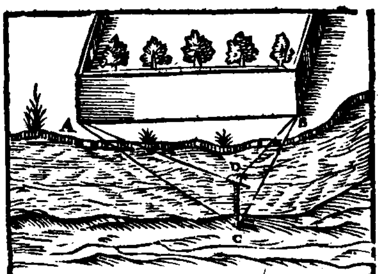
46

LES QUINZE LIVRES
DES ELEMENTS
D'EUCLIDE.

Traduits en François par D. HENRION Professeur és Mathematiques, reveus & corrigez: avec des Commentaires beaucoup plus amples & faciles, & des figures en plus grand nombre que dans toutes les impressions precedentes.

Plus, le Livre des DONNEZ du même Euclide, aussi traduit en François par ledit Henrion.

TOME I.



A ROUEN,
Chez JEAN LUCAS, ruë aux Juifs, à côté de la petite porte de l'Hôtel de Ville.

M. DC. LXXVI.

AU LECTEUR.

AMY Lecteur, voicy le dernier des Ouvrages du sieur Henrion Professeur és Mathematiques, contenant les quinze Livres des Elements d'Euclide, traduits en François, avec des Commentaires beaucoup plus amples & faciles, & des figures mieux taillées qu'en toutes les traductions precedentes, ausquels il a ajoûté le Livre des Donnez du même Euclide, aussi traduit en François, ce qui n'avoit point encores été fait jusques icy, quoy que l'usage de ce Livre soit fort commun par toutes les Mathematiques, & particulierement en l'Analyse si aujourd'huy estimée & si recherchée, & qui a remis la Geometrie en son lustre autant qu'elle y fut jamais, avec *esperance d'une perfection beaucoup plus grande. Cet Ouvrage étoit imprimé dés le vivant de l'Autheur: & s'il ne l'a publié, c'est que son intention étoit d'y ajoûter le reste de ce qui se trouve des œuvres d'Euclide, sçavoir l'Optique, & la Catoptrique, les Phenomenes, la Musique, & un fragment du leger & du pesant, toutes lesquelles parties il avoit deja traduites, comme en font foy les Manuscrits qu'il a laissés, & qui sont entre les mains de sa veuve: ainsi il divisoit tous les Ouvrages d'Euclide en deux Tomes, dont le premier étoit celui-cy, & le dernier devoit contenir ce que nous venons de dire.*

PREFACE.

LA Geometrie ſe diviſe en doctrine des plans, qui eſt appellée du mot general Geometrie & doctrine des ſolides, que les Mathematiciens appellent par un nom propre & particulier Stereometrie. Car la Geometrie en general ſe propoſe, de conſiderer les plans & les ſolides, & de les comparer entr'eux ou de les diviſer. Euclide nous voulant laiſſer en ſes Elemens une parfaite connoiſſance de la Geometrie, traitte des plans aux ſix premiers Livres, & aux cinq derniers des ſolides, recherchant leurs proprietez. Et d'autant que toutes les choſes Geometriques, & principalement ces cinq corps reguliers, qui ont de coûtume d'être appellez corps Platoniques, ne pouvoient être traittez parfaitement ſans la connoiſſance des lignes commenſurables & incommenſurables, Euclide a mis ſon dixiéme Livre devant ſa Stereometrie, auquel il traitte de ces ſortes de lignes : Et ſçachant que ce traitté des lignes commenſurables & incommenſurables ne ſe peut faire ſans la connoiſſance des nombres, il traitte des proprietez des nombres aux trois Livres qui precedent le dixiéme. C'eſt pourquoy tout ce volume des Elemens Geometriques compris en quinze Livres, (dont les deux derniers ſont attribuez à Hypſicle Alexandrin) ſe pourra à bon droit diviſer en quatre parties. La premiere partie contenuë en ſix premiers Livres, traitte des plans : La ſeconde comprenant les trois Livres ſuivans, recherche les proprietez des nombres: La troiſiéme qui conſiſte au dixiéme Livre ſeul, traitte des lignes commenſurables & incommenſurables: Et enfin la quatriéme partie contenuë aux cinq autres Livres, comprend la ſcience des corps ou ſolides. La premiere partie ſe ſubdiviſe en trois : Car aux quatres premiers Livres, il eſt traitté des plans abſolument, & de leur égalité & inégalité: mais au cinquiéme Livre il eſt traitté en general des proportions des grandeurs : & au ſixiéme, ſont examinées les proportions des plans.

Ce que c'eſt que Probleme, Theoreme, Propoſition, Lemme, Corollaire & Scholie.

TOute démonſtration de Mathematique, eſt ou Probleme ou Theoreme. Les Mathematiciens appellent *Probleme*, une démonſtration qui enſeigne à faire ou conſtruire quelque choſe : Et *Theoreme*, la démonſtration laquelle recherche ſeulement quelque proprieté d'une ou plusieurs quantitez ensemble. Bref les Problemes enseignent à trouver & construire quelque chose, & les Theoremes démontrent les affections & proprietez des choses déja faites & construites. Et tant le Probleme que le Theoreme, sont appellez *Proposition*, d'autant que l'un & l'autre nous propose quelque chose. On appelle *Lemme*, quelque Probleme ou Theoreme, qui étant necessaire à une démonstration, se prend & prouve auparavant que de venir à cette démonstration principale, afin de la faire plus évidente & briéve. On appelle *Corollaire*, une consequence que l'on tire de ce qui a été démontré en quelque proposition. Et enfin ce qu'on nomme *Scholie*, est une annotation qu'on fait seulement comme en passant sur quelque proposition.

ELEMENT PREMIER.

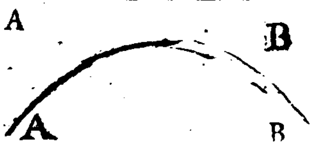
DEFINITIONS.

1. Le point, est ce qui n'a aucune partie.

LES Physiciens disent que le point est le moindre objet de la veuë ; & iceluy peut être décrit avec ancre, ou autre chose: Mais les Mathematiciens rejettans cette definition, disent que le point est un objet de l'intellect si subtil, qu'il ne peut être divisé en aucunes parties : Et iceluy ne se peut écrire, mais seulement entendre & imaginer : Bien est vray, que pour le representer à nos sens exterieurs, nous nous servons du point Physique. Le point n'a donc aucunes des dimensions Geometriques, c'est à dire qu'il n'a longueur, largeur, ny épaisseur, mais bien est-il principe d'icelles.

2. La ligne, est une longueur sans largeur.

Apres le point, Euclide vient à la ligne, qui n'est autre chose que le flux ou coulement d'iceluy point, d'un lieu en un autre: car par ainsi l'intervale compris entre ces deux lieux-là, sera une longueur ſans largeur, puis que le point du coulement duquel elle eſt produite, n'en a aucune : & par conſequent la ligne (qui eſt la premiere eſpece de magnitude ou quantité continuë) a ſeulement une dimenſion, ſçavoir eſt longueur, car n'ayant aucune largeur, il eſt certain qu'elle n'aura auſſi aucune époiſſeur ou profondeur.



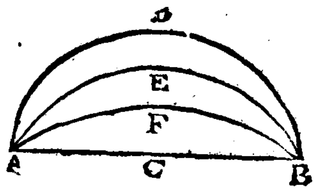
Et pour tant mieux entendre cecy, qu'on imagine le point A étre mû ou coulé depuis A iuſques en B, & avoir laiſſé par ſon flux ou coulement la trace & veſtige A B : or cette trace AB ſera appellée ligne ; car l'intervale compris entre les deux points A & B, eſt vrayement une longueur ſans largeur & époiſſeur, puis que le point A, par le coulement duquel elle eſt produite, eſt privé de toute dimenſion.

3. Les extrémitez de la ligne, ſont points.

Cecy eſt intelligible, puis que toutes lignes terminées commencent à un point, & achevent auſſi à un point, comme les lignes precedentes A B, qui ont pour leurs extrémitez les points A & B : car Euclide n'entend parler icy ny des lignes infinies, ny des circulaires, ny de toutes autres ſortes de lignes, auſquelles on ne peut aſſigner aucun terme ny extrémité.

4. La ligne droite, eſt celle qui eſt également compriſe & étenduë entre ſes points.

Les Mathematiciens ont de trois ſortes de lignes, c'eſt à ſçavoir la ligne droite, la ligne circulaire, qu'ils appellent auſſi ligne courbe, & la ligne mixte : Euclide définit icy la droite, laquelle il dit étre celle-là qui eſt également étenduë entre ſes points: ainſi la ligne A C B eſt dite ligne droite, pource que tous les points entremoyens d'icelle ligne, com-

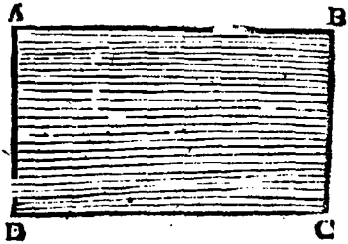


me C, sont également posez entre les extrémes A & B, l'un n'étant plus élevé ou abaissé que l'autre : ce qui n'advient aux trois autres lignes A D B, A E B, A F B, car il est manifeste que les points entremoyens D, E, F, sont bien plus élevez que les extrémes A & B. Quelques autres Autheurs ont diversement défini la ligne droite : car Campanus dit, que c'est le plus court chemin d'un point iusqu'à un autre : &, selon Archimede, la ligne droite est la plus courte de toutes celles qui ont mémes extrémitez. Mais Platon dit, que c'est celle-là dont les points du milieu ombragent les extrémes : comme par exemple, si en la ligne A C B, le point extréme A avoit la vertu d'illuminer, & le point du milieu C la force de cacher : iceluy point C empécheroit que le point extréme B fût illuminé de l'autre extréme A : Et aussi l'œil étant au point extréme A, il ne pourroit voir l'autre extréme B, à cause du point C, posé entre iceux extrémes : ce qui n'arriveroit pas aux lignes non droites, comme le démontrent les lignes ADB, AEB, & AFB.

Or tout ainsi que les Mathematiciens conçoivent la ligne être décrite par le flux & mouvement imaginaire du point, ainsi aussi entendent-ils la qualité de la ligne décrite par la qualité d'iceluy mouvement : car si on entend que le point coule droit par le plus court chemin, ne se détournant çà ne là, la ligne ainsi décrite sera appellée ligne droite : mais si le point fluant vacile en son mouvement, & s'écarte çà & là; la ligne décrite sera appellée mixte: & finalement si le point fluant ne vacile en son mouvement, mais est porté en rond d'un certain mouvement uniforme & regulier, gardant toûjours une égale distance à quelque certain point à l'entour duquel il est porté; cette ligne décrite sera appellée circulaire. Or Euclide ne traite icy que de deux simples lignes, sçavoir est de la droite & de la circulaire. Il a défini celle-là cy-dessus, & il définira cettecy à la 15. def. Mais quant à la mixte, il en obmet la définition, pource qu'elle n'a aucun usage en ses élemens Geometriques : il y en a de plusieurs sortes, & d'icelles traitent amplement Apollonius, Pergeus, Nicomedes, Archimedes, & autres Autheurs.

5. Superficie, est ce qui a longueur & largeur tant seulement.

Apres la ligne, qui est la premiere espece de quantité continuë, & qui a une ſeule dimenſion, Euclide définit la ſuperficie, qui eſt la ſeconde eſpece de quantité, & a deux dimenſions: car on n'y trouve pas la ſeule longitude comme en la ligne, mais auſſi latitude, ſans toutefois aucune profondité: comme la quantité A B C D compriſe entre les lignes AB, BC, CD, DA, & conſiderée ſelon la longitude AB, ou DC, & ſelon la latitude AD, ou BC, ſans aucune épaiſſeur ou profondité, eſt appellée ſuperficie. Quelques-uns décrivans la ſuperficie diſent, que c'eſt l'extrémité du corps. Et comme dit Proclus, la ſuperficie nous eſt fort naïfvemẽt



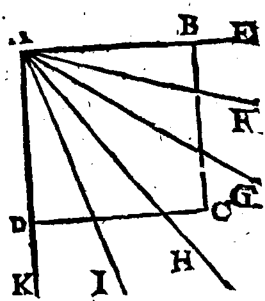
repreſentée par les ombres du corps: car veu qu'elles ne peuvent penetrer au dedans de la terre, elles ſeront ſeulement longues & larges. Davantage, comme les Mathematiciens entendent que la ligne eſt produite par le flux ou coulement du point, ainſi diſent-ils, que la ligne ſe mouvant en travers, produit la ſuperficie: comme par exemple, ſi on entend que la ligne A B ſe meuve vers la ligne D C, elle fera la ſuperficie A B C D, laquelle n'aura aucune profondeur, puis que c'eſt la trace & veſtige du mouvement de la ligne A B qui n'a aucune profondité.

6. Les extrémitez de la ſuperficie, ſont lignes.

Il faut icy entendre des ſuperficies bornées, & terminées par lignes droites, comme la ſuperficie A B C D cy-deſſus, de laquelle les extrémitez ſont les lignes AB, BC, CD, & DA: car il y a bien pluſieurs ſuperficies encloſes d'une ſeule ligne, comme de la circulaire, & autres, dont Euclide ne fait mention en ces Elemens-cy: mais il n'en veut icy parler, non plus que de la ſuperficie ſpherique, qui circuit & environne un corps entieremẽt rond & ſpherique. Comme donc la ligne terminée cõmence à un point, & finit à un autre point, ainſi auſſi la ſuperficie terminée commence par une ligne, & finit par une ligne, tant ſelon ſa longueur, que ſelon ſa largeur.

7. Superficie plane, eſt celle qui eſt également compriſe entre ſes lignes.

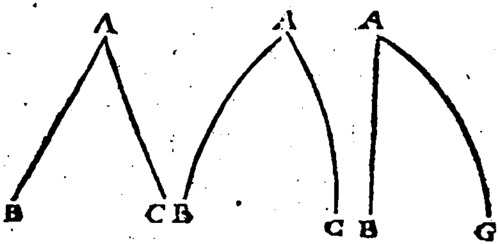
Cette définition de la ſuperficie plane a quelque ſimilitude & rapport à celle de la ligne droite: car comme la ligne qui eſt également étenduë entre ſes points, eſt appellée ligne droite; ainſi auſſi la ſuperficie qui eſt également étenduë entre ſes lignes, tellement que toutes les parties du milieu ne ſont plus élevées ny abaiſſées que les extrémes, eſt appellée ſuperficie plane. Et derechef, comme la ligne droite eſt la plus courte d'entre ſes extrémitez, ainſi auſſi la ſuperficie plane eſt la plus courte, ou briéve de toutes celles qui ont mémes extrémitez. C'eſt encore pour la méme raiſon, que quelques autres décrivans la ſuperficie plane, diſent que c'eſt celle-là de laquelle toutes les parties du milieu ombragent ſes extrémes; ou bien celle-là à toutes les parties de laquelle une ligne droite peut étre accommodée. Comme par exemple, la ſuperficie A B C D ſera dite plane, ſi la ligne droite A E ſe mouvant à l'entour du point immobile A, en ſorte qu'elle vienne à étre la méme que A F, puis la méme que A G, & puis encore la méme que A H, en apres la méme que A I, & finalement la méme que A K; elle ne rencontre rien en la ſuperficie de plus élevé ou abaiſſé l'un que l'autre, ains que tous les points de ladite ſuperficie ſoient touchez d'icelle ligne mouvante A E, & en quelque ſorte raclez par icelle. Mais toutes ſuperficies eſquelles il y a des endroits les uns plus élevez que les autres, tellement qu'on n'y peut pas accommoder une ligne droite par tous les lieux & endroits d'icelles, telle qu'eſt la ſuperficie interieure d'une voûte ou arcade, ou bien l'exterieure d'un globe, ou d'une colomne ronde, & auſſi d'un cone, &c. ſont appellées ſuperficies courbes: & icelles ſont de pluſieurs ſortes, c'eſt à ſçavoir convexe, comme la ſuperficie interieure d'une voûte ou arcade: mais la con-



templation de toutes ces choses appartient à la Stereometrie, dont traite Euclide és cinq derniers Livres ; c'est pourquoy il explique seulement icy la superficie plane, de laquelle il traite és six premiers Livres. Et cependant est à noter que cette superficie est souventesfois appellée plan par les Mathematiciens: tellement que quand ils parlent de plan, il faut tousjours entendre une superficie plane.

8. Angle plan, est l'inclination de deux lignes, l'une à l'autre se touchant en un plan non directement.

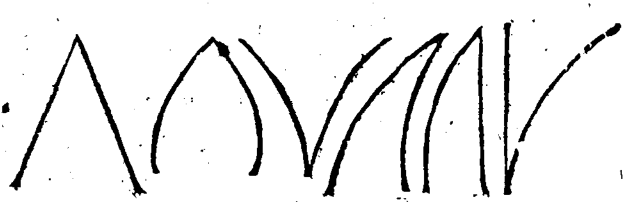
Euclide enseigne icy que quand deux lignes constituées en quelque superficie plane concurrent en un point d'icelle superficie, & ne se rencontrent directement, alors l'inclination d'icelles deux lignes s'appelle angle plan. Comme par exemple, pource que les deux lignes AB & AC, concurrent en A, & ne se rencontrent pas directement ; le concours ou inclination qu'icelles deux lignes font au point A, s'appelle angle : Et d'autant qu'iceluy angle est constitué au même plan qu'icelles deux lignes AB & AC, on l'appelle angle plan, à la difference d'autres angles, dont les uns sont nommez angles solides, desquels traite cy apres Euclide en la Stereometrie ; & les autres sont appellez angles spheriques, desquels traitent amplement Menelaüs & Theodose en leurs élemens spheriques, comme nous avons aussi fait en nos triangles spheriques.



Or quant à l'angle plan cy-dessus défini est à remarquer, premierement que la grandeur ou quantité dudit angle plan consiste en la seule inclination des lignes qui le constituënt, & non pas en la longueur d'icelles lignes; car le prolongement desdites lignes n'augmente point leur inclination, ny par consequent la grandeur de l'angle. En apres que quelques Geometres ont estimé qu'afin que deux lignes fassent angle, il étoit necessaire qu'étans continuées du point de leur rencontre, elles s'entrecoupassent en iceluy, dont s'ensuivroit que deux cercles s'entretouchans en un plan, ou qu'une ligne droite touchant un cercle ne feroit angle, ce qui est contre l'intention d'Euclide, ainsi qu'il appert, tant par cette définition de l'angle plan, que par la 16. p. 3. & comme l'a aussi bien démontré Clavius sur la mesme proposition, où il refute Pelletier, qui disoit que la ligne droite touchant le cercle, ne faisoit angle; c'est pourquoy ceux qui tiennent encore cette opinion, se mocquent bien d'Euclide, de Clavius, & autres Geometres, qui disent qu'une ligne droite touchant un cercle, fait un angle contigent, ou d'attouchement.

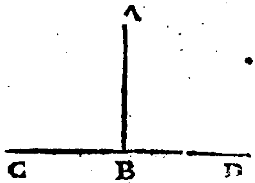
9. Que si les lignes comprenant l'angle sont droites, l'angle sera appellé rectiligne.

Tout angle plan est fait, ou de deux lignes droites, & alors il se nomme angle rectiligne, comme dit icy Euclide; ou de deux lignes courbes, & alors on l'appelle angle curviligne; ou bien d'une ligne droite & d'une courbe, & alors on le nomme angle mixte. Or les angles curvilignes peuvent varier en trois manieres, & les mixtes en deux, à cause de la diverse inclination ou habitude des lignes courbes, ainsi qu'il appert manifestement aux angles plans de la figure cy apposée.



10. Quand une ligne droite tombant ſur une autre ligne droite, fait les angles de part & d'autre égaux entr'eux, les angles ſont droits, & la ligne tombante, eſt perpendiculaire à celle-là, ſur laquelle elle tombe.

Il y a de trois ſortes d'angles rectilignes, ſçavoir eſt droit, obtus & aigu : le premier deſquels Euclide definit icy avec la ligne perpendiculaire, & quant aux deux autres il les definit aux deux definitions prochainement ſuivantes. Il dit donc icy que ſi une ligne droite tombe ſur une autre ligne droite, en ſorte qu'elle faſſe les angles de part & d'autre égaux, ce qui advient lors que ladite ligne ne s'incline ou panche plus d'un côté que de l'autre ; chacun d'iceux angles eſt appellé angle droit, & la ligne ainſi tombante, eſt dite perpendiculaire à celle-là ſur laquelle elle tombe. Comme par exemple, ſi la ligne droite A B tombe ſur la ligne droite C D, en ſorte qu'elle ne s'incline pas plus d'un côté que de l'autre, les deux angles, qu'elle fait au point B ſeront égaux entr'eux, & chacun d'iceux ſera

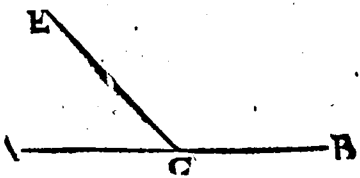


nommé angle droit ; mais la ligne A B ſera dite perpendiculaire à C D, ſur laquelle elle tombe. Par même raiſon, la ligne droite C B ſera auſſi dite perpendiculaire à la ligne droite A B, encore qu'icelle C B faſſe un ſeul angle droit avec A B ; Et ce d'autant que ſi ladite ligne A B étoit prolongée directement de la part de B, elle y feroit un autre angle égal au premier. Parquoy en Geometrie, pour conclure que quelque angle eſt droit, ou que la ligne qui le conſtituë eſt perpendiculaire à une autre, il faut ſeulement prouver que ledit angle eſt égal à celuy de l'autre côté. Semblablement, ſi quelque angle eſt dit droit, ou que l'une des lignes qui le conſtituë ſoit perpendiculaire à l'autre, on pourra auſſi conclure que ledit angle eſt égal à celuy de l'autre côté ; car ſi ces angles-là n'étoient égaux, ils ne ſeroient nommez angles droits, ainſi qu'il appert tant par la ſuſdite definition, que par les deux ſuivantes.

11. Angle obtus, eſt celuy qui eſt plus grand qu'un droit.

12. Mais l'aigu, eſt celuy qui eſt plus petit qu'un droit.

Qnand une ligne droite tombant ſur une autre s'incline ou panche plus d'un côté que de l'autre, elle fait conſequemment deux angles inégaux, dont l'un eſt plus grand que l'angle droit, & ſe nomme angle obtus, mais l'autre eſt plus petit, & s'appelle angle aigu. Ainſi pource qu'en cette figure, la ligne droite E C tombant ſur la ligne droite A B, s'incline & panche plus du côté de A C que de la part de B C, les deux angles du point C ſeront inégaux, & celuy vers B, qui eſt plus grand & ouvert



que le droit ſera dit angle obtus; mais celuy de la part de A, qui eſt plus petit & fermé que l'angle droit, ſera nommé angle aigu.

Et d'autant que ſouventefois en un plan concurrent plus de deux lignes à un même point, & par conſequent y conſtituënt pluſieurs angles, les Geometres ont accoûtumé (pour éviter confuſion) d'exprimer l'angle dont ils parlent par trois lettres, deſquelles celle du milieu dénote le point auquel les lignes conſtituënt l'angle, & celles des extrémes ſignifient les commencemens d'icelles lignes qui font iceluy angle : tellement qu'en la figure cy-deſſus, l'angle obtus que nous avons dit être celuy de la part de B, ſera exprimé & entendu par ces trois lettres E C B, ou B C E, à cauſe qu'il eſt conſtitué au point C, & contenu par les deux lignes droites E C, & B C, qui commençant en E & B, ſe vont rencontrer au ſuſdit point C. Mais l'angle aigu que nous avons dit être de la part de A, s'exprimera par ces trois lettres E C A, ou A C E, parce qu'il eſt conſtitué au point C, & fait par les deux lignes droites E C & A C, qui commencent en E & A, & ſe vont rencontrer au ſuſdit point C. Ce qu'on doit bien noter, afin de connoître & discerner facilement les angles, dont sera fait mention és demonstrations suivantes.

13. Terme, est l'extrémité de quelque chose.

Ainsi les points sont termes ou extrémitez des lignes, les lignes des superficies, & les superficies des corps.

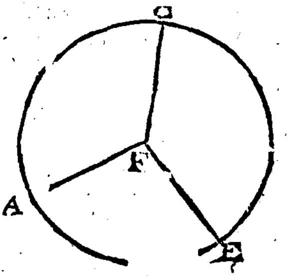
14. Figure, est ce qui est compris & environné d'un, ou de plusieurs termes.

Toute quantité ayant termes, n'est pas dite figure: mais seulement celles que les termes environnent : ainsi la ligne terminée par deux points, n'est pas dite figure : mais toutes superficies, & solides, finis & limitez, sont nommez figures, pource qu'ils sont environnez d'un seul, ou de plusieurs termes : d'un seul, comme le Cercle, l'Ellipse, & la Sphere ; de plusieurs, comme le triangle, le quarré, le cube, la pyramide, &c.

15. Cercle, est une figure plane, contenuë par une seule ligne qu'on appelle circonference, vers laquelle toutes les lignes droites menées d'un seul point de ceux qui sont en icelle figure, sont égales entr'elles.

16. Et ce point-là est appellé centre du cercle.

De toutes les figures planes, la plus parfaite est le cercle, lequel, selon que le definit icy Euclide, est une figure plane contenuë & environnée d'une seule ligne, à laquelle toutes celles menées d'un seul point de ceux qui sont dedans la figure, sont égales entr'elles : & cette ligne s'appelle periphere, ou circonference du cercle, & le susdit point, centre du cercle : Comme par exemple, si une superficie ou espace est environnée d'une seule ligne ACE



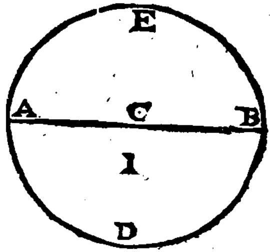
& que de quelque point d'audedans d'icelle, comme de F, toutes les lignes droites menées au terme ou circuit ACE, comme FA, FC, & FE, sont égales entr'elles : telle figure plane sera appellée cercle, & le terme ou ligne ACE, qui circuit & environne icelle figure, s'appelle periphere, ou circonference du cercle : mais ledit point F, est nommé centre du cercle.

Quelques Geometres definissent autrement le cercle, & disent, que c'est une figure plane, décrite par une ligne droite finie, laquelle ayant un des points extrémes fixe, est meuë à l'entour d'iceluy jusques à ce qu'elle retourne au même lieu où elle a commencé à mouvoir : comme si la ligne droite AF ayant le point F fixe, est entenduë se mouvoir à l'entour d'iceluy point F, tirant de A vers C, E, jusques à ce qu'elle revienne au même lieu FA, où elle a commencé son mouvement ; elle décrira par iceluy mouvement le cercle ou espace ACE, duquel la circonference est décrite & tracée par le point mobile A ; & le point fixe F, est le centre d'iceluy cercle, duquel centre toutes les lignes droites menées à la susdite circonference ACE, sont égales entr'elles, puis qu'elles proviennent toutes d'une seule & même mesure, c'est à sçavoir de la ligne FA.

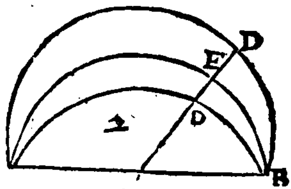
17. Diametre du cercle, est une ligne droite menée par le centre du cercle, & finissant de part & d'autre à la circonference d'iceluy cercle, le divise en deux également.

Si dans un cercle on mene une ligne droite par le centre, qui aille de part & d'autre iusques à la circonference ; icelle ligne s'appellera diametre du cercle. Comme en cette premiere figure, la ligne droite AB, qui est tirée par le centre C, & va de part & d'autre iusques à la circonference du cercle, s'appelle diametre du cercle : Et iceluy, comme adjoûte Euclide, coupe le cercle en deux parties égales, tellement que la partie AEB est égale à la partie ADB. Ce qui est assez manifeste, puisque ledit diametre AB passe par le milieu du cercle, c'est à sçavoir par le centre C : car s'il ne divisoit le cercle en deux parties égales, les lignes droites tirées du centre à la circonference, ne seroient pas égales, contre la definition du cercle : Neanmoins plusieurs Interpretes d'Euclide rapportent ...

monstration que Proclus dit, en avoir été faite par Thales Milesien, qui est telle :



Imaginons nous que la partie de cercle A B D soit superposée & accommodée à l'autre partie du cercle A E B, en sorte que le diametre A B soit commun à l'une & à l'autre partie. Or la circonference A D B se rencontrera totalement avec la circonference AEB, ou bien elle tombera au dessus d'icelle, ou au dessous : Si elles se rencontrent & conviennent l'une à l'autre, il est évident que ces deux parties là faites par le diametre A B, sont sont égales entr'elles, puisque l'une n'excede l'autre. Mais si on dit que la circonference A D B ne se rencontre pas avec la circonference A E B, ains qu'elle tombe au dessus ou au dessous d'icelle, comme en la 2. figure, soit tirée du centre C une ligne droite, laquelle coupe la circonference A D B en D, & la circonference AEB en E ; les deux lignes droites C D & C E, qui sont tirées du centre à la circonference d'un méme cercle, seront égales entr'elles, par la definition du cercle : Ce qui est absurde, car l'une n'est que partie de l'autre. Donc l'une de ces circonferences-là ne tombera pas au dessus ny au dessous de l'autre ; mais se rencontreront & conviendront totalement l'une avec l'autre, & par consequent seront égales : ce qu'il falloit demontrer.

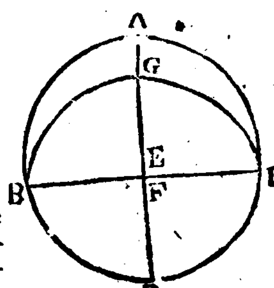


De cette demonstration il appert que le diametre ne coupe pas seulement la circonference en deux également, mais aussi toute l'aire & superficie du cercle : Car puisque les demies conferences conviennent & s'accordent entr'elles, comme il a été demontré : les superficies contenuës & encloses entre le diametre & chacune d'icelles demy circonferences conviendront aussi entr'elles, puisque l'une n'excede l'autre ; & par consequent elles seront égales entr'elles.

18. Demy cercle, eſt une figure compriſe du diametre, & de moitié de la circonference.

19. Portion ou ſegment de cercle, eſt une figure compriſe d'une ligne droite, & de partie de la circonference.

Au cercle precedent la figure AEB contenuë ſous le diametre A B, & la moitié de la circonference AEB, eſt dite demy cercle; car il a été démontré cy-deſſus, qu'icelle figure eſt moitié du cercle AEBD, & ce à cauſe que le diametre, ou ligne droite AB, qui le diviſe en deux parties, paſſe par le centre C: Mais quant une ligne droite, qui ne paſſe pas par le centre du cercle, le diviſe en deux parties: chacune d'icelles parties cõtenuë ſous ladite ligne droite,&une partie de la circõference, eſt nommée ſegment ou portion de cercle; & ces deux parties ſont inégales, car celle où eſt le centre eſt plus grande que l'autre. Comme par exemple, au cercle A B C D, duquel le centre eſt E, ſoit une ligne droite B F D, qui coupe ledit cercle en deux parties, ſans paſſer par ledit centre E; la partie B A D, compoſée ſous la ligne droite B D, & la partie de circonference BAD, s'appelle ſegment ou portion de cercle, comme auſſi BCD, qui eſt contenuë ſous la méme ligne droite B D, & la circonference BCD. Or il eſt aſſez évident que la portion B A D, en laquelle eſt le centre E, eſt plus grande que l'autre portion BCD, attendu que ſi de B par le centre E on menoit un diametre, il couperoit le cercle en deux moitiez, chacune deſquelles ſeroit plus grande que la portion B C D, & moindre que l'autre portion BAD: Neanmoins Clavius & quelques autres Interpretes d'Euclide le demontrent ainſi. Soit conçeu ou imaginé que par le centre E, ſoit mené le diametre AC perpendiculaire à BD: donc ſi les ſuſdites portions BAD,&BCD, ſont dites égales,

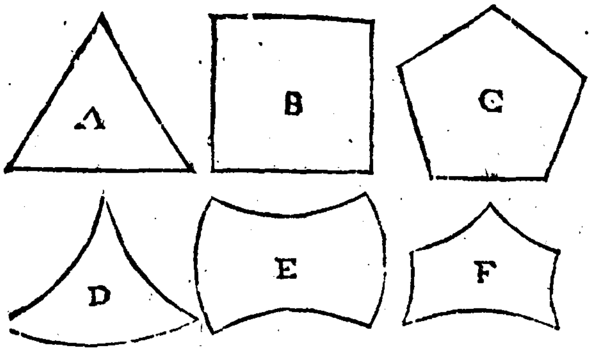


& que la portion BCD, soit entenduë se mouvoir à l'entour de la ligne droite B D, en sorte qu'elle tombe sur l'autre portion B A D ; cette portion là conviendra avec cette-cy, & la ligne droite CF à la ligne droite AF, à cause que par la 10. defin. les angles du point F sont droits & égaux : Parquoy la ligne droite FC, qui est maintenant la méme que FA, sera plus grande que EA, qui n'est que partie d'icelle FA. Mais d'autant que E C, est égale à EA, étans toutes deux menées du centre E à la circonference ; F C sera pareillement plus grande que E C, la partie que le tout : Ce qui est absurde. Donc la portion BCD ne conviendra pas à la portion BAD ; ains elle tombera dedans icelle, cōme est la portion BGD, de sorte que la ligne droite F G, qui sera lors la méme que F C sera moindre que EA ou EC; car si on disoit qu'elle tombe dehors, comme si le cercle étoit BCDG, duquel le centre fust E ; aussi la portion BCD tomberoit dehors BGD, ainsi que la portion BAD : Derechef FA, qui seroit lors la méme que FC, seroit plus grande que E G, c'est à dire que EC ; & partant la partie F C seroit derechef plus grande que le tout E C : Ce qui est absurde. Il est donc manifeste que la portion BAD, en laquelle est le centre E, est plus grande que l'autre portion BCD, puis que cette-cy est égale à la portion B G D, qui est partie de la portion B A D. Car puis qu'il a été demontré que la portion B C D, meüe à l'entour de la ligne droite B D, ne peut convenir sur la portion B A D, ne tomber hors icelle ; elle tombera totalement au dedans comme B G D.

Or ces deux definitions n'étoient pas proprement de ce lieu, veu qu'elles ne sont employées en ce premier Livre, mais bien au troisiéme, auquel la derniere est repetée.

20. Figure rectiligne, est celle qui est comprise de lignes droites.

Apres avoir definy le cercle, le demy cercle, & les portions de cercle, Euclide passe aux figures planes rectilignes, & dit, que ce sont celles contenuës & encloses de lignes droites, & telles sont les trois figures cy-dessous cottées A. B, C; par consequent les figures planes comprises & environnées de lignes courbes, comme celles cottées D E F, sont appellées figures courbelignes, ou curvilignes : mais les figures qui sont circuites &



encloses en partie de lignes droites, & en partie de lignes courbes, sont nommées figures mixtes,

21. Figure de trois côtez, est celle qui est comprise de trois lignes droites.

Euclide voulant décrire divers genres de figures rectilignes, commence par les figures trilateres, ou de trois côtez, & dit que ce sont celles qui sont contenuës & environnées de trois lignes droites : & d'autant que telles figures ont toûjours trois angles, on les appelle communément triangles. Ainsi la figure A cy-dessus, laquelle est contenuë sous trois lignes droites, qui constituënt trois angles, sera nommée figure trilatere, ou plûtôt triangle rectiligne ; & y en a de diverses especes, qui seront declarées cy-apres : mais la figure D, circuite & enclose de trois lignes courbes, sera dite triangle curviligne.

22. Figure de quatre côtez, est celle qui est comprise de quatre lignes droites.

Apres les figures trilateres viennent en ordre les quadrilateres ou de quatre côtez, c'est à sçavoir les figures contenuës sous quatre lignes droites, lesquelles constituënt aussi quatre angles; & pour ce sont-elles souvent appellées quadiangles: ainsi entre les figures precedentes celle cottée B, comprise & enclose de quatre lignes droites qui constituënt quatre angles, sera appellée quadrilatere, ou quadrangle rectiligne; & y en a de diverses especes cy-apres declarées: mais la figure cottée E enclose de quatre lignes courbes sera dite quadrangle curviligne.

23. Figures multilateres, ou de plusieurs côtez, sont celles qui sont comprises de plus de quatre lignes droites.

Le nombre des especes de figures rectilignes étant infini, Euclide s'est contenté de definir, & particulierement denommer les deux premieres especes cy-dessus declarées, c'est à sçavoir celles contenuës sous trois & quatre lignes droites: & quant aux autres especes de figures, qui sont contenuës & encloses par plus de quatre lignes droites, il les appelle de ce nom general, multilateres: mais les Geometres denommant particulierement quelqu'unes de ces figures multilateres, prennent leurs denominations du nombre de leurs angles: ainsi les figures cy-devant cottées C, & F, lesquelles sont comprises & environnées de cinq lignes, qui constituënt cinq angles, sont appellées *Pentagones*: Et celles contenuës de six lignes, sont nommées *Hexagones*; de sept, *Heptagones*; de huit, *Octogones*; de neuf, *Enneagones*; de dix, *Decagones*; de vnze, *Endecagones*; de douze, *Dodecagones*, &c.

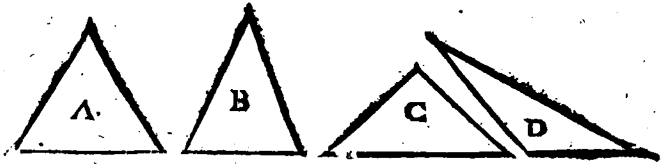
24. Or des figures de trois côtez, celle se nomme Triangle equilateral, qui a les trois côtez égaux.

25. Triangle Isoscele, qui a deux côtez égaux seulement.

26. Scalene, qui a les trois côtez inégaux.

Il y a diverses especes de triangles rectilignes, soit qu'on les considere

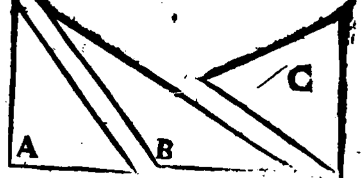
considere selon les côtez, soit qu'on ait égard à leurs angles:



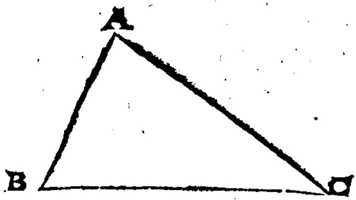
considerant les côtez il y en a de trois especes, lesquelles Euclide expose par ces trois definitions, & dit premierement que le triangle qui a tous les trois côtez égaux, comme le triangle A, s'appelle triangle equilateral : Mais les triangles qui n'ont que deux côtez égaux, comme B & C, s'appellent triangles Isoscelles. Et finalement, le triangle qui a tous les trois côtez inégaux, comme D, est nommé triangle scalene. Or les triangles Equilateraux sont tousjours uniformes & d'une méme sorte : mais les Isoscelles, & les Scalénes sont diversifiez en infinies manieres.

27. Encores des figures de trois côtez, celle se nomme triangle rectangle qui a un angle droit.
28. Ambligone, qui a un angle obtus.
29. Oxigone, qui a les trois angles aigus.

Euclide considere maintenant les triangles ayant égard à leurs angles, lesquels triangles sont de trois sortes, c'est à sçavoir rectágle, ambligone, & oxigone: les triangles rectangles sont ceux qui ont un angle droit; & tel est icy le triangle A : mais les triangles ambligones, sont ceux qui ont un angle obtus, comme est icy le triangle B : & les triangles oxigones, sont ceux qui ont tous les trois angles aigus, & tel est icy le triangle C.

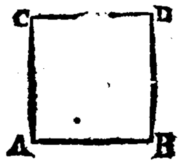


Or est à noter qu'en tout triangle deux quelconques lignes des trois qui le cōtiennent, étans prises pour deux côtez, la troisiéme restante a accoûtumé d'étre apelée par les Geometres, la base du triangle, soit qu'icelle ligne soit le costé infime du triangle, ou non : tellemeatque chacune desdites trois lignes qui constituēnt & enfermēt le triangle peust étre prise pour base : Ainsi au triangle A B C, les lignes A B, & A C étans prises pour les deux costez, la troisiéme ligne B C sera la base : mais si on prend A B, & B C pour les deux costez, A C sera la base du triangle.



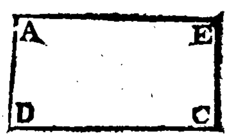
30. Mais des figures de quatre côtez; celle qui a les quatre cotez égaux, & les quatre angles droits s'appelle quarré.

Apres les figures trilateres, Euclide expose les quadrilateres, qui sont de cinq sortes : la premiere d'icelles, qui est equilaterale & rectangle, s'appelle quarré. Ainsi la figure quadrilatere A B C D, ayant tous les quatre costez égaux, & tous les quatre angles droits sera appellée quarré.



31. Quarré long, qui a les quatre angles droits, mais non pas tous les côtez égaux.

La seconde figure quadrilatere s'apelle quarré long, à cause qu'étant plus long d'une part que de l'autre, elle a tous les quatre angles droits. Ainsi la figure quadrilatere A B C D sera appellée quarré long, car elle a les quatre angles droits, & non pas



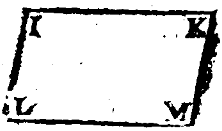
tous les costez égaux entr'eux, ains seulement les costez opposez A B, D C, qui sont plus longs que les deux autres opposez, A D, B C, qui sont aussi égaux entr'eux.

32. Rhombe, qui a les quatre côtez égaux, mais non pas les quatre angles droits.

La troisiéme sorte de figure quadrilatere, laquelle on appelle Rhombe a bien tous les quatre costez égaux entr'eux, ainsi que le quarré, mais elle n'a pas comme luy les quatre angles droits, ains elle en a deux opposez obtus, & deux opposez aigus. Ainsi le quadrilatere E F G H, duquel tous les quatre costez sont égaux entr'eux, & les quatre angles non droits, ains obtus & aigus, sera appellé Rhombe.

33. Rhomboide, qui a les angles opposez, & les côtez opposez aussi égaux entr'eux, sans être equilateral, ny rectangle.

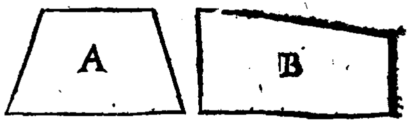
La figure quadrilatere qui n'est equilateralle ny rectangulaire, mais a les costez opposez égaux entr'eux, & les angles opposez aussi égaux entr'eux, s'appelle Rhomboide; & telle est icy la figure I K L M, de laquelle les costez opposez I K, L M sont égaux entr'eux, & plus longs que les deux autres costez opposez I L, K M, qui sont pareillement égaux entr'eux, mais les angles opposez I, M, égaux, & plus grands que les deux autres K, L, lesquels sont aussi égaux entr'eux.



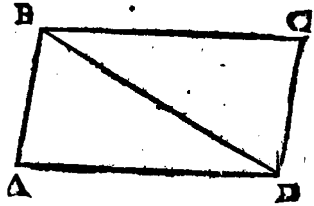
34. Toute autre figure de quatre côtez, est appellée trapeze.

Toute autre figure quadrilatere differente des quatre susdites, c'est à sçavoir qui n'est ny quarré, ny quarré long, ny

Rhombe, ny Rhomboide, s'appelle trapeſe; & telles ſont ces deux figures A & B; car l'une ny l'autre n'eſt equilatere ny rectangle, ny n'a les angles oppoſez égaux, ny tous les coſtez oppoſez auſſi égaux.

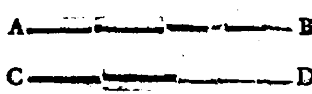


Or eſt icy à noter que quand d'un angle de quelconque figure quadrilatere on tire une ligne droite à l'angle oppoſé, cette ligne eſt appellée diametre par aucuns, & diagonalle par d'autres; ainſi au quadrilatere A B C D la ligne B D, menée de l'angle B à ſon oppoſé D eſt dite diagonalle, ou diametre.



35. Lignes droites paralleles, ſont celles qui étans ſur un méme plan, & prolongées infiniment de part & d'autre ne ſe rencontrent jamais.

Afin que les lignes droites ſoient dites paralleles, ou equidiſtantes, il ne ſuffit pas qu'étans prolongées infiniment de part & d'autre, elles ne viennent iamais à ſe rencontrer; mais il eſt auſſi neceſſaire qu'elles ſoient en une meſme ſuperficie plane: Car pluſieurs lignes droites n'étans en une méme ſuperficie, pourroient bien étre prolongées à l'infiny & ne ſe rencontrer iamais, leſquelles toutesfois ne ſeroient dites paralleles. Comme par exemple, ſi deux lignes droites poſées de travers au milieu de l'air ne ſe touchent point, bien qu'elles ſoient prolongées tant qu'on voudra, elles ne ſe rencontreront iamais, & toutesfois elles ne ſeront pas dites paralleles. Parquoy les deux lig. droites A B, & C D, leſquelles



ſont en une méme ſuperficie plane, & qui étans prolongées à l'infiny tant de la part de A, C, que de B, D, ne se rencontrent iamais, seront dites lignes paralleles.

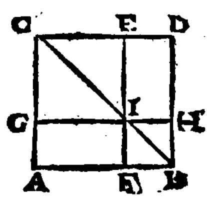
Or icy suiuent les definitions du premier livre d'Euclide : Mais d'autant qu'en ce méme Livre est souvent parlé de parallelogramme, & de leurs complemens, lesquels Euclide n'a point definy, nous adjoûterons icy leurs definitions.

36. Parallelogramme, est une figure quadrilatere qui a les côtez opposez parallels, ou equidistans.

Telle figure est tousjours l'une de ces quatre: Quarré, Quarré long, Rhombe, & Rhomboide, car elles ont toutes leurs costez opposez parallels.

37. Mais quand en un parallelogramme on mene un diametre, & deux lignes droites paralleles aux côtez, lesquelles coupant iceluy diametre à un méme point, divisent le parallelogramme en quatre autres parallelogrammes ; ces deux là par lesquels le diametre ne passe point, sont appellez complemens ; mais les deux autres par lesquels le diametre passe, sont dits être à l'entour du diametre.

Soit un parallelogramme ABDC, duquel le diametre est BC, & la ligne EF coupant iceluy diametre au point I, soit paparallele aux costez AC, BD ; mais la ligne GH coupant ledit diametre BC au méme point I, soit parallele aux côtez AB, CD. Il est manifeste que tout le parallelogramme est divisé par lesdites deux lignes paralleles EF, GH, en quatre autres parallelogrammes, deux desquels, sçavoir AGIF, & DEIH, par lesquels le diametre BC ne passe point, sont appellez par les Geometres complemens, ou supplemens des deux autres parallelogrammes BFIH, CEIG, lesquels

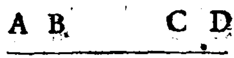


sont dits être à l'entour du diametre, à cause que par iceux passe le diametre.

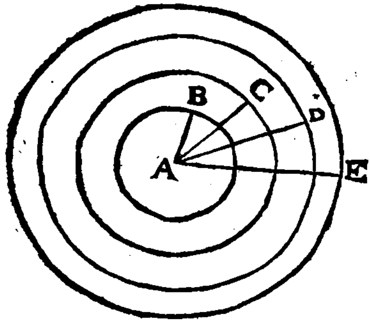
PETITIONS OV DEMANDES.

1. D'un point donné à un autre point, mener une ligne droite.
2. Continuër infiniment une ligne droite donnée & terminée.
3. Décrire un cercle de quelque centre & intervale que ce soit.

Euclide ne se sert en ces élemens-cy que de deux sortes de lignes simples, sçavoir est de la droite & de la circulaire, la description desquelles étant fort facile, il demande icy qu'on là luy concede & accorde, sans qu'il soit contraint de demontrer qu'elle est possible : ce qui est toutefois manifeste ; car puisque la ligne est un flux & coulement imaginaire du point, & partant la ligne droite être un flux procedant de droit chemin, & le plus court qui puisse estre d'un lieu à un autre, il est certain que si on entend quelque point se mouvoir directement à un autre, une ligne droite sera menée d'un point à l'autre. Parquoy on ne pûst pas nier que depuis le point A, iusques à quelconque point B, on ne puisse mener une droite ligne, comme A B, ainsi qu'Euclide requiert qu'on luy accorde par la premiere des trois petitions susdites. Et si on entend le méme point se mouvoir encore plus outre directement & sans aucunement decliner çà ne là, la ligne droite terminée sera prolongée ; & ce prolongement se pourra faire à l'infiny, veu que nous pouvons entendre ce point là se mouvoir infiniment : Et partant personne ne pourra nier que la ligne droite A B cy-dessus, ne puisse être continuée iusques en C, puis encore iusques en D, & ainsi à l'infiny, comme Euclide demande qu'on luy accorde par la 2. petition. Mais si on conçoit quelconque ligne droite terminée se mouvoir à l'entour d'un de ses points extrémes qui demeure fixe, iusques à ce qu'elle retourne au méme lieu où elle a commencé son mou-



vement, sera décrit vn cercle, & fait ce qui est requis par la 3. petition, comme il apert en ces quatre lignes droites AB, AC, AD, AE, chacune desquelles étant menée à l entour du centre A, décrit un cercle selon la grandeur & intervalle d'icelle.



Aux trois petitions precedentes, Clavius a adjoûté la suivante.

4. Etant donné quelconque grandeur, on en pûst prendre une autre plus grande, ou moindre.

Car d'autant que toute quantité continuë peust étre infiniment augmentée par addition, & diminuée par division, il ne se peut donner quantité continuë si grande, qu'il ne s'en puisse donner encore une plus grande; ny une si petite qu'il ne s'en puisse encore donner une plus petite. Ce qui est dit icy touchant l'addition, est aussi veritable aux nombres; car chaque nombre peut étre augmenté à l'infiny par l'addition continuelle de l'unité, jaçoit qu'en la diminution d'iceluy on parvienne à l'unité indivisible.

AXIOMES OV communes Sentences.

1. Les choses égales à une méme, sont égales entr'elles.

A ce premier axiome, Clavius a adjoûté, qu'une chose qui est plus grande ou plus petite qu'une des égales, est aussi plus grande ou plus petite que l'autre : Et si l'une des choses égales est plus grande ou plus petite que quelque grandeur, l'autre est pareillement plus grande ou plus petite que la méme grandeur.

2. Si à choses égales, on adjoûte choses égales, les touts sont égaux.

3. Si de choses égales, on ôte choses égales, les restes sont égaux.

4. Si à choses inégales, on adjoûte choses égales, les touts sont inégaux.

A cet axiome Clavius a adjoûté, que si à choses inégales on adjoûte choses inégales, c'est à sçavoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite, les touts sont inégaux, sçavoir est celuy-là plus grand, & cettui-cy plus petit.

5. Si de choses inégales, on ôte choses égales, les restes sont inégaux.

A cette notion Clavius adjoûte aussi, que si de choses inégales on ôte choses inégales, c'est à sçavoir de la plus grande, moins, & de la plus petite, plus; les restes sont inégaux, sçavoir est celuy-là plus grand, & cettui-cy plus petit.

Or en toutes les quatre notions precedentes par le mot de choses ou quantitez égales, il faut aussi entendre une méme commune à plusieurs; Car si à choses égales on y en adjoûte une méme commune, les touts seront égaux. Et si de choses égales on en retranche une commune, les restes seront aussi égaux. Et si à choses inégales on en adjoûte une commune; où à une méme chose commune, on adjoûte choses inégales, les touts seront inégaux. Et si de choses inégales, on en retranche une méme commune, ou d'une méme chose, on en retranche d'inégales, les restes seront inégaux.

6. Les choses doubles d'une autre sont égales entr'elles.

Clavius adjoûte à cet axiome, que ce qui est double d'une des choses égales est pareillement double de l'autre : Mais il est aussi manifeste que les choses qui sont triples d'une méme, ou bien quadruple, ou quintuple, &c. sont égales entr'elles.

7. Les choses qui sont moitiez d'une méme, sont égales entr'elles.

Il est aussi évident que les choses égales entr'elles sont moitiez d'une méme : Et semblablement que les choses qui sont tierces parties d'une méme, ou quartes, ou cinquiémes, &c. sont aussi égales entr'elles.

En ces deux derniers axiomes, par une méme quantité on doit aussi entendre les quantitez égales, car les choses doubles, triples, quadruples, &c. de choses égales, sont aussi égales entr'elles; Item, les choses qui sont moitiez, ou tierces parties, &c. de choses égales, sont pareillement égales entr'elles.

8. Les choses qui conviennent entr'elles, sont égales entr'elles.

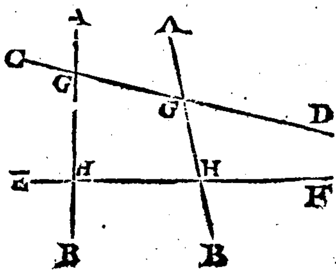
C'est à dire, que deux grandeurs seront égales entr'elles, si étans posées l'une sur l'autre, l'une n'excede l'autre, mais toutes deux ensemble s'ajustent entr'elles : comme deux lignes droites, seront dites étre égales entr'elles, si l'une étant posée sur l'autre, celle qui est posée dessus s'ajuste à toute l'autre, tellement qu'elle ne l'excede, ny ne soit excedée d'icelle. Ainsi aussi deux angles rectilignes seront égaux entr'eux quand le sommet de l'un, étant posé sur le sommet de l'autre, l'un n'excede l'autre, mais les lignes de l'un tombent totalement sur celles de l'autre : car par ainsi les inclinations des lignes seront égales, combien que souventefois icelles lignes soient inégales entr'elles. Ainsi aussi deux superficies seront égales entr'elles, quand l'une étant posée sur l'autre, elle ne l'excede, ny n'est excedée par icelle, mais s'ajustent totalement entr'elles. Quelqu'un expliquant cette notion a dit que convenir, c'est avoir ses extrémitez sur les extrémitez : ce qui n'est pas vray en toutes grandeurs; Car pour exemple, une ligne droite peut bien avoir ses extrémitez sur les extrémitez d'une ligne courbe, laquelle neanmoins, ne luy sera égale. Ainsi aussi une ligne courbe peut bien avoir ses extrémitez sur les extrémitez d'une autre ligne courbe, laquelle ne luy sera pas pourtant égale. Or il est manifeste que de cet axiome on peut bien convertir & prendre pour principe, *que les lignes droites égales conviennent* : Aussi *que les angles rectilignes égaux conviennent* : Semblablement, *Que les superficies planes égales & semblables conviennent*. On peut bien encore tirer quelques autres converses de cet axiome : mais de le vouloir convertir universellement (comme quelques-uns) c'est se mocquer, veu que si on trouve une ligne courbe égale à une droite, elles ne conviendront pas pourtant : & aussi qu'à tout angle rectiligne, il s'en peut bailler un curviligne égal, lesquels neanmoins ne conviendront iamais : voire méme faire un quarré égal à un triangle, ou à quelconque autre figure rectiligne : lesquels pourtant ne peuvent iamais convenir.

9. Le tout est plus grand que sa partie.
10. Tous les angles droits sont égaux entr'eux.

De ce principe, nous pouvons convertir & prendre pour maxime, que tout angle rectiligne égal à un angle droit, est aussi droit.

11. Si une ligne droite tombant sur deux autres lignes droites, fait les angles interieurs d'un méme côté plus petits que deux droits, icelles deux lignes étans continuées à l'infiny, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

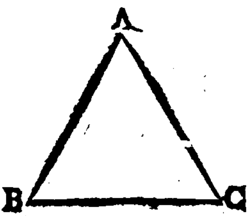
Comme par exemple, si la ligne droite A B, tombant sur les deux lignes droites C D, E F, & les coupant aux points G, H, fait les deux angles interieurs D G H, F H G, pris ensemble plus petits que deux droits, icelles deux lignes C D, E F, étans continuées à l'infiny se rencontreront de la part de D, F, où les susdits angles interieurs



ſont faits moindres que deux droits : Car il eſt manifeſte que de l'autre côté, ſçavoir eſt vers C, E, l'eſpace d'entre leſdites deux lignes C D, E F, s'élargira tousjours de plus en plus;mais de cettui-cy il s'étrecira en ſorte que finalement icelles lignes ſe rencontreront à un point.

12. Deux lignes droites n'enferment pas un eſpace.

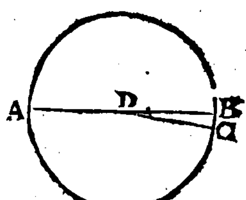
Une ſeule ligne courbe enferme bien un eſpace,comme font auſſi une ligne droite & une courbe, mais deux droites ne le peuvent faire, ains il en faut du moins trois, pour contenir & enclore une eſpace, cõme il apert en cette figure, en laquelle les 2 lignes droites A B, & B C, qui font l'angle B, étans prolongées tant qu'on voudra de la part de A & C, ne ſe joindrõt point,mais au contraire elles ſe dilateront tousjours de plus en plus, tellement que pour enclore l'eſpace d'entre icelles deux lignes, il ſera neceſſaire d'en mener une troiſiéme, comme A C.



A ces 12 axiomes, Clavius & autres Interpretes d'Euclide, ont encore adjoûté les 8 ſuivans.

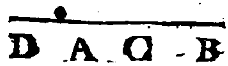
13. Deux lignes droites ſe rencontrans indirectement n'ont pas un méme & commun ſegment.

Combien que par la nature de la ligne droite, il ſoit aſſez manifeſte que deux lignes droites, ſe rencontrans de travers, ne peuvent avoir aucune partie commune, tant petite qu'elle puiſſe étre, outre le point de leur rencontre ; ſi eſt-ce toutesfois que Proclus le demontre ainſi. Que deux lignes droites A D B, A D C ayent, s'il eſt poſſible, une partie cõmune A D. Du centre D, & de l'intervale d'icelle A D, ſoit d'écrit un cercle coupant les deux



lignes droites proposées aux points B & C. Donc les circonferences AB, & ABC seront égales entr'elles: (car elles sont circonferences de deux cercles égaux, puis que ADB, ADC sont posez diametres) la partie & le tout : ce qui est absurde. Donc deux lignes droites, &c.

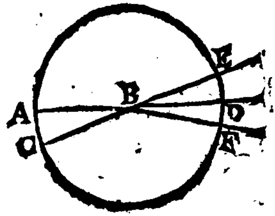
Or nous n'avons pas raporté cet axiome, ny aussi les sept autres suivans, tout de même qu'ils se trouvent dans Clavius & autres Interpretes d'Euclide, ains avons changé quelques mots aux uns, & ajoûté aux autres, afin d'ôter de ceux-là tout doute & ambiguité, & ne laisser en ceux-cy aucune défectuosité : comme par exemple, en cettuy-cy nous avons ajoûté *se rencontrans indirectement*, pource que deux lignes droites peuvent bien avoir un commun segment, quand elles sont posées directement, & constituent comme une seule ligne droite, ainsi qu'il



apert icy aux deux lignes droites D C & B A, qui ont la partie ou segment A C commun : mais quand elles sont posées de travers & indirectement, elles ne peuvent avoir aucune partie commune outre le point de leur rencontre.

14. Deux lignes droites se rencontrans à un point indirectement, si elles sont toutes deux prolongées, elles s'entrecouperont necessairement en iceluy point.

Cet axiome dépend aussi de la nature de la ligne droite, & toutesfois Clavius le démontre ainsi. Que deux lignes droites A B, C B se rencontrent indirectement au point B, ie dis qu'icelles lignes étans prolongées s'entrecouperont à iceluy point B, sçavoir est que C B prolongée tombera, comme en E, au dessus de A B prolongée. Car si C B continuée ne tomboit au dessus de A B prolongée, ou elle conviendroit avec icelle A B continuée, de sorte qu'elle passeroit par D, & par ainsi les deux lignes droites A B D, C B D auroient un même



segment B D commun, contre le precedent axiome : ou bien elle tomberoit au dessous de AB prolongée comme en F, tellement que C B F seroit une ligne droite : Donc du centre B, & de quelconque intervalle soit décrit un cercle ACFD. coupant les lignes droites A B, C B prolongées en D, F. Or puis que l'une & l'autre ligne droite A B D, CBF passe par le centre B, tant ACD que CF sera demy cercle par la 18 def. & consequemment les circonferences A B D & CF seront égales entr'elles, le tout & la partie : ce qui est absurde.

15. Si à choses égales on adjoûte choses inégales, l'excez des toutes sera le méme que l'excez des adjoûtées.

Aux grandeurs égales A B, C D, étans ajoûtées les inégales B E, D F, desquelles la difference ou excés est G E ; il est manifeste que la toute A E excedera la toute CF du même excez G E.

16. Si à choses inégales on ajoûte choses égales, l'éxcez des toutes sera le même que l'excez de celles qui étoient au commencement.

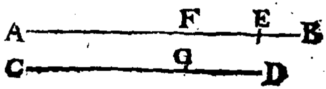
Comme si (en la figure precedente) aux grandeurs inégales BE, DF, dont l'excez ou difference est G E, on ajoûte les grandeurs inégales A B, C D : il est manifeste que la toute A E excedera la toute CF du même excez G E.

17. Si de choses égales on retranche choses inégales, l'excez des restantes sera le méme que l'excez des retranchées.

Des grandeurs égales A B, C D, étans retranchées les inégales, B E, D F, dont l'excez est EG, il est évident que le reste C F excedera le reste A E, du méme excez E G.

18. Si de choses inégales on ôte choses égales, l'excez des restantes sera le méme que l'excez des toutes.

Comme si des grandeurs inégales A B, C D, dont l'excez est B E, on retranche les grandeurs égales A F, C G, il est manifeste que le reste F B, excedera le reste G D, du méme excez B E.



19. Le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

20. Si un tout est double d'un tout, & le retranché du retranché ; le reste sera aussi double du reste.

Comme par exemple, le nombre total 24. étant double du nombre total 12 : & 18. retranché de celuy-là, double de 5. retranché de cettui-cy, 14. reste du premier tout, sera aussi double de 7. reste du second tout.

ELEMENT PREMIER.

PROBL. I. PROP. I.

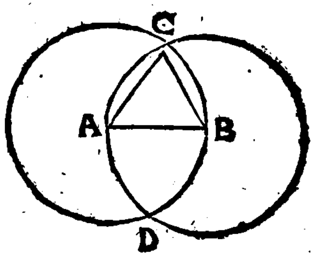
Sur une ligne droite donnée & terminée, décrire un triangle equilateral.

SOIT la ligne droite donnée A B, sur laquelle il faut faire un triangle equilateral.

Du centre A, & de l'intervale de AB soit décrit le cercle BCD: Item, du centre B, & de l'intervale de la méme A B, soit décrit un autre cercle A C D, coupant le premier és points C & D, de l'un desquels, sçavoir de C, soient menées les deux lignes droites C A, & C B: Ie dis que le triangle A B C, construit sur la ligne droite donnée A B, est equilateral.

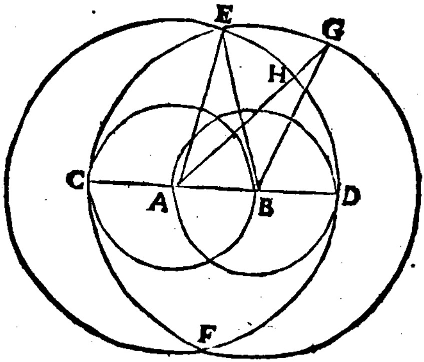
Car le costé A B, est égal au costé A C par la quinziéme definition, d'autant qu'ils procedent de méme centre vers méme circonference; & par la méme raison, le costé B A est égal au costé B C. Donc par la 1. com. sent. les costez C A,

& C B seront égaux, chacun étant égal à A B : & partant le triangle A B C décrit sur A B, est equilateral ; qui est ce qu'il falloit faire.



SCHOLIE.

Quelques Interpretes ont icy enseigné à décrire aussi sur une ligne droite donnée un triangle Isoscelle, & un Scalene, ce que nous ferons aussi en cette maniere. Soit une ligne droite donnée A B, à l'entour de laquelle des centres A & B, soient décrits deux cercles, ainsi que dessus. En apres soit prolongée icelle A B, de part & d'autre vers les circonferences iusques en C & D : puis du centre A, & intervale A D, soit décrit le cercle D E F : Item du centre B, & intervale B C, le cercle C E F, coupant le premier és points E & F, de l'un ou l'autre desquels, sçavoir de E, soient menées aux points A & B, les deux lignes E A, E B : Ie dis que le triangle A E B, fait sur la ligne donnée

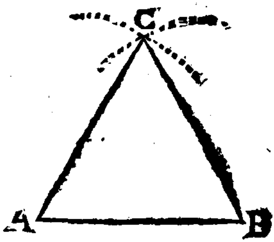


mée AB, est Isoscelle, qui est que les deux côtez AE, EB, sont égaux entr'eux, & plus grands que AB. Car d'autant que par la 15 def. AE, est égale à la ligne droite, AD, & icelle AD est double de AB, veu que BA. & DB, sont égales entr'elles : aussi AE sera double de AB. Derechef, parce que BE est égal à BC, & icelle BC est double de AB, aussi BE; sera double d'icelle AB. Veu donc que l'un & l'autre côté AE & BE est double de la même AB, ils seront égaux entr'eux par la 6. com. sent. & partant plus grands que la ligne AB. Donc le triangle AEB est Isoscelle. Maintenant, si du point A, on tire la ligne droite AG à la circonference EGF, qui ne soit la même que AE, ou AD, coupant la circonference EHD en H, & de G on mene à B la ligne droite GB, sera constitué le triangle AGB sur la ligne AB, lequel ie dis être scalene. Car par la 15. def. tant AH, AD, que BG, BC sont égales. Mais AD, BC sont doubles de AB: d'icelle seront donc aussi doubles AH, BG: & partant plus grandes qu'icelle AB. Veu donc que AG est plus grande que AH, ou que BG, le triangle AGB sera scalene : ce qu'il falloit faire.

Or est icy à noter que pour briéveté nous mettons souventesfois ce mot ligne au lieu de ligne droite: & quelquesfois aussi nous posons simplement deux lettres capitales: comme par exemple AB, au lieu de dire la ligne droite AB, c'est pourquoy quand on trouvera ledit mot ligne posé simplement, ou bien deux lettres capitales de suite, il faudra entendre une ligue droite. Semblablement quand on trouvera ce mot angle, ou trois lettres capitales posées simplement de suitte sans aucune explication, il faudra entendre un angle rectiligne, le lieu duquel sera toûjours denotté par la lettre du milieu, ainsi que nous avons déja remarqué à la 12. Def.

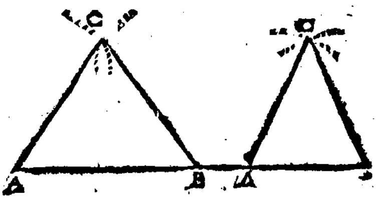
Et d'autant qu'en la construction & démonstration de la plusspart des problémes de ces Elemens-cy, Euclide employe beaucoup de paroles, & tire plusieurs lignes qui ne sont necessaires pour pratiquer lesdits problémes, nous enseignerons en suitte de leurs démonstrations, comme on peut facilement & briévement construire lesdits problemes, & principalement ceux qui sont les plus en usage chez les Mathematiciens, & en la pratique des-

quels on peut aporter quelque brièveté.

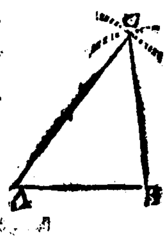


Premierement donc, pour décrire un triangle équilateral sur une ligne droite donnée AB, des centres A & B, mais de l'intervalle d'icelle AB, soient décrits deux arcs de cercles s'entrecoupans en C: puis iceluy point C, soient tirées les lignes droites AC, BC, & & sera fait le triangle équilateral ACB.

Mais pour décrire un triangle Isoscelle sur ladite ligne AB: des centres A & B, mais d'un intervale plus grand qu'icelle AB, si on veut les côtez plus grands que la ligne donnée, ou moindre (& toutesfois plus grand que la moitié d'icelle AB) si on veut les côtez moindres: & soient décrits deux arcs s'entrecoupans en C, puis tirées les deux lignes AC, BC, lesquelles feront sur AB le triangle Isostelle ACB.



Et pour construire un triangle scalene sur ladite AB, du centre B, & d'un intervale plus grand que BA, soit décrit un arc, puis du centre A, & d'un intervale encore plus grand que le precedent, soit décrit un autre arc qui coupe le premier en C, auquel point soient menées les deux lignes droites AC, BC, & sera fait le triangle scalene ACB.



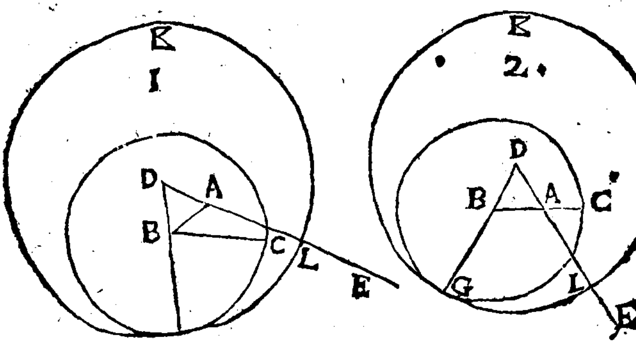
Voila dono comme il faut décrire sur une ligne donnée un triangle ou equilateral, ou Isoscelle, ou scalene, & sur la 22. prop. de ce Livre nous enseignerons comme il faut construire quelconque triangle ayant les trois côtez égaux à trois lignes droites données.

PROB. 2. PROP. II.

D'un point donné, mener une ligne droite égale à une ligne droite donnée.

Soit le point donné A, & la ligne droite donnée B C : & il faut du point A, mener une ligne droite égale à icelle donnée B C.

De l'un ou l'autre extréme de la ligne donnée B C, sçavoir est de B, comme centre, & de l'intervale d'icelle BC, soit décrit le cercle C G : puis du point donné A, au centre B, soit



menée la ligne droite A B (sinon que le point A fût donné en la ligne B C, comme en la 2. fig.) sur laquelle ligne A B par la precedente proposition soit décrit le triangle equilateral ADB, & soit continué le costé DB, jusques à ce qu'il rencontre la circonference en G : mais le costé DA tant qu'on voudra en E. En apres, du centre D, & de l'intervale de la ligne droite DG, soit décrit le cercle GKL coupant la ligne DE en L : Je dis que la ligne AL, qui est menée du point donné A, est égale à la ligne droite donnée BC.

Car les lignes droites DG & DL sont égales, d'autant qu'elles procedent de même centre vers une même circonference, desquelles lignes si on ôte DA & DB, qui sont égales, étant DAB triangle equilateral : les restantes BG & AL seront aussi égales par la 3. com. sent. Mais BG est égale à BC, parce qu'elle procede de même centre vers même circonference. Donc AL sera égale à BC, parce que les choses égales à une même sont égales entr'elles. Nous avons donc du point donné A mené la ligne droite AL égale à la ligne droite donnée BC. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

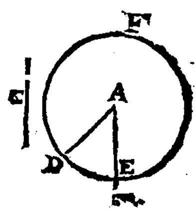
Ce probléme peut avoir divers cas : car où le point donné est posé en la même ligne droite donnée, ou hors icelle : & selon chacune de ces positions il y peust encor avoir divers cas, deux desquels seulement nous avons raporté icy, d'autant qu'en tous les autres cas il y a toûjours une même construction & demonstration.

Que si en la construction on fait sur la ligne droite AB le triangle ABD Isoscelle au lieu qu'il a été fait equilateral, on demontrera en la même maniere la ligne droite AL être égale à la ligne droite BC.

Quant à la pratique de ce probléme, elle est fort facile : car il n'y a qu'à prendre la ligne donnée BC, & de son intervale décrire un arc du centre A, & quelconque ligne droite menée d'iceluy centre à cet arc, sera égale à la ligne droite donnée BC.

PROB. 3. PROP. III.

Deux lignes droites inégales étans dondées, ôter de la plus grande, une ligne droite égale à la plus petite.



Soient les deux lignes droites inégales AB & C, desquelles AB est la plus grande : & d'icelle il faut ôter une ligne égale à C.

A l'un ou l'autre des extrémes de la plus grande ligne AB, sçavoir est au point A, soit posée par la precedente prop. la ligne droite AD égale à la moindre C : puis du centre A, & de l'intervale AD, soit décrit un cercle coupant AB en E. Je dis que la ligne AE est égale à C. Car d'autant que par la 15. def. les lignes droites AD, AE sont égales : & par la construction AD est égale à C; par la 1. com. sent. AE sera aussi égale à C. Nous avons donc ôté de AB la ligne AE égale à C, ainsi qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

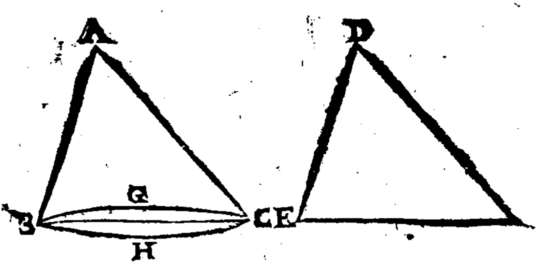
Il y peut bien avoir divers cas en ce probléme, à cause des diverses positions ausquelles se peuvent rencontrer les deux lignes données, mais en tous ces cas-là on peut toûjours faire la même construction & demõstration que cy dessus, comme Proclus a fort bien remarqué sur cette prop.

Quant à la pratique de ce probléme, elle est tres-aisée, veu qu'il n'y a qu'à prendre la moindre ligne donnée, & de l'intervale d'icelle, décrire de l'un ou l'autre extréme de la plus grande ligne un petit arc, qui coupera d'icelle, une ligne égale à la moindre donnée.

THEOREME 1. PROP. IV.

Si deux triangles ont deux côtez égaux à deux côtez chacun au sien, & l'angle contenu d'iceux, égal à l'angle : la base sera égale à la base ; & les autres angles égaux aux autres angles, chacun au sien; & le triangle égal au triangle.

Soient les deux triangles ABC & DEF, desquels le côté AB



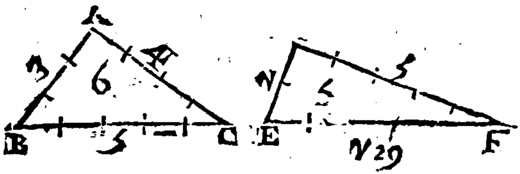
soit égal au côté DE, & AC à DF, & l'angle A égal à l'angle D : Ie dis que la base BC sera égale à la base EF, & l'angle B égal à l'angle E, & l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC égal au triangle DEF.

Qu'il ne soit ainsi ; si on entend le triangle DEF, être posé sur le triangle ABC, en sorte que le point D soit sur le point A, & que DE tombe sur AB, aussi DF tombera sur AC : autrement l'angle A ne seroit pas égal à l'angle D. Et d'autant que les costez AB & AC sont égaux aux costez DE & DF, chacun au sien, ils conviendront par la 8. com. sent. convertie. & partant les extremitez E & F tomberont sur les extremitez B & C : ainsi la base EF conviendra avec la base BC, car si elle ne convenoit, elle tomberoit ou au dessus d'icelle BC, comme BGC, ou au dessous, comme BHC : ce qui est impossible, attendu que deux lignes droites ne peuvent enclore une espace par la 12. com. sent. Donc les deux bases BC, & EF conviendront, & partant seront égales entr'elle par la susdite 8. com. sent. Et par ainsi tout le triangle DEF conviendra avec tout le triangle ABC, consequemment égal à iceluy, & l'angle B conviendra aussi avec l'angle E, & l'angle C avec l'angle F ; partant égaux. Si donc deux triangles ont deux costez égaux à deux costez, chacun au sien, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

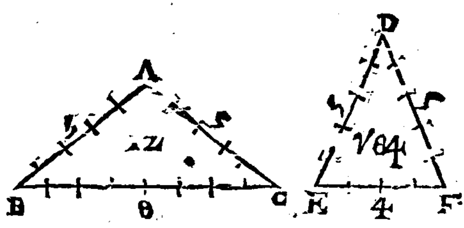
Euclide met deux conditions en ce theoreme qui y sont du tout necessaires ; la premiere desquelles est que deux costez d'un triangle soient égaux aux deux costez de l'autre chacun au sien : & la seconde, que les deux angles contenus d'iceux costez égaux, soient aussi égaux. car defaillant l'une ou l'autre de ces deux conditions, ny les bases, ny les autres angles ne pourroient jamais être égaux : & la derniere défaillant, les triangles peuvent bien être quelquefois égaux, mais le plus souvent ils sont inégaux : ce que nous pourrions facilement demontrer icy n'étoit que plusieurs choses à ce requises n'ont encore été démontrées : neanmoins afin de rendre aucunement évidente la necessité des susdites conditions nous rapporterons icy ce qu'en dit Proclus sur cette proposition, & Clavius apres luy.

Pour la premiere condition de ce theoreme, soient deux triangles ABC, DEF, ayans les angles A & D égaux *ſçavoir droits; & les deux coſtez AB, AC égaux aux*



deux coſtez DE, DF, non chacun au ſien, mais ces deux-là pris enſemble égaux à ces deux-cy auſſi pris enſemble: & ſoit AB 3, & AC 4, qui ajoûtez enſemble font 7, mais DE ſoit 2, & DF 5, qui font auſſi enſemble 7. Ce qu'étant ainſi, la baſe BC ſera 5, & la baſe EF, racine quarrée de ce nombre 29, laquelle eſt plus grande que 5, mais moindre que 6, & l'aire ou ſuperficie du triangle ABC ſera 6: mais l'aire du triangle DEF ne ſera que 5. Finalement les angles ſur la baſe BC ne ſeront pas égaux aux angles de deſſus la baſe EF, chacun au ſien. Toutes leſquelles inégalitez adviennent à cauſe de ce que les coſtez AB, AC ne ſont pas égaux aux coſtez DE, DF chacun au ſien.

Quant à la ſeconde condition: Les coſtez AB, AC du triangle ABC ſoient égaux aux coſtez DE, DF du triangle DEF, chacun

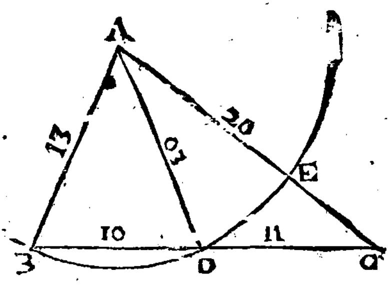


au ſien, & chacun d'iceux ſoit 5, mais les angles A & D contenus d'iceux coſtez ſoient inégaux, & ſoit A plus grand que D. Toutes leſquelles choſes étans ainſi, la baſe BC ſera plus grande que la baſe EF, comme il ſera demontré en la 24. prop. de ce Livre.

Que ſi nous poſons la baſe BC être 8, & la baſe EF 4, l'aire du triangle ABC, ſera 12; mais l'aire du triangle

D E F sera la racine quarrée de ce nombre 84, laquelle est plus grande que 9, mais moindre que 10. Ce qui est tres-bien connu des Geometres.

Et afin qu'on n'estime pas que cette inégalité advienne à raison de ce que tous les quatre costez des triangles sont égaux, & rendre tant plus manifeste la necessité de la seconde condition de ce theoréme, soit un triangle A B C duquel le costé A B soit moindre que le costé AC, & aussi que la base B C. Du centre A, & de l'intervale du petit costé A B, soit décrit un cercle BDE qui coupera tant le plus grand costé A C, que la base B C: Car autrement il passeroit ou par le point C, ou au delà d'iceluy; ce qui est absurde, veu que toutes les lignes droites tirées du centre A à la circonference du cercle B D E, doivent être égales entr'elles par la 15. def. Qu'il coupe donc la base B C en D, & soit tirée la ligne AD. Par la même 15. def. A B est égale à AD, & A C est commune à tous les deux triangles ABC, ADC, & partant iceux triangles auront les deux costez A B, A C égaux aux deux costez A D, A C, chacun au sien; mais l'angle DAC, contenu des deux costez A D, AC, n'est que partie de l'angle BAC, contenu des costez égaux à ceux-là; & partant la base DC ne sera aussi que partie de la base B C, & pareillement le triangle ADC partie du triangle A B C. Ce qui est aussi manifeste par l'application des nombres aux lignes: Car les Geometres sçavent tres-bien que le costé A B étant 13, le costé AC 20, & la base B C 21; le costé AD sera aussi 13, & la base DC 11; mais l'aire ou contenu du triangle A B C sera 126, & celuy du triangle D A C ne sera que 66. Donc



afin que de deux triangles les bases soient égales entr'elles, & leurs angles aussi égaux entr'eux, & par *reillement les triangles égaux ; il est du tout necessaire que non seulement chaque costé de l'un soit égal a chaque costé de l'autre, mais aussi que les angles contenus d'iceux costez soient égaux entr'eux, comme a fort bien dit* Euclide.

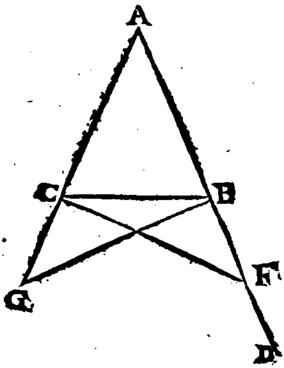
*Finalement, nous remarquerons une fois pour toutes, qu'*Euclide *n'entend parler en ces Elemens-cy que des triangles rectilignes, car combien que cette proposition & plusieurs autres se puissent faire generales étans veritables ; tant au regard des triangles rectilignes que des spheriques, si est-ce toutesfois que cela n'advient pas en toutes propositions, comme on peut voir en nôtre traité des triangles spheriques, c'est pourquoy nous étendrons toutes ses propositions seulement aux triangles rectilignes, encores qu'*Euclide *ne les specifie pas.*

PROP. V. TH. 2.

Les triangles Isosceles, ont les angles sur la base égaux : & les côtez égaux étans continuez, les angles exterieurs sous la base sont égaux.

Soit le triangle Isoscelle ABC : Je dis premierement que les angles ABC, & ACB, sur la base BC, sont égaux.

Qu'il ne soit ainsi. Soient prolongez AB & AC, costez égaux jusques en D & G: & soit fait AF égale à AG par la 3. prop. & soient menées les lignes BG & CF. Les deux triangles ABG, & ACF, ayans l'angle A commun, ont les deux costez A B & A G égaux aux deux costez AC, & AF, chacun au sien ; & par 4. proposition, la base B G sera égale à la base C F, & l'angle ABG égal à l'angle AFG & l'angle G égal à l'angle F. Item les triangles G C B, FBC, ayant l'angle G égal à l'angle F, & les deux costez GB, & GC égaux aux



deux costez CF & FB : (Car CF a été prouvé tantost égal à BG ; & AG, AF étans égaux ; & AC, AB aussi égaux ; les restes CG, & BF seront aussi égaux) par la 4. prop. la base sera égale à la base ; & les autres angles égaux aux autres angles, chacun au sien : sçavoir est l'angle GBC, égal à l'angle FCB. Et qui des angles égaux ABG & ACF, oste les angles égaux CBG & BCF; les demeurans ABC & ACB, seront égaux.

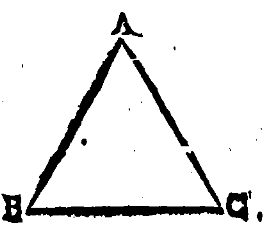
Pour la seconde partie. Que les costez égaux AB & AC étans continuez, les angles exterieurs sous la base BC, sont égaux, sçavoir FBC à BCG, elle a été suffisamment démontrée ; lors qu'on a prouvé que les triangles GBC, & CFB, avoient leurs angles égaux, chacun au sien. Parquoy les triangles Isoscelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Cette proposition est aussi vraye és triangles équilateraux. Car les deux côtez AB, AC du triangle ABC étans égaux entr'eux, ou l'autre côté CB, est pareillement égal à iceux ; comme il avient au triangle équilateral, ou bien inégal, comme il arrive au triangle Isoscele : Il s'ensuit necessairement, que les angles de dessus la base BC, sont égaux entr'eux, & ceux de dessous la même base aussi égaux entr'eux, comme il appert par la démonstration cy-dessus.

COROLLAIRE.

De cette 5. proposition s'ensuit que tout triangle équilateral est aussi équiangle, c'est à dire que les trois angles de quelconque triangle équilateral sont égaux entr'eux. Car soit un triangle équilateral ABC : Donc parce que les deux costez AB, AC sont égaux, par la 5. prop. les deux angles B & C seront égaux. Semblablement, pource que les deux costez AB, BC sont égaux, les deux angles A & C seront aussi égaux. Donc

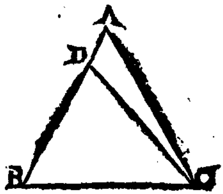


par la 1. com. sent. tous les trois angles A, B, C, seront égaux entr'eux. Ce qu'il faloit démontrer.

THEOR. 3. PROP. VI.

Si un triangle a deux angles égaux entr'eux; les côtez soutendans iceux angles, seront aussi égaux entr'eux.

Soit le triangle ABC, duquel les deux angles ABC,& ACB sur la base BC sont égaux : Je dis que les deux costez AB & AC qui soûtendent les susdits angles égaux, sont aussi égaux.



Autrement, soit AB plus grand que AC, s'il est possible : on en pourra donc retrancher une partie égale à AC par la 3. prop. laquelle partie soit BD, & soit menée la ligne DC : les deux triangles DBC, & ACB, ont deux costez égaux à deux costez chacun au sien, & les angles compris d'iceux costez aussi égaux; car les deux costez BD & BC du triangle BDC sont égaux aux deux costez AC,& CB du triangle ACB, & l'angle B égal à l'angle ACB; & par la 4. prop. iceux triangles DBC, ACB, seront égaux ce qui est impossible : car l'une est partie de l'autre, Donc les costez AB, & AC n'étoient pas inégaux, ains égaux, Ce qu'il falloit demontrer.

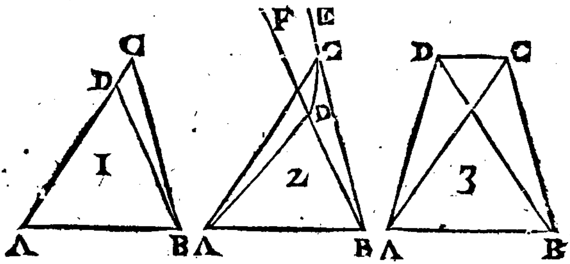
CORROLAIRE,

Il s'ensuit de cette proposition, que tout triangle équiangle, c'est à dire qui a tous les angles égaux, est équilateral: car par ce qui a été icy demontré, les angles ABC, ACB étans égaux, les deux costez AB, AC, seront pareillement égaux: Mais si les deux angles A & B étoient encore égaux, aussi les côtez CA, CB subtandans iceux angles, seroient aussi égaux: & partant tous les trois côtez AB, AC, BC égaux entr'eux, puis que les choses égales à une même, sont égales entr'elles.

PROP. VII. TH. IV.

Si des extremitez de quelque ligne droite, on mene deux autres lignes droites, se rencontrans à un point; des mêmes extremitez, on n'en pourra pas mener deux autres égales à icelles, chacune à la sienne, & de même part, se rencontrans à un autre point.

Soit la ligne AB, des extremitez de laquelle soient menées deux lignes droites AC & BC se rencontrant à quelconque

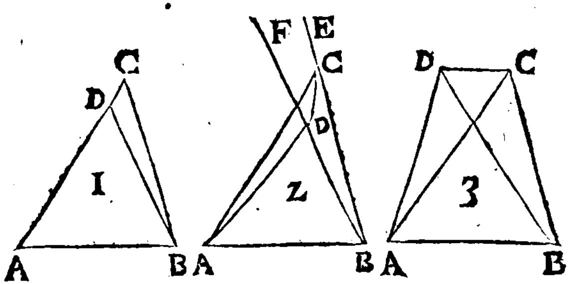


point C. Je dis que des mêmes extremitez A & B, & de la même part que C, on ne peut mener deux autres lignes droites égales à icelles AC & BC chacune à la sienne, qui se rencontrent à un autre point que C; c'est à dire que si de l'extremité A on mene la ligne AD égale à AC, & de l'extremité B la ligne BD égale à BC, il ne peut être que le point de rencontre D, soit autre que le point de rencontre C.

Car si faire se peut, que le point de rencontre D, tombe ailleurs qu'au point C: où iceluy point D tombera sur l'une ou l'autre des lignes AC, BC; ou dans le triangle ACB; ou hors iceluy.

Premierement, iceluy point de rencontre D, ne peut être sur la ligne AC, comme en la premiere figure: car il faudroit que les deux lignes AD, & AC fussent égales entr'elles, sçavoir est la partie au tout; ce qui est absurde: partant la rencontre D, ne se fera point sur AC, ny aussi sur BC, à cause de la même absurdité.

Soit donc iceluy point de rencontre D dans le triangle ABC, comme en la 2. figure : & apres avoir prolongé BC iusques en E, & BD iusques en F, soit menée CD. Puis que les deux li-



gnes AC, & AD sont posées égales, le triangle ACD sera Isoscele, & par la 5. proposition les deux angles ACD & ADC su la base CD seront égaux. Mais l'angle ACD est moindre que l'angle DCE : (car il n'est que partie d'iceluy) donc l'angl ADC est aussi moindre que le méme angle DCE : & par consequent l'angle CDF, qui n'est que partie d'iceluy ADC, sera beaucoup moindre que le méme angle DCE. Derechef, puis que les lignes BC, BD, sont posées égales, le triangle BCD doit étre Isoscele, & partant les angles CDF & DCE sous la base DC, seront égaux par la méme 5. prop. Mais il a été demontré que l'angle CDF est beaucoup moindre que l'angle DCE, donc le méme angle C D F est moindre que l'angle D C E, & aussi égal à iceluy : ce qui est absurde.

Soit donc finalement iceluy point de rencontre D hors iceluy triangle ACB, comme en la 3. figure : apres avoir mené la ligne CD il s'ensuivra que les deux triangles ADC & BCD seront Isosceles; & partant qu'ils auront les angles sur la base CD égaux : sçavoir est ADC à ACD, & BDC à BCD. Mais iceluy BCD, est plus grand que ACD : donc aussi BDC sera plus grand que ADC, c'est à dire la partie que le tout: ce qui est absurde. Le point de rencontre D ne tombera donc pas hors le triangle ABC, ny dedans iceluy, ny sur les lignes AC & BC : Il faut donc qu'iceluy point de rencontre D tombe au premier point de rencontre C : Parquoy si des extrémitez de quelque ligne droite, &c. Ce qu'il faloit demo ntrer.

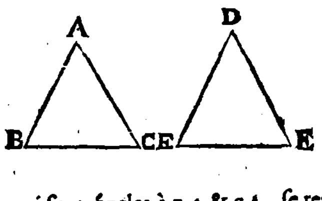
SCHOLIE.

*Il est manifeste que si AD , BD prises ensemble étoient faites égales à AC, BC aussi prises ensemble, le point de leur rencontre D, seroit autre que le premier point C; comme il seroit encore si on faisoit AD égale à BC, & BD égale à AC, mais en l'une ny l'autre maniere, icelles lignes AD, BD ne seroient pas selon l'intention d'*Euclide *: car il veut que non seulement les lignes AD, BD, soient égales aux lignes AC, BC chacune à la sienne, mais aussi que les lignes égales soient menées d'un même point, & de plus que ce soit de même part. Car il est tres evident qu'icelles AD, BD, peuvent bien être tirés de l'autre côté de C, c'est à sçavoir au dessous de la ligne AB. Donc fort à propos Euclide met en ce theoréme que les lignes soient égales chacune à la sienne, & menées de même part, &c.*

THEOR. 5. PROP. VIII.

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés chacun au sien, & la base égale à la base; ils auront aussi l'angle compris d'iceux côtez égaux, égal à l'angle.

Soient deux triangles ABC, DEF, desquels le costé AB, est égal à DE; AC à DF, & la base BC à la base EF : Je dis que les angles A & D compris d'iceux costez égaux, sont égaux.



Car puis que la base BC est égale à la base EF; si on entend icelles être posées l'une sur l'autre, elles conviendront tombant le point E sur le point B, & F sur C : & par la 7. prop. les deux lignes ED & FD, qui sont égales à BA & CA, se rencontreront au point A, & conviendront avec icelles lignes BA

& CA : partant conviendront aussi les angles A & D contenus d'icelles lignes ; & par consequent seront égaux par la 8. com. sent. Donc si deux triangles, &c, Ce qu'il falloit demontrer.

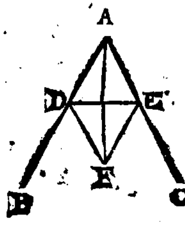
COROLLAIRE.

Puis que la base EF convient avec la base BC, & les costez DE, DF, conviennent aussi avec les costez AB, AC, il s'ensuit que non seulement l'angle A est égal à l'angle D ; mais aussi que l'angle E est égal à l'angle B, & l'angle F, égal à l'angle C, & tout le triangle égal à tout le triangle.

PROB. 4. PROP. IX.

Couper en deux également un angle rectiligne donné.

Soit l'angle rectiligne donné BAC, lequel il faut couper en deux également ; c'est dire en deux angles égaux entr'eux. Soient de AB & AC retranchées deux parties égales AD, AE : & apres avoir mené la ligne DE, sur icelle soit décrit le triangle equilateral DEF par la premiere proposition, & soit menée la ligne AF : Je dis qu'icelle ligne coupe l'angle donné BAC en deux également.



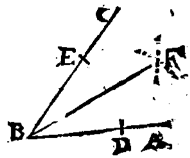
Car puisque les lignes AD, AE ont été prises égales, & AF est commune aux deux triangles DAF, EAF ; les deux costez AD & AF, du triangle DAF, seront égaux aux deux costez AE & AF du triangle EAF, & la base DF égale à la base EF : (étant DFE triangle équilateral) donc par la 8. prop. l'angle DAF sera égal à l'angle EAF ; & partant l'angle BAC est coupé en deux également par la ligne AF. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Que si au lieu du triangle equilateral cy-dessus con-

struit, on en fait un Isoscelle, la demonstration sera tousjours la même: Ce qu'on peut aussi faire aux trois propositions suivantes.

Quant à la pratique de cette proposition, nous l'avons enseignée en nostre Geometrie pratique Probl. 5. Et neanmoins nous ne laisserons pas de la repeter icy; Et pource soit un angle rectiligne A B C, qu'il faut couper en deux également. Du centre B & de tel intervale qu'on voudra, soient coupées B D, B E égales; puis des points D & E soient décrits deux arcs s'entrecoupans en F, & d'icelle intersection soit tirée par le point B, la ligne droite F B, laquelle divisera l'angle donné A B C en deux également.



Or il apert par ce que dessus qu'on peut aussi couper un angle rectiligne en quatre parties égales, en huit, en seize, en trente-deux, & ainsi consecutivement, en procedant tousjours par augmentation double: Car apres qu'un angle rectiligne est coupé en deux également, si on divise derechef chaque partie en deux également, on aura quatre angles égaux. Que si on coupe derechef chacun d'iceux en deux également, nous aurons huit angles égaux, & ainsi consequemment.

PROBL. 5. PROP. X.

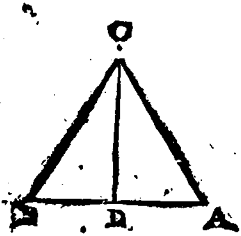
Couper en deux également une ligne droite donnée & terminée.

Soit la ligne droite donnée & terminée AB : laquelle il faut couper en deux également.

Sur icelle ligne AB soit construit le triangle equilatera ACB par la 1. prop. & par la prec. l'angle C soit coupé en deux également par la ligne CD, tirée iusques à ce qu'elle coupe A B en D. Je dis qu'icelle A B est coupée en deux également en D.

Car puis que les angles du point C sont égaux, & le triangle ACB, est equilateral, les deux triangles ACD, & BCD, ont deux

deux costez AC, CD, égaux à deux costez BC, CD, chacun au sien, & les angles du point C, qu'ils comprennent aussi égaux; partant par la 4. prop. la base AD, sera égale à la base DB. Donc AB est coupée en deux également en D. Ce qu'il faloit faire.



SCHOLIE.

Nous avons enseigné la pratique de cette proposition en nostre Geometrie pratique Prob. 1. & ce fait ainsi: Pour diviser la ligne droite AB en deux parties égales, du centre A, & de quelque intervale que ce soit (plus grand toutesfois que la moitié d'icelle AB) soient décrits deux arcs de cercle, l'un au dessus d'icelle ligne, comme C, & l'autre au dessous, comme D, puis du centre B, & du même intervale soient décrits deux autres arcs qui coupent les precedens esdits points C & D, puis d'une intersection à l'autre, soit tirée la ligne droite CD, laquelle coupera AB en deux également au point E. Est à noter que si de part & d'autre de AB on ne pouvoit décrire deux arcs comme D, il faudroit ayant décrit

les deux arcs C, ouvrir le compas d'un plus grand intervale, & en décrire deux autres arcs au dessus de C, & la ligne menée d'une intersection à l'autre, & continuée iusques à AB, la coupera en deux également.

Or il apert par ce que dessus, qu'on peut aussi couper une ligne droite finie en quatre parties égales, en 8, en 16, en 32. &c. ainsi que nous avons dit, en la precedente prop. de la division de l'angle rectiligne. Mais comment on peut diviser une ligne droite terminée en tant de par-

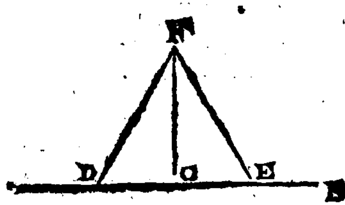
ties égales qu'on voudra, nous l'avons enseigné en nostre Geometrie pratique Probl. 7 : & ce tant Geometriquement que Mechaniquement avec le compas de proportion.

PROBL. 6. PROP. XI.

Sur une ligne droite donnée, & d'un point en icelle, élever une ligne droite perpendiculaire.

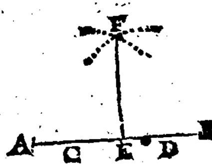
Soit une ligne droite donnée AB, & le point en icelle C : d'iceluy point il faut mener une ligne perpendiculaire à icelle AB.

Soient du point C prises les deux lignes égales CD & CE par la 3. proposition, & sur DE soit fait le triangle equilateral DFE, & de C à F soit menée la ligne CF: Je dis qu'icelle CF est la ligne perpendiculaire demãdée. Car les triangles DFC & CFE ayans deux côtez égaux à deux côtez, chacun au sien, sçavoir DC à CE par la construction, & CF commun ; & la base DF égale à la base EF, à cause que le triangle DFE est equilateral ; par la 8. prop. les angles au point C, contenus des costez égaux, seront égaux ; & partant par la 10. def. ils sont dits droits, & la ligne CF perpendiculaire à AB, ainsi qu'il faloit faire.



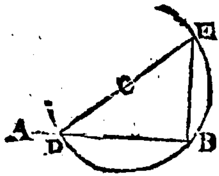
SCHOLIE.

La pratique de cette proposition est enseignée en nostre Geometrie pratique, Prob. 2. & neanmoins nous la repeterons encore icy. Pour élever sur AB une ligne perpendiculaire du point C, soient marquées en icelle AB deux points

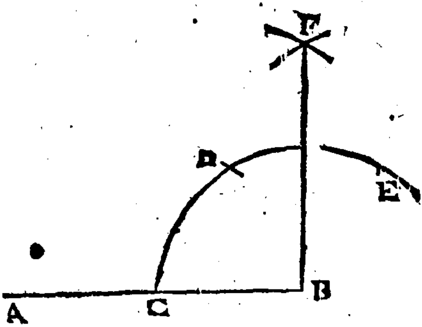


comme D, également distans de C, & d'iceux points, soient décrits deux arcs d'un même intervale s'entrecoupans en E, de laquelle intersection soit tirée à C la ligne droite EC, qui sera perpendiculaire à ladite AB.

Que si le point donné étoit B à l'extremité de la ligne, il faudroit continuër ladite ligne, & sur icelle étant continuée faire comme dessus : ou bien nous prendrons un point au dessus d'icelle ligne, comme C, lequel soit plus prés du point donné B, que de l'autre extremité A ; puis d'iceluy point C, & de l'intervale CB, nous décrirons la circonference DBE, qui coupe la ligne donnée en D, & d'iceluy point D par C, nous tirerons la ligne droite DCE coupant la susdite circonference en E, duquel point E soit tirée la ligne droite EB, laquelle sera perpendiculaire à AB.



Autrement, du point donné B, & de quelque intervale que ce soit BC, moindre toutefois que la ligne donnée, soit décrit un arc CDE plus grand que le tiers de la circonference entiere du cercle, puis sur iceluy arc CDE soient pris deux intervales CD, DE, chacun égal au semidiametre BC, & des points D, E, soient décrits deux arcs de cercle s'entrecoupans au point F, duquel soit tirée au point B la ligne droite FB, qui sera perpendiculaire à AB.



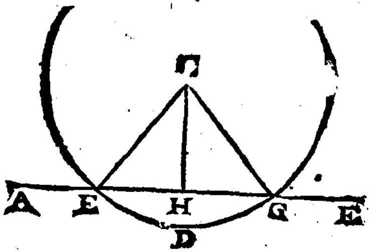
Est à noter qu'encore que le point donné B ne fut l'extremité de la ligne, on pourroit neanmoins mener la perpendiculaire par l'une ou l'autre des deux manieres cy-dessus.

PROBL. 7. PROP. XII.

Abaisser une ligne droite perpendiculaire sur une ligne droite indeterminée, & d'un point hors icelle.

Soit la ligne droire donnée & interminée A B, & le point hors icelle C, duquel il faut mener une ligne perpendiculaire sur A B.

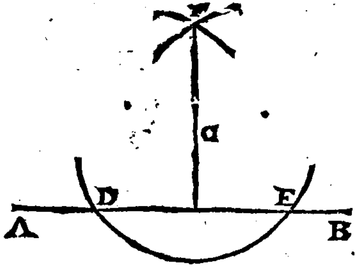
Soit pris au delà de la ligne AB quelconque point D; puis du centre C, & de l'intervale CD, soit décrit le cercle E D G, coupant la ligne AB és points E & G, puis par la 10. prop. soit coupée EG en deux egalement au point H, & soit menée la ligne CH, laquelle ie dis étre perpendiculaire à AB.



Car étans tirées les lignes droites CE, C G; les deux costez EH & HC; du triangle EHC, seront egaux aux deux costez GH & HC du triangle GHC, un chacun au sien, & la base CE est egale à la base CG, étans icelles tirées du centre C à la circonference, & par la 8. prop. les angles du point H seront égaux; & partant par la 10. definit. ils seront droits, & la ligne CH. perpendicul. à AB. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

La pratique de ce probleme est enseignée en nostre Geometrie pratique probl. 3. & est ielle qu'il ensuit. Pour mener à une ligne donnée A B une perpendiculaire à un point donné hors icelle, comme C; d'iceluy point C soit décrit un arc qui coupe la ligne donnée en D & E, puis *d'iceux points, comme centres, soient décrits deux arcs de cercles d'un même intervalle, qui s'entre-coupent au point F: (il n'importe pas de quel costé ce soit, au dessus ou au*



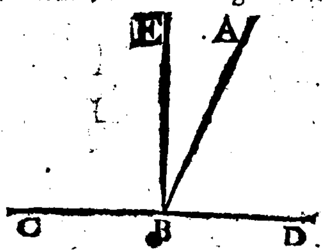
dessous de la ligne A B) puis d'iceluy point F, par celuy donné C, soit tirée une ligne droite FCG, qui rencontre la donnée en G; & icelle FCG sera perpendiculaire à A B.

THEOR. 6. PROP. XIII.

Quand une ligne droite tombant sur une ligne droite fait angles, ou iceux seront deux angles droits, ou égaux à deux droits.

Soit la ligne droite A B, laquelle tombant sur une autre ligne droite C D, fait les angles C B A, & D B A: Je dis qu'iceux sont deux angles droits, ou egaux à deux droits.

Car ou icelle ligne A B est perpendiculaire à C D, ou elle ne l'est pas: Si elle est perpendiculaire, les deux angles sont droits par la 10. def. Si elle ne l'est pas, soit levée la perpend. B E par la 11. prop. & les deux angles C B E & D B E seront droits par la susdite deff. mais par la 19. com. sent. le seul angle droit D B E est egal aux deux angles D B A,



A B E ensemble; parquoy si on leur ajoûte le commun C B E, les trois angles D B A, A B E & C B E seront egaux aux deux droits D B E, C B E, Derechef, d'autant que par la même

19. com. sent. les deux angles C B E, A B E ensemble sont égaux au seul ABC : si on adjouste le commun DBA, les deux angles ABC, DBA seront égaux aux trois CBE, ABE, DBA: mais ces trois-cy ont été demontrez égaux à deux droits ; donc ces deux-là ABC, ABD seront aussi égaux à deux droits. Parquoy si une ligne droite tombante sur une autre ligne droite, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Cette demonstration de Theon est suivie par la plus-part des Interpretes d'Euclide, mais les autres ayans montré comme dessus, que les deux angles CBE & DBE sont droits, concluënt incontinent par la 8. com. sent. que les deux ABC, & ABD ensemble, seront donc aussi égaux à deux droits, veu qu'ils occupent autant d'espace, voire le même, que les deux droits C B E, D B E, & conviennent avec eux.

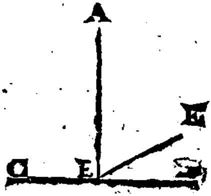
Aussi Clavius a remarqué, que cette proposition semble dependre de quelque commune notion de l'esprit: car de ce que l'angle ABC excede l'angle droit EBC, l'angle restant ABD est excedé par l'angle droit E B D; car comme en celui-là l'excez est l'angle ABE, ainsi en cettui-cy le defaut est le même angle AB E. Parquoy l'on pourra conclure, que les angles ABC, ABD sont égaux à deux droits, attendu que l'excez de l'angle obtus A B C, est le defaut de l'aigu ABD.

THEOR. 7. PROP. XIV.

Si à un point de quelque ligne droite se rencontrent deux autres lignes droites de part & d'autre d'icelle, faisant deux angles égaux à deux droits: icelles deux lignes se rencontreront directement.

Soit la ligne droite A B & en icelle le point B, auquel se rencontrent deux autres lignes droites CB & DB de part & d'autre d'icelle A B, faisant les deux angles A B C & A B D égaux à deux droits : Je dis que CB & DB se rencontrent directement, c'est à dire que CBD est une ligne droite.

Autrement, si CBD n'est ligne droite, soit continuée CB directement de la part de B, & la continuation d'icelle tombera ou au dessus de BD, ou au dessous: qu'elle tombe donc au dessus, s'il est possible, comme BE, en sorte que CBE soit ligne droite. D'autant que AB tombe sur CBE, les deux angles ABC, & ABE, seront égaux à deux droits par la 31. prop. Mais par l'hypothese les deux ABC & ABD sont aussi égaux à deux droits, & par la 10. com. sent. tous les angles droits



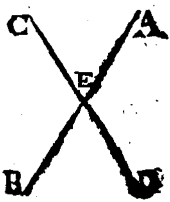
sont égaux entr'eux: dõc par la 1. cõ. sent. ces deux angles ABC, & ABD seront égaux aux deux ABC, & ABE. Parquoy ôtant l'angle commun ABC, les restans ABD, & ABE, seront égaux, le tout & la partie ; ce qui est impossible. Parquoy la ligne droite CB étant prolongée, ne tombera pas au dessus de BD ; mais elle ne tombera pas aussi au dessous, car il adviendroit toûjours la méme absurdité : donc CB, & DB se rencontroient directement. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 8. PROP. XV.

Si deux lignes droites se coupent l'un l'autre, elles feront les angles opposez au sommet égaux.

Soient les deux lignes AB & CD, se coupans l'une l'autre au point E ; Je dis que les angles opposez au sommet, sçavoir AEC, & DEB, sont égaux entr'eux.

Car d'autant que sur AB tombe la ligne CE, les angles AEC & BEC, sont égaux à deux droits par la 13. prop. Item, pour la méme raison, CEB, & DEB, seront égaux à deux droits: partant les deux angles AEC & CEB, seront égaux aux deux CEB & DEB. Que si on oste le commun CEB, le demeurant AEC



sera egal au demeurant DEB. Le même se peut aussi dire des deux angles opposez AED, & CEB. Parquoy si deux lignes droites, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

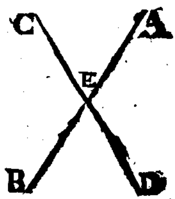
COROLLAIRE.

Il s'ensuit de cette demonstration, que deux lignes droites s'entrecoupans, font au point de leur section quatre angles egaux à quatre angles droits. Est aussi manifeste qu'étans constituez tant d'angles qu'on voudra à l'entour d'un seul & même point, qu'ils seront seulement egaux à quatre angles droits, car si de E, en la precedente figure, on mene tant d'autres lignes droites qu'on voudra, elles diviseront seulement les quatre angles constituez au point E, en plusieurs parties; toutes lesquelles parties prises ensemble, seront egales aux quatre angles d'iceluy point E, par la 19. com. sent. c'est à dire à quatre angles droits.

SCHOLIE.

Nous demontrerons icy la converse de cette 15. prop. qui, selon Proclus, est telle.

Si à un point de quelque ligne droite se rencontrent deux autres lignes droites, non de même part, faisant les angles au sommet egaux: icelles deux lignes se rencontreront directement.



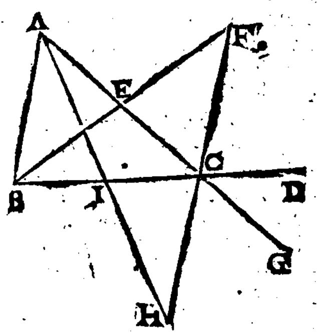
Soit la ligne droite AB, & un point en icelle E, auquel soient menées les deux lignes droites CE, DE de part & d'autre de AB faisant les angles CEA, DEB egaux entr'eux. Ie dis qu'icelles lignes CE, DE se rencontrent directement. Car adjoûtant aux angles egaux CEA, DEB, l'angle commun CEB: les deux angles CEA, CEB seront egaux aux deux angles DEB, CEB par le 2. axiome. Mais les deux angles CEA, CEB sont egaux à deux droits par la 13. prop. Donc les deux DEB, CEB seront aussi egaux à deux droits,

& par la 14. prop. les lignes droites C E, D E se rencontreront directement. Ce qui estoit proposé.

Pelletier a aucunement changé cette converse : car il dit que si quatre lignes droites AE, CE, BE, DE se rencontrans au point E y font quatre angles dont les opposez AEC, BED soient egaux entr'eux, & les opposez BEC, AED, aussi egaux entr'eux : les deux lignes opposites AE, BE se rencontreront directement, comme aussi les deux CE, DE. Ce qui est manifeste, car si aux angles egaux AEC, BED, on ajoûte les égaux CEB, AED, par le 2. axiome les deux angles AEC, CEB seront égaux aux deux angles BED, AED. Donc tant ces deux-là, que ces deux-cy, sont moitié des quatre angles faits au point E, lesquels par le Coral. prec. sont egaux à quatre droits. Parquoy les deux angles AEC, CEB, seront egaux à deux droits, & par la 14. prop. les deux lignes, AE, BE se rencontreront directement. Et pour même raison CE, DE feront aussi une seule ligne droite CD.

THEOR. 9. PROP. XVI.

Un côté de quelconque triangle étant prolongé, l'angle exterieur est plus grand que l'un ou l'autre des opposez interieurs.

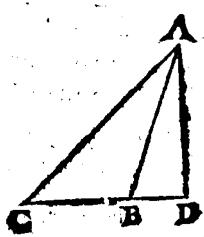


Soit le triangle A B C, duquel le costé B C soit continué iusques à D. Je dis que l'angle exterieur A C D est plus grand que l'opposé interieur BAC : Et encore plus grãd que ABC autre opposé interieur.

Qu'ainsi ne soit : Apres avoir coupé A C en deux egalement en E, soit menée la ligne B E, & continuée iusques en F : en sorte que EF soit faite égale à BE, & soit menée FC. Les deux triangles AEB, & CEF, auront les deux côtez AE & EB, égaux aux deux costez CE & EF, chacun au sien par la construction, & par la precedente prop. l'angle AEB est égal à l'angle CEF : donc par la 4. prop. les bases AB & FC seront égales, & les autres angles égaux, chacun au sien: & partãt l'angle BAE, sera égal à l'angle ECF qui n'est que partie de l'angle ACD, lequel pour cette raison sera plus grand que l'opposé interieur BAC. Que si le costé AC est prolongé en G, & BC coupé en deux également en H, & on tire la ligne AH I, tellement que HI soit égale à AH, & soit menée CI: On demontrera par méme raison que dessus, que l'angle externe BCG est plus grand que l'interne & opposé ABC. Mais par la proposition precedente à iceluy BCG, est égal l'externe ACD: donc iceluy ACD, est aussi plus grand que l'interne & opposé ABC. Parquoy en tout triangle, un costé estant prolongé, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE.

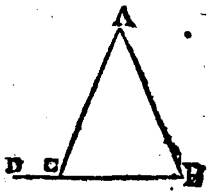
De cette proposition il s'ensuit (dit Proclus) que d'un même point on ne peut mener à une même ligne droite plus de deux lignes droites égales entr'elles. Car si faire se peut, soient menées du point A à la ligne BC, trois lignes droites AB, AC, AD, egales entr'elles: d'autant que les costez AB, AD, sont egaux, par la 5. prop. les angles ABD, ADB sur la base BD seront egaux: Derechef, pource que les costez AB, AC sont egaux, par la ~~même 5.~~ prop. les angles ABC, ACB sur la base BC seront egaux. Parquoy veu que chaque angle ADB & ACB, est egal à l'angle ABD, par la 1. com. sent. l'angle ABC sera egal à l'angle ADC, c'est à dire l'exterieur à l'opposé interieur : ce qui est absurde, puis que par cette 16. p. l'externe est plus grand que l'interne. Donc on ne pourra pas mener de A à BC plus de deux lignes droites egales entr'elles. Ce qui étoit proposé.



THEOR. 10. PROP. XVII.

Tout triangle a deux angles plus petits que deux droits, de qu'elle façon qu'ils soient pris.

Soit le triangle ABC : Je dis que les deux angles B, & ACB sont ensemble plus petits que deux droits ; comme aussi les deux A, & ACB : Item les deux A, & B.

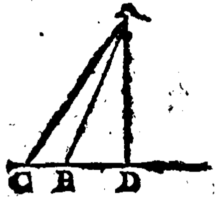


Car apres avoir continué le costé BC, iusques en D, il est evident par la 16. prop. que l'angle exterieur ACD est plus grand que l'opposé interieur B : & par la 4. com. sent. si on leur adjoûte l'angle commun ACB, les deux ACD & ACB seront plus grands que les deux B & ACB. Mais les deux ACD & ACB, sont egaux à deux droits, par la 13. prop. Partant ABC & ACB, sont plus petits que deux droits.

On demontrera pareillement que les deux angles A & ACB : Item, les deux angles A & B, en prolongeant un autre costé, sont moindres que deux droits. Parquoy tout triangle a deux angles plus petits que deux droits, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste que d'un même point on ne peut mener plus d'une ligne perpendiculaire sur une ligne droite. Car si faire se peut, soient menées de A sur la ligne droite BD, les deux perpendic : AD, AB. Donc au triangle ABD, les deux angles internes ABD, ADB, seront égaux à deux droits, puis que chacun est droit. Ce qui est impossible : car il a été demontré cy-dessus, que deux angles d'un triangle sont moin-



dres que deux angles droits.

Il s'ensuit außi de cette prop. qu'en tout triangle, duquel un angle est droit, ou obtus, que les autres sont aigus. Car puis qu'il a été demontré que deux angles quels qu'ils soient, sont moindres que deux droits, il est necessaire que s'il y en a un droit ou obtus; celuy qu'on voudra des deux autres soit aigu: car autrement en un triangle seroient deux angles droits, ou plus grands que deux droits.

S'ensuit encore de cette prop. que si une ligne droite AB, fait avec une autre ligne droite, CD, angles inégaux, sçavoir est ABD, aigu, & ABC, obtus, & de quelconque point d'icelle AB, on tire une perpendiculaire sur CD, comme AD: icelle perpendiculaire AD, tombera de la part de l'angle aigu ABD: car qu'elle tombe, s'il est poßible, du costé de l'angle obtus ABC, comme AC. Donc au triangle ABC, les deux angles ABC, ACB, obtus & droit, sont plus grands que deux droits; mais außi moindres que deux droits par cette prop. ce qui est absurde. La perpendiculaire tirée de A, ne tombera donc pas du costé de l'angle obtus, & partant tombera du costé de l'angle aigu.

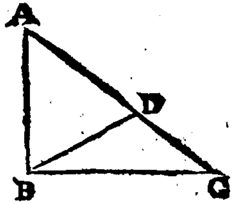
Est encore manifeste par cette prop. que tous les angles d'un triangle equilateral, & les deux angles de dessus la base d'un triangle Isoscelle, sont aigus. Car puis que deux angles quels qu'ils soient, d'un triangle equilateral, & les deux de dessus la base d'un Isoscelle sont egaux entr'eux par la 5. prop. & tant ces deux-cy ensemble, que ces deux-là, sont moindres que deux droits par cette prop. chacun d'iceux sera moindre qu'un droit, c'est à dire aigu: car s'il étoit droit, ou obtus, tous les deux ensemble seroient, ou egaux à deux droits, ou plus grands.

THEOR. II. PROP. XVIII.

De tout triangle, le plus grand côté soutient le plus grand angle.

Soit un triangle ABC, ayant le costé AC plus grand que le costé AB. Je dis que l'angle ABC, est plus grand que l'angle ACB.

Qu'il ne soit ainsi : Puis que AC est plus grand que AB, d'iceluy soit retranchée AD, egale à AB, & soit menée BD. Le triangle A B D est Isoscele, & par la 5. prop. les deux angles ABD, & A D B, sur la base B D, seront egaux. Or l'angle exterieur ADB, est plus grand que l'opposé interieur, C, par la 16. prop. Mais ABC étant plus grand que ABD, il sera aussi plus grand que son égal ADB : & à plus forte raison



A B C sera plus grand que C. Par même raison, si on pose le côté A C, plus grand que le côté B C ; on demontrera l'angle ABC être plus grand que l'angle BAC, sçavoir est, si de CA on coupe une ligne égale à B C, &c. Parquoy le plus grand costé de tout triangle, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

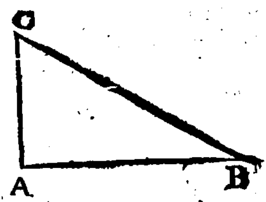
CORROLAIRE.

Il est donc manifeste par cette demonstration, que tous les trois angles d'un triangle scalene sont inégaux.

THEOR. 12. PROP. XIX.

En tout triangle, le plus grand angle est soûtenu du plus grand côté.

Soit le triangle A B C duquel l'angle A est plus grand que l'angle C. Je dis que le costé BC, qui soûtient le plus grand angle A, est plus grand que le costé A B, qui soûtient un moindre angle C.



Autrement, il sera egal, ou plus petit : Il ne peut être egal, d'autant que le triangle seroit Isoscele, & par la 5. prop. les deux angles A & C seroient egaux contre l'hypothese. Il ne peut aussi être plus petit, d'autant que par la 18. prop. l'angle A seroit plus petit que l'angle C, ce qui est aussi contre l'hypothese. Il sera donc plus grand. Par même raison on prouvera le côté BC, être plus grand que le costé AC, si on pose l'angle A, être plus grand que l'angle B. Donc de tout triangle le plus grand angle est soûtenu du plus grand costé. Ce qu'il faloit demontrer.

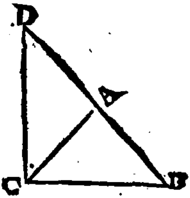
COROLLAIRE.

Il s'ensuit de cette proposition, que si de quelconque point on tire sur une ligne droite tant d'autres lignes droites qu'on voudra, l'une desquelles soit perpendiculaire, icelle perpendiculaire sera la plus petite de toutes, puis qu'elle sera toûjours opposée à un angle aigu, & les autres à l'angle droit fait par icelle perpendiculaire.

THEOR. 13. PROP. XX.

En tout triangle, deux côtez de qu'elle faço͂ qu'ils soient pris, sont plus grands que le troisiéme.

Soit le triangle ABC: Je dis que deux costez d'iceluy lesquels on voudra, sçavoir est AB & AC, sont plus grands ensemble que le troisiéme costé BC.

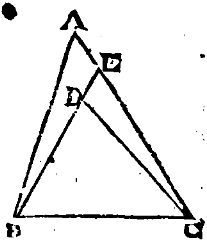


Qu'il ne soit ainsi apres avoir prolongé BA, jusques en D, & fait AD, égale à AC soit menée la ligne DC. Le triangle DAC, sera Isoscelle, & par la 5. prop. les deux angles ADC, & ACD, sur la base DC, seront égaux. Mais par le 9. ax. DCB, est plus grand que DCA: il sera donc aussi plus grand que son égal ADC: & partant par la 19. prop. BD, sera plus grand costé que BC. Mais BD, est égal aux deux costez AC, & BA: donc aussi iceux AC, & BA, seront plus grands que BC. On demontrera en la même maniere que deux autres costez tels que l'on voudra sont plus grands ensemble que l'autre. Parquoy deux costez d'un triangle pris en quelque sorte que ce soit, sont plus grands que l'autre. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 14. PROP. XXI.

Si des extremitez d'un costé de quelconque triangle, on méne deux lignes droites se rencontrans au dedans d'iceluy : icelles seront plus petites que les deux autres costez du triangle, mais elles seront un plus grand angle.

Soit le triangle A B C, & des extremitez du costé B C, soient menées interieurement deux lignes droites B D, CD, se rencontrans au point D; Je dis qu'icelles lignes BD, & CD ensemble sont plus petites que les costez BA, & CA, ensemble : mais que l'angle D, est plus grand que l'angle A.



Qu'ainsi ne soit continuée BD, jusques au point E. Donc par la 20. prop. les deux costez BA, & AE, du triangle BAE, seront plus grands que le troisiéme BE : Et si on leur ajoûte chose commune E C, par la 4. comm. sent. les touts C E, E B, seront tousiours plus petits que les touts CE, EA, AB, c'est à dire CA, AB. Pareillement les deux côtez CE, ED, du triangle CED, sont plus grands que le troisiéme CD, ausquels si on ajouste chose égale, sçavoir DB, les touts CE, ED, DB, ou CE, E B, seront tousjours plus grands que les touts CD, & D B. Mais il a été demontré que C A, AB, sont plus grands que C E, E B : donc CA, A B, seront beaucoup plus grands que CD, B D. Ce qui étoit proposé en la premiere partie.

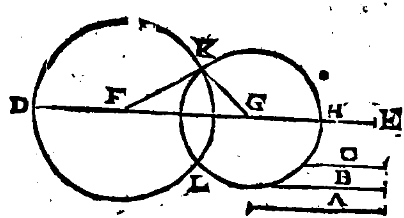
Pour la seconde partie, sçavoir que l'angle BDC est plus grand que l'angle A. D'autant qu'il est exterieur du triangle C E D, il sera plus grand que son opposé interieur CED par la 16. prop. Mais pour la méme raison, iceluy angle CED est aussi plus grand que son opposé interieur A : donc à plus forte raison BDC sera plus grand que A. Si donc des extremitez d'un costé de quelconque triangle, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

PROB. 8. PROP. XXII.

Faire un triangle de trois lignes droites égales à trois autres données : mais il faut que deux d'icelles de qu'elle façon qu'elles ſoient priſes, ſoient plus grandes que l'autre ; d'autant que de tout triangle, deux côtez de quelque façon qu'ils ſoient pris, ſont plus grands que l'autre.

Soient trois lignes données A, B, & C, deſquelles deux de qu'elle façon qu'elles ſoient priſes, ſont plus grandes que la troiſiéme : car autrement d'icelles on ne pourroit pas conſtituër un triangle, comme il apert de la 20. prop. en laquelle il a été demontré que de tout triangle deux coſtez ſont tousjours plus grands que l'autre. Il faut faire un triangle ayant les trois côtez egaux à icelles trois lignes données.

Soit priſe une ligne droite, tant grande qu'il ſera de beſoin, comme DE, de laquelle ſoit retranchée DF, egale à A ; & puis du reſte ſoit priſe FG egale à B, & GH egale à C, & du centre F, & de l'intervale FD, ſoit décrit un cercle DKL : Item un autre cercle HKL du centre G, & de l'intervale GH, coupant le premier cercle au point K duquel ſoient menées les deux lignes KF, KG. Je dis que les coſtez du triangle FKG ſont egaux aux trois lignes données A, B, C.

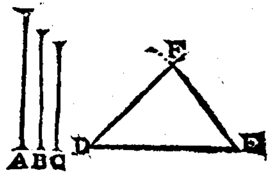


Car d'autant que FD, FK ſont egales par la def. du cercle : Item GK & GH ; les trois coſtez du triangle FKG, ſont egaux aux trois lignes FD, FG, GH, leſquelles étans egales aux trois données par la conſtruction ; auſſi les coſtez du triangle FKG ſeront egaux à icelles lignes données A, B, C. Nous avons donc fait

fait un triangle de trois lignes droites egales aux trois lignes droites données A, B, C. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

La pratique de ce probl. est enseignée en nostre Geometrie pratique Prob. II. & est telle : Soit prise la ligne droite D E egale à quelconque des données comme à A, puis du point D, & intervale de la ligne B, soit décrit un arc F : semblablement du point E, & de l'intervale de l'autre ligne C, soit décrit un autre arc qui coupe le premier au point F: puis à ladite intersection soient tirées les deux lignes droites DF, EF ; & sera fait le triangle DEF, ayant les trois costez egaux aux trois lignes droites données A, B, C.

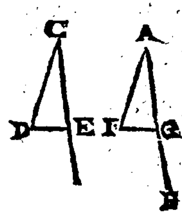


PROBL. 9. PROP. XXIII.

Sur une ligne droite donnée, & à un point donné en icelle, faire un angle rectiligne egal à un angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnée AB, & le point en icelle A, sur lequel il faut faire un angle rectiligne egal à l'angle rectiligne donné C.

Ayant pris és lignes CD, CE, qui constituënt l'angle donné C quelconques points D, E, soit menée la ligne D E : & sur AB soit construit par la prop. precedente le triangle A F G, ayant les trois côtez egaux aux trois côtez du triangle CDE, sçavoir est les deux côtez AF, AG, egaux aux deux côtez C D, C E, & la base F G à la base DE. Il est donc évident par la 8. prop. que l'angle A

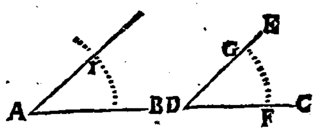


E

sera egal à l'angle C donné. Nous avons donc fait sur AB, & au point A, l'angle F A G egal à un donné D C E, ainsi qu'il étoit requis.

SCHOLIE.

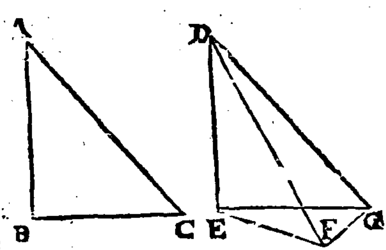
Combien que la pratique de ce probléme soit enseignée en nostre Geometrie pratique, neanmoins nous l'enseignerons encore icy. Soit une ligne donnée A B, & un point en icelle A, auquel il faut faire un angle rectiligne egal au donné CDE. Du centre D soit fait de tel interuale qu'on voudra un arc FG, qui coupe les lignes de l'angle donné és points F, G: puis du même interuale, soit décrit du centre A un arc interminé HI: En apres, soit prise la distance FG, & icelle portée sur l'arc HI, puis du point A par I, soit tirée la ligne droite AI, & sera fait l'angle HAI egal à l'angle donné CDE.



THEOR. 15. PROP. XXIV.

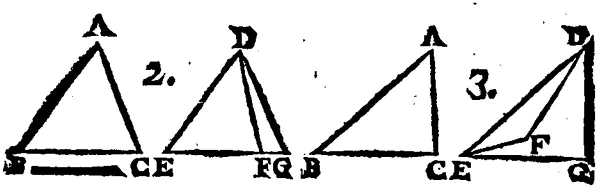
Si deux triangles ont deux côtez egaux à deux côtez, chacun au sien, & l'angle contenu d'iceux côtez plus grand que l'angle, ils auront aussi la base plus grande que la base.

Soient deux triangles A B C & DEF, desquels deux costez AB, AC sont egaux aux costez DE, DF, chacun au sien: mais l'ãgle A est plus grãd que l'angle F, D, F. Je dis que la base BC, est plus grande que la base E F.



Qu'ainsi ne soit. Sur la ligne DE, & au point D, soit fait par la precedente prop. l'angle EDG, égal à l'angle A, (& la ligne droite DG, tombera hors le triangle D E F, puis que l'angle EDF, a été posé moindre que l'angle A) & soit posée DG, egale à DF, c'est à dire à AC : Soit tirée puis apres la ligne EG, laquelle tombera ou au dessus de la ligne EF, ou sur icelle, ou au dessous d'icelle. Qu'elle tombe premierement au dessus de EF, & soit tirée la ligne FG. D'autant que les deux costez AB, AC, sont egaux aux deux costez DE, DG, un chacun au sien, & l'angle A egal à l'angle EDG par la construction : la base BC sera egale à la base EG, par la 4. prop. Et puis que les deux costez DF, DG, sont egaux entr'eux : les angles DFG, DGF seront aussi egaux entr'eux par la 5. prop. Mais l'angle DGF est plus grand que l'angle EGF, par la 9. com. sent. donc aussi l'angle DFG sera plus grand que le méme angle EGF : parquoy tout l'angle EFG sera beaucoup plus grand que le méme angle EGF : donc au triangle EFG le costé EG sera plus grand que le costé EF par la 19. prop. Mais il a été demontré que EG est egale à B C : donc BC sera aussi plus grande que EF : Ce qui étoit proposé.

Maintenant, que EG tombe sur icelle EF : ainsi qu'en la 2. fig. d'autant que comme dessus la base EG, sera egale à la base



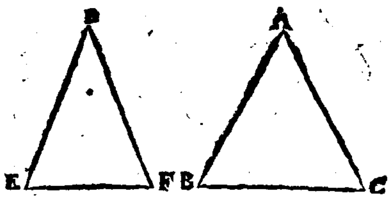
B C par la 4. prop. & G E est plus grande que E F par la 9. com. sent. aussi BC sera plus grande que EF : Ce qui étoit proposé.

En troisiéme lieu, que EG tombe au dessous de EF. Il est evident que les deux lignes interieures D F EF sont plus petites que les deux costez DG, EG par la 21. prop. Mais par la construction DG est egale à DF : donc EG est plus grande que EF par la 5. com. sent. Mais comme dessus par la 4. prop. EG est egale à BC : donc aussi icelle BC sera plus grande que EF. Si donc deux triangles ont deux costez egaux, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 16. PROP. XXV.

Si deux triangles ont deux côtez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base plus grande que la base; ils auront aussi l'angle contenu d'iceux côtez egaux, plus grand que l'angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, desquels les deux côtez AB & AC, sont egaux aux deux DE & DF, chacun au sien: Mais la base BC est plus grande que la base EF. Je dis que l'angle A est plus grand que l'angle D.



Autrement, il sera egal, ou plus petit. Mais il ne peut être égal: d'autant que par la 4. prop. les bases BC & EF seroient egales contre l'hypothese. Pareillement il ne peust être plus petit; d'autant que par la 24. prop. la base BC seroit plus petite que la base EF, & elle a été posée plus grande. Parquoy l'angle A sera plus grand que l'angle D, puis qu'il ne peust être egal ny plus petit. Si donc deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

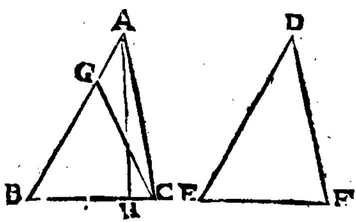
THEOR. 17. PROP. XXVI.

Si deux triangles ont deux angles egaux à deux angles, chacun au sien, & un côté egal à un côté, sçavoir est, ou celuy aux extremitez duquel sont les angles egaux, ou bien celuy qui soûtient l'un d'iceux angles egaux: ils auront aussi les autres côtez egaux aux autres côtez, chacun au sien, & l'autre angle egal à l'autre angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, desquels les angles B &

ACB, sont egaux aux deux E & F, chacun au sien, & soit premierement le costé B C, aux extremitez duquel sont les angles B & A C B, egal au costé E F, aux extremitez duquel sont les angles E & F. Je dis que les deux autres costez AB, AC, sont egaux aux deux autres costez DE, DF, chacun au sien, sçavoir est AB à DE, & AC à DF, & l'autre angle BAC egal à l'autre angle D.

Car si A B n'est égal à D E, l'un d'iceux sera plus grand: Soit donc A B plus grand, s'il est possible, & d'iceluy soit retranchée B G égale à DE: puis soit tirée la ligne droite C G. Donc puis que les costez BC, BG, sont égaux aux costez E F, DE, chacun au sien, & l'angle B égal à l'angle E, par la 4. prop. la base CG sera égale à la base F D, & les autres angles égaux aux autres angles chacun au sien, c'est à sçavoir que l'angle B C G sera égal à à l'angle F, auquel est aussi égal l'angle ABC par l'hypothese. Partant les deux angles ACB & GCB seroient égaux, la partie au tout; ce



qui est absurbe. Donc le costé AB n'étoit pas inégal au costé DE, mais égal. Parquoy veu que les costez AB BC sont égaux aux costez DE, EF, chacun au sien, & l'angle B égal à l'angle E; la base AC sera égale à la base DF, & l'autre angle BAC égal à l'autre angle D, par la 4. prop. de ce livre. Ce qui étoit proposé.

Soient maintenant égaux deux autres costez sçavoir est AB à DE soustendans angles égaux ACB & F. Je dis derechef que les deux autres costez AC, BC sont égaux aux deux autres côtez DF, EF, chacun au sien, c'est à dire AC à DF, & BC à EF: & l'autre angle BAC égal à l'autre angle D. Car si le côté BC n'est égal au costé EF, soit le plus grand BC, duquel soit couppé BH égal à EF, puis tiré la ligne AH. Donc puis que les costez AB, BH sont égaux aux costez DE, EF, un chacun au sien, & l'angle B est égal à l'angle E par l'hypothese, par la 4. prop. la base sera égale à la base, & les autres angles égaux aux autres angles, c'est à sçavoir, que l'angle AHB sera égal à l'angle F. Mais par l'hypothese l'angle ACB, est aussi égal à l'angle F. Donc l'angle AHB, sera aussi egal à l'angle ACB, l'exterieur à son opposé interieur : ce qui est absurde : car il est plus grand par la 16. prop. Le costé BC n'estoit donc pas plus grand que le costé EF, ains égal. Parquoy les deux costez AB, BC, sont égaux aux deux costez DE, EF, chacun au sien, & par la 4. prop. l'angle B estant égal à l'angle E, les bases AC, DF, seront égales, & les autres angles BAC & D aussi égaux. Parquoy si deux triangles ont deux angles égaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par la demonstration de cette proposition, que le triangle est aussi egal au triangle.

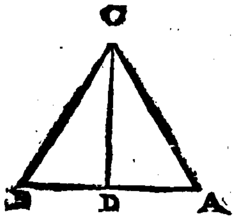
SCHOLIE.

Nous demontrerons icy deux theorémes assez utils & necessaires en Geometrie : le premier est tel.

En un triangle equilateral, ou Isoscelle, étant menée une ligne droite de l'angle contenu des deux costez egaux, laquelle divise en deux egalement, ou l'angle, ou la base ; elle sera perpendiculaire à la base : & si elle coupe l'angle en deux egalement, elle coupera aussi la base en deux egalement : Mais si elle coupe en deux egalement la base, elle coupera pareillement l'angle en deux egalement. Et au contraire étant tirée une ligne droite perpendiculaire à la base, elle divisera en deux egalement, tant la base que l'angle.

Au triangle ABC soient deux costez egaux AC, BC, & la ligne droite CD divise premierement l'angle C en deux egalement. Ie dis qu'icelle ligne CD est perpendiculaire à la base AB, & la divise en deux egalement. Car puis que les deux costez AC, CD, sont egaux aux deux costez BC, CD, & les angles qu'ils contiennent aussi egaux, par la quatriéme prop. les bases AD, BD seront aussi egales, & les angles au point D egaux, & partant droits.

Que si la ligne droite CD divise en deux egalement la ligne AB : Ie dis que la ligne droite CD est perpendiculaire à la ligne AB, & que l'angle C est coupé en deux *egalement. Car puis que les deux costez AD, DC, sont egaux aux deux costez BD,DC, & la base AC egale à la base BC, par la 8. prop. les angles du point D seront egaux, & partant droits, & la ligne CD perpendiculaire, & par le Corol. de la 8. prop. les angles qui sont en C seront aussi egaux.*



Maintenant soit la ligne droite CD perpendiculaire à AB: Ie dis qu'elle coupe aussi la base BA, & l'angle C en deux egalement. Car par la 5. prop. les angles A & B seront egaux: parquoy puis que les deux angles A & D du triangle ACD, sont egaux aux deux angles B & D, du triangle BCD, un chacun au sien, & le costé CD opposé aux angles egaux A & B commun, par la 26. prop. les autres costez, AD, BD, seront aussi egaux, & les autres angles du point C pareillement egaux, Ce qu'il faloit demontrer.

Le second Theoréme est tel.

Le triangle auquel une ligne droite tirée de l'un des angles perpendiculaire à la base, divise ou la base ou l'angle en deux egalement, a les deux costez comprenant iceluy angle egaux: Et si la base est divisée en deux egalement, l'angle sera aussi divisé en deux egalement: Mais si l'angle est divisé en deux egalement, aussi sera la base divisée en deux egalement.

Au méme triangle ABC, soit CD perpendiculaire à la base AB, & la divise en deux également. Ie dis que les costez AC & BC sont egaux, & les angles à C aussi egaux. Car puis que les deux costez AD, DC, sont egaux aux deux costez, BD, DC, & les angles qu'ils comprennent aussi egaux, sçavoir droits par la 4. prop. les bases AC, BC, & les angles à C seront pareillement egaux.

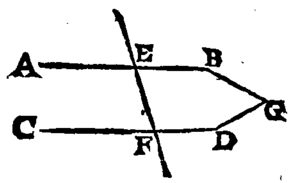
Maintenant, que la perpendiculaire CD coupe en deux egalement l'angle C: ie dis que les costez AC, BC sont egaux; & les lignes AD, BD aussi egales: Car puis que les deux angles D, C du triangle ACD. sont egaux aux deux angles D, C du triangle BCD, & le costé CD est commun, par la 26. prop. les deux côtez AC, BC, seront egaux, & les côtez AD, BD, aussi egaux: Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 18. PROP. XXVII.

Si une ligne droite tombant ſur deux lignes droites fait les angles oppoſez alternativement egaux ; icelles deux lignes ſeront paralleles entr'elles.

Soient deux lignes droites AB & CD, ſur leſquelles tombant la ligne droite EF, fait les angles BEF, & EFC alternativement égaux. Je dis que AB & CD ſont paralleles.

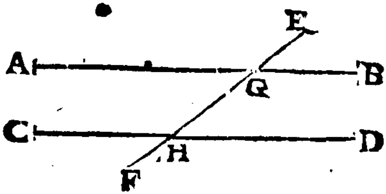
Car ſi elles ne ſont paralleles, eſtans continuées elles ſe rencontreront : Que ſi elles ſe rencontroient, comme au point G, elles feroient un triangle avec le coſté EF, & l'angle exterieur CFE ſeroit plus grand que l'oppoſé interieur FEB par la 16. prop. ce qui eſt contre l'hypotheſe Donc les deux lignes AB, & CD ne ſe rencontreront jamais ; & par la 25. def. icelles lignes ſeront paralleles entr'elles. Parquoy ſi une ligne droite tombante ſur deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit demontrer.



THEOR. 19. PROP. XXVIII.

Si une ligne droite tombant ſur deux lignes droites, fait l'angle exterieur égal à ſon oppoſé interieur du meſme coſté ; ou bien les deux interieurs de même coſté, égaux à deux droits ; icelles deux lignes ſeront paralleles entr'elles.

Soient deux lignes droites AB & CD, ſur leſquelles tombant une autre ligne droite EF, faſſe l'angle exterieur EGA égal à GHC ſon oppoſé interieur du méme coſté. Je dis que AB & CD ſont paralleles entr'elles.



Car puis que l'angle G H C est posé égal à l'angle EGA, auquel est aussi egal l'angle BGH par la 15 prop. les angle alternes BGH, GHC, seront égaux par la premiere commune sentence : partant les lignes droites AB, CD seront paralleles par la proposition precedente. Ce qui étoit proposé.

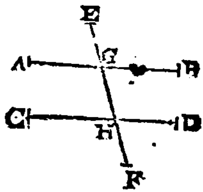
Pour la seconde partie. Je dis que si les deux angles interieurs de même costé AGH, & CHG sont egaux à deux droits, aussi AB & CD seront paralleles. Car par la 13, proposition les deux angles GHC, & GHD sont egaux à deux droits ; partant aussi egaux aux deux AGH & GHC. Que si d'iceux angles egaux, on oste le commun GHC, les demeurans AGH & GHD se trouveront alternativement egaux,& par la 27. prop. AB & CD seront paralleles. Si donc une ligne droite tombant sur deux lignes droites, &c. Ce qui faloit demontrer.

THÉOR. 20 PROP. XXIX.

Si une ligne droite tombe sur deux lignes droites paralleles, elle fera les angles opposez alternativement égaux; & l'exterieur egal à son opposé interieur du même côté : & les deux interieurs de même côté egaux à deux droits.

Soient deux lignes droites paralleles AB & CD, sur lesquelles tombe la ligne droite E F. Je dis en premier lieu que les angles AGH & GHD opposez alternativement sont egaux.

Autrement, s'ils ne sont egaux, AGH sera plus grand, ou plus petit que l'autre ; Soit donc AGH plus petit, s'il est possible, que GHD:& si à iceux angles inégaux on ajoûte chose comm. sçavoir l'angle GHC, les deux angl. A G H & GHC seront plus petits que les deux GHC& GHD, lesquels par la 13 prop. étans egaux à deux droits, AGH & G H C seront plus petits que deux droits, & par la 11. com. sent. les deux lignes AB & CD ne sont point paralleles : ce qui est contre nostre hypothese. Donc il falloit que l'angle AGH fust égal à l'angle GHD son alterne opposé.



Pour la seconde partie. Je dis que l'angle exterieur EGB est égal à son opposé interieur de mesme costé GHD : ce qui est manifeste par ce qui a été demontré cy-dessus, sçavoir que les angles AGH & GHD étoient égaux, étant aussi EGB egal à AGH par la 15. proposition ; & par la 1. com. sent. EGB & GHD seront égaux, étans tous deux égaux au méme AGH.

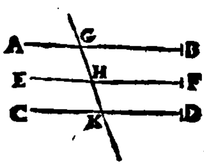
Pour la troisiéme partie : je dis que les deux angles interieurs de méme costé AGH & GHC sont égaux à deux droits : car s'il étoit autrement les lignes AB & CD ne seroient paralleles par la 11. com. sent. contre l'hypothese. Si donc une ligne droite tombe sur deux lignes droites, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

THEOR. 21. PROP. XXX.

Les lignes droites paralleles à une mesme ligne droite, sont paralleles entr'elles.

Soient les lignes droites AB, CD, paralleles à une même ligne droite EF. Je dis que AB & CD sont paralleles entr'elles.

Car d'autant que toutes ces lignes AB, EF, CD, sont posées en un même plan, soit tirée la ligne droite GHK, qui les couppe toutes trois, sçavoir est AB en G ; EF en H ; & CD en K. Et puis que AB est posée parallele à EF, les angles alternes AGH, GHF, seront égaux entr'eux par la precedente proposition. Derechef, puis que CD est aussi posée parallele à la même EF ; l'angle DKH sera aussi égal au même angle GHF c'est à sçavoir l'interne à l'externe. Parquoy les angles AGH & DKH seront egaux entr'eux, lesquels étans alternes, les lignes AB &



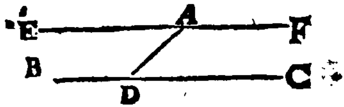
CD sont paralleles entr'elles, par la 27. prop. Parquoy les lignes droites paralleles à une méme ligne droite sont paralleles entr'elles. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Si quelqu'un disoit que AG & BG sont paralleles à EF, & toutesfois elles ne sont paralleles entr'elles, il faudroit répondre qu'icelles AG & BG ne sont pas deux lignes, mais seulement les deux parties d'une seule & mesme ligne : Car il faut entendre que toutes les paralleles dont parle icy Euclide, soient infiniment produites sans se rencontrer : mais il appert que AG étant prolongée se rencontre avec BG.

PROBL. 10. PROP. XXXI.

D'un point donné, mener une ligne droite parallele à une ligne droite donnée.



Soit le point donné A, duquel il faut mener une ligne droite parallele à la donnée BC.

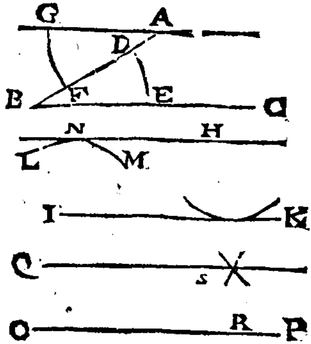
Soit menée la ligne AD faisant avec la ligne donnée BC, quelconque angle ADC, & sur icelle AD, & au point A soit fait l'angle DAE égal à l'angle ADC. Je dis que la ligne EA tirée tant qu'on voudra vers F, est parallele à BC Car puis que par la construction les angles alternes ADC, DAE sont égaux, les lignes BC, FE seront paralleles entr'elles par la 27. prop. Nous avons donc d'un point donné A, mené une ligne droite EF parallele à une ligne droite donnée BC. Ce qu'il faloit faire

SCHOLIE.

Il est manifeste par cette construction, que le point donné doit être tellement situé hors la ligne donnée, qu'icelle étant continuée directement ne rencontