du consequent, ainsi
 DF antecedant sera à la toute DE , composée de l'an-
tecedant & du consequent. Nous démontrerons sur la
18 p. de ce liv. que cette forme d'argumēter est valable.
15. Division de raison, est lors qu'on prend
l'excez par lequel l'antecedant surpasse

le consequent , pour le comparer à iceluy même consequent.

Comme si on dit qu'il y a telle raison de AB à CB , que de DE à FE : donc aussi AC , excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent , sera à CB consequent; comme DF excez par lequel l'antecedant excède le consequent , sera à FE consequent. Or les Auteurs concluent ordi-

nairement avec cette raison ainsi : comme AB est à CB , ainsi DE est à FE : donc en

$$\begin{array}{ccccccc} A & & 10 & & C & 10 & B \\ \hline D & & 16 & & F & 9 & E \end{array}$$

divisant AC sera aussi à CB ; comme DF à FE : Ce qui sera démontré en la 17. p. de ce livre:

A ce moyen d'argumenter en peuvent aussi estre ajoutez deux autres : le premier peut estre apellé division converse de raison ; c'est à sçavoir quand le consequent est comparé à l'excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent : Comme si AB est à CB , comme DE à FE , & nous inferons : donc aussi par division converse de raison ; comme CB consequent sera à AC , excez par lequel l'antecedant surmonte le consequent , ainsi FE consequent sera à DF , excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent : laquelle maniere d'argumenter nous démontrerons pouvoir estre sur la 17. pr. 5. Il est manifeste qu'en l'une & l'autre d'icelles argumentations par division de raison , l'antecedant doit estre plus grand que le consequent.

L'autre moyen d'argumenter peut estre dit division contraire de raison, c'est à sçavoir quand l'antecedant est conferé à l'excez , par lequel le consequent excède l'antecedant. Comme quand on dit, A Cestre à AB .

comme DF à DE : Donc aussi par division contraire de raison AC antecédant sera à CB , excez par lequel le consequent surmonte l'antecedant ; comme DF antecédant sera à EF , excez par lequel le consequent surpasse l'antecedant lequel moyen d'argumenter nous demonst rerons sur la 17. prop. de ce livre.

Il est evident qu'en cette division contraire de raison, le consequent doit estre plus grand que l'antecedant.

16. Conversion de raison, est comparer l'antecedant à l'excez, par lequel l'antecedant surpasse le consequent.

Comme si on dit, que comme AB est à CB , ainsi DE à FE : & on vient à conclure, que AB antecédant sera aussi à AC , excez par lequel il surmonte le consequent comme DE antecédant sera à DF , excez par lequel l'antecedant

excede le consequent,

cela sera dit conversion de raison. En cette sorte d'argumenter les Au-

theurs parlent ordinairement ainsi : comme AB est à

CB , ainsi DE est à FE : Donc par conversion de raison AB sera à AC , comme DE à DF : laquelle sorte d'argumenter sera démontrée au Cor. de la 19. pr. de ce livre.

$$\begin{array}{r} A \quad 21 \quad C \quad 10 \quad 15 \\ \hline D \quad 16 \quad F \quad 8 \quad E \end{array}$$

17. Raison egale, est lors qu'il y a plusieurs grandeurs d'un costé, & autant de l'autre en multitude, prise de deux en deux en même raison, & que la première des premières grandeurs, est à la dernière des mesmes, comme la première des secondes est à la dernière des mesmes.

Autrement, c'est lors qu'on prend les extrêmes par la soustraction des moyennes.

Comme s'il y a d'un costé quatre quantitez, A, B, C, D : & autant d'un autre E, F, G, H , lesquelles soient prises deux à deux en mesme raison, c'est à dire que A soit à B , comme E à F ; & B, C , comme F à G ; & C, D , comme G à H : si on inferé que comme A est à D , premiere & derniere des premieres grandeurs, ainsi E est à H , premiere & derniere des secondes. Cette maniere d'argumenter est dite raison egale, ou bien d'egalité. Et d'autant que cette maniere d'argumenter se prend ordinairement en deux sortes, sçavoir est quand les grandeurs qui sont en mesme raison sont prises d'ordre : & quand l'ordre est perverty : Enclide explique es deux def. suivantes que c'est que proportion ordonnée ; & perturbée.



18. Proportion ordonnée, est quand l'antecedant est au consequent, comme l'antecedant est au consequent : & que le consequent est à quelqu'autre, comme le consequent est aussi à quelqu'autre.

Cecy est aisé à entendre par l'exemple de la def. precedente, où nous avons posé A estre à B , comme E à F ; & B à C , comme F à G , & C à D , comme G à H :

Car

Car ainsi les termes des 4. premieres quantitez sont pris d'un mesme ordre, que ceux des 4. dernieres ; & partant cette proportion est dite ordonnée. Or que le moyen d'argumenter par raison d'égalité, la proportion d'ordre estant observée, soit bon, il sera demonsté en la 22. p. de ce livre.

19. Proportion troublée, est quand trois grandeurs étans d'un côté, & autant d'un autre, la premiere est à la seconde, comme la cinquième à la sixième, & comme la seconde à la troisième, ainsi la quatrième à la cinquième.

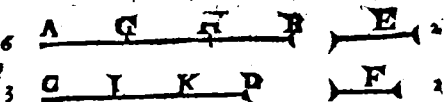
Comme si A est à B, ainsi que E est à F ; & comme B est à C, ainsi D à E : cette proportion sera dite troublée ou perturbée, d'autant qu'un mesme ordre n'est pas gardé en la comparaison des premieres grandeurs entr'elles, qu'és secondes aussi entr'elles. Car és premieres quantitez, la premiere est comparée à la seconde, & celle-cy à la 3^e : mais és secondes quantitez la 2^e est comparée à la 3^e, & la premiere à la seconde. Or que le moyen d'argumenter par raison égale, la proportion troublée estant gardée, soit bon, il sera demonsté en la 23. p. de ce livre.



THEOR. I. PROP. I.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra équemultiplices d'autant d'autres grandeurs, chacune à la sienne ; comme l'une sera multipliee de l'une, ainsi les toutes seront multipliees des toutes.

Soient tant
de grâdeurs
qu'on vou-
dra A B &
CD, éque-
multipliees



d'autant d'autres grandeurs E & F. Je dis que les grandeurs AB & CD ensemble, seront autant multiplies de E & F ensemble, comme AB l'est de E, ou CD de F.

Car puis que AB est multiple de E; E mesurera AB certain nombre de fois par la 2. def. de ce livre, qu'elle la mesure donc trois fois, & soit icelle AB couppee en trois parties égales, AG, GH, HB, chacune desquelles sera égale à E. Le même se peut dire de la grandeur CD, laquelle on coupera aussi en trois parties égales CI, IK, KD, étant chacune d'icelles égale à F: mais qui a choses égales, sçavoir à AG & E, adjoûte choses égales, sçavoir CI & F, les toutes AG, CI ensemble, seront égales aux toutes E & F ensemble. Par même raison GH & IK ensemble, seront égales à icelles E & F ensemble pareillement HB & KD, aux mêmes E & F. Autant donc qu'il y a de grandeurs en AB, égales à E; & en CD d'égales à F: autant y en a-t'il en AB & CD prises ensemble, qui sont égales à E & F prises ensemble; Parquoy les deux AB & CD ensemble, seront triples des deux ensemble E & F, comme la seule AB est triple de la seule E; ou la seule CD de la seule F. S'il y a donc tant de grandeurs qu'on voudra, eue multiples, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

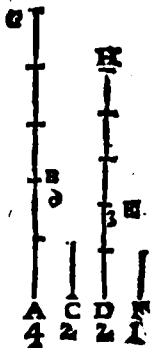
THEOR. 2. PROP. II.

Si la premiere est autant multiple de la seconde, que la troisieme de la quarte, & la cinquieme autant multiple de la seconde, que la sixieme de la quarte; la composée de la premiere & cinquieme, sera autant multiple de la seconde, comme la composée de la troisieme & sixieme, le sera de la quarte.

Soit la premiere grandeur AB, autant multiple de la seconde C, comme la 3. DE l'est de la 4. F: & soit la 5. BG autant multiple de la 2. C, comme la 6. EH de la 4. F: Je dis que AG composée de la premiere & cinquieme AB & BG, sera autant multiple de la 2.

C, comme DH composée de la tierce & fixième DE & EH, le sera de la quarte F.

Car puis que AB est autant multiplie de C, comme DE de F, il y a en AB autant de grandeurs égales à C, qu'il y en a en DE d'égales à F. Par même raison, il y aura aussi en BG autant de grandeurs égales à C, comme il y en a en EH d'égales à F. Il y aura donc en AG autant de grandeurs égales à C, qu'il y en a en DH d'égales à F : parquoy AG composée de la première & cinquième est autant multiplie de la seconde C, comme DH composée de la tierce & fixième l'est de la quarte F. Parquoy si la première est autant multiplie de la seconde, que la troisième de la quarte, &c. Ce qu'il falloit demontrer.



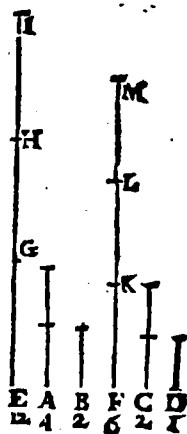
THEOR. 3. PROP. III.

Si la première est autant multiplie de la seconde, comme la tierce de la quarte; & on prend des équemultiples de la première, & troisième: aussi le multiplie de la première sera autant multiplie de la seconde, que le multiplie de la tierce le sera de la quarte.

Soit A autant multiplie de B, comme C l'est de D; & de la première & tierce A, C, soient pris les équemultiples E & F. Je dis que E sera autant multiplie de B 2^e, que F de D 4^e.

Car puis que E est autant multiplie de A, que F l'est de C : E contiendra autant de parties égales à A, comme F de parties égales à C. Soit donc E divisée en EG, GH & HI, chacune égale à A : Item F divisée en FK, KL & LM, chacune égale à C : & d'autant que EG & FK sont égales à A & C, lesquelles sont équemultiples de B & D par l'hypothese, aussi EG & FK

seront equemultiples des mêmes B & D. Par même raison GH & KI : item HI & LM, seront equemultiples d'icelles B & D. Vû donc que EG premiere grandeur est autant multiplie de la seconde B, que FK tierce l'est de D quarte. Item GH cinquième autant multiplie de la même seconde B, que KI sixième de la quatrième D ; aussi EH composée de la premiere & cinquième sera autant multiplie de la seconde B, que FL composée de la tierce & sixième l'est de la quatrième D, par la prec. prop. Derechef puis que EH premiere grandeur est autant multiplie de la seconde B, que FL tierce l'est de D quarte, & HI cinquième est aussi autant multiplie de la seconde B, que LM sixième l'est de la quatrième D : EI composée de la premiere & cinquième sera aussi autant multiplie de la seconde B, que FM composée de la tierce & sixième l'est de D quatrième par la 2. p. de ce livre. Si donc la premiere est autant multiplie de la seconde, &c. Ce qu'il falloit demontrer.



THEOR. 4. PROP. IV.

Si la premiere est à la seconde, en même raison que la tierce à la quarte : aussi les equemultiples de la premiere & tierce, auront même raison aux equemultiples de la seconde & quarte, en quelque multiplication que ce soit ; si elles sont prises ainsi qu'elles s'entrespondent.

Soit A à B en même raison que C à D, & soient prises E & F equemultiples de A premiere & C tierce : Item G & H equemultiples de B seconde & D quarte,

Selon quelque multiplication que ce soit, Je dis qu'il y a même raison de E à G, que de F à H.

Car si on prend I & K équemultiplices de E & F, pareillement L & M équemultiplices de G & H : d'autant que E premiere, est autant multiplie de A seconde, que F tierce l'est de C quarte, & I, K sont prises équemultiplices d'icelles E, F premiere & tierce; aussi par la 3. prop. de ce livre I & K, seront équemultiplices de A & C, seconde & quarte. Par même raison L & M, seront aussi équemultiplices de B & D : & puis que A est à B comme C à D : & d'icelles A & C, premiere & tierce, ont été démontrées I & K équemultiplices; Mais de B & D seconde & quarte, autres équemultiplices L & M : par la converse de la 6. def. de ce livre, si I defaut, est égal, ou plus grand que L, aussi K defaut, sera égal, ou plus grand que M, selon quelconque multiplication que soient pris iceux équemultiplices. Et pour autant que I & K, sont équemultiplices de E & F; pareillement L & M de G & H : par la même 6. def. il y aura même raison de E à G, comme de F à H. Si donc la premiere est à la seconde en même raison que la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



C O R O L L A I R E.

Par cecy est manifeste la preuve de la raison inverse, qu'Euclide a expliquée en la 13. def. de ce livre, sçavoir est que si 4. grandeurs sont proportionnelles, elles le seront aussi estans prises à rebours, c'est à dire que E estant à G comme F à H, aussi en changeant G sera à E comme H à F. Car puis qu'il a esté de-

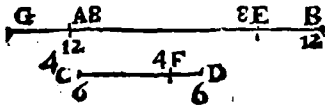
monstré que si L defaut, est égal ou plus grand que E , aussi K defaudra, sera égal, ou plus grand que M , selon quelconques multiples. Il appert aussi que si L defaut, est égal, ou plus grand que I , aussi M defaudra, sera égal, ou plus grand que K , selon quelconques multiplications : Et partant par la 6. def. il y aura mesme raison de G à E que de H à F .

THEOR. 5. PROP. V.

Si une grandeur est autant multiplie d'une grandeur, que la retranchée de la retranchée : aussi le reste sera autant multiplie du reste que la toute de la toute.

Soit la toute AB , autant multiplie de la toute CD , comme la retranchée AE , de la retranchée CF . Je dis que le reste EB sera autant multiplie du reste FD , que la toute AB l'est de la toute CD .

Car AG étant faite autant multiplie de FD comme AE l'est de CF , ou comme la toute AB l'est de la toute CD : d'autant que AE , AG sont équemultiples de CF , FD : par la 1. pr. de ce livre, la toute GE , sera autant multiplie de la toute CD , comme AE de CF : Mais aussi AB , est autant multiplie de CD comme AE de CF , donc GE , AB , sont équemultiples de CD , & partant égales entr'elles par la 6. com. sent. Parquoy en ostant ce



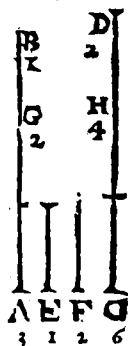
qui leur est commun, sçavoir AE , resteront égales GA , EB ; qui partant seront équemultiples de FD , puis que GA a été posée multiplie d'icelle FD , & autant comme AB l'est de CD : donc aussi le reste EB , sera autant multiplie du reste FD , que la toute AB l'est de la toute CD . Parquoy si une grandeur est autant multiplie d'une grandeur, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux grandeurs sont équemultiplices de deux autres grandeurs, & d'icelles on retranche des équemultiplices: ou les restes seront égaux aux mêmes, ou équemultiplices d'icelles.

Soient les grandeurs AB, CD, équemultiplices des grandeurs E, F, & les retranchées AG, CH aussi équemultiplices des mêmes grandeurs E, F. Je dis que les restes GB, HD, seront ou égaux aux mêmes E, F, ou équemultiplices d'icelles.

Car d'autant que AB & CD, sont équemultiplices de E & F; en AB il y aura autant de grandeurs égales à E, comme en CD de grandeurs égales à F. Pareillement d'autant que la retranchée AG est autant multiple de E, que la retranchée CH l'est de F; AG contiendra autant de grandeurs égales à E, que CH de grandeurs égales à F, par la 1. & 2. def. de ce livre. Si donc d'égales multitudes de grandeurs AB & CD, on ôte égales multitudes de grandeurs AG & CH, les multitudes restantes GB & HD seront égales: c'est-à-dire que GB contiendra autant de fois E, comme HD contiendra F; ou bien si GB est égale à E, aussi HD sera égale à F: & par ainsi iceux restes GB, HD seront égaux à E & F, chacune à la sienne, ou bien seront équemultiplices d'icelles. Parquoy si deux grandeurs sont équemultiplices de deux autres grandeurs, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



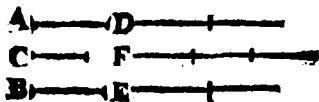
THEOR. 7. PROP. VII.

Les grandeurs égales, ont même raison à une même grandeur; & cette-cy aura même raison aux grandeurs égales.

Soient deux grandeurs égales A & B, & une autre quelle

qu'elle soit C. Je dis que A & B ont même raison l'une que l'autre à C, & que C aura même raison à A qu'à B.

Qu'il ne soit ainsi; soient pris D & E équemultiplices de A première, & B tierce, soit aussi pris F quelque multiplie de C, seconde & quar-



te : donc puis que D est autant multiplie de A, que E est multiplie de B; & que A & B sont posées égales : aussi D & E seront égales par la 6. com. sent. Si donc D est plus grande, égale, ou plus petite que F, aussi E sera plus grande, égale, ou plus petite que la même F, & par la susdite 6. def. de ce livre, il y aura telle raison de A à C, comme de B à la même C.

Quant à l'autre partie, elle se prouve tout de même par la susdite def. en prenant les mêmes équemultiplices, & montrant l'excez, &c. ou bien plus facilement par la raison inverse. Car puis qu'il a été démontré que A est à C comme B à C, en changeant C sera à A, comme C à B par le Corol. de la 4. prop. de ce livre. Donc les grandeurs égales ont même raison à une même, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Des grandeurs inégales, la plus grande a plus grande raison à une même grandeur, que la plus petite : & une même grandeur a plus grande raison à la plus petite grandeur, qu'à la plus grande.

Soient deux grandeurs inégales AB & C, desquelles AB est la plus grande, & une troisième quelle qu'elle soit D. Je dis que AB a plus grande raison à la troisième D, que non pas C : item, que D a plus grande raison à C, qu'à AB.

Qu'il ne soit ainsi : soit entenduë AB première grandeur, D seconde, C tierce, & D quarte. D'autant que AB est plus grande que C, soit retranchée AE égale à icelle

C, & soient pris des équemultiples, à sçavoir FG de BE, & GH de BA, en sorte que chacune d'icelles FG & GH soit plus grande que D: & puis que les deux FG, GH, sont équemultiples des deux BE, EA, par la 1. prop. de ce livre, la toute HF sera autant multiplie de la toute AB, comme HG de AE, ou de C son égale: Maintenant soit prise IK aussi multiplie de D, en sorte qu'elle soit plus petite que HF, mais plus grande que HG: (ce qui est facile, puis que D est plus petite que ny FG, ny GH: si bien qu'il faut seulement adjoûter tant de fois la grandeur D, jusques à ce que l'on ait ce que l'on cherche.) D'autant que FH, GH sont équemultiples de AB première, & C troisième, si IK est prise pour l'équemultiplie, tant de D seconde, que D quatrième, il est évident que HF multiplie de AB première, étant plus grande que IK multiplie de D seconde, HG multiplie de C tierce, n'est pas plus grande que IK multiplie de D quarte: & partant par la huitième def. de ce livre, il y aura plus grande raison de AB à D, que de C à la même D.

Quant à la seconde partie: d'autant que IK multiplie de la première D, (car il faut maintenant poser D première & troisième, C seconde, & AB quatrième) est plus grande que HG multiplie de la seconde C; & IK multiplie de la troisième D, est moindre que FH multiplie de AB quatrième: Il y aura plus grande raison de D à C, que de D à AB, par la 8. def. de ce livre. Parquoy des grandeurs inégales, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les grandeurs qui ont même raison à une même grandeur, sont égales entr'elles: & celles-là aussi sont égales, auxquelles une même grandeur a même raison.

Soient premièrement deux grandeurs A & B, lesquelles



ayent même raison l'une que l'autre à la troisième C. Je dis qu'elles sont égales entr'elles.

Car si elles n'étoient égales, il faudroit que l'une ou l'autre fust plus grande; & par la précédente prop. icelle plus grande auroit plus grande raison à C, que la plus petite, ce qui est contre l'hypothese: donc A & B ne sont pas inégales, mais égales.

Soient maintenant A & B, à chacune desquelles C ait une même raison. Je dis qu'icelles A & B sont aussi égales entr'elles: car autrement il faudroit que l'une fust plus petite que l'autre; & par la même 8. prop. à icelle plus petite, C auroit plus grande raison qu'à la plus grande: ce qui est contre l'hypothese: A & B ne sont donc pas inégales, mais égales. Donc les grandeurs qui ont même raison, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



THEOR. 10. PROP. X.

Des grandeurs qui ont raison à une même grandeur, celle qui a plus grande raison est la plus grande: & celle-là à laquelle une même grandeur a plus grande raison, est la plus petite.

Soient trois grandeurs A, B, C: & en premier lieu la raison de A à C soit plus grande que de B à la même C. Je dis que A sera plus grande que B.

Autrement, si A n'étoit plus grande que B, elle seroit égale, ou plus petite, ce qui est impossible: car si elles étoient égales, elles auroient même raison l'une que l'autre à C, par la 7. prop. de ce livre, ce qui seroit contre l'hypothese: si aussi elle étoit plus petite, elle auroit plus petite raison à C que non pas B, par la 8. prop. de ce même livre, ce qui est pareillement contre l'hypothese. Donc A ne sera pas moindre ny égale à B: & par conséquent sera plus grande.

Maintenant que C aye plus grande raison à B, que non pas à A: Je dis que B sera plus petite que A. Autrement si B n'étoit moindre que A, elle seroit égale,



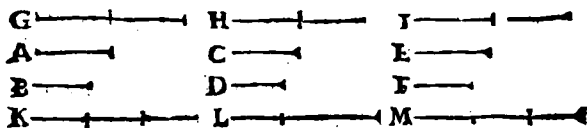
ou plus grande, ce qui est impossible : car si A & B étoient égales, C auroit même raison à l'une qu'à l'autre par la susdite 7. prop. de ce livre : ce qui est contre notre hypothese : si aussi elle étoit plus grande, C auroit plus grande raison à A qu'à B par la susdite 8. pr. ce qui est aussi contre l'hypothese. Donc B sera moindre que A. Parquoy des grandeurs qui ont raison à une même grandeur, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. II. PROP. XI.

Les raisons qui sont de même à une autre, sont aussi de même entr'elles.

Soit A à B, comme C à D, & comme C à D, ainsi E à F : Je dis que comme A est à B, ainsi E sera à F.

Qu'il ne soit ainsi : de toutes les antecedantes A, C, E, soient prises quelconques équemultiples, G, H, I. Pareillement, des consequentes B, D, F, quelconques équemultiples, K, L, M. D'autant que A est à B



comme C à D, par la converse de la 6. def. de ce livre, si G multiplie de A, est égale, plus grande, ou plus petite que K multiplie de B : aussi H multiplie de C, sera égale, plus grande, ou plus petite que L, multiplie de D. Item, puis que comme C est à D, ainsi E est à F, si H multiplie de C est égale, plus grande, ou plus petite que L multiplie de D, aussi I multiplie de E, sera égale, plus grande, ou plus petite que M multiplie de F : Parquoy si G multiplie de A premiere, est plus grande, égale, ou plus petite que K multiplie de B seconde, aussi I multiplie de E tierce, sera plus grande, égale, ou plus petite que M multiplie de F quarte ; & par la susdite 6. def. comme A sera à B, ainsi E sera à F. Parquoy les raisons qui sont de même, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

Clavius démontre en suite de ce, que les raisons qui sont de même à d'autres, sont aussi de même entr'elles : Comme si A est à B , ainsi que C à D , & que E soit à F , comme A à B ; & G à H , comme C à D ; Aussi comme E sera à F , ainsi G sera à H . Car

A	B	C	D
3.	2.	6.	4.
E	F	G	H
9.	6.	12.	8.

d'autant que les raisons de E à F , & de C à D sont de même à la raison de A à B , par la

Derechef, pource que les raisons de E à F , & de G à H sont de même à la raison de C à D : aussi par la même 11. prop. 5. comme E sera à F , ainsi G sera à H . Derechef, si les raisons de A à B , de C à D & de E à F sont de même entr'elles; & que comme A est à B , ainsi G soit à H ; & comme C à D , ainsi I à K ; & comme E est à F , ainsi L soit à M : aussi les raisons de G à H , de I à K , & de L à M sont de même entr'elles :

Car suivant ce que nous avons démontré cy-dessus de quatre raisons, comme G est à H , ainsi I est à K , pource que ces raisons sont semblables aux raisons de A à B ,

A	B	C	D	E	F
3.	2.	6.	4.	9.	6.
G	H	I	K	L	M
12.	8.	18.	12.	30.	20.

& de C à D . Et en la même manière, comme I sera à K , ainsi L sera à M , d'autant qu'icelles raisons sont de même aux raisons de C à D , & de E à F , lesquelles sont semblables. Item, comme G sera à H , ainsi L à M ; puis que ces raisons sont de même que les raisons de A à B , & de E à F , qui sont posées égales : Le même seroit encore démontré s'il y avoit davantage de raisons.

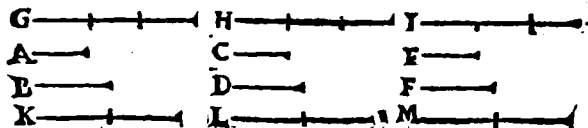
THEOR. 12. PROP. XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles : comme l'une des antecedantes sera à la consequente, ainsi toutes les antecedantes seront à toutes les consequentes.

Soient six grandeurs proportionnelles A, B, C, D, E, F , sçavoir que A soit à B , comme C est à D , & E à F :

Je dis que comme l'une des antecedantes est à sa consequente ; sçavoir est A à B , ainsi toutes les antecedantes ensemble A , C , E , seront à toutes les consequentes ensemble B , D , F .

Car étans prises des antecedantes A , C , E , les équemultiplices G , H , I : item des consequentes B , D , F , les équemultiplices K , L , M ; toutes les trois multiplies G , H , I ensemble , seront autant multiplie des trois grandeurs A , C , E ensemble , comme la seule G est multiplie de la seule A , par la premiere prop. de ce livre. Aussi par la même raison toutes les trois multiplies K , L , M ensemble , seront autant multiplie des trois grandeurs B , D , F ensemble , comme K sera multiplie de B . Partant puis que A , B , C , D , E , F sont proportionnelles , si G multiplie de A premiere,



est plus grande , égale , ou plus petite que K multiplie de B seconde , aussi H multiplie de C troisième , sera plus grande , égale , ou plus petite que L , multiplie de D quatrième , par la converse de la 6. def. de ce livre , & ainsi des deux autres : Partant si G est plus grande , égale , ou plus petite que K , le composé des trois G , H , I , sera aussi plus grand , égal , ou plus petit que le composé des trois K , L , M . Donc par la même 6. def. comme A sera à B , ainsi les trois A , C , E ensemble , seront aux trois B , D , F ensemble . Parquoy si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles , &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si la premiere est à la seconde comme la tierce à la quarte : mais la tierce a plus grande raison à la quarte , que la cinquième à la sixième : aussi la premiere aura plus grande raison à la seconde , que la cinquième à la sixième. .

Soit A première à B seconde, (*en la prev. fig.*) comme C tierce à D quarte, & qu'il y ait plus grande raison de C tierce à D quarte, que de E cinquième à F sixième. Je dis qu'il y aura aussi plus grande raison de A première à B seconde, que de E cinquième à F sixième.

Car estans prises des antecedantes A, C, E, les équemultiplices G, H, I, & des consequentes B, D, F, les équemultiplices K, L, M: D'autant que A est à B, comme C à D, si G multiplie de A est égale, plus grande, ou plus petite que K multiplie de B, aussi par la converse de la 6. def. de ce livre, H multiplie de C, sera égale, plus grande, ou plus petite que L multiplie de D. Pareillement, d'autant qu'il y a plus grande raison de C première à D seconde, que de E tierce à F quatrième, si H multiplie de C, est plus grande que L multiplie de D, il n'est pas nécessaire que I multiplie de E excède M multiplie de F, par la 8. def. de ce livre convertie: donc aussi si G excède K, nécessairement I n'excede pas M: & partant par ladite 8. def. il y a plus grande raison de A à B, que de E à F. Si donc la première est à la seconde, comme la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Que si la tierce C a moindre raison à la quarte D, que la cinquième E à la sixième F: aussi la première A aura moindre raison à la seconde B, que la cinquième E à la sixième F. Car si la raison de C à D est moindre que celle de E à F, c'est à dire, que la raison de E première à F seconde étant plus grande que celle de C tierce à D quarte, si I excède M, il n'est pas nécessaire que H excède L, car quelquesfois elle defaut, ou est égale à icelle par la 8. def. de ce liv. convertie. Mais si H defaut, ou est égale à L, aussi G defaudra, ou sera égale à K par la 6. def. convertie, parce qu'on a posé C 1. estre à D 2. comme A 3. à B 4. Parquoy si I excède M nécessairement G n'excedera pas K: & partant par la susdite 8. def. il y aura plus grande raison de E à F, que de A à B, c'est à dire que la raison de A à B sera moindre que de E à F: ce qui étoit proposé.

En la mesme maniere sera démontré, que s'il y a plus grande raison de la première à la seconde, que de la tierce à la quarte: mais la tierce a plus grande raison à la quarte, que la

Cinquième à la sixième ; pareillement la première aura beaucoup plus grande raison à la seconde , que la cinquième à la sixième.

Que si la première a moindre raison à la seconde , que la tierce à la quarte , & la tierce a moindre raison à la quatrième , que la cinquième à la sixième : aussi la première aura beaucoup moindre raison à la seconde , que la cinquième à la sixième.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Si la première est à la seconde , comme la tierce à la quarte , & que la première soit plus grande que la tierce : aussi la seconde sera plus grande que la quarte : & si égale , égale : si plus petite , plus petite.

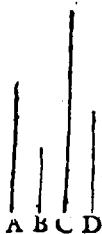
Soit A à B , comme C est à D , & que A première soit plus grande , égale , ou plus petite que C troisième : Je dis que B seconde sera aussi plus grande , égale , ou plus petite que D quatrième.

Soit premièrement A plus grande que C : il y aura donc plus grande raison de A à B , que de C à la même B , par la 8. prop. de ce livre , & par conséquent plus grande raison de C à D , que de C à B , étant icelle la même raison que de A à B , & par la 10. prop. de ce même livre B sera plus grande que D.

Soit puis apres A égale à C , & par la 7. prop. de ce même livre A sera à B , comme C à B : & puis que les raisons de C à D , & C à B , sont les mêmes que de A à B , les raisons de C à D & de C à B , seront de même entr'elles , par la 11. prop. de ce livre , & partant par la 9. prop. B & D , seront égales.



Finalement soit A moindre que C, & par la susdite 8. prop. il y aura plus grande raison de C à D, que de A à D; & par conséquent plus grande raison de A à B, que de A à D, puis qu'il y a même raison de A à B, que de C à D, & par la 10. prop. de ce même livre B sera moindre que D. Si donc la première est à la seconde, comme la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il fallloit prouver.



S C H O L I E.

Que si la seconde est plus grande, ou égale, ou moindre que la quarte: aussi la première sera plus grande, ou égale, ou moindre que la tierce. Car puis que A est à B comme C à D, en changeant B sera à A comme D à C par le Cor. de la 4. p. de ce livre. Donc si B est plus grande, ou égale, ou moindre que D, aussi A sera plus grande, ou égale, ou moindre que C par la susdite 14. prop.

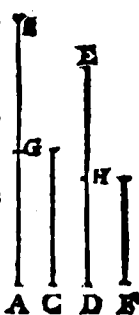
Or Euclide n'a pas démontré que si la première est plus grande, égale, ou plus petite que la seconde: aussi la tierce sera plus grande, égale, ou moindre que la quarte, pource que cela est évident à cause de la similitude des raisons. Ce que nous pourrions néanmoins démontrer après Commandin: mais d'autant que sa démonstration ne compete qu'aux grandeurs de mesme genre, nous nous tiendrons à ce que la nature des proportions nous monstre, encore que les grandeurs soient de divers genres.

THEOR. 15. PROP. XV.

Les grandeurs sont entr'elles, comme sont leurs équemultiplices entr'elles: étans prises comme elles s'entrespondent.

Soit AB autant multiplie de C comme DE est multiplie de F. Je dis que AB sera à DE, comme C à F. Car puis que AB & DE sont equemultiplicés d'icelles C & F, il y

Il y aura en AB autant de parties égales à C, comme DE contient de parties égales à F : soit donc divisée AB és parties AG, GB égales à C, & DE és parties DH, HD égales à F; & par la 7. prop. de ce livre une chacune partie de AB, sera à une chacune partie de DE, comme C est à F; & par la 12. prop. toutes les antecedantes AB, seront à toutes les consequentes DE, comme AG l'une des antecedantes, est à DH la consequente, c'est-à-dire comme C à F, puis que c'est la même raison. Parquoy les grandeurs sont entr'elles, &c. Ce qu'il falloit prouver.

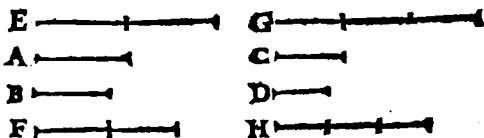


THEOR. 16. PROP. XVI.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles le seront aussi étans permutées.

Soit A à B, comme C à D. Je dis qu'en permutant A sera à C, comme B est à D.

Car si
on préd
E & F e-
quemul-
tiplices
de A &
B; item
G & H



equemultiplices de C & D; E sera à F, comme A à B par la prop. precedente, & G à H comme C à D; & par consequent E étant à F, & C à D, en même raison que A à B, elles sont de même entr'elles par la 11. prop. de ce livre. Derechef puis que les raisons de E à F, & G à H sont les mêmes que de C à D, elles seront aussi de même entr'elles par la susdite 11. prop. c'est-à-dire, que comme E premiere est à F seconde, ainsi sera G tierce à H quarte: parquoy par la 14. prop. de ce même livre, si E premiere est plus grande, égale, ou moindre que G tierce, aussi F seconde sera plus grande, égale, ou moindre que H quarte.

trième, en quelconque multiplication que soient prises les équemultiples; & par la 6. def. d'iceluy cinquième livre A sera à C , comme B à D : (puisque E & F sont équemultiples de A première, & B troisième; & G & H équemultiples de C seconde & D quatrième, & celles-la defaillent, sont égales, ou excèdent celles-cy, &c.) Parquoy si quatre grandeurs sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Or la demonstration de cette proposition a seulement lieu quand les quatre grandeurs sont de mesme genre. Car si les deux A & B étoient d'un genre, & les deux C & D d'un autre: aussi les équemultiples E & F seroient d'un genre, c'est à sçavoir duquel sont A & B , & les équemultiples G & H d'un autre genre, c'est à sçavoir de celui duquel sont C & D : Parquoy on ne pourroit pas dire E estre plus grande, égale, ou moindre que G : & partant rien ne se concluroit par la 6. def. de ce livre. La raison permutée a donc seulement lieu quand les quatre grandeurs sont d'un mesme genre.

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si les grandeurs composées sont proportionnelles; icelles étans divisées, seront aussi proportionnelles.

Soient les grandeurs composées AB , CB , & DE , FE , proportionnelles, c'est-à-dire, que AB soit à CB , comme DE à FE . Je dis que les mêmes grandeurs étans divisées sont aussi proportionnelles, c'est-à-dire que comme AC est à CB , ainsi DF est à FE .

Car d'icelles AC , CB , DF , FE soient prises les équemultiples GH , HL , IK , KM , chacune à chacune, & par la 1. prop. de ce livre GL sera autant multiple de AB , que GH de AC , c'est-à-dire comme IK de IF . Mais icelle IK est autant multiple de DF , que IM de DE par la même 1. prop. donc GL ; IM sont équemultiples de AB , DE . Derechef soient prises LN ,

MO équemultiplices de CB, FE. Pour autant que HL premiere est autant multiple de CB seconde, que KM tierce de la quarte FE, & LN cinquième autant multiple de CB seconde, que MO sixième de la quarte FE; par la 1. p. de ce livre, HN sera autant multiple de CB seconde, que KO de FE quatriéme. Et puis que AB est à CB, comme DE à FE: & ont été prises GL, IM equemultiplices de AB, DE, mais HN, KO de CB, FE: par la 6. def. convertie si GL multiplie de AB premiere excède, est égale, ou moindre que HN multiplie de CB seconde, aussi IM, multiplie de DE tierce, excèdera, sera égale, ou moindre, que KO multiplie de FE quarte: ôtant donc les choses communes HL, KM, si GH excède LN, aussi IK excèdera MO; & si égale, égale; & si moindre, moindre. Et d'autant que GH, IK sont equemultiplices de AC premiere & DF tierce. Item LN, MO equemultiplices de CB seconde & FE quarte, & il a été démontré (en quelconque multiplication qu'ayent été prises icelles equemultiplices) que les equemultiplices de la premiere & troisième excèdent, sont égales, ou moindres, que les equemultiplices de la seconde & quatriéme, par la susdite 6. def. de ce cinquième livre AC sera à CB, comme DF à FE: ce qui étoit proposé. Si donc les grandeurs composées sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



SCHOLIE.

Nous démontrerons icy ce moyen-là d'argumenter, lequel en la 15. def. nous avons dit converse de la raison divisée: c'est-à-dire que si AB est à CB, comme DE à FE, aussi CB sera à AC, comme FE à DF. Car d'autant que comme AB à CB, ainsi DE à FE, en divisant par la 17. p. 5. comme AC sera à CB, ainsi DE à FE: & en changeant, comme CB sera à AC, ainsi FE sera à DF: ce qui étoit proposé.

Par même manière, sera démontré ce moyen-là d'argumenter, lequel en la même 15. def. nous avons appelé contrainte division de raison : c'est-à-dire que si AC est à AB , comme DF à DE : aussi AC sera à CB , ainsi que DF à FE . Car puis que AC est à AB , comme DF à DE : en changeant, comme AB sera à AC , ainsi DE à DF : donc en divisant par la 17. p. 5. comme CB à AC : ainsi FE à DF : & en changeant derechef, comme AC à CB , ainsi DF à FE : ce qui étoit à démontrer.

THEOR. 18. PROP. XVIII.

Si les grandeurs divisées sont proportionnelles ; icelles étans composées seront aussi proportionnelles.

Soient les grandeurs divisées AB , BC ; & DE , EF proportionnelles. Je dis qu'en composant, AC est à CB , comme DF à EF .

Car si comme AC est à BC , ainsi DF n'est pas à EF ; DF aura à quelque grandeur moindre ou plus grande que EF , même raison que AC à BC . Soit donc premierement DF à GF , moindre que EF , en même raison que AC à BC , s'il est possible : & en divisant par la précédente proposition, DG sera à GF comme AB à BC . Mais comme AB à BC , ainsi DE est à EF : donc aussi comme DG sera à GF , ainsi DE sera à EF par la 11. prop. de ce livre. Mais DG première est plus grande que DE troisième : donc par la 14. proposition de ce même livre GF seconde, sera aussi plus grande que EF quatrième, la partie que le tout : ce qui est absurde. Il n'y aura donc pas de DF à GF , moindre que EF , même raison que de AC à BC .

Par même discours on démontrera que DF n'aura pas à une grandeur plus grande que EF , même raison que AC à BC . Donc comme AC est à BC , ainsi DF est à EF , puisque DF ne peut être à une grandeur moindre, ou plus grande que



EF, en même raison que AC à BC. Parquoy si les grandeurs divisées sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Nous démontrerons icy ces deux moyens-là d'argumenter és proportions, lesquels nous avons décrits en la 14. def. de ce livre. Quant au premier, que nous avons nommé converse composition de raison : soit comme AB à BC ainsi DE à EF. Je dis, que comme AC est à AB, ainsi DF à DE. Car puis que comme AB est à BC, ainsi DE à EF, en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF à DE : donc en composant par la 18. p. cy-dessus, comme AC sera à AB, ainsi DF à DE : Ce qu'il falloit prouver.

Quant à l'autre moyen que nous avons appelé contraire composition de raison : soit derechef comme AB à EC, ainsi DE à EF : Je dis que par le contraire de composition de raison, comme AB à AC, ainsi DE à DF. Car puis que comme AB est à BC, ainsi DE à EF, en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF à DE : donc aussi en composant par la même prop. comme AC sera à AB, ainsi DF à DE ; & partant en changeant derechef, comme AB sera à AC, ainsi DE sera à DF : Ce qui étoit proposé à prouver.

T H E O R. 19. P R O P. XIX.

Si le tout est au tout, comme le retranché au retranché ; le reste sera aussi au reste, comme le tout est au tout.

Soit la toute AB à la toute DE, comme le retranché AC, au retranché DF. Je dis que le reste CB est aussi au reste FE, comme la toute AB à la toute DE.

Car puis que AB est à DE, comme AC à DF, aussi en permutant par la 16. prop. de ce livre AB sera à AC, comme DE à DF ; & par la 17. prop. de ce même livre, en divisant comme CB sera à AC, ainsi FE sera à DF : parquoy en permutant derechef par la susdite 16. prop. CB sera à FE, comme AC à DF, c'est-à-dire

comme la toute AB à
la toute DE, puis
que AB, DE, &
AC, DF, ont été
posées en même rai-



son. Parquoy si le tout est au tout comme le retranché au retranché, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

SCHOLIE.

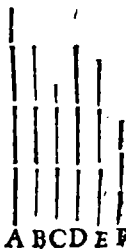
Nous démontrerons icy ce moyen-là d'argumenter és proportions, qui est pris par la conversion de raison. Car soit comme AB à CB, ainsi DE à FE. Je dis par conversion de raison, AB être aussi à AC, comme DE à DF. Car puis que comme AB est à CB, ainsi DE est à FE en divisant par la 17. prop. de ce livre, comme AC à CB, ainsi DF à FE: donc aussi en changeant comme CB à AC, ainsi EF à DF: & partant en composant par la 18. prop. de ce cinquième livre, comme AB sera à AC, ainsi DE sera à DF: ce qui étoit proposé.

THEOR. 20. PROP. XX.

Si trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, étans prises de deux en deux; sont en même raison, & qu'en raison égale la première soit plus grande que la troisième; aussi la quatrième sera plus grande que la sixième; & si égale, égale; si plus petite, plus petite.

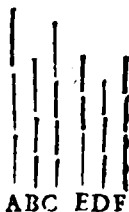
Soient trois grandeurs d'un côté A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & comme A à B, ainsi D à E, & comme B à C, ainsi E à F: & que A première soit plus grande que C troisième. Je dis que D 4. sera aussi plus grande que F 6.

Car puis que A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A à B que de C à B par la 8. prop. de ce cinquième livre. Mais comme A est à B ainsi D à E, & par la 13. p. 5. il y aura plus grande raison de D à E, que de C à B. Item comme C est à B, ainsi F à E: (car puis que B est à C, comme E à F, en changeant comme



C sera à B, ainsi F à E.) il y aura donc aussi plus grande raison de D à E que de F à E, & par la 10. pr. 5. D sera plus grande que F.

Que si A est égale à C; je dis aussi que D sera égale à F. Car puis que A est égale à C, par la 7. p. de ce livre, A sera à B comme C à B. Mais comme A est à B, ainsi D à E; & par la 11. pr. 5. D sera à E, comme C à B: & comme C est à B, ainsi F à E. Donc D sera aussi à E comme F à E: & partant D & F seront égales par la 9. prop. de ce même livre.



En troisième lieu, si A est moindre que C, je dis aussi que D est moindre que F. Car puisque A est moindre que C, il y aura moindre raison de A à B, que de C à B par la 8. p. 5. Mais comme A est à B, ainsi D est à E: il y aura donc aussi moindre raison de D à E, que de C à B, par la 13. prop. de ce cinquième livre. Mais en changeant comme dessus, C est à B, comme F à E. Il y a donc pareillement moindre raison de D à E, que de F à E: & partant par la 10. p. 5. D sera moindre que F. Parquoy si trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



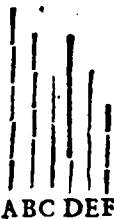
THEOR. 21. PROP. XXI.

Si trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, prises de deux en deux sont en même raison, étant leur proportion sans ordre, & qu'en raison égale la première soit plus grande que la troisième; aussi la quatrième sera plus grande que la sixième; & si égale, égale; si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'un côté A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, lesquelles prises de deux en deux soient en même raison, étant leur proportion troublée, sçavoir que comme A à B, ainsi E à F, & comme B à C, ainsi D à E. Je dis que comme A sera égale, plus

grande, ou plus petite que C, aussi D sera égale, plus grande, ou plus petite que F.

Car si A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A à B, que de C à B par la 8. pr. de ce livre. Mais comme A à B, ainsi E à F; il y aura donc plus grande raison de E à F, que de C à B par la 13. prop. d'iceluy cinquième livre. Et d'autant que comme B est à C, ainsi D est à E, en changeant comme C sera à B, ainsi E à D. Il y aura donc aussi plus grande raison de E à F, que de E à D: & partant par la 10. prop. 5. D sera plus grande que F.



On peut prouver comme en la précédente, si A est égale, ou plus petite que C; aussi D être égale, ou moindre que F. Parquoy si trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 22. PROP. XXII.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, lesquelles étans prises de deux en deux soient en même raison; icelles en raison égale seront proportionnelles.

Soient trois grandeurs d'un côté A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & soit A à B comme D à E, & B à C comme E à F. Je dis qu'en raison égale comme A est à C, ainsi D à F.



Car étans prises G, H equemultiples de A, D: Item I, K, equemultiples de B, E: Item L, M, equemultiples de C, F: puisque A est à B, comme D à E, aussi G multiplie de A première sera à I multiplie de B deu-

xième, comme H multiplie de D troisième à K multiplie de E quatrième par la 4. p. de ce cinquième livre. Par même raison I sera à L, comme K à M. Vû donc que les trois grandeurs, G, I, L, & les trois autres H, K, M, étans prises de deux en deux sont en même raison, par la 10. pr. 5. si G excède L, aussi H excèdera M; & si égale, égale; & si plus petite, plus petite: & partant puis que G, H, equemultiples de A & D défailent, sont égales, ou excèdent L, M, equemultiples quelconques de C & F, par la 6. def. A sera à C, comme D à F: ce qu'il falloit prouver.

Maintenant soient plus de trois grandeurs, tellement que C soit aussi à N, comme F à O. Je dis que A est encore à N comme D à O. Car puisque nous venons de démontrer que A est à C, comme D à F; & on a posé C être à N, comme F à O, il y aura trois grandeurs A, C, N, & trois autres D, F, O, lesquelles sont prises de deux en deux en même raison. Donc comme il a été démontré es trois grandeurs cy-dessus, A sera derechef à N, comme D à O. En la même maniere sera démontré en tant de grandeurs qu'on voudra. Si donc il y a tant de grandeurs qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Le docteur Stevin en la 19. def. de ses Probl. Geomet. explique une sorte d'argumenter es proportions, qu'il appelle proportion transformée, qui peut estre reduite en un tel theoreme que le suivant.

S'il y-a deux grandeurs, desquelles chacune soit coupée en tant de parties qu'on voudra égales en multitude, & proportionnelles: la composée de tant de parties qu'on voudra de la premiere grandeur, sera à la composée des parties restantes, en même raison que la composée, d'autant de parties de la derniere grandeur, sera à la composée des parties restantes d'icelle. Et si quelconque partie de l'une est coupée en deux autres parties, & la partie de l'autre correspondante à cette partie-là, est aussi coupée en deux autres parties proportionnelles à ces deux-là: les totales grandeurs seront aussi coupées proportionnellement.

Soit une grandeur AB coupée en tant de parties qu'on voudra AC, CD, DE, EF, FB ; & une autre grandeur GH , coupée en autant de parties que AB , sçavoir es cinq GI, IK, KL, LM, MH , proportionnelles à celles là de AB . Je dis que AD composée des deux parties AC, CD , est à DB composée des trois parties restantes, comme GK composée des deux parties GI, IK , est à KH composée des trois autres parties restantes. Car puis

$A \quad C \quad D \quad E \quad F \quad B$

$G \quad I \quad K \quad L \quad M \quad H$

que comme AC est à CD , ainsi GI est à IK , en composant par la 18. p. de ce

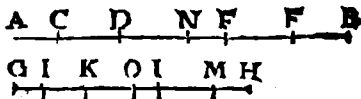
livre AD sera à CD , comme GK à IK . Mais comme CD à DE , ainsi IK à KL : donc par la 22. prop. de ce mesme livre, en raison égale, comme AD sera à DE , ainsi GK sera à KL . Derechef, pource qu'en changeant, BF est à FE , comme HM à ML , aussi en composant BE sera à FE , comme HL à ML . Mais FE est à ED , comme ML à LK : donc en raison égale, BE sera à ED comme HL à LK ; & en composant, BD sera à ED , comme HK à IK ; & en changeant, DE à DB , comme KL à KH . Parquoy puis qu'il a esté démontré que AD est à DE , comme GK à KL , & DE est à DB , comme KL à KH , par la susdite 22. prop. 5. en raison égale comme AD sera à DB , ainsi GK sera à KH .

Nous démontrerons en la mesme maniere, que comme AC est à CB , ainsi GI est à IH . Car derechef en changeant, composant, & par égalité de raison, comme BC sera à DC , ainsi HI à KI : & en changeant, comme CD sera à CB , ainsi IK sera à IH . Veu donc que comme AC est à CD , ainsi GI est à IK , & comme CD à CB , ainsi IK à IH : en raison égale, comme AC sera à CB , ainsi GI sera à IH .

Par mesme raison, comme AF sera à FB , ainsi GM sera à MH : Car derechef en composant, & par égalité de raison, comme AF sera à EF , ainsi GM sera à LM , par les susdites 18. & 21. prop. de ce livre. Mais aussi comme EF est à FB , ainsi LM à MH : Donc en raison égale, comme AF est à FB , ainsi GM est à HM , & ainsi des autres: appert donc ce qui estoit premierement proposé.

Maintenant soit coupée, (comme pour exemple) la troisième partie DE en deux quelconques parties DN, NE ; & ainsi

la troisieme KL en deux parties KO, OL proportionnelles a celle-là. Je dis que comme AN à NB, ainsi GO à OH. Car en changeant, comme



EN sera a ND, ainsi LO à OK : & en composant par la 18. prop. 5. comme ED sera à DN, ainsi LK à KO. Parquoy puis que comme CD est à DE ; ainsi IK à KL : & comme DE à DN, ainsi KL à KO : par la 22. prop. 5. en raison egale, comme CD sera à DN, ainsi IK à KO : donc les parties AC, CD, DN, sont proportionnelles aux parties GI, IK KO. De rechef, pource qu'en changeant, comme FE est à ED, ainsi ML à LK : & en composant, comme DE à NE, ainsi KL à OL, en raison egale, comme FE sera à EN, ainsi ML, à LO, & en changeant, comme NE à EF, ainsi OL à LM : & partant toutes les parties AC, CD, DN, NE EF, FR, sont proportionnelles à toutes les parties GI, IK, KO, OL, LM, MH. Donc comme il a esté demonstré en la premiere partie, AN sera à NB comme GO à OH : appert donc ce qui estoit proposé en second lieu.

A ce Theoreme nous en joindrons deux autres, le premier desquels est tel.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, lesquelles prises de deux en deux, soient en mesme raison : toutes les grandeurs d'un ordre, seront à laquelle on voudra d'icelles en mesme raison, que toutes les grandeurs de l'autre ordre seront à la correspondante.

Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & soit A à B, comme D à E, & B à C, comme E à F : je dis, que comme toutes les grandeurs A, B, C ensemble, seront à laquelle on voudra d'icelles, par exemple à la dernière C, ainsi toutes les grandeurs D, E, F ensemble, seront à la dernière F. Car puisque comme A est à B, ainsi D à E, en composant A, B sont à B comme D, E, à E. Mais B est à C, comme E à F : donc en raison égale A, B seront à C, comme D, E à F : & en composant A, B,



C, seront à C, comme D, E, F à F. Ce qu'il falloit prouver.

Que s'il y avoit davantage de grandeurs, la demonstration ne seroit dissemblable à celle cy-dessus : car il n'y auroit qu'à repeter la composition & égalité de raison autant de fois qu'il seroit de besoin : Comme par exemple, soient encore G & H, tellement que C soit à G, comme F à H. D'autant que A, B, est à C, comme D, E est à F ; & C à G, comme F à H ; en raison égale A, B, sont à G comme D, E à H, & en composant A, B, G, sont à G, comme D, E, H à H. Mais puis que comme C est à G, ainsi F à H, en changeant, comme G sera à C, ainsi H à F : donc en raison égale, comme A, B, G sont à C, ainsi D, E, H, à F ; & en composant comme toutes les grandeurs A, B, G, C, ensemble, seront à la seule C, ainsi toutes les grandeurs D, E, H, F ensemble, seront à la seule F.

Mais si on vouloit prouver, que comme toutes les quatre grandeurs A, B, C, G, sont à la dernière G, ainsi les quatre autres D, E, F, H, sont à la dernière H, il seroit bien plus bref : Car puis que nous avons démontré, que comme A, B, C, sont à C, ainsi D, E, F à F, & que comme C est à G, ainsi F est à H en raison égale, comme A, B, C seront à G, ainsi D, E, F à H : donc en composant, toutes les grandeurs A, B, C, G, seront à G, comme toutes les grandeurs D, E, F, H seront à H.

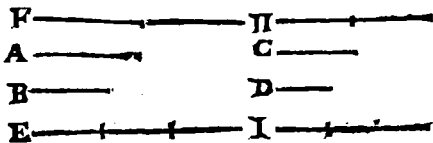
En la même sorte on démontrera, que toutes lesdites grandeurs A, B, C, G seront à A, comme toutes les grandeurs D, E, F, H, seront à D, n'y ayant autre difference, sinon qu'il faut prendre au contraire de ce que dessus.

Et de ce est manifeste, que comme laquelle on voudra des grandeurs du premier ordre, est à sa correspondante du second ordre, ainsi toutes les grandeurs du premier ordre seront à toutes les grandeurs de l'autre ordre.

Le second Theoreme est démontré par Clavius au Scholie de cette 22. prop. & est tel.

Si la premiere est à la seconde en même raison que la tierce à la quarte : les equemultiplices de la premiere & troisieme auront aussi une même raison à la seconde & quatrieme. Item les equemultiplices de la seconde & quatrieme, auront une même raison à la premiere & troisieme. Et au contraire, la seconde & quatrieme auront une même raison aux equemultiplices de la premiere & troisieme. Item la premiere & troisieme auront une même raison aux equemultiplices de la deuxième & quatrieme.

Soit A à B , comme C à D , & soient F , H , equemultiplices de A , C : item G , I , equemultiplices de B , D . Je dis que F est à B , comme H à D : item que G est à A , comme I à C . Et au contraire que B est à F , comme D à H : item A à G , comme C à I . Car puis que F est autant multiplie de A , que H l'est de C , comme F est à A , ainsi H à C , & par l'hypothese A est à B , comme C à D : donc en raison égale par la 22. pr. 5. comme F sera à B , ainsi H sera à D . Derechef, pource que G est à B , comme I à D , & comme B à A , ainsi D à C : (car puis que A est à B comme C à D par l'hypothese, en changeant comme B à A , ainsi D à C) en raison égale, comme G sera à A , ainsi I à C par la susdite 22. prop. 5.



Maintenant pource que B est à A , comme D à C par raison inverse : & comme A à F , ainsi C à H : en raison égale, comme B sera à F , ainsi D à H . Derechef, puis que A est à B , comme C à D : & comme B est à G , ainsi D à I : en raison égale, comme A sera à G , ainsi C à I , par ladite 22. prop. 5. Ce qui estoit proposé.

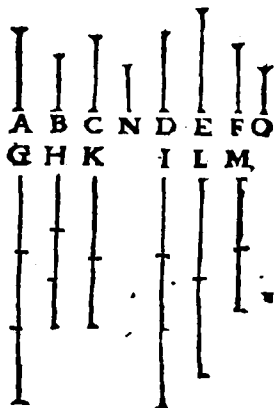
Par cecy est manifeste un moyen d'argumenter, dont les Geometres s'aident souvent, principalement Archimedes, Apollonius Pergeus, & autres : sçavoir est comme A à B , ainsi C est à D : donc comme F double, ou triple, ou quadruple, &c. de A est à B , ainsi aussi H double, ou triple, ou quadruple, &c. de C est à D : Item comme A est à B , ainsi C à D : donc comme A est au double, triple, ou quadruple, &c. de B , sçavoir à G : ainsi aussi C sera au double, au triple, ou quadruple, &c. de D , sçavoir à I .

THEOR. 23. PROP. XXIII.

Si trois grandeurs, & autant d'autres, prises de deux en deux sont en même raison, & en proportion troublée : icelles en raison égale seront proportionnelles.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & soient prises de deux en deux en même raison, étant leur proportion troublée, sçavoir que comme A à B, ainsi E à F, & comme B à C, ainsi D à E. Je dis qu'en raison égale A sera à C, comme D à F.

Car étans prises G, H, I, equemultiples de A, B, D : item K, L, M, quelconques autres equemultiples de C, E, F. Par la 15. p. de ce livre comme A sera à B, ainsi G à H, puis que G, H, sont equemultiples d'icelles A, B, Mais comme A est à B, ainsi est E à F : donc par la 11. p. 5. comme G est à H, ainsi E est à F. Mais comme B est à C, ainsi aussi L est à M, par la susdite 15. pr. 5. pource que L, M, sont equemultiples d'icelles



E, F : donc aussi comme G est à H, ainsi L est à M, par la 11. p. 5. & puis que comme B est à C, ainsi D à E, par la 4. pr. 5. comme H multiplie de la première B, sera à K multiplie de la seconde C, ainsi I multiplie de la troisième D, sera à L multiplie de la quatrième E : donc les trois grandeurs G, H, K, & les trois autres I, L, M, étans prises de deux en deux sont en même raison, & la proportion d'icelles sans ordre, puis qu'il a été démontré, que comme G est à H, ainsi L est à M, & comme H est à K, ainsi I à L ; & partant par la 21. p. 5. si G est plus grande, égale, ou moindre que K, aussi I sera plus grande, égale, ou moindre que M, & par la 6. def. 5. comme A sera à C, ainsi sera D à F. Parquoy si trois grandeurs, & autant d'autres, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Que s'il y avoit plus de trois grandeurs, & que leur propor-

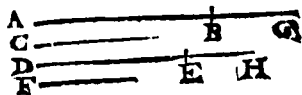
tion soit troublée, sçavoir est que comme A est à B , ainsi F soit à O , & comme B est à C , ainsi E soit à F , & comme C à N , ainsi D à E . Je dis que A sera à N , comme D à O . D'autant qu'il a esté démontré en trois grandeurs que comme A est à C , ainsi F est à O , & que par l'hypothese comme C est à N , ainsi D est à E , il y aura trois grandeurs d'un côté A , C , N , & trois d'un autre D , E , O , lesquelles prises de deux en deux sont en mesme raison, & en proportion troublée. Donc derechef en raison égale démontrée en trois grandeurs A sera à N , comme D à O . Le mesme sera aussi démontré en cinq grandeurs par quatre, comme il a esté démontré en quatre par trois, & ainsi semblablement de davantage.

THEOR. 24. PROP. XXIV.

Si la premiere est à la seconde, comme la troisième à la quatrième, & la cinquième à la seconde, comme la sixième à la quatrième; la composée de la premiere & cinquième, sera à la seconde, comme la composée de la troisième & sixième, sera à la quatrième.

Soit la premiere AB à la seconde C , comme la troisième DE est à la quatrième F ; & la cinquième BG à la deuxième C , comme la sixième EH à la quatrième F . Je dis que la toute AG , sera à C , comme la toute DH à F .

Car puisque comme BG à C , ainsi EH à F , aussi en changeant, comme C sera à BG , ainsi F à EH . Vû donc que AB est à C , comme DE à F , & C à



BG , comme F à EH , en raison égale, AB sera à BG , comme DE à EH , par la 22. p. 5. & en composant, comme la toute AG sera à BG , ainsi la toute DH sera à EH , par la 18. pr. d'iceluy 5. livre: & derechef puis que AG est à BG , comme DH à EH , & BG à C , comme EH à F , en raison égale, AG sera à C , comme DH à F .

Si donc la première est à la seconde, comme la troisième à la quatrième, &c. Ce qui étoit à prouver.

S C H O L I E.

Presque en la mesme maniere sera démontré en tout genre de proportion, ce qui a esté démontré à la 6. prop. de ce 5. livre, tant seulement aux grandeurs multiples, sçavoir est,

Si deux grandeurs ont même proportion à deux autres grandeurs, & que des retranchées ayent même proportion à icelles; les restantes auront aussi même proportion à icelles.

Que AG & DH ayent mesme proportion à C & F; c'est à dire que comme AG est à C, ainsi DH soit à F. Item les retranchez AB & DE ayent mesme proportion à icelles C & F, tellement que comme AB est à C, ainsi DE soit aussi à F: Je dis que les restantes BG, EH ont mesme proportion à icelles C, F, c'est à dire que comme BG est à C, ainsi EH est à F. Car d'autant que comme AB est à C, ainsi DE est à F, par raison inverse, comme C à AB, ainsi F à DE: donc puis que AG est à C, comme DH à F, & C à AB, comme F à DE, en raison égale AG sera à AB, comme DH à DE: & en divisant comme BG sera à AB, ainsi DH à DE. Et derechef, puis que BG est à AB comme EH à DE; & AB à C, comme DE à F, en raison égale BG sera à C, comme EH à F. Ce qui est proposé.

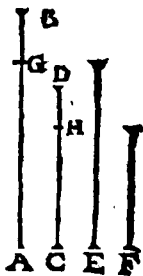
THEOR. 25. PROP. XXV.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande & la plus petite, sont plus grandes que les deux autres.

Soient quatre grandeurs proportionnelles AB, CD, E, F, desquelles AB soit la plus grande & F la plus petite. Je dis que AB & F ensemble, sont plus grandes que les deux autres CD & E ensemble.

Car si de AB on retranche AG égale à E, & de CD on retranche CH égale à F: AG sera à CH, comme E à F, c'est

c'est-à-dire comme AB à CD . Et puis-
que la toute AB est à la toute CD , com-
me la retranchée AG à la retranchée
 CH ; par la 19. prop. de ce livre, com-
me la toute AB sera à la toute CD , ainsi
le reste GB sera au reste HD : Parquoy
iceluy reste GB sera plus grand que le
reste HD , comme la toute AB est plus
grande que la toute CD . Et pour au-
tant que AG & E sont égales, si on
ajoute à icelles, les grandeurs égales
 F & CH , c'est à sçavoir, F à icelle
 AG , & CH à E ; viendront AG & F en-
semble, égales à E & CH ensemble. Et ajoutant à ces
choses égales, les inégales GB , & HD , seront faites
 AB & F ensemble plus grandes que GE & CD ensemble,
puis que GB est plus grande que HD . Parquoy si quatre
grandeurs sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit
démontrer.



S C H O L I E.

Or il s'ensuit nécessairement que si la grandeur antecédante
d'une raison, est la plus grande de toutes celles de la proportion,
que la conséquente de l'autre raison, sera la plus petite de toutes,
comme on peut voir en l'exemple proposé. Car d'autant que
comme AB est à CD , ainsi E à F ; & que AB première est plus
grande que E tierce, par la 14. prop. 5. CD seconde sera aussi
plus grande que F quatrième.

Semblablement, pource que AB est plus grande que CD ,
aussi E sera plus grande que F à cause de la similitude des rai-
sons, comme nous avons dit au Scholie de la même 14. prop.
Que si au contraire la grandeur antecédante d'une raison est la
plus petite de toutes, la conséquente de l'autre sera la plus gran-
de, comme il appert, si on dit que F est à E , comme CD à AB .

Commandin ajoute en ce lieu, le theoreme suivant.

Si trois grandeurs sont proportionnelles, la plus
grande & la plus petite d'icelles, seront plus grandes
que le double de l'autre.

Soyent trois grandeurs proportionnelles A, B, C , tellement que

comme A est à B , ainsi B à C & soit A la plus grande, & D la plus petite : Je dis que A & D ensemble, sont plus grans que le double de B . Car ayant pris D égale à B , comme A sera à B , ainsi D sera à C ; & partant A & C ensemble, seront plus grandes que B & D ensemble par la 25. prop. 5. c'est à dire que le double de B . Ce qui est proposé.



Euclide finit icy son 5. livre des Elemens ; mais d'autant que Campanus, Commandin & Clavius y ajoutent quelques autres propositions, dont les bons Auteurs s'aident fort souvent, & les citent, comme si elles estoient d'Euclide, nous les adjointerons aussi icy.

THEOR. 26. PROP. XXVI.

Si la premiere a plus grande raison à la seconde, que la troisieme à la quatrieme : en changeant, la seconde aura moindre raison à la premiere, que la quatrieme à la tierce.

Que A ait plus grande raison à B que C à D : Je dis que la raison de B à A est moindre, que la raison de D à C . Car soit entendu E estre à B , comme C est à D . Donc aussi la raison de A à B sera plus grande que celle de E à B ; & par la 10. prop. 5. A sera plus grande que E ; & partant B aura moindre raison à A qu'à E par la 8. prop. 5. Mais comme B est à E , ainsi est en changeant D à C . Donc aussi la raison de B à A est moindre que celle de D à C . Ce qu'il falloit demonstrier.



SCHOLIE.

Nous demonstrerons presque en la mesme maniere que si la premiere a moindre raison à la seconde, que la troisieme à la quatrieme ; en changeant, la seconde aura plus grande raison à la premiere, que la quarte à la tierce.

Que *A* ait moindre raison à *B*, que *C* à *D*: Je dis qu'en changeant *B* a plus grande raison à *A*, que *D* à *C*. Car soit entendu *E* estre à *B*, comme *C* à *D*: & la raison de *A* à *B* sera pareillement moindre que celle de *E* à *B*, parce que nous avons démontré au Scholie de la 13. prop. 5. Donc par la 10. prop. 5. *A* sera moindre que *E*: & par la 8. prop. 5. la raison de *B* à *A* sera plus grande que de *B* à *E*. Mais comme *B* est à *E*, ainsi est en changeant *D* à *C*: Donc aussi la raison de *B* à *A* sera plus grande que de *D* à *C*.

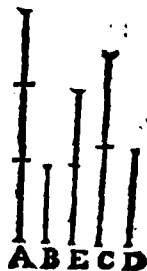


Autrement. D'autant que la raison de *A* à *B*, est moindre que de *C* à *D*: la raison de *C* à *D* sera plus grande que celle de *A* à *B*: donc en changeant par la 26. prop. 5. la raison de *D* à *C*, sera moindre que de *B* à *A*: & partant il y aura plus grande raison de *B* à *A* que de *D* à *C*. Ce qui estoit proposé.

THEOR. 27. PROP. XXVII.

Si la premiere a plus grande raison à la seconde, que la tierce à la quarte; aussi en permutant la premiere aura plus grande raison à la tierce, que la seconde à la quarte.

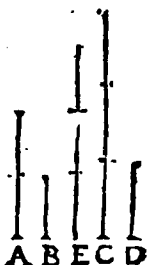
Que *A* ait plus grande raison à *B* que *C* à *D*. Je dis qu'en permutant *A* aura plus grande raison à *C*, que *B* à *D*. Car soit entendu *E* estre à *B*, comme *C* à *D*: & la raison de *A* à *B* sera aussi plus grande que de *E* à *B*: & partant *A* sera plus grande que *E* par la 10. prop. 5. donc la raison de *A* à *C* sera plus grande que de *E* à *C* par la 8. prop. 5. Mais pource qu'en permutant comme *E* est à *C*, ainsi *B* est à *D*, (car *E* est posée à *B*, comme *C* à *D*,) il y aura aussi plus grande raison de *A* à *C*, que de *B* à *D*. Ce qui est proposé.



SCHOLIE.

Nous démontrerons semblablement, que si la première a moindre raison à la seconde, que la troisième à la quatrième; en permutant la première aura moindre raison à la tierce, que la seconde à la quarte.

Car soit la raison de A à B moindre que de C à D : Je dis qu'en permutant A aura moindre raison à C , que B à D . Car soit entendu E estre à B , comme C à D , & la raison de A à B sera pareillement moindre que de E à B : & par la 10. prop. 5. A sera moindre que E : parquoy la raison de A à C sera moindre que de E à la même C par la 8. prop. 5. Et puis que E est posée estre à B , comme C à D : en permutant comme E à C , ainsi B à D . Donc aussi la raison de A à C sera moindre que de B à D . Ce qui est proposé.

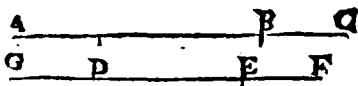


Autrement. D'autant qu'il y a moindre raison de A à B , que de C à D , il y aura plus grande raison de C à D que de A à B : donc en permutant par la 27. p. 5. il y aura aussi plus grande raison de C à A que de D à B : & par la 26. prop. 5. en raison inverse, il y aura moindre raison de A à C , que de B à D . Ce qui est proposé.

THEOR. 28. PROP. XXVIII.

Si la première a plus grande raison à la seconde que la tierce à la quarte: la composée de la première & de la seconde aura aussi plus grande raison à la seconde, que la composée de la tierce & de la quarte à la quarte.

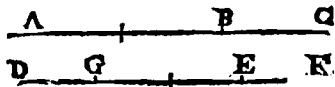
Que AB première ait plus grande raison à BC seconde, que DE tierce à EF quarte: Je dis qu'en composant AC aura plus grande rai-



son à BC, que DF à EF. Car soit entendu comme AB est à BC, ainsi quelque autre GE soit à EF; & il y aura aussi plus grande raison de GE à EF, que de DE à EF; & par la 10. prop. 5. GE sera plus grande que DE. Donc puis que comme AB est à BC, ainsi GE est à EF: en composant comme AC sera à BC, ainsi GF sera à EF: Mais il y a plus grande raison de GF à EF, que de DF à EF, par la 8. p. 5. (car GF est plus grande que DF.) Donc aussi AC aura plus grande raison à BC que DF à EF. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Que si AB a moindre raison à BC que DE à EF, aussi en composant AC aura moindre raison à BC que DF à EF. Car devecchess comme AB est à BC, ainsi quelque autre GE est à EF: Icelle GE sera moindre que DE par la 10. prop. 5. Et en composant AC sera à BC, comme GF, à EF. Mais GF a moindre raison à EF que DE à EF par la 8. pr. 5. attendu que GF est moindre que DE: donc aussi AC aura moindre raison à CB, que DE à EF.

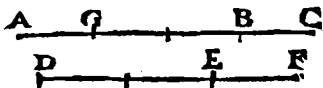


Autrement. D'autant qu'il y a moindre raison de AB à BC, que de DE à EF, il y aura plus grande raison de DE à EF, que de AB à BC; & par la 28. p. 5. en composant il y aura aussi plus grande raison de DE à EF, que de AC à BC: & partant il y aura moindre raison de AC à BC, que de DE à EF.

THEOR. 29. PROP. XXIX.

Si la composée de la première & seconde a plus grande raison à la seconde, que la composée de la tierce & quarte à la quatrième: Aussi en divisant, la première aura plus grande raison à la deuxième, que la troisième à la quatrième.

Que AC ait à BC plus grande raison que DF à EF : Je dis qu'en divisant AB, aura aussi à BC plus grande raison que DE à EF. Car soit entendu que comme DF est à EF, ainsi quelque autre GC soit à CB ; & il y aura aussi plus grande raison de AC à BC que de GC



à BC : & partant AC sera plus grande que GC par la 10. p. 5. Ostant donc BC commun, restera AB plus grande que GB : & par la 8. prop. 5. il y aura plus grande raison de AB à BC, que de GB à BC. Mais en divisant par la 17. prop. 5. comme GB est à BC, ainsi DE est à EF : (car on a posé GC être à BC, comme DF à EF.) Donc aussi la raison de AB à BC sera plus grande, que celle de DE à EF. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Que si AC a moindre raison à BC que DF à EF, aussi en divisant AB aura moindre raison à BC que DE à EF. Car si on entend GC être à BC, comme DF à EF, la raison de AC à BC sera pareillement moindre que celle de GC à BC : & par la 10. prop. 5.

AC sera moindre que GC.

Ostant donc BC commune,

restera AB moindre

que GB ; & par la 8.

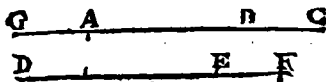
prop. 5. la raison de AB

à BC sera moindre que de GB à BC : Mais puis que GC est à

BC comme DF à EF, en divisant GB sera à BC comme DE

à EF : il y aura donc aussi moindre raison de AB à BC que

de DE à EF.

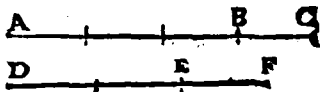


Autrement. D'autant que la raison de AC à BC est moindre que de DF à EF, il y aura plus grande raison de DF à EF, que de AC à BC : donc aussi en divisant, il y aura plus grande raison de DE à EF, que de AB à BC par la 29. p. 5. & partant la raison de AB à BC sera moindre que de DE à EF.

THEOR. 30. PROP. XXX.

Si la composée de la première & seconde a plus grande raison à la seconde, que la composée de la tierce & quarte à la quarte : par conversion de raison, la première & seconde aura moindre raison à la première, que la tierce & quarte à la tierce.

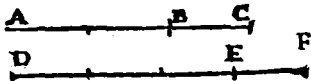
Que AC ait plus grande raison à BC que DF à EF: Je dis par conversion de raison, que AC a moindre raison à AB, que DF à DE. Car AC ayant plus grande raison à BC que DF à EF, en divisant AB aura plus grande raison à BC que DE à EF par la 29. prop. 5.



Donc par raison inverse, il y aura moindre raison de BC à AB que de EF à DE par la 26. pr. 5. Et partant en composant, il y aura aussi moindre raison de la toute AC à AB, que de la toute DF à DE. Ce qui étoit à démontrer.

SCHOLIE.

Semblablement si AC a moindre raison à CB que DF à EF, aussi par conversion de raison AC aura plus grande raison à AB que DF à DE. Car puis qu'il y a moindre raison de AC à BC que de DF à EF, par la 29. prop. 5. en divisant il y aura moindre raison de AB à BC que de DE à EF, & en changeant par la 26. prop. 5. il y aura pa-



reillement moindre raison de BC à AB, que de FF à DE: donc en composant par la 28. prop. 5. il y aura plus grande raison de AC à AB que de DF à DE.

Autrement. D'autant que la raison de AC à BC est moindre que celle de DF à EF, il y aura plus grande raison de DF à EF que de AC à BC : donc par conversion de raison,

il y aura moindre raison de DF à DE, que de AC à AB, c'est-à-dire qu'il y aura plus grande raison de AC à AB, que de DF à DE.

THEOR. 31. PROP. XXXI.

S'il y a trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, & qu'il y ait plus grande raison de la première des premières à la seconde, que de la première des dernières à la seconde, & aussi plus grande raison de la seconde des premières à la tierce, que de la seconde des dernières à la tierce : En raison égale, il y aura pareillement plus grande raison de la première des premières à la tierce, que de la première des dernières à la tierce.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & la raison de A à B soit plus grande que celle de D à E : Item, la raison de B à C soit aussi plus grande que de E à F : Je dis qu'en raison égale, il y aura plus grande raison de A à C que de D à F.

Car soit entendu G estre à C, comme E à F, & il y aura plus grande raison de B à C, que de G à C : Donc par la 10. prop. 5. B sera plus grande que G ; & par la 8. prop. 5. il y aura plus grande raison de A à G, que de A à B : Mais la raison de A à B est posée plus grande que de D à E : Il y aura donc beaucoup plus grande raison de A à G, que de D à E. Soit derechef posée H estre à G, comme D à E : Il y aura donc aussi plus grande raison de A à G, que de H à G : & par la 10. prop. 5. A sera plus grande que H : & partant A aura plus grande raison à C, que H à la même C, par la 8. prop. 5. Mais comme H est à C, ainsi est en raison égale D à F. (poures



que comme D est à E, ainsi H à G, & comme E est à F, ainsi G à C.) Il y aura donc aussi plus grande raison de A à C, que de D à F. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

Nous démontrerons en la même manière, que si la raison de A à B est la même que de D à E, & celle de B à C plus grande que de E à F : ou au contraire, si la raison de A à B est plus grande que de D à E, & celle de B à C la même que de E à F : en raison égale, il y aura pareillement plus grande raison de A à C, que de D à F : car soit premièrement A à B, comme D à E, mais la raison de B à C plus grande que de E à F. Soit posée G à C comme E à F ; & la raison de B à C sera plus grande que de G à C, & conséquemment B plus grande que G, par la 10. prop. 5. Parquoy il y aura plus grande raison de A à G que de A à B. Mais A est posée à B, comme D à E. Donc aussi la raison de A à G sera plus grande que de D à E. Soit posée derechef H à G, comme D à E ; & il y aura plus grande raison de A à G que de H à G ; & par la 10. prop. 5. A sera plus grande que H : Parquoy la raison de A à C sera plus grande que de H à C. Mais comme H est à C ainsi est en raison égale D à F : (attendu que comme D à E, ainsi H à G, & comme E à F, ainsi G à C.) Il y aura donc aussi plus grande raison de A à C que de D à F.

Maintenant la raison de A à B soit plus grande que celle de D à E, mais B soit à C, comme E à F. Soit posée G à C, comme E à F ; & B sera aussi à C, comme G à C : & par la 7. prop. 5. B sera égale à G. Parquoy A sera à G, comme A à B par la 7. prop. 5. Mais la raison de A à B est posée plus grande que de D à E. Donc aussi la raison de A à G sera plus grande que de D à E. Soit derechef posée H à G comme D à E ; & il y aura plus grande raison de A à G, que de H à G : & partant A sera plus grande que H par la 10. prop. 5. & il y aura plus grande raison de A à C que de H à C. Mais comme H est à C, ainsi en raison égale D est à F : (car comme D à E, ainsi H à G, & comme E est à F, ainsi G à C.) Il y aura donc pareillement plus grande raison de A à C que de D à F.

Nous démontrerons semblablement que si A a moindre raison à B, que D à E ; & B à C moindre raison que E à F : aussi en raison égale A aura moindre raison à C que D à F. Et la

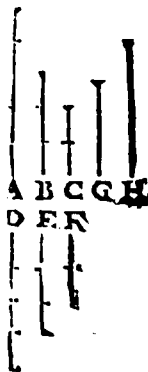
mesme adviendra encore, si A étant à B comme D à E, la raison de B à C est moindre que de E à F: Ou au contraire, si la raison de A à B étant moindre que de D à E, A est à C comme E à F: Car il est manifeste que la demonstration sera toujours la mesme que dessus.

THEOR. 32. PROP. XXXII.

S'il y a trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, & qu'il y ait plus grande raison de la premiere des premieres à la seconde, que de la seconde des dernieres à la tierce: Semblablement, qu'il y ait plus grande raison de la seconde des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la seconde: En raison égale, il y aura pareillement plus grande raison de la premiere des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la tierce.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & que A ait plus grande raison à B, que E à F, & B à C que D à E: Je dis qu'en raison égale, A aura plus grande raison à C, que D à F.

Car soit entendu que G est à C, comme D à E; & il y aura aussi plus grande raison de B à C, que de G à C: partant B sera plus grande que G, par la 10. prop. 5. Parquoy la raison de A à G sera plus grande que de A à B, par la 8. prop. 5. Mais la raison de A à B est plus grande que de E à F: il y aura donc encore beaucoup plus grande raison de A à G que de E à F. Soit derechef entendu H estre à G, comme E est à F, & il y aura aussi plus grande raison de A à G, que de H à G, & par la 10 prop. 5. A sera plus grande que H: parquoy il y aura plus grande raison de A à C que de H à la mesme C. Mais comme H est à C,



ainfi est en raifon égale D à F : (car comme D est à E, ainfi G est à C, & comme E est à F, ainfi H à G.) Il y aura donc auffi plus grande raifon de A à C que de D à F : Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

On démontrera femblablement, que fi A a même raifon à B que E à F, & B à C plus grande que D à E : On au contraire, fi la raifon de A à B est plus grande que de E à F, mais celle de B à C la même que de D à E : en raifon égale, la raifon de A à C fera plus grande que de D à F.

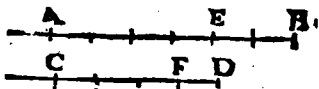
Par même raifon on démontrera auffi, que fi les raifons des premières grandeurs font moindres ; auffi la raifon des extrêmes fera moindre ; c'est-à-dire, que fi A a moindre raifon à B que E à F, & B à C que D à E : auffi A aura moindre raifon à C, que D à F.

T H E O R. 33. P R O P. XXXIII.

S'il y a plus grande raifon du tout au tout, que du retranché au retranché, il y aura auffi plus grande raifon du refte au refte, que du tout au tout.

Que la toute AB ait plus grande raifon à la toute CD, que la retranchée AE à la retranchée CF : Je dis que le refte EB aura plus grande raifon au refte FD, que la toute AB à la toute CD.

Car d'autant qu'il y a plus grande raifon de AB à CD, que de AE à CF, en permutant, il y aura auffi plus grande raifon de AB à AE, que de CD à CF par la 27. prop. 5. & par conversion de raifon il y aura moindre raifon de AB à EB, que de CD à FD, par la 30. prop. 5. Donc en permutant, il y aura auffi moindre raifon de AB à CD, que de EB à FD par la 27. prop. 5. c'est-à-dire, que le refte EB aura plus gran-



de raison au reste FD , que la toute AB , à la toute CD .
Ce qu'il falloit démontrer.

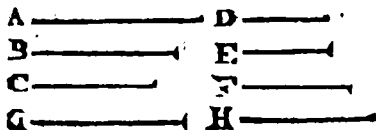
SCHOLIE.

Que si la toute AB a moindre raison à la toute CD , que la retranchée AE à la retranchée CF : aussi le reste EB aura moindre raison au reste FD , que la toute AB à la toute CD , comme il appert par la démonstration cy-dessus.

THEOR. 34. PROP. XXXIV.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra d'un côté, & autant d'un autre, & qu'il y ait plus grande raison de la première des premières à la première des dernières, que de la seconde à la seconde; & cette-cy soit aussi plus grande que de la tierce à la tierce, & ainsi de suite : Toutes les premières ensemble auront plus grande raison à toutes les dernières ensemble, que toutes les premières, la première ôtée, à toutes les dernières, la première aussi ôtée; mais moindre raison que la première des premières à la première des dernières; & finalement aussi plus grande raison que la dernière des premières à la dernière des dernières.

Soient premierement trois grandeurs A, B, C , & trois autres D, E, F ; & la raison de A à D soit plus grande que celle de B à E , & celle-cy plus grande que celle de C à F : Je dis que A, B, C ensemble, ont plus grande raison à D, E, F ensemble, que B, C ensemble à E, F



ensemble : mais moindre que A à D , & aussi plus grande que C à F .

Car puis qu'il y a plus grande raison de A à D que de B à E , en permutant , il y aura aussi plus grande raison de A à B que de D à E par la 27. prop. 5. Donc en composant A & B ensemble , auront plus grande raison à B , que D & E ensemble à E par la 28. prop. 5. Et en permutant derechef , A & B ensemble , auront plus grande raison à D & E ensemble que B à E . Et puis que la toute A , B , a plus grande raison à la toute D , E , que la retranchée B à la retranchée E , la restante A aura aussi plus grande raison à la restante D , que la toute A , B , à la toute D , E , par la prec. prop. Par même raison , il y aura plus grande raison de B à E , que de la toute B , C , à la toute E , F . Il y aura donc encore bien plus grande raison de A à D , que de la toute B , C à la toute E , F . Donc en permutant , il y aura plus grande raison de A à B , C ensemble , que de D à E , F ensemble par la 27. prop. 5. Et en composant , il y aura plus grande raison de A , B , C à B , C , que de D , E , F à E , F , par la 28. prop. 5. Et en permutant derechef il y aura plus grande raison des toutes A , B , C ensemble , aux toutes D , E , F ensemble , que de B , C à E , F : ce qui est premièrement proposé.

Et puis qu'il y a plus grande raison de la toute A , B , C à la toute D , E , F , que de la retranchée B , C à la retranchée E , F , il y aura aussi plus grande raison de la restante A à la restante D , que de la toute A , B , C , à la toute D , E , F , par la prop. prec. Ce qui est secondement proposé.

Mais d'autant qu'il y a plus grande raison de B à E , que de C à F : en permutant il y aura aussi plus grande raison de B à C , que de E à F par la 27. prop. 5. Et en composant , la toute B , C aura plus grande raison à C , que la toute E , F , à F par la 28. prop. 5. Donc en permutant derechef , il y aura plus grande raison de B , C à E , F , que de C à F . Mais il a été démontré que A , B , C , ensemble ont plus grande raison à D , E , F , ensemble , que B , C , à E , F : Il y aura donc encore bien plus grande raison

des toutes A, B, C , aux toutes D, E, F , que de la dernière C à la dernière F . Ce qui est tiercement proposé.

Soient maintenant quatre grandeurs de part & d'autre, avec la même hypothèse, c'est-à-dire, que la raison de C tierce à F tierce soit plus grande, que de G quarte à H quatrième. Je dis que la même chose s'ensuit. Car comme il a déjà été démontré en trois grandeurs, il y a plus grande raison de B à E que de B, C, G ensemble à E, F, H ensemble. Donc il y aura encore plus grande raison de A à D , que de B, C, G , à E, F, H . Et en permutant il y aura plus grande raison de A à B, C, G que de D à E, F, H . Parquoy en composant il y aura aussi plus grande raison de A, B, G , à D, E, F, H , que de B, C, G , à E, F, H : & en permutant il y aura plus grande raison de A, B, C, G à D, E, F, H , que de B, C, G à E, F, H . Ce qui est premierement proposé.

Et vû qu'il y a plus grande raison de la toute A, B, C, G , à la toute D, E, F, H , que de la retranchée B, C, G , à la retranchée E, F, H , la restante A aura plus grande raison à la restante D , que la toute A, B, C, G , à la toute D, E, F, H . Ce qui est secondement proposé.

Mais comme il a été démontré en trois grandeurs, B, C, G ont plus grande raison à E, F, H , que G à H : & A, B, C, G plus grande à D, E, F, H , que B, C, G , à E, F, H : Il y aura donc beaucoup plus grande raison de A, B, C, G à D, E, F, H , que de la dernière G à la dernière H : ce qui est tiercement proposé.

En la même manière on conclurra la même en 5 grandeurs par 4 : & en 6 par 5, &c. tout ainsi qu'il est démontré en 4 par 3. Parquoy s'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

Fin du cinquième Livre.



ELEMENT

SIXIÈME.

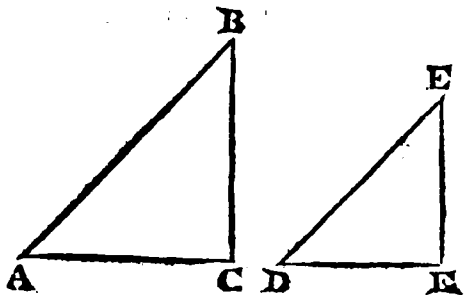
DEFINITIONS.



SEMBLABLES figures rectilignes, sont celles qui ont les angles égaux, un chacun au sien, & les côtez qui contiennent les angles égaux, proportionnaux.

C'est-à-dire, que toutes figures rectilignes sont dites semblables, si étans equiangles elles ont les côtez d'alentour leurs angles égaux proportion-

naux : comme les deux triangles ABC , DEF , seront dits semblables, si l'angle A est égal à l'angle D , l'angle B égal à l'angle E , &

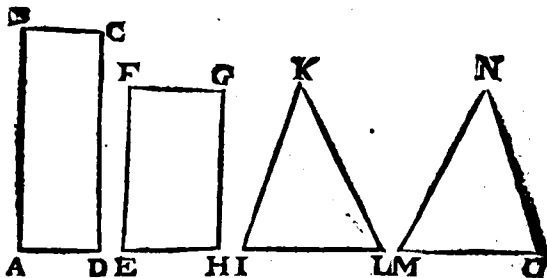


l'angle C à l'angle F ; les côtez qui sont & constituent iceux angles égaux , sont proportionnaux ; c'est à sçavoir , que comme AB est à AC , ainsi DE soit à DF , & comme AB est à BC , ainsi DE soit à EF , & comme AC est à BC , ainsi DF soit à EF.

Que si l'une ou l'autre des deux conditions susdites manque , c'est-à-dire , que chacun des angles de l'une des figures étant égal à chacun des angles de l'autre , si les côtez d'alentour leurs angles égaux ne sont proportionnaux ; ou au contraire : telles figures ne seront dites semblables , comme sont le quarré , & le quarré long : car ces deux figures ont bien les angles égaux , sçavoir droits : mais les côtez de l'une ne sont pas en même raison que les côtez de l'autre : car ceux du quarré sont en raison d'égalité , & ceux d'alentour l'angle droit du quarré long , sont en raison d'inégalité , puis que l'un est plus grand que l'autre. D'où est manifeste , que toutes figures rectilignes equiangles & équilaterales , lesquelles ont les angles & les côtez égaux en nombre , sont semblables , combien qu'elles soient inégales.

1. Les figures sont reciproques , quand les termes antecédans & conséquens des railons , sont en l'une & en l'autre figure.

C'est à dire , que s'il y a deux figures semblables ou non , dont le premier & dernier des termes proportionnaux soient en l'une des figures , & le second & troisième terme en l'autre ; icelles



figures seront dites reciproques. Comme si aux deux parallelogrammes ABCD, EFGH , les côtez AB, EC , sont proportion-

naux

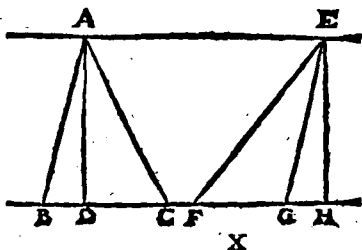
aux aux côtez EF, FG; tellement qu'il y ait mesme raison de AB à EF, que de FG à BC; ou bien que AB soit à FG comme EF à BC: Iceux parallelogrammes seront dits figures reciproques, d'autant qu'en chacun d'iceux est le terme antecedant de l'une des raisons, & le consequent de l'autre. Item les triangles IKL, MNC, seront aussi dits reciproques, si IK est à MN, comme MC à IL; ou bien IK à MC, comme MN à IL.

3. Une ligne droite est dite estre divisée en la moyenne & extrême raison, quand la toute est au plus grand segment, comme le plus grand segment est au moindre.

Quand quelque ligne droite, comme AB, est coupée inegalement en C, de telle sorte que la toute AB, soit au plus grand segment AC, comme iceluy plus grand segment AC, est au moindre segment BC: cette ligne AB sera dite estre coupée en C selon la moyenne & extreme raison. Or comme cela se fait, Euclide l'enseignera en la 30. prop. de ce livre, combien que sous autres paroles il l'ait déjà enseignée à la 11. prop. 2.

4. La hauteur d'une chascune figure, est la perpendiculaire tirée du sommet à la base.

Si de A sommet du triangle ABC, l'on mene AD perpendiculaire à la base BC, icelle perpendiculaire sera la hauteur d'iceluy triangle ABC: tellement que ledit triangle sera dit avoir autant de hauteur qu'est icelle perpendiculaire AD. Semblablement la perpendiculaire EH tirée de E, sommet du triangle EFG, sur la base FG, prolongée de la part de G, sera la hauteur d'iceluy triangle EFG. Parquoy si les perpendiculaires de deux figures menées



des sommets d'icelles sur leurs bases (soit qu'icelles bases soient prolongées, ou non) sont égales; icelles figures seront dites avoir même hauteur. Or telles perpendiculaires seront égales, quand les bases des figures & leurs sommets seront constitués en mêmes parallèles: Comme sont les perpendiculaires AD , EH , des triangles ABC , FEG , constitués entre mêmes parallèles. Car puis que les deux angles ADH , EHD ; intérieurs, & de même part, sont droits, les lignes AD , EH , seront parallèles par la 2^o. prop. 1. Mais AE , DH , sont aussi parallèles, puis que les triangles ABC , EFG , sont posés être constitués entre mêmes parallèles: Donc le quadrilatère $ADHE$, sera parallélogramme, & partant les côtés opposés AD , EH , seront égaux par la 3^o. prop. 1. Ce qui étoit à prouver.

5. Une raison est dite être composée de raisons, quand les quantitez des raisons multipliées entr'elles font quelque raison.

C'est-à-dire, que quand les quantitez de deux ou plusieurs raisons multipliées entr'elles, produisent quelque quantité de raison: icelle raison est dite être composée de celles-là. Or la quantité d'une raison est le dénominateur d'icelle, comme nous avons déjà dit sur la 3. def. 5. tellement que la quantité de la raison triple est 3: mais de la subtriple c'est $\frac{1}{3}$, &c. Ainsi la raison double se dit être composée de la sesquialtere, & de la sesquiterce, pource que les quantitez ou dénominateurs d'icelles; sçavoir est $1\frac{1}{2}$ & $1\frac{2}{3}$, étans multipliés entr'eux produisent 2, dénominateur ou quantité de la raison double.

Derechef, la même raison double sera dite être composée de la double sesquialtere, & de la subsesquiquarte: car les quantitez ou dénominateurs de ces deux raisons, étans multipliés

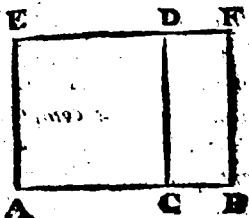
entr'eux , produisent encore 2 , dénominateur de la même raison double. Pareillement la raison trigecuple se dit être composée des raisons doubles, triple & quintuple ; d'autant que les dénominateurs d'icelles raisons , sçavoir est 2 , 3 , & 5 , étans multipliez entr'eux produisent 30 , dénominateur d'icelle raison trigecuple. Parquoy étans posées tant de grandeurs qu'on voudra par ordre, la raison des extrêmes sera composée des raisons entre-moyennes , pource que le dénominateur ou quantité de la raison de la premiere grandeur à la derniere , est produite & procréée par les dénominateurs des raisons entre-moyennes multipliez entr'eux : comme pour exemple , soit *A* à *B* en raison sesquialtere ; *B* à *C* en raison double ; & *C* à *D* en raison superbipartiente tierce : la raison des extrêmes *AD* , qui est quintuple , est composée des trois *A. B. C. D.* raisons susdites. Car il est évident que multipliant le dénominateur de la raison de *A* à *B* , par celui de *B* à *C* , sçavoir $1\frac{1}{2}$ par 2 viendrons 3 : & partant *A* est à *C* en raison triple , & multipliant le dénominateur d'icelle , sçavoir est 3 par le dénominateur de la raison de *C* à *D* , qui est $1\frac{2}{3}$ proviennent 5 ; & partant *A* qui est à *D* en raison quintuple , est produite & composée des raisons entre-moyennes.

Quelques interpretes afin de rendre plus intelligibles , tant les 27 28 & 29 prop. de ce livre , que plusieurs du 10. adjointent icy cette def.

6. Un parallelogramme étant appliqué selon quelque ligne droite donnée , est dit defaillir d'un

parallélogramme, lors qu'il n'occupe pas toute ladite ligne : mais il est dit excéder, quand il en occupe une plus grande; en sorte toutesfois qu'iceluy parallélogramme defaillant, ou excédant ait deux angles communs avec le parallélogramme appliqué sur toute la ligne proposée : & la différence de ces deux parallélogrammes est dite défaut, ou excez.

Soit une ligne droite AB sur laquelle soit constitué le parallélogramme $ACDE$, qui n'occupe pas toute ladite ligne AB , ains laisse CB ; & soit achevé le parallélogramme $ABFE$ tirant EF parallèle à CD jusques à ce qu'elle rencontre ED prolongée en F . On le parallélogramme AD appliqué selon la ligne droite A , ayant les deux angles A, E communs avec le parallélogramme AF , appliqué & décrit sur toute ladite ligne AB , est dit defaillir du parallélogramme CF ; & iceluy parallélogramme CF sera appelé le défaut.



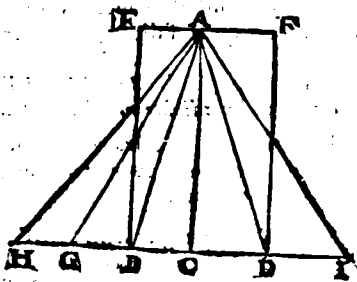
Derechef, soit une ligne droite AG , sur laquelle soit constitué le parallélogramme P , ayant le côté AB plus grand que la ligne proposée AC , & soit tirée CD parallèle à BE . Donc le parallélogramme AF appliqué selon la ligne droite AC , & qui avec le parallélogramme AD décrit sur toute ladite ligne AC a les deux angles A, E communs, sera dit excéder AD du parallélogramme CF , tellement qu'iceluy CB est dit l'excez.

THEOR. I. PROP. I.

Les triangles, & les parallélogrammes de même hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases.

Soient deux triangles ABC & ACD de même hauteur, sur les bases BC & CD : soient aussi deux parallélogram-

mes CE, CF de même hauteur, les bases desquels soient les mêmes BC, CD. Je dis premièrement que le triangle ABC, est au triangle ACD, comme la base BC, est à la base CD : c'est à sçavoir que si on pose pour première grandeur la base BC, pour seconde la base CD, pour troisième le triangle ABC, & pour quatrième le triangle ACD ; les equemul-



tiplices de la première & troisième seront plus petites, égales, ou plus grandes, que les equemultiplices de la seconde & quatrième, ainsi que se requiert la 6. définition du 5. livre.

Qu'il ne soit ainsi : qu'on prolonge BD de part & d'autre, & après avoir pris d'un côté BG & GH, chacune égale à BC : item de l'autre côté, DI égale à CD, soient menées les lignes droites AG, AH, AI. Donc par la 38. prop. les trois triangles ABC, ABG, AGH, étans sur bases égales & entre mêmes parallèles, seront égaux : aussi par les mêmes raisons les deux triangles ACD & ADI seront égaux ; ainsi il est évident qu'autant de fois que la base HC contiendra la base BC, autant de fois le triangle ACH contiendra le triangle ABC. Pareillement, autant de fois que la base CI contiendra la base CD, autant de fois le triangle ACI contiendra le triangle ACD. Parquoy si la base CH, est égale à la base CI, le triangle ACH sera aussi égal au triangle ACI, par la 38. prop. 1. Mais si la base est plus grande, conséquemment le triangle sera plus grand ; si plus petite, plus petit, & par la 6. def. 5, comme la base BC sera à la base CD, ainsi le triangle ABC sera au triangle ACD : ce qui étoit à démontrer pour la première partie.

Quant à la seconde partie touchant les parallelogrammes CE, CF, le même se peut dire que des triangles, parce qu'iceux parallelogrammes sont doubles des trian-

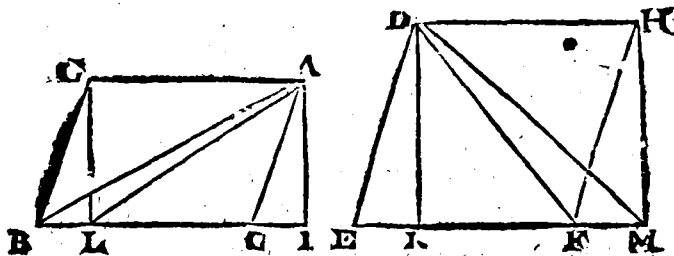
gles ABC , ACD par la 41. prop. 1. & par la 15. prop. si ce qui est prouvé d'iceux triangles s'entendra des parallelogrammes. Donc les triangles, & les parallelogrammes de même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Commandin adjointe en ce lieu cet autre Theoreme.

Les triangles, & les parallelogrammes, desquels les bases sont égales, ou une même, sont entr'eux, comme leurs hauteurs.

Soient deux triangles ABC , DEF , & les parallelogrammes $AGBC$, $DEFH$, ayans les bases BC , EF égales : Je dis que le triangle ABC est au triangle DEF , & le parallelogramme $AGBC$ au parallelogramme $DEFH$, comme la hauteur AI est à la hauteur DK . Car si on prend les lignes IL , KM égales aux bases BC , EF , & on tire les lignes LA , MD , le triangle ALI sera égal au triangle ABC par la 35. prop. 1. puis qu'ils sont sur bases égales LI , BC , & entre mêmes paralleles AG , IB : Par même raison le triangle DKM sera égal au triangle



DEF . Parquoy par la 7. prop. 5. comme ABC sera à DEF , ainsi ALI sera à DKM . Mais par la 1. prop. 6. comme ALI est à DKM , ainsi AI à DK . (car si AI , DK sont posées les bases, les lignes droites égales LI , KM feront les hauteurs.) Donc aussi ABC sera à DEF , comme AI à DK .

Et d'autant que par la 15. prop. 5. comme ABC est à DEF , ainsi le parallelogramme $AGBC$ au parallelogramme $DEFH$: (car iceux parallelogrammes sont doubles des triangles par

La 41. prop. 1.) aussi $AGBC$ sera à $DEFH$, comme AI à DK . Le même s'ensuivra si les triangles, & les parallelogrammes ont une même base.

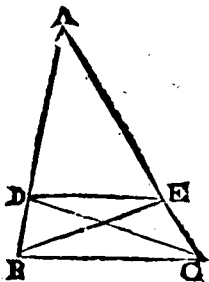
THEOR. 2. PROP. II.

Si on mène une ligne droite parallele à l'un des côtez d'un triangle, laquelle coupe les deux autres côtez ; elle les coupera proportionnellement : & si deux côtez d'un triangle sont coupez proportionnellement, la ligne coupante sera parallele à l'autre côté.

Soit le triangle ABC , dans lequel soit menée la ligne droite DE parallele au côté BC , couppant les deux autres côtez AB & AC aux points D & E . Je dis que les côtez AB , AC sont coupez proportionnellement aux points D & E , c'est-à-dire que AD sera à DB , comme AE est à EC .

Car estans menées les deux lignes BE & CD : par la 37. p. 1. les deux triangles DEB & EDC , estans sur même base, & entre mêmes paralleles, sont égaux ; & par la 7. p. 5. ils auront même raison l'un comme l'autre au troisième ADE . Mais par la 1. p. 6. les triangles DEB & DEA , estans de même hauteur, sont l'un à l'autre comme la base BD à la base DA : & par la même proposition, le triangle CDE , estant de même hauteur que l'iceluy triangle EDA , ils seront aussi l'un à l'autre, comme CE est à EA : & partant par la 11. prop. 5. BD sera à DA , comme CE à EA : (puisque ces deux raisons sont les mêmes que du triangle BED au triangle DEA , & du triangle CDE au même triangle DEA .) Ce qui étoit proposé.

Pour la seconde partie : je dis que si DB est à DA , comme CE à EA , la ligne coupante DE sera parallele au côté BC .



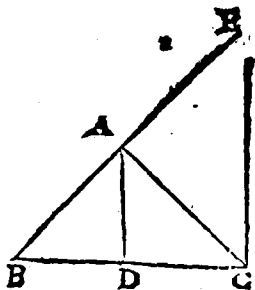
Car les triangles DEB & DEA , seront par la 1. prop. 6. l'un à l'autre, comme DB à DA . Item les deux autres triangles CDE , EDA , seront aussi l'un à l'autre, comme CE à EA : & par la 11. prop. 5. le triangle DEB sera au triangle DEA , comme le triangle CDE est au même triangle DEA : & par la 9. prop. 5. les deux triangles BED , & EDC seront égaux, lesquels étans sur même base DE , par la 39. prop. 1. ils seront entre mêmes parallèles : & partant DE sera parallèle à BC . Parquoy si l'on mène une ligne parallèle à l'un des côtez d'un triangle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si l'angle d'un triangle est coupé en deux également par une ligne droite, laquelle coupe aussi la base ; les segmens de la base seront l'un à l'autre comme les autres côtez du triangle : Et si les segmens de la base sont l'un à l'autre comme les autres côtez du triangle ; la ligne droite tirée du sommet à la section de la base, coupe l'angle en deux également.

Au triangle ABC , soit l'angle BAC coupé en deux également par la ligne AD , laquelle coupe aussi la base BC au point D : Je dis premièrement, que BD est à DC , comme AB à AC .

Qu'il ne soit ainsi : après avoir du point C mené CE parallèle à DA , soit continué BA directement jusques à ce qu'il rencontre CE en E ; (Or BA , CE se rencôteront, d'autant que les deux angles B & BCE sont moindres que deux droits, étans égaux aux deux B & BDA , qui sont moindres que deux droits par la 17. prop. 1.) & parce que DA



& CE sont paralleles, l'angle CAD sera égal à son alterne ACE par la 29. prop. 1. Et si l'exterieur DAB sera égal à l'opposé interieur AEC. Mais BAD, CAD étans égaux par l'hypothese, aussi par les com. sent. AEC, ACE seront égaux : & partant par la 6. prop. 1. les côtez AE & AC seront égaux. Mais par la precedente prop. BA est à AE, comme BD à DC ; (étant AD parallele à CE) & par conséquent BA sera aussi à AC, (égale à AE) comme BD à DC. Ce qui étoit proposé.

Pour la seconde partie : je dis que si BA est à AC, comme BD à DC, que l'angle CAB sera coupé en deux également par la ligne droite AD.

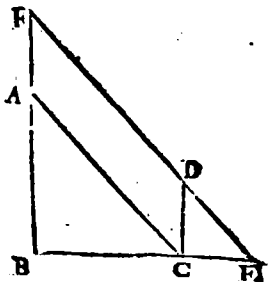
Car après avoir construit comme dessus, BA sera à AE, comme BD à DC, par la precedente prop. Et partant par la 11. prop. 5. BA sera à AE, comme le même BA est à AC, & par la 9. prop. 5. AE & AC seront égaux ; & partant par la 5. prop. 1. les deux angles AEC, ACE, seront aussi égaux ; & par la 29. prop. 1. ils sont égaux, l'un à DAB, & l'autre à DAC, lesquels par ce moyen seront aussi égaux ; ce qui étoit proposé. Parquoy si l'angle d'un triangle est coupé en deux également, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 4. PROP. IV.

Des triangles équiangles, les côtez qui sont au long des angles égaux, sont proportionnaux ; & les côtez qui soutiennent les angles égaux, sont de même raison,

Soient deux triangles ABC, DCE, équiangles : c'est-à-dire, que l'angle ABC soit égal à l'angle DCE, & l'angle ACB à l'angle E, & le troisième au troisième. Je dis que comme AB est à BC, ainsi DC à CE ; & comme BC à CA, ainsi CE à ED ; & finalement comme AB à AC, ainsi DC à DE. Car ainsi les côtez d'alentour les angles égaux, sont les proportionnaux, & les côtez homologues, ou de même raison, sont ceux-là qui soutiennent les angles égaux, c'est-à-dire que tous les antecédans, & semblablement les conséquens regardent les angles égaux.

Soient constitués les côtés BC , CE selon une ligne droite, tellement que l'angle externe DCE soit égal à l'intérieur ABC , & pareillement l'externe ACB à l'intérieur DEC : & d'autant que par la 17. prop. 1. les deux angles ABC , ACB sont moindres que deux droits, & l'angle DEC est égal à l'angle ACB , aussi les angles B & E seront moindres que deux droits : & partant les lignes BA & ED étans produites de la part de A & D , se rencontreront : Qu'elles soient donc prolongées & conviennent en F . Il est évident que l'angle extérieur ECD , étant par l'hypothèse égal à son opposé intérieur CBA ; DC sera parallèle à FB par la 28. prop. 1. Pareillement l'angle extérieur ACB étant égal à son opposé intérieur DEC , aussi par la même 28. prop. 1. CA & EF seront parallèles. Partant $ACDF$ sera parallélogramme, & par la 34 prop. 1. il aura les angles, & les côtés opposés égaux. Mais AC étant parallèle à EF , par la 2. prop. 6. AB sera à AF , ou CD son égale, comme BC à CE ; & en permutant par la 16. prop. 5. AB sera à BC , comme DC à CE . Pareillement CD étant parallèle à BF , comme BC sera à CE , ainsi FD , ou CA son égale, sera à ED par la 2. prop. 6. & en permutant BC sera à AC , comme CE à ED .



Veu donc que AB est à BC , comme DC à CE , & BC à CA comme CE à ED , aussi en raison égale AB sera à AC , comme DC à ED . Parquoy des triangles équiangles, &c. Ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

De cecy resulta, que si une ligne droite parallèle à un côté d'un triangle, coupe les deux autres côtés d'iceluy, elle ôtera un triangle semblable au tout. Comme au triangle BFE étant menée la ligne droite AC parallèle au côté FE , qui coupe les deux autres côtés en A & C : Je dis que le triangle

ABC retranché par icelle ligne *AC*, est semblable au triangle *BFE*. Car d'autant que par la 29. prop. 1. l'angle externe *BAC* est égal à l'interne de même côté *F*, & que l'angle *B* est commun à tous les deux triangles *BAC*, *BFE*, ils seront équiangles par le Corol. de la 32. prop. 1. Parquoy, comme il a été démontré cy-dessus, ils ont les côtes autour des angles égaux proportionnaux : & partant selon la 1. def. 6. iceux triangles *BAC* & *BEF* seront semblables.

THEOR. 5. PROP. V.

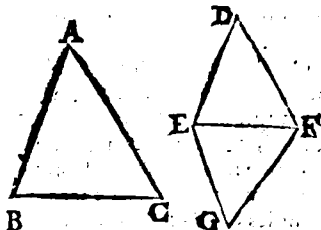
Si deux triangles ont les côtes proportionnaux, ils seront équiangles, & auront les angles égaux, sous lesquels les côtes de même raison seront subtendus.

Soient deux triangles *ABC*, & *DEF*, ayans les côtes proportionnaux, & soit *AB* à *BC* comme *DE* à *EF*, & *BC* à *CA*, comme *EF* à *FD*, & encore *AB* à *AC* comme *DE* à *DF*. Je dis que les triangles sont équiangles, scavoir l'angle *A* estre égal à l'angle *D*, & l'angle *B* à l'angle *E*, & l'angle *C* à l'angle *F* : car ainsi les angles égaux regardent les côtes de même raison.

Qu'il ne soit ainsi : sur la ligne *EF*, & aux deux points *E* & *F* soient construits deux angles, scavoir *FEH* égal à l'angle *B*, & *EFH* égal à l'angle *C*, tirant les lignes *EH*, & *EH* jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en *H* : Et par la 32. prop. 1. le 3^e angle *G*

sera égal au 3^e angle *A*. Parquoy les triangles *ABC*, *GEH* sont équiangles ; & par la 4. prop. 6, comme *AB* est à *BC*, ainsi *GE* à *EH*. Mais comme *AB* est à *BC*, ainsi aussi a été posé *DE* à *EF* : Donc par

la 11. prop. 5. comme *GE* à *EH*, ainsi *DE* à la même *EF* : & partant par la 9. prop. 5. *GE*, *DE* seront égales. Et d'autant que par la proposition précédente, comme *BC*



est à CA, ainsi EF est à FG ; & par l'hypothese comme BC est à CA, ainsi EF est à FD ; par la 11. prop. 5. comme EF sera à FG, ainsi la mesme EF sera à FD : & par la 9. prop. 5. FG, FD seront égales. Veu donc que les côtez EG, FG du triangle GEF, sont égaux aux côtez DE, DF du triangle DEF, chacun au sien, & la base EF commune aux deux triangles, les angles G & D seront égaux par la 8. prop. 1. & partant par la 4. prop. 1. les autres angles GEF, GFB seront aussi égaux aux autres DEF, DFE, chacun au sien. Parquoy l'angle G étant égal à l'angle A, aussi l'angle D sera égal au mesme angle A : & ainsi l'angle DEF sera égal à l'angle B, & l'angle DFE à l'angle C, ainsi qu'il étoit proposé. Si donc deux triangles ont les côtez proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, & les côtez au long d'iceux angles égaux, proportionnaux ; ils seront équiangles, & auront les angles égaux sous lesquels les côtez de mesme raison sont subtendus.

Soient les deux triangles ABC & DEF, ayans l'angle B égal à l'angle E, & comme AB à BC, ainsi DE soit à EF. Je dis que les triangles sont équiangles, sçavoir que l'angle A est égal à l'angle D, & l'angle C à l'angle F, car ainsi les angles égaux sont subtendus des côtez homologues.

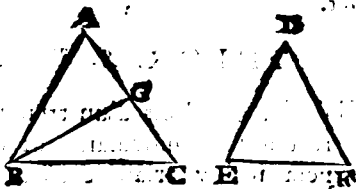
Qu'il ne soit ainsi ; sur la ligne EF soit construit, comme en la proposition. & fig. precedente, le triangle GEF équiangle au triangle ABC ; & par la 4. prop. 6. GE sera à EF, comme AB à BC, ou DE à EF, (car ils sont en la mesme raison) & par la 9. prop. 5. GE & DE (qui ont une mesme raison à EF) seront égaux ; & partant les deux triangles GEF & DEF, auront deux côtez égaux à deux côtez, sçavoir GE, EF, à DE, EF, chacun au sien, & les deux angles au point E, égaux (car ils sont chacun égal à l'angle B) & par la 4. prop. 1. ils auront la base égale à la base, & les autres angles égaux aux autres angles, cha-

can au sien, & partant iceux triangles seront équiangles. Mais l'un d'iceux triangles, sçavoit GEF, est équiangle au triangle ABC par la construction. Donc l'autre triangle DEF sera aussi équiangle au mesme triangle ABC. Parquoy si deux triangles ont un angle égal à un angle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, & les côtez au long d'un autre angle, proportionnaux, étans les troisièmes angles de mesme espece : Iceux triangles seront équiangles, & auront les angles égaux, au long desquels les côtez seront proportionnaux.

Soient deux triangles ABC, & DEF, desquels les deux angles A & D soient égaux, & les côtez AB, BC d'alentour l'angle ABC, proportionnaux aux côtez DE, EF d'alentour l'angle E, c'est-à-dire que comme AB est à BC, ainsi DE soit à EF : mais les autres angles C & F soient de mesme espece, c'est



à dire aigus, droits, ou obtus : & soient premierement aigus. Je dis que les triangles sont équiangles, sçavoir est, que les angles ABC & E, à l'entour desquels sont les côtez proportionnaux, & les angles C & F sont égaux.

Car si l'angle B est égal à l'angle E, il appert par la précédente prop. que les triangles seront équiangles. Mais si lesdits angles ne sont égaux, soit B plus grand que E, & soit fait ABG égal à E par la 23. prop. 1. Donc le troisième angle AGB sera égal au troisième F, & partant aigu comme iceluy ; & les deux triangles ABG & DEF. seront équiangles ; & par la 4. prop. 6. comme AB sera à BG, ainsi DE à EF. Mais par l'hypothese, comme

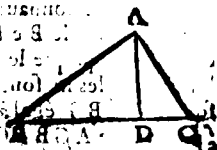
AB est à BC, ainsi DE à EF : donc par la 11. prop. 5. comme AB sera à BG, ainsi le même AB sera à BC; & partant par la 9. prop. 5. BG, & BC seront égaux, & par la 5. prop. 1. les deux angles C & BGC sur la base CG seront égaux; & tous deux aigus, & par conséquent l'angle BGA sera plus grand qu'un droit, puis que par la 13. prop. 1. les deux BGC, AGB sont égaux à deux droits : Mais l'angle AGB a été démontré égal à l'angle F : donc F seroit aussi plus grand qu'un droit; & on l'a posé aussi moindre : ce qui est absurde. Maintenant, tant l'angle C que F ne soit aigu; & comme dessus l'angle C sera égal à l'angle BGC; & partant iceluy BGC ne sera aussi aigu, & les deux C & BGC ne seront moindres que deux droits, mais égaux ou plus grands que deux droits; ce qui est absurde : car par la 17. prop. 1. ils sont moindres que deux droits. Les angles ABC & E ne sont donc pas inégaux, ains égaux, & partant par la 31. prop. 1. le troisième C sera aussi égal au troisième F : ce qui est proposé. Si donc deux triangles ont un angle égal à un angle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 9. PROP. VIII.

Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on tire une perpendiculaire sur la base; elle coupera iceluy triangle en deux autres triangles semblables entr'eux, & au total.

Soit le triangle rectangle ABC, & l'angle droit A, duquel soit menée à la base BC la perpendiculaire AD. Je dis que les triangles ABD & ADC, auxquels est divisé iceluy triangle ABC par la perpendiculaire AD, sont semblables entr'eux, & au total ABC.

Qu'ainsi ne soit : d'autant que AD est perpendiculaire, l'angle BDA est droit, & égal à l'angle droit BAC, du triangle total ABC, & l'angle B est



commun à tous les deux triangles BAD & ABC , & par la 32. prop. 1. le troisième angle BAD , sera égal au troisième ACB : & partant les deux triangles BAD & ABC , seront équiangles ; & par la 4. prop. 6. ils auront les côtez au long des angles égaux proportionnaux, c'est-à-dire, que comme CB sera à AB , ainsi AB à BD ; & comme BA à AC , ainsi BD à DA : & comme BC à CA , ainsi BA à AD : & partant par la 1. def. de ce livre les triangles ABC , ABD seront semblables.

Par même discours, on prouvera que les deux triangles ABC & ADC , sont aussi équiangles, & semblables : car l'angle C étant commun à tous les deux triangles, & l'angle droit BAC égal à l'angle droit ADC , le troisième angle CAD sera égal au troisième angle B , par la 32. prop. 1. & par la 4. prop. 6. comme BC sera à CA , ainsi CA à CD : & comme CA à AB , ainsi CD à DA , & comme CB à BA , ainsi CA à AD .

On démontrera en la même manière, les triangles ADB , ADC être semblables entr'eux, puisque les angles au point D sont droits, & tant les angles ABD & CAD , que BAD , ACD , ont été démontrés égaux : & partant par la 4. prop. 6. comme BD sera à DA , ainsi DA à DC : & comme DA à AB , ainsi DC à CA : & comme AB à BD , ainsi CA à AD . Si donc de l'angle droit d'un triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste, que la perpendiculaire tirée de l'angle droit d'un triangle rectangle à la base, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de la base : & chacun des côtez comprenant l'angle droit, être aussi moyen proportionnel entre toute la base, & le segment qui le touche.

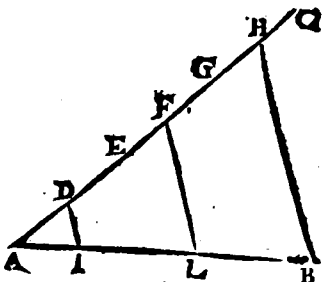
Car il a été démontré, que comme BD est à DA , ainsi DA est à DC : & partant DA est moyenne prop. entre BD & DC : item que comme CB est à BA : ainsi BA à BD : & par ainsi BA est moyenne prop. entre CB & BD : finalement que comme BC est à CA , ainsi CA à CD : & partant CA est moyenne proportionnelle entre BC & CD .

P R O B. 1. P R O P. IX.

D'une ligne droite donnée, ôter une partie demandée.

Soit la ligne droite donnée AB , de laquelle il faut ôter la cinquième partie, ou autre telle qu'on voudra.

Du point A soit menée la ligne droite AC interminablement, faisant quelconque angle avec AB , comme BAC , & en icelle AC , soient prises à l'avanture autant de parties égales que dénotte la partie qu'on veut ôter, comme en l'exemple proposé; il faut prendre cinq parties égales AD , DE , EF , FG , GH : & après avoir conjoint les points B & H par la ligne BH , du point D soit menée DI parallèle à HB . Je dis que AI est la cinquième partie requise de AB .



Car puis qu'au triangle ABH , la ligne DI est parallèle au côté HB , par la 2. prop. 6. comme HD sera à DA , ainsi BI à IA : & en composant par la 18. prop. 5. comme HA sera à DA , ainsi BA à IA : mais par la construction HA est quintuple de AD : donc aussi BA sera quintuple de AI : & partant AI sera la cinquième partie de la ligne droite AB , laquelle avoit été demandée. Donc d'une ligne droite donnée, &c. Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Que si de AB il falloit couper plusieurs parties, comme pour exemple les trois cinquièmes, il est évident par ce qui a été démontré cy-dessus, qu'étant tirée la ligne FL parallèle à HB , le segment AL sera les trois cinquièmes de AB , tout ainsi que AF est les trois cinquièmes de AH . Et pour promptement

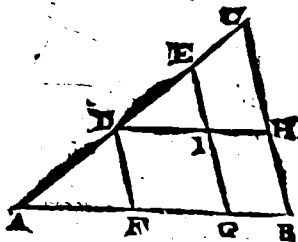
ment pratiquer cecy, il faut décrire du centre F, & de l'intervalle HB un arc au dessous de la ligne donnée AB, mais de B & de l'intervalle FH, décrire un autre arc qui coupe le précédent, puis tirer une ligne droite de la section d'iceux arcs à F, & icelle coupera la partie requise AL.

• P R O B L. 2. P R O P. X.

Couper une ligne droite donnée non coupée, semblablement à une autre ligne droite donnée & coupée.

Soient données les lignes droites AB, AC, desquelles AC est coupée en D & E : & il faut couper AB en parties semblables & proportionnelles à celles de AC.

Soient accommodées icelles lignes données, en sorte qu'elles fassent quelconque angle BAC ; & apres avoir mené BC, des points D & E, soient menées DF, EG, parallèles à icelle BC, par la 31. pr. 1. Je dis que la ligne AB est semblablement coupée en F & G, comme la ligne AC est coupée en D & E. Car



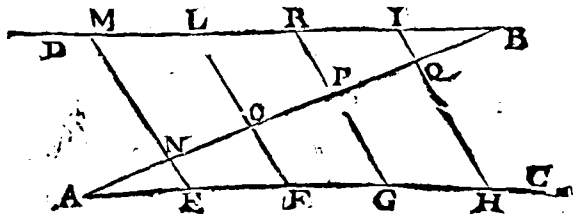
par la 2. prop. 6. comme AD est à DE, ainsi AF à FG. Que si on tire DH parallèle à AB coupant EG en I. De-rechef, par la susdite 2. prop. 6. comme DE sera à EC, ainsi DI à IH, c'est-à-dire, ainsi FG à GB, pource que par la 34. prop. 1. FG est égale à DI, & es à IH. Parquoy les parties FG, GB seront aussi proportionnelles aux parties DE, EC. Les trois parties AF, FG, GB, sont donc proportionnelles aux trois parties AD, DE, EC : & par-tant AB est coupée semblablement à AC, ainsi qu'il fal-loit faire.

SCHOLIE.

Nous ajouterons icy deux Probl. fort utiles, & nécessaires aux choses geometriques.

1. Estant donnée une ligne droite, la couper en tant de parties égales qu'on voudra.

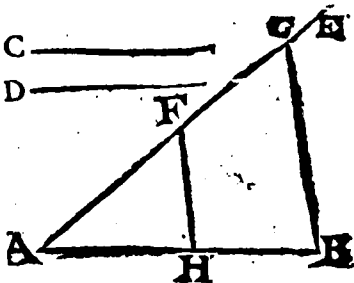
Soit la ligne donnée AB , qu'il faut couper en cinq parties égales. De l'extrémité A , soit menée la ligne AC , tant qu'il sera de besoin, faisant quelconque angle avec AB ; puis de l'extrémité B , soit menée BD parallèle à AC , & d'icelle AC soient coupées quatre parties égales AE , EF ; FG , & GH , qui est une partie moins que le nombre des parties esquelles il faut couper la ligne donnée; en après, du point B en BD ,



soient aussi prises les quatre parties BI , IK , KE , & LM égales à celles de la ligne AC ; puis étans menées les lignes EM , FL , GK , & HI , elles couperont la ligne donnée AB en cinq parties égales. Car puis que par la construction les lignes EF , ML , sont égales & parallèles entr'elles, par la 33. prop. 1. ME , LF , seront aussi parallèles entr'elles: Et par même raison LE , KG , HI , seront pareillement parallèles. Vû donc que AH est coupée en quatre parties égales, AQ le sera aussi. Par même raison BN sera encore divisée en quatre parties égales, parce que BM a été coupée en autant de parties égales. Parquoy vû que tant AN que BQ sont égales à chaque partie NO , OP , PQ toutes les cinq parties AN , NO , OP , PQ , & QB , seront égales entr'elles. Ce qu'il falloit faire.

2. Couper une ligne droite donnée en deux parties, qui soient entr'elles selon une raison donnée.

Soit la ligne droite donnée AB, qu'il faut couper en deux parties, qui aient telle raison entr'elles que C à D : Du point A, soit menée AE faisant quelconque angle avec AB; & d'icelle AE, soit couppee AF esgale à C, & puis FG esgale à D : en après soit menée BG, & du point F tirée FH pa-



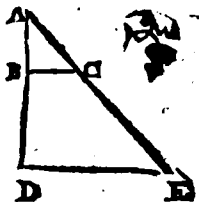
rallele à icelle BG, laquelle coupe AB en H : & icelle AB sera couppee à iceluy point H, selon la raison de C à D, puis que par la 2. prop. de ce livre, AH est à HB, comme AF à FG, qui sont esgales à C & D. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 3. PROP. XI.

A deux lignes droites données, en trouver une troisième proportionnelle.

Soient deux lignes droites données AB & AC, auxquelles il en faut trouver une troisième proportionnelle.

Soient disposées icelles lignes en un angle CAB; & apres avoir prolongé AB interminément, soit faite BD égale à AC, & mené CB; puis du point D, soit tirée DE parallèle à BC, rencontrant AC prolongée en E. Je dis que CE est la troisième proportionnelle requise, c'est-à-dire que comme AB est à AC, ainsi AC à CE. Car puis qu'au triangle ADE, la ligne droite BC est parallèle au côté



DE, par la 2. prop. 6. comme AB sera à BD, ainsi AC à CE : mais par la 7. prop. 5. comme AB est à BD, ainsi la même AB est à AC, égale à icelle BD. Donc comme

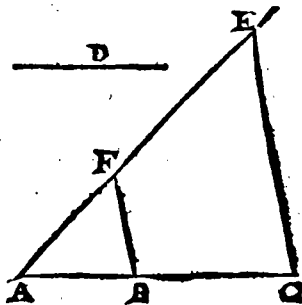
AB est à AC, ainsi AC à CE. Partant à deux lignes droites données, nous en avons trouvé une troisième proportionnelle. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 4. PROP. XII.

A trois lignes droites données, en trouver une quatrième proportionnelle.

Soient les trois lignes droites données AB, BC, & D, auxquelles il en faut trouver une quatrième proportionnelle.

Soient disposées les deux premières AB, BC, selon une ligne droite AC; & ayant tiré de A une ligne droite indéterminée AE, faisant avec la première AB, quelconque angle, comme A; d'icelle AE, soit coupée AF égale à D, & menée BF: en après, de C, soit menée CE parallèle à icelle BF, rencontrant AE en E. Je dis



que FE est la quatrième proportionnelle requise. Car puis qu'au triangle AEC, la ligne BF est parallèle à CB, par la 2. prop. 6. comme AB est à BC, ainsi AF, où D son égale est à FE. Nous avons donc trouvé une quatrième ligne proportionnelle à trois données: Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 5. PROP. XIII.

Entre deux lignes droites données, trouver une moyenne proportionnelle.

Soient deux lignes droites données AC & CB, entre lesquelles il en faut trouver une moyenne proportionnelle.

Soient icelles lignes AC, CB, disposées en une ligne droite AB, sur laquelle soit décrit un demy cercle ADB : & après avoir du point C levé la perpendiculaire CD, qui rencontre la circonférence en D : Je dis qu'icelle CD est la moyenne proportionnelle demandée.



Car étans menées les deux lignes droites AD & BD, l'angle ADB dans le demy cercle, sera droit par la 31. prop. 3. Vû donc que de l'angle droit ADB du triangle rectangle ADB, est tirée DC perpendiculaire à la base AB, par le Corol. de la 8. pr. 6. icelle CD sera moyenne proportionnelle entre AC, CB. Nous avons donc trouvé une moyenne proportionnelle entre deux lignes données : Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E,

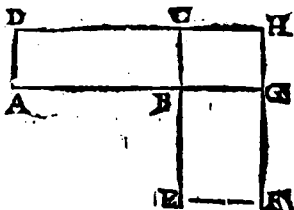
De cecy est évident qu'une ligne droite tirée perpendiculairement de quelconque point du diamètre d'un cercle, jusques à la circonférence d'iceluy, est moyenne proportionnelle entre les segmens du diamètre faits par icelle perpendiculaire. Car de quelconque point pris au diamètre AB, étant levée une perpendiculaire jusques à la circonférence, par les mêmes raisons que dessus, icelle perpendiculaire sera moyenne prop. entre les deux segmens du diamètre AB.

T H E O R. 9. P R O P. XIV.

Des parallelogrammes égaux, qui ont un angle égal à un angle ; les côtez au long des angles égaux, sont reciproques : & les parallelogrammes qui ont un angle égal à un angle, & les côtez au long des angles égaux reciproques, sont égaux.

Soient deux parallelogrammes égaux ABCD, & BEFG, desquels les deux angles ABC & EBG soient égaux :

Je dis que les côtez qui sont autour d'iceux angles égaux, sont reciproques : c'est-à-dire, que AB est à BG, comme EB à BC.



Car les parallelogrammes AC, BF, étans disposés de telle façon que les deux côtez AB & BG, fassent une ligne droite AG ; les deux côtez EB, BC, feront aussi une ligne droite EC, à cause des angles égaux ABC, EBG, comme il est évident par les 2. comment. 13. & 14. prop. 1. & soient prolongez DC, FG, jusques à ce qu'ils se rencontrent en H. Puis donc que les deux parallelogrammes AC, EG, sont égaux, ils auront une même raison au parallelogramme BH, par la 7. prop. 5. Mais la raison du parallelogramme AC au parallelogramme BH, est par la 1. prop. 6. comme celle de la base AB à la base BG. Item celle des parallelogrammes EG, BH, est comme celle de EB à BC : & partant par la 11. prop. 5. comme AB à BG, ainsi EB à BC. Ce qui étoit proposé.

Pour la seconde partie ; si AB est à BG, comme EB à BC, & que les angles ABC & EBG soient égaux : Je dis que les parallelogrammes AC & EG seront aussi égaux.

Car ayant fait la même construction que devant, on prouvera par la 1. prop. 6. qu'il y a même raison du parallelogramme AC au parallelogramme BH, que de la base AB à la base BG : pareillement qu'il y a même raison du parallelogramme EG au parallelogramme BH, que de EB à BC : mais les raisons des bases sont posées semblables : donc aussi les raisons des parallelogrammes AC & EG, au troisième BH seront semblables par la 11. pr. 5. & partant par la 9. prop. 5. ils seront égaux. Parquoy des parallelogrammes égaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

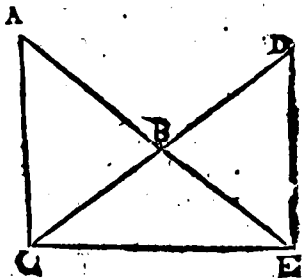
THEOR. 10. PROP. XV.

Les triangles égaux ayans un angle égal à un angle, ont les côtez au long des angles égaux reci-

proques : & les triangles qui ont un angle égal à un angle , & les côtez au long des angles égaux reciproques , sont égaux.

Soient deux triangles égaux ABC, & DBE, ayans les angles au point B égaux : Je dis que les côtez qui sont au long d'iceux angles égaux , sont reciproques : c'est-à-dire, que comme AB est à BE , ainsi DB sera à BC.

Car les triangles étans disposés en sorte que les deux lignes AB & BE se rencontrent directement, & fassent une seule ligne droite AE, les deux lignes DB, BC, feront aussi une ligne droite CD par les 2. com. sent. 13. & 14. p. 1. & soit menée la ligne CE. Pour autant que les deux triangles ABC & DBE sont égaux , ils



auront une même raison au triangle BEC par la 7. prop. 5. mais par la 1. prop. 6. la raison du triangle ABC au triangle BEC, (étant de même hauteur) est comme de la base AB à la base BE : pareillement par la même 1. prop. 6. le triangle DBE sera au triangle ECB, comme DB est à BC : & partant par la 11. prop. 5. AB sera à BE , comme DB à BC. Ce qui a été proposé.

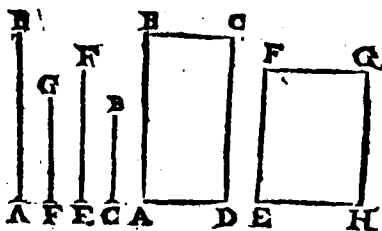
Pour la seconde partie : soient les côtez d'alentour les angles égaux au point B , reciproques , c'est à sçavoir, que comme AB est à BE , ainsi DB à BC. Je dis que les triangles ABC , DBE , sont égaux. Car ayant fait la même construction que cy-dessus , par la 1. prop. 6. comme AB sera à BE , ainsi le triangle ACB au triangle BCE , & comme DB à BC , ainsi le triangle BED au même triangle BEC : mais par l'hypothese les raisons des bases sont semblables : donc aussi les raisons des triangles ACB , BED , au troisième CBE seront semblables par la 11. prop. 5. & partant ils seront égaux par la 9. pr. 5. Donc les triangles égaux ayans un angle égal à un angle , &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. II. PROP. XVI.

Si quatre lignes droites sont proportionnelles ; le rectangle compris des extrêmes , est égal à celui des moyennes ; & si le rectangle compris des extrêmes , est égal au rectangle compris des moyennes ; les quatre lignes sont proportionnelles.

Soient quatre lignes droites proportionnelles AB, FG, EF, BC, sçavoir est que AB soit à FG, comme EF à BC, & soit le rectangle ABCD compris des extrêmes AB, BC ; & le rectangle EFGH compris sous les moyennes EF, FG. Je dis qu'iceux rectangles AC, EG, sont égaux.

Car puis que les angles droits B & F sont égaux, & que comme AB est à FG, ainsi EF à BC ; les côtes au long des angles égaux B & F, seront reciproques par la 2.



def. 6. & partant par la 14. prop. 6. les parallelogrammes AC & EG seront égaux. Ce qui a été proposé.

Quant à la seconde partie : soient les rectangles AC, EG égaux. Je dis que les quatre lignes AB, FG, EF, BC, sont proportionnelles : c'est-à-dire, que comme AB est à FG, ainsi EF à BC. Car puis que les rectangles sont égaux, & ont les angles B & F aussi égaux, sçavoir droits, ils auront les côtes au long d'iceux angles égaux, reciproques par la 14. prop. 6. sçavoir est, que comme AB est à FG, ainsi EF à BC. Si donc quatre lignes droites sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit prouver.

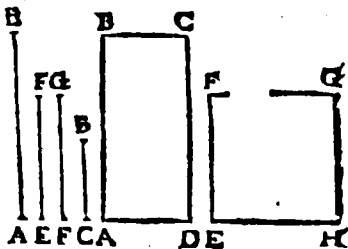
THEOR. 12. PROP. XVII.

Si trois lignes droites sont proportionnelles , le rectangle compris des extrêmes , sera égal au quarré de la moyenne : & si le rectangle compris des extrêmes est égal au quarré de la moyenne , les trois lignes seront proportionnelles.

Soient trois lignes droites proportionnelles AB , EF , BC , & soit le rectangle ABCD compris sous les extrêmes AB , BC , & le quarré de la moyenne EF soit EFGH. Je dis que le rectangle AC est égal au quarré EG.

Car étant prise FG égale à EF , les quatre lignes AB , EF , FG , BC , seront proportionnelles , & le quarré EG sera compris sous les moyennes EF , FG , à cause de l'égalité d'icelles. Parquoy par la prec. prop. le rectangle AC compris des deux extrêmes AB , BC , est égal au rectangle des moyennes EF , FG , c'est-à-dire au quarré EG. Ce qui étoit proposé.

Pour la seconde partie ; le rectangle AC soit égal au quarré EG : Je dis que comme AB est à



EF , ainsi EF à BC. Car puis que les rectangles AC , EG sont égaux , par la 16. prop. 6. comme AB sera à FE , ainsi FG à BC : mais par la 7. prop. 5. comme FG est à BC , ainsi EF , égale à icelle FG , est à la même BC : & partant comme AB est à EF , ainsi EF est à BC. Si donc trois lignes droites sont proportionnelles , &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

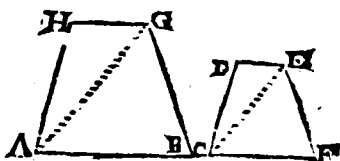
Il est manifeste par la dernière partie de ce Theoreme, qu'une ligne droite est moyenne proportionnelle entre deux autres lignes droites, qui comprennent un rectangle esgal au carré d'icelle ligne. Car pource que le rectangle de AB , BC est esgal au carré de EF , il a été démontré, que comme AB à EF , ainsi EF à BC ; & partant EF est moyenne proposition entre AB & BC .

PROBL. 6. PROP. XVIII.

Sur une ligne droite donnée, décrire une figure rectiligne semblable, & semblablement posée à une figure rectiligne donnée.

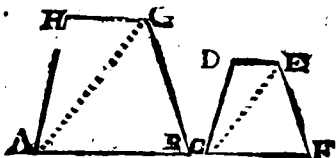
Soit la ligne droite donnée AB , sur laquelle il faut contruire une figure semblable, & semblablement posée à la figure rectiligne donnée $CDEF$.

De quelque angle que ce soit de la figure donnée soient menées des lignes droites à chacun des angles opposez, afin de diviser icelle figure en triangles; comme



icy de l'angle C , soit menée à l'angle opposé E , la ligne droite CE , laquelle divise la figure donnée en deux triangles CEF , CDE : en après par la 23. prop. 1. soit décrit sur la ligne AB , & aux points extrêmes A & B , les deux angles BAG & ABG , égaux, sçavoir l'un à l'angle FCE , & l'autre à l'angle CFE . Il est évident par la 32. prop. 1. que le troisième AGB sera égal au troisième CEF , & les triangles CEF , AGB seront équiangles, & auront les côtes au long des angles égaux proportionnaux par la 4. prop. 6. Pareillement sur la ligne AG , & aux deux points A & G , soient décrits les deux angles GAH & AGH , égaux aux deux DCE & CED , chacun au sien: aussi par

la 32. prop. 1. le troisième H sera égal au troisième D, & les triangles CDE & AHG seront équiangles, & par la 4. prop. 6. ils auront les côtez au long des angles égaux proportionnaux : ainsi l'angle D étant égal à l'angle H, & l'angle F à l'angle B, les deux de C aux deux de A, & les deux de E aux deux de G ; les deux figures CDEF, ABGH, seront équiangles : & pour autant qu'elles sont composées de triangles équiangles, lesquels ont les côtez au long des angles égaux proportionnaux, comme CF sera à FE, ainsi AB à BG : item comme CF est à CE, ainsi AB à AG ; & comme CE à CD, ainsi AG à AH : & en raison égale, comme CF sera à CD, ainsi AB sera à AH ; par ainsi les côtez au long des angles égaux F, B, & FCD, BAH, seront proportionnaux, & ainsi des autres. Parquoy les figures CDEF, AHGB seront semblables, & semblablement décrites. Nous avons donc fait ce qui étoit requis.



S C H O L I E.

Il est évident par ce que nous avons dit sur la 32. prop. 1. que si la figure donnée avoit plus de quatre côtez, elle seroit divisée en plus de deux triangles : & alors il faudroit pour les deux premiers operer ainsi que dessus, puis après proceder de triangle en triangle jusques à la fin, décrivant toujours sur & aux extrémités de la dernière ligne deux angles égaux aux deux de dessus la diagonale correspondante, ainsi qu'il a été fait icy sur AG, homologue & correspondante à la diagonale CE.

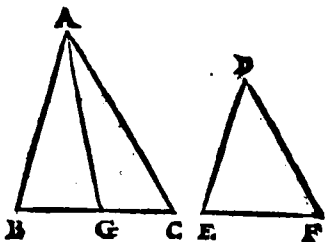
T H E O R. 13. P R O P. XIX.

Les triangles semblables, sont l'un à l'autre en raison doublée de leurs côtez de même raison.

Soient deux triangles semblables ABC & DEF , ayant les angles B & E égaux ; item C & F ; mais comme AB est à BC ainsi DE à EF , &c. Je dis qu'ils seront d'un à l'autre en raison doublée de leurs côtes de même raison AB & DE , ou AC & DF , ou BC & EF , c'est-à-dire que si à deux quelconques de ces côtes de même raison, comme par exemple BC & EF , on trouve la troisième proportionnelle BG , le triangle ABC sera au triangle DEF , comme la ligne BC est à la troisième proportionnelle BG : car telle est la raison doublée par la 10. def. 5.

Car étant tirée la ligne AG : d'autant que les triangles ABC , DEF sont semblables, & que comme AB est à BC ainsi DE est à EF , en permutant par la 16. prop. 5. comme AB sera à DE , ainsi BC sera à EF : mais comme BC est à EF , ainsi EF est à BG par la construction. Donc comme AB sera à DE , ainsi EF sera à BG par la 11. prop. 5. & par ainsi les deux triangles ABG , DEF ,

auront les côtes au long des angles égaux B & E , reciproques : & par la 15. prop. 6. iceux triangles ABG , DEF , seront égaux entr'eux : & partant comme le triangle



ABC sera au triangle DEF , ainsi sera le même triangle ABC au triangle ABG par la 7. prop. 5. Mais comme le triangle ABC est au triangle ABG de même hauteur, ainsi est la base BC à la base BG par la 1. prop. 6. Donc comme le triangle ABC est au triangle DEF , ainsi est BC à BG . Mais BC , EF , BG , étant continuellement proportionnelles, BC est à BG en raison doublée de BC à EF par la 10. def. 3. donc aussi le triangle ABC est au triangle DEF en raison doublée du côté BC au côté EF . Donc les triangles semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

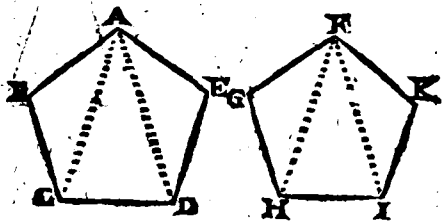
De cecy est manifeste , qu'étans trois lignes droites proportionnelles , comme la première sera à la troisième , ainsi le triangle décrit sur la première sera au triangle semblable , & semblablement posé sur la seconde. Car il a été démontré , que comme BC 1. est à BG 3. ainsi le triangle ABC au triangle DEF .

THEOR. 14. PROP. XX.

Les polygones semblables peuvent estre divisez en nombre égal de triangles semblables entr'eux , & proportionnaux à leur tout : & les polygones sont l'un à l'autre en raison doublée de leurs côtez de mesme raison.

Soient deux polygones semblables $ABCDE$, & $F GHIK$, ayans les angles A , F , égaux. Item B , G , &c. Je dis premierement qu'iceux polygones peuvent estre divisez en nombre égal de triangles semblables.

Car après avoir mené les lignes ac , AD , FH , FI , il est évident que l'une des figures est divisée en autant de triangles que

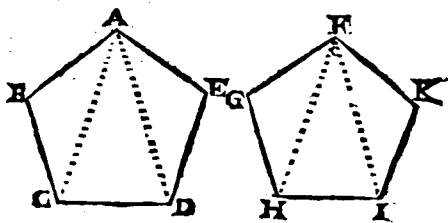


l'autre. Et d'autant que l'angle B est posé égal à l'angle G , & que comme BA est à BC , ainsi GF à GH : par la 6. prop. de ce livre, les triangles ABC & FGH seront équiangles , & par la 4. prop. de ce mesme livre, ils auront les côtez au long des angles égaux proportionnaux, & par consequent ils seront semblables : par mesme discours, les triangles AED & FKI , seront aussi semblables.

Pareillement par ce qui a été dit cy dessus AC est à CB, comme FH à HG ; mais BC est à CD comme GH à HI : car ce sont côtez de figures semblables : donc en raison égale par la 22. prop. 5. AC sera à CD, comme FH à HI : & d'autant que les angles BCD, GHI sont égaux, & les angles BCA, GHF aussi égaux ; ceux-cy étans ôtez de ceux-là, les restans ACD, FHI, seront pareillement égaux : & partant par la 6. prop. 6. les triangles ACD, & FHI, seront équiangles, & par conséquent semblables.

Je dis secondement, qu'iceux triangles sont proportionaux à leur tout : c'est-à-dire, que chaque triangle de l'un des polygones a telle raison à son triangle correspondant de l'autre polygone, que tout le polygone a tout le polygone. Car d'autant que les trois triangles de l'une des figures sont semblables aux trois triangles de l'autre, chacun au sien, & que par la prop. preced. ils sont l'un à l'autre, en raison doublée de leurs côtez de mesme raison : les triangles ABC & FGH, seront l'un à l'autre en raison doublée de AC à FH : aussi en la mesme raison doublée se-

ront les triangles ACD, FHI : & le troisième AED étant au troisième FKI en raison doublée de AD à FI,



qu'est la même que de AC à FH, étans côtez de triangles semblables : aussi les triangles ACD, FKI, seront l'un à l'autre en raison doublée de AC à FH : & par la 12. prop. 5. tous les triangles du premier polygone, seront à tous les triangles de l'autre polygone, comme l'un des triangles de l'un d'iceux, sera à son respondant de l'autre.

Je dis tiercement, que le polygone est au polygone en raison doublée des côtez de même raison, comme CD & HI : car puisque toute la figure ABCDE, est à toute la figure FGHKI, comme l'un des triangles de

l'une, ſçavoir ACD, eſt à l'un des triangles de l'autre, ſçavoir FHI, leſquels triangles par la prop. prec. ſont en raiſon doublée de CD à HI, par la 11. prop. ſ. le polygone ſera au polygone, en raiſon doublée des mêmes côtéz CD & HI. Parquoy les polygones ſemblables, &c. Ce qu'il falloit démonſtrer.

C O R O L L A I R E.

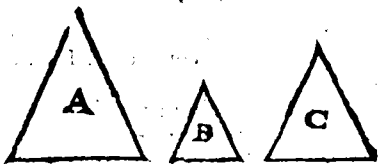
Par cecy eſt manifeſte, qu'étans trois lignes droites proportionnelles, comme la première ſera à la tierce, ainſi le polygone décrit ſur la première ſera au polygone ſemblable, & ſemblablement décrit ſur la ſeconde; puis qu'il a été démontré que les polygones ſont entr'eux en raiſon doublée de leurs côtéz de même raiſon, c'eſt-à-dire, comme le côté du premier a une troiſième proportionnelle auſdits côtéz de même raiſon.

T H E O R. 15. P R O P. XXI.

Les figures rectilignes ſemblables à une même figure rectiligne, ſont auſſi ſemblables entr'elles.

Soit la figure rectiligne A ſemblable à la figure rectiligne B, & la figure rectiligne C, auſſi ſemblable à la même B: Je diſ que les figures A & C ſeront ſemblables entr'elles.

Car d'autant que chacune d'iceſſes figures A & C eſt ſemblable à B, elle a les angles égaux aux angles de B, & les côtéz d'autour iceux angles égaux proportionnaux par la 1. def. 6. & partant par la 1. cor. ſent. les angles de A, ſeront auſſi égaux aux angles de C; & par la 11.

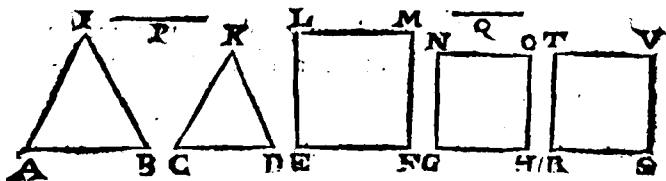


prop. 5. les côtez au long des angles égaux seront proportionnaux : & par la 1. def. 6. A & C seront semblables : donc les figures rectilignes semblables , &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 16. PROP. XXII.

Si quatre lignes droites sont proportionnelles ; les figures rectilignes semblables , & semblablement décrites sur icelles , seront aussi proportionnelles : & si icelles figures ainsi décrites sont proportionnelles , icelles lignes droites seront aussi proportionnelles.

Soient quatre lignes droites proportionnelles AB, CD, EF, GH : & sur AB, CD, soient constituées deux quelconques figures rectilignes ABI, CDK semblables , & semblablement décrites : Item sur EF & GH deux autres



quelconques figures rectilignes semblables , & semblablement décrites EFML, GHON. Je dis premierement que ces quatre figures rectilignes sont proportionnelles , c'est-à-dire , que comme ABI est à CDK, ainsi EFML est à GHON.

Qu'il ne soit ainsi : aux deux lignes AB & CD , soit trouvée P troisième proportionnelle par la 11. prop. 6. & aux deux EF & GH , soit trouvée Q aussi troisième proportionnelle : & d'autant que AB est à CD, comme EF est à GH : Item CD à P comme GH à Q : en raison égale AB sera à P , comme EF à Q par la 22. prop. 5. Mais comme AB est à P, ainsi le rectiligne ABI est au rectiligne CDK par le coroll. de la 19. ou 20. prop. 6. Item
comme

comme EF est à Q, ainsi le rectiligne EM est au rectiligne GO. Donc comme ABI est à CDK, ainsi EM est à GO par la 11. prop. 5.

Je dis pour la seconde partie, que si icelles figures semblables, & semblablement décrites sont proportionnelles, que les lignes sur lesquelles elles sont décrites, seront aussi proportionnelles, c'est à sçavoir, que comme AB est à CD, ainsi EF est à GH.

Car ayant trouvé RS quatrième proportionnelle aux trois lignes AB, CD, EF par la 12. prop. 6. sur icelle RS soit décrit le rectiligne RV semblable, & semblablement posé au rectiligne EM par la 18. prop. 6. & partant aussi semblable au rectiligne GO par la prop. precedente; & d'autant que comme AB est à CD, ainsi EF est à RS, par ce qui a été démontré cy-dessus, comme le rectiligne ABI sera au rectiligne CDK, ainsi le rectiligne EM sera au rectiligne RV. Mais comme ABI est à CDK, ainsi aussi a été posé EM à GO : donc par la 11. prop. 5. comme EM sera à RV, ainsi EM sera à GO; & partant par la 9. prop. 5. les rectilignes RV, GO seront égaux: lesquels étans semblables, & semblablement décrits, consistent nécessairement (comme nous démontrerons incontinent) sur lignes droites égales RS, GH. Parquoy par la 7. prop. 5. comme EF sera à RS, ainsi EF sera à GH. Mais par l'hypothèse EF est à RS, comme AB à CD : donc par la 11. prop. 5. comme AB sera à CD, ainsi aussi EF sera à GH. Parquoy si quatre lignes sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

L E M M E.

Or que les rectilignes égaux semblables & semblablement décrits, tels que sont GO, RV, consistent sur lignes droites égales, on le prouvera ainsi. Si les lignes GH, RS peuvent être inégales, soit GH la plus grande : & puis que les rectilignes sont semblables, comme GH est à HO, ainsi RS à SV : & GH ayant été posée plus grande que RS, par la 14. prop. 5. HO sera aussi plus grande que SV : & partant le rectiligne GO plus grand que le rectiligne RV ; puis que cettuy-cy peut être constitué dans celui-là : ce qui est absurde, ayans

été posés égaux. Les lignes GH , RS ne sont donc pas inégales, mais égales. Ce qui étoit proposé.

SCHOLIE.

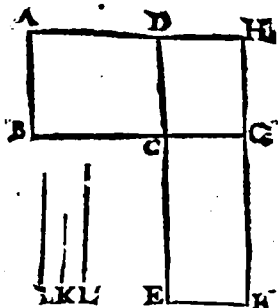
Il est évident, que s'il y a aussi trois lignes droites proportionnelles, les figures rectilignes semblables, & semblablement décrites sur icelles, seront pareillement proportionnelles, &c. Car la ligne moyenne, & son rectiligne étant prise deux fois, on aura quatre lignes proportionnelles : donc aussi quatre rectilignes proportionnaux, comme il a été cy-dessus démontré. Vu donc que le rectiligne qui sera décrit sur la seconde ligne, sera égal à celui décrit sur la troisième ; est manifeste ce qui étoit proposé.

THEOR. 17. PROP. XXIII.

Les parallelogrammes équiangles, sont l'un à l'autre en la raison composée de celles de leurs côtez.

Soient deux parallelogrammes équiangles $ABCD$, & $CEFG$, ayans les deux angles BCD , ECG égaux : Je dis que la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF est composée de celles de leurs côtez, l'une ayant est composée de la raison qui est de BC à CG , & de celle qui est de DC à CE .

Car soient disposés les deux parallelogrammes l'un contre l'autre, en sorte que BC & CG se rencontrent directement, & ne fassent qu'une seule ligne droite, & alors DC & CE feront aussi une ligne droite, puis que les angles BCD , ECG sont égaux, comme il est évident par les 2. com. sent. 13. & 14. prop. 1. Soient prolongez les côtez AD , FG , qui se rencontrant en H , fassent le parallelogram-



me DCGH ; puis soit prise quelconque ligne droite I ; & aux trois BC , CG & I , soit trouvée la 4. proportionnelle K. Item aux trois DC , CE & K , la 4. prop. L. Vû donc que par la 1. prop. 6. comme BC est à CG , ainsi AC à DG ; & comme BC à CG , ainsi aussi I est à K par l'hypothese : pareillement comme AC sera à DG , ainsi sera I à K , par la 11. prop. 5. Mais par même raison DG est à CF , comme K à L , (attendu que comme DG à CF , ainsi DC à CE , par la 1. prop. 6. qui est la même raison que de K à L.) Donc en raison égale , comme AC sera à CF , ainsi I sera à L par la 22. prop. 5. Mais la raison de I à L est composée de la raison de BC à CG , & de celle de DC à CE par la 5. def. de ce livre. Donc aussi d'icelles raisons est composée la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF. Parquoy les parallelogrammes équiangles sont l'un à l'autre , &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Le mesme sera encore démontré plus brièvement, ainsi qu'il ensuit. Les parallelogrammes AC, CF étans disposez comme au paravant, AC sera à CH, comme BC à CG ; & CH à EG comme DC à EC par la 1. prop. 6. Mais la raison de AC à EG , est composée des raisons entre-moyennes , sçavoir de AC à CH , & de CH à EG par la 5. def. 6. Donc la mesme raison de AC à EG sera aussi composée des raisons de BC à CG , & de DC à CE , qui sont égales à icelles entre-moyennes. Ce qui est proposé.

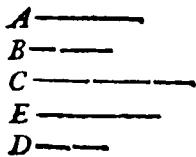
Or il est facile de colliger des choses cy-dessus dites & démontrées par Euclide en cette 23. prop. comment on compose en lignes , ou en nombres une raison de deux ou de davantage de raisons. Car des raisons de BC à CG , & de DC à CE , a été composée la raison de I à L en lignes : mais de 3 à 2 en nombres. Que s'il faut composer une raison de trois autres

proposées ; ayant trouvé celle composée de deux , d'icelle & de la troisième nous en composerons une autre en la même manière , laquelle sera composée de trois : & ainsi conséquemment des autres.

Cette 23. prop. est aussi véritable en nombres , comme le démontre Euclide au 8. l. prop. 5. C'est pourquoy nous enseignerons icy comme il faut trouver la raison du parallélogramme AC au parallélogramme CF, les raisons de leurs côtez , étans connues en nombres. Comme par exemple , si la raison de BC à CG est la même que de 5 à 2, & celle de DC à CE, la même que de 3 à 5, nous trouverons la raison d'iceux parallélogrammes ainsi. Ayant posé la première raison estre 5 à 2, soit fait que comme 3 est à 5, (qui est la dernière raison) ainsi 2 soit à un autre nombre , qui sera trouvé estre $3\frac{1}{3}$: Cela fait, nous aurons les trois nombres 5, 2, $3\frac{1}{3}$, lesquels auront entr'eux les deux raisons proposées , & conséquemment en delaisant le nombre entre-moyen 2, demeurera 5 à $3\frac{1}{3}$ pour la raison composée d'icelles : & celle sera la raison du parallélogramme AC au parallélogramme CF, laquelle réduite en nombres entiers sera 15 à 10, ou 3 à 2, qui est raison sesquialtere.

On peut aussi en la même manière que dessus ôter une raison d'une autre raison plus grande : comme par exemple , soit la raison de A à B, qu'il faut ôter d'une plus grande raison C à D.

Soit fait que comme A est à B, ainsi C soit à quelque autre , sçavoir E, qui soit posée moyenne entre C & D : & la raison de E à D fera la raison re-



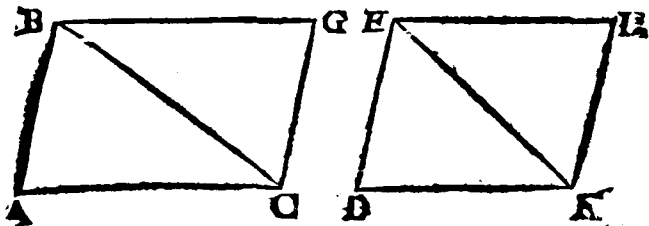
stante de la soustraction requise. Car puis que la raison de C à D est composée de celle de C à E , & de E à D ; si on en oste celle-là de C à E , ou de A à B , qui luy est égale, restera la susdite raison de E à D .

Qu'il faille encore oster la raison de 4 à 3 , de celle de 6 à 2 , soit fait que comme 4 est à 3 , ainsi 6 soit à un autre nombre, sçavoir $4\frac{1}{2}$: & la raison de $4\frac{1}{2}$ à 2 , sera le reste requis. Car il est évident que la raison de 6 à 2 , est composée de celles de 6 à $4\frac{1}{2}$, & de $4\frac{1}{2}$ à 2 : & partant en ostant de ces deux raisons celle de 6 à $4\frac{1}{2}$, ou de 4 à 3 , qui luy est égale, restera la susdite raison de $4\frac{1}{2}$ à 2 , qui est double sesquiquarre.

Commandin démontre en ce lieu les trois Theor. suivans.

1. Les triangles qui ont un angle égal à un angle, sont en raison composée des côtez, qui comprennent l'angle égal.

Soient les triangles ABC , DEF , ayans l'angle B esgal à l'angle E : je dis que le triangle ABC est au triangle DEF en raison composée des côtez comprenant les angles esgaux B & E . Car ayant achevé les parallelogrammes AG , DH , ils seront esquiangles: & partant par la 23. prop. 6. la raison d'iceux sera composée de celle de leurs cô-



tez: Vu donc que les triangles ABC , DEF , desquels ils sont moitez par la 34. prop. 1. sont en la même raison

été posés égaux. Les lignes GH , RS ne sont donc pas inégales, mais égales. Ce qui étoit proposé.

SCHOLIE.

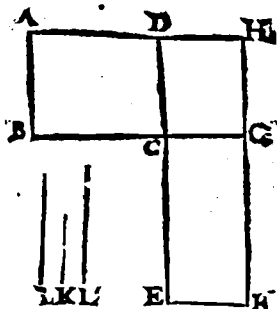
Il est évident, que s'il y a aussi trois lignes droites proportionnelles, les figures rectilignes semblables, & semblablement décrites sur icelles, seront pareillement proportionnelles, &c. Car la ligne moyenne, & son rectiligne étant prise deux fois, on aura quatre lignes proportionnelles : donc aussi quatre rectilignes proportionnaux, comme il a été cy-dessus démontré. Vu donc que le rectiligne qui sera décrit sur la seconde ligne, sera égal à celui décrit sur la troisième ; est manifeste ce qui étoit proposé.

THEOR. 17. PROP. XXIII.

Les parallelogrammes équiangles, sont l'un à l'autre en la raison composée de celles de leurs côtez.

Soient deux parallelogrammes équiangles $ABCD$, & $CEFG$, ayans les deux angles BCD , ECG égaux : Je dis que la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF est composée de celles de leurs côtez, & avoir est composée de la raison qui est de BC à CG , & de celle qui est de DC à CE .

Car soient disposés les deux parallelogrammes l'un contre l'autre, en sorte que BC & CG se rencontrent directement, & ne fassent qu'une seule ligne droite, & alors DC & CE feront aussi une ligne droite, puis que les angles BCD , ECG sont égaux, comme il est évident par les 2. com. sent. 13. & 14. prop. 1. Soient prolongez les côtez AD , FG , qui se rencontrant en H , fassent le parallelogram-



me DCGH ; puis soit prise quelconque ligne droite I ; & aux trois BC , CG & I , soit trouvée la 4. proportionnelle K. Item aux trois DC , CE & K , la 4. prop. L. Vû donc que par la 1. prop. 6. comme BC est à CG , ainsi AC à DG ; & comme BC à CG , ainsi aussi I est à K par l'hypothese : pareillement comme AC sera à DG , ainsi sera I à K , par la 11. prop. 5. Mais par même raison DG est à CF , comme K à L , (attendu que comme DG à CF , ainsi DC à CE , par la 1. prop. 6. qui est la même raison que de K à L.) Donc en raison égale , comme AC sera à CF , ainsi I sera à L par la 22. prop. 5. Mais la raison de I à L est composée de la raison de BC à CG , & de celle de DC à CE par la 5. def. de ce livre. Donc aussi d'icelles raisons est composée la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF. Parquoy les parallelogrammes équiangles sont l'un à l'autre , &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Le mesme sera encore démontré plus brièvement, ainsi qu'il ensuit. Les parallelogrammes AC, CF étans disposez comme auparavant, AC sera à CH, comme BC à CG ; & CH à EG comme DC à EC par la 1. prop. 6. Mais la raison de AC à EG , est composée des raisons entre-moyennes , sçavoir de AC à CH , & de CH à EG par la 5. def. 6. Donc la mesme raison de AC à EG sera aussi composée des raisons de BC à CG , & de DC à CE , qui sont égales à icelles entre-moyennes. Ce qui est proposé.

Or il est facile de colliger des choses cy-dessus dites & démontrées par Euclide en cette 23. prop. comment on compose en lignes , ou en nombres une raison de deux ou de davantage de raisons. Car des raisons de BC à CG , & de DC à CE , a été composée la raison de I à L en lignes : mais de 3 à 2 en nombres. Que s'il faut composer une raison de trois autres

proposées ; ayant trouvé celle composée de deux , d'icelle & de la troisième nous en composerons une autre en la même manière , laquelle sera composée de trois : & ainsi conséquemment des autres.

Cette 23. prop. est aussi véritable en nombres , comme le démontre Euclide au 8. l. prop. 5. C'est pourquoy nous enseignerons icy comme il faut trouver la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF, les raisons de leurs côtez , étans connues en nombres. Comme par exemple , si la raison de BC à CG est la mesme que de 5 à 2, & celle de DC à CE, la mesme que de 3 à 5, nous trouverons la raison d'iceux parallelogrammes ainsi. Ayant posé la premiere raison estre 5 à 2, soit fait que comme 3 est à 5, (qui est la dernière raison) ainsi 2 soit à un autre nombre , qui sera trouvé estre $3\frac{1}{3}$: Cela fait, nous aurons les trois nombres 5, 2, $3\frac{1}{3}$, lesquels auront entr'eux les deux raisons proposées , & conséquemment en delaisant le nombre entre-moyen 2, demeurera 5 à $3\frac{1}{3}$ pour la raison composée d'icelles : & celle sera la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF, laquelle reduite en nombres entiers sera 15 à 10, ou 3 à 2, qui est raison sesquialtere.

On peut aussi en la mesme manière que dessus oster une raison
 d'une autre raison plus grande :
 comme par exemple , soit la raison de A à B, qu'il faut oster
 d'une plus grande raison C à D.

Soit fait que comme A est à B, ainsi C soit à quelq. autre , sçavoir E, qui soit posée moyenne entre C & D : & la raison de E à D sera la raison re-

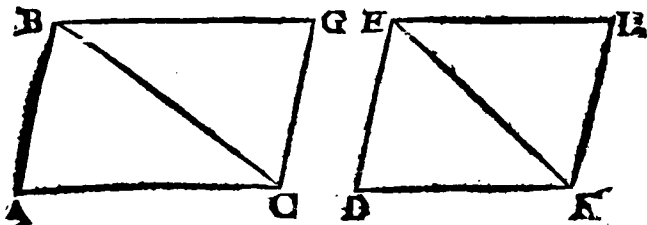
stante de la soustraction requise. Car puisque la raison de C à D est composée de celle de C à E , & de E à D ; si on en ôte celle-là de C à E , ou de A à B , qui luy est égale, restera la susdite raison de E à D .

Qu'il faille encore ôter la raison de 4 à 3 , de celle de 6 à 2 , soit fait que comme 4 est à 3 , ainsi 6 soit à un autre nombre, sçavoir $4\frac{1}{2}$: & la raison de $4\frac{1}{2}$ à 2 , sera le reste requis. Car il est évident que la raison de 6 à 2 , est composée de celles de 6 à $4\frac{1}{2}$, & de $4\frac{1}{2}$ à 2 : & partant en ôtant de ces deux raisons celle de 6 à $4\frac{1}{2}$, ou de 4 à 3 , qui luy est égale, restera la susdite raison de $4\frac{1}{2}$ à 2 , qui est double sesquiquarte.

Commandin démontre en ce lieu les trois Theor. suivans,

1. Les triangles qui ont un angle égal à un angle, sont en raison composée des côtez, qui comprennent l'angle égal.

Soient les triangles ABC , DEF , ayans l'angle B esgal à l'angle E : Je dis que le triangle ABC est au triangle DEF en raison composée des côtez comprenant les angles esgaux B & E . Car ayant achevé les parallélogrammes AG , DH , ils seront esquiangles: & partant par la 23. prop. 6. la raison d'iceux sera composée de celle de leurs cô-



tez: Vu donc que les triangles ABC , DEF , desquels ils sont moitié par la 34. prop. 1. sont en la même raison

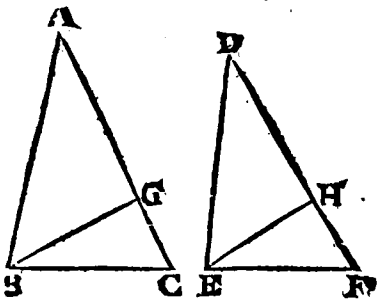
qu'iceux par la 15. prop. 5. aussi iceux triangles seront l'un à l'autre en icelle raison composée des côtez.

2. Les triangles qui ont un angle égal à un angle, sont l'un à l'autre, en la même raison que les rectangles compris sous les côtez, qui contiennent l'angle égal.

Soient les triangles ABC , DEF , ayans l'angle A esgale à l'angle D : je dis que le triangle ABC est au triangle DEF , comme le rectangle de AB , AC , est au rectangle de DE , DF . Car étans tirees sur AC , DF , les perpendiculaires BG , EH ; les triangles ABG , DEH , seront esquiangles, comme appert par le Corol. de la 32. prop. 1. Donc par la 4. prop. 6. comme GB est à BA , ainsi HE à ED . Mais par la 1. prop. 6. comme GB est à BA , ainsi le rectangle de BG , AC , au rectangle de BA , AC , pource que posant GB , BA , bases, la hauteur d'iceux rectangles sera une même, sça-

voir AC . Semblablement comme HE à ED , ainsi est le rectangle de EH , DF au rectangle de DE , DF . Donc par la 11. prop. 5. le rectangle de BG , AC , est au rectangle de AB , AC , comme le rectangle de EH , DF au rectangle de DE , DF ; & en permutant le rectangle de BG , AC sera au rectangle de EH , DF , comme le rectangle de AB , AC au rectangle de DE , DF .

Mais le rectangle de BG , AC , est au rectangle de EH , DF , ainsi que le triangle ABC au triangle DEF par la 15. prop. 5. pource que ces triangles sont moitez d'iceux rectangles, par la 41. prop. 1. (Car ils ont mêmes bases qu'iceux AC , DF , & mêmes hauteurs BG , EH : & partant entre mêmes parallèles) donc aussi le triangle ABC sera au triangle DEF , comme le rectangle de AB , AC , est au rectangle de DE , DF . Ce qui étoit proposé.

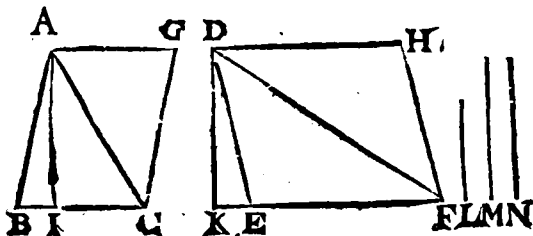


COROLLAIRE.

De cecy resulte que les parallelogrammes esquiangles sont aussi entr'eux, en la même raison que les rectangles compris sous les côtez des angles esgaux, puis qu'ils sont doubles d'iceux triangles.

3. Les triangles, & les parallelogrammes, sont entr'eux en la raison composée de la raison des bases, & de celle des hauteurs.

Soient les triangles ABC , DEF ; & les parallelogrammes BG , EH ; & les hauteurs d'iceux soient AI , DK . Je dis que la raison tant d'iceux triangles, que des parallelogrammes, est composée de la raison de la base BC à la base EF , & de celle de la hauteur AI à la hauteur DK . Car premierement soient les hauteurs esgales, mais les bases, ou aussi esgales ou inegales: & soit fait comme BC à EF , ainsi L à M : & comme AI à DK , ainsi M à N ,

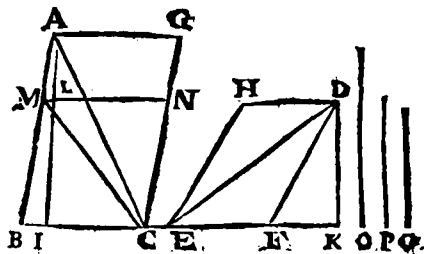


lesquelles seront esgales, puis que AI , DK , sont posées esgales: & partant par la 7. prop. 5. L sera à N , comme L à M , c'est-à-dire comme BC à EF . Mais par la 1. prop. 6. comme BC est à EF , ainsi est le triangle ABC au triangle DEF ; & le parallelogramme BG au parallelogramme EH : Donc par la 11. prop. 5. comme L sera à N , ainsi le triangle au triangle, & le parallelogramme au parallelogramme: Mais la raison de L à N est composée de la raison de L à M , c'est-à-dire de la raison de BC à EF , & de la raison de M à N , c'est-à-dire de AI à DK : donc la raison du triangle ABC au triangle DEF , & du

parallélogramme BG au parallélogramme EH, est aussi composée des mêmes raisons.

Soient maintenant les hauteurs AI, DK inégales, & AI la plus grande : mais les bases BC, EF, égales, ou aussi inégales. Soit fait que comme AI est à DK, ainsi O à P; & comme BC à EF, ainsi P à Q: puis ayant coupé IL égale à DK, par L, soit tirée MN parallèle à BC, & joint CM. D'autant que le triangle ABC est au triangle MBC, & le parallélogramme BG au parallélogramme BN, comme la hauteur AI à la hauteur IL ou DK qui lui est égale, c'est-à-dire comme O à P, par le Scholie de la 1.

prop. 6. & comme le triangle MBC est au triangle DEF, & le parallélogramme BN au parallélogramme FH, ainsi est la base BC à la base EF, (pource



qu'ils sont de même hauteur) c'est-à-dire ainsi P à Q: en raison égale ABC sera à DEF, & BG à FH comme O à Q. Parquoy puis que la raison de O à Q est composée de la raison de O à P, c'est-à-dire de AI à DK, & de la raison de P à Q, c'est-à-dire de la base BC à la base EF: la raison du triangle ABC au triangle DEF: & du parallélogramme BG au parallélogramme FH, sera composée des mêmes raisons. Ce qui étoit proposé.

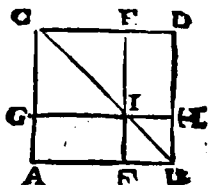
On peut démontrer en la même manière, que le triangle DEF, qui a la moindre hauteur, est au triangle ABC, & le parallélogramme FH au parallélogramme BG en la raison composée de celle de la base EF à la base BC, & de celle de la hauteur DK à la hauteur AI; & ce en faisant que comme EF à BC ainsi Q à P; & puis comme DK à AI, ainsi P à O; & tout le reste comme dessus. Appert donc ce qui étoit proposé.

THEOR. 18. PROP. XXIV.

En tout parallelogramme, les parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre, ayans un angle commun au total, sont semblables entr'eux, & au total.

Soit le parallelogramme $ABDC$, duquel le diametre est BC , & à l'entour d'iceluy diametre soient les deux parallelogrammes GE & FH , ayans les angles B & C communs avec le total : Je dis qu'iceux parallelogrammes GE & FH sont semblables entr'eux, & au total $ABDC$.

Car d'autant que les lignes AB & GH sont paralleles, sur lesquelles tombent les lignes CB & CA par la 29. prop. 1. l'angle externe CIG sera égal à l'interne IBF , & l'externe CGI à l'interne A , auquel est aussi égal l'externe IFB , attendu que BA tombe sur les deux paralleles EF & CA . Parquoy les trois triangles CAB , CGI & IFB ayans chacun deux angles égaux à deux angles, chacun au sien, les troisièmes angles seront aussi égaux, & consequemment iceux triangles seront équiangles entr'eux. Et par même raison les trois autres triangles CDB , CEI & IHB , qui par la 34. pr. 1. sont égaux aux trois precedents seront aussi équiangles entr'eux : Donc les parallelogrammes composez d'iceux triangles, sçavoir AD , GE & FH , seront pareillement équiangles entr'eux. Davantage, puis que le triangle CAB est équiangle au triangle CGI , & le triangle CDB au triangle CEI , par la 4. prop. 6. comme CA sera à AB , ainsi CG à GI : & par ainsi les côtez d'autour les angles égaux A & G , sont proportionaux. Derechef, comme AB est à BC , ainsi GI est à IC , & comme CB est à BD , ainsi CI est à IE . Donc en raison égale, comme AB sera à BD , ainsi GI sera à IE : & partant les côtez d'allentour les angles égaux.

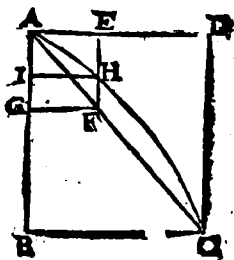


pre en la mesme raison de AC à AG, par le Corol. de la 19. ou 20. prop. 6. attendu qu'icelles figures sont décrites sur les deux premieres lignes des trois proportionnelles CA, AI & AG. Donc par la 11. prop. 5. ACB sera à IKA, comme AF à GE; & en permutant ACB sera à AF, comme IKA à GE, par la 16. prop. 5. & partant ACB étant égale à AF: aussi IKA sera égal à GE, & par conséquent égal à D: & par la construction, iceluy rectiligne IKA est aussi semblable, & semblablement posé au rectiligne ABC. Nous avons donc décrit une figure rectiligne semblable à une autre donnée, & égale à une proposée. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 19. PROP. XXVI.

Si d'un parallelogramme on oste un parallelogramme semblable & semblablement posé au tout, ayant un angle commun avec le tout; l'osté sera avec le tout à l'entour d'un mesme diametre.

Du parallelogramme ABCD soit retranché le parallelogramme AEFG semblable & semblablement posé au total BD, & ayant l'angle A commun avec iceluy: Je dis qu'ils sont tous deux constituez à l'entour d'un mesme diametre, c'est-à-dire qu'ayant mené au parallelogramme total BD le diametre AC, il passera par F, comme AFC,



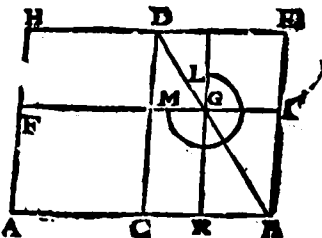
Autrement, soit (s'il est possible) un autre diametre AHC, qui ne passe par l'angle F du parallelogramme retranché EG: ains coupe le côté EF en H, & d'iceluy point soit menée HI parallele à AE, par la 31. prop. 1. donc le parallelogramme IE étant à l'entour d'un mesme diametre avec le total DB sera semblable à iceluy, par la 14. prop. 6. auquel total, GE est aussi semblable par

l'hypothese : & partant par la 21. prop. 6. les parallelogr. GE. & LE seront semblables entr'eux : & par la 1. def. 6. AE sera à EF comme AB à EH ; mais AE étant égal à l'oy mesme, il faudroit aussi par la 14. prop. 5. que EF 2. fust égale à EH 4. c'est à sçavoir le tout à la partie, ce qui est absurde : donc le parallelogr. total BD, & le retranché GE, étoient constituez à l'entour d'un mesme diametre : car il adviendra toujours la mesme absurdité, si on dit que le diametre de BD coupe à quelconque autre point, soit le côté EF ou FG, du parallelogramme retranché GE. Si donc d'un parallelogramme on oste un parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 20. PROP. XXVII.

De tous les parallelogrammes appliquez selon une mesme ligne droite, & defaillans de parallelogrammes semblables & semblablement posez à un autre décrit sur la moitié de la mesme ligne; le plus grand est celui-là qui est décrit sur l'autre moitié de la ligne, & semblable au defaut.

Soit la ligne droite AB coupée en deux également en C, & sur sa moitié d'icelle, soit constitué quelconque parallelogramme BCDE, duquel le diametre est BD : Si donc on accomplit tout le parallelogramme ABEH, le parallelogramme AD constitué sur la moitié AC, sera appliqué selon la ligne AB, & defaillant du parallelogramme CE, & semblable à iceluy defaut CE. Je dis que de tous les parallelogrammes qui peuvent estre appliquez selon icelle ligne AB, & defaillans d'une figure semblable & semblablement posée à CE, le plus grand est AD,



qui est décrit sur la moitié AC, & defaillant du parallelogramme CE.

Car étant pris au diametre BD quelconque point G, & tirées par iceluy point les. lignes droites FGI, KG, paralleles aux lignes droites AB, BE; le parallelogramme AKGF appliqué selon la ligne AB, sera defaillant du parallelogramme KI, lequel par la 24. prop. 6. est semblable & semblablement posé à CE. Et d'autant que par la 43. prop. 1. les complemens CG, GE, sont égaux, si on leur adjouste KI commun; aussi CI, KE seront égaux. Mais CI, CF, étans sur bases égales, sont pareillement égaux par la 36. prop. 1. donc aussi CF, KE seront égaux, & leur adjoustant CG commun, le parallelogramme AG sera égal au gnomon LM. Parquoy puis que CE est plus grand qu'iceluy gnomon LM: (car CE, outre le gnomon, contient encore le parallelogramme DG) aussi AD qui est égal à CE, par la 36. prop. 1. sera plus grand que le parallelogramme AG, du même parallelogramme DG. Et en la même maniere sera démontré que AD est plus grand que tous autres parallelogrammes, qui seront appliquez selon la même ligne droite AB, & defaillans de figures parallelogrammes semblables & semblablement posées à CE. Parquoy de tous les parallelogrammes appliquez selon une même ligne droite, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBL. 8. PROP. XXVIII.

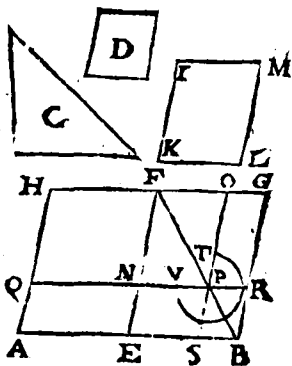
A une ligne droite donnée, appliquer un parallelogramme égal à une figure rectiligne donnée, & defaillant d'un parallelogramme semblable à un autre donné, mais il faut que la figure rectiligne donnée ne soit plus grande que le parallelogramme, qui étant appliqué à la moitié de la ligne donnée, est semblable au parallelogramme donné.

Soit la ligne droite donnée AB, à laquelle il faut appliquer un parallelogramme égal à la figure rectiligne

donnée C, defaillant d'un parallelogramme semblable au parallelogramme donné D.

Ayant couppe AB en deux également en E, sur la moitié EB soit décrit le parallelogramme EF, GB semblable & semblablement posé à iceluy D, par la 18. prop. 6. & soit accomply le parallelogramme AHGB.

Maintenant ; si AF est égal à C, on a ce que l'on demande : car il est appliqué selon la ligne AB, & defaillant du parallelogramme EG, qui est fait semblable à D. Mais si C est plus petit que AF, (car par l'hypothese il ne peut être plus grand) il sera aussi plus petit que EG égal à iceluy AF : soit donc trouvé l'excez de EG par dessus C, (cette égalité ou inégalité, & excez sera connu par ce que nous avons dit à la



25. prop. 1.) lequel excez par la 25. prop. 6. soit réduit en parallelogramme IKLM, semblable & semblablement posé à EG : & vû que EG est plus grand que KM, il est évident que les côtez EF, FG, seront aussi plus grands que les côtez homologues KI, IM : parquoy d'iceux EF, FG soient coupez FN, FO, égaux à iceux KI, IM, afin qu'étant accomply le parallelogramme NFOP, il soit égal à KM, & semblable & semblablement posé au même KM ; & partant aussi à EG : & par consequent qu'étant tiré le diametre BF, iceux parallelogrammes EG, NO, soient autour d'iceluy diametre par la 26. prop. 6. & après avoir continué de part & d'autre les côtez NP, OP, tant qu'il sera de besoin, sera constitué le parallelogramme AP, lequel je dis être le parallelogramme demandé.

Car il est appliqué à la ligne AB, & defaillant du parallelogramme SR, lequel par la 24. prop. 6. est semblable à EG, partant aussi à D. Item puis que IL est

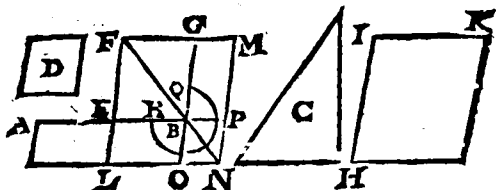
l'excez par lequel EG excède C, & qu'à iceluy excez est égal NO : Il est évident que le gnomon TV sera égal à la figure C. Mais il est aussi égal à AP, comme il a été prouvé à la précédente : donc aussi AP sera égal à C : Mais il est appliqué à la ligne donnée AB, & de faillant du parallelogramme SR semblable au donné D. Nous avons donc à une ligne droite donnée appliqué un parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 9. PROP. XXIX.

A une ligne droite donnée, appliquer un parallelogramme égal à une figure rectiligne donnée, excédant d'un parallelogramme semblable à un autre donné.

Soit la ligne droite donnée AB, à laquelle il faut appliquer un parallelogramme égal au rectiligne donné C, mais excédant d'un parallelogramme semblable au parallelogramme donné D.

La ligne AB soit coupée en deux également au point E, & sur la moitié EB soit décrit le parallelogramme EFGH semblable, & semblablement posé à D par la 18. prop. 6. En après, soit décrit le parallelogramme HK égal aux deux figures C & EG, & semblable, & semblablement posé à EG par la 25. prop. 6. & partant à cause de la similitude d'iceux parallelogrammes HK, EG, comme HI sera à IK, ainsi EF sera à FG ; &



par consequent HK étant plus grand que EG, aussi les côtez HI, IK seront plus grands que les côtez EF, FG : érans donc prolongez les côtez FE, FG, tellement que

FL, FM, soient égales aux lignes IH, IK, & achevé le parallélogramme LFMN, il sera semblable, & semblablement posé à EG. Parquoy par la 26. prop. 6. les parallélogrammes LM, & EG seront constituez à l'entour d'un même diamètre, lequel soit FN. Maintenant étant prolongez AB & GB jusques en P & O; & achevé le parallélogramme LA: le parallélogramme AN sera appliqué à la ligne AB, l'excédant du parallélogramme OP, qui est semblable à EG par la 24. prop. 6. & partant à D. Mais je dis aussi qu'iceluy parallélogramme AN est égal au rectiligne C; car puisque par la 36. prop. 1. AL, EO sont égaux, & par la 43. prop. 1. EO est égal au complément BM, aussi AL sera égal à iceluy BM: leur adjoustant donc LP commun; le parallélogramme AN sera égal au gnomon OP, lequel est égal au rectiligne C: (car puisque HM, c'est-à-dire LM, est égal aux rectilignes C & EG ensemble: si on ôte EG commun, resteront égaux le gnomon QR, & le rectiligne C.) Donc aussi le parallélogramme AN sera égal au rectiligne C. A la ligne droite AB, nous avons donc appliqué le parallélogramme AN égal au rectiligne C, excédant du parallélogramme OP, qui est semblable à un autre donné D: Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 10. PROP. XXX.

Couper une ligne droite donnée & terminée, selon la moyenne & extrême raison.

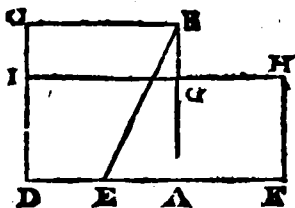
Soit la ligne droite donnée AB, laquelle il faut couper selon la moyenne & extrême raison.

Ayant décrit sur icelle ligne AB, le quarré AC, au côté DA soit appliqué par la 29. prop. 6. le rectangle DH égal à iceluy quarré AC, excédant du parallélogramme AH, semblable à iceluy AC; & la ligne AB sera coupée en G, selon la moyenne & extrême raison.

Car premièrement l'excez AH sera quarré, puis qu'il est semblable au quarré AC; & d'autant que DH est fait égal à AC, si d'iceux on ôte le parallélogramme commun AI, resteront égaux les parallélogrammes CG & AH,

& AH, lesquels ont aussi les angles au point G égaux. Donc par la 14. prop. 6. les côtez d'alentour iceux angles seront reciproques; tellement que comme IG est à GH, ainsi AG est à GB.

Mais par la 34. prop. 1. IG est égale à BC, c'est à dire à AB; & GH à AG: Donc comme AB sera à AG, ainsi AG sera à GB. Et puisque AB 1. est plus grande que AG 3. par la 14. prop. 5. AG 2. est aussi plus grande que GB 4. Veu donc



que la toute AB est au plus grand segment AG, comme iceluy plus grand segment AG est au plus petit GB; icelle AB est coupée en G, selon la moyenne & extrême raison, par la 3. def. 6. Ce qu'il falloit faire.

Autrement. La ligne donnée AB soit coupée en G, par la 11. prop. 2. en sorte que le quarré de la partie AG soit égal au rectangle de la toute AB, & de la partie GB. Je dis que AB sera coupée selon la moyenne & extrême raison au point G.

Car puis que le quarré de AG est égal au rectangle de AB & GB, les trois lignes AB, AG & GB, seront continuellement proportionnelles, par la 17. prop. 6. c'est à dire que la toute AB sera au plus grand segment AG, comme iceluy segment AG est au plus petit segment GB; & par la 3. def. 6. AB est coupée en G, selon la moyenne & extrême raison. Ce qu'il falloit faire.

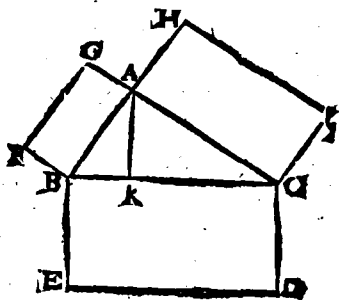
THEOR. 21. PROP. XXXI.

Aux triangles rectangles, la figure décrite sur le côté qui soutient l'angle droit, est égale aux deux autres figures qui luy sont semblables, & semblablement décrites sur les deux autres côtez.

Soit le triangle rectangle ABC, ayant l'angle BAC, droit, & sur le côté BC, qui soutient iceluy angle,

soit décrite quelconque figure rectiligne BD, & sur les deux autres côtez AB, AC, soient constituées les deux figures AF, AI semblables, & semblablement posées à BD : Je dis qu'icelle figure BD est égale aux deux autres AF, AI.

Car si du point A, on mène sur BC la perpendiculaire AK, par la 8. prop. 6. elle fera deux triangles semblables entr'eux, & au total; & par ainsi les trois triangles BAK, ABC, CAK, seront semblables entr'eux, & par la 19. prop. 6. ils seront l'un à l'autre en raison doublée des côtez de même raison AB, BC, CA. Mais par la 20. prop. 6. les trois figures AF, BD & AI, étant semblables, & semblablement posées,



elles seront aussi l'une à l'autre en raison doublée de leurs côtez de même raison AB, BC, CA, qui sont les mêmes côtez des triangles : donc par la 11. prop. 5. les rectilignes AF, BD, AI, seront entr'eux, comme les triangles BAK, BAC, CAK entr'eux, c'est-à-dire, que comme le triangle BAK est au triangle ABC, ainsi le rectiligne AF est au rectiligne BD, & comme le triangle CAK est au triangle ABC, ainsi le rectiligne AI est au rectiligne BD : Donc par la 24. prop. 5. comme le composé des triangles BAK, CAK, 1. & 5. grandeurs, sera au triangle ABC, 2. grandeur, ainsi le composé des rectilignes AF, AI, 3. & 6. grandeurs, sera au rectiligne BD, 4. grandeur : mais le triangle BAC, est égal aux deux autres BAK, ACK : donc la figure BD sera aussi égale aux deux autres AF, AI. Parquoy aux triangles rectangles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

Autrement. D'autant que par la 20. prop. 6. les figures semblables sont en raison doublée de leurs côtez homologues, comme le carré de AB 1. grandeur, est

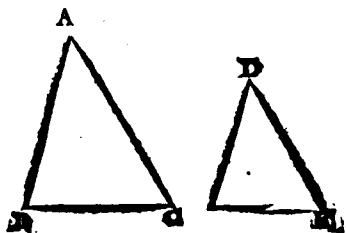
au quarré de BC 2. grandeur, ainsi la figure AF 3. grandeur, est à la figure BD 4. grandeur : Mais aussi comme le quarré de AC 5. grandeur, est au quarré de BC 2. grandeur, ainsi la figure AI 6. grandeur, est à la figure BD 4. grandeur. Donc par la 24. prop. 5. le composé de la 1. & 5. grandeur, sçavoir le quarré de AB avec celui de AC, sera à la 2. grandeur BC, comme le composé de la 3. & 6. grandeur, sçavoir la figure AF avec la figure AI, sera à la 4. grandeur BD. Mais par la 47. prop. 1. les deux quarrés de AB, AC, sont égaux au seul quarré de BC : donc aussi les deux figures AF, AI ensemble, seront égales à la figure BD. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 22. PROP. XXXII.

Si deux triangles ayans deux côtez proportionaux à deux côtez, sont disposez selon un angle, tellement que les côtez de même raison soient parallèles ; les deux autres côtez se rencontreront directement.

Soient deux triangles ABC & CDE, ayans les côtez BA & AC proportionaux aux côtez CD & DE, disposez de telle façon qu'ils fassent l'angle ACD, & que BA soit parallèle à CD, & AC à DE : Je dis que les deux autres côtez BC & CE se rencontreront directement.

Car puisque BA & CD sont parallèles, l'angle ACD sera égal à son alterne A, par la 29. prô. 1. aussi AC étant parallèle à DE, l'angle D sera égal à son alterne ACD : parquoy l'angle D sera égal à l'angle A. Mais par l'hypothese les côtez qui constituent iceux angles égaux,

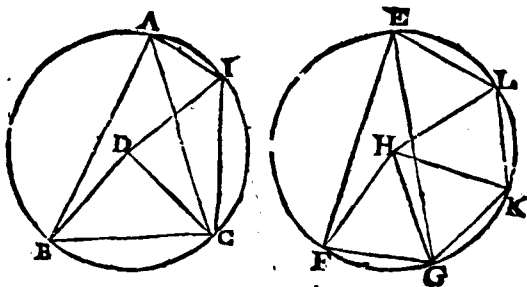


sont proportionnaux : donc par la 6. prop. 6. les deux triangles ABC , DCE , seront équiangles, & auront les angles B & DCE égaux : leur adjoustant donc les égaux A & ACD , les deux B & A ensemble, seront égaux aux deux DCE , & ACD ensemble ; c'est à dire au seul angle ACE : parquoy adjoûtant derechef à ces angles égaux, le commun ACB , les deux angles ACE , ACB , seront égaux aux trois angles du triangle BAC , c'est à dire à deux droits par la 32. prop. 1. & par la 14. prop. 1. les deux lignes BC & CE se rencontreront directement. Si donc deux triangles ayans deux côtes proportionnaux à deux côtes, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Aux cercles égaux, les angles constituez tant aux centres qu'aux circonferences, sont entr'eux, comme les circonferences qui les soustiennent. Et les secteurs sont aussi de mesme entr'eux

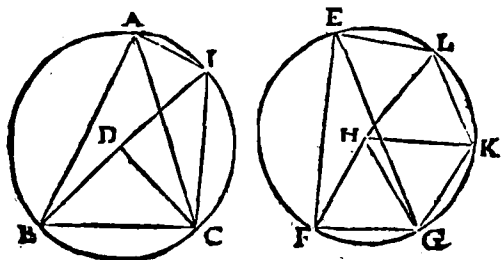
Soient deux cercles égaux ABC & EFG , desquels les centres sont D & H ; & soient les deux angles BDC , FHG aux centres ; mais les deux BAC , FEG , aux cir-



conférences. Je dis premierement, que comme la circonferance BC est à la circonferance FG , ainsi l'angle BDC est à l'angle FHG , & l'angle BAC à l'angle FEG .

Car ayant mené les deux lignes droites BC, FG, soient accommodées aux cercles des lignes droites, ſçavoir CI égale à BC ; & GK, KL chacune égale à FG : puis ſoient menées les lignes ID, KH & LH. Veu donc que les deux lignes droites BC & CI ſont égales, les arcs BC & CI ſeront auffi égaux par la 28. prop. 3. & partant les angles BDC & CDI, ſeront égaux par la 27. prop. 3. Pour mêmes raiſons, tant les trois arcs FG, GK, & KL, que les trois angles FHG, GHK, & KHL ſont égaux entr'eux : donc l'arc FGKL eſt autant multiplie de l'arc FG, comme l'angle FHL eſt multiplie de l'angle FHG : & l'arc BCI autant multiplie de l'arc BC, comme l'angle BDI, eſt multiplie de l'angle BDC, puis que les angles BDI, FHL ſont diviſez chacun en autant de parties égales, que les arcs BCI, FGKL, ſur leſquels ils ſ'appuient : partant ſi l'arc BCI eſt égal à l'arc FGKL, l'angle BDI ſera égal à l'angle FHL par la 27. prop. 3. ſi plus grand, plus grand ; & ſi plus petit, plus petit : donc puis que BCI, BDI, ſont équemultiples de BC, BDC, première & troiſième grandeur ; & FGKL, FHL équemultiples de FG, FHG 2^e & 4^e grandeur ; par la 6. def. 5. comme l'arc BC eſt à l'arc FG, ainſi l'angle BDC eſt à l'angle FHG.

Et d'autant que par la 15. prop. 5. l'angle BDC eſt à l'angle FHG, comme l'angle BAC eſt à l'angle FEG,



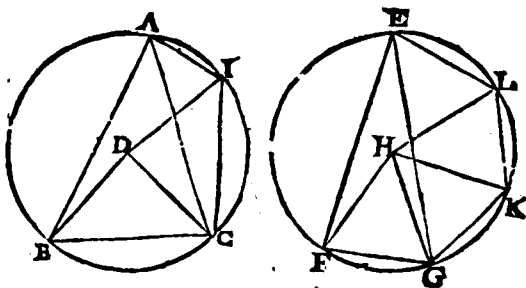
(car ceux-là ſont doubles de ceux-cy par la 20. prop. 3.) il eſt évident par la 11. prop. 5. que l'angle BAC eſt auffi à l'angle FEG, comme l'arc BC eſt à l'arc FG.

sont proportionnaux : donc par la 6. prop. 6. les deux triangles ABC , DCE , seront équiangles, & auront les angles B & DCE égaux : leur adjoustant donc les égaux A & ACD , les deux B & A ensemble, seront égaux aux deux DCE , & ACD ensemble ; c'est à dire au seul angle ACE : parquoy adjoûtant derechef à ces angles égaux, le commun ACB , les deux angles ACE , ACB , seront égaux aux trois angles du triangle BAC , c'est à dire à deux droits par la 32. prop. 1. & par la 14. prop. 1. les deux lignes BC & CE se rencontreront directement. Si donc deux triangles ayans deux côtez proportionnaux à deux côtez, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Aux cercles égaux, les angles constituez tant aux centres qu'aux circonferences, sont entr'eux, comme les circonferences qui les soustiennent. Et les secteurs sont aussi de mesme entr'eux

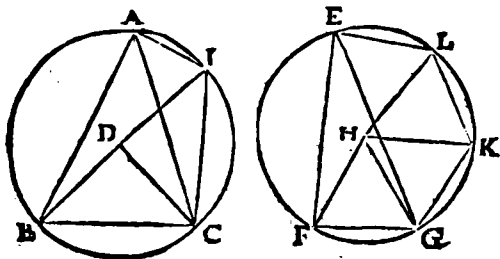
Soient deux cercles égaux ABC & EFG , desquels les centres sont D & H ; & soient les deux angles BDC , FHG aux centres ; mais les deux BAC , FEG , aux cir-



conférences. Je dis premierement, que comme la circonferance BC est à la circonferance FG , ainsi l'angle BDC est à l'angle FHG , & l'angle BAC à l'angle FEG .

Car ayant mené les deux lignes droites BC, FG, soient accommodées aux cercles des lignes droites, ſçavoir CI égale à BC ; & GK, KL chacune égale à FG : puis ſoient menées les lignes ID, KH & LH. Veu donc que les deux lignes droites BC & CI ſont égales, les arcs BC & CI ſeront auffi égaux par la 28. prop. 3. & partant les angles BDC & CDI, ſeront égaux par la 27. prop. 3. Pour mêmes raiſons, tant les trois arcs FG, GK, & KL, que les trois angles FHG, GHK, & KHL ſont égaux entr'eux : donc l'arc FGKL eſt autant multiplie de l'arc FG, comme l'angle FHL eſt multiplie de l'angle FHG : & l'arc BCI autant multiplie de l'arc BC, comme l'angle BDI, eſt multiplie de l'angle BDC, puis que les angles BDI, FHL ſont diviſez chacun en autant de parties égales, que les arcs BCI, FGKL, ſur leſquels ils ſ'appuient : partant ſi l'arc BCI eſt égal à l'arc FGKL, l'angle BDI ſera égal à l'angle FHL par la 27. prop. 3. ſi plus grand, plus grand ; & ſi plus petit, plus petit : donc puis que BCI, BDI, ſont équemultiples de BC, BDC, première & troiſième grandeur ; & FGKL, FHL équemultiples de FG, FHG 2^e & 4^e grandeur ; par la 6. def. 5. comme l'arc BC eſt à l'arc FG, ainſi l'angle BDC eſt à l'angle FHG.

Et d'autant que par la 15. prop. 5. l'angle BDC eſt à l'angle FHG, comme l'angle BAC eſt à l'angle FEG,



(car ceux-là ſont doubles de ceux-cy par la 20. prop. 3.) il eſt évident par la 11. prop. 5. que l'angle BAC eſt auffi à l'angle FEG, comme l'arc BC eſt à l'arc FG.

Ce qu'on peut encore démontrer par les mêmes raisons , & argumens employez pour les angles du centre , si on tire les lignes droites IA, KL, LE, &c.

Secondement , Je dis que le secteur BDC est au secteur FHG, comme l'arc BC est à l'arc FG : Car (demeurant la même construction que dessus) il est manifeste que les cordes BC & CI étans égales , & leurs arcs aussi égaux , les angles BAC , & CAI seront pareillement égaux par la 27. prop. 3. & conséquemment que les segmens sur lesquels ils insistent & s'appuient , sont semblables & égaux entr'eux. Mais les deux triangles BDC, CDI, sont aussi égaux par la 4. prop. 1. leur adjoustant donc les deux segmens égaux , les deux secteurs BDC, CDI seront égaux : Parquoy l'arc BCI sera autant multiplie de l'arc BC, que le secteur BDI le sera du secteur BDC : & par même discours , l'arc FGKL sera montré autant multiplie de l'arc FG, que le secteur FHL l'est du secteur FHG. Partant si l'arc BCI est égal à l'arc FGKL, aussi le secteur BDI sera égal au secteur FHL ; & si plus grand , plus grand ; & si plus petit , plus petit. Donc les deux arcs BC, FG, avec les deux secteurs BDC, FHG , sont quatre grandeurs , de la 1^{re} & 3^e desquelles BCI, BDI, sont equemultiples, mais de la 2^e & 4^e sont aussi equemultiples FGKL , FHL. Et puis que nous avons prouvé que si l'arc BCI est égal à l'arc FGKL , aussi le secteur BDI est égal au secteur FHL ; & si plus grand , plus grand ; & si moindre, moindre : par la 6. def. 5. comme l'arc BC sera à l'arc FG, ainsi le secteur BDC, sera au secteur FHG. Parquoy aux cercles égaux , les angles constituez tant aux centres qu'aux circonferences, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

De cecy il s'ensuit que comme le secteur est au secteur , ainsi l'angle est à l'angle. Car l'une & l'autre raison est la même que de l'arc à l'arc ; & partant par la 11. prop. 5. ils seront aussi entr'eux en la même raison.

Il est aussi évident que comme un angle au centre , est à quatre angles droits , ainsi est l'arc sousendant iceluy angle, à toute la circonference : & au contraire , que comme quatre

angles droits sont à un angle au centre, ainsi toute la circonférence est à l'arc soutenant iceluy angle.

Car comme l'angle au centre est à l'angle droit au centre, ainsi l'arc qui soutient iceluy angle, est au quadrant qui soutient l'angle droit par la 33. prop. 6. Parquoy comme l'angle au centre sera au quadruple de l'angle droit, c'est à sçavoir à quatre angles droits, ainsi l'arc soutenant iceluy angle, sera au quadruple du quadrant, c'est-à-dire à toute la circonférence, par les choses démontrées à la fin du Scholie de la 22. prop. 5. Puis après, d'autant qu'un angle au centre est à quatre angles droits, comme l'arc qui soutient iceluy angle, est à toute la circonférence; aussi en permutant, comme quatre angles droits seront à un angle au centre, ainsi toute la circonférence sera à l'arc soutenant l'angle au centre: Ce qui a été proposé.

Fin du sixième Elément.



ELEMENT

SEPTIEME.

DEFINITIONS.

L'UNITÉ, est selon laquelle une chacune des choses qui sont, est appelée une.

Euclide ayant traité es 6. livres precedents de la premiere partie de Geometrie, sçavoir est de celle-là qui considere les plans, au paravant que venir à l'autre partie, laquelle traite des solides, il explique en ce septième livre & es deux suivans, les proprietéz & affections des nombres, pour puis après traiter au 10. livre des lignes commensurables & incommensurables, necessaires pour avoir entiere & parfaite connoissance des proprietéz des solides. Euclide commençant donc selon sa coutume par les principes, il définit premierement que c'est que l'unité, & dit que c'est cela selon quoy toute chose qui est se nomme une : & selon cette unité nous avons de coutume de dire une pierre, un animal, un corps, &c. Mais

est à noter que tout ainsi qu'en la Geometrie le point n'a aucune partie étant indivisible, aussi les nombres l'unité ne reçoit aucune division, mais est indivisible selon nôtre auteur, lequel n'a égard en ces Elements cy qu'aux nombres entiers : mais nous y joindrons aussi quelque chose des fractions & nombres rompus, afin de faire voir que toutes les regles enseignées en nôtre Arithmetique pratique, ne sont moins veritables & certaines, que si elles étoient restraintes seulement aux nombres entiers dont traite icy Euclide.

2. Nombre, est une multitude composée de plusieurs unitez.

C'est-à-dire qu'étans assemblées plusieurs unitez ensemble, leur aggregé & collection s'appelle nombre : dont s'ensuit qu'en tout nombre il y a autant de parties qu'il y a d'unitez qui le constituent : de sorte que l'unité est la partie de chaque nombre dénommée par le même nombre duquel elle est partie : comme le nombre 4 composé de quatre unitez, se divise en autant de parties, sçavoir est en quatre unitez, chacune desquelles est dite quatrième partie du nombre 4. Ainsi aussi le nombre 20 composé de vingt unitez se divise en autant de parties, chacune desquelles est dite vingtième partie d'iceluy nombre 20, &c. D'où résulte que tous les nombres sont commensurables entr'eux, puis qu'ils sont tous mesurez par une même & commune mesure, sçavoir par l'unité, comme il est dit : ce qui ne peut pas convenir à toutes les grandeurs, puis que plusieurs.

d'icelles n'ont point de commune mesure, mais sont incommensurables, comme il sera démontré au 10. livre.

3. Un nombre est partie d'un autre nombre, le plus petit du plus grand, lors que le plus petit mesure le plus grand.

C'est-à-dire, que lors qu'un nombre en mesure ou divise exactement un plus grand, sans qu'il reste rien, il est dit partie d'iceluy : comme 4 est dit partie de 12, d'autant qu'iceluy nombre 12 est divisé exactement par 4 sans qu'il reste rien : semblablement chacun de ces nombres 2, 3, 6 et 9, est partie du nombre 18, puis que chacun le mesure ou divise exactement. Or toute partie, comme nous avons dit à la 1. def. 5. est appelée aliquote, & prend son nom du nombre par lequel elle en mesure un autre ; tellement que 2 est dit partie aliquote de 4 ; & se nomme $\frac{1}{2}$; pource que 2 mesure 4 par 2 : et cinq est dit partie aliquote de 15, c'est à sçavoir $\frac{1}{3}$, pource que 5 mesure 15 par 3 : ainsi 4 qui mesure 28 par 7, est dit $\frac{1}{7}$, &c.

4. Mais un nombre est dit parties d'un autre plus grand, lors que le plus petit ne mesure pas le plus grand.

C'est-à-dire, que lors qu'un petit nombre n'en mesure pas un plus grand, il n'est pas dit partie d'iceluy, mais parties. Comme 6 est dit parties de 9 : car il ne le mesure pas précisément, mais

est deux parties d'iceluy , sçavoir est $\frac{3}{4}$: ainsi 12 est parties de 16 , sçavoir $\frac{3}{4}$ pource que 4 , qui mesure l'un & l'autre nombre , est 3 fois en 12 , & 4 fois en 16 : aussi 15 est parties de 24 , sçavoir est $\frac{5}{8}$, puis que 3 , qui est commune mesure , est 5 fois en 15 , & 8 fois en 24. Semblablement 5 est parties de 7 , sçavoir est $\frac{5}{7}$: & 4 est parties de 9 , sçavoir est $\frac{4}{9}$, &c.

5. Mais un grand nombre est dit multiple d'un petit , lors que le petit mesure le grand.

Tout ainsi que tout petit nombre n'est pas dit partie d'un plus grand , ains seulement de celuy-là qu'il mesure précisément ; ainsi aussi tout grand nombre n'est pas dit multiple , ou le plusieurs fois de tout autre nombre plus petit , mais seulement de ceux-là qui le peuvent précisément mesurer : tellement que de deux nombres inégaux , si le petit mesure précisément le grand , ce moindre est dit partie du grand , mais celuy-cy est aussi dit multiple de cettuy-là : Ainsi 4 est bien dit partie de 12 , mais aussi iceluy 12 est dit multiple de 4. Pareillemens 30 est dit multiple tant de 5 que de 6 , qui sont parties d'iceluy , puis que l'un & l'autre le mesure.

6. Nombre pair , est celuy qui peut être divisé en deux également.

Comme tous ces nombres 2 , 4 , 8 , 20 , 50 , sont appellez nombres pairs , pource que chacun

d'iceux peut être divisé en deux également, c'est-à-dire en deux parties égales; car leurs moitiés, sont 1, 2, 4, 10, 25. &c.

7. Mais l'impair, est celui qui ne peut être divisé en deux également: ou bien celui qui est différent du nombre pair de l'unité.

Comme tous ces nombres-cy 3, 5, 7, 9, 11, 13, 51, sont nommez impairs, pource qu'ils ne peuvent être divisés en deux également: Ou bien d'autant qu'ils sont differens de l'unité des nombres pairs, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 50, &c.

8. Nombre parement pair, est celui qu'un nombre pair mesure par un nombre pair.

C'est-à-dire, que si un nombre pair en mesure un autre par un nombre qui soit aussi pair, le nombre mesuré sera dit parement pair: comme 32, lequel 8 mesure par 4, est dit nombre parement pair: Semblablement 24 sera dit nombre parement pair, pource que 6 nombre pair le mesure par 4 nombre pair, &c.

9. Et parement impair, est celui qu'un nombre impair mesure par un nombre pair.

C'est-à-dire, que si un nombre pair en mesure un autre par un nombre impair, le mesuré sera dit parement impair: comme 42 est dit nombre

pairement impair , pource que 6 , nombre pair le mesure par 3 , nombre impair. Semblablement 24 sera dit nombre pairement impair , d'autant que 3 , nombre impair le mesure par 8 , nombre pair. Et est à noter , qu'il y a plusieurs nombres qui sont pairement pair , & pairement impair , comme 12 , 24 , 48 , 96. &c. Et que ce soit l'intention d'Euclide , les 32 , 33 , & 34. prop. 9. le montrent assez.

10. Mais nombre impairement impair , est celui qui est mesuré d'un nombre impair par un nombre impair.

Comme 15 , lequel est mesuré de 5 , par 3 , est dit nombre impairement impair : & tels sont aussi les nombres suivans , 9 , 21 , 25 , 27 , 33 , 35 , &c.

11. Nombre premier , est celui qui est mesuré par la seule unité.

C'est-à-dire , que si un nombre n'est mesuré par aucun autre nombre , mais seulement par soy même , & l'unité , il est nombre premier , & tels sont tous ceux-cy 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 , 29 , 31 , &c. Car chacun d'iceux n'est mesuré par aucun autre nombre , mais par la seule unité.

12. Nombres premiers entr'eux , sont ceux-là qui n'ont autre commune mesure que l'unité.

C'est-à-dire , que si deux ou davantage de

nombre n'ont autre commune mesure que l'unité; ils seront dits premiers entr'eux, jaçoit que chacun d'iceux puisse être mesuré par quelque nombre outre l'unité. Comme ces deux nombres 15 & 8, sont dits premiers entr'eux, pource qu'il n'y a que l'unité qui les puisse mesurer tous deux; car encore que le premier soit mesuré par 5 & 3, & le dernier par 4 & 2, si est-ce toutesfois qu'aucun d'iceux quatre nombres ne peut mesurer l'un & l'autre des proposez, ains la seule unité est leur commune mesure.

13. Nombre composé, est celui qui est mesuré par quelque autre nombre.

Comme 15 est appelé nombre composé, pource qu'il est mesuré par 5 & 3: Aussi 27 est nombre composé, d'autant qu'il est mesuré par 9 & 3, &c.

14. Mais les nombres composez entr'eux, sont ceux-là qui ont autre commune mesure que l'unité.

C'est-à-dire, que si deux ou davantage de nombres sont mesurez par quelque nombre outre l'unité, comme par leur commune mesure, ils seront dits nombres composez entr'eux: ainsi les nombres 9 & 15 sont composez entr'eux, d'autant que 3 mesure l'un & l'autre d'iceux, comme leur commune mesure. Aussi 7, 21, & 28, sont composez entr'eux, pource que le premier d'iceux mesure soy-même, & les deux autres.

15. Un nombre est dit multiplier un nombre , lors qu'il en est procréé un autre ; qui est autant de fois composé de celui qui est multiplié qu'il y a d'unités au multipliant.

Comme 4 sera dit multiplier 6 , si iceluy nombre 6 est pris ou composé quatre fois , c'est à sçavoir autant de fois qu'il y a d'unités au multipliant 4 ; & le nombre procréé , qu'on appelle vulgairement produit , sera 24. Aussi le nombre 6 sera dit multiplier le nombre 4 , si nous prenons iceluy nombre 4 , six fois ; c'est à sçavoir autant de fois qu'il y a d'unités en 6 nombre multipliant ; & en sera procréé le même nombre 24. Ainsi un nombre sera dit être procréé ou produit de deux nombres , quand il sera produit en multipliant l'un d'iceux nombres par l'autre. Comme le nombre 36 sera dit être le produit de ces deux nombres 4 & 9 , pource qu'il est procréé en multipliant le nombre 4 par le nombre 9 , ou au contraire le nombre 9 par le nombre 4.

Or de ce que dessus il s'ensuit que le nombre produit de la multiplication d'un nombre par un autre , a même raison auquel on voudra d'iceux nombres que l'autre à l'unité. Car puis que selon la def. d'Euclide , pour avoir le produit de deux nombres il faut prendre autant de fois l'un d'iceux , qu'il y a d'unités en l'autre , iceluy produit contiendra autant de fois l'un ou l'autre des nombres multiplians qu'il y a d'unités en l'autre : & partant il y aura même raison du nombre pro-

duit à l'un ou l'autre des multipliers, que de l'autre multiplicateur à l'unité : parquoy la multiplication d'un nombre en un autre peut être définie ainsi.

La multiplication d'un nombre par un autre, est l'invention d'un nombre qui ait même raison auquel on voudra des nombres multipliers, que l'autre à l'unité.

Ainsi tu vois que de la multiplication de 5 par 7, est produit le nombre 35, lequel est à 5, comme 7 à 1; ou à 7, comme 5 à 1.

A cette définition Clavius adjointe la suivante.

Un nombre est dit diviser un nombre, quand on en prend un autre, qui contient autant d'unités que le nombre divisant est contenu de fois au nombre divisé.

Comme le nombre 6 sera dit diviser le nombre 24, si on prend le nombre 4; qui montre par ses quatre unités, que le nombre 6 est contenu 4 fois au nombre divisé 24. Aussi le nombre 4 sera dit diviser le même nombre 24, si on prend le nombre 6, lequel dénote par ses six unités, que le nombre divisant est contenu six fois au divisé 24.

De cecy il advient que le nombre provenant de la division, lequel on appelle vulgairement quotient, a même raison à l'unité, que le nombre divisé au diviseur. Car puis que, comme nous avons dit en la def. le quotient doit montrer & indiquer par ses unités, combien de fois le nombre diviseur est contenu au divisé, iceluy quotient contiendra autant de fois l'unité, que le nombre divisé

visé contient le diviseur; & partant il y aura même raison du quotient à l'unité, que du nombre divisé au diviseur. Parquoy la division d'un nombre par un autre se peut aussi définir ainsi.

La division d'un nombre par un nombre, est l'invention d'un nombre qui ait même raison à l'unité, que le nombre divisé au divisant.

Ainsi appert que de la division du nombre 24 par six, est provenu le nombre 4, lequel est à 1, comme 24 à 6. Item de la division du même nombre 24, par 4, est produit le nombre 6, qui est à 1, comme 24 à 4.

De cecy il advient qu'étant divisé un nombre par un nombre, le nombre divisé sera procréé de la multiplication du nombre trouvé, c'est-à-dire du quotient, par le nombre diviseur. Car ayant divisé le nombre *A* par *B*, le quotient soit *C*, je dis que le nombre *A* sera produit de la multiplication du nombre *C* par le nombre *B*. D'autant que par *A*. *B*. *C*. *D*. la def. de la multiplication le 48. 8. 6. 1. nombre procréé de *C* multiplié par *B*, est à *B*, comme *C* à l'unité *D*; & que par la def. de la division *A* est aussi à *B*, comme *C* à l'unité *D*; il est manifeste que le nombre procréé par la multiplication de *C* en *B* est le nombre *A*, vû que tant iceluy nombre procréé, que le divisé *A*, a même raison à *B*, que *C* à l'unité *D*.

Or ce que nous avons dit cy-dessus touchant la multiplication & division des nombres entiers, convient aussi aux nombres rompus; tellement que le nombre $\frac{1}{2}$ sera dit multiplier le nombre 20,

si le nombre 20 est pris autant de fois qu'il y a d'unités en $\frac{1}{2}$; & sera procréé le nombre 10 : car d'autant que l'unité est seulement par sa moitié en $\frac{1}{2}$, il faut aussi prendre le nombre 20 par sa moitié , qui est 10. Semblablement le nombre 20 , sera dit multiplier $\frac{1}{2}$, si $\frac{1}{2}$ est pris vingt fois , c'est à sçavoir autant de fois que l'unité est en 20 ; & le produit sera le même nombre 10. Item , $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ seront dits s'entremultiplier ; si on prend la troisième partie de $\frac{1}{2}$, tout ainsi que $\frac{1}{3}$ contient seulement la troisième partie de l'unité : ou bien si on prend la moitié de $\frac{1}{3}$, parce que $\frac{1}{2}$ contient seulement la moitié de l'unité : & par ainsi le produit sera $\frac{1}{6}$; car c'est la troisième partie du nombre $\frac{1}{2}$, ou de $\frac{2}{6}$, & la moitié du nombre $\frac{1}{3}$, ou $\frac{2}{6}$.

Mais le nombre $\frac{1}{2}$ sera dit diviser le nombre 10 , si on prend le nombre 20 , qui montre que le nombre divisant $\frac{1}{2}$ est contenu vingt fois au nombre divisé 10 ; tellement qu'il y ait la même raison du nombre procréé 20 à 1 , que du nombre divisé 10 au divisant $\frac{1}{2}$. Ainsi aussi $\frac{1}{2}$ sera dit diviser $\frac{1}{6}$ si on prend le nombre $\frac{1}{3}$, lequel montre que le nombre divisant $\frac{1}{2}$, n'est pas tout contenu au divisé $\frac{1}{6}$, ains seulement la troisièsmesme partie d'iceluy : car puis que le nombre $\frac{1}{2}$ est le même que $\frac{3}{6}$, il est évident que la troisièsmesme partie d'iceluy , c'est à sçavoir $\frac{1}{6}$, est contenu en $\frac{1}{6}$. Or comme il faut faire & pratiquer non seulement la multiplication & division en nombres rompus , mais aussi toutes les autres regles & operations d'Arithmetique , nous l'avons enseigné en nôtre Pratique d'Arithmetique , & à la fin de ce 7. livre d'Enclide nous en ferons les demonstrations.

16. Lors que deux nombres se multiplient l'un l'autre , le produit est appelé plan ; & les nombres multipliers sont dits côtez d'iceluy plan.

C'est-à-dire que tout nombre produit de la mutuelle multiplication de deux nombres est appelé nombre plan : d'autant que chaque unité de l'un d'iceux nombres étant posée & étendue d'ordre autant de fois qu'il y a d'unité en l'autre nombre , est représenté un parallelogramme rectangle , duquel les côtez sont les deux nombres se multipliers , comme il a été dit au 2. livre. Ainsi le nombre 20 produit de 5 par 4 est dit nombre plan , & iceux nombres 5 & 4 sont dits côtez d'iceluy plan.

17. Mais quand trois nombres se multiplient l'un l'autre , le produit est appelé solide , & les multipliers sont dits côtez d'iceluy.

Comme si on multiplie 6 par 5 , & leur produit 30 par 4 , sera procréé le nombre 120 ; lequel s'appellera nombre solide , & les trois nombres multipliers 6 , 5 & 4 , seront dits côtez d'iceluy solide.

18. Nombre quarré , est celuy qui est également égal : ou bien c'est le produit de deux nombres égaux.

Comme le nombre plan 16 est appelé quarré , pource qu'il est procréé de la multiplication de 4

par 4, & conséquemment égal de tous côtez. Ainsi aussi 49, produit de la multiplication de 7 par 7, sera appellé nombre quarré.

19. Nombre cube, est celui qui est également égal également : ou bien c'est le produit de trois nombres égaux.

Comme si le nombre 4 est multiplié par 4, & puis leur produit 16 encore par 4, sera procréé le nombre 64, qui s'appellera nombre cube.

20. Les nombres sont proportionnaux, quand le premier est autant multiple, ou mesme partie, ou mesmes parties du second, comme le troisième du quatrième.

C'est à dire, que quand un nombre est même partie, ou mêmes parties d'un nombre, qu'un autre d'un autre, iceux quatre nombres sont dits proportionnaux. Ainsi pource que le nombre

A est même partie du nombre *A* *B* *C* *D*
B, que le nombre *C* du nombre *D*, 5. 10. 4. 8.

c'est à sçavoir la moitié, iceux quatre nombres *A*, *B*, *C*, *D*, sont *E* *F* *G* *H*
 proportionnaux. Aussi les quatre 6. 9. 4. 6.
 nombres *E*, *F*, *G*, *H* sont propor-

tionnaux, puis que *E* est mêmes 1 *K* *L* *M*
 parties de *F*, que *G* de *H*, c'est à 20. 5. 8. 2.
 sçavoir deux troisièmes parties.

Item les quatre nombres 1, *K*, *L*, *M*, sont aussi proportionnaux, d'autant que comme 1 est quadruple de *K*, aussi *L* est quadruple de *M*; ou bien pour-

ce que M est telle partie de L que K de 1 : Car il est évident que si le premier nombre L est autant multiple du second K , que le troisième L , l'est du quatrième M : en prenant les mesmes nombres par ordre contraire, M sera telle partie de L , que K de 1 , c'est à sçavoir le quart. Parquoy on peut assurément conclurre que quatre nombres sont proportionnaux, quand le moindre des deux premiers est même partie, ou mesmes parties de l'autre, que le moindre des deux derniers est de l'autre, moyennant qu'ils soient pris d'un même ordre, c'est-à-dire que si le moindre nombre des deux premiers est antecédant, le moindre des deux derniers soit aussi antecédant ; & si consequent, consequent. Et c'est à mon avis ainsi qu'il faut entendre cette 20. def. pour la rendre universelle, car autrement on ne pourroit pas

conclurre par icelle la proportion- $N \quad O \quad P \quad Q$
 nalité de plusieurs nombres, com- 15. 12. 25. 20.
 me par exemple de ces quatre

N, O, P, Q , vñ que les prenant selon l'ordre qu'ils sont posez, le premier N n'est pas multiple du second O , ny aussi partie ou parties, puis qu'il est plus grand qu'iceluy ; & neanmoins ils sont proportionnaux, vñ que le moindre des deux premiers, c'est à sçavoir O , contient autant de parties de l'autre N , que le moindre des deux autres, qui est Q , en contient de

l'autre P , c'est à sçavoir qua- $R \quad S \quad T \quad V$
 tre cinquièmes parties. Sembla- 36. 27. 24. 18.

blement ces quatre autres nombres R, S, T, V , sont proportionnaux, puis que V contient autant de parties de T , que S en con-

tient de R ; ou bien à cause que S est mesmes parties de R , que V de T , c'est à sçavoir les trois quarts.

Clavius estimant que cette def. a été corrompue, pour la restituer y a adjointé ces mots : Ou bien quand le premier contient également le second, & le troisième le quatrième, & en outre une même partie, ou mesmes parties d'iceluy. Mais je n'estime pas que cette addition y soit nécessaire, puis que le moindre nombre de chaque raison étant conseré à l'autre ladite def. convient à toutes sortes de proportions : & que ce soit l'intention, d'Euclide, il appert assez par les démonstrations des 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 & 13. prop. de ce 7. livre.

Or Euclide définit seulement icy les nombres proportionaux, qui ont une même raison d'inégalité : Car de la raison d'égalité, il est évident que le premier nombre étant égal au second, aussi le troisième doit être égal au quatrième, afin qu'ils soient dits proportionaux.

De cette 20. def. résulte appertement, que les nombres égaux ont même raison à un même nombre ; & au contraire qu'un même nombre a aussi même raison à des égaux : Ce qui a été démontré en toutes grandeurs à la 7. prop. 5. Il en résulte encore que les nombres qui ont même raison à un même nombre, ou auxquels un même nombre a même raison, sont égaux entr'eux. Ce qui a aussi été démontré en toutes sortes de grandeurs en la 9. prop. 5.

De cette même def. on collige aussi que de deux nombres inégaux, le plus grand a plus grande rai-

fon à un même nombre, que le plus petit ; & au contraire qu'un même nombre a plus grande raison à un petit nombre, qu'à un plus grand. Item que des nombres inégaux, celui qui a plus grande raison à un même, est le plus grand : & celui auquel un même nombre a plus grande raison, est le plus petit : Toutes lesquelles choses sont claires, & évidentes, si cette def. est bien entendue. Cécy a aussi été démontré es grandeurs au 5. livre prop. 8. & 10.

Or cette définition, & tout ce que nous avons dit cy-dessus, convient aussi aux nombres rompus : Car ces quatre nombres $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, sont proportionnaux, attendu que le premier est autant multiple du second, que le troisième du quatrième, sçavoir double ; ainsi qu'il appert en réduisant les deux premiers en même dénomination, sçavoir à $\frac{6}{8}$ & $\frac{3}{8}$, mais les deux autres à $\frac{2}{4}$ & $\frac{1}{4}$. Semblablement ces quatre nombres $2\frac{3}{8}$, $4\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, sont proportionnaux, puis que le premier est telle partie du second, que le troisième du quatrième, sçavoir la moitié, &c.

21. Les nombres semblables plans, ou solides, sont ceux qui ont les côtez proportionnaux.

Comme 24 & 6, sont nombres plans semblables, pource que 6 & 4, côtez de certuy-là sont proportionnaux à 3 & 2, côtez de celui-cy : ainsi aussi 192 & 24, sont nombres solides semblables, pource que 8, 6, 4, côtez de certuy-là sont proportion. à 4, 3, 2, côtez de celui-cy. Et est à

noter que ces nombres plans , & solides semblables peuvent bien être aussi compris sous des côtez non proportionnaux ; mais toutesfois nous ne les considérons icy qu'entant qu'ils sont contenus sous leurs côtez proportionnaux.

22. Nombre parfait , est celuy qui est égal à toutes ses parties aliquotes.

Comme 6 est dit nombre parfait , pource que les parties aliquotes d'iceluy , sçavoir 1, 2, 3, prises ensemble , luy sont égales. Ainsi aussi 28 , duquel les parties aliquotes , sçavoir est 1, 2, 4, 7, 14, étans prises ensemble , luy sont égales ; sera dit nombre parfait ; & tels sont aussi 496, 8128, &c.

Mais quand toutes les parties aliquotes d'un nombre prises ensemble , sont plus grandes qu'iceluy , il est dit abondant ; & quand elles sont moindres , il est appelé diminué.

A ces définitions d'Euclide , Clavius en adjointa quelques autres , touchant les raisons & proportions des nombres , comme de la raison égale , de l'alterne , de l'inverse , & autres dont est traité en general au 5. livre : Mais pource que nous les avons tellement expliquées en ce lieu-là , qu'on les peut entendre & adapter , non seulement aux lignes , superficies & solides , mais aussi aux nombres , & en general à toutes sortes de grandeurs & quantitez soient continuës ou discrettes ; je n'estime pas qu'il soit besoin de les repeter icy , c'est pourquoy nous viendrons aux

PETITIONS OU DEMANDES.

1. Qu'à tout nombre donné on en puisse prendre tant qu'on voudra d'égaux ou multiples.
2. Qu'à tout nombre donné on en puisse prendre un plus grand.

Combien que selon nôtre Auteur le nombre ne puisse être diminué infiniment, ains seulement jusques à l'unité qu'il fait indivisible, si est-ce toutesfois qu'il peut être augmenté infiniment par la continue addition de l'unité : Parquoy étant proposé quelconque nombre, on en peut trouver un plus grand, c'est à sçavoir celui qui est produit de l'addition d'une ou de plusieurs unitéz au nombre donné.

A X I O M E S O U C O M M U N E S
S E N T E N C E S.

1. **L** Es nombres equemultiplices de nombres égaux, ou d'un même nombre, sont égaux entr'eux.
2. Et ceux desquels un même nombre est equemultiple, ou desquels les equemultiplices sont égaux, sont aussi égaux entr'eux.
3. Mais les nombres qui sont une même partie, ou même parties de nombres égaux, ou d'un même, sont égaux entr'eux.
4. Et ceux desquels un même nombre, ou nombres égaux, sont même partie, ou mesmes parties: sont aussi égaux entr'eux.
5. L'unité mesure tout nombre par les unitéz qui sont en iceluy, c'est-à-dire par le même nombre.
6. Tout nombre mesure soy-même par l'unité.
7. Si un nombre multipliant un nombre, en produit quelqu'un, le multipliant mesurera le produit

par le multiplié : mais le multiplié mesurera le même produit par le multipliant.

8. Si un nombre mesure un nombre ; aussi celui par lequel il le mesure , mesurera le même par les unitez qui sont au mesurant , c'est-à-dire par iceluy nombre mesurant.

9. Si un nombre mesurant un nombre , multiplie celui par lequel il le mesure , ou est multiplié par iceluy , sera produit celui lequel est mesuré.

10. Le nombre qui en mesure deux ou davantage , mesure aussi le composé d'eux.

11. Mais celui qui mesure le mesureur , mesure aussi le mesuré.

12. Et celui qui mesure le tout , & le retranché , mesure aussi le reste :

T H E O R . I . P R O P . I .

Si de deux nombres inégaux proposez, on soustrait toujours alternativement le plus petit du plus grand , & que le plus petit reste ne mesure jamais le precedent jusques à ce qu'on ait pris l'unité ; les nombres proposez au commencement , seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres inégaux AB & CD , tels que si on soustrait continuellement le plus petit du plus grand ; le plus petit reste ne mesure jamais le precedent , jusques à ce qu'on parvienne à l'unité : Je dis qu'iceux nombres AB & CD , seront premiers

A	F . . 2	G . 1 B
C	H . . 2	D
E . . 2		

entr'eux , c'est-à-dire , qu'ils ont pour commune mesure la seule unité. Autrement , s'ils ne sont premiers , ils seront composés , & par la 14. def. de ce livre ils seront mesurez par quelque nombre : soit iceluy E commune me-

sure à tous les deux : ainsi CD plus petit nombre étant soustrait de AB, soit le reste FB plus petit que CD : item FB étant soustrait de CD, soit le reste HD plus petit que FB : Pareillement HD étant soustrait de FB, soit le reste GB, unité. Puis donc que E mesure CD, il mesurera aussi son égal AF ; & d'autant qu'il mesure le tout AB, par la 12. com. sent. E mesurera aussi le reste FB, lequel mesure CH ; & partant par la 11. com. sent. E mesurera aussi CH ; & puis qu'il mesure le tout CD, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le reste HD, & par conséquent son égal FG : mais il mesure aussi le tout FB ; E mesurera donc pareillement l'unité restante GB, savoir le tout la partie : ce qui est impossible. Donc AB & CD ne peuvent être mesurez par aucun nombre, ains par l'unité seulement : & partant ils sont nombres premiers entr'eux par la 12. def. de ce livre. Si donc de deux nombres inégaux, &c. Ce qu'il falloit démonstrer.

S C H O L I E.

Commandin demonstre icy la proposition suivante.

Estant proposez deux nombres composez entr'eux, si on soustrait toujours alternativement le moindre du plus grand, la soustraction ne parviendra pas jusques à l'unité.

Ce qui est evident, car si on parvenoit à l'unité, les nombres proposez seroient premiers entr'eux, comme il a été démontré en la prop. cy-dessus : & ils sont posez composez.

Or il est manifeste par ces choses, qu'estans proposez deux nombres, nous connoissons facilement s'ils sont premiers entr'eux ou non. Car étant faite la soustraction, comme dit est, si on parvient jusques à l'unité, lesdits nombres proposez seront premiers entr'eux : mais si on n'y parvient pas, ils seront composez.

P R O B L. I. P R O P. II.

Estans donnez deux nombres non premiers entr'eux ; trouver la plus grande commune mesure d'iceux.

Soient donnez deux nombres non premiers entr'eux. AB & CD, desquels CD soit le moindre : il faut trouver la plus grande commune mesure d'iceux.

Soit soustrait le plus petit nombre CD, tant de fois que faire se pourra du plus grand AB: s'il reste quelque chose, comme EB,

A.....	9	E.....	6	B
C.....	6	F....	3	D
G....	4			

iceluy soit osté de CD, tellement qu'il reste encor FD; & ainsi soit soustrait continuellement le plus petit du plus grand, jusques à ce qu'on parvienne à un nombre qui mesure le precedent: ce qui aviendra necessairement: car si on parvenoit jusques à l'unité, les nombres AB, CD, par la prec. prop. seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Donc que FD mesurant EB, il ne reste rien. Je dis que FD est la plus grande commune mesure de AB & CD.

Car qu'il les mesure tous deux, nous le prouverons ainsi. D'autant que FD mesure EB, & EB mesure CF, par la 11. com. sent. FD mesurera aussi le mesme CF; & mesurant soy-mesme, il mesurera le tout CD, composé des deux CF, FD par la 10. com. sent. Mais iceluy CD mesure AE: donc FD mesurera aussi AE: Et puisqu'il mesure aussi EB; il mesurera le tout AB composé d'iceux AE, EB. Par ainsi FD mesure tous les deux nōbres AB & CD.

Il est aussi leur plus grande commune mesure; autrement en soit (s'il est possible) une autre plus grande, comme G. Veu donc que G mesure CD, il mesurera aussi AE; & mesurant le tout AB, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le reste EB; & par consequent il mesurera CF. Mais il mesure aussi le tout CD; il mesurera donc aussi le reste FD, sçavoir le plus grand nombre le plus petit: ce qui est impossible. Donc un plus grand nombre que FD ne mesure pas les nombres AB, CD: partant iceluy nombre FD est leur plus grande commune mesure.

Que si le moindre nombre CD mesuroit le plus grand AB; il est manifeste qu'il seroit la plus grande commune mesure, attendu qu'il mesure soy-mesme, ainsi qu'il appert icy. Nous avons donc trouvé la plus grande commune mesure de deux nombres, &c. Ce qu'il falloit faire.

A.....	8	B
C....	4	D

De cery est évident que qui mesure deux nombres, il mesure aussi leur plus grande commune mesure, puis qu'il a été démontré que si G mesure AB, & CD, il mesurera aussi ED leur plus grande commune mesure.

S C H O L I E.

Par les choses cy-dessus dites, nous connoissons facilement si trois ou davantage de nombres proposez sont premiers entr'eux, ou non. Car soient donnez les trois nombres A, B, C. Premièrement donc soit ven par ce qui est dit à la 1. prop. si les deux nombres A & B sont premiers entr'eux, ou non; Que s'ils sont premiers, il est évident que les trois nombres A, B, C, ne seront composez entr'eux. Mais si A & B étoient composez entr'eux, soit trouvée par la 2. prop.

A.....	12
B.....	9
C.....	6
D...3	

leur plus grande commune mesure D; que si elle mesure aussi le nombre C, il est manifeste que les trois nombres A, B, C, sont composez entr'eux, puis qu'ils ont le nombre D pour commune mesure.

Que si D plus grande commune mesure de A & B, ne mesure C; C & D seront premiers entr'eux, ou non: s'ils sont premiers, les trois nombres A, B, C, ne seront composez entr'eux, mais premiers: Car s'ils étoient composez, ils auroient une commune mesure, laquelle mesureroit aussi le nombre D plus grande commune mesure de A & B, par le Corol. de cette prop. & partant C & D ne seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Mais si C & D ne sont premiers entr'eux, les trois nombres A, B, C, seront composez entr'eux. Car étant trouvée par la 2. prop. 7. E la plus grande commune mesure de C & D;

A.....	9
B.....	6
C.....	5
D...3	

iceluy nombre E mesurera aussi

A.....	12	
B.....	8	
C.....	6	
D....4		E..2

A & B par la 11. com. sent. puis que D les mesure. Parquoy veu que le mesme E mesure aussi C ; il mesurera les trois A, B, C : & partant iceux seront composez entr'eux. Ce qui étoit proposé.

En la mesme maniere sera examiné & connu si plus de trois nombres sont premiers entr'eux, ou non. Car s'il y a quatre nombres donnez, il en faudra éprouver premierement trois ; si cinq, quatre, &c. & achever comme nous avons dit, de trois nombres proposez.

PROBL. 2. PROP. III.

Estans donnez trois nombres, non premiers entr'eux ; trouver leur plus grande commune mesure.

Soient donnez trois nombres non premiers entr'eux A, B, C ; desquels il faut trouver la plus grande commune mesure.

A 12	D 4
B 8	E . . . 2
C 6	F . . . 3

Soit trouvé par la prec. prop. la plus grande commune mesure des deux nombres A & B, qui soit D. Si donc D mesure aussi C, nous avons ce que nous demandons : car si un plus grand nombre que D mesureroit A, B, C, par le Corol. de la prop. precedente, il mesureroit aussi D, la plus grande commune mesure de A & B, sçavoir est, un grand nombre, un moindre : ce qui est absurde. Que si D ne peut mesurer C, si est-ce que D & C seront composez entr'eux, tant par l'hypothese, que par le susdit Corol. de la 2. prop. donc par icelle même proposition soit trouvée E plus grande commune mesure de C & D. Il est évident par la 11. com. sent. que E mesurera tous les trois nombres A, B, C, d'autant qu'elle mesure C & D ; lequel D mesure B & A. Je dis davantage que E est aussi la plus grande commune mesure. Autrement si elle n'est la plus grande, en soit une autre plus grande, sçavoir F, s'il est possible : Or mesurant A, & B, elle

mesurera aussi D, leur plus grande commune mesure par le même Corol. de la 2. prop. & par la même raison mesurant C & D, elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure E, sçavoir le plus grand, le plus petit : ce qui est impossible. Donc un plus grand nombre que E ne mesure pas les nombres donnez A, B, C ; & partant iceluy nombre E sera leur plus grande commune mesure. Parquoy nous avons trouvé la plus grande commune mesure de trois nombres proposez, non premiers entr'eux. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

Par cecy il est manifeste qu'un nombre qui en mesure trois, mesurera aussi la plus grande commune mesure d'iceux.

S C H O L I E.

En la même maniere, étans donnez plus de trois nombres non premiers entr'eux, sera trouvée leur plus grande commune mesure ; C'est-à-dire, que s'il y a quatre nombres, il faudra premièrement trouver la plus grande commune mesure de trois, si 5, de quatre : si 6, de cinq, &c. puis achever, comme il a été dit de trois nombres donnez. Et aura aussi lieu le Corol. precedent ; tellement que le nombre qui en mesure quatre, mesurera aussi leur plus grande commune mesure, &c.

T H E O R. 2. P R O P. IV.

Tout nombre moindre, est partie ou parties de tout nombre plus grand.

Soient deux nombres A & B inégaux, desquels A soit le plus grand. Je dis que le plus petit B, est ou partie ou parties du plus grand A.

A. 6
B. . . 3

Car ou B mesure A, ou non. S'il le mesure, il est partie par la 3. def. de ce livre : s'il ne le mesure pas, ou bien A & B, seront entr'eux nombre premiers, ou composez.

Premierement qu'ils soient premiers: d'autant que chaque unité de B est partie de A, il est évident que B est parties de A, à sçavoir autant de parties qu'il y a d'unités en B.

A.....6
B.....5

Secondement A & B soient composez entr'eux : & puis que B ne mesure pas A, soit trouvée C leur plus grande commune mesure par la 2. p. 7. & soit divisé B, en parties BD, DE, chacune égale à C. Vû donc que C est partie de A, car il le mesure, BD sera aussi partie de A ; item DE. Partant tout le nombre B est parties de A, à sçavoir autant de parties que C est autant de fois en BE. Parquoy tout nombre moindre est partie, &c. Ce qu'il falloit demonstrier.

A.....6
B. .2 D. .2 E
C. .2

T H E O R. 3. P R O P. V.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second, que le tiers du quart ; le premier & tiers ensemble, seront telle partie du second & du quart ensemble, qu'est le premier du second.

Soient quatre nombres A, BC, D & EF, desquels A 1. est telle partie de BC 2, que D 3, l'est de EF 4. Je dis que A & D ensemble sont telle partie de BC & EF ensemble, comme A l'est de BC.

Car puis que A est telle partie de BC, que D de EF ; BC contiendra A autant de fois, comme EF contiendra D par la 3. def. Ayant donc divisé BC

A...3
B...3 G...3 C
D...4
E...4 H...4 F

en autant de parties qu'il contient de fois A, sçavoir en BG & GC ; EF se divisera aussi en autant de parties égales à D, sçavoir en EH & HF : & d'autant que BG est égal à A, & EH à D, si à choses égales A & BG, on ajoute choses égales, D & EH : A & D ensemble, seront égaux à BG

à BG & EH ensemble : semblablement A & D ensemble, seront égaux à GC & HF ensemble, & ainsi de suite, s'il y avoit davantage de parties en BC & EF : & partant autant de fois que BC contient A, autant de fois BC & EF ensemble, contiendront A & D ensemble : Parquoy si de quatre nombres le premier est telle partie du second, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Le même est aussi veritable en nombres rompus, ainsi qu'il appert en cet exemple, où le nombre A est telle partie du nombre BC, que le nombre D du nombre EF : & partant sera démontré comme dessus A, D, ensemble être la même partie de BC, EF ensemble que A de BC : Sçavoir est, si BC, EF sont divisés es parties BG, GC ; EH, HF, égales à iceux nombres A & D, &c.

$$\left| \begin{array}{cc} A^{\frac{2}{7}} & D^{\frac{3}{8}} \\ B^{\frac{2}{7}} G^{\frac{2}{7}} C & E^{\frac{3}{8}} H^{\frac{3}{8}} F \end{array} \right|$$

Or cette 5. prop. peut être transférée à tant de nombres qu'on voudra ainsi.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra, qui soient même partie d'autant d'autres nombres, chacun d'iceux correspondant ; aussi les tous seront même partie des tous, que l'un sera de l'un son correspondant.

Soient les nombres A, B, C, une même partie des nombres DE, FG, HI, chacun de son correspondant : Je dis que tous les nombres A, B, C, ensemble sont la même partie de tous

$$\left| \begin{array}{ccc} A....4 & B...3 & C..2 \\ D....4 K....4 E & F...3 L...3 G & H..2 M..2 I \end{array} \right|$$

les nombres DE, FG, HI ensemble, que A de DE. Car étans divisés les nombres DE, FG, HI en parties égales à iceux A, B, C ; il y aura en DE autant de parties égales à A qu'en FG d'égales à B, & qu'en HI d'égales à C. Vñ donc que A & DK, sont égaux, si on leur adjoint les égaux

B & FL ; A , B ensemble seront égaux à DK , FL ensemble ; & si à iceux on adjoûte encores les égaux C & HM : aussi A , B , C ensemble , seront égaux à DK , FL , HM , ensemble. Par même raison A , B , C ensemble seront égaux à KE , LG ; MI ensemble : & ainsi de suite , s'il y avoit davantage de parties en DE , FG , HI : donc l'aggrégé des nombres A , B , C sera autant de fois égal à l'aggrégé des parties des nombres DE , FG , HI , que A sera contenu de fois en DE. Parquoy A , B , C ensemble , seront la même partie de DE , FG , HI ensemble , que A de DE.

Or cecy convient aussi aux nombres rompus , soit qu'ils le soient tous , soit qu'avec

$A \frac{2}{5}$	B. 1	C. $1 \frac{1}{2}$						
$D \frac{2}{5}$	$K \frac{2}{5}$	$E \frac{2}{5}$	F. 1	L. 1	G	H. $1 \frac{1}{2}$	M. $1 \frac{1}{2}$	I

iceux il y ait aussi quelque nombre entier , voire même l'unité , ainsi qu'en cette autre figure. Car il est évident que cette diversité de nombres ne peut apporter aucun changement en la démonstration cy dessus.

Commandin a démontré en ce lieu le theoreme suivant.

Si un nombre est autant multiple d'un nombre qu'un autre l'est d'un autre ; l'un & l'autre ensemble sera autant multiple de l'un & l'autre ensemble , qu'un seul l'est d'un seul.

Soit le nombre A autant multiple du nombre B , que le nombre C , l'est du nombre D : je dis que A & C ensemble sera autant multiple de B & D ensemble , que A de B. Car puis que A est multiple de B , & C autant multiple de D ; B sera telle partie de A , que D de C : & par la 5. prop. 7. B & D ensemble sera telle partie de A & C ensemble , que A de B : partant A & C ensemble sera autant multiple de B & D ensemble , que A de B. Ce qu'il falloit démontrer.

A.	8
B. . . .	4
C.	6
D. . .	3

Ce qui est icy démontré de deux nombres , se doit aussi entendre de davantage , tellement que la prop. se peut rendre universelle disant ainsi :

S'il y a tant de nombres qu'on voudra equemultiples d'autant d'autres nombres , chacun du sien correspondant ; les tous seront autant multiple des tous, que l'un sera multiple de l'un , son correspondant.

Ce qui correspond à ce qui a été démontré en toutes sortes de grandeurs à la 1. prop. 5. Et néanmoins nous le démontrerons encor ainsi. Soient trois nombres A, B, C, equemultiples de trois

autres D, E, F, chacun de son correspondant: Je dis que les tous A, B, C,

A.....8	B.....6	C....4
D....4	E...3	F..2

ensemble, sont autant multiples des tous, D, E, F ensemble, que A est multiple de D. Car puis que A est autant multiple de D, que B de E, & C de F : au contraire D sera telle partie de A, que E de B, & F de C. Donc par les choses cy-dessus démontrées, D, E, F ensemble, seront telle partie de A, B, C ensemble, que D de A : & par le contraire les toutes A, B, C ensemble, seront autant multiples des toutes D, E, F ensemble, que A de D. Et n'importe que les nombres proposez soient nombres entiers, ou nombres rompus, car il est évident que la demonstration des uns est la même que des autres.

THEOR. 4. PROP. VI.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second, que le tiers du quart : le premier & tiers ensemble, seront telles parties du second & quart ensemble, que le premier du second.

Soient quatre nombres AB, C, DE & F, desquels le premier AB contient autant de parties du second C, que le troisième DE en contient du quatrième F. Je dis que AB & DE ensemble, contiennent autant de parties de C & F ensemble, que AB de C.

A ...3	G ...3	B
C	9	
D 4	H 4	E
F	12	

Car d'autant que AB contient telles parties de C, que DE de F; étans AB & DE divisez en AG, GB; & DH, HE, selon qu'ils sont parties de C & F, il y aura autant de parties de C en AB, comme de F en DE, & par la pr. preced. AG & DH ensemble sera telle partie de C & F ensemble, que AG de C. Item GB & HE ensemble, sera telle partie de C & F ensemble, que GB de C; & ainsi de suite, s'il y avoit davantage de parties en AB & DE. Parquoy iceux AB & DE ensemble, seront telles parties de C & F ensemble, que AB de C. Donc si de quatre nombres le premier contient telles parties, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Cette même prop. avec sa démonstration a aussi lieu en

$A \frac{1}{9}$	$G \frac{1}{9}$	B	$D \frac{2}{7}$	$H \frac{2}{7}$	E
	$C \frac{3}{9}$			$F \frac{6}{7}$	

nombres rompus, comme il appert en cet exemple.

Mais cette 6. prop. peut aussi être estendue à tant de nombres qu'on voudra, soient entiers, ou rompus, ainsi qu'il ensuit.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra, qui soient mesmes parties, d'autant d'autres nombres, chacun d'un chacun; aussi les tous seront mesmes parties des tous, que l'un de l'un son correspondant.

Car c'est la même démonstration que dessus; observant seulement qu'au lieu de la 5. prop. il se faut servir icy de l'universelle démontrée au Scholie d'icelle 5. prop.

T H E O R. 5. P R O P. VII.

Si un nombre est telle partie d'un autre nombre, que le retranché du retranché; le reste sera aussi telle partie du reste, comme le tout est du tout.

Soit le nombre AB telle partie du nombre CD que le retranché AE est du retranché CF. Je dis que le reste EB, sera telle partie du reste FD, que le tout AB est du tout CD.

A 4	E . . . 2	B	
G 4	C 8	F 4	D

Car étant pris le nombre GC, en sorte que telle partie qu'est le retranché AE du retranché CF, telle partie le reste EB soit d'iceluy GC; par la 5. prop. les deux nombres AE & EB ensemble seront telle partie des nombres GC & CF ensemble, qu'est AE de CF, c'est-à-dire qu'est le tout AB du tout CD : & partant puis que le nombre AB est telle partie du nombre CF que de CD : iceux nombres GF, CD seront égaux entr'eux par la 4. com. sent. en étant donc le nombre commun CF, les demeurans GC & FD seront égaux : & partant le reste EB sera telle partie du reste FD, que de GC : c'est-à-dire que le tout AB du tout CD, puis que EB a été posé telle partie de GC, que AE de CF; qui par l'hypothese est la même que AB de CD. Si donc un nombre est telle partie d'un autre nombre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Cette prop. avec sa démonstration convient aussi aux nombres rompus : Et encore le theoreme suivant, lequel Commandin démontre en cét endroit.

Si un nombre est autant multiple d'un autre nombre que le retranché du retranché ; aussi le reste sera autant multiple du reste, que le tout du tout.

Soit le nombre AB autant multiple du nombre CD, que le retranché AE du retranché CF : Je dis aussi que le reste EB est autant multiple du reste FD, que le tout AB l'est du tout CD. Car puis que AB, AE sont equemultiples de CD, CF, par le contraire

A 6	E 4	B
C . . . 3	F . . 2	D

le tout CD sera telle partie du tout AB, que le retranché CF du retranché AE : & partant par la susdite prop. 7. aussi le reste FD, sera telle partie du reste EB, que le tout CD du tout AB : donc au contraire EB sera autant multiple de FD, que le tout AB est multiple du tout CD. Ce qui étoit proposé à démontrer.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si un nombre contient telles parties d'un autre nombre, que le retranché du retranché : aussi le reste contiendra telles parties du reste, que le tout du tout.

Si le nombre total AB contient telles parties du total CD, que le retranché AE du retranché CF : Je dis que le reste EB contiendra telles parties du reste FD, que le total AB, du total CD.

	G. . 2	A.	6	E. . 2	B	
	C.	9	F. . . 3	D		

Car si on pose GA contenir telles parties de FD, que AE de CF, ou AB de CD, par la 6. prop. les deux nombres GA, AE ensemble, seront telles parties des deux CF, FD ensemble, (c'est-à-dire le tout GE du tout CD) que GA de FD, ou AB de CD : & partât puis que GE & AB contiennent telles parties de CD, l'un que l'autre, ils seront égaux : parquoy en ostant le nombre commun AE, resteront GA & EB égaux. Mais GA contient telles parties de FD, que AB de CD : Donc aussi EB contiendra telles parties d'iceluy FD, que AB de CD. Parquoy si un nombre contient telles parties d'un autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Que si aux nombres entiers cy-dessus apposez l'on substitué des nombres rompus, tu démontreras en la même manière cette 8. prop. être aussi véritable en fractions ; & semblablement les 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, &c.

THEOR. 7. PROP. IX.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second, que le tiers du quart; aussi en permutant le premier sera telle, ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soient quatre nombres A, BC, D & EF, desquels A soit telle partie de BC, que D est de EF. Je dis qu'en permutant, A sera telle partie, ou contiendra telles parties de D, que BC de EF, pourvû que A & BC soient plus petits que D & EF, chacun au sien; car ainsi se doit entendre cette proposition.

Qu'ainsi ne soit: d'autant que par l'hypothèse, A est telle partie de BC comme D

A. . . 3	
B. . . 3	G. . . 3 C
D. . . 4	
E. . . 4	H. . . 4 F

de EF: BC contiendra autant de parties égales à A que EF en contient d'égales à D: soit donc divisé le nombre BC és parties BG, GC, chacune égale à A; & le nombre EF és parties EH, HF chacune égale à D. Et puis que A est posé moindre que D, par la 4. prop. de ce livre, A est partie ou parties de D, & ainsi conséquemment des autres, sçavoir BG de EH, & GC de HF: mais parce que BG est égale à GC, & EH à HF; BG sera telle ou telles parties de EH, que GC de HF: & partant par la 5. ou 6. prop. BG, GC ensemble, c'est-à-dire BC, sera telle ou telles parties de EH, HF ensemble, sçavoir EF, que BG de EH, c'est-à-dire que A de D. Parquoy si de quatre nombres le premier est telle partie, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 8. PROP. X.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second, que le tiers du quart; aussi en permutant le premier contiendra telle ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soient quatre nombres AB , C , DE & F , desquels AB contienne telle parties de C , que DE de F . Je dis que en permutant, AB sera telle ou telles parties de DE , que C est de F , moyennant que AB & C soient plus petits que DE & F , chacun au sien, car cette prop. aussi bien que la précédente se doit ainsi entendre.

$A \dots 2$	$G \dots 2$	B
$C \dots \dots 6$		
$D \dots \dots 5$	$H \dots \dots 5$	E
$F \dots \dots \dots 15$		

Car AB étant divisé en AG , GB parties de C ; & DE en DH , HE parties de F ; AB sera divisé en autant de parties que DE , & tant AG que GB sera telle partie de C , que DH & HE de F : donc en permutant par la 9. prop. de ce livre, AG sera telle partie ou parties de DH , & GB de HE , que C de F : & partant AG sera telle partie, ou parties de DH , que GB de HE . Donc par la 5. ou 6. prop. AG , GB ensemble, sçavoir est le premier nombre AB , sera aussi telle partie, ou parties de DH , HE ensemble, c'est-à-dire du troisième nombre DE , que AG de DH , c'est-à-dire que le second nombre C du quart F : Parquoy si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 9. PROP. XI.

Si le tout est au tout, comme le retranché au retranché; aussi le reste sera au reste, comme le tout au tout.

Soit le tout AB au tout CD , comme le retranché AE au retranché CF : Je dis que le reste EB est au reste FD , comme le tout AB au tout CD .

Car puis que AB est à CD , comme AE à CF , AB étant plus petit nombre que CD , il sera telle ou telles parties d'iceluy CD , que AE de CF ,

$A \dots \dots 4$	$E \dots 2$	B
$C \dots \dots 6$	$F \dots 3$	D

& par la 7. ou 8. prop. le reste EB fera telle ou telles parties du reste FD, que le tout du tout : & partant par la 20. def. le reste EB sera au reste FD, comme le tout AB au tout CD. Ce qu'il falloit demontrer.

S C H O L I E,

Or combien qu'en cette démonstration Euclide pose le nombre AB plus petit que le nombre CD, si est-ce toutesfois qu'elle auroit aussi lieu, si AB étoit plus grand que CD. Car on iceluy nombre CD mesurerait AB, ou il ne le mesurerait pas. Que

CD mesure donc premierement AB; & d'autant que comme

A 8 E 6 B
C 4 F . . . 3 D

AB est à CD, ainsi AE est à CF, par la 20. def. AB, AE, seront equemultiples de CD; CF, c'est-à-dire que CD sera telle partie de AB, que CF de AE; & par la 7. prop. le reste FD sera aussi même partie du reste EB, que le tout CD du tout AB: donc par le contraire AB, EB, seront equemultiples d'icelles CD, FD: & par la 20. def. convertie, comme le tout AB sera au tout CD, ainsi le reste EB sera au reste FD.

Maintenant que CD ne mesure pas AB: derechef puis que comme AB est à CD, ainsi

A 6 E . . . 3 B
C 4 F . . 2 D

AE est à CF, telles parties que CD est de AB, telles parties CF est aussi de AE par la susdite 20. def. & par la 8. prop. le reste FD sera même parties du reste EB, que le tout CD du tout AB: donc par la même def. convertie, le reste EB sera au reste FD, comme le tout AB sera au tout CD. Ce qu'il falloit démontrer.

T H E O R. 10. P R O P. XII.

S'il y a tant de nombres qu'on vaudra proportionaux; commé l'un des antecédans sera à son conséquent, ainsi tous les antecédans seront à tous les conséquens.

Soient tant de nombres qu'on voudra proportionnaux
A, B; C, D; E, F; c'est à sçavoir qu'il y ait telle raison
de A à B, que
de C à D, &
que de E à F.

Je dis que tous
les antecédans

A 6	C 4	E 2
B 9	D 6	F 3

A, C, E ensemble,

seront à tous les conséquens B, D, F ensemble, comme A, l'un des antecédans, est à B son conséquent.

Car puis que les susdits nombres sont proportionnaux, & A, C, E, sont moindres que B, D, F; par la 20. def. A sera telle ou telles parties de B, que C de D, & E de F; & par la 5. ou 6. prop. de ce mesme livre A & C ensemble seront telle, ou telles parties de B & D ensemble, que A de B, ou E de F. Derechef, puis que A, C ensemble comme un seul, est telle partie, ou parties de B, D ensemble, comme un seul, que E de F, aussi par les mesmes prop. A, C ensemble avec E, seront telle ou telles parties de B, D ensemble avec F, que A de B; parquoy par la susdite 20. def. convertie tous les antecédans A, C, E ensemble, auront même raison à tous les conséquens B, D, F ensemble, que A à B; Si donc il y a tant de nombres qu'on voudra proportionnaux, comme l'un des antecédans, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Euclide n'ayant démontré cette prop. qu'en quatre nombres, nous avons delaisié sa demonstration pour prendre celle cy, qu'on peut estendre à tant de nombres qu'on voudra: & combien qu'en cette démonstration nous ayons posé, comme il a fait, les nombres antecédans moindres que les conséquens, si est-ce toutesfois qu'étans plus grands la démonstration n'en sera différente, sinon en ce qu'il faudra, comme au Scholie precedent, prendre iceux antecédans equemultiples des conséquens; & puis après iceux conséquens mesmes parties desdits antecédans, &c.

T H E O R. II. P R O P. XIII.

Si quatre nombres sont proportionnaux: aussi en permutant ils seront proportionnaux.

Soient quatre nombres proportionnaux A, B, C, D , sçavoir qu'il y ait telle raison de A à B , que de C à D : Je dis qu'en permutant, il y aura telle raison de A à C , que de B à D .

Car puis que comme A est à B , ainsi C à D , par la 20. def. A étant plus petit que B , & C que D ; A sera telle ou telles parties de B , que C est de D ; & partant en permutant par la 9. ou 10. prop.

de ce livre A sera telle ou telles parties de C , que B est de D , & par la susdite 20. def. convertie, il y aura même raison de A à C que de B à D . Parquoy si quatre nombres sont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A	6	.
B	9	
C	8	
D	12	

S C H O L I E.

Cette demonstration d'Euclide a seulement lieu, quand les nombres antecédans sont moindres que les conséquens, & que A est moindre que C : mais s'ils sont plus grands, & que A soit plus grand que B , & moindre que C , la demonstration s'en fera ainsi. D'autant que comme A est à B ainsi C est à D , par la 20. def. B sera même partie, ou mesmes parties de A , que D de C : donc en permutant par la 9. ou 10. prop. 7. B sera même partie ou parties de D , que A de C : & par la susdite 20. def. A sera à C , comme B à D .

A	4
B	...3
C	8
D	6

Que si A est plus grand que B , & que C , on argumentera ainsi. D'autant que comme A est à B ainsi C est à D , par la 20. def. D sera même partie ou parties de C que B de A : donc en permutant par la 9. ou 10. prop. 7.

A	9
B	6
C	...3
D	..2

C sera telle partie, ou telles parties de A , que D de B ; & partant par la même def. A sera à C , comme B à D .

Finalemēt si *A* est moindre que *B*, & plus grand que *C*, on dira ainsi: d'autant que comme *A* est à *B*, ainsi *C* est à *D*, par la 20. def. 7. *C* est même partie ou parties de *D*, que *A* de *B*: donc en changeant par la 9. ou 10. prop. 7. *C* sera même partie, ou parties de *A*, que *D* de *B*; & par la susdite 20. def. convertie, *A* sera à *C*, comme *B* à *D*,

<i>A</i>	4
<i>B</i>	8
<i>C</i>	2
<i>D</i>	4

THEOR. 12. PROP. XIV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra d'un côté, & autant d'un autre, qui soient prins de deux en deux, & en même raison; iceux en raison égale, seront aussi en même raison.

Soient tant de nombres qu'on voudra *A*, *B*, *C*, & autant d'autres *D*, *E*, *F*; & qu'il y ait telle raison de *A* à *B*, que de *D* à *E*, & de *B* à *C*, que de *E* à *F*. Je dis qu'en raison égale, il y aura telle raison de *A* à *C*, que de *D* à *F*.

Car puis que comme *A* est à *B*, ainsi *D* à *E*, en permutant par la

<i>A</i>	9	<i>D</i>	6
<i>B</i>	6	<i>E</i>	4
<i>C</i>	3	<i>F</i>	2

preced. prop. comme *A* sera à *D*, ainsi *B* à *E*: semblablement aussi puis que comme *B* est à *C*, ainsi *E* à *F*, en permutant comme *B* sera à *E*, ainsi *C* à *F*. Donc comme *A* sera à *D*, ainsi *C* sera à *F* (car puis que *A* est à *D*, & *C* à *F*, en même raison que *B* à *E*, aussi *A* sera à *D* en la même raison que *C* à *F*, comme sera incontinent démontré) & partant en permutant, comme *A* sera à *C*, ainsi *D* sera à *F*: Ce qu'il falloit prouver.

L E M M E.

Or que *A* estant à *D*, & *C* à *F*, en même raison que *B* à *E*, ils soient de même raison entr'eux, nous le demon-

brevoins ainsi. D'autant que comme A est à D , ainsi B à E ; E plus petit sera telle ou telles parties de B , que D de A : Derechef puis que comme B à E , ainsi C à F ; F moindre sera telle, ou telles parties de C , que E de B : Parquoy F sera telle ou telles parties de C , que D de A : & partant par la 20. def. convertie, comme A sera à D , ainsi C sera à F . Donc les raisons des nombres qui sont de même à une, sont aussi de même entr'elles. Ce qui a esté démontré en toutes grandeurs au 5. livre prop. 11.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si l'unité mesure quelque nombre autant de fois qu'un tiers mesure un quart ; aussi en permutant le second mesurera le quart autant de fois que l'unité mesure le tiers.

Soit l'unité A, qui mesure BC autant de fois que D mesure EF : Je dis qu'en permutant BC mesurera EF autant de fois que A mesure D.

Car ayant divisé BC selon les unitéz BG, GH, HC; il y aura en EF autánt de parties égales à D, lesquelles soient EI, IK, & F; & partant BG sera mesme partie de EI, que GH de IK, & HC de KF:

A.1
B.1 G.1 H.1 C
D..2
E..2 I..2 K..2 F

donc par la 20. def. BG est à EI, comme GH à IK, & HC à KF : & partant par la 12. prop. tous les antecédans BC seront à tous les conséquents EF, comme BG à EI, ou leurs égaux A à D : & par la susdite 20. def. convertie BC sera mesme partie de EF que A de D ; & par conséquent HC mesure EF autant de fois que A mesure D. Parquoy si l'unité mesure quelque nombre, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre, leurs produits seront égaux entr'eux.

Car d'autant que AB contient telles parties de C, que DE de F; étans AB & DE divisez en AG, GB; & DH, HE, selon qu'ils sont parties de C & F, il y aura autant de parties de C en AB, comme de F en DE, & par la pr. preced. AG & DH ensemble sera telle partie de C & F ensemble, que AG de C. Item GB & HE ensemble, sera telle partie de C & F ensemble, que GB de C; & ainsi de suite, s'il y avoit davantage de parties en AB & DE. Parquoy iceux AB & DE ensemble, seront telles parties de C & F ensemble, que AB de C. Donc si de quatre nombres le premier contient telles parties, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Cette même prop. avec sa démonstration a aussi lieu en

$A \frac{1}{9}$	$G \frac{1}{9}$	B	$D \frac{2}{7}$	$H \frac{2}{7}$	E
	$C \frac{3}{9}$			$F \frac{6}{7}$	

nombres rompus, comme il appert en cet exemple.

Mais cette 6. prop. peut aussi être estendue à tant de nombres qu'on voudra, soient entiers, ou rompus, ainsi qu'il ensuit.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra, qui soient mêmes parties, d'autant d'autres nombres, chacun d'un chacun; aussi les tous seront mêmes parties des tous, que l'un de l'un son correspondant.

Car c'est la même démonstration que dessus; observant seulement qu'au lieu de la 5. prop. il se faut servir icy de l'universelle démontrée au Scholie d'icelle 5. prop.

T H E O R. 5. P R O P. VII.

Si un nombre est telle partie d'un autre nombre, que le retranché du retranché; le reste sera aussi telle partie du reste, comme le tout est du tout.

Soit le nombre AB telle partie du nombre CD que le retranché AE est du retranché CF. Je dis que le reste EB, sera telle partie du reste FD, que le tout AB est du tout CD.

A	4	E	..2	B
G	4	C	8	F....4D

Car étant pris le nombre GC, en sorte que telle partie qu'est le retranché AE du retranché CF, telle partie le reste EB soit d'iceluy GC; par la 5. prop. les deux nombres AE & EB ensemble seront telle partie des nombres GC & CF ensemble, qu'est AE de CF, c'est-à-dire qu'est le tout AB du tout CD: & partant puis que le nombre AB est telle partie du nombre CF que de CD: iceux nombres GF, CD seront égaux entr'eux par la 4. com. sent. en ôtant donc le nombre commun CF, les demeurans GC & FD seront égaux: & partant le reste EB sera telle partie du reste FD, que de GC: c'est-à-dire que le tout AB du tout CD, puis que EB a été posé telle partie de GC, que AE de CF; qui par l'hypothese est la même que AB de CD. Si donc un nombre est telle partie d'un autre nombre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Cette prop. avec sa démonstration convient aussi aux nombres rompus: Et encore le theoreme suivant, lequel Commandin démontre en cet endroit.

Si un nombre est autant multiple d'un autre nombre que le retranché du retranché; aussi le reste sera autant multiple du reste, que le tout du tout.

Soit le nombre AB autant multiple du nombre CD, que le retranché AE du retranché CF: Je dis aussi que le reste EB est autant multiple du reste FD, que le tout AB l'est du tout CD. Car puis que AB, AE sont equemultiples de CD, CF, par la contraire

A	6	E	4	B
C	...3	F	..2	D

le tout CD sera telle partie du tout AB, que le retranché CF du retranché AE : & partant par la susdite prop. 7. aussi le reste FD, sera telle partie du reste EB, que le tout CD du tout AB : donc au contraire EB sera autant multiple de FD, que le tout AB est multiple du tout CD. Ce qui étoit proposé à démontrer.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si un nombre contient telles parties d'un autre nombre, que le retranché du retranché : aussi le reste contiendra telles parties du reste, que le tout du tout.

Si le nombre total AB contient telles parties du total CD, que le retranché AE du retranché CF : Je dis que le reste EB contiendra telles parties du reste FD, que le total AB, du total CD.

G. .2	A.	6	E. .2	B
C.	9	F. . .	3	D

Car si on pose GA contenir telles parties de FD, que AE de CF, ou AB de CD, par la 6. prop. les deux nombres GA, AE ensemble, seront telles parties des deux CF, FD ensemble, (c'est-à-dire le tout GE du tout CD) que GA de FD, ou AB de CD : & partât puis que GE & AB contiennent telles parties de CD, l'un que l'autre, ils seront égaux : parquoy en ostant le nombre commun AE, resteront GA & EB égaux. Mais GA contient telles parties de FD, que AB de CD : Donc aussi EB contiendra telles parties d'iceluy FD, que AB de CD. Parquoy si un nombre contient telles parties d'un autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Que si aux nombres entiers cy-dessus apposez l'an substitué des nombres rompus, tu démontreras en la même manière cette 8. prop. être aussi veritable en fractions ; & semblablement les 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, &c.

THEOR. 7. PROP. IX.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second, que le tiers du quart; aussi en permutant le premier sera telle, ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soient quatre nombres A, BC, D & EF, desquels A soit telle partie de BC, que D est de EF. Je dis qu'en permutant, A sera telle partie, ou contiendra telles parties de D, que BC de EF, pourvu que A & BC soient plus petits que D & EF, chacun au sien; car ainsi se doit entendre cette proposition.

Qu'ainsi ne soit : d'autant que par l'hypothese, A est telle partie de BC comme D de EF : BC contiendra autant de parties égales à A que EF en contient d'égales à D : soit donc divisé le nombre BC és parties BG, GC, chacune égale à A ; & le nombre EF és parties EH, HF chacune égale à D. Et puis que A est posé moindre que D, par la 4. prop. de ce livre, A est partie ou parties de D, & ainsi conséquemment des autres, sçavoir BG de EH, & GC de HF : mais parce que BG est égale à GC, & EH à HF ; BG sera telle ou telles parties de EH, que GC de HF : & passant par la 5. ou 6. prop. BG, GC ensemble, c'est-à-dire BC, sera telle ou telles parties de EH, HF ensemble, sçavoir EF, que BG de EH, c'est-à-dire que A de D. Parquoy si de quatre nombres le premier est telle partie, &c. Ce qu'il falloit prouver.

A . . . 3	
B . . . 3	G . . . 3 C
D . . . 4	
E . . . 4	H . . . 4 F

THEOR. 8. PROP. X.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second, que le tiers du quart; aussi en permutant le premier contiendra telle ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soient quatre nombres AB , C , DE & F , desquels AB contienne telle parties de C , que DE de F . Je dis qu'en permutant, AB sera telle ou telles parties de DE , que C est de F , moyennant que AB & C soient plus petits que DE & F , chacun au sien, car cette prop. aussi bien que la précédente se doit ainsi entendre.

$A \dots 2$	$G \dots 2$	B
$C \dots \dots 6$		
$D \dots \dots 5$	$H \dots \dots 5$	E
$F \dots \dots \dots 15$		

Car AB étant divisé en AG , GB parties de C ; & DE en DH , HE parties de F ; AB sera divisé en autant de parties que DE , & tant AG que GB sera telle partie de C , que DH & HE de F : donc en permutant par la 9. prop. de ce livre, AG sera telle partie ou parties de DH , & GB de HE , que C de F : & tant AG sera telle partie, ou parties de DH , que GB de HE . Donc par la 5. ou 6. prop. AG , GB ensemble, sçavoir est le premier nombre AB , sera aussi telle partie, ou parties de DH , HE ensemble, c'est-à-dire du troisième nombre DE , que AG de DH , c'est-à-dire que le second nombre C du quart F : Parquoy si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 9. PROP. XI.

Si le tout est au tout, comme le retranché au retranché; aussi le reste sera au reste, comme le tout au tout.

Soit le tout AB au tout CD , comme le retranché AE au retranché CF : Je dis que le reste EB est au reste FD , comme le tout AB au tout CD .

Car puis que AB est à CD , comme AE à CF ; AB étant plus petit nombre que CD , il sera telle ou telles parties d'iceluy CD , que AE de CF ,

$A \dots \dots 4$	$E \dots 2$	B
$C \dots \dots 6$	$F \dots 3$	D

& par la 7. ou 8. prop. le reste EB sera telle ou telles parties du reste FD, que le tout du tout : & partant par la 20. def. le reste EB sera au reste FD, comme le tout AB au tout CD. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E,

Or combien qu'en cette démonstration Euclide pose le nombre AB plus petit que le nombre CD, si est-ce toutesfois qu'elle auroit aussi lieu, si AB étoit plus grand que CD. Car on iceluy nombre CD mesurerait AB, ou il ne le mesurerait pas. Que CD mesure donc premierement AB; &

A 8	E 6	B
C 4	F 3	D

d'autant que comme AB est à CD, ainsi AE est à CF, par la 20. def. AB, AE, seront equemultiples de CD; CF, c'est-à-dire que CD sera telle partie de AB, que CF de AE; & par la 7. prop. le reste FD sera aussi même partie du reste EB, que le tout CD du tout AB: donc par le contraire AB, EB, seront equemultiples d'icelles CD, FD: & par la 20. def. convertie, comme le tout AB sera au tout CD, ainsi le reste EB sera au reste FD.

Maintenant que CD ne mesure pas AB: derechef puis que comme AB est à CD, ainsi AE est à CF, telles parties que CD est de AB, telles parties

A 6	E 3	B
C 4	F 2	D

CF est aussi de AE par la susdite 20. def. & par la 8. prop. le reste FD sera même parties du reste EB, que le tout CD du tout AB: donc par la même def. convertie, le reste EB sera au reste FD, comme le tout AB sera au tout CD. Ce qu'il falloit démontrer.

T H E O R. 10. P R O P. XII.

S'il y a tant de nombres qu'on vandra proportionaux; comme l'un des antecedans sera à son consequent, ainsi tous les antecedans seront à tous les consequens.

Soient tant de nombres qu'on voudra proportionnaux
A, B; C, D; E, F; c'est à sçavoir qu'il y ait telle raison
de A à B, que

de C à D, &

que de E à F.

Je dis que tous

les antecédans

A, C, E ensemble

, seront à tous les conséquens B, D, F ensemble, comme A, l'un des antecédans, est à B son conséquent.

Car puis que les susdits nombres sont proportionnaux, & A, C, E, sont moindres que B, D, F; par la 20. def. A sera telle ou telles parties de B, que C de D, & E de F; & par la 5. ou 6. prop. de ce même livre A & C ensemble seront telle, ou telles parties de B & D ensemble, que A de B, ou E de F. Derechef, puis que A, C ensemble comme un seul, est telle partie, ou parties de B, D ensemble, comme un seul, que E de F, aussi par les mêmes prop. A, C ensemble avec E, seront telle ou telles parties de B, D ensemble avec F, que A de B; parquoy par la susdite 20. def. convertie tous les antecédans A, C, E ensemble, auront même raison à tous les conséquens B, D, F ensemble, que A à B; Si donc il y a tant de nombres qu'on voudra proportionnaux, comme l'un des antecédans, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

Euclide n'ayant démontré cette prop. qu'en quatre nombres, nous avons delaisié sa démonstration pour prendre celle cy, qu'on peut estendre à tant de nombres qu'on voudra: & combien qu'en cette démonstration nous ayons posé, comme il a fait, les nombres antecédans moindres que les conséquens, si est-ce toutesfois qu'étans plus grands la démonstration n'en sera différente, sinon en ce qu'il faudra, comme au Scholie précédent, prendre iceux antecédans equemultiples des conséquens; & puis après iceux conséquens mêmes parties desdits antecédans, &c.

T H E O R. II. P R O P. XIII.

Si quatre nombres sont proportionnaux: aussi en permutant ils seront proportionnaux.

Soient quatre nombres proportionnaux A, B, C, D , sçavoir qu'il y ait telle raison de A à B , que de C à D : Je dis qu'en permutant, il y aura telle raison de A à C , que de B à D .

Car puis que comme A est à B , ainsi C à D , par la 20. def. A étant plus petit que B , & C que D ; A sera telle ou telles parties de B , que C est de D ; & partant en permutant par la 9. ou 10. prop.

A	6	.
B	9	
C	8	
D	12	

de ce livre A sera telle ou telles parties de C , que B est de D , & par la susdite 20. def. convertie, il y aura même raison de A à C que de B à D . Parquoy si quatre nombres sont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Cette demonstration d'Euclide a seulement lieu, quand les nombres antecédans sont moindres que les conséquens, & que A est moindre que C : mais s'ils sont plus grands, & que A soit plus grand que B , & moindre que C , la demonstration s'en fera ainsi. D'autant que comme A est à B ainsi C est à D , par la 20. def. B sera même partie, ou mesmes parties de A , que D de C : donc en permutant par la 9. ou 10. prop. 7. B sera même partie ou parties de D , que A de C : & par la susdite 20. def. A sera à C , comme B à D .

A	4
B . . .	3
C	8
D	6

Que si A est plus grand que B , & que C , on argumentera ainsi. D'autant que comme A est à B ainsi C est à D , par la 20. def. D sera même partie ou parties de C que B de A : donc en permutant par la 9. ou 10. prop. 7.

A	9
B	6
C . . .	3
D . . .	2

C sera telle partie, ou telles parties de A , que D de B ; & partant par la même def. A sera à C , comme B à D .

Finalemēt si *A* est moindre que *B*, & plus grand que *C*, on dira ainsi: d'autant que comme *A* est à *B*, ainsi *C* est à *D*, par la 20. def. 7. *C* est même partie ou parties de *D*, que *A* de *B*: donc en changeant par la 9. ou 10. prop. 7. *C* sera même partie, ou parties de *A*, que *D* de *B*; & par la susdite 20. def. convertie, *A* sera à *C*, comme *B* à *D*,

<i>A</i>	4
<i>B</i>	8
<i>C</i>	2
<i>D</i>	4

THEOR. 12. PROP. XIV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra d'un côté, & autant d'un autre, qui soient prins de deux en deux, & en même raison; iceux en raison égale, seront aussi en même raison.

Soient tant de nombres qu'on voudra *A*, *B*, *C*, & autant d'autres *D*, *E*, *F*; & qu'il y ait telle raison de *A* à *B*, que de *D* à *E*, & de *B* à *C*, que de *E* à *F*. Je dis qu'en raison égale, il y aura telle raison de *A* à

C, que de *D* à *F*.

Car puis que comme *A* est à *B*, ainsi *D* à *E*, en permutant par la

<i>A</i>	9	<i>D</i>	6
<i>B</i>	6	<i>E</i>	4
<i>C</i>	3	<i>F</i>	2

preced. prop. comme *A* sera à *D*, ainsi *B* à *E*: semblablement aussi puis que comme *B* est à *C*, ainsi *E* à *F*, en permutant comme *B* sera à *E*, ainsi *C* à *F*. Donc comme *A* sera à *D*, ainsi *C* sera à *F* (car puis que *A* est à *D*, & *C* à *F*, en même raison que *B* à *E*, aussi *A* sera à *D* en la même raison que *C* à *F*, comme sera incontinent démontré) & partant en permutant, comme *A* sera à *C*, ainsi *D* sera à *F*: Ce qu'il falloit prouver.

L E M M E.

Or que *A* estant à *D*, & *C* à *F*, en même raison que *B* à *E*, ils soient de même raison entr'eux, nous le demon-

THEOR. 13. PROP. XV.

A . 1
B . 1 G . 1 H . 1 C
D . . 2
E . . 2 I . . 2 K . . 2 F

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre, leurs produits seront égaux entr'eux.

Soient deux nombres A & B; & que A multipliant B produise C ; & B multipliant A produise D : Je dis qu'iceux deux produits C & D sont égaux entr'eux.

Car puis que A multipliant B produit C ; B sera autant de fois en C , que l'unité en A par la 15. def. & partant mesurera C autant de fois que l'unité mesure A , & par la 15. prop. en permutant A mesurera C autant de fois que

Unité.	
A . . . 3	B . . . 4
C 12	
D 12	

l'unité mesurera B. Item B multipliant A & produisant D ; A sera autant de fois en D , qu'il y a d'unités en B par la même 15. def. & par conséquent mesurera D autant de fois que l'unité mesure B : mais nous avons prouvé que A mesurerait aussi C autant de fois que l'unité mesure B : donc A mesure C & D également , & partant par la 1. com. sent. C & D seront égaux entr'eux : Parquoy si deux nombres se multiplient l'un l'autre , &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

On démontrera cette prop. en nombres rompus ainsi. D'autant que A multipliant B produit C ; par la def. de la multiplication C sera à B comme A à l'unité : & en permutant C sera à A comme B à l'unité. Mais par la même def. comme B est à l'unité , ainsi aussi D est à A , pource que B multipliant A a produit D. Donc comme C sera à A ainsi D sera au même A , par le Lemme de la 14. prop. &c. partant C & D sont égaux entr'eux.

Unité.	
A $\frac{2}{3}$	B $4\frac{5}{7}$
D $3\frac{1}{7}$	C $3\frac{1}{7}$

THEOR. 15. PROP. XVII.

Si un nombre en multiplie deux autres , les produits seront entr'eux en même raison que les multipliez.

Soit le nombre A, lequel multipliant les nombres B & C fasse D & E : Je dis que les deux produits D & E sont entr'eux, comme B à C.

Car par la 15. def. B multiplié par A est autant de fois contenu en son produit D, que l'unité en A ; & C dans son produit E, comme la même unité en A : & partant B mesurera autant de fois D, que C mesure E. Donc B sera telle partie de D, que C

de E : & par la 20. def. B sera à D, comme C à E ; & en permutant par la 13. prop. 7. comme B sera à C, ainsi D sera à E : Si donc un nombre en multiplie deux autres, &c. Ce qu'il falloit prouver.

Unité.	
A . . . 2	
B . . . 3	C . . . 4
D 6	
E 8	

S C H O L I E.

Cette prop. a aussi lieu en nombres rompus, & se demontre ainsi.

D'autant que A multipliant B & C, produit D & E ; par la def. de la multiplication il y aura telle raison tant de D à B, que de E à C, comme de A à l'unité, &

partant par le Lemme de la 14. prop. 7. comme D sera à B, ainsi E à C : donc en permutant comme D sera à E, ainsi B à C.

$A \frac{1}{2}$	
$B \frac{1}{4}$	$C 7 \frac{1}{2}$
$D \frac{3}{8}$	$E 3 \frac{3}{4}$

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si deux nombres en multiplient un autre, les produits seront entr'eux, en même raison que les multipliers.

Soient deux nombres A & B, qui multiplians C produisent D & E. Je dis que comme A est à B, ainsi D est à E.

Car puis que A multipliant C produit D, aussi C multipliant A produit le mesme D par la 16. prop. Semblablement, puis que

A . . . 3	B . . . 4
C . . 2	
D . . . 6	E 8

B multipliant C produit E, aussi C multipliant B produira le mesme E: vû donc qu'un mesme nombre C multipliant A & B, produit D & E, comme A est à B, ainsi D est à E par la prop. prec. Parquoy si deux nombres en multiplient un autre, &c. Ce qui estoit à prouver.

S C H O L I U M

Vû que la demonstration tant de cette prop. que des deux suivantes, est la même en nombres rompus, qu'en nombres entiers, nous ne nous y arrêterons davantage; mais dirons icy que Clavius a accommodé (après Campanus) tant cette prop. que la precedente à tant de nombres qu'on voudra; en cette sorte.

Si un nombre multiplie tant de nombres qu'on voudra, ou quelconques nombres en multiplient quelque autre; les produits seront entr'eux en mesmes raisons que les multipliez, ou multipliers.

Car le nombre A multipliant les nombres B, C, D, ou étant multiplié par iceux, soient produits les nombres E, F, G. Je dis que E, F, G, sont entr'eux comme les nombres multipliez ou multipliers B, C, D; c'est-à-dire que comme B

A . . . 3		
B . . 2	C . . . 3	D . . . 4
E 6	F 9	G 12

est à C, ainsi E à F; & comme C à D, ainsi F à G. Car puis que E, F sont produits de A multipliant B, C; ou de B, C, multipliez par A, comme B sera à C, ainsi E sera à F par la 17. ou 18. prop. Semblablement pource que F, G, sont produits de A en C, D, ou de C, D par A, aussi comme C sera à D, ainsi F sera à G, & ainsi des autres. Appert donc ce qui étoit proposé.

THEOR.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si quatre nombres sont proportionnaux, le produit du premier multiplié par le quart, sera égal au produit du second par le tiers: Et si le produit du premier multiplié par le quart, est égal au produit du second par le tiers, iceux quatre nombres sont proportionnaux.

Soient quatre nombres proportionnaux A, B, C, D, sçavoir que comme A est à B, ainsi C est à D; & que le premier A multiplié par le dernier D produise E, & le second B par le tiers C produise F. Je dis que E & F sont égaux.

A.....	6	B....	4
C....	3	D...2	
E.....	12		
F.....	12		
G.....	18		

Qu'ainsi ne soit :
Soit multiplié A par C, & le produit soit

G : d'autant que A multiplié par C & D, produit G & E, il y aura telle raison de G à E, que de C à D, par la prop. prec. Pareillement d'autant que C multipliant A & B, produit G & F, il y aura telle raison de G à F, que de A à B, par la 17. prop. ou de C à D, qui sont en même raison que A & B. Parquoy G estant à E, & G à F en même raison que C à D, par le Lemme de la 14. prop. comme G sera à E, ainsi G sera à F; parquoy G aura même raison à E qu'à F; & partant E & F seront nombres égaux, ainsi que nous avons dit sur la 20. def.

xi. Pour la seconde partie, soit E produit de A multiplié par D, égal à F, produit de B multiplié par C : Je dis que A est à B comme C est à D.

Car si G est produit de A multiplié par C, E & F nombres égaux auront même raison à G, comme nous avons dit en la suite de la 20. def. Mais il y a telle raison de G à E, comme de C à D, par la preced. prop. & telle raison de G à F, comme de A à B par la 17. prop. & partant par le Lemme de la 14. prop. A sera à B, comme

D d

C à D : si donc quatre nombres sont proportionnaux , le produit du premier & quart, &c. Ce qu'il falloit prouver.

C H O L I E.

Clavius adjoute icy cet autre Theoreme , la demonstration duquel a lieu tant en nombres entiers qu'en fractions.

Si de quatre nombres , le premier a plus grande raison au second , que le troisieme au quatrieme ; le produit du premier multiplié par le quatrieme sera plus grand que le produit du second multiplié par le troisieme ; & si le nombre produit du premier & quatrieme est plus grand , que celui du second & troisieme , il y aura plus grande raison du premier au second que du troisieme au quatrieme.

Soient quatre nombres *A* , *B* , *C* , *D* , & qu'il y ait premierement plus grande raison du premier *A* au second *B* , que du troisieme *C* au quatrieme *D* : Je dis que le nombre procréé de *A* en *D* est plus grand que celui fait de *B* en *C*. Car si on pose que *E* soit à *B*, comme *C* à *D*, il y aura aussi plus grande raison

<i>A</i>	7	<i>E</i>	6
<i>B</i>	4		
<i>C</i>	9		
<i>D</i>	6		

de *A* à *B* , que de *E* à *B* ; & partant *A* sera plus grand que *E*, comme nous avons annoté sur la 20. def. 7. Parquoy il se fera un plus grand nombre de *A* en *D*, que de *B* par le même *D*. Mais par la 19. prop. 7. le produit de *E* en *D* est esgal à celui de *B* en *C* : donc aussi le nombre procréé de *A* en *D* sera plus grand que celui fait de *B* en *C*. Ce qu'il falloit prouver.

Maintenant que le nombre procréé de *A* en *D*, soit plus grand , que celui fait de *B* en *C* : Je dis qu'il y a plus grande raison de *A* à *B* , que de *C* à *D*. Car si on entend que le nombre *E* en *D* fasse le même nombre , que de *B* en *C* :

<i>A</i>	5	<i>E</i>	6
<i>B</i>	4		
<i>C</i> ..	3		
<i>D</i> ..	2		

le produit de A en D sera aussi plus grand que celui de E par le même D : & partant A sera plus grand que E . Parquoy il y aura plus grande raison de A à B , que de E au même B . Mais par la 19. prop. 7. comme E est à B , ainsi C est à D : donc aussi la raison de A à B sera plus grande que de C à D . Ce qu'il falloit prouver.

Que s'il y avoit moindre raison du premier nombre au second, que du troisieme au quatrieme, le nombre fait du premier multiplié par le quatrieme seroit moindre, que celui fait du second par le troisieme : Et si le nombre procréé du premier multiplié par le quatrieme estoit moindre, que celui fait du second par le troisieme, il y auroit moindre raison du premier nombre au second, que du troisieme au quatrieme. La demonstration n'est differente à la precedente, sinon en ce qu'il faut changer plus grand en moindre.

A ce Theoreme nous en ajouterons un autre fort utile, qui est tel.

Si trois ou davantage de nombres se multiplient entr'eux, le produit sera toujours le même, en quelque façon & ordre qu'on les multiplie.

Soient trois nombres A , B , C , & le produit de A multiplié par B soit D , lequel multiplié par C produise E : Mais changeant d'ordre le produit de B par C soit F , & iceluy multiplié par A produise G : changeant derechef d'ordre, le produit de A en C soit H , qui multiplié par B fasse I . Je

dis que les trois produits E , G , I , sont un même nombre. Car puis que B multipliant A & C produit D , F , par la 17. prop. 7. comme A est à C , ainsi D à

A 3.	B 4.	C 5.
D 12.	F 20.	H 15.
E 60.	G 60.	I 60.

F , & par la 19. prop. 7. le produit de A en F , qui est G , sera esgal au produit de C en D , qui est E . Item puisque C multipliant A & B , produit H & F , comme A est à B , ainsi H à F : & partant le produit de A en F , qui est G , sera esgal au produit de B en H , qui est I . Par ainsi les deux nombres E & I estans esgaux au nombre G , tous les trois E , G , I , sont esgaux entr'eux, c'est-à-dire un même nombre : Ce qu'il falloit prouver.

Maintenant soient quatre nombres A, B, C, D , & multipliant A par B , & le produit par C , soit fait E , qui multiplié par D produise F : Mais changeant d'ordre, & multipliant D par C , & le produit par B , soit fait G , qui multiplié par A , fasse H : Je dis que F & H sont un même nombre, & qu'en quelque autre façon qu'on multiplie entr'eux les quatre nombres proposez A, B, C, D , sera toujours produit le même

nombre. Car puis que multipliant d'un côté les trois nombres A, B, C entr'eux, & d'un autre côté les trois D, C, B ,

A 2.	B 3.	C 4.	D 5.
E 24.	I 12.	G 60.	
F 120.		H 120.	

aussi entr'eux sont produits les deux E & G , soient multipliez B & C entr'eux, & le produit soit I . Or par ce qui a esté démontré cy-dessus de trois nombres, le nombre E qui se fait multipliant A par B , & le produit par C , se fera aussi multipliant B par C , & le produit (sçavoir I) par A . Par même discours, on prouvera que G seroit produit multipliant D par I . Vû donc que I multipliant A & D , produit E & G , comme A est à D , ainsi E est à G , par la 17. prop. 7. & partant le produit des extrêmes A & G sera le même que des moyens D & E par la 19. prop. 7. donc F & H sont un même nombre. Et par semblable discours on prouvera toujours le même : Car de quatre nombres en multipliant trois entr'eux d'un côté, & trois d'un autre, il se rencontrera que de trois pris d'un côté, & d'autre, il y en aura toujours deux qui seront communs de part & d'autre, & par ainsi la mesme demonstration aura toujours lieu.

Que si l'on propose cinq nombres, on en prendra quatre d'un côté, & quatre d'un autre, & s'en trouvera toujours trois qui seront communs d'un côté & d'autre : tellement que s'aydant de ce qui a esté démontré en trois, & en quatre nombres, on accomplira la demonstration en la mesme sorte. Et si on propose six nombres, l'on se servira de ce qui aura esté démontré en cinq, & ainsi toujours en augmentant de nombre en nombre, si on en propose davantage. Ce que le docte Bachet a aussi démontré en ses Problemes plaisans ; & est véritable en toutes sortes de nombres, soient entiers ou fractions.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si trois nombres sont proportionnaux, le produit des extrêmes est égal au produit du milieu : & si le produit des extrêmes est égal à celui du milieu, iceux trois nombres seront proportionnaux.

Soient trois nombres proportionnaux A, B, C, sçavoir que comme A est à B, ainsi B à C : Je dis que le produit de A, 1. multiplié par C ; 3^e, est égal au produit du moyen B multiplié par soy-même.

Car étant pris D égal à B, comme A sera à B, ainsi D sera à C ; & par la préc. prop. le produit de A par c, sera égal au produit de B par D, c'est-à-dire de B par soy-même.

A	9
B	6
D	6
C	4

Pour la seconde partie ; soit le produit de A, 1. multiplié par C, 3^e, égal au produit de B moyen multiplié par soy-même : Je dis que les nombres A, B, C, sont proportionnaux.

Car derechef étant pris D égal à B, comme A sera à B, ainsi D sera à C ; & par la prop. préc. le produit de A par C sera égal au produit de B par D, c'est à dire de B par soy-même, puis que D luy est égal : partant les trois nombres A, B, C, sont proportionnaux. Si donc trois nombres sont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Que s'il y a plus grande raison du premier nombre au second, que du second au troisième ; le nombre procréé du premier multiplié par le troisième sera plus grand, que celui fait du second multiplié par soy-même : & si le nombre fait du premier multiplié par le troisième est plus grand que du second en soy-même, il y aura plus grande raison du premier au second, que du second au troisième. Item s'il y a moindre raison du premier au second, que du second au troisième, le produit du premier

par le troisieme sera moindre que le produit du second par soy-même : & si un moindre nombre est fait du premier multiplié

A 8	A 4
B 6	B 6
D 6	D 6
C 5	C 7

par le troisieme , que du second en soy ; il y aura moindre raison du premier nombre au deuxieme , que du deuxieme au troisieme : Ce qui sera evident par ce qui est démontré au Scholie precedens , ayant posé le nombre D égal au second nombre B, afin qu'il y ait quatre nombres : Car alors il y aura plus grande raison du premier au deuxieme , que du troisieme au quatrieme , ou moindre , &c. Comme il appert aux exemples cy apposés , soit que les nombres soient entiers ou rampus.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont la même raison avec iceux , mesurent également les nombres qui ont la même raison , içavoir le plus grand , le plus grand ; & le plus petit.

Soient deux nombres A & B , les plus petits en leur raison , & deux autres nombres plus grands C & D en même raison qu'iceux A & B, c'est à dire que comme A est à B , ainsi C à D : Je dis que A & B mesureront également C & D, c'est à dire que A mesure C autant de fois que B mesure D.

A . . . 3	B 4
C 6	D 8

Car puis que iceux A , B , C , D, sont proportionnaux , en permutant par la 13. prop. A sera à C comme B à D : & puis que A & B sont plus petits que C & D, par la 20. def. ils seront même partie ou parties d'iceux C & D. Or ils ne peuvent être parties : car il est évident qu'ils ne se

soient les plus petits nombres de leur raison, contre l'hypothese. Donc A est même partie de C, que B de D : & partant A mesure C, autant de fois que B mesure D : Parquoy les plus petits nombres de tous ceux qui ont une même raison, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois nombres d'un côté, & autant d'un autre, lesquels pris de deux en deux soient en même raison, la proportion étant troublée, en raison égale, ils seront proportionnaux.

Soient trois nombres d'un côté A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, lesquels pris de deux en deux soient en même raison, & leur proportion troublée, sçavoir que A soit à B, comme E

à F, & B à C, comme D à E : Je dis qu'en raison égale A sera à C, comme D à F.

A 4	D 12
B 3	E 8
C 2	F 6

Car puis que A

est à B, comme E à F, le produit de A multiplié par F, sera égal au produit de B multiplié par E, par la 19. prop. Item, puis que B est à C, comme D à E, le même produit de B multiplié par E, sera égal au produit de C multiplié par D, par la même prop. & partant le produit de A par F, sera égal au produit de C par D, & par la susdite 19. prop. il y aura même raison de A à C que de D à F : Parquoy, s'il y a trois nombres d'un côté, & autant d'un autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

Il est evident que cette démonstration convient aussi aux nombres rompus. Et d'autant que de six moyens d'argumenter és proportions, lesquels Euclide a expliqué en grandeur, & démontré au 5. livre, il en démontre en celui-cy seulement deux en nombres ; il ne sera hors de propos de démontrer aussi en

nombres les quatre autres moyens, comme ont fait plusieurs Interprètes.

1. Si quatre nombres sont proportionnaux ; par raison inverse, ou en changeant, ils seront aussi proportionnaux.

Soit A à B comme C à D . Je dis qu'en changeant comme B à A , ainsi D à C . Car puis que comme A à B , ainsi C à D , en permutant par la 13. prop. comme A sera à C , ainsi B à D . Derechef, puis que B est à D comme A à C , par la même prop. B sera à A comme D à C . Ce qui étoit proposé.

A 6	C . . . 3
B 4	D . . 2

2. Si les nombres composez sont proportionnaux, iceux divisez seront aussi proportionnaux.

Soit AB à CB comme DE à EF . Je dis qu'aussi en divisant, comme AC à CB , ainsi DF à FE . Car puis que comme AB à CB , ainsi DE à FE : en permutant par la 13. prop. comme le tout AB au tout DE , ainsi le retranché CB au retranché FE : & partant par la 11. pr. comme le tout AB est au tout DE , ainsi le reste AC sera au reste DF : c'est à dire AC à DF comme CB à FE : donc en permutant comme AC sera à CB , ainsi DF sera à FE . Ce qui étoit proposé.

A 6	C . . . 3	B
D 4	F . . 2	E

Par la même manière nous démontrerons comme au livre 5, la division converse, & contraire de raison. Car soit premièrement comme AB à CB , ainsi DE à FE ; Je dis que, par division converse de raison, comme CB à AC , ainsi FE à DF . Car puis que comme AB à CB , ainsi DE à FE ; en divisant, comme AC sera à CB , ainsi DF à FE : & en changeant, comme CB sera à AC , ainsi FE sera à DF .

Soit maintenant comme AC à AB , ainsi DF à DE . Je dis par division contraire de raison, que comme AC est à CB , ainsi DF à FE . Car puis que comme AC à AB , ainsi DF à DE : en changeant comme AB sera à AC , ainsi DE à DF . Donc en divisant comme CB à AC , ainsi FE à DF : & en changeant, comme AC sera à CB , ainsi DF à FE . Ce qui étoit proposé.

3. Si les nombres divifez font proportionnaux , iceux compofez feront auffi proportionnaux.

Soit AB à BC , comme DE à EF . Je dis qu'en compofant comme AC eft à BC , ainfi DF , à EF . Car puis que comme AB à BC , ainfi DE à EF , en permutant par la 13.

$A \dots\dots 6B \dots 3C$
$D \dots\dots 4E \dots 2F$

prop. comme AB à DE , ainfi BC à EF , & partant par la 12. prop. comme AB , BC enfemble, à DE , EF enfemble, c'eft-à-dire le tout AC au tout DF , comme BC à EF : & en permutant par la 13. prop. comme AC à EC , ainfi DF à EF . Ce qui eftoit propofé.

Semblablement nous demontrerons icy comme au 5. livre la compofition converfe & contraire de raifon. Car foyt premierement comme AB à BC , ainfi DE à EF . Je dis par compofition converfe de raifon, que comme AC eft à AB , ainfi DF à DE . Car vû que AB eft à BC , comme DE à EF : en changeant comme BC fera à AB , ainfi EF à DE : & en compofant comme AC fera à AB , ainfi DF fera à DE .

Maintenant foyt derechef AB à BC , comme DE à EF . Je dis que par compofition contraire de raifon, comme AB eft à AC , ainfi DE à DF : car puis que comme AB à BC , ainfi DE à EF : en changeant comme BC fera à AB , ainfi EF à DE . Donc en compofant, comme AC à AB , ainfi DF à DE : & en changeant comme AB fera à AC , ainfi DE à DF .

4. Si les nombres compofez font proportionnaux, ils le feront auffi par conversion de raifon.

Soit comme AB à CB , ainfi DE à FE . Je dis que par conversion de raifon, comme AB eft à AC , ainfi DE à DF .

Car puis que comme AB à CB , ainfi DE à FE : en permutant par la 13. prop. comme le tout AB fera au tout DE , ainfi le

$A \dots\dots 6C \dots 3B$
$D \dots\dots 4F \dots 2E$

retranché CB fera au retranché FE : & partant par la 11. prop. comme le tout AB au tout DE , ainfi le refte AC au refte DF . Donc en permutant comme AB fera à AC , ainfi DE à DF . Ce qui eftoit propofé.

nombre les quatre autres moyens, comme ont fait plusieurs Interprètes.

1. Si quatre nombres sont proportionnaux ; par raison inverse, ou en changeant, ils seront aussi proportionnaux.

Soit A à B comme C à D . Je dis qu'en changeant comme B à A , ainsi D à C . Car puis que comme A à B , ainsi C à D , en permutant par la 13. prop. comme A sera à C , ainsi B à D . Derechef, puis que B est à D comme A à C , par la même prop. B sera à A comme D à C . Ce qui étoit proposé.

A 6	C . . . 3
B 4	D . . 2

2. Si les nombres composez sont proportionnaux, iceux divisez seront aussi proportionnaux.

Soit AB à CB comme DE à FE . Je dis qu'aussi en divisant, comme AC à CB , ainsi DF à FE . Car puis que comme AB à CB , ainsi DE à FE : en permutant par la 13. prop. comme le tout AB au tout DE , ainsi le retranché CB au retranché FE : & partant par la 11. pr. comme le tout AB est au tout DE , ainsi le reste AC sera au reste DF : c'est à dire AC à DF comme CB à FE : donc en permutant comme AC sera à CB , ainsi DF sera à FE . Ce qui étoit proposé.

A 6	C . . . 3	B
D 4	F . . 2	E

Par la même manière nous démontrerons comme au livre 5, la division converse, & contraire de raison. Car soit premièrement comme AB à CB , ainsi DE à FE ; Je dis que, par division converse de raison, comme CB à AC , ainsi FE à DF . Car puis que comme AB à CB , ainsi DE à FE ; en divisant, comme AC sera à CB , ainsi DF à FE : & en changeant, comme CB sera à AC , ainsi FE sera à DF .

Soit maintenant comme AC à AB , ainsi DF à DE . Je dis par division contraire de raison, que comme AC est à CB , ainsi DF à FE . Car puis que comme AC à AB , ainsi DF à DE : en changeant comme AB sera à AC , ainsi DE à DF . Donc en divisant comme CB à AC , ainsi FE à DF : & en changeant, comme AC sera à CB , ainsi DF à FE . Ce qui étoit proposé.

3. Si les nombres divisez sont proportionnaux, iceux composez seront aussi proportionnaux.

Soit AB à BC , comme DE à EF . Je dis qu'en composant comme AC est à BC , ainsi DF , à EF . Car puis que comme AB à BC , ainsi DE à EF , en permutant par la 12.

prop. comme AB à DE , ainsi BC à EF , & partant par la 11. prop. comme AB , BC ensemble, à DE , EF ensemble, c'est-à-dire le tout AC au tout DF , comme BC à EF : & en permutant par la 13. prop. comme AC à EC , ainsi DF à EF . Ce qui estoit proposé.

Semblablement nous démontrerons icy comme au 5. livre la composition converse & contraire de raison. Car soit premierement comme AB à BC , ainsi DE à EF . Je dis par composition converse de raison, que comme AC est à AB , ainsi DF à DE . Car vu que AB est à BC , comme DE à EF : en changeant comme BC sera à AB , ainsi EF à DE : & en composant comme AC sera à AB , ainsi DF sera à DE .

Maintenant soit derechef AB à BC , comme DE à EF . Je dis que par composition contraire de raison, comme AB est à AC , ainsi DE à DF : car puis que comme AB à BC , ainsi DE à EF : en changeant comme BC sera à AB , ainsi EF à DE . Donc en composant, comme AC à AB , ainsi DF à DE : & en changeant comme AB sera à AC , ainsi DE à DF .

4. Si les nombres composez sont proportionnaux, ils le seront aussi par conversion de raison.

Soit comme AB à CB , ainsi DE à FE . Je dis que par conversion de raison, comme AB est à AC , ainsi DE à DF .

Car puis que comme AB à CB , ainsi DE à FE : en permutant par la 13. prop. comme le tout AB sera au tout DE , ainsi le

retranché CB sera au retranché FE : & partant par la 11. prop. comme le tout AB au tout DE , ainsi le reste AC au reste DF . Donc en permutant comme AB sera à AC , ainsi DE à DF . Ce qui estoit proposé.

$$\begin{array}{r} \hline A \dots\dots 6B \dots 3C \\ D \dots 4E \dots 2F \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline A \dots\dots 6C \dots 3B \\ D \dots 4F \dots 2E \\ \hline \end{array}$$

A ces quatre theoremes nous adjoûterons les quatre suivans :

5. S'il y a tant de nombres qu'on voudra d'un côté, & autant d'un autre, lesquels pris de deux en deux soient en même raison ; comme tous les nombres du premier ordre ensemble seront à l'un d'iceux, ainsi tous les nombres de l'autre ordre ensemble seront au correspondant à iceluy pris du premier ordre.

Soient quatre nombres A, B, C, D d'un côté, & quatre d'un autre E, F, G, H, & que A soit à B, comme E à F ; & B à C comme F à G ; & C à D comme G à H : je dis que comme tous les nombres A, B, C, D, ensemble, seront au dernier D, ainsi tous les nombres E, F, G, H, ensemble seront au dernier H. Car d'autant que comme A est à B, ainsi E est à F ; en composant comme A, B, ensemble seront

A...	B....	C..	D.....
E.....	6F....	8G....	4H.....10

à B, ainsi E, F ensemble seront à F. Mais comme B est à C, ainsi F à G : donc en raison esgale, comme AB, ensemble sont à C. Ainsi E, F ensemble sont à G ; parquoy, en composant comme A, B, C ensemble seront à C, ainsi E, F, G, ensemble seront à G. Mais comme C à D, ainsi G à H : donc en raison esgale comme A, B, C ensemble seront à D, ainsi E, F, G ensemble seront à H : Et en composant comme A, B, C, D ensemble sont à D, ainsi E, F, G, H ensemble seront à H. Ce qu'il falloit prouver.

D'où est manifeste que commel'un des nombres du premier ordre est à son correspondant de l'autre ordre, ainsi tous les nombres du premier ordre ensemble seront à tous ceux du second ordre ensemble. Car puisque comme A, B, C, D ensemble sont à D, ainsi E, F, G, H ensemble sont à H ; en permutant A, B, C, D ensemble sont à E, F, G, H ensemble, comme D à H.

6. Si le premier a même raison au second, que le troisième au quatrième, & que le cinquième ait aussi même

me raison au second, que le sixième au quatrième : le composé du premier & cinquième aura même raison au second, que le composé du troisième & sixième au quatrième,

Soit AB premier à C deuxième, comme DE troisième à F quatrième. Item soit BG cinquième à C deuxième, comme EH sixième à F quatrième. Je dis que AG , composé du premier & du cinquième est à C deuxième, comme DE composé du troisième & sixième est à F quatrième. Car

A 6B .. 26	D 9E ... 3H
C 4	F 6

puis que comme BG est à C , ainsi EH à F , en changeant comme C sera à BG , ainsi F à EH . Vu donc que comme AB à C , ainsi DE à F , & comme C à BG , ainsi F à EH ; en raison esgale, comme AB est à BG , ainsi DE est à EH ; & en composant, comme AG à BG , ainsi DH à EH ; partant puis que derechef comme AG à BG , ainsi DH à EH , & comme BG à C , ainsi EH à F ; en raison esgale, comme AG sera à C , ainsi DH à F . Ce qui est proposé.

7. Si le premier a même raison au second, que le troisième au quatrième; & que le premier ait aussi la même au cinquième, que le troisième au sixième; aussi le premier aura même raison au composé du second & cinquième, que le troisième au composé du quatrième & sixième.

Soit le tout AB à C , comme le tout DE à F : Item le retranché AG soit à C , comme le retranché DH à F : Je dis que le reste GB est à C , comme le reste HE à F . Car puis

A 6G .. 2B	D 9H ... E
C 4	F 6

que comme AG à C ainsi DH à F , en changeant comme C sera à AG ainsi F à DH . Vu donc que comme AB à C , ainsi

DE à F, & comme C à AG, ainsi F à DH; en raison esgale, comme AB à AG, ainsi DE à DH. Parquoy en divisant comme GB à AG, ainsi HE à DH. Mais puis que derechef, comme GB à AG, ainsi HE à DH, & comme AG à C, ainsi DH à F; en raison esgale, comme GB sera à C, ainsi HE sera à F. Ce qui est proposé.

8. Si deux nombres, & des retranchés d'iceux, ont une même raison à deux nombres: aussi les restes auront même raison aux mesmes nombres.

Soit A premier à BC deuxiesme, comme D troisieme à EF quatriesme: & comme A premier CG cinqiesme, ainsi D troisieme à FH sixiesme. Je dis que comme A premier est à BG, composé du deuxiesme & cinqiesme, ainsi D, troisieme à EH composé du quatriesme & sixiesme. Car puis que comme A est à BC, ainsi D à EF, en changeant comme BC sera à A, ainsi EF à D. D'autant donc que comme

A.....6				D.....9			
B....4		C...2		G E.....6		F....4H	

BC à A, ainsi EF à D, & comme A à CG, ainsi D à FH; en raison esgale, comme BC à CG, ainsi EF à FH: & en composant comme BG à CG, ainsi EH à FH, & en changeant comme CG à BG, ainsi FH à EH. Vu donc que comme A à CG, ainsi D à FH, & comme CG à BG, ainsi FH à EH; en raison esgale, comme A sera à BG, ainsi D à EH. Ce qui est proposé.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Les nombres premiers entr'eux, sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison avec iceux.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B. Je dis qu'ils sont les plus petits de tous ceux qui ont la même raison qu'eux.

Car s'il n'est ainsi, soient, s'il est possible, C & D plus petits en la même raison ; & par la 21. prop. ils mesureront A &

$$\begin{array}{|l|l|l|l|} \hline A & \dots\dots 6 & B & \dots\dots 5 \\ \hline C & \text{---} & D & \text{---} \\ \hline \end{array} \quad E \text{---}$$

B, l'un comme l'autre : qu'ils les mesurent donc par le nombre E. Donc E sera commune mesure des nombres A & B, ainsi ils ne seroient pas premiers entr'eux, mais composez, contre l'hypothese. A & B sont donc les plus petits de tous ceux qui sont en même raison qu'eux. Parquoy les nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont une même raison, sont premiers entr'eux.

Soient les nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la même raison : Je dis qu'ils sont premiers entr'eux.

Autrement, s'ils ne sont premiers, que C les mesure tous deux, s'il est possible, sçavoir A autant de fois qu'il y a d'unitéz en D, & B autant de fois qu'il y a d'unitéz en

$$\begin{array}{|l|l|l|l|} \hline A & \dots\dots 6 & D & \text{---} \\ \hline & C & & \\ \hline B & \dots\dots 5 & E & \text{---} \\ \hline \end{array}$$

E. Vû donc que C mesure A par les unitéz qui sont en D, & B par les unitéz qui sont en E ; C multipliant D & E, produira A & B par la 9. com. sent. Parquoy par la 17. prop. il y aura même raison de A à B que de D à E : & partant puis que D & E sont parties d'iceux A & B, ils sont moindres : ainsi A & B ne seront pas les plus petits nombres de tous ceux qui ont la même raison, ce qui est contre nostre hypothese : A & B sont donc nombres premiers entr'eux. Parquoy les plus petits nombres de tous ceux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, celui qui en mesurera l'un sera premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, l'un ou l'autre desquels sçavoir A, soit mesuré par le nombre C. Je dis que C est premier à l'autre B.

Autrement, si B & C ne sont premiers entr'eux, que D les mesure tous deux, s'il est possible. Vû donc que D

A 6	B 5
C 3	D - - - - -

mesure C, & C mesure A; par la 11. com. sent. D mesurera aussi A: mais il mesure pareillement B. Donc A & B ne sont premiers entr'eux, contre l'hypothese. C est donc premier à B. Si quelque nombre mesure B, on prouvera en la mesme maniere qu'il sera premier à l'autre A. Parquoy si deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si deux nombres sont premiers à quelque autre; le produit des deux sera aussi premier à cet autre.

Soient deux nombres A & B, tous deux premiers à C; & que A multiplié par B produise D. Je dis que D est aussi premier à C.

Autrement, si D & C ne sont premiers entr'eux qu'ils soient composez, & que E les mesure tous deux,

A 2	B 3	C 5
D 6	E 2	F 3

sçavoir D par le nombre F. Donc E multipliant F, produit D par la 9. com. sent. comme fait aussi A par B: Parquoy A, E, F, B, seront proportionnaux par la 19. prop. Et d'autant que A & C sont premiers entr'eux, E mesurant C sera premier à A par la prop. precedente; & par la 23. prop. A & E estans premiers, ils seront les plus petits de leur raison; & partant ils mesureront également F & B, qui sont en la mesme raison, sçavoir A mesurera F, & E mesurera B par la 21. pr. Mais il mesure aussi C: donc B & C ne seroient pas premiers, contre l'hypothese. Parquoy D sera premier à C. Si donc deux nombres sont premiers à quelque autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le produit de l'un d'iceux multiplié par soy, est premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers A & B, & que l'un ou l'autre d'iceux, sçavoir A, multiplié par soy produise C. Je dis que B & C sont premiers entr'eux.

Car si on prend D, égal à A, B sera aussi premier à D. Ainſi A & D estans premiers à B par la 26. p.7.

A multiplié par D, c'est à dire par soy-même, produira C premier au meſme B. Si donc deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

A . . . 3	B . . . 4
C 9	D . . . 3

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si deux nombres sont premiers à deux autres; (l'un & l'autre à l'un & à l'autre) leurs produits seront aussi premiers entr'eux.

Soient deux nombres A & B premiers à deux autres C & D, & que E soit le produit de A multiplié par B, & F produit de C multiplié par D : Je dis que E, & F sont premiers entr'eux.

A . . 2	B . . . 4
C . . 3	D . . . 5
E 8	F 15

Car A & B estans premiers à C, leur produit E sera aussi premier au meſme C par la 26. pr. Par le meſme discours E sera aussi premier à D; ainſi C & D estans premiers à E, leur produit F sera aussi premier à E par la meſme 26. prop. Si donc deux nombres sont premiers à deux autres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 27. PROP. XXIX.

Si deux nombres premiers entr'eux sont multipliez chacun par soy, leurs produits seront premiers entr'eux : Et si iceux produits sont encore multipliez par les nombres proposez au commencement, leurs produits seront encores premiers entr'eux : & cecy aviendra toujours environ les extrêmes.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, & que A multiplié par soy-mesme produise C, mais B multiplié aussi par soy produise D. Je dis que C & D, seront premiers entr'eux. Item si A multipliant C produit E, & B multipliant D produit F. Je dis que E & F seront aussi premiers entr'eux.

A .. 2	B ... 3
C 4	D 9
E 8	F 27
G 16	H 81.

Car par la 27. pr. A & B estans premiers, C produit de A multiplié par soy, sera premier au restant B : par mesme raison B & C estans premiers entr'eux, D sera aussi premier à C. Derechef, puis que A & B sont premiers, par la mesme 27. prop. C sera aussi premier à B, & D à A : Mais il a été démontré que C est aussi premier à D : parquoy l'un & l'autre nombre A, C, sera premier à l'un & à l'autre nombre B, D; & partant par la 28. prop. E produit de A en C, sera premier à F, produit de B par D.

Que si encore A multipliant E produit G; & B multipliant F produit H: G & H seront aussi premiers entr'eux. Car puis que A & C sont premiers à B, leur produit E sera aussi premier à B par la 26. prop. Par mesme raison F sera aussi premier à A : Ainsi les deux nombres A, E, seront premiers

premiers aux deux B, F, ſçavoir l'un & l'autre, à l'un & à l'autre ; & partant par la 28. prop. G produit de A en E, ſera auſſi premier à H produit de B en F, & ainſi à l'infiny. Parquoy ſi deux nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

T H E O R. 28. P R O P. XXX.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, le compoſé d'iceux ſera premier à chacun d'eux : & ſi le compoſé de deux nombres eſt premier à quelqu'un d'iceux, ils ſeront premiers entr'eux.

Soient deux nombres premiers entr'eux A B & B C : Je diſ que le compoſé des deux A C, ſera premier à chacun d'iceux A B, B C.

Car ſi A C, A B ne ſont premiers, ſoit D leur commune meſure, ſ'il eſt poſſible : ſi donc D meſure le tout A C, & la partie A B, il meſurera auſſi

$$\begin{array}{|l} \hline A \dots 3 \quad B \dots 4 \quad C \\ \hline D \text{ — } \\ \hline \end{array}$$

le reſte B C ; par la 12. com. ſent. Ainſi A B & B C ne ſeroient premiers entr'eux, contre l'hypothèſe. Parquoy A C ſera premier à A B : on demonſtrera par la meſme maniere que A C eſt auſſi premier à B C.

Secondement, ſi le tout A C eſt premier à A B ou à B C. Je diſ qu'iceux A B & B C ſeront premiers entr'eux. Autrement, que D les meſure ſ'ils ne ſont premiers ; il meſurera auſſi le compoſé des deux A C, par la 10. com. ſent. Ainſi A C ne ſeroit premier à A B, & B C, ce qui eſt contre l'hypothèſe. A B & B C ſont donc premiers entr'eux. Si donc deux nombres ſont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

C O R O L L A I R E.

Il ſ'enſuit de cecy, que ſi un nombre compoſé de deux, eſt premier à l'un d'iceux, il ſera auſſi premier à l'autre. Car ſi A C eſt premier à A B : A B, B C ſeront premiers entr'eux par la ſeconde partie de cette prop. Donc auſſi A C ſera premiere à

BC par la premiere partie de la mesme prop. ce qui a esté proposé.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Tout nombre premier, est premier à tout autre nombre qu'il ne mesure pas.

Soit un nombre premier A, qui ne mesure le nombre B : Je dis que A & B sont premiers entr'eux.

Car s'ils ne le font, ils

auront une commune

mesure autre que l'uni-

té; laquelle soit C, s'il

est possible. Or C ne

peut estre égal à A puis

que nous avons posé que A ne mesure pas B : & par ainsi

A estant mesuré par quelque autre nombre, il ne seroit

premier contre l'hypothese. Parquoy A & B sont premiers

entr'eux. Donc tout nombre premier, &c. Ce qu'il

falloit demontrer.

A 5	B 8
C —	

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre, & que quelque nombre premier mesure leur produit, il mesurera aussi l'un d'iceux nombres posez au commencement.

Soient deux nombres A & B, de la multiplication desquels soit produit C, & que D nombre premier mesure iceluy C. Je dis qu'il mesurera aussi l'un ou l'autre d'iceux A & B, s'il ne les mesure tous deux.

Autrement, s'il ne mesure l'un ny l'autre, qu'il mesure C par le nombre E : Si donc D ne mesure A,

A 4	B 6
C 24	
D . . . 3	E 8

par la prop. prec. il sera premier à iceluy, & par la 23. prop. ils seront les plus petits de leur raison. Mais d'autant que D multiplié par E fait C, aussi bien que A multiplié par B, par la 19. prop. A sera à D, comme E à B, & par la 21. prop. A & D mesureront également E & B, c'est-à-dire que A mesurera E, & D mesurera B. En la même maniere sera démontré que si D ne mesure pas B, qu'il mesurera A. Si donc deux nombres se multiplient l'un l'autre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier.

Soit le nombre composé A. Je dis qu'il sera mesuré par quelque nombre premier.

Car puis qu'il est composé, il sera mesuré de quelque nombre par la 13. def. & soit de B, lequel sera composé ou non: s'il est premier, la prop. est manifeste: mais s'il est composé, il sera mesuré par un autre nombre, & soit C, lequel sera premier ou non: s'il est premier, puis qu'il mesure B; & B mesure A, aussi C mesurera A par la 11. com. sent.

A	8
B	4
C	..2

Mais si C est composé, il sera mesuré par quelque nombre: Et pource qu'un nombre ne se diminue infiniment, nous viendrons finalement à quelque nombre que nul autre ne mesurera; & partant à un nombre premier, lequel mesurant tous les precedents, mesurera aussi le composé A. Parquoy tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Tout nombre est premier, ou bien mesuré par quelque nombre premier.

Soit quelconque nombre A : Je dis qu'iceluy est ou nombre premier, ou que quelque nombre premier le mesure.

Car s'il n'est nombre premier, il est nombre composé, & par la prop. tout nombre composé, est mesuré par quelque nombre premier.

Parquoy tout nombre est premier, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A 5	1
A 6	

P R O B L. 3. P R O P. XXXV.

Tant de nombres qu'on voudra étans donnez, trouver les plus petits nombres de tous ceux qui auront même raison.

Soient donnez tant de nombres qu'on voudra A, B, C : & il faut trouver les plus petits en la même raison.

Lesdits nombres A, B, C sont ou nombres premiers, ou nombres composez : s'ils sont premiers entr'eux, ou à ce que l'on cherche par la 23. prop. mais s'ils sont composez, soit trouvé D plus grande commune mesure d'iceux A, B, C, par la 3. prop. laquelle mesure A selon E; B selon F; & C selon G. Je dis que E, F & G sont les plus petits nombres qui soient en la raison de A, B, & C.

Car il est évident qu'iceux E, F, G sont és mêmes raisons que A, B, C, d'autant que D mesurant iceux A, B, C, par les nom-

bres E, F, G; D multipliant iceux E, F, G, seront produits A, B, C, par la 9. com. sent.

A 6	B 4	C 8
	D 2	
E 3	F 2	G 4
H	I	K L

& par ce que nous avons démontré à la 18. prop. E, F, G, auront la même proportion entr'eux que les multipliers A, B, C. Et qu'ils soient les plus petits, on le démontrera ainsi. S'ils ne sont tels, soient H, I, K, les plus petits nombres ayans même proportion qu'iceux A, B, C : ils

les mesureront donc également par la 21. prop. & soit par le nombre L ; ce qu'étant , par la 9. com. sent. L multipliant H, I, K, feront produits les nombres A, B, C. Veu donc que D multipliant E, fait A ; & L multipliant H, fait le même A ; par la 19. prop. il y aura telle raison de D à L, que de H à E : mais H est moindre que E ; donc D sera aussi moindre que L : & puis que H, I, K mesurent A, B, C par L ; L mesurera aussi iceux A, B, C par la 8. com. sent. & ainsi D ne sera pas la plus grande commune mesure d'iceux A, B, C : ce qui est contre l'hypothese. Il n'y a donc point d'autres nombres moindres que E, F, G, qui soient en même raison , que les proposez A, B, C. Parquoy étans donnez quelconques nombres , nous avons trouvé les plus petits , &c. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

- Il appert icy que la plus grande commune mesure de quelconques nombres , mesure iceux par les nombres qui sont les plus petits de tous ceux qui sont en la même raison qu'iceux proposez.

S C H O L I E.

Par ces choses appert le moyen de trouver les deux plus petits nombres qui ont la même raison , que tant de nombres qu'on voudra donner continuellement proportionnaux. Comme si on propose les nombres A, B, C, continuellement proportionnaux, nous trouverons les deux moindres en la même raison , si par ce prob. nous prenons E & F en la même raison des deux A & B, c'est à sçavoir ces nombres-la , par lesquels D plus grande commune mesure d'iceux A & B, mesure iceux. Car par le coroll. cy dessus , E & F seront les plus petits de tous ceux qui sont en la même raison que A à B : c'est à dire en la raison des continuellement proportionnaux A, B, C.

Or il advient quelquesfois qu'un des nombres E, F, G, trouvez par cette 35. prop. est l'unité , c'est à sçavoir quand D, plus grande commune mesure des nombres proposez A, B, C, est égal à l'un d'iceux : & alors les nombres trouvez E, F, G sont les plus petits en la continuation de leur proportion , puis qu'il ne se peut donner un nombre moindre que l'unité.

PROBL. 4. PROP. XXXVI.

Trouver le plus petit nombre que peuvent mesurer deux nombres donnez.

Soient les nombres donnez A & B : il faut trouver le plus petit nombre mesuré par iceux.

Si le plus petit nombre des deux donnez mesure le plus grand, il est évident qu'iceluy plus grand sera le nombre que nous cherchons : que si l'un ne mesure l'autre, ou A & B seront premiers entr'eux, ou non ; si premiers, soit multiplié A par B, & le produit soit C. Je dis que C est le plus petit nombre mesuré par A, & par B. Car par la 7. com. sent. il est évident que C sera mesuré par l'un & par l'autre, & s'il n'est le moindre nombre mesuré par iceux

A . . . 3	B . . . 4
C 12	
D ----	
E -	F -

A, B, en soit un autre plus petit D, s'il est possible, lequel A mesure selon le nombre E, & B selon le nombre F. Ce qu'étant, D sera produit tant de A multiplié par E, que de B par F, par la 9. com. sent. & partant par la 19. prop. A sera à B comme F à E. Item A & B, étans premiers, ils seront les plus petits de leur raison par la 23. prop. & A mesurera F par la 21. prop. & d'autant que B multipliant A produit C, & multipliant F produit D, il y aura telle raison de C à D, que de A à F, par la 17. prop. Mais nous avons montré que A mesureroit F : donc C mesurera aussi D, sçavoir le plus grand mesurera le plus petit, ce qui est impossible. C étoit donc le moindre nombre que A & B peuvent mesurer.

Soient maintenant les deux nombres A & B composez, & par la prec. prop. soient trouvez C & D les plus petits nombres de la même raison, tellement que ces 4. nombres A,

B, C, D,

soient proportion-

naux: Quoy

posé par la

A . . . 4	B . . . 6	
C . . 2	D . . 3	E 12

29. prop. le produit de A multiplié par D , sera égal au produit de B multiplié par C : iceluy produit soit E. Donc E sera mesuré par B , & par A : & par le même discours de la precedente démonstration , on montrera qu'il est le plus petit nombre mesuré par A , & par B. Nous avons donc trouvé le plus petit nombre , &c. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

De cecy il s'ensuit , que si deux nombres multiplient les plus petits de leur raison , sçavoir le plus grand , le plus petit , & le plus petit le plus grand ; le produit sera le plus petit nombre qu'ils mesurent. Car C & D estans posez les plus petits en la raison de A à B , il a esté prouvé que E produit de A plus petit multiplié par D , plus grand ; & de B plus grand par C plus petit , est le plus petit nombre mesuré par A & B.

T H E O R. 33. P R O P. XXXVII.

Si deux nombres mesurent un autre nombre ; le plus petit qu'ils mesurent , mesurera aussi cet autre nombre.

Soient deux nombres A , & B , qui en mesurent un autre CD , & que le plus petit nombre qu'ils mesurent soit E. Je dis que E mesurera aussi CD.

Autrement , si E ne mesure CD ; après avoir ôté E de CD , tant de fois que

l'on pourra , il restera un nombre moindre que E : qu'il laisse donc FD plus petit que E , s'il est possible : A & B mesurans E , ils mesureront aussi CF

A . . . 2	B . . . 3	1
C	F	D
E 6		

par la 11. com. sent. Mais ils mesurent le tout CD par la 12. com. sent. ils mesureront donc aussi le reste FD plus petit que E , ce qui est impossible , étant le plus petit qu'ils mesurent. Parquoy E mesurera CD : Si donc deux nombres mesurent un autre nombre , &c. Ce qu'il falloit prouver.

PROBL. 5. PROP. XXXVIII.

Trouver le plus petit nombre que peuvent mesurer trois nombres donnez.

Soient trois nombres donnez A , B , C ; il faut trouver le plus petit nombre qu'ils peuvent mesurer.

Soit trouvé D plus petit nombre que peuvent mesurer A & B , par la 36. prop. Or C mesure aussi D , ou il ne le mesurera pas : s'il le mesure ; Je dis qu'il est aussi le plus petit qu'iceux A , B , C , peuvent mesurer : car s'il ne l'est , en soit quelque autre plus petit E , s'il est possible , lequel tous

les trois A , B , C mesurent. D'autant que A & B mesurent E moindre que D , iceluy D , ne sera le moindre que A & B mesurent,

A . . . 2	B . . . 3	C 6
D 6		
E —		

ce qui est contre l'hypothese. D est donc le moindre nombre que peuvent mesurer les nombres proposez A , B , C.

Que si D n'est aussi mesuré par C : par la même 36. prop. soit trouvé E plus petit nombre mesuré par C & D ; Je dis que E sera le plus petit nombre mesuré par A , B , C.

Car premierement E est mesuré par A , B , C : d'autant que C & D le mesurent ; & A & B mesurant D , par la 11. com. sent. ils mesureront aussi E mesuré par D. Que si on dit que E n'est le plus petit nombre mesuré par A , B , C , soit F plus petit , s'il est possible : donc A & B mesurant F ; D le

plus petit mesuré par eux , mesurera aussi F par la prec. prop. Mais C mesure aussi F ; (car A , B & C le mesurent) donc C & D mesureront F. Et par la même prop. E plus

A . . . 2	B . . . 3	C 4
	D 6	
E 12		
F —		

petit mesuré par C & D , mesurera aussi F ; le plus grand un plus petit ; ce qui est impossible. Donc E étoit le plus

petit nombre mesuré par A, B, C. Estant donc donnez trois nombres nous avons trouvé le plus petit qu'ils peuvent mesurer : Ce qu'il falloit faire. •

C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste , que si trois nombres en mesurent quelque autre ; le plus petit qu'ils mesureront , mesurera aussi cet autre. Car il a été démontré que A, B, C, mesurant F ; aussi E le plus petit nombre mesuré par A, B, C, mesure le même nombre F.

S C H O L I E.

Par même raison étans donnez plus de trois nombres , nous trouverons le plus petit nombre qu'ils mesurent. Car si 4. nombres sont donnez , il faudra trouver le moindre que tous mesurent : si 5 , il faudra trouver le plus petit que 4 mesurent , &c. procedant au reste tout ainsi qu'il a été dit de trois nombres.

T H E O R. 34. P R O P. XXXIX.

Si un nombre mesure un autre nombre ; le mesuré aura une partie dénommée par le mesurant.

Soit le nombre A , lequel mesure le nombre B. Je' dis qu'iceluy B contiendra une partie dénommée par A.

Qu'ainsi ne soit ; que A mesure B selon C , c'est à dire , autant de fois qu'il y a d'unitéz en C ; par la 15. prop. C mesurera B autant

de fois que l'unité mesure A ; & C sera telle partie de B que l'unité de A. Mais l'unité est une partie

Unité.		
A ...3	B 6	C . . 2

de A , dénommée par iceluy A , comme nous avons dit en la 2. def. de ce 7. livre : donc aussi C sera une partie de B dénommée par A. Si donc un nombre , &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 35. PROP. XL.

Si un nombre a une partie quelle qu'elle soit, le nombre nommant cette partie le mesurera.

Soit le nombre A, ayant la partie B dénommée par le nombre C. Je dis que C mesure A.

Car puis que B est partie dénommée par C; & l'unité est une partie de C, dénommée par le même C; comme l'unité mesure C, ainsi B mesure A: & par la 15. prop. en permutant comme l'unité mesurera B, ainsi C mesurera A.

A	12
B . . . 3	C . . . 4

A. Parquoy si un nombre a quelconque partie, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBL. 6. PROP. XLI.

Trouver le plus petit nombre, qui ait les parties données.

Soient les parties données A, B, C; il faut trouver le plus petit nombre qui ait icelles parties.

Soient pris les trois nombres D, E, F, dénommez par icelles parties A, B, C; & par la 38. prop. soit trouvé G; le plus petit nombre que peuvent mesurer D, E, F: Je dis qu'iceluy nombre G contient les parties A, B, C.

Car puis que D, E, F mesurent G; par la 39. prop. G aura les parties dénom-

mées par D, E, F, c'est-à-dire les parties A, B, C.

Je dis aussi que G est le plus petit nombre qui ait icelles parties. Car s'il ne l'est, soit H plus petit, s'il est possible, ayant icelles parties. Et H sera mesuré par

A deuxième	D . . 2
B tiers	E . . 3
C quart.	F . . . 4
G	12
H	

les nombres D, E, F dénommées par les parties A, B, C,

par la précédente proposition : & partant puis que H est moindre que G ; iceluy nombre G ne sera pas le plus petit que peuvent mesurer les nombres D, E, F, contre l'hypothese. Donc G est le moindre nombre, ayant les parties données A, B, C. Parquoy nous avons trouvé le plus petit nombre ayant les parties données : Ce qu'il falloit faire.

S C H O L I E.

Combien que nous ayons remarqué en ce 7. livre les prop. & démonstrations qui conviennent & ont lieu aussi bien aux nombres rompus qu'aux entiers ; si est-ce néanmoins que pour donner une entière & parfaite intelligence des regles & preceptes enseignés en nôtre Pratique d'Arithmétique touchant les fractions, nous avons estimé être besoin d'ajouter icy les prop. suivantes.

D E M O N S T R A T I O N S D E S
fractions, ou nombres rompus.

1. Si deux fractions ont un même dénominateur, & que l'unité soit le numerateur de l'une d'icelles fractions ; elles auront même raison entr'elles que les numerateurs.

Soient deux fractions AB, CB, ayans un même denominateur B, & le numerateur C soit l'unité : je dis que le nombre rompu AB est au nombre rompu CB, comme le numerateur A est au numerateur C. Car vu que la fraction AB se divise en autant de fractions esgales à la fraction CB qu'il y a d'unités en A, chacune d'icelles fractions ayant le numerateur C, & le denominateur B ; autant de fois que l'unité C est contenue en A, autant de fois la fraction CB est contenue en la fraction AB : parquoy l'unité C est même partie du nombre A, que la fraction CB de la fraction AB ; & partant par la 20. def. 7. comme l'unité C est à A, ainsi la fraction CB est à la fraction AB ; & en changeant, le numerateur A sera au numerateur C, comme la fraction AB sera à la fraction CB. Ce qui estoit à prouver.

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{A}{B} & \frac{C}{B} \end{array} \right|$$

2. Le numerateur de quelconque fraction a même raison au dénominateur, qu'icelle fraction a à l'entier duquel elle provient.

Soit quelconque fraction AB : je dis que le numerateur A est au dénominateur B comme la fraction AB est à son entier. Soit pris une fraction CB dont le numerateur C est l'unité, & le dénominateur est le même B ; mais soit une autre fraction DB , de laquelle le numerateur D soit esgal au même dénominateur B , afin qu'icelle fraction DB soit esgale à l'entier de la fraction AB . D'autant que par la prop. prec. comme A est à C , ainsi la fraction AB est à la fraction CB : & comme C est à D , ainsi la fraction CB est à la fraction DB ; en raison esgale, comme A sera à D ; c'est-à-dire le numerateur A au dénominateur B , (car B est esgal à D) ainsi la fraction AB sera à la fraction DB , c'est-à-dire à l'entier : ce qui a esté proposé.

$$\left| \begin{array}{cc} A5 & C1 \\ B8 & B8 \end{array} \right|$$

3. Les fractions qui ont un même dénominateur sont entr'elles en même raison que leurs numerateurs.

Soient quelconques fractions AB , CB , ayans un même dénominateur B : je dis que la fraction AB est à la fraction CB , comme le numerateur A est au numerateur C . Car puis que par la prop. prec. comme A est à B , ainsi la fraction AB est à son entier, & que comme B est à C , ainsi l'entier est à la fraction CB ; (car par la même prop. prec. comme C à B , ainsi la fraction CB à son entier, & en changeant comme B à C , ainsi l'entier à la fraction CB) en raison esgale, comme le numerateur A sera au numerateur C , ainsi la fraction AB sera à la fraction CB . Ce qui estoit à démontrer.

$$\left| \begin{array}{cc} A7 & C5 \\ B21 & B21 \end{array} \right|$$

S'il y avoit plus de deux fractions, on prouveroit en la même maniere que la seconde seroit à la troisieme, comme le numerateur au numerateur ; & puis après la troisieme à la quatrieme, & ainsi consecutivement de fraction en fraction.

4. S'il y a tant de fractions qu'on voudra, & qu'on multiplie le numerateur de chacune d'icelles par les dénominateurs de toutes les autres, les nombres produits seront entr'eux, en même proportion que les fractions.

Nous disons le numerateur d'une fraction être multiplié par le denominateur de toutes les autres, quand iceluy numerateur est multiplié par le denominateur de l'une des autres fractions, & puis encore le produit par le denominateur de l'une des restantes, & ainsi continuellement tant qu'il y aura de fraction : & n'importe par quel ordre on les prenne, puis que le produit est toujours le même, comme nous avons démontré au Scholie de la 19. prop. 7.

Soient premièrement deux fractions AB , CD , & de A en D soit fait E , mais de C en B soit fait F : je dis que le produit E est au produit F , comme la fraction AB , est à la fraction CD . Qu'ainsi ne soit : de B en D soit fait G : donc puis que D multipliant A & B , a fait E & G , par la 17. prop. 7. comme A sera à B , ainsi E sera à G :

Mais par la 2. prop. comme A est à B , ainsi la fraction AB est à son entier. Donc aussi comme la fraction AB sera à son entier, ainsi E sera à G . Derechef, pource que B multipliant D & C a fait G & F , par la même 17. prop. 7. comme D sera à C , ainsi G sera à F . Mais comme D est à C , ainsi l'entier est à la fraction CD :

(car puis que par la 2. prop. comme C à D , ainsi la fraction CD à son entier, en changeant comme D à C , ainsi l'entier à la fraction CD .) Donc comme G sera à F , ainsi l'entier sera à la fraction CD . Parquoy la fraction AB , l'entier, & la fraction CD seront en même proportion que les trois produits E , G , F . Donc en raison égale comme E sera à F , ainsi la fraction AB sera à la fraction CD . Ce qui a été proposé.

Soient maintenant les trois fractions AB , CD , HI : & que de A en D soit fait E , & de E en I soit produit L : mais que de C en B soit fait F , & de F en I vienne M : fina-

E8	F9
A2	C3
B3	D4
G12	

blement que de B en D soit fait G, & de G en H vienne N: je dis que les trois produits L, M, N sont entr'eux en mesme proportion que les fractions proposées AB, CD, HI. Car puis que I multipliant E & F fait L & M, par la 17. prop. 7. comme E est à F, ainsi est le produit L au produit M: par la demonstration pres. comme E est à F, ainsi la fraction AB est à la fraction CD. Donc le produit L est au produit M comme la fraction AB à la fraction CD. Derechef puis que B multipliant C & D a fait F & G, comme C à D, ainsi F à G: Mais aussi I multipliant F & G a fait M & K. Donc iceux produits M & K seront entr'eux comme F à G, c'est-à-dire comme C à D. Mais par la 2. prop. comme C à D, ainsi la fraction CD à son entier: Donc aussi comme la fraction CD sera à l'entier, ainsi sera M à K. Semblablement G multipliant I & H, fait K & N; partant comme I à H, ainsi K à N. Mais il appert par ce qui a esté démontré cy-dessus, que comme I est à H, ainsi est l'entier à la fraction HI. Donc comme l'entier sera à la fraction HI, ainsi K sera à N. Parquoy la fraction CD, l'entier, & la fraction HI, seront en même proportion que les produits M, K & N: donc en raison esgale, comme la fraction CD sera à la fraction HI, ainsi le produit M sera au produit N. Mais nous avons déjà demanté cy-dessus, que comme la fraction AB est à la fraction CD, ainsi est le produit L au produit M: donc les trois produits L, M, N seront entr'eux en même proportion que les trois fractions AB, CD, HI. Ce qu'il falloit prouver.

Que s'il y a quatre fractions, on démontrera en la même sorte que comme la troisieme sera à la quatrieme, ainsi la produit correspondant à cette là sera au produit correspondant à cette-cy; & ainsi continuellement de fraction en fraction, repétant toujours la demonstration cy-dessus.

Or il appert de cette demonstration que si les susdits produits estoient esgaux, les fractions seroient aussi esgales: & au contraire que les fractions estans esgales, lesdits produits seront pareille-

L 40	M 45	
E 8	F 9	N 24
A 2	C 3	H 2
B 3	D 4	I 5
G 12 K 60		

Oront esgaux : Mais qu'estans inegales , le produit de la plus grande sera le plus grand , & de la moindre ; le moindre , & ainsi des autres.

5. L'entier a même raison à la somme de deux ou davantage de fractions , que le nombre produit des dénominateurs multipliez entr'eux à la somme des produits du numerateur de chaque fraction multiplié par les dénominateurs de toutes les autres fractions.

Soient trois fractions AB , CD , EF , & que de B en D & F soit procréé K ; & de A en D & F soit fait G ; mais de C par B & F soit produit H ; & de E par B & D soit fait I : Je dis que l'entier est à la somme des fractions AB , CD , EF , comme le produit K est à la somme des produits G , H , I .

Car puisque par la prop. prec.

les fractions AB , CD , EF , sont

entr'elles comme les produits G ,

H , I , par le 5. theor. du Schol-

lie de la 22. prop. 7. comme la

somme d'icelles fractions AB ,

CD , EF est à la fraction EF ,

ainsi la somme des produits G ,

H , I est au produit I . Mais com-

me la fraction EF est à l'entier,

ainsi I est à K : (car par la 2. pro-

comme la fraction EF est à l'entier, ainsi E est à F , & par la 18.

prop. 7. comme E à F , ainsi I à K , pource que E , F multipliant

le produit de B en D ont fait I & K .) Donc en raison esgale

comme la somme des fractions AB , CD , EF est à l'entier,

ainsi la somme des produits G , H , I est à K : & au contrai-

re , comme l'entier est à la somme des fractions AB , CD , EF ,

ainsi K est à la somme des produits G , H , I . Ce qu'il falloit

demontrer.

G 16	H 12	I 18
A 2	C 1	E 3
B 3	D 2	F 4
K 24		

6. Si deux fractions ont un même numerateur , comme la premiere fraction sera à la seconde , ainsi le dénominateur de la seconde sera au dénominateur de la premiere.

Soient deux fractions AB , AC , ayans un même nume-

vateur A : Je dis que la fraction AB est à la fraction AC, comme le dénominateur C est au dénominateur B. Car de A en C soit fait D, & de A en B soit produit E. Or puis que A multipliant C & B, fait D & E, par la 17. prop. 7. comme C sera à B, ainsi D sera à E. Mais par la 4. prop. comme D est à E, ainsi la fraction AB est à la fraction AC :

D ₁₀	E ₆
$\frac{A^2}{B^3}$	$\frac{A^2}{C^5}$

Donc aussi la fraction AB sera à la fraction AC ; comme C sera à B. Ce qu'il falloit prouver.

7. Les fractions desquelles les numérateurs ont une même raison aux dénominateurs sont égales entr'elles : Et des fractions égales, les numérateurs ont une même raison aux dénominateurs : Mais des inégales, celles dont le numérateur a plus grande raison au dénominateur, est la plus grande : Et de la plus grande, le numérateur a plus grande raison au dénominateur.

Soient deux fractions AB, CD, & qu'il y ait même raison du numérateur A au dénominateur B, que du numérateur C au dénominateur D : Je dis qu'icelles fractions AB, CD, sont égales. Car ayant fait E de A en D, & F de B en C ; comme la fraction AB est à la fraction CD, ainsi E à F, par la 4. prop. Mais puis que comme A est à B, ainsi C est à D ; par la 19. prop. 7. les deux produits E & F seront égaux : donc aussi la fraction AB sera égale à la fraction CD. Ce qu'il falloit prouver.

E ₁₂	F ₁₂
$\frac{A^2}{B^3}$	$\frac{C^4}{D^6}$

Soient maintenant deux fractions égales AB, CD : Je dis que comme A est à B, ainsi C à D : Car comme à la prec. démonst. ayant fait E de A en D, & F de B en C, comme AB sera à CD, ainsi E à F. Mais AB est égale à CD : donc aussi E sera égal à F ; & par la 19. prop. 7. comme A sera à B, ainsi C sera à D : Ce qu'il falloit démontrer.

En troisième lieu, qu'il y ait plus grande raison de A à B, que de C à D : Je dis que la fraction AB est plus grande que la fraction CD. Car ayant fait E de A en D, & F de B en C, par la 4. prop. comme la fraction AB sera à la fraction CD, ainsi

ainsi E à F. Mais par le Scholie de la 19. prop. 7. le nombre E est plus grand que le nombre F : donc aussi la fraction AB sera plus grande que la fraction CD. Ce qu'il falloit prouver.

Finablement, que la fraction AB soit plus grande que la fraction CD : je dis que la raison de A à B est plus grande que celle de C à D. Car comme dessus la fraction AB sera à la fraction CD, comme E à F. Mais par l'hypothese la fraction AB est plus grande que la fraction CD : donc

E 14	F 9
A 2	C 3
B 3	D 7

aussi E sera plus grand que F. Et puis que E est le produit de A en D, & F celui de B en C, par le Scholie de la 19. prop. 7. il y aura plus grande raison de A à B, que de C à D. Ce qu'il falloit prouver.

8. Les fractions dont les numérateurs sont en même raison que les dénominateurs, sont égales entr'elles. Et des fractions égales, les numérateurs ont même raison entr'eux, que les dénominateurs. Mais des fractions inégales, celle dont le numérateur a plus grande raison au numérateur, que le dénominateur au dénominateur, est la plus grande; & de la plus grande, le numérateur a plus grande raison au numérateur, que le dénominateur au dénominateur.

Soient deux fractions AB, CD, & qu'il y ait même raison du numérateur A au numérateur C, que du dénominateur B au dénominateur D : je dis qu'icelles fractions AB, CD, sont égales. Car en raison permuée A sera à B, comme C à D; & partant par la proposition précédente les fractions sont égales. Ce qu'il falloit prouver.

A 2	C 4
B 3	D 6

Mais soient les fractions AB, CD, égales : je dis que comme A est à C, ainsi B est à D. Car par la prop. préc. comme A sera à B, ainsi C sera à D; & en permutant, comme A sera à C, ainsi B sera à D. Ce qui étoit à prouver.

A 5	C 2
B 5	D 3

Maintenant, qu'il y ait plus grande raison de A à C, que de B à D : je dis que la fraction AB

est plus grande que la fraction CD . Car en permutant il y aura plus grande raison de A à B , que de C à D ; & par la prec. prop. la fraction AB , sera plus grande que la fraction CD : Ce qu'il falloit prouver.

En dernier lieu, soit la fraction AB plus grande que la fraction CD : Je dis qu'il y a plus grande raison de A à C que de B à D . Car par la prec. prop. il y aura plus grande raison de A à B , que de C à D ; & partant en permutant, la raison de A à C sera plus grande que de B à D : Ce qu'il falloit prouver.

9. Reduire les fractions de diverses dénominations à autant d'autres fractions de même dénomination, qui leur soient égales, chacune à la sienne.

Soient premierement les deux fractions AB , CD , ayans divers dénominateurs B , D : & il faut les reduire à deux autres fractions qui leur soient égales, & d'une même dénomination. Soit fait E de A en D ; & F de B en C ; mais G de B en D : Je dis que les fractions EG , FG , qui ont un même dénominateur G , sont égales aux fractions AB , CD , chacune à la sienne, c'est-à-dire que EG est égale à AB , & FG à CD . Car d'autant que A & B multipliant D , ont fait E & G : par la 18. prop. 7: comme A à B , ainsi E à G : & par la 7. prop. les fractions EG , AB sont égales. Par même raison on prouvera que la fraction FG est égale à la fraction CD .

E_8	F_9
A_2	C_3
B_3	D_4
G_{12}	

Maintenant, soient trois fractions de diverses dénominations AB , CD , EF , lesquelles il faut reduire à trois autres d'une même dénomination, qui leur soient égales, chacune à la sienne. Tout ainsi que dessus soit fait G de A en D , & H de B en C ; mais I de B en D : puis après soit fait K de G en F ; L de H en F ; M de I en E ; & N de I en F . Je dis que les trois fractions KN , LN , & MN , qui ont un même dénominateur N , sont égales aux trois fractions AB , CD , EF , chacune à la sienne.

K_{12}	L_{16}	
G_3	H_4	M_{18}
A_1	C_2	E_3
B_2	D_3	F_4
I_6	N_{24}	

Car premierement, il appert par ce qui a été démontré cy-dessus, que GI est égale à AB , & HI à CD : Mais pris que F multipliant G , HI , a produit K , L , N , par le Scholie de la 18. prop. 7. iceux produits sont entr'eux en même proportion, que G , H , I . Parquoy KN sera aussi égale à AB , & LN à CD . Semblablement, pource que I multipliant E & F , fait M & N , comme E est à F , ainsi M à N , & par la 7. prop. la fraction MN sera égale à la fraction EF . Par ainsi nous avons trouvé les trois fractions KN , LN & MN , qui ont un mesme dénominateur N , & sont égales aux trois proposées AB , CD , EF , chacune à la sienne. Ce qu'il falloit faire.

Que s'il y avoit quatre fractions, il faudroit en reduire premierement trois comme dessus, puis multiplier chaque numérateur d'icelles par le dénominateur de la quatrième fraction, & leur dénominateur commun tant par le numérateur que dénominateur d'icelle quatrième fraction : & ainsi on auroit quatre fractions d'une même dénomination égales aux proposées. Bref, il appert assez que quelque nombre qu'il y ait de fractions de diverses dénominations à reduire à une même dénomination, que multipliant le numérateur de chacune d'icelles fractions par les dénominateurs de toutes les autres, viendra le numérateur de chacune, & puis multipliant tous les dénominateurs entr'eux, sera procréé le dénominateur commun : & ce en quelconque ordre & façon qu'on fasse lesdites multiplications, puis que par la 2. Theor. du Scholie de la 19. prop. 7. lors que trois ou davantage de nombres se multiplient entr'eux, le produit est toujours un même en quelque façon, & ordre qu'on les multiplie.

10. Reduire quelque entier que ce soit à une fraction dont le dénominateur est donné.

Premierement l'entier soit l'unité A , qu'il faut reduire à une fraction dont le dénominateur est B . Soit pris le numérateur C égal au dénominateur B : Je dis que la fraction CB est égale à l'unité A ; Car par la 2. prop. comme C est à B , ainsi la fraction CB est à l'entier A . Mais C est égal à B : donc aussi la fraction CB est égale à l'entier A , c'est à dire à l'unité.

$C4$
$A1 \quad B4$

Maintenant que l'entier soit le nombre A , lequel il faut réduire à la fraction dont le dénominateur est B . De A en B soit fait le numérateur C : Je dis que la fraction CB est égale au nombre entier A . Soit posée l'unité D au dessous de A , afin que la fraction AD soit égale à autant d'unités qu'il y en a au nombre A . Or d'autant que de la multiplication de A en B est fait C , par la 15. def. 7. le nombre B sera aussi autant de fois en C , qu'il y a d'unités en A . Donc comme A sera à D , ainsi C sera à B . Parquoy des fractions AD , CB les numérateurs A & C , ont une même raison aux dénominateurs D & B : partant elles seront égales entr'elles par la 7. prop. Mais la fraction AD est égale à l'entier A , à cause que le dénominateur D est l'unité : Donc aussi la fraction CB sera égale au même entier A . Nous avons donc fait ce qui étoit requis.

$$\left| \begin{array}{cc} A^5 & C^{35} \\ \hline D^1 & B^7 \end{array} \right|$$

II. Doubler & medier une fraction donnée.

Premierement qu'il faille doubler la fraction AB . Soit doublé le numérateur A , afin que soit fait le numérateur C demeurant le même dénominateur B : Ou bien lors que le dénominateur B est pair en soit pris la moitié, afin d'avoir le dénominateur D , demeurant le même numérateur A . Je dis que chaque fraction CB , AD , est double de la fraction AB . Car puis que les fractions AB , CB , ont un même dénominateur B , par la 3. prop. comme le numérateur C sera au numérateur A , ainsi la fraction CB sera à la fraction AB . Mais par la construction C est double de A : donc aussi la fraction CB sera double de la fraction AB .

$$\left| \begin{array}{ccc} A^5 & C^{10} & A^5 \\ \hline B^{12} & B^{12} & D^6 \end{array} \right|$$

Derechef, pource que les fractions AB , AD , ont un même numérateur A , par la 6. prop. comme le dénominateur B sera au dénominateur D , ainsi la fraction AD sera à la fraction AB . Mais par la construction B est double d'iceluy D : donc aussi la fraction AD sera double de la fraction AB .

Maintenant qu'il faille prendre la moitié de la fraction AB . Soit doublé le dénominateur B , afin qu'il en vienne le dénominateur C , demeurant le même numérateur A : Ou bien quant le numérateur A est pair, en soit pris la moitié, qui soit D , avec le même dénominateur B . Je dis que chaque fraction

AC, DB est moitié de la fraction AB.

Car puis que les fractions AB, AC

ont un même numérateur par la 6.

prop. comme B sera à C, ainsi la frac-

tion AC sera à la fraction AB.

Mais par la construction B est la

moitié de C : Donc aussi la fraction AC sera moitié de la

fraction AB.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline A^8 & A^8 & D^4 \\ \hline B^9 & C^{18} & B^9 \\ \hline \end{array}$$

Derechef, puis que les fractions AB, DB, ont un même dé-
nominateur, par la 3. prop. comme D sera à A, ainsi la frac-
tion DB sera à la fraction AB. Vû donc que par la constru-
ction D est moitié de A, aussi la fraction DB sera moitié de la
fraction AB. Nous avons donc doublé, & pris la moitié de la
fraction donnée AB. Ce qu'il falloit faire.

En la même maniere une fraction donnée sera triplée, qua-
druplée, &c. si on triple, quadruple, &c. le numérateur de-
meurant le même dénominateur : Ou bien si on prend (quand
il se peut faire) le tiers, le quart, &c. du dénominateur, de-
meurant le même numérateur. Pareillement on aura le tiers,
le quart, &c. D'une fraction donnée, si on triple, quadruple,
&c. le dénominateur, demeurant le même numérateur : Ou
bien si on prend (lors qu'il se peut faire) le tiers, le quart,
&c. du numérateur, le même dénominateur demeurant :
Ce qu'on démontrera en la même maniere que dessus.

12. La fraction de fraction est égale à la fraction simple,
de laquelle le numérateur est procréé de la multiplication
des numérateurs entr'eux, & le dénominateur est produit
des dénominateurs aussi multipliés entr'eux.

Soit premierement AB une fraction de la fraction CD, la
valeur de laquelle au respect de l'unité, ou du nombre entier
E, soit exprimée par F; mais de A en C soit fait G & de B en D
soit produit H: se dis que la fraction de fraction donnée est égale
à la simple fraction GH, au respect de l'entier E. Car soit encore
fait I de B en C; & par la 2. prop. comme A est à B, ainsi la
fraction AB est à son entier, c'est à sçavoir à la fraction CD,
de laquelle l'entier est E. Mais par la 18. prop. 7. comme A est
à B ainsi G à I, pource que A, B, multiplians C, pro-
duisent iceux G, I : donc aussi comme la fraction AB
sera à la fraction CD, ainsi sera G à I. Derechef, pource
que par la 2. prop. comme C est à D, ainsi la fraction CD

est à son entier E, & que par la 17. prop. 7. comme C à D, ainsi I à H: aussi la fraction CD sera à son entier E, comme I à H. Vu donc que comme la fraction AB est à la fraction CD, ainsi G est à I; & comme la fraction CD est à son entier E, ainsi est I à H; en raison égale, comme AB fraction de la fraction CD est

G	6	I	9	
A	2	C	3	E 1
B	3	D	5	E 20 F 2
H	15			

à l'entier E, ainsi G est à H: Mais nous avons posé qu'à icelle fraction de fraction soit esgale la simple fraction F: donc aussi la fraction F sera à l'entier E, comme G à H. Mais par la 2. prop. comme G est à H, ainsi la fraction GH est au même entier E: Donc les fractions simples F & GH seront égales; & partant puis que la fraction F est égale à la fraction de fraction donnée, aussi la fraction GH sera esgale à la fraction AB au respect de la fraction CD, duquel l'entier est E. Ce qu'il falloit prouver.

Soit maintenant AB fraction de CD, qui est aussi fraction de la fraction EF; & soit fait G de A en C; & H de B en D: Item I de G en E; & K de H en F: Je dis que la fraction IK est égale à la fraction de fraction donnée. Ce qui est manifeste, veu que par la démonstration prec. la fract. GH est esgale à AB, fraction de la fraction CD; tellement qu'icelle GH est fraction de la fraction EF, à laquelle est aussi esgale la fraction IK, par la même démonstration.

G	10	I	30	
A	5	C	2	E 3
B	6	D	3	F 4
H	18			

Que s'il y avoit davantage de fractions, c'est à dire que EF fust encore fraction d'une autre fraction, le produit de I, K, par cette autre fraction, donneroit pareillement la fraction simple esgale à la fraction de fraction donnée; & ainsi continuellement s'il y avoit davantage de fractions.

Il appert donc qu'estant donnée une fraction de tant de fractions qu'on voudra on la reduira en une simple fraction, multipliant tous les numerateurs entr'eux, & puis aussi tous les denominateurs entr'eux.

13. Reduire une fraction donnée à minimas termes.

Soit une fraction AB , qu'il faut réduire aux plus petits termes d'icelle. Or les nombres A, B , seront premiers entr'eux, ou non; s'ils sont premiers, la fraction AB ne pourra être réduite à plus petite dénomination. Car soit réduite, s'il est possible, à moindres termes C, D , tellement que la fraction CD soit égale à la fraction AB . D'autant que par la 7. prop. comme A est à B , ainsi C à D , & que les nombres C, D , sont moindres que les nombres A, B ; iceux A, B , ne seront les moindres termes de cette raison: Mais par la 23. prop. 7. ils sont aussi les plus petits, venant qu'ils sont premiers entr'eux: Ce qui est absurde.

$$\left| \begin{array}{cc} A7 & C. \\ B8 & D7 \end{array} \right|$$

Maintenant que A, B , ne soient premiers entr'eux: & par la 2. prop. 7. la plus grande mesure d'iceux soit C , qui mesure A par D ; & B par E : Je dis que la fraction DE est égale à la fraction AB , & constituée aux plus petits termes qu'elle puisse estre. Car puis que C mesure A & B par D & E ; par la 7. com. sent. 7. Iceux A, B , seront produits de C en D, E , & par la 19. prop. 7. comme A sera à B , ainsi D à E , & partant par la 7. prop. les fractions AB, DE , seront égales. En apres, pource que C , plus grande mesure des nombres A, B , les mesure par D, E ; par le corol. de la 35. prop. 7. iceux D, E , seront les plus petits nombres de tous ceux qui ont même raison que A à B . Nous avons donc réduit la fraction donnée AB en sa plus petite dénomination DE : Ce qu'il falloit faire.

$$\left| \begin{array}{cc} A6 & D2 \\ B9 & E3 \\ & C3 \end{array} \right|$$

14. Étant donnée une fraction, la réduire (si faire se peut) à une autre égale de dénomination donnée.

Soit donnée la fraction AB , qu'il faut réduire à une autre égale, de laquelle le dénominateur soit C . De A en C , soit fait D , lequel B mesure par E : Je dis que la fraction EC , qui a le dénominateur donné C est égale à la fraction donnée AB . Car puis que B mesure D par E , par le 9. ax. 7. D sera fait de E en E : Mais il a aussi esté fait de A en C . Donc par la 19. proposition 7. comme A sera à B , ainsi E sera à C ; & par la 7. proposition les fractions AB, EC seront égales.

$$\left| \begin{array}{cc} A2 & E6 \\ B3 & C9 \\ & D18 \end{array} \right|$$

Que si B ne mesure D procréé de A en C, la fraction donnée ne se pourra reduire à la dénomination donnée C. Car soit reduite, s'il est possible, à la fraction EC. Donc puisque les fractions AB, EC sont égales, comme A sera à B, ainsi E sera à C par la 7. prop. & partant par la 19. prop. 7. le nombre produit de B en E sera égal à celui fait de A en C, c'est à sçavoir D. Donc par le 7. ax. 7. B mesurera D par E : Ce qui est absurde, puis qu'on a posé que B ne mesure D.

A 2	E.
B 5	C 7
D 14	

Or la réduction de fraction, qui en l'Arithmétique pratique, est vulgairement appelée Evaluation, despend de cette prop. ven qu'évaluer une fraction n'est autre chose, que trouver une fraction égale à la donnée, qui ait pour dénominateur le nombre & valeur de l'entier proposé.

Comme par exemple, quand on veut évaluer les $\frac{2}{5}$ d'une livre, ce n'est autre chose que trouver une autre fraction égale à $\frac{2}{5}$, qui ait pour dénominateur le nombre 20, qui est la valeur de la livre : & suivant

A 2	E 8
B 5	C 20
D 40	

ce qui est icy démontré, si ayant multiplié ledit nombre 20 par 2, numérateur de la fraction donnée, on divise le produit 40 par le dénominateur 5, viendra 8 pour le numérateur de ladite fraction cherchée, c'est à dire, que la fraction $\frac{8}{20}$ sera égale à la donnée $\frac{2}{5}$; au lieu de laquelle fraction $\frac{8}{20}$, on peut aussi dire 8 sols, puis que l'entier auquel se referoit la fraction donnée vaut 20 sols.

15. Quand un nombre est divisé par un autre plus grand , le quotient est une fraction de laquelle le nombre à diviser est numérateur , & le diviseur dénominateur.

Soit le nombre A , qu'il faut diviser par un plus grand nombre B : je dis que le quotient est la fraction AB , de laquelle le nombre à diviser A , est numérateur , & le diviseur B dénominateur.

$$\frac{A5}{B7}$$

Car d'autant que par la

7. prop. comme A est à B , ainsi la fraction AB est à l'entier , c'est-à-dire à l'unité par la def. de la division (La division d'un nombre par un nombre est l'invention d'un nombre qui ait même raison à l'unité que le nombre dividande au diviseur) la fraction AB sera quotient du nombre A divisé par le nombre B . Ce qu'il falloit prouver.

16. Adjoûter plusieurs fractions en une somme.

Qu'il faille premierement adjoûter ensemble deux fractions AB , CB d'une même dénomination. Soient adjoûtez ensemble

les numérateurs A , C , la somme desquels soit D , au dessous de laquelle soit posé le même dé-

$$\frac{A2}{B7} \quad \frac{C3}{B7} \quad \frac{D5}{B7}$$

nominateur B : je dis que la fraction DB , est la somme de l'addition des fractions AB , CB . Car d'autant que les fractions ont un même dénominateur , par la 3. prop. comme A sera à C , ainsi la fraction AB sera à la fraction CB ; & en composant , comme A , C ,

ensemble à C, ainsi les fractions AC , CB ensemble à la fraction CB . Mais par la même 3. prop. comme C à D, ainsi la fraction CB à la fraction DB . Donc en raison égale, comme AC , ensemble à D, ainsi les fractions AB , CB ensemble à la fraction DB . Vû donc que par la construction A , C , ensemble sont égales à D, aussi les fractions AB , CB ensemble, seront égales à la fraction DB .

Soient maintenant trois fractions de diverses dénominations AB , CD , EF , lesquelles il faut ajouter ensemble. Les fractions proposées soient réduites à autant d'autres fractions de même dénomination GK , HK , IK , par la 9. prop. puis soient ajoutées en-

semble les numérateurs G , H , I , dont la somme soit L , à laquelle soit supposé le dénominateur commun K , & la fraction LK , sera la somme des trois

G 12 H 16 I 18			
$\frac{A_1}{B_2}$	$\frac{C_2}{D_3}$	$\frac{E_1}{F_4}$	$\frac{L_{46}}{K_{24}}$
K 24			

fractions proposées. Car d'autant que par la 3. prop. les numérateurs G , H , I , sont en même proportion que les fractions GK , HK , IK , par le 5. Theor. du Scholie de la 22. prop. 7. G , H , I ensemble seront à 1, comme les trois fractions AB , CD , EF ensemble seront à la fraction EF . Mais par la 3. prop. comme 1 est à L , ainsi aussi la fraction EF est à la fraction LK . Donc en raison égale, comme les trois nombres G , H , I ensemble seront à L , ainsi les trois

fractions AB , CD , EF ensemble seront à LK . Mais par la construction le nombre L est égal aux trois G , H , I : Donc aussi la fraction LK sera égale aux trois proposées AB , CD , EF . Nous avons donc fait ce qui étoit requis.

Or ayant réduit les fractions proposées à une même dénomination, & adjointes ensemble les numérateurs trouvez, puis à la somme L , supposé le dénominateur commun K ; on prouvera encore que la fraction LK est égale aux proposées en cette sorte. D'autant que par la 5. prop. comme l'entier est à la somme des fractions AB , CD , EF , ainsi le dénominateur commun K est à la somme des produits G , H , I , c'est-à-dire L ; en changeant, comme la somme des fractions AB , CD , EF , sera à l'entier, ainsi L sera à K . Mais par la 2. prop. comme L est à K , ainsi aussi la fraction LK est au même entier. Donc comme la somme des fractions AB , CD , EF , est à l'entier, ainsi la fraction LK est au même entier : & partant la somme des fractions AB , CD , EF , sera égale à la fraction LK . Ce qui étoit proposé.

Que si les fractions proposées à adjoûter ne se referoient à l'unité, ains à quelque nombre entier, la somme d'icelles se rapporteroit au même nombre. Par exemple s'il falloit adjoûter $\frac{2}{3}$ du nombre 60 avec les $\frac{2}{7}$ du même nombre, la somme d'icelles fractions seroit $\frac{19}{21}$, qui se refereroient aussi au même nombre 60 ; tellement que ce seroit 76 : car les $\frac{2}{3}$ de 60 sont 40, & les $\frac{2}{7}$ sont 36, lesquels deux nombres adjointez ensemble, font le susdit nombre 76.

17. Oter une petite fraction d'une plus grande.

De la fraction AB , qu'il en faille ôter une moindre fraction CB , laquelle est de même dénomination. Soit ôté le numérateur C du numérateur A , & au dessous du reste

D , soit posé le même dénominateur B : je dis que la fraction DB est ce qui reste après avoir soustrait la fraction CB de la fraction AB . Car puisque C ôté de A , reste D ; A est composé de C & D : donc la fraction AB , de laquelle le numérateur A est l'aggrégé des numérateurs C , D , est la somme des deux fractions CB , DB , comme il a été démontré en la préc. prop. Parquoy ayant ôté la fraction CB de la fraction AB , restera la fraction DB .

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline A_3 & C_1 & D_2 \\ \hline B_+ & B_+ & B_+ \\ \hline \end{array}$$

Mais si de AB , il faut ôter une moindre fraction CD , qui a un autre dénominateur que AB : par la 9. prop. icelles fractions AB , CD , soient réduites à deux autres d'une même dénomination EG , FG : puis soit ôté le numérateur F du numérateur E , & reste H , au dessous duquel soit apposé le dénominateur commun G : je dis qu'après avoir ôté la fraction CD de la plus grande fraction AB , reste la fraction HG , ainsi qu'il appert par la démonstration cy-dessus. Ce qu'on peut encore démontrer ainsi, d'autant que D multipliant A , B fait E , G , par la 17. prop. 7. comme A sera à B , ainsi E sera à G . Mais par la 2. prop. comme A est à B , ainsi la fraction AB est à l'entier,

Donc aussi comme E à G, ainsi la fraction $\frac{AB}{C}$ est à l'entier. Derechef, pource que B multipliant C, D, fait F, G, comme C sera D, ainsi F à G. Mais aussi comme C à D, ainsi la fraction $\frac{CD}{E}$ est à l'entier. Donc comme F à G, ainsi la fraction CD est à l'entier. Vu donc que comme F première est à G deuxième,

E 15	F 8	
$\frac{A_3}{B_4}$	$\frac{C_2}{D_5}$	$\frac{H_7}{G_{20}}$
	G ₂₀	

ainsi la fraction CD troisième est à l'entier quatrième, & que par la 2. prop. comme H cinquième est au même G deuxième, ainsi la fraction HG sixième est au même entier quatrième par le 6. Theor. du Schol. de la 22. prop. 7. comme F, H, première & cinquième ensemble sera à G deuxième, ainsi les fractions CD, HG, troisième & sixième ensemble, sera à l'entier quatrième. Mais comme F, H, ensemble sont à G, ainsi E égal à iceux F, H (Car F ôté de E reste H) est au même nombre G. Donc aussi comme E sera à G, ainsi les fractions CD, HG ensemble seront à l'entier. Mais il a été démontré que comme E à G, ainsi la fraction $\frac{AB}{C}$ à l'entier. Donc aussi comme la fraction $\frac{AB}{C}$ sera à l'entier, ainsi les fractions CD, HG ensemble seront au même entier : Et partant les fractions CD, HG ensemble seront égales à la fraction $\frac{AB}{C}$. Parquoy ayant ôté la fraction CD de la fraction $\frac{AB}{C}$, le reste sera la fraction HG. Co qu'il falloit faire.

Or si les fractions proposées ne se referoient à

l'unité, ains à quelque nombre entier, le reste se refereroit aussi au même nombre. Par exemple, s'il falloit soustraire $\frac{2}{3}$ du nombre 40, des $\frac{3}{4}$ du même nombre, le reste $\frac{7}{10}$ se refereroit au même nombre 40; & partant ce seroit 14 : car par la 15. prop. les $\frac{2}{3}$ de 40, sont 16, & les $\frac{3}{4}$ sont 30.

18. Multiplier une fraction par une fraction.

Soit une fraction AB , qu'il faut multiplier par la fraction CD : de la multiplication des numérateurs A , C , entr'eux soit fait E , au dessous duquel soit posé F produit des dénominateurs B , D , multipliés entr'eux : Je dis que la fraction EF est le produit des fractions AB , CD , multipliées entr'elles. Car

H ₄₅	G ₃₀	
A ₂	C ₃	E ₆
B ₃	D ₅	F ₁₅

soit fait G de E en D ; & H de C en F : Et par la 4. prop. comme la fraction EF sera à la fraction CD , ainsi G à H . Mais pource que C multipliant A , F , fait E , H , par la 17. prop. 7. comme A sera à F , ainsi E à H ; & en permutant, comme A sera à E , ainsi F sera à H . Derechef, pource que D multipliant E , B fait G , F , par la 17. prop. 7. comme E sera à B ainsi G à F . Parquoy les trois nombres A , E , B sont proportionnels aux trois G , F , H en proportion troublée : donc en raison égale, comme A sera à B , ainsi G à H . Mais nous avons démontré que comme G est à H , ainsi la fraction EF est à la fraction CD ; & par la 2. prop. comme A est à B , ainsi la fraction AB ,

est à l'entier, c'est-à-dire à 1. Donc aussi comme la fraction EF est à la fraction CD ; ainsi la fraction AB est à 1. Et par la def. de la multiplication (La multiplication d'un nombre en un nombre est l'invention d'un nombre qui ait même raison à l'un des multiplians que l'autre à l'unité) la fraction EF est produite de la multiplication de la fraction AB en la fraction CD : parquoy nous avons fait ce qui estoit requis.

Or quand on multiplie des fractions, qui ne se rapportent pas à l'unité, ains à quelque nombre entier donné; il ne faut pas referer le nombre produit de la multiplication d'icelles fractions, au nombre entier proposé, ainsi qu'en l'addition et soustraction; mais il le faut comparer au quarré d'iceluy nombre donné: Car vñ que la comparaison se doit faire entre choses semblables, & que de la multiplication de deux nombres est produit un nombre plan: il faudra referer le nombre produit de la multiplication avec le plan du nombre entier proposé, c'est-à-dire avec son quarré, si toutes les deux fractions se referent à un même nombre entier, pource qu'iceluy nombre (suivant ce que nous avons dit à la 14. prop.) leur est comme dénominateur. & par consequent il le faut multiplier par soy-même afin d'avoir le dénominateur du produit desdites fractions. Mais si les fractions se referoient à divers nombres entiers, il faudroit referer le produit de leur multiplication au nombre plan fait des nombres entiers proposez. Ainsi lors qu'on multiplie les $\frac{2}{3}$ d'une livre, c'est-à-dire les $\frac{2}{3}$ de 20 sols, par $\frac{1}{2}$ du même nombre 20, le produit est cette fraction $\frac{2}{3}$, laquelle il ne faut pas rapporter au nombre en-

tier proposé 20, mais à son carré 400; tellement que ce produit $\frac{2}{10}$ est 80, & il ne seroit que 4, si on le referoit seulement au nombre proposé 20. Ce qui est apparent, car par la 14. prop. les $\frac{2}{5}$ du nombre 20. sont 8 & $\frac{1}{5}$ du même nombre 20, est 10; & de 8 en 10, est fait 80, qui est $\frac{2}{10}$ du nombre 400, carré du nombre 20, entier proposé. Nous dirons donc que $\frac{2}{5}$ d'une livre multipliez par $\frac{1}{5}$ livre, ne produisent pas $\frac{2}{10}$ d'une livre, qui sont seulement 4 sols, mais produisent $\frac{2}{10}$ de 400, qui sont 80 s. ou 4 livres. Mais lors qu'on multiplie les $\frac{2}{5}$ du nombre entier 20, par les $\frac{3}{4}$ du nombre entier 24, le produit est $\frac{6}{10}$, ou $\frac{3}{5}$ du nombre 480, c'est-à-dire 144: Car par la 14. prop. les $\frac{2}{5}$ du nombre entier 20 sont 8, ou $\frac{8}{20}$, & les $\frac{3}{4}$ de 24 sont 18, ou $\frac{18}{4}$, qui multipliez comme dit est cy-dessus, produisent 144, ou la fraction $\frac{144}{480}$: tellement que les $\frac{6}{10}$ trouvez ne se doivent referer à l'un ny à l'autre entier proposé 20 & 24, ains au nombre plan 480, produit d'iceux entiers.

19. Diviser une fraction par une fraction.

Soit la fraction AB , qu'il faut diviser par la fraction CD : & premièrement que les nombres de cette-cy C, D , mesurent les nombres de celle-là AB , par E, F ; tellement que A étant divisé par C le quotient soit E , & ayant divisé B par D , le quotient soit F : Je dis que la fraction EF ,

est le quotient de la fraction AB divisée par la fraction CD . Car d'autant que C mesure A par E ,

A_1	C_1	E_1
B_{12}	D_6	F_2
A_4	C_2	E_2
B_9	D_9	F_1
A_9	C_3	E_3
B_{10}	D_5	F_2

par E, & D mesure B par F par le 9. ax. 7. A est procréé de C en E; & B de D en F. Donc par la prec. prop. la fraction AB, est produite de la multiplication de la fraction EF par la fraction CD: & partant par la def. de la multiplication, comme la fraction AB sera à la fraction CD, ainsi la fraction EF sera à l'unité. Parquoy puis que comme AB, fraction divisée, est à CD, fraction divisante, ainsi la fraction EF est à l'unité, par la def. de la division, la fraction EF sera le quotient de la division de la fraction AB par la fraction CD. Ce qui estoit proposé.

Maintenant, que les nombres de la fraction CD, ne mesurent les nombres de la fraction AB: Par la 9. prop. les fractions proposées AB, CD, soient reduites à deux autres égales de même dénomination EG, FG; puis des deux numerateurs E & F, soit fait à part la fraction EF. Je dis qu'icelle fraction EF est le quotient de la fraction AB divisée par la fraction CD. Car par la 3. prop. la fraction EG est à la fraction FG, comme le numera-

teur E est au

numérateur

F; & par la

2. prop. com-

me E est à F,

ainsi la frac-

tion EF est à

son entier,

c'est-à-dire à l'unité.

Donc aussi comme la fraction

EF est à l'unité,

ainsi la fraction EG est à la frac-

tion FG, c'est-à-dire la fraction AB à la fraction

E ₁₂	F ₁₀	E ₈	F ₉
A ₄	C ₂	A ₂	C ₃
B ₅	D ₃	B ₃	D ₄
G ₁₅		G ₁₂	

CD , puis qu'elles leur sont égales par la construction ; & passant par la def. de la division, la fraction EF sera le quotient de la fraction AB divisée par la fraction CD . Ce qui étoit proposé.

Or il appert assez que cette démonstration a lieu en toutes fractions, soit que les nombres de la fraction divisante mesurent ou non les nombres de la fraction à diviser ; & aussi que le dénominateur commun G n'entre point au quotient de la division, ains seulement les deux numérateurs E , F ; c'est pourquoy en la pratique d'Arithmet. il suffit de multiplier le numérateur de la fraction à diviser par le dénominateur de la fraction divisante, pour avoir le numérateur du quotient ; mais le numérateur de la fraction divisante par le dénominateur de la fraction à diviser pour avoir le dénominateur d'iceluy quotient.

Il est aussi manifeste que si les nombres de la fraction divisante sont changez de lieu à autre, que la division se fera comme la multiplication, c'est à sçavoir en multipliant les numérateurs entr'eux, & puis après les dénominateurs. Comme par exemple, voulant diviser $\frac{5}{6}$ par $\frac{2}{3}$, nous changerons les nombres de cette fraction $\frac{2}{3}$, & aurons $\frac{3}{2}$, par lesquels nous multiplierons $\frac{5}{6}$, c'est à sçavoir 5 par 3, & 6 par 2, & viendront $\frac{15}{12}$ pour le quotient de $\frac{5}{6}$ divisé par $\frac{2}{3}$.

Fin du septième Element.



ELEMENT

HUITIÈME.

THEOR. I. PROP. I.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que les extrêmes soient premiers entr'eux; ils seront les plus petits de leur raison.



OIENT
tant de
nombres
que l'on
voudra

A 4	D —
B 6	E —
C 9	F —

continuellement proportionnaux A, B, C; & que les extrêmes A & C, soient premiers entr'eux: Je dis que A, B, C, sont les plus petits qui soient en la même raison.

Car s'ils ne sont tels, soient D, E, F, plus petits en la même raison, s'il est possible. Par ainsi il y a d'un côté les trois nombres A, B, C, & d'un autre les trois D, E, F, qui prins de deux en deux sont en même raison: Donc en raison égale, D sera à F, comme A est à C par la 14. prop. 7. & parce que A & C sont premiers entr'eux, ils seront les plus petits de leur raison, par la 23. prop. 7. & par la 21. prop. 7. ils mesureront également D & F: ce qui est impossible, pour être plus petits qu'iceux. Donc A, B, C, étoient les plus petits en la même raison.

Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBL. I. PROP. II.

Trouver tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, les plus petits en une raison donnée.

Soient deux nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la même raison : il faut premièrement trouver trois nombres continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison donnée de A à B.

Que A multiplié par soy-même produise C ; A par B produise D ; & B par soy produise E : Je dis premièrement que C, D, E, sont continuellement proportionnaux en la raison

		F8.
	C4.	
A1.		G12.
	D6.	
B3.		H18.
	E9.	
		I27.

de A à B. Car puis que A multipliant A & B, produit C & D; comme A sera à B, ainsi C sera à D par la 17. prop. 7. Derechef, puis que B multipliant A & B, produit D & E, comme A sera à B, ainsi D sera à E : Parquoy C, D, E, seront continuellement proportionnaux en la raison de A à B. Je dis aussi qu'ils sont les plus petits d'icelle raison donnée. Car d'autant que A & B sont les plus petits de leur raison, par la 24. prop. 7. ils sont premiers entr'eux, & par la 29. prop. 7. C & E seront aussi premiers entr'eux : & par la précédente prop. les trois nombres C, D, E, seront les plus petits en la raison donnée de A à B.

Maintenant, qu'il en faille trouver quatre. Que A multipliant les trois trouvez C, D, E, produise F, G, H, & B multipliant le dernier E fasse I : Je dis que les quatre nombres F, G, H, I, sont continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de A à B. Car d'autant que A multipliant C, D, E a fait F, G, H,

iceux sont en la même raison que C, D, E, c'est-à-dire en la raison de A à B. Derechef, puis que A & B multipliant E ont fait H & I, par la 18. prop. 7. comme A sera à B, ainsi H sera à I : & partant F, G, H, I, seront continuellement proportionnaux en la raison donnée de A à B. Davantage, puis que A & B étans les plus petits de leur raison, sont premiers entr'eux par la 24. prop. 7. aussi les extrêmes F & I seront premiers entr'eux par la 29. prop. 7. attendu que A & B multipliez par eux-mêmes, ont produit C & E, & iceux multipliez par les mêmes A & B, ont produit les extrêmes F & I. Donc par la prop. prec. les quatre nombres F, G, H, I, seront les plus petits de leur raison. Et en cette façon on en trouvera tant que l'on voudra. Nous avons donc trouvé des nombres continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit faire.

C O R O L L A I R E.

Il résulte de cecy que trois nombres continuellement proportionnaux, étans les plus petits de leur raison, les extrêmes seront quarréz : s'il y en a quatre, qu'iceux extrêmes seront Cubes. Car des trois C, D, E, les extrêmes C & E, ont été produits de A & B multipliez par eux-mêmes; & des quatre F, G, H, I, les extrêmes F & I, ont été produits de la multiplication de A & B par leurs quarréz C & E.

Il résulte encore que les extrêmes des nombres continuellement proportionnaux trouvez selon cette prop. sont premiers entr'eux. Car il a été démontré par les 24. & 29. prop. 7. que les extrêmes C, E, & F, I, sont premiers entr'eux.

T H E O R. 2. P R O P. III.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont la même raison : les extrêmes seront premiers entr'eux.

Soient quatre nombres A, B, C, D continuellement proportionnaux, les plus petits de tous ceux qui sont en

la même raison : Je dis que les extrêmes A & D , sont premiers entr'eux.

Car soient trouvez par la 35. prop. 7. les plus petits qui soient en la raison de A à B , sçavoir F & G : ils seront premiers entr'eux par la

23. prop. 7. & comme il a été enseigné en la preced. soient trouvez des nombres continuellement proportionnaux , & les

A 3.			L 8.
		H 4.	
B 12.	F 2.		M 12.
		I 6.	
C 18.	G 3.		N 18.
		K 9.	
D 27.			O 27.

plus petits en la raison de F à G , sçavoir premierement les trois H , I , K ; puis après les quatre L , M , N , O ; & ainsi consecutivement un plus , jusques à ce qu'on en ait autant qu'il y en aura de proposez : il ne faut donc icy que ces quatre L , M , N , O. Or iceux étans les plus petits en la raison de F à G , ils seront égaux aux quatre A , B , C , D , qui sont aussi les plus petits en la même raison. Et comme les extrêmes L & O , sont premiers entr'eux par le corol. de la preced. les extrêmes A & D seront aussi premiers entr'eux. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux , &c. Ce qu'il falloit prouver.

PROBL. 2. PROP. IV.

Estans données tant de raisons qu'on voudra en nombres les plus petits d'icelles raisons ; trouver tant de nombres qu'on voudra les plus petits continuellement proportionnaux selon les raisons données.

Soient données les deux raisons de A à B , & de C à D , aux plus petits termes d'icelles : il faut trouver trois nombres en continuelle proportion , les plus petits de ceux qui sont selon les raisons données.

Soit trouvé par la 36.

p. 7. le plus petit nombre qui soit mesuré par B, & par C, lequel soit F : en apres, soit trouvé G, autant de fois mesuré par A, que F par B : Pareillement H autant de fois mesuré par D que F par C. Je dis que les trois nombres G, F, H sont

A 2.	G 8. L—
B 3.	F 12. M—
C 4.	H 15. N—
D 5.	

continuellement proportionaux, les plus petits qui soient selon les raisons données.

Car d'autant que A mesure autant de fois G, que B mesure F ; & par conséquent A & B multiplians un même nombre (sçavoir celui par lequel ils mesurent G & F) ont produit G & F : par la 18. p. 7. G est à F, en même raison que A à B. Et par même discours F sera à H, comme C à D : Donc G, F, H, sont continuellement proportionaux, selon les raisons données. Mais ils sont aussi les plus petits, selon icelles raisons données : car s'il n'est ainsi, en soient trouvez de plus petits L, M, N, s'il est possible, & qui répondent aux raisons données, comme les trois G, F, H. Or vû que A & B sont les plus petits en leur raison, par la 21. p. 7. ils mesureront également L & M, iceux estans en la même raison, c'est à sçavoir le consequent B, le consequent M : Par même discours C & D mesureront également M & N, sçavoir l'antecedant C l'antecedant M. Parquoy B & C mesurans M ; par la 37. p. 7. F, qui est le plus petit nombre qu'ils mesurent, mesurera aussi M, sçavoir est, le plus grand, le plus petit : ce qui est impossible. Partant les nombres G, F, H, estoient les plus petits selon les raisons données.

Maintenant soient données trois raisons aux plus petits termes A à B, C à D, & F à G, selon lesquelles il faut trouver quatre nombres tels que requiert la proposition.

Soient trouvez les trois nombres I, H, K, comme dessus : ce fait, ou F mesurera K, ou non. S'il le mesureroit, il faudroit prendre L autant de fois mesuré

par G, que K par F : & par la precedente demonstration, il est évident qu'on auroit satisfait. Que si F ne mesure K, soit trouvé O le plus petit nombre mesuré par F, & par K, par la 36. p. 7. Et que G mesure

autant de fois P,

que F mesure O. Item que comme K mesure O, ainsi H mesure N, & I mesure M. Je dis que M, N, O, P sont les quatre nombres continuellement proportionnaux requis.

Car puisque I, H, K mesurent également M, N, O, comme dit est cy-dessus, I sera à H ainsi que M à N, & comme H sera à K, ainsi N à O. Mais il y a mesme raison de I à H que de A à B, & de H à K que de C à D, pour ce que A & B mesurent également iceux I & H, & C, D, également H & K. Donc comme A à B, ainsi M à N; & comme C à D, ainsi N à O; aussi comme F à G, ainsi O à P, à cause que F, G mesurent également O, P. Les quatre nombres M, N, O, P, sont donc continuellement proportionnaux és raisons données. Et qu'ils soient les plus petits, on le démontrera en la mesme façon qu'on a fait cy-dessus de trois nombres.

Or en la mesme maniere sera procédé, si 4, ou davantage de raisons sont données aux plus petits termes. Parquoy estans données tant de raisons qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 3. PROP. V.

Les nombres plans sont l'un à l'autre en la raison composée de leurs costez.

Soient deux nombres plans A & B, les costez de A, soient C & D; & les costez de B, soient E & F. Je dis

A 2.		
B 3.	I 8.	M 16.
C 4.	H 12.	N 24.
D 5.	K 15.	O 30.
F 6.	L —	P 35.
G 7.		

que le plan A est au plan B, en la raison composée de C à E, & de D à F.

Qu'il ne soit ainsi. Que D multiplié par E produise G. Donc D multipliant C & E, produira A & G, qui seront en même raison que C à E, par

A 12.	C 3.
G 8.	D 4.
B 18.	E 2.
	F 9.

la 17. p. 7. Et par même discours E multipliant D & F, produira G & B, qui seront aussi en même raison que D à F. Parquoy les trois nombres A, G, B sont continuellement proportionnaux és raisons de C à E, & de D à F, costez. Mais par la 5. d. 6. la raison de A à B est composée de A à G, & de G à B. Donc la raison du nombre plan A au nombre plan B, sera composée de la raison des costez C à E, & D à F. Parquoy les nombres plans sont l'un à l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 4. PROP. VI.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que le premier ne mesure le second, aussi pas un autre ne mesurera pas un autre.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D, E; & que A premier ne mesure B^{re}. Je dis que pas un autre n'en mesurera pas un autre.

Car premièrement, comme A ne mesure B, ainsi

A 16.	B 24.	C 36.	D 54.	E 81.
F 4.	G 6.	H 9.		

B ne mesurera C; ny C ne mesurera D; ny D, E, d'autant qu'ils sont en même raison: par ainsi aucun d'iceux nombres ne mesure son prochain suivant. Je dis aussi qu'en passant quelqu'un, les extrêmes ne se pourront

mesurer, comme A ne pourra mesurer C. Car ayant trouvé trois nombres F, G, H les plus petits en la raison de A à B, ou de A, B, C par la 35. p. 7. en raison égale A sera à C comme F à H, par la 14. p. 7. & puis que par l'hypothese, A ne mesure B, aussi F ne mesurera G; & partant F ne sera pas l'unité, autrement il mesurerait G, vû que l'unité mesure tout nombre. Et d'autant que par la 3. prop. de ce livre F & H sont nombres premiers, & que F n'est pas l'unité; iceluy F ne mesurera pas H: Mais nous avons démontré que comme A est à C, ainsi F est à H. Donc comme F ne mesure H, aussi A ne mesurera C. Par mesme discours on prouvera que B ne mesurera D, ny C ne mesurera E. Que si on prend quatre nombres les plus petits en la raison de A à B, on démontrera en la mesme maniere que A ne mesurera le quatrième D, ny B un quatrième E, & ainsi des autres. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 5. PROP. VII.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux, & que le premier mesure le dernier, il mesurera aussi le second.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux. A, B, C, D; & que le premier A mesure le dernier D. Je dis qu'il mesurera aussi le second B.

Car par la precedente, si A ne mesuroit B, aussi

pas un autre ne mesurerait pas un autre, & par consequent A ne mesurerait pas D, contre l'hypothese. A mesurera donc B. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

A 3.	B 9.	C 12.	D 24.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux, il en tombera autant entre deux autres, estans en la mesme raison.

Soient les nombres A & B, entre lesquels tombent C & D continuellement proportionnaux : & qu'il y ait telle raison de E à F, que de A à B. Je dis qu'entre E & F se trouveront autant de nombres moyens continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

A 3.	C 9.	D 27.	B 81.
G 1.	H 3.	I 9.	K 27.
E 1.	L 6.	M 18.	F 54.

Car ayant trouvé par la

2. prop. 8. les quatre nombres G, H, I, K, continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de A, C, D, B; en raison égale, comme A sera à B, ou E à F (car c'est la même raison) ainsi G à K par la 14. prop. 7. Mais G & K sont premiers entr'eux par la 3. prop. 8. & les plus petits nombres de leur raison par la 23. prop. 7. & par la 21. prop. 7. ils mesureront également E & F. Donc autant de fois que G & K mesureront E & F; qu'autant de fois H & I mesurent d'autres nombres L & M : tellement que les nombres G, H, I, K, mesurent également les nombres E, L, M, F, par la 9. com. sent. G, H, I, K, multiplians le nombre par lequel ils mesurent E, L, M, F, produisent iceux E, L, M, F, lesquels seront entr'eux comme G, H, I, K, ainsi que nous avons démontré à la 18. prop. 7. Mais G, H, I, K, sont continuellement proportionnaux : donc aussi E, L, M, F, seront continuellement prop. & partant puis que la multitude E, L, M, F, est égale à la multitude A, C, D, B, il tombera autant de moyens proportionnaux entre E & F, qu'entre A & B. Parquoy si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

S C H O L I E.

De cette démonstration appert non seulement, qu'il tombe autant de moyens prop. entre E & F, qu'entre A & B, mais aussi que la proportion des nombres E, L, M, F, est la même que des nombres A, C, D, B. Car il a été démontré que la proportion de E, L, M, F, est la même que celle des nombres G, H, I, K : Mais iceux sont par la construction en la même proportion que A, C, D, B : donc aussi E,

L, M, F, sont en même proportion que A, C, D, B.

Il appert aussi de ce Theoreme, qu'entre nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, ne peut tomber un nombre moyen proportionnel. Car puis que la raison double, és moindres nombres, est trouvée entre le binaire & l'unité; mais la superparticuliere, entre les nombres differens seulement de l'unité; & la superbipartiente, entre les nombres, desquels la difference est le binaire: si entre deux nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, tombe un moyen prop. il en tombera pareillement un (par ce Theor.) entre le binaire & l'unité, ou entre les nombres differens de la seule unité, ou du binaire; c'est à sçavoir entre les plus petits nombres qui ont la même raison que ceux-là; ce qui est impossible. Car il est tout évident qu'entre le binaire & l'unité, ny entre deux nombres differens seulement de l'unité, ne peut tomber aucun nombre moyen prop. Et quant aux nombres differens seulement du binaire, tombe seulement un nombre, qui differe à l'un & l'autre de l'unité: lequel nous démontrerons ne pouvoir être milieu prop. entre iceux. Soient les nombres AB & CD, differens du binaire, entre lesquels tombe le nombre EF moindre que AB de l'unité, mais plus grand que CD, aussi de l'unité. Je dis que EF n'est moyen prop. entre

A 6 G	B	A . . G . B
E 5 H	F	E . H . F
C D		C . D

AB, CD. Car si on dit que comme AB à EF, ainsi EF à CD: étant ôté de AB, le nombre AG égal à EF, afin qu'il reste l'unité GB; & de EF, le nombre EH égal à CD, afin qu'il reste aussi l'unité HF; pareillement comme AB sera à EF, ainsi le retranché AG sera au retranché EH. Donc aussi le reste GB sera au reste HF; c'est-à-dire l'unité à l'unité, comme le tout AB au tout EF, le plus grand au moindre: Ce qui est absurde; dont EF n'est pas moyen prop. entre AB & CD.

Parquoy entre les nombres de raison triple ne peut tomber un nombre moyen prop. Autrement il en tomberoit aussi un entre 3 & 1, les plus petits nombres de la raison triple, qui different entr'eux du binaire: Ce qui est impossible, comme nous venons de démontrer.

Par même raison , ne peut aussi tomber un moyen prop. entre deux nombres de quintuple raison. Car s'il y en tombeoit un , il en tomberoit aussi un (par ce Theor.) entre 5 & 1 , les plus petits nombres de la raison quintuple : ce qui ne se peut faire. Car s'il est possible qu'entre le quinaire AB & l'unité C , tombe un moyen prop. D binaire , ou ternaire ; tellement que AB soit à D , comme D à C : en changeant C sera à D comme D à AB. Et pource que l'unité C mesure D , aussi D mesurera AB. Mais le binaire , ou ternaire D mesure pareillement le senaire AE : donc D mesurera le tout AE , & le retranché AB ; & partant par la 11. com. sent. aussi D mesurera le reste BE unité. Ce qui est absurde. La même absurdité adviendra toujours , si on dit qu'un nombre quaternaire soit moyen prop. entre iceluy quinaire AB , & l'unité C. Il ne tombera donc point de milieu prop. entre 5 & 1. & par consequent entre quelques nombres de raison quintuple.

A B . E
D . . D . . .
C .

THEOR. 7. PROP. IX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux , autant de nombres continuellement proportionnaux qui tomberont entre iceux , autant en tombera-il entre chacun d'iceux , & l'unité.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B , entre lesquels tombent quelques nombres continuellement proportionnaux C & D. Je dis qu'entre chacun d'iceux A , B , & l'u-

nité , il

tombera
autant de
nombres
continuel-
lement

propor-

tionnaux , qu'entre A & B.

A8	C12.	D18.	B27.
	Vnité.		
	E1.	F3.	
G4.	H6.	I9.	
K8.	L12.	M18.	N27.

Car ayant posé l'unité, soient pris E & F, les plus petits nombres qui soient en la raison de A à C, par la 35. prop. 7. puis par la 2. prop. 8. soient trouvez les trois plus petits en la même raison G, H, I: puis les quatre K, L, M, N; & ainsi conséquemment jusques à ce que la multitude des pris soit égale à la multitude A, C, D, B. D'autant que les extrêmes A, B, sont premiers entr'eux, par la 1. prop. 8. A, C, D, B, seront les plus petits en la raison de E à F: Mais leurs égaux en multitude K, L, M, N, sont aussi les plus petits en la même raison par la construction. Donc K, L, M, N, sont égaux à iceux A, C, D, B, chacun au sien, comme K à A, & N à B. Et pource que (comme il appert par la démonstration de la 2. pr. 8.) E multipliant soy-même a produit G; & multipliant G a fait K, par la 7. com. sent. E mesurera G par E; & G iceluy K par le même E: mais par la 5. com. sent. l'unité mesure iceluy E par E. Donc l'unité mesurera également E; & E iceluy G; & G iceluy K: & partant l'unité sera même partie de E, que E de G, & G de K. Donc par la 20. def. 7. l'unité & les nombres E, G, K, sont continuellement proportionnaux. Par même discours l'unité & les trois nombres F, I, N, seront aussi prouvez continuellement proportionnaux. Et puis que tant la multitude E, G, K, que F, I, N, avec l'unité, est égale à la multitude K, L, M, N, ou A, C, D, B; il s'ensuivra qu'entre l'unité & le nombre K ou A, qui luy est égal; & aussi entre l'unité & le nombre N ou B, tomberont autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre les nombres A & B. Parquoy si deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 8. PROP. X.

Autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'unité & chacun de deux nombres proposez; autant en tombera-t'il entre iceux deux nombres.

Soient deux nombres proposez A & B, & qu'entre

l'unité C, & chacun d'iceux, tombent quelques nombres continuellement proportionnaux, comme D & E, entre C & A : Item F & G, entre C & B. Je dis qu'il en tombera aussi deux continuellement proportionnaux entre A & B.

A 8.	I 12.	K 18.	B 27.
E 4.	H 6.	G 9.	
	D 2.	F 3.	
	C 1.		

Car si on vient à multiplier, comme en la 2. prop. 8. pour trouver les trois nombres H, I, K, c'est à sçavoir que H soit le produit de D multiplié par F; I, le produit de D par H : & K, le produit de F par H. Puis que comme C à D, ainsi D à E, & E à A; & que par la 5. com. sent. C unité mesure D, par les unitéz qui sont en D; aussi D mesurera E, par les unitéz qui sont en D; & E mesurera A, par les mêmes unitéz de D; ainsi il est évident que D multiplié par soy-même produit E, & E multiplié par D, a produit A. Par même discours se prouvera que F multiplié par soy-même, a produit G, & que G par F a produit B.

Maintenant, puis que D multiplié par soy-même, & par F a produit E & H, par la 17. prop. 7. comme D à F, ainsi E à H. Pareillement F multiplié par D, & par soy-même, a produit H & G; aussi H sera à G comme D à F: parquoy les trois nombres E, H, G, seront continuellement proportionnaux. Davantage D multipliant E & H, produit A & I; & partant comme E sera à H, ainsi A sera à I, par la 17. prop. 7. & puis que D & F multipliant H, produisent I & K; I sera à K, comme D à F. Par la 18. prop. 7. Par même discours K sera à B, comme H à G, étans les produits de H & G multipliez par F. Parquoy A, I, K, B, sont continuellement proportionnaux; & partant les deux nombres I & K sont tombez en continuelle proportion entre A & B, c'est à sçavoir autant qu'il y en a entre chacun d'iceux A & B, & l'unité C. Parquoy autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'unité, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 9. PROP. XI.

Entre deux nombres quarréz tombe un moyen proportionnel : & le quarré est au quarré en raison doublée du côté au côté.

Soient deux nombres quarréz A & B, desquels les côtez soient C & D. Je dis qu'entre iceux quarréz A & B, tombera un moyen proportionnel : & que le quarré A est au quarré B, en la raison doublée du côté C au côté D.

Car le nombre C multiplié par D, produise E : Et puis que C est le côté de A; iceluy C multiplié par soy-même produit A; & par D fait E : donc comme C à D, ainsi A à E par la 17. prop. 7. Derechef, puis que D multipliant C produit E, & multipliant soy-même fait le quarré B; par la 17. prop. 7. comme C à D, ainsi E à B. Partant E est moyen proportionnel entre A & B.

Pour la seconde partie : puis que A, E, B sont continuellement proportionnaux, A 1. est à B 3. en raison doublée de A 1. à E 2. par la 10. deff. 5. qui est la même raison que de C à D, ainsi qu'il a été démontré cy dessus. Parquoy entre deux nombres quarréz tombe un moyen proportionnel, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 10. PROP. XII.

Entre deux nombres cubes tombent deux moyens proportionnaux : & le cube est au cube en raison triplée du côté au côté.

Soient deux nombres cubes A & B, desquels les côtez soient C & D. Je dis que entre iceux cubes A & B, tomberont deux moyens proportionnaux : & que la raison du cube A au cube B, est la raison triplée du côté C au côté D.

Qu'il

Qu'il ne soit ainsi. Que C se multipliant soy-même produise E ; & D par soy produise F ; mais C & D l'un par l'autre produi-

se G : & iceluy

G multiplié par

l'un & l'autre C

& D, produise H

& I. Or puis que

C multipliant C

& D a fait E & G ; comme C sera à D, ainsi E à G

par la 17. prop. 7. Item puis que D multipliant C & D

a fait G & F ; aussi G sera à F comme C à D : Partant

E, G, F, sont continuellement proportionnaux en la

raison de C à D. Derechef, pource que C multipliant

E fait le cube A, & multipliant G a fait H, par la

même prop. A sera à H, comme E à G, c'est-à-dire

comme C à D. Item puis que D multipliant G a fait

I, & multipliant F est produit le cube B ; par la 17.

prop. 7. I sera à B, comme G à F, c'est-à-dire comme

C à D. Mais par la 18. prop. 7. H est aussi à I, comme

C à D, attendu que C, D, multipliant G, ont fait H

& I : donc A, H, I, B seront continuellement pro-

portionnaux selon la raison de C à D. Partant H & I,

seront deux moyens proportionnaux entre les nombres

cubes A & B.

Quant à la seconde partie, elle est manifeste, car

d'autant que A, H, I, B sont continuellement pro-

portionnaux, A 1. est à B 4^e en raison triplée de A 1.

à H 2^e par la 19. def. 5. Mais comme A est à H, ainsi

C est à D. Donc le cube A est au cube B en raison tri-

plée du côté C au côté D. Parquoy entre deux nombres

cubes, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. II. PROP. XIII.

Si tant de nombres qu'on vaudra sont conti-

nuellement proportionnaux, iceux étans mul-

tipliez chacun par soy, leurs produits seront

aussi continuellement proportionnaux : & si

chacun multiplie encores son produit, les

H h

derniers produits seront aussi continuellement proportionnaux : & cela adviendra toujours environ les extrêmes.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C, lesquels multipliez chacun par soy-même, produisent D, E, F; & que les mêmes A, B, C, multiplians chacun son produit fassent G, H, I, & ainsi continuellement. Je dis que D, E, F, & G, H, I, sont continuellement proportionnaux.

		A ₂ .	B ₄ .	C ₈ .		
	D ₄ .	N ₈ .	E ₁₆ .	O ₃₂ .	F ₆₄ .	
G ₈ .	P ₁₆ .	Q ₃₂ .	H ₆₄ .	R ₁₂₈ .	S ₂₅₆ .	I ₅₁₂ .

Qu'il ne soit ainsi, que N soit le produit de A multiplié par B : & O celui de B par C. Pareillement que A multipliant N, E fasse P & Q : mais B multipliant O, F produise R, S. Donc par la 17. prop. 7. A multipliant soy-même, & B, les produits D & N seront en la même raison de A à B : & par même discours B multipliant A & soy-même, les produits N & E seront aussi en la même raison de A à B, & ainsi des autres : Partant D, N, E, O, F, seront continuellement proportionnaux en la raison de A à B : par ainsi D, N, E; & E, O, F, sont continuellement proportionnaux en une même raison ; & partant en raison égale, comme D sera à E, ainsi E à F : parquoy D, E, F, seront continuellement proportionnaux.

Pareillement d'autant que A multipliant D, N, E a fait G, P, Q; par ce que nous avons démontré à la 18. prop. 7. G, P, Q seront entr'eux, comme les proportionnaux D, N, E; c'est-à-dire comme A à B. Item pource que A & B multiplians E ont produit Q & H, aussi par la 18. prop. 7. comme A sera à B, ainsi Q à H. Donc G, P, Q, H, sont proportionnaux en la raison de A à B. Par mesme discours H, R, S, I, seront prouvez proportionnaux en la même raison de A à B : & partant en raison égale, comme G sera à H, ainsi H à I : parquoy G, H, I seront continuellement proportionnaux. S'il

7 à donc tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 12. PROP. XIV.

Si un nombre quarré mesure un nombre quarré; aussi le costé mesurera le costé : que si le costé mesure le costé, aussi le quarré mesurera le quarré.

Soit le nombre quarré A qui mesure le nombre quarré B; & d'iceux quarrés les costez soient C & D. Je dis en premier lieu que le costé C mesurera aussi le costé D.

Car ayant multiplié C par D, il est évident par la démonstration de la 11. prop. 8. que le produit E est moyen

proport. entre A & B, en la raison de C à D : mais de ces trois nombres A, E, B, le premier A mesure le dernier B : donc par la 7. prop. 8. il mesurera aussi le second E. Parquoy puis que comme A à E, ainsi C à D : aussi le costé C mesurera le costé D.

A 4.	E 12.	B 36.
C 2.	D 6.	

Je dis en second lieu, que si le costé C mesure le costé D, aussi le quarré A mesurera le quarré B. Car comme dessus A, E & B seront continuellement proportionnaux en la raison de C à D : Et puisque C mesure D, aussi A mesurera E, & E mesurera B, & par conséquent A mesurera aussi B, car qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré, par la 11. com. sent. Parquoy si un nombre quarré mesure un nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si un nombre cube mesure un nombre cube : aussi le costé mesurera le costé : & si le costé mesure le costé ; aussi le cube mesurera le cube.

Soit un nombre cube A, qui mesure un autre nombre cube B, & d'iceux cubes les costez soient C & D. Je dis premierement que le costé C mesurera aussi le costé D.

Car que chaque côté C, D multipliant soy-même
fasse E, F, mais se multipliant l'un l'autre fassent G, &
multipliant de-

rechef G, pro-

duisent H, I.

Il est évident

par la démon-

stration de la

12. prop. 8. que

tant E, G, F, que A, H, I, B, sont continuellement
proportionaux en la raison de C à D. Et puis que par
l'hypothese A 1. mesure B dernier, il mesurera aussi
H 2^e, par la 7. prop. 8. Mais A étant à H, comme C
à D, aussi le côté C mesurera le côté D.

Secondement, que le côté C mesure le côté D : Je dis
que le cube A mesurera le cube B. Car comme il a été
dit cy-dessus A, H, I, B, seront continuellement pro-
portionaux en la raison de C à D : Parquoy le côté C
mesurant le côté D, aussi le cube A mesurera son pro-
chain moyen proport. H, lequel mesurera l'autre moyen
proport. I, & iceluy l'autre cube B ; & par consequent
le cube A mesurera l'autre cube B par la 11. com. sent.
Si donc un nombre cube, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si un nombre quarré ne mesure un nombre
quarré, aussi le côté ne mesurera le côté ;
que si le côté ne mesure le côté, aussi le
quarré ne mesurera le quarré.

Soient les nombres quarez A & B, desquels les côtez
sont C & D ; mais que le quarré A ne mesure le quarré B :
Je dis premièrement que le côté C ne mesurera pas le
côté D.

Car par la 14. prop. de ce livre,
si ledit côté C mesuroit le côté
D, aussi le quarré A mesureroit
le quarré B, contre l'hypothese.

Secondement que le côté C ne me-

sure pas le côté D : Je dis que le quarré A ne mesurera

A 8.	H 24.	I 72.	B 216.
E 4.	G 12.	F 36.	
C 2.	D 6.		

A 16.	B 81.
C 4.	D 9.

pas aussi le quarré B. Ceci est aussi manifeste, car si le quarré A mesureroit le quarré B, aussi le côté C mesureroit le côté D par la susdite 14. prop. 8. contre l'hypothese. Si donc un nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 15. PROP. XVII.

Si un nombre cube ne mesure un nombre cube, aussi le côté ne mesurera le côté : que si le côté ne mesure le côté, aussi le cube ne mesurera le cube.

Soient les nombres cubes A & B, dont les côtez sont C & D; & que A ne mesure B : Je dis que le côté C ne mesure pas aussi le côté D : & davantage que si le côté C ne mesure pas le côté D, aussi le cube A ne mesurera pas le cube B.

Cette démonstration se fait par l'impossible de la 15. prop. 8. Car par icelle, si le côté mesuroit le côté, aussi le cube mesureroit le cube, ce qui est contre l'hypothese.

Et pour le second : Si le cube mesureroit le cube, aussi le côté mesureroit le côté, par la susdite 15. prop. 8. ce qui est aussi contre l'hypothese. Parquoy si un nombre cube ne mesure un nombre cube, &c. Ce qu'il falloit prouver.

A 8.	B 27.
C 2.	D 3.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Entre deux nombres plans semblables, il y a un moyen proportionnel : & le plan est au plan en raison doublée des côtez de semblable raison.

Soient deux nombres plans semblables A & B, & leurs côtez soient C D, & E, F. Je dis qu'entre iceux plans A & B se trouvera un moyen proportionnel ; & que A est à B en raison doublée de C à E, ou de D à F, côtez de même raison.

A 12.	G 18.	B 27.
C 6.	D 2.	E 9. F 3.

Car puis que les plans

A & B sont semblables, par la 21. def. 7. C sera à D comme E à F ; & si A sera le produit de C par D : Item B le produit de E par F, par la 17. def. 7. Maintenant que D multipliant E produise G : par la 17. prop. 7. puis que D multipliant C & E produit A & G : A sera à G, comme C à E, ou D à F (car puis que comme C à D, ainsi E à F, en permutant, comme C à E, ainsi D à F.) Item E multipliant D & F, produit G & B : partant iceux G & B seront l'un à l'autre comme D à F ; ainsi A, G, B, seront continuellement proportionnaux en la raison de C à E, & partant G sera un moyen proportionnel entre A & B.

Quant à la seconde partie, elle est évidente : car puis que A, G, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de C à E : par la 10. def. 5. A est à B en raison doublée de A à G, qui est la même raison que de C à E, ou de D à F, côtez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres plans semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Entre deux nombres solides semblables, tombent deux moyens proportionnaux ; & le solide est au solide en raison triplée des côtez de semblable raison.

Soient deux nombres solides semblables A & B ; & de A les côtez soient C, D, E, mais ceux de B soient F, G, H.

Je dis qu'entre A & B, on trouvera deux moyens proportionnaux, & que

A 30.	M 60.	N 120.	B 240.
I 6.	L 12.	K 24.	
C 2.	D 3.	E 5.	F 4. G 6. H 10.

A est à B en raison triplée de C à F, ou de D à G, ou E à H, côtez de même raison.

Car I soit le produit de C multiplié par D : K le produit de F par G : L le produit de F par D, & finalement M & N, soient les produits de L par E & H.

Maintenant puis que par la 17. def. 7. les côtez C, D, E, sont proportionnaux aux côtez F, G, H : en permutant, ils seront aussi proportion. c'est-à-dire que comme C sera à F, ainsi D sera à G, & E à H. Et puis que D multipliant C & F, a produit I & L, par la 17. prop. 7. I sera à L comme C à F, c'est-à-dire comme D à G, ou E à H. Semblablement F multipliant D & G, a produit I & K; parquoy I sera à K comme D à G : & parrant I, L, K, sont continuellement proportionnaux en la raison de D à G, ou C à F, ou E à H. Pareillement puis que le solide A, est le produit de la multiplication des trois nombres C, D, E : & I, le produit de C par D : aussi A sera le produit de I par E : Item le solide B étant produit de la multiplication des trois nombres F, G, H : & K le produit de F en G : aussi B sera le produit de K par H. Donc puis que par la 17. prop. 7. E multipliant I & L, produit A & M en la raison de I à L : & semblablement que L multipliant E & H, produit M & N en la raison de E à H, qui est la même que de I à L : aussi H multipliant L & K, les produits N & B seront en la raison de L à K, qui est la même que de I à L. Et partant les quatre nombres A, M, N, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de I à L, c'est-à-dire de C à F : & M, N seront deux moyens proportionnaux entre A & B.

Pour la seconde partie, elle est évidente : car puis que les quatre nombres A, M, N, B, ont été prouvez continuellement proportionnaux en la raison de C à F, par la 10. def. 5. A est à B en raison triplée de A à M : Mais A est à M, comme C à F, ou D à G, ou E à H : donc A sera à B en raison triplée de C à F, ou D à G, ou E à H, côtez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres solides semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si entre deux nombres, tombe un moyen proportionnel : iceux seront nombres plans semblables.

Soient deux nombres A & B, entre lesquels tombe

un moyen proportionnel C. Je dis que A & B sont nombres plans semblables.

Car ayant pris D & E, les plus petits termes en la raison de A, C, B : par la 21. prop. 7. iceux D & E mesureront également A & C;

A	12.	C	18.	B	27.
D	2.	E	3.	F	6.
G	9.				

qu'ils les mesurent par F : Ils mesureront aussi également C & B, qui sont en la même raison : qu'ils les mesurent par G. Donc F multipliant D & E, sera produit A & C par la 9. com. sent. Item G multipliant les mêmes D & E, seront produits C & B. Vû donc que E multipliant F & G a fait C & B ; comme C sera à B, ainsi F à G par la 17. prop. 7. Mais comme C est à B, ainsi étoit D à E. Donc comme D sera à E, ainsi F sera à G ; & en permutant comme D sera à F, ainsi E à G. Et puis que F multipliant D a fait A, iceluy A sera un plan duquel les côtéz sont D, F. Item pource que G multipliant E a fait B ; B sera le plan duquel E & G sont les côtéz. Mais ces côtéz ont été démontrez proportionnaux, c'est-à-dire D être à F, comme E à G. Donc par la 21. def. 7. A & B seront plans semblables. Parquoy si entre deux nombres tombe un moyen proportionnel, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si entre deux nombres, tombent deux moyens continuellement proportionnaux ; iceux seront nombres solides semblables.

Soient deux nombres A & B, entre lesquels tombent deux moyens continuellement proportionnaux C & D. Je dis que A & B sont nombres solides semblables.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouvez par la 2. prop. 8. les trois nombres E, F, G, les plus petits en la raison de A, C, D, B. Veu donc qu'entre E & G tombe un moyen proportionnel F, par la preced. pro. E & G seront plans semblables : Soient

A	16.	C	14.	D	36.	B	54.
E	4.	F	6.	G	9.		
H	12.	M	4.	X	3.	L	3.
N	6.						

leurs côtez H, I ; & K, L, lesquels seront proportionnaux par la 21. def. 7. & puisque E, F, G sont les plus petits en la raison de A, C, D, ils les mesureront également par la 21. prop. 7. soit selon le nombre M: c'est-à-dire que E, F, G, étans multipliez par M produisent A, C, D. Item par le même discours E, F, G, mesureront également les trois nombres C, D, B, chacun le sien: soit selon le nombre N, c'est à dire, que N multipliant E, F, G, produise C, D, B. Il est donc évident, que A & B sont nombres solides, desquels les côtez sont H, I, M, & K, L, N. Mais d'autant que M & N multiplians F, produisent C & D, par la 18. prop. 7. M sera à N en la raison de C à D, & C est à D en même raison que E à F par la 17. prop. 7. pource que N multipliant E & F a produit iceux C & D; mais aussi E est à F en la même raison que H à K, ou I à L. Donc aussi H sera à K, ou I à L, comme M à N; & en permutant, H sera à I, comme K à L; & I à M comme L à N: & partant les côtez H, I, M sont proportionnaux aux côtez K, L, N; & par la 21. def. 7. A & B seront nombres solides semblables: Parquoy si entre deux nombres tombent, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si trois nombres sont continuellement proportionnaux, & que le premier soit quarré; le troisiéme sera aussi quarré.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C, desquels le premier A soit quarré: Je dis que le troisiéme C est aussi quarré.

Car puisque entre A & C tombe un moyen proportionnel, par la 20. prop. de ce livre, ils seront plans semblables; & partant l'un d'iceux étant quarré, aussi sera l'autre.

—————		
A 4.	B 6.	C 9.
—————		

Si donc trois nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si quatre nombres sont continuellement proportionnaux, & que le premier soit cube, aussi le quart sera cube.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux, A, B, C & D, le premier desquels A soit cube: Je dis que le quatrième D est aussi cube.

Car puisque entre A & D tombent deux moyens proportionnaux B & C, par la 21. prop. de ce livre, iceux

A 8.	B 12.	C 18.	D 27.

A & D seront solides semblables: mais l'un est cube, & partant aussi sera l'autre. Parquoy si quatre nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré; & que l'un d'iceux soit quarré, aussi sera l'autre.

Soient deux nombres A & B, lesquels soient entr'eux, comme le quarré C au quarré D, & soit A quarré. Je dis que B est aussi quarré.

Car puisque A est à B comme C à D; & par la 11. prop. 8. il tombe entre C & D, un moyen proportionnel, sçavoir est E; il en tombera aussi un

A 16.	F 24.	B 36.
C 4.	E 6.	D 9.

entre A & B par la 8. prop. 8. & soit F. Vû donc que les trois nombres A, F, B, sont continuellement proportionnaux, & le premier A est quarré; aussi par la 22. prop. 8. le troisième B sera quarré. Parquoy si quatre

nombre font continuellement proportionnaux , &c.
Ce qu'il falloit prouver.

C O R O L L A I R E.

Il appert des choses cy-dessus dites , que la raison de quelque nombre quarré que ce soit à quelconque nombre non quarré , ne peut être exhibée en deux nombres quarez : Car si elle y estoit exhibée , par la 24. prop. 8. les deux premiers nombres ayans la même raison que les quarez de la raison exhibée seroient aussi quarez puis que l'un est posé quarré. Ce qui est absurde : car l'un est posé non quarré. D'où vient que les nombres ayant la raison double , ne sont comme nombre quarré à nombre quarré. Car tous ces nombres cy 4. 8. 16. 32. &c. seroient quarez ; d'autant que 4 estant quarré , par la 24. prop. 8. aussi 8 seroit quarré : donc aussi 16 & 32, &c. Ce qui est absurde. Car entre 4 & 8 ; & entre 8 & 16 ; & entre 16 & 32, &c. tomberoit un moyen proportionnel , s'ils estoient quarez , par la 11. prop. 8. & nous avons démontré au Scholie de la 8. prop. 8. qu'il ne peut tomber de moyen proportionnel entre quelconques nombres de la raison double.

Semblablement les nombres en raison quintuple , ne sont aussi comme nombre quarré à nombre quarré. Car s'ils y estoient , par la 11. prop. 8. il tomberoit entre iceux un milieu proportionnel : donc aussi entre 5 & 1, les plus petits nombres de la raison quintuple par la 8. prop. 8. Ce qui est impossible , comme nous avons démontré au Scholie de la même proposition.

T H E O R. 23. P R O P. XXV.

Si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube , & que l'un d'iceux soit cube , aussi sera l'autre.

Que A soit à B , comme le cube C au cube D , & que A soit cube : Je dis que B est aussi cube.

A 8.	G 12.	H 18.	B 27.
C 64.	E 96.	F 144.	D 216.

Car puisque A est à B comme C à D , il tombera deux moyens proportion-

naux entre les deux cubes C & D par la 12. prop. de ce livre, lesquels soient E & F : Mais par la 8. prop. 8. il en tombera aussi deux entre A & B, & soient iceux G & H. Veu donc que les quatre nombres A, G, H, B sont continuellement proportionnaux, & que le premier A est cube, aussi sera le quatrième B par la 23. prop. 8. Parquoy si deux nombres sont l'un à l'autre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il appert aussi des choses cy-dessus, que la raison de quelques nombre cube que ce soit à quelconque nombre non cube, ne se peut exhiber par deux nombres cubes.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Les nombres plans semblables, sont l'un à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré.

Soient deux nombres plans semblables A & B. Je dis que A sera à B comme nombre quarré à nombre quarré.

Car par la 18. prop. 8. il tombera entre A & B un moyen prop. & soit C : si donc on prend les trois nombres D, E, F, les plus petits en la raison continuë de A,

A 20.	C 30.	B 45.
D 4.	E 6.	F 9.

C, B, les extrêmes D & F seront quarez par le corol. de la 2. prop. 8. Parquoy puis qu'en raison égale A est à B, comme D à F, il est manifeste que A est à B comme nombre quarré à nombre quarré, c'est à sçavoir comme le nombre quarré D au nombre quarré F. Parquoy les nombres plans semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Clavius a démontré après Commandin la converse de cette proposition c'est à sçavoir :

Que les nombres qui sont l'un à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré, sont plans semblables.

Car les nombres A & B étans entr'eux, comme les quarréz D & F, par la 11. prop. 8. Il tombera un moyen prop. entre iceux quarréz : & aussi un entre A & B, par la 8. prop. 8. & partant A & B sont plans semblables.

Et par cecy est manifeste que les nombres plans qui ne sont semblables, ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Les nombres solides semblables, sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube.

Soient deux nombres solides semblables A, B. Je dis que A sera à B, comme nombre cube à nombre cube.

Car par la 16. prop.

8. entre A & B tomberont deux moyens proportionnaux, & soient iceux C & D. Que si on prend les plus petits

A 16.	C 24.	D 36.	B 54.
E 8.	F 12.	G 18.	H 27.

termes de la raison de A à C, & qu'en la raison d'iceux on trouve, par la 2. prop. 8. les quatre nombres E, F, G, H, en continuelle proportion, les extrêmes E & H seront cubes par le corol. de la 2. prop. 8. & en raison égale comme E à H, ainsi A à B : Parquoy les nombres solides semblables sont l'un à l'autre, &c. Ce qui étoit à démontrer.

SCHOLIE.

Clavius démontre aussi après Commandin la converse de cette proposition sçavoir est:

Que les nombres qui sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube, sont solides semblables.

Car les nombres A & B, étans entr'eux, comme les cubes E & H, par la 12. prop. 8. il tombera deux moyens prop.

Car que chaque côté C, D multipliant soy-même fasse E, F, mais se multipliant l'un l'autre fassent G, & multipliant de-

rechef G, pro-

duisent H, I.

Il est évident

par la démon-

stration de la

12. prop. 8. que

tant E, G, F, que A, H, I, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de C à D. Et puis que par l'hypothese A 1. mesure B dernier, il mesurera aussi H 2^e, par la 7. prop. 8. Mais A étant à H, comme C à D, aussi le côté C mesurera le côté D.

Secondement, que le côté C mesure le côté D : Je dis que le cube A mesurera le cube B. Car comme il a été dit cy-dessus A, H, I, B, seront continuellement proportionnaux en la raison de C à D : Parquoy le côté C mesurant le côté D, aussi le cube A mesurera son prochain moyen proport. H, lequel mesurera l'autre moyen proport. I, & iceluy l'autre cube B ; & par consequent le cube A mesurera l'autre cube B par la 11. com. sent. Si donc un nombre cube, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si un nombre quarré ne mesure un nombre quarré, aussi le côté ne mesurera le côté ; que si le côté ne mesure le côté, aussi le quarré ne mesurera le quarré.

Soient les nombres quarez A & B, desquels les côtez sont C & D ; mais que le quarré A ne mesure le quarré B : Je dis premièrement que le côté C ne mesurera pas le côté D.

Car par la 14. prop. de ce livre, si ledit côté C mesuroit le côté D, aussi le quarré A mesureroit le quarré B, contre l'hypothese.

Secondement que le côté C ne me-

sure pas le côté D : Je dis que le quarré A ne mesurera

A 8.	H 24.	I 72.	B 216.
E 4.	G 12.	F 36.	
C 2.	D 6.		

A 16.	B 81.
C 4.	D 9.

pas aussi le quarré B. Ceci est aussi manifeste, car si le quarré A mesuroit le quarré B, aussi le côté C mesurerait le côté D par la susdite 14. prop. 8. contre l'hypothese. Si donc un nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 15. PROP. XVII.

Si un nombre cube ne mesure un nombre cube, aussi le côté ne mesurera le côté : que si le côté ne mesure le côté, aussi le cube ne mesurera le cube.

Soient les nombres cubes A & B, dont les côtez sont C & D; & que A ne mesure B : Je dis que le côté C ne mesure pas aussi le côté D : & davantage que si le côté C ne mesure pas le côté D, aussi le cube A ne mesurera pas le cube B.

Cette démonstration se fait par l'impossible de la 15. prop. 8. Car par icelle, si le côté mesuroit le côté, aussi le cube mesurerait le cube, ce qui est contre l'hypothese.

A 8.	-	B 27.
C 2.		D 3.

Et pour le second ; Si le cube mesu-

roit le cube, aussi le côté mesurerait le côté, par la susdite 15. prop. 8. ce qui est aussi contre l'hypothese. Parquoy si un nombre cube ne mesure un nombre cube, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Entre deux nombres plans semblables, il y a un moyen proportionnel : & le plan est au plan en raison doublée des côtez de semblable raison.

Soient deux nombres plans semblables A & B, & leurs côtez soient C D, & E, F. Je dis qu'entre iceux plans A & B se trouvera un moyen proportionnel ; & que A est à B en raison doublée de C à E, ou de D à F, côtez de même raison.

A 12.	G 18.	B 27.
C 6.	D 2.	E 9.
	F 3.	

Car puis que les plans

A & B sont semblables, par la 21. def. 7. C sera à D comme E à F ; & si A sera le produit de C par D : Item B le produit de E par F, par la 17. def. 7. Maintenant que D multipliant E produise G : par la 17. prop. 7. puis que D multipliant C & E produit A & G : A sera à G, comme C à E, ou D à F (car puis que comme C à D, ainsi E à F, en permutant, comme C à E, ainsi D à F.) Item E multipliant D & F, produit G & B : partant iceux G & B seront l'un à l'autre comme D à F ; ainsi A, G, B, seront continuellement proportionnaux en la raison de C à E, & partant G sera un moyen proportionnel entre A & B.

Quant à la seconde partie, elle est évidente : car puis que A, G, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de C à E : par la 10. def. 5. A est à B en raison doublée de A à G, qui est la même raison que de C à E, ou de D à F, côtez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres plans semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Entre deux nombres solides semblables, tombent deux moyens proportionnaux ; & le solide est au solide en raison triplée des côtez de semblable raison.

Soient deux nombres solides semblables A & B ; & de A les côtez soient C, D, E, mais ceux de B soient F, G, H.

Je dis qu'entre A & B, on trouvera deux moyens proportionnaux, & que

A 30.	M 60.	N 120.	B 240.
I 6.	L 12.	K 24.	
C 2.	D 3.	E 5.	F 4. G 6. H 10.

A est à B en raison triplée de C à F, ou de D à G, ou E à H, côtez de même raison.

Car I soit le produit de C multiplié par D : K le produit de F par G : L le produit de E par D, & finalement M & N, soient les produits de L par B & H.

Maintenant puis que par la 17. def. 7. les côtez C, D, E, sont proportionnaux aux côtez F, G, H : en permutant, ils seront aussi proportion. c'est-à-dire que comme C sera à F, ainsi D sera à G, & E à H. Et puis que D multipliant C & F, a produit I & L, par la 17. prop. 7. I sera à L comme C à F, c'est-à-dire comme D à G, ou E à H. Semblablement F multipliant D & G, a produit I & K; parquoy I sera à K comme D à G : & partant I, L, k, sont continuellement proportionnaux en la raison de D à G, ou C à F, ou E à H. Pareillement puis que le solide A, est le produit de la multiplication des trois nombres C, D, E : & I, le produit de C par D : aussi A sera le produit de I par E. Item le solide B étant produit de la multiplication des trois nombres F, G, H : & K le produit de F en G : aussi B sera le produit de K par H. Donc puis que par la 17. prop. 7. E multipliant I & L, produit A & M en la raison de I à L : & semblablement que L multipliant E & H, produit M & N en la raison de E à H, qui est la même que de I à L : aussi H multipliant L & K, les produits N & B seront en la raison de L à K, qui est la même que de I à L. Et partant les quatre nombres A, M, N, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de I à L, c'est-à-dire de C à F : & M, N seront deux moyens proportionnaux entre A & B.

Pour la seconde partie, elle est évidente : car puis que les quatre nombres A, M, N, B, ont été prouvez continuellement proportionnaux en la raison de C à F, par la 10. def. 5. A est à B en raison triplée de A à M : Mais A est à M, comme C à F, ou D à G, ou E à H : donc A sera à B en raison triplée de C à F, ou D à G, ou E à H, côtez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres solides semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si entre deux nombres, tombe un moyen proportionnel : iceux seront nombres plans semblables.

Soient deux nombres A & B, entre lesquels tombe

H h 4

un moyen proportionnel C. Je dis que A & B sont nombres plans semblables.

Car ayant pris D & E, les plus petits termes en la raison de A, C, B : par la 21. prop. 7. iceux D & E mesureront également A & C;

A 12.	C 18.	B 27.
D 2.	E 3.	F 6. G 9.

qu'ils les mesurent par F : Ils mesureront aussi également C & B, qui sont en la même raison : qu'ils les mesurent par G. Donc F multipliant D & E, sera produit A & C par la 9. com. sent. Item G multipliant les mêmes D & E, seront produits C & B. Vû donc que E multipliant F & G a fait C & B; comme C sera à B, ainsi F à G par la 17. prop. 7. Mais comme C est à B, ainsi étoit D à E. Donc comme D sera à E, ainsi F sera à G; & en permutant comme D sera à F, ainsi E à G. Et puis que F multipliant D a fait A, iceluy A sera un plan duquel les côtez sont D, F. Item pource que G multipliant E a fait B; B sera le plan duquel E & G sont les côtez. Mais ces côtez ont été démontrez proportionnaux, c'est-à-dire D être à F, comme E à G. Donc par la 21. def. 7. A & B seront plans semblables. Parquoy si entre deux nombres tombe un moyen proportionnel, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si entre deux nombres, tombent deux moyens continuellement proportionnaux; iceux seront nombres solides semblables.

Soient deux nombres A & B, entre lesquels tombent deux moyens continuellement proportionnaux C & D. Je dis que A & B sont nombres solides semblables.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouvez par la 2. prop. 8. les trois nombres E, F, G, les plus petits en la raison de A, C, D, B. Veudonc qu'entre E & G tombe un moyen proportionnel F, par la preced. pro. E & G seront plans semblables: Soient

A 16.	C 24.	D 36.	B 54.
E 4.	F 6.	G 9.	
H 12.	I 12.	M 4.	X 3. L 3. N 6.

leurs côtez H, I ; & K, L, lesquels seront proportion-
 naux par la 21. def. 7. & puisque E, F, G sont les plus pe-
 tits en la raison de A, C, D, ils les mesureront également
 par la 21. prop. 7. soit selon le nombre M: c'est-à-dire que
 E, F, G, étans multipliez par M produisent A, C, D.
 Item par le même discours E, F, G, mesureront éga-
 lement les trois nombres C, D, B, chacun le sien: soit
 selon le nombre N, c'est à dire, que N multipliant E, F,
 G, produise C, D, B. Il est donc évident, que A & B sont
 nombres solides, desquels les côtez sont H, I, M, &
 K, L, N. Mais d'autant que M & N multiplians F, pro-
 duisent C & D, par la 18. prop. 7. M sera à N en la rai-
 son de C à D, & C est à D en même raison que E à F par
 la 17. prop. 7. pource que N multipliant E & F a produit
 iceux C & D; mais aussi E est à F en la même raison que
 H à K, ou I à L. Donc aussi H sera à K, ou I à L, com-
 me M à N; & en permutant, H sera à I, comme K à L;
 & I à M comme L à N: & partant les côtez H, I, M sont
 proportionnaux aux côtez K, L, N; & par la 21. def. 7,
 A & B seront nombres solides semblables: Parquoy si en-
 tre deux nombres tombent, &c. Ce qu'il falloit prou-
 ver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si trois nombres sont continuellement propor-
 tionnaux, & que le premier soit quarré; le
 troisième sera aussi quarré.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux
 A, B, C, desquels le premier A soit quarré: Je dis
 que le troisième C est aussi quarré.

Car puisque entre A & C
 tombe un moyen propor-
 tion-
 nel, par la 20. prop. de ce
 livre, ils seront plans sembla-
 bles; & partant l'un d'iceux
 étant quarré, aussi sera l'autre.

—————		
A 4.	B 6.	C 9.
—————		

Si donc trois nombres sont continuellement propor-
 tionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si quatre nombres sont continuellement proportionnaux, & que le premier soit cube, aussi le quart sera cube.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux, A, B, C & D, le premier desquels A soit cube: Je dis que le quatrième D est aussi cube.

Car puisque entre A & D tombent deux moyens proportionnaux B & C, par la 21. prop. de ce livre, iceux

A 8.	B 42.	C 18.	D 27.

A & D seront solides semblables: mais l'un est cube, & partant aussi sera l'autre. Parquoy si quatre nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré; & que l'un d'iceux soit quarré, aussi sera l'autre.

Soient deux nombres A & B, lesquels soient entr'eux, comme le quarré C au quarré D, & soit A quarré. Je dis que B est aussi quarré.

Car puisque A est à B comme C à D; & par la 11. prop. 8. il tombe entre C & D, un moyen proportionnel, sçavoir est E; il en tombera aussi un

A 16.	F 24.	B 36.
C 4.	E 6.	D 9.

entre A & B par la 8. prop. 8. & soit F. Vû donc que les trois nombres A, F, B, sont continuellement proportionnaux, & le premier A est quarré; aussi par la 22. prop. 8. le troisième B sera quarré. Parquoy si quatre

ombres sont continuellement proportionnaux , &c.
Ce qu'il falloit prouver.

C O R O L L A I R E.

Il appert des choses cy-dessus dites , que la raison de quelque nombre quarré que ce soit à quelconque nombre non quarré , ne peut être exhibée en deux nombres quarez : Car si elle y estoit exhibée , par la 24. prop. 8. les deux premiers nombres ayans la même raison que les quarez de la raison exhibée seroient aussi quarez , puis que l'un est posé quarré. Ce qui est absurde : car l'un est posé non quarré. D'où vient que les nombres ayant la raison double , ne sont comme nombre quarré à nombre quarré. Car tous ces nombres cy 4. 8. 16. 32. &c. seroient quarez ; d'autant que 4 estant quarré , par la 24. prop. 8. aussi 8 seroit quarré : donc aussi 16 & 32, &c. Ce qui est absurde. Car entre 4 & 8 ; & entre 8 & 16 ; & entre 16 & 32, &c. tomberoit un moyen proportionnel , s'ils estoient quarez , par la 11. prop. 8. & nous avons démontré au Scholie de la 8. prop. 8. qu'il ne peut tomber de moyen proportionnel entre quelconques nombres de la raison double.

• Semblablement les nombres en raison quintuple , ne sont aussi comme nombre quarré à nombre quarré. Car s'ils y estoient , par la 11. prop. 8. il tomberoit entre iceux un milieu proportionnel : donc aussi entre 5 & 1, les plus petits nombres de la raison quintuple par la 8. prop. 8. Ce qui est impossible , comme nous avons démontré au Scholie de la même proposition.

T H E O R. 23. P R O P. XXV.

Si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube , & que l'un d'iceux soit cube , aussi sera l'autre.

Que A soit à B , comme le cube C au cube D , & que A soit cube : Je dis que B est aussi cube.

A 8.	G 12.	H 18.	B 27.
C 64.	E 96.	F 144.	D 216.

Car puisque A est à B comme C à D , il tombera deux moyens proportion-

naux entre les deux cubes C & D par la 12. prop. de ce livre, lesquels soient E & F : Mais par la 8. prop. 8. il en tombera aussi deux entre A & B, & soient iceux G & H, Veu donc que les quatre nombres A, G, H, B sont continuellement proportionnaux, & que le premier A est cube, aussi sera le quatrième B par la 23. prop. 8. Parquoy si deux nombres sont. l'un à l'autre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

Il appert aussi des choses cy-dessus, que la raison de quelque nombre cube que ce soit à quelque nombre non cube, ne se peut exhiber par deux nombres cubes.

T H E O R. 24. P R O P. XXVI.

Les nombres plans semblables, sont l'un à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré.

Soient deux nombres plans semblables A & B. Je dis que A sera à B comme nombre quarré à nombre quarré.

Car par la 18. prop. 8. il tombera entre A & B un moyen prop. & soit C : si donc on prend les trois nombres D, E, F, les plus petits en la raison continuë de A,

A 20.	C 30.	B 45.
D 4.	E 6.	F 9.

C, B, les extrêmes D & F seront quarez par le corol. de la 2. prop. 8. Parquoy puis qu'en raison égale A est à B, comme D à F, il est manifeste que A est à B comme nombre quarré à nombre quarré, c'est à sçavoir comme le nombre quarré D au nombre quarré F. Parquoy les nombres plans semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Clavius a démontré après Commandin la converse de cette proposition c'est à sçavoir :

Que les nombres qui sont l'un à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré, sont plans semblables.

Car les nombres A & B étans entr'eux, comme les quarréz D & F, par la 11. prop. 8. Il tombera un moyen prop. entre iceux quarréz : & aussi un entre A & B, par la 8. prop. 8. & partant A & B sont plans semblables.

Et par cecy est manifeste que les nombres plans qui ne sont semblables, ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Les nombres solides semblables, sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube.

Soient deux nombres solides semblables A, B. Je dis que A sera à B, comme nombre cube à nombre cube.

Car par la 16. prop.

8. entre A & B tomberont deux moyens proportionnaux, & soient iceux C & D. Que si on prend les plus petits

A 16.	C 24.	D 36.	B 54.
E 8.	F 12.	G 18.	H 27.

termes de la raison de A à C, & qu'en la raison d'iceux on trouve, par la 2. prop. 8. les quatre nombres E, F, G, H, en continuelle proportion, les extrêmes E & H seront cubes par le corol. de la 2. prop. 8. & en raison égale comme E à H, ainsi A à B : Parquoy les nombres solides semblables sont l'un à l'autre, &c. Ce qui étoit à démontrer.

SCHOLIE.

Clavius démontre aussi après Commandin la converse de cette proposition sçavoir est :

Que les nombres qui sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube, sont solides semblables.

Car les nombres A & B, étans entr'eux, comme les cubes E & H, par la 12. prop. 8. il tombera deux moyens prop.

entre les nombres cubes E & H ; il en tombera aussi deux entré A & B par la 8. prop. 8. & partant par la 21. prop. 8. A & B sont solides semblables.

Il est évident par toutes les choses cy-dessus dites , qu'aucuns nombres ayans raison double , ou superparticulaire , ou super-bipartiente , ne sont plans , ou solides semblables. Car s'ils étoient plans semblables , par la 18. prop. 8. un moyen proportionnel tomberoit entr'eux , ce qui ne se peut faire , comme il a été démontré au Scholié de la 8. prop. 8. Ils ne seront pas aussi solides semblables , puis qu'entre iceux ne peuvent tomber deux moyens prop. car autrement il en tomberoit aussi deux entre les plus petits nombres des mesmes raisons par la 8. prop. 8. Ce qui ne se peut faire , pource qu'iceux sont seulement distans entr'eux de l'unité ou du binaire , comme il a été dit au susdit Scholié , entre lesquels il est certain que deux nombres moyens proport. ne peuvent tomber.

Semblablement deux nombres premiers , quels qu'ils soient , ne peuvent être plans , ou solides semblables , pource qu'ils ne peuvent avoir les côtéz proportionnaux. Car quelque nombre plan que ce soit étant nombre premier , a seulement soy-même & l'unité pour côtéz ; encore improprement. Comme ces nombres plans 7 & 13 , desquels les côtéz sont 7 , 1 ; & 13 , 1 , puis qu'ils sont produits de la multiplication d'iceux côtéz , lesquels appert n'être proportionnaux. Et le nombre solide , qui aussi est nombre premier , a seulement pour côtéz soy-même ; & deux unitéz : & par conséquent il est manifeste qu'ils ne peuvent être proportionnaux.

Pareillement deux nombres premiers entr'eux , n'étans quarréz , ou cubes , ne peuvent être plans , ou solides semblables. Car s'ils étoient tels , par la 18 ou 19. prop. 8. tomberoit entre iceux , un ou deux moyens prop. & puis que les extrêmes sont posez premiers entr'eux ; tous les trois , ou les quatre seroient premiers entr'eux , pource que aucun nombre ne sera commune mesure d'iceux , les extrêmes n'en ayans point : Parquoy il est évident par la 23. prop. 7. qu'ils seront les plus petits en leur prop. Et partant par le corol. de la 2. prop. 8. les deux extrêmes seront quarréz , ou cubes. Ce qui est absurde ; car ils ont été posez n'être quarréz ny cubes.

De ces choses s'ensuit que s'il y a deux nombres plans , ou solides semblables , desquels le moindre soit premier , il mesurera le plus grand. Car autrement par la 31. prop. 7. iceux

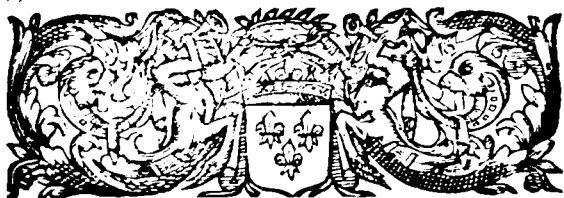
deux nombres proposés seroient premiers entr'eux : & parant (comme nous venons de prouver) ils ne seroient plans ou solides semblables. Ce qui est absurde : car ils ont été posés tels.

De cecy est évident que deux nombres premiers entr'eux, desquels le moindre est premier, ne peuvent être plans, ou solides semblables. Car s'ils l'étoient, le moindre mesureroit le plus grand, comme appert cy-dessus. Vû donc qu'il se mesure aussi soy-même, ils ne seroient premiers entr'eux, mais composés : Ce qui est contre l'hypothese.

Parquoy il est facile de trouver deux nombres plans, ou solides non semblables. Car si on prend deux nombres ayans raison double, ou superparticuliere, ou superbiparcentie ; on certainement deux nombres premiers, ou deux premiers entr'eux, desquels l'un ny l'autre soit quarré, ou cube ; il est évident par ce que dessus, qu'ils seront plans, ou solides dissemblables.

Derechef, s'il y a deux nombres, desquels l'un soit quarré, & l'autre non quarré, comme 16 & 20 ; ils ne sont plans semblables. Car autrement par la 26. prop. 8. ils seroient comme quarré à quarré : & 16 étant quarré, par la 24. prop. 8. 20 seroit aussi quarré, contre l'hypothese. Par même raison, si de deux nombres, l'un est cube, & l'autre ne l'est pas ; comme 27 & 40 ; ils ne sont pas solides semblables. Car s'ils l'étoient, par la 27. prop. 8. ils seroient comme cube à cube : & 27 étant cube, par la 25. prop. 8. 40 seroit aussi cube, contre l'hypothese.

Fin du huitième Element.



ELEMENT

NEUFIE'ME.

THEOR. I. PROP. I.

Si deux nombres plans semblables se multiplient l'un l'autre, le produit sera quarré.



OIENT deux nombres plans semblables A & B, lesquels se multiplians mutuellement, produisent C. Je dis que C est quarré. Car A se multipliant soy-même produit D quarré. Et puis que A multipliant A & B a produit D & C, comme A sera à B, ainsi D à C par la 17. prop. 7. Mais A & B étans plans semblables, il tombera entre eux un moyen proportionnel par la 18. prop. 8. Il s'en tombera donc aussi un entre D & C, par la 8. prop. 8. & soit E. Et puisque des trois nombres continuellement proportionnaux D, E, C, le premier D est quarré par la construction; le tiers C sera aussi quarré par la 22. prop. 8. Parquoy si deux nombres plans semblables, &c. Ce qui étoit à prouver.

A 4.	B 9.
D 16.	E 24. C 36.

THEOR.

THEOR. 2. PROP. II.

Si deux nombres se multiplians l'un l'autre produisent un nombre quarré, iceux seront plans semblables.

Soient deux nombres A & B qui se multiplians l'un l'autre, produisent C quarré. Je dis que A & B sont plans semblables.

Car que A se multipliant soy-même produise D quarré. Veu donc que A multipliant A & B a produit D & C, comme A sera à B, ainsi D à C par la 17. prop. 7. Et par la 11. pro. 8.

entre les quarez D & C tombe un moyen proportionnel: il en tombera donc aussi un entre A & B, par la 8. prop. 8. & partant par la 20. prop. 8. A & B seront plans semblables. Parquoy si deux nombres se multiplians l'un l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

A 4.	B 9.
D 16.	C 36.

THEOR. 3. PROP. III.

Si un nombre cube se multiplie soy-même, le produit sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel se multipliant soy-même produise B. Je dis que B est nombre cube.

Car soit C côté du cube A: & de C multiplié en soy, soit produit D; il est manifeste que C multipliant D, produit le cube A. Vû donc que C multipliant soy-même a fait D, par la 7. com. sent. C mesurera D par C. Mais par la

A 8.			
E 16.	D 4.		
F 32.	C 2.		
B 64.	Vnité.		

5. com. sent. l'unité mesure aussi C par C. L'unité sera donc même partie de C, que C de D; & partant comme l'unité est à C, ainsi C à D par la 20. def. 7. De-

rechef, puisque C multipliant D a fait A, par la 7. com. sent. D mesurera A par C. Mais aussi C mesure D par C. Donc C est même partie de D, que D de A; & partant comme C à D, ainsi D à A; mais comme C à D, ainsi étoit l'unité à C. Donc comme l'unité à C, ainsi C à D, & D à A: ainsi entre l'unité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D. Derechef, pource que A mesure B par A; (car B a été fait de A multiplié en soy) & que l'unité mesure aussi A par A; l'unité sera même partie de A, que A de B: partant comme l'unité sera à A, ainsi A sera à B. Parquoy puis qu'entre l'unité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D, par la 8. prop. 8. il en tombera aussi deux entre A & B, & soient iceux E & F. Et vû que les quatre nombres A, E, F, B sont continuellement proportionnaux, & que A premier est cube, aussi B quatrième sera cube par la 23. prop. 8. Parquoy si un nombre cube, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 4. PROP. IV.

Si un nombre cube multiplie un nombre cube, le produit sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant le nombre cube B, produise C: Je dis que C est aussi nombre cube.

Car si on prend D, produit de A multiplié par soy-même, il sera cube par la prop. precedente: & pource que A multipliant B & soy-même, a produit C & D; il y aura telle raison de D à C, que de

A	8.	B	27.
D	64.	C	216.

A à B, par la 17. prop. 7. Et par la 12. prop. 8. il tombera deux moyens proportionnaux entre A & B: il en tombera donc aussi deux entre D & C, par la 8. prop. 8. Et partant D étant cube, par la 23. prop. 8. C sera aussi cube. Si donc un nombre cube, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 5. PROP. V.

Si un nombre cube multipliant quelque autre nombre, produit un nombre cube, le multiplié sera aussi cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant quelque nombre B, produise le nombre cube C. Je dis que B multiplié est aussi nombre cube.

Car si on prend D, produit de A multiplié par soy-même, il sera cube par la 3. prop. 9. & d'autant que A multipliant A & B, a fait D & C, par la 17. prop. 7. A sera à B comme D à C, & par la 8. prop. 8. entre A & B se trouveront deux moyens proportionaux, comme entre les deux nombres cubes D & C. Et par la 23. prop. 8. A étant cube, B multiplié sera aussi nombre cube: Parquoy si un nombre cube, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A8. & B27. \\ \hline D64. & C216. \\ \hline \end{array}$$

THEOR. 6. PROP. VI.

Si un nombre se multipliant soy-même produit un nombre cube; iceluy nombre sera aussi cube.

Soit le nombre A, lequel multiplié par soy-même produise le nombre cube B. Je dis que A est aussi nombre cube.

Car si on prend C produit de A multiplié par B, il sera cube par la définition du nombre cube; & par la 5. prop. 9.

A sera aussi cube. Si donc un nombre se multipliant soy-même, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline A8. & B64. & C512. \\ \hline \end{array}$$

THEOR. 7. PROP. VII.

Un nombre composé étant multiplié par quelque autre nombre le produit sera solide.

Soit le nombre composé A, lequel étant multiplié par quelque nombre B produise C. Je dis que C est nombre solide.

Car puisque A est composé, quelque nombre outre l'unité le mesurera par la 13. def. 7. Que D mesure donc A par E. Ce qu'étant posé, D

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline A6. & B5. & C30. \\ \hline D2. & E3. & \\ \hline \end{array}$$

multipliant iceluy E, produira A par la 9. com. sent. Et puis que B multipliant A a produit C, iceluy C sera procréé de la mutuelle multiplication des trois nombres D, E, B; partant par la 17. prop. 7. il sera nombre solide, duquel les côtez sont D, E, B. Parquoy un nombre composé, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, le troisième depuis l'unité sera quarré, & tous les autres qui en laisseront un: Mais le quatrième sera cube, & tous les suivans qui en laisseront deux: & le septième sera cube & quarré ensemble, & tous les suivans qui en laisseront cinq.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux depuis l'unité, A, B, C, D, E, F, G, H, I. Je dis que le troisième B sera quarré, ensemble tous les autres qui en laisseront un de l'ordre, comme D, F & H: en après, que le quatrième C est

Vnité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.	I.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.	2187.	6561.	19683.

cube, & tous les autres nombres qui en intermettent ou laissent deux, comme F & I: Pareillement que le septième nombre F est cube & quarré ensemble, comme aussi tous les autres qui pourroient suivre en laissant toujours cinq nombres.

Pour la première partie: puis que les nombres sont continuellement proportionnaux, comme l'unité mesure A selon les unitez qui sont en A, par la 5. com. sent. ainsi chacun mesurera son suivant selon les unitez de A: partant B troisième, qui sera en ce faisant le produit de A multiplié par soy, sera quarré: & par la 22. prop.

B. puis que B , C , D , sont continuellement proportionnaux , & B est quarré , aussi D sera quarré. Par même discours en prenant les trois continuellement proportionnaux D , E , F ; vû que D est quarré , aussi F sera quarré ; & ainsi de tous les autres nombres qui en laissent un.

Pour la seconde partie : puis que A multiplié par soy produit B ; & B par A produit C ; Il est évident par les définitions du 7. que C sera cube , & par la 23. prop. 8. C , D , E , F , étans continuellement proportionnaux ; F sera aussi cube : par même raison , étans prins les quatre continuellement proportionnaux F , G , H , I , puis que F est cube , aussi I sera cube ; & ainsi de tous les autres nombres , en laissant deux , si davantage y en avoit.

Pour la troisième partie. D'autant que par les deux precedentes parties F a été prouvé quarré & cube ; iceluy fera cube & quarré ensemble : Et il en sera ainsi de tous les autres. Si donc depuis l'unité , il y a tant de nombres qu'on voudra , &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Si depuis l'unité , il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux , & que celui qui suit l'unité soit quarré , aussi tous les autres seront quarréz : & s'il est cube , aussi tous les autres seront cubes.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux depuis

l'unité A ,	Vnité. A. B. C. D. E. F.					
B , C , D ,	I. 4. 16. 64. 256. 1024. 4096.					
E , F. Je						

dis premierement que si le premier A est quarré , que tous les autres seront aussi quarréz.

Car puis qu'iceux nombres A , B , C , D , E , F , sont continuellement proportionnaux depuis l'unité , par

la prec. prop. le troisiéme nombre B sera nombre quarré, comme aussi tous les autres qui en laissent un, sçavoir D & F. Mais pource que A, B, C sont continuellement proport. & que A est quarré par l'hypothese; par la 22. prop. 8. C sera aussi quarré: & par la même raison prenant les continuellement proportionnaux C, D, E, le premier C étant quarré, aussi le sera le troisiéme E: partant tous les nombres A, B, C, D, E, F sont quarrés: Et ainsi de tous autres.

Je dis en second lieu, que si A est cube, aussi tous les autres seront cubes: Car d'autant que A, B, C, D, E, F

font									
conti-		Unité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.	
nuelle-		1.	8.	64.	512.	4096.	32768.	262144.	
ment									

proport. depuis l'unité, C quatriéme est cube, & tous les autres qui en laissent deux, sçavoir F, par la prec. prop. Or que les autres nombres B, D, E, soient aussi cubes, nous le prouverons ainsi. D'autant que par l'hypothese l'unité est à A, comme A à B; l'unité mesurera A, & iceluy A le nombre B également. Mais par la 5. com. sent. l'unité mesure A par le même A: donc A mesurera aussi B par le même A: & par la 9. com. sent. A multiplié en soy produira B, lequel A étant cube, B sera aussi cube par la 3. prop. 9. Mais tous les autres nombres suivans sont en la raison de A à B, & partant par la 23. prop. 8. ils seront tous cubes. Si donc depuis l'unité il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 10. PROP. X.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celui qui suit l'unité, ne soit nombre quarré: aussi pas un autre ne sera quarré, sinon le troisiéme depuis l'unité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent un. Que si celui qui suit l'unité n'est nombre cube, aussi

pas un autre ne sera cube, sinon le quatrième depuis l'unité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent deux.

Soient depuis l'unité tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D, E, F; & premierement que A qui suit l'unité, ne soit nombre quarré. Je dis que pas un autre ne sera quarré, sinon le troisième B, & tous les autres qui en l'ordre en laissent un, sçavoir D & F.

Car par la

8. prop. 9.

B, D, F

sont quar-

rez : Et si

quelqu'un

veut dire qu'il y en a aussi d'autres, comme C, il faudroit par la 22. prop. 8. que A fust aussi nombre quarré, (étans C, B, A, continuellement proportionnaux & C quarré) ce qui est contre l'hypothese. Par même raisons on démontrera qu'aucun autre ne peut être quarré, sinon les susdits.

Maintenant, que A proche de l'unité ne soit nombre cube : Je dis qu'aucun autre ne sera cube, sinon C quatrième depuis l'unité, & tous les autres qui en laisseront deux, comme F, &c.

Car par la 8. prop. 9. C & F sont cubes : Et si quelqu'un veut dire que D soit aussi cube, d'autant que D, C, B, A sont continuellement proportionnaux, il faudroit par la 23. prop. 8. que A fut pareillement cube, ce qui est contre l'hypothese : donc D n'est pas cube. Par mêmes raisons on démontrera qu'aucun autre, outre les susdits, ne peuvent être cube. Si donc depuis l'unité, il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. II. PROP. XI.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux : le plus petit mesurera le plus grand selon quel-

qu'un de ceux qui sont entre les proportionnaux.

Depuis l'unité A, soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux B, C, D, E, F. Je dis que le plus petit nombre B mesurera le plus grand F par quelque'un des nombres C, D, E.

Car d'autant que

A, B, C, D, E
sont en même raison
que B, C, D, E,
F, en raison égale,
l'unité A sera à E,

comme B est à F. Et par la 20. def. du 7. l'unité mesurera E; & le nombre B le nombre F, également. Mais par la 5. com. sent. l'unité A mesure E par E: donc aussi B mesurera F par F. Le même peut-on dire des autres. Parquoy si depuis l'unité, il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Il appert par ce que dessus, que le plus grand nombre est autant éloigné du grand qui le mesure, que l'unité est distante d'iceluy nombre par lequel le moindre mesure le grand: & ce d'autant qu'il y doit avoir une même raison du moindre nombre au plus grand, que de l'unité à celuy par lequel le moindre mesure le grand, comme il appert icy.

Ainsi B mesurera F par D; & C mesurera F par C, c'est-à-dire par soy-même, &c. Pource que tant entre B & F, qu'entre l'unité & D se trouvent trois nombres: & tant entre C & F, qu'entre l'unité & C sont interposés deux nombres.

Unité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

Il appert encore que quelconque de ces nombres multiplié par soy-même, en produit un autre, qui entre les proportionnaux est autant éloigné d'iceluy, comme il est distant de l'unité. Mais si un petit nombre en multiplie un grand, celuy qui en proviendra sera autant éloigné du

grand que le moindre de l'unité : Car si un nombre qui en mesure un autre, multiplie celui par lequel il le mesure, sera produit celui-là qui est mesuré, par la 9. com. sent. Ainsi C multipliant soy-même produit F, qui est autant éloigné de C, qu'iceluy C de l'unité. Pareillement B multipliant D, sera le même F, pource que D mesure iceluy nombre F par B. &c.

THEOR. 12. PROP. XII.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux : tous les nombres premiers qui mesurent le dernier, mesureront aussi celui qui est proche de l'unité.

Soient depuis l'unité A, tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, B, C, D, E. Je dis que tous les nombres premiers qui se trouveront mesurer le dernier E, mesureront aussi B, lequel suit l'unité ; c'est à dire que si quelque nombre premier que ce soit, comme F, mesure iceluy dernier nombre E, il mesurera aussi B.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	3.

Car si ledit nombre premier F mesurant E dernier, ne mesure pas aussi B ; B & F seront nombres premiers par la 31. prop. 7. Et d'autant que B multiplié par soy produit C ; comme nous avons dit au Scholie de la-prop. preced. C & F seront aussi premiers par la 27. prop. 7. Item B multipliant C produit D : D & F seront donc aussi premiers par la 26. prop. 7. Pareillement B multipliant D produit E : partant E & F seroient aussi nombres premiers, & par ainsi F ne mesureroit pas E : ce qui est contre l'hypothese : Donc F mesureroit aussi B. Parquoy si depuis l'unité il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que ce-

luy d'après l'unité soit premier : Le plus grand ne sera mesuré par aucun autre nombre, sinon par ceux qui sont entre les proportionnaux.

Depuis l'unité A soient tant de nombres qu'on vouldra continuellement proportionnaux B, C, D, E, & que B qui suit l'unité soit premier. Je dis que le plus grand nombre E ne sera mesuré par aucun autre que d'iceux B, C, D.

Autrement, s'il est possible, que quelque autre nom-

A 1.	B 3.	C 9.	D 27.	E 81.
	K --	I --	H --	G --

bre, comme G, mesure E : Or G sera premier ou composé : s'il est premier, & mesurant E extrême, par la préc. prop. il mesurera aussi B, premier proche de l'unité : ce qui est absurde. Donc G n'est premier, mais composé, & mesuré par quelque nombre premier par la 33. prop. 7. qui ne peut être autre que B : d'autant qu'il mesurera E, par la 11. com. sent. & par la prop. précéd. il faudroit qu'il mesurât aussi B nombre premier : ce qui est absurde. Il n'y a donc point d'autre nombre premier que B, qui mesure G. Que maintenant B mesure G par H : & puis que par les choses dites au Scholie de la 11. prop. de ce livre, B multipliant D & H produit E & G, par la 17. prop. 7. comme E sera à G, ainsi D à H : mais G mesure E : donc aussi H mesurera D. On prouvera comme dessus qu'il ne peut être premier ny mesuré par un autre nombre premier que B : Car si H étoit premier, mesurant D, il mesurerait aussi B : ce qui ne se peut faire, ayant été posé premier. Que si H est composé, celui nombre premier qui le mesurera sera B, ou si c'est un autre, cet autre mesurera aussi D, & celui qui mesure D, c'est à savoir B, par la 11. com. sent. ce qui est absurde. Il n'y a donc que le nombre premier B qui mesure H : & posant que ce soit par le nombre I. On prouvera aussi comme dessus, que comme H mesure D, ainsi I mesure G, & que I ne peut être nombre premier, ny mesuré par aucun autre nombre premier sinon B. Donc que I mesure C par le nombre K : par mêmes raisons, comme I mesure C,

ainsi K mesurera B nombre premier : il faut donc qu'à tout le moins il luy soit égal , ce qui est impossible : d'autant que B est moyen proportionnel entre K & I, par la 20. prop. 7. puis que C est produit de K multiplié par I, & qu'il est aussi le produit de B multiplié par soy-même. Partant aucun nombre ne mesurera E, sinon B, C, D, qui le mesurent, par la 11. prop. 9. Parquoy si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Le plus petit nombre de tous ceux qui peuvent être mesurez par certains nombres premiers, ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, que par ceux qui le mesuroient au commencement.

Soit A le plus petit nombre de tous ceux qui peuvent être mesurez par les trois nombres premiers B, C, D. Je dis qu'aucun nombre premier autre que B, C, D, ne mesurera A.

Autrement, s'il est possible, que E autre nombre premier mesure A par F : donc par la 9. com. sent. E multiplié par F produira A, lequel est mesuré par B, C, D; & par la 32. prop. 7. iceux B, C, D, mesureront

A.	B.	C.	D.
30.	2.	3.	5.
E---	F--		

l'un des deux E, F : Or ils ne mesureront pas E, autre nombre premier que pas un d'iceux ; ils mesureront donc F, qui est plus petit que A : ce qui est absurde ; puis que A est posé le plus petit de tous ceux qui peuvent être mesurez par B, C, D. Donc E ne pouvoit mesurer A. Parquoy le plus petit nombre de tous ceux qui peuvent être mesurez, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Nous démontrerons icy en nombres (après Cammandinus & Clavius) les 10 premiers Thepemes, qui sont démontrés en lignes au second livre.

1. S'il y a deux nombres, l'un ou l'autre desquels soit coupé en tant de parties qu'on voudra, le nombre plan compris sous iceux deux nombres, est égal aux nombres plans contenus du nombre indivisé, & de chaque partie de celui qui est coupé.

Soient deux nombres, AB & C , desquels AB est divisé en AD , DE , EB , & soit fait F de C en AB : Item GH de C en AD , & HI de C en DE , & IK de C en EB : Je dis que F est égal aux nombres GH , HI , IK , c'est-à-dire à tout le nombre GK composé d'iceux. Car puisque C multipliant AB , a produit F , AB mesurera F par C : c'est-à-dire que AB sera la partie d'iceluy

F , dénommée par C . Par la même raison AB sera la partie de GH ; & DE de HI ; & EB de IK , dénommée par C , sçavoir est, la même que AB de F . Mais

$A \dots D \dots E \dots B \dots C \dots$
$F \dots \dots \dots 12$
$G \dots \dots H \dots I \dots K$

il est évident par la 5. prop. 7. que AB est la même partie de GK , que AD de GH , parquoy aussi AB sera même partie de GK , que AB de F : & partant par la 4. com. sent. F & GK seront égaux entr'eux. Ce qui étoit proposé.

2. Si un nombre est coupé en deux parties, les nombres plans comprins sous le tout, & une chacune partie, sont égaux au nombre quarré du tout.

Car le nombre AB soit divisé en AC , CB . Je dis que les nombres qui seront produits du total

AB , es parties AC , CB seront ensemble égaux au quarré de AB . Car étant pris le nombre D égal à AB , par le 1. Theor. le nombre fait de D , c'est-à-dire de AB , en AB , sçavoir est le quarré

$A \dots C \dots B$
$D \dots \dots$

d'iceluy AB , sera égal aux nombres qui seront produits de D , c'est-à-dire de AB , en AC , & en CB : Ce qui étoit proposé.

Le même sera démontré, si AB est coupé en plus de deux parties, comme on peut voir par la seconde figure icy apposée. Car par

$A \dots C \dots D \dots B$
$E \dots \dots$

La même raison, le nombre fait de E , c'est à-dire de AB , en AB , c'est à sçavoir le quarré de AB , sera esgal aux nombres, qui seront produits de E , c'est-à-dire de AB , en chaque partie AC , CD & DB .

3. Si un nombre est couppé en deux parties; le nombre plan compris du total, & de l'une des parties, est égal à celui-là contenu des parties, & au quarré fait d'icelle partie premierement prise.

Soit le nombre AB divisé en AC , CB . Je dis que le nombre plan produit de AB en la partie AC , est esgal à celui fait des parties AC , CB , & au quarré d'icelle partie AC . Car estant pris le nombre D esgal à la susdite partie AC ; par le 1. Theor. le nombre fait de D , c'est-à-dire de AC , en AB ; ou (qui est le même) de AB en AC , sera esgal aux nombres faits de D , c'est-à-dire de AC , en CB , & de D , c'est-à-dire de AC , en AC , sçavoir est le quarré de AC . Ce qui estoit proposé.

$$\begin{array}{|l} A \dots C \dots B \\ D \dots \end{array}$$

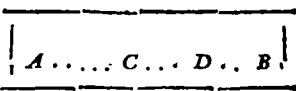
4. Si un nombre est divisé en deux parties; le quarré fait du tout est égal aux deux quarréz faits des deux parties, & a deux fois le nombre plan contenu d'icelles parties.

Soit le nombre AB divisé en AC , CB . Je dis que le nombre quarré fait de AB , est esgal aux quarréz des parties AC , CB , avec deux fois le nombre plan fait de AC en CB . Car par le 2. Theor. le nombre quarré de AB , est esgal aux nombres faits de AB en AC , & en CB . Mais par le 3. Theor. le nombre fait de AB en AC , est esgal au nombre produit de AC en CB , & au quarré d'iceluy AC : Item le nombre produit de AB en CB , est par même raison esgal au nombre produit de AC en CB , & au quarré de CB . Donc le nombre quarré fait de AB , est pareillement esgal aux nombres quarréz des parties AC , CB , & a deux fois le nombre fait de AC en CB . Ce qui estoit proposé.

$$\begin{array}{|l} A \dots C \dots B \end{array}$$

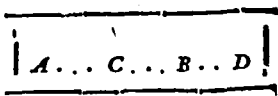
5. Si un nombre est divisé en deux parties égales, & en deux inégales; le nombre plan contenu des parties inégales, avec le quarré du nombre qui est entre les deux sections, est égal au quarré fait de la moitié du nombre total.

Soit le nombre AB , couppe en deux parties esgales AC , CB , & en deux inegales AD , DB . Je dis que le nombre plan compris des parties inegales AD , DB , avec le quarré du nombre CD , est esgal au quarré du nombre BC . Car puis que par le Theor. preced. le nombre quarré de CB , est esgal aux quarréz des parties CD , DB , avec deux fois le nombre fait de CD , DB ; & par le 3. Theor. le nombre plan compris de CD , DB , ensemble avec le quarré de DB , est esgal au nombre produit de CB en DB , sera fait que si ce nombre fait de CB , en DB , est pris pour le quarré de DB , avec le nombre fait de CD , en DB , aussi le nombre quarré de CB , est esgal à l'autre quarré de CD , ensemble à l'autre nombre fait de CD en DB , & au nombre produit de CB , c'est-à-dire de AC en DB : & partant par le 1. Theor. la nombre fait du total AD en DB , est esgal aux nombres produits de CD en DB , & de AC en DB . Donc le quarré de CB , sera esgal au quarré de CD , & au nombre fait de AD en DB . Ce qui estoit proposé.



6. Si un nombre est divisé en deux parties égales, & à iceluy est adjouté quelque autre nombre; le nombre qui est fait du tout avec l'adjouté en l'adjouté, avec le quarré de la moitié du nombre, est égal au quarré du nombre composé de la moitié & de l'adjouté.

Soit le nombre AB couppe en deux parties esgales AC , CB , & à iceluy soit adjouté le nombre BD . Je dis que le nombre fait du tout AB & de l'adjouté BD comme un seul, s'avoir est de AD en l'adjouté BD , avec le quarré de la moitié CB , est esgal au quarré fait de la moitié CB & adjouté BD comme

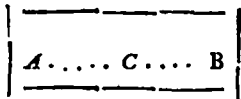


un seul, c'est-à-dire au carré de CD. Car puis que par le 4. Theor. le carré de CD est égal aux carrés des parties CB, BD, avec deux fois le nombre plan compris de CB, BD, c'est-à-dire aux carrés des parties CB, BD, & aux nombres contenus de CB, BD, & de AC, BD : Mais par le premier Theor. le nombre fait de AD en BD, est égal aux nombres contenus sous CB, BD, & sous AC, BD, & sous AD, BD, c'est-à-dire au carré de BD. Donc prenant le nombre fait de AD en DB, pour le carré de la partie BD, avec les nombres faits de CB en² BD, & de AC en BD, le carré de CD sera égal à l'autre carré de CB, ensemble avec le nombre fait de AD en BD : c'est-à-dire que le nombre fait de AD en BD, avec le carré de CB, est égal au carré de CD. Ce qui estoit proposé.

7. Si un nombre est divisé en deux parties, le carré du tout avec le carré de l'une des parties, est égal à deux fois le nombre fait du tout en icelle partie, ensemble avec le carré de l'autre partie.

Soit le nombre AB coupé en parties AC, CB. Je dis que le carré de AB, avec celui de la partie CB, est égal à deux fois le nombre fait de AB en CB, ensemble avec le carré de l'autre partie AC. Car puisque par le 4. Theor. le carré de AB est égal aux carrés des parties AC, CB, & à deux fois le nombre fait d'icelles AC, CB;

si on ajoute le commun carré de CB, les carrés de AB, CB, seront ensemble égaux aux carrés de AC, CB, avec deux fois le nombre produit de AC en



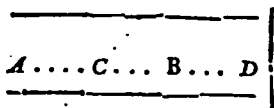
CB : mais par le 3. Theor. le nombre fait de AC en CB avec le carré de CB, est égal au nombre produit de AB en CB; & partant le double de l'un est égal au double de l'autre. Donc si pour le double du nombre fait de AC en CB, & carré de CB, on prend le double du nombre produit de AB en CB, les carrés des nombres AB, CB seront ensemble égaux à deux fois le nombre de AB en CB, avec le carré de l'autre partie AC. Ce qui estoit proposé.

8. Si un nombre est divisé en deux parties, quatre fois le nombre fait du tout en une partie, avec le carré de

l'autre partie, est égal au quarré du nombre composé du tout & de la partie premierement prise.

Soit le nombre AB coupé en parties AC , CB . Je dis que le nombre fait de AB en la partie CB , ensemble avec le quarré de l'autre partie AC , est égal au quarré du nombre composé de AB & de la partie CB .

Car estant adjoûté le nombre BD égal à CB , par le 4. Theor. le quarré du tout AD est égal aux quarréz

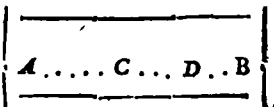


des nombres AB , BD , ensemble avec le nombre double de AB en BD , c'est-à-dire aux quarréz des nombres AB , CB , ensemble avec deux fois le nombre de AB en CB . Mais par le 7. Theor. les quarréz de AB , CB , sont esgaulx à deux fois le nombre contenu de AB , CB , avec le quarré de AC : donc si pour les quarréz de AB , CB , on prend le nombre double de AB en CB , & le quarré de AC ; le quarré fait de AD est égal à quatre fois le nombre fait de AB en CB , ensemble avec le quarré de l'autre partie AC . Ce qui estoit proposé.

9. Si un nombre est coupé en deux parties égales, & en deux inégales; les quarréz faits des parties inégales, sont doubles des quarréz faits de la moitié, & de la partie du milieu.

Soit le nombre AB divisé en parties esgales AC , CB , & en inégales AD , DB . Je dis que les quarréz des parties inégales AD , DB , sont doubles des quarréz de la moitié AC , & du nombre entre-moyen CD .

Car puisque par le 4. Theor. le quarré du nombre AD est égal aux quarréz des nombres AC , CD , ensemble avec



deux fois le nombre fait de AC en CD ; si on adjoûte le commun quarré de DB , les quarréz des parties AD , DB , seront esgaulx aux quarréz des parties AC , CD , BD , ensemble avec deux fois le nombre produit de AC en CD , c'est-à-dire de CB en CD . Mais par le 7. Theor. les quarréz de CB , c'est-à-dire de AC , & CD , sont esgaulx au quarré de DB , & à deux fois le nombre de CB en CD . Donc si pour le quarré de DB , &

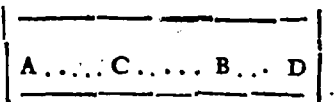
deux

deux fois le nombre fait de CB en CD, on prend les quarréz de AC, CD, les quarréz de AD, DB seront esgaulx au double des quarréz des parties AC, CD; & partant ces quarréz-là sont doubles de ceux-cy. Ce qui estoit proposé.

10. Si un nombre est divisé en deux parties égales, & à iceluy on adjointe quelque autre nombre; le quarré du nombre composé d'iceux, & le quarré de l'adjointé, sont ensemble doubles des quarréz de la moitié, & de celui fait du nombre composé d'icelle moitié & de l'adjointé.

Soit le nombre AB divisé en deux parties égales AC, CB, & à iceluy soit adjointé le nombre BD. Je dis que le quarré du nombre AD composé du tout AB, & de l'adjointé BD, & le quarré d'iceluy nombre adjointé BD, sont ensemble doubles des quarréz faits de la moitié AC, & de CD, composé de la moitié CB & de l'adjointé BD.

Car puisque par le 4. Theor. le quarré de AD est esgal aux quarréz de AC, CD, & a deux fois le nombre pro-

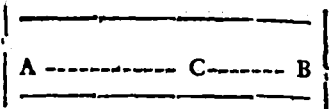


duit de AC, c'est-à-dire de CB, en CD; si on adjointe le commun quarré du nombre BD, les quarréz des nombres AD, BD, seront esgaulx aux quarréz des parties AC, CD, BD, ensemble avec deux fois le nombre produit de CB en CD. Mais par le 7. Theor. les quarréz de CB, ou AC, & CD sont esgaulx au quarré de BD, & a deux fois le nombre fait de CB en CD. Donc si pour le quarré de BD, & deux fois iceluy nombre produit de CB en CD, on prend les quarréz des nombres CB, CD, c'est-à-dire des nombres AC, CD; les quarréz des nombres AD, BD seront esgaulx à deux fois les quarréz des nombres AC, CD: & partant ceux-là sont doubles de ceux-cy. Ce qui estoit proposé.

Or voila quant aux 10. premières prop. du 2. liv. mais la 11^e. ne se peut accommoder aux nombres, c'est-à-dire qu'on ne peut pas diviser un nombre proposé, en telle sorte que le nombre plan fait du tout & de l'une des parties, soit égal au nombre quarré de l'autre partie.

Car, s'il est possible, soit divisé AB en AC, CB, en sorte que le nombre plan fait du tout AB, & de la partie CB, soit esgal au quarré de l'autre partie AC. Donc quatre fois le nom-

bre de AB en CB , sera quadruple du carré de AC : & par
tant quatre fois le nom-
bre plan d'iceluy AB en
 CB , avec le carré de
 AC , sera quintuple d'i-
celuy carré de AC .
Mais quatre fois le nom-

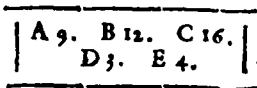


bre plan de AB en CB , avec le carré de AC , est carré, vu
que par le 8. Theor. il est esgal au nombre carré, qui est fait
du nombre composé de AB & de CB . Donc deux nombres
carréz (sçavoir celuy qui est fait de AB en CB quatre fois
avec le carré de AC ; & le carré de AC) ont même rai-
son, que 5 à 1, ou 25 à 5. Ce qui est absurde, ainsi qu'il
appert du corol. de la 24. prop. 8. Le nombre AB ne peut
donc pas être divisé, en sorte que le nombre plan fait du tout
en une des parties soit esgal ou carré de l'autre partie. Ce
qui estoit proposé.

THEOR. 15. PROP. XV.

Si trois nombres sont continuellement proportion-
naux, & les plus petits de tous ceux qui ont mê-
me raison avec iceux : le composé de deux tels
que l'on voudra d'iceux, sera premier à l'autre.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux
 A, B, C , les plus petits de tous ceux qui ont la même rai-
son. Je dis que le composé de deux quels on voudra d'i-
ceux, comme de A & B , est
premier à l'autre C ; & le com-
posé de B, C , premier à A ; &
de A, C , premier à B .



Car si on prend D & E les
plus petits qui soient en la mê-
me raison par le Scholie de la 35. prop. 7. il est évident
par ce qui a été démontré à la 2. prop. 8. que A & C sont
les carréz de D & E , & que B est le produit de D multi-
plié par E : & par le 3. Theor. du Scholie precedent le
composé de D, E , multiplié par D , produira un nombre
égal au composé de A & B . Mais D & E étans premiers
entr'eux par la 24. prop. 7. aussi leur composé sera pre-

inter à E, par la 30. prop. 7. & partant aussi à son quarré C, par la 27. prop. 7. Et par même raison D sera premier à C, & par la 26. prop. 7. le produit du composé de D & E multiplié par D, sera aussi premier à C. Mais nous avons montré que ce produit est égal au nombre composé de A & B : Donc aussi le composé de A & B sera premier à C.

En après, puisque comme dessus le composé des deux nombres D, E est premier à chacun d'iceux ; par la 26. prop. 7. le produit du composé de D, E, multiplié par E sera premier à D. Mais par le susdit Theor. iceluy produit est égal à C fait de E en soy, & au nombre B fait de D en B. Donc le nombre composé de ces deux B & C sera aussi premier à D ; & partant aussi à A par la 27. proposition 7.

Finablement D & E étans premiers entr'eux par la 24. prop. 7. & premiers au composé de deux par la 30. prop. 7. leur produit B sera premier au composé des deux par la 26. prop. 7. & par la 27. prop. 7. le produit de D, E comme un seul nombre, multiplié par soy, sera premier à B. Mais par le 4. Theor. du Scholie precedent, iceluy produit de D E comme un seul nombre multiplié en soy, est égal à A & C & deux fois B ensemble : donc A & C avec deux fois B, sont premiers à B. Or en ostant les deux fois B, il est manifeste que le reste composé de A & C, sera premier à B. Car autrement ils seroient composez, & leur commune mesure mesureroit aussi deux fois B ; & par consequent aussi le composé de A & C & deux fois B, qui ne seroit en ce faisant premier à B, contre ce qui a été démontré cy-dessus. Donc le composé de A & C est premier à B. Parquoy si trois nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 16. PROP. XVI.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, il ne sera pas comme le premier au second, ainsi le second à quelque autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux, A & B. Je dis que comme A est à B, ainsi B n'est pas à quelque au-

tre, c'est-à-dire qu'à A & B, on ne peut trouver un troisième proportionnel.

Autrement, s'il est possible, soit que comme A est à B, ainsi B soit à un autre, sçavoir C. Par la 23. prop. 7. A & B étans pre-

$$\left| \begin{array}{ccc} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ A\ 3. & B\ 5. & C\text{---} \end{array} \right|$$

miers, ils seront les plus petits qui soient en la même raison; & par la 21. prop. 7. A mesurera B, & B mesurera C. Mais aussi A mesure soy-même; donc A mesure iceux A & B. Ainsi A & B ne seroient premiers, contre l'hypothèse. Donc il n'est pas comme A à B, ainsi B à C. Par même raison, il ne sera pas comme B à A, ainsi A à quelque autre. Si donc deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Ce qui est dit & démontré tant en cette 16. prop. qu'aux trois suivantes, se doit entendre des nombres entiers: car si on les vouloit étendre aux fractions, il est certain & manifeste qu'à deux nombres quels qu'ils soient, on en peut trouver un troisième proportionnel; puis que le quarré du second nombre étant divisé par le premier, en est produit un troisième proportionnel. Comme aux deux nombres premiers trois & cinq, si le quarré du second nombre 5, sçavoir 25 est divisé par le premier 3, proviendra $8\frac{1}{3}$ pour le troisième proportionnel, &c.

T H E O R. 17. P R O P. XVII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, desquels les extrêmes soient premiers entr'eux, il ne sera pas comme le premier au second, ainsi le dernier à quelque autre.

Soient A, B, C, continuellement proportionnaux, lesquels les extrêmes A & C soient premiers entr'eux. Je dis qu'il ne se peut faire que comme A est à B, ainsi C soit à quelque autre.

A 4.	B 6.	C 9.	D---

Car, s'il est possible, comme A est à B, ainsi soit C à D. En permutant comme A sera à C, ainsi B à D : & par la 23. prop. 7. A & C étans premiers, ils seront les plus petits en leur raison : & par la 21. prop. 7. ils mesureront également B & D ; savoir est A iceluy B ; & C iceluy D. Et pource que comme A à B, ainsi B à C ; & A mesure B, aussi B mesurera C : & par la 11. com. sent. A mesurera aussi C ; & iceux A mesurant soy-même, il mesurera iceux A & C premiers entr'eux : ce qui est absurde. A n'est donc pas à B, comme C à D. Par mêmes raisons, il ne sera pas comme C à B, ainsi A à quelque autre. Parquoy si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBL. I. PROP. XVIII.

Deux nombres estans donnez, considerer si on pourra trouver un troisiéme proportionnel à iceux.

Soient donnez les deux nombres A & B : Il faut considerer si à iceux on peut trouver un troisiéme nombre proportionnel.

La solution de cette proposition est aisée ; Car il n'y a qu'à considerer si C, produit du second nombre B multiplié par soy-même,

A 4.	B 6.	D 9.	C 36.
A 6.	B 7.	D---	C 49.

peut être mesuré, c'est-à-dire divisé par le premier A : car s'il peut être mesuré ou divisé, comme en la premiere formule, il est évident par la 20. prop. 7. que le quotient D sera troisiéme nombre proportionnel ; sinon,

ou n'en trouvera point, puis que par la susdite 20. prop. 7. trois nombres étans prop. le produit des extrêmes doit être égal au produit du milieu.

PROBL. 2. PROP. XIX.

Estans donnez trois nombres, considerer si on pourra trouver un quatrième proportionnel à iceux.

Soient donnez trois nombres A, B, C; & il faut considerer si à iceux on peut trouver un quatrième proportionnel.

La solution de cette prop. est aussi aisée. Car il faut seulement

A 3.	B 6.	C 5.	E 10.	D 30.

considerer si D, qui est le produit des second & troisième nombres B & C, peut être mesuré par le premier A: s'il peut être mesuré ou divisé, il est évident par la 7. prop. 7. que le quotient E sera quatrième proportionnel. On n'en trouvera point, puis que par la susdite 19. prop. 7. quatre nombres étans proportionnels le produit du second & troisième doit être égal au produit du premier & quatrième.

THEOR. 18. PROP. XX.

Quelque multitude de nombres premiers qu'on propose, il s'en trouvera encores d'autres.

Soit quelconque multitude de nombres premiers, A, B, C. Jedis qu'il s'en trouvera encores d'autres.

Car si on trouve le nombre DE, le plus petit de tous ceux qui peuvent être mesurez par les trois nombres

A ... 2	B ... 3	C ... 5
D -----	-----	30 E. F
G -----	-----	-----

A, B, C, par la 37. prop. 7. & à iceluy

DE on adjoute l'unité EF, le tout DF sera premier ou

non : S'il est premier , on a un nombre premier autre que pas un des proposez : Mais si DF n'est premier , il sera mesuré par quelque nombre premier , par la 3. prop. 7. Soit donc mesuré par G ; il est évident que G ne peut pas être un des trois A , B , C : car s'il étoit quelqu'un d'iceux , il mesurerait comme eux DE. Donc G mesurant le tout DF , & le retranché DE , par la 12. com. sent. il mesurerait aussi le reste DF , sçavoir un nombre l'unité : Ce qui est absurde. Donc G est autre nombre premier que pas un des proposez. Et en cette façon on en peut trouver infiny autres. Parquoy quelque multitude de nombres premiers qu'on propose , &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si tant de nombres pairs que l'on voudra sont adjoutez ; le tout sera pair.

Soient adjoutez tant de nombres pairs que l'on voudra AB , BC , CD : Je dis que tout le composé AD , est pair.

Car d'autant que par la 6. def. 7. tout nombre pair a moitié , iceux AB , BC , CD , auront chacun moitié :

Soit donc

EF moitié

de AB ; &

FG de BC ;

& GH de

CD. D'aut-

tant que comme AB à EF , ainsi BC à FG , & CD à GH (la raison étant toujours double) aussi par la 12. prop. 7. comme AB sera à EF , ainsi AD à EH. Mais AB est double d'iceluy EF : Donc aussi AD sera double de EH ; & partant iceluy nombre AD ayant moitié est pair par la susd. 6. def. Parquoy si tant de nombres pairs , &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra sont

adjoûtez, & que la multitude d'iceux soit pair; le tout sera pair.

Soient adjoutez tant de nombres impairs que l'on voudra, desquels la multitude AB, BC, CD, DE, soit pair: Je dis que le tout AE est pair.

Car d'autant que AB, BC, CD, DE, sont impairs, par

A . . .	B	C	D	E

la 7. def. 7. chacun sera different du nombre pair de l'unité: & partant si de chacun d'iceux l'on retranche l'unité on les rendra tous pairs, & par la 21. prop. 9. le composé d'iceux sera pair: Et d'autant que leur multitude est en nombre pair, les unitéz retranchées feront aussi un nombre pair, lequel adjouté avec tout le reste, qui est déjà nombre pair, le tout AE sera pareillement pair par la susdite 21. prop. 9. Parquoy si tant de nombres impairs, &c. Ce qu'il falloit prouver.

T H E O R. 21. P R O P. XXIII.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra sont adjoutez, & que la multitude d'iceux soit impair, le tout sera impair.

Soient adjoutez tant de nombres impairs que l'on voudra, la multitude desquels comme AB, BC, CD soit impair: Je dis que le tout AD est impair.

Car puis que par la def. du nombre

impair, il differe du nombre pair de l'unité, ayant retranché l'unité ED du nombre impair CD, le reste CE sera pair. Mais par la ptec. prop. AC composé des impairs AB, BC, pairs en multirude, est pair: Donc aussi AE composé des pairs AC, CE, sera pair: Et partant si à ice-

A . . .	B	C	E . D

luy AE, l'on adjoûte l'unité ED, le tout AD sera impair, puis que par la susd. def. le nombre impair differe du pair de l'unité. Parquoy si tant de nombres impairs, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Si d'un nombre pair, on oste un nombre pair, le reste sera pair.

Soit un nombre pair AB, duquel soit retranché un nombre pair CB: Je dis que le reste AC est aussi pair.

Ce qui est évident: Car s'il n'étoit pair, en ostant l'unité AD on le rendroit pair: Et le retranché avec iceluy, sçavoir DB, seroit

$$\begin{array}{|c|} \hline A . D C B \\ \hline \end{array}$$

aussi un nombre pair par la 21. prop. 9. & partant luy adjoûtant l'unité ostée AD, le tout AB seroit impair; ce qui est absurde, puis qu'il a été posé pair. Si donc d'un nombre pair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si d'un nombre pair, on oste un nombre impair, le reste sera impair.

Du nombre pair AB, soit retranché le nombre impair CB: Je dis que le reste AC est impair.

Car ayant retranché l'unité CD du nombre impair CB, le reste DB sera pair. Et d'autant que le tout AB est posé

$$\begin{array}{|c|} \hline A C . D B \\ \hline \end{array}$$

pair, par la preced. le reste AD sera aussi pair. Et partant si on en oste l'unité CD, le reste AC sera impair. Si donc d'un nombre pair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si d'un nombre impair on oste un nombre impair, le reste sera pair.

Soit un nombre impair AB, duquel soit retranché un nombre impair CB : Je dis que le reste AC est pair.

Car ayant retranché des nombres impairs AB, CB, l'unité DB, les nombres restans AD, CD, seront pairs. Et d'autant que du nombre pair AD, est retranché le nombre pair CD; par la 24. prop. 9. le reste AC sera pair. Parquoy si d'un nombre impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

$$\begin{array}{r} \hline A \dots C \dots D \dots B \\ \hline \end{array}$$

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si d'un nombre impair on oste un nombre pair, le reste sera impair.

Du nombre impair AB, soit retranché un nombre pair CB : Je dis que le reste AC est impair.

Car ayant retranché de l'impair AB, l'unité AD, le reste DB sera pair; duquel étant retranché le pair CB, par la 24. prop. 9. le reste DC

$$\begin{array}{r} \hline A \dots D \dots C \dots B \\ \hline \end{array}$$

sera aussi pair : & partant l'unité AD y étant adjointe, AC sera impair. Parquoy si d'un nombre impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si un nombre impair multiplie un nombre pair, le produit sera pair.

Soit un nombre impair A, lequel multipliant le nombre pair B, fasse C : Je dis qu'iceluy produit C est pair.

Car d'autant que C est produit de A en B; iceluy produit C sera composé d'autant de nombres égaux à B, qu'il y a d'unités en A. Mais B est pair, & partant C sera composé

$$\begin{array}{r} \hline A \dots 3 \quad B \dots 4 \\ C \dots 12 \\ \hline \end{array}$$

d'autant de nombres pairs égaux à B qu'il y a d'unités en A : & par la 21. prop. 9. C sera pair. Parquoy si un nombre impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

On démontrera en la même manière, que si un nombre pair multiplie un nombre pair, le produit sera aussi pair. Car derechef C sera composé d'autant de nombres pairs égaux à B qu'il y a d'unités en A. &c.

A . . . 2	B 4
C 8	

C O R O L L A I R E.

De ce que dessus, il s'ensuit qu'un nombre pair multiplié par soy-même produira un nombre pair ; comme il est manifeste, en posant les nombres pairs A & B égaux.

T H E O R. 27. P R O P. XXIX.

Si un nombre impair multiplie un nombre impair ; le produit sera impair.

Que le nombre impair A, multipliant le nombre impair B, fasse C : Je dis qu'iceluy produit C est impair.

Car puis que C est le produit de A en B, il sera composé d'autant de nombres égaux à B qu'il y a d'unités en A : Et partant puis que tant A que B est

A . . . 3	B 5
C 15	

nombre impair, leur dit produit C sera composé d'autant de nombres impairs égaux à B, qu'il y a d'unités au nombre impair A : parquoy la multitude d'iceux sera impair, & par la 23. prop. 9. ledit produit C sera nombre impair. Si donc un nombre impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

De cecy est manifeste qu'un nombre impair multiplié par soy-même produit un nombre impair.

S C H O L I E.

Clavius demontre en cet endroit (après Campanus) les deux Theoremes suivans.

1. Un nombre impair mesurant un nombre pair , il le mesure par un nombre pair.

Soit le nombre impair A , le quel mesure le nombre pair B par C . Je dis que C est pair. Car s'il est impair, B produit de A impair multiplié par C impair, sera impair, par la 29. prop. 9. ce qui est absurde : car il a esté posé pair. Donc C est pair.

$A \dots 3$	$C \dots 2$
$B \dots \dots 6$	

2. Un nombre impair mesurant un nombre impair , il le mesure par un nombre impair.

Soit le nombre impair A , qui mesure le nombre impair B par C . Je dis que C est impair : Car s'il est pair ; B fait de A impair par C pair, sera pair par la 28. prop. 9. ce qui est contre l'hypothese ; donc C est impair.

$A \dots 3$	$C \dots \dots 5$
$B \dots \dots \dots 15$	

A ces deux Theor. nous adjoûterons le suivant.

Tout nombre qui mesure un nombre impair , est aussi impair.

Soit le nombre impair A , le quel B mesure par C . Je dis que B est impair. Car C étant multiplié par B produira A par la 9. com.

$A \dots \dots \dots 15$	
$B \dots \dots 5$	$C \dots 3$

sent. & si B n'est impair, mais pair, le produit A sera pair par la 28. prop. 9. ce qui est absurde, puis qu'il a esté posé impair. Donc B qui mesure A impair, n'est pas nombre pair, mais impair.

THEOR. 28. PROP. XXX.

Si un nombre impair mesure un nombre pair, il mesurera aussi la moitié.

Soit le nombre impair A, qui mesure le nombre pair B. Je dis qu'il mesurera aussi sa moitié C.

Car puis que A mesure B, soit par le nombre D : iceluy D sera pair, comme nous avons démontré au Scholie du précédent Theor. 1. & partant il se pourra di-

A ... 3	D 4	E .. 2
B	12	
C	6	

viser en deux également par la 6. def. du 7. E soit donc la moitié de D. Parquoy comme D sera à sa moitié E, ainsi B sera à sa moitié C : & en permutant, comme D sera à B, ainsi E sera à C. Mais A mesurant B par D, aussi D mesurera B par A par la 8. com. sent. & partant D sera la partie de B dénommée par A : donc aussi E sera la partie de C dénommée par le même A : & partant A mesurera C, par la 40. prop. 7. Si donc un nombre impair mesure un nombre pair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Si un nombre impair est premier à quelque nombre, il sera aussi premier à son double.

Soit le nombre impair A, premier à quelque nombre B, duquel le double soit C. Je dis que A est aussi premier à C. Car si A & C ne sont premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera, & soit D, lequel sera impair, comme nous avons démontré au Scholie de la 29. prop. 9. Et puis

A ... 3	B 4
C	8 D--

qu'il mesure le nombre pair C (car C est pair puis qu'il a moitié B) il mesurera aussi sa moitié B par la prop. prec. Mais il mesure aussi A. Donc D mesure iceux A & B premiers entr'eux : ce qui est absurde. Il n'y aura donc point de nombre qui mesure A & C ; & partant ils seront premiers entr'eux. Si donc un nombre impair est premier à quelque nombre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Tous les nombres qui suivent le binaire en progression double, sont seulement pairement pairs.

Soient depuis le binaire A tant de nombres qu'on voudra B, C, D, E, continuellement proportionnaux en raison double. Je dis que B, C, D, E sont tant seulement pairement pairs.

Qu'il ne soit ainsi. Soit prise l'unité, & puis-

Unité.	A2.	B4.	C8.	D16.	E32.

que depuis l'unité, A, B, C, D, E, sont continuellement prop. le plus petit mesurera le plus grand selon quelqu'un de ceux qui sont entre les proportionnaux par la 11. prop. 9. lesquels étans tous pairs, il est évident par les def. du 7. que B, C, D, E, seroient pairement pairs, & tous les autres qui pourroient suivre en la même progression. Mais d'autant que A prochain de l'unité est nombre premier, à sçavoir binaire, par la 13. prop. 9. aucun autre nombre ne mesurera aucun de tous ceux qui sont en la progression, sinon ceux de la même progression, lesquels étans tous pairs, un nombre pair mesurera chacun d'iceux par un nombre pair, & partant iceux nombres seront seulement pairement pairs. Parquoy tous les nombres qui suivent le binaire, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Si la moitié d'un nombre est impair, iceluy nombre sera seulement pairement impair.

Soit le nombre A, duquel la moitié B est impair : Je dis que A est seulement pairement impair.

Car puisque B impair est moitié de A, il le mesurera par le nombre binaire C, & par la 9. def. 7. A sera pairement impair, Mais qu'il soit seulement pairement impair,

on le prouvera ainsi. S'il étoit parement pair, un nombre pair, comme D, le mesureroit par quelque nombre pair, comme B. Et par la 9. com. sent. A est fait de D en E: mais le même A est aussi fait de la moitié B par le binaire C. Parquoy par la 19. prop. 7. le produit de C par B, étant égal au produit de E en D, comme C sera à E, ainsi D à B. Mais C nombre binaire mesure E: Il faudroit donc aussi que D pair mesurast B impair: ce qui est impossible. Donc A n'est parement pair: & partant il est seulement parement impair. Parquoy si la moitié d'un nombre est impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A 30.	
B 15.	C 2.
D --	E --

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Si un nombre pair n'est de ceux qui sont doubles depuis le binaire, & que sa moitié ne soit nombre impair, il sera parement pair, & parement impair.

Le nombre pair A, ne soit de ceux qui sont doubles depuis le binaire, & que sa moitié soit pair: Je dis que A est parement pair & parement impair.

Qu'il soit parement pair, il est évident. Car d'autant que sa moitié est pair,

A	20

le binaire, qui est pair, le mesurera par icelle moitié: & par la 9. def. 7. il sera parement pair.

Or il est aussi parement impair: car puis que iceluy nombre A n'est de ceux qui sont doubles depuis le binaire, si on le divise toujours en deux également on viendra enfin à un nombre impair auparavant que parvenir jusques au binaire, lequel nombre impair mesurera A par un nombre pair: Car si c'étoit par un impair, attendu que par la 29. prop. 9. un nombre impair multipliant un nombre impair, produit un nombre impair, A seroit impair: ce qui

THEOR. 34. PROP. XXXVI.

Si depuis l'unité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raison double, jusques à ce que le tout composé soit nombre premier : iceluy soit multiplié par le dernier produira un nombre parfait.

Soient depuis l'unité tant de nombres qu'on voudra A, B, C, D, continuellement proportionnaux en raison double, la somme desquels & de l'unité soit E nombre premier, & que E multiplié par le dernier D fasse FG : Je dis que le produit FG est nombre parfait.

Car ayant pris HI double de E ; K double de HI ; & L double de K, & ainsi de suite tant qu'il y aura de nombres proposez : iceux nombres E, HI, KL, seront continuellement proportionnaux en la raison de A, B, C, D ; & partant en raison égale, A sera à D comme E à L ; & par la 19. prop. 7. le produit de A multiplié

Unité.

A . . . 2

B 4

C 8

D 16

E 31

H 31 M 31 I

K 124

L 248

F 31 N 465 G

O -- P --

par L, sera égal au produit de D par E, sçavoir FG : mais A étant binaire, FG sera double de L : ainsi E, HI, K, L, FG, seront continuellement proportionnaux en raison double. Maintenant de HI second soit retranché HM égal à E premier ; & de FG dernier, soit retranché FN, aussi égal à E premier : par la prec. prop. comme MI est égal à E, (d'autant que HI étoit double de E) ainsi NG sera égal à E, HI, K, L, ensemble. Mais FN égal à E, est aussi égal à l'unité & à A, B, C, D ensemble. Et par conséquent FG sera égal à l'unité, & à A, B, C, D, E, HI, K, L, ensemble :

L I

& puis que FG a été fait de E multiplié par D, par la 7. com. sent. D mesurera FG ; & partant par la 11. com. sent. l'unité, & les nombres A , B , C , qui par la 11. prop. 9. mesurent D , mesureront le même FG. De-rechef puis que L mesure FG ; aussi par la 11. com. sent. les nombres E , HI , K , lesquels par la 11. prop. 9. mesurent L à cause de la raison double : mesureront le même FG ; ainsi l'unité & tous les nombres A , B , C , D , E , HI , K , L mesurent iceluy FG , lequel ne peut être mesuré par aucun autre nombre que ceux-cy , comme nous montrerons incontinent : & partant par la 12. def. du 7. il sera nombre parfait , étant égal à toutes ses parties aliquottes.

Que si on pense que FG puisse être mesuré par quelque autre nombre que les susdits ; que O le mesure , s'il est possible , selon P : donc O multipliant P produira FG par la 9. com. sent. Mais le même FG est aussi produit de E en D. Donc un même nombre est fait de E premier par D 4^e , & de P second en O 3^e , & partant comme E à P , ainsi O à D par la 19. prop. 7. & puis que A , B , C , D , sont continuellement proportionnaux depuis l'unité , & que A proche de l'unité est premier , par la 13. prop. 9. nul autre nombre que A , B , C mesurera le dernier D : & O est posé n'être le même qu'aucuns d'iceux A , B , C ; O ne mesurera donc pas iceluy D. Mais comme O à D , ainsi étoit E à P : Donc aussi E ne mesurera P : & puis que E est premier par la 31. prop. 7. E & P seront premiers entr'eux : & partant les moindres en leur raison par la 23. prop. 7. & par la 21. prop. 7. E mesurera O , comme P mesurera D. Mais nul autre que A , B , C mesure iceluy D. Donc P sera le même que l'un d'iceux A , B , C. Soit donc le même que B : & d'autant que B , C , D , & E , HI , K , sont continuellement proportionnaux en raison double , par raison égale comme B sera à D , ainsi E à K , & partant par la 19. prop. 7. le produit de B par K , sera égal au produit de D en E. Mais le produit de D en E est égal à celui de P en O. Donc un même nombre sera fait de P en O , que de B en K ; & partant par la 19. prop. 7. comme P sera à B , ainsi K à O. Mais P étoit le même que B : Donc aussi K sera le même que O : Ce qui est

absurde, car O a été posé autre que tous ceux-cy A, B, C, D, E, HI, K, L. Il n'y aura donc point d'autres nombres que A, B, C, D, E, HI, K, L, qui mesurent FG, & lequel ils composent. Iceluy est donc nombre parfait. Parquoy si depuis l'unité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionaux en raison double, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

S C H O L I E.

Il appert de ce Theor. que pour trouver des nombres parfaits, & leurs parties aliquottes, il faut poser d'ordre tant de nombres qu'on voudra continuellement doubles depuis l'unité, puis adjoûter tous ces nombres-là ensemble, & si la somme d'iceux est nombre premier, icelle étant multipliée par le dernier nombre, le produit sera nombre parfait. Mais si la susdite somme n'est nombre premier, il faudra poursuivre la position des nombres doubles jusques à ce que ladite somme de tous les nombres posez vienne à être nombre premier, laquelle étant, comme dit est cy-dessus, multipliée par le dernier des nombres doubles sera procréé un nombre parfait. Et si on prend autant de nombres continuellement doubles du susdit nombre premier (iceluy compté) qu'on en aura posé depuis l'unité, (icelle excluse) tous ces nombres avec ladite unité, seront les parties aliquottes que peut avoir le nombre parfait trouvé. Ce qui est évident par la démonstration de cette prop. & néanmoins nous joindrons encore icy quelques exemples. Ayant posé 1 & 2, leur somme 3 est nombre premier, lequel étant multiplié par 2, produit 6, nombre parfait, duquel les parties aliquottes sont 1, 2, 3. Item 1, 2, 4, sont ensemble 7, nombre premier : parquoy iceluy étant multiplié par le dernier nombre 4, le produit 28 est nombre parfait, & les parties aliquottes d'iceluy sont 1, 2, 4, 7 & 14. Mais d'autant que la somme de ces nombres 1, 2, 4, 8, sçavoir 15, n'est pas nombre premier, il faut continuer la proportion double, & on aura 1, 2, 4, 8, 16, dont la somme 31, est un nombre premier, qui multiplié par le dernier nombre 16, produit le nombre parfait 496, duquel les parties aliquottes sont 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, & 248.

Fin du neuvième Element.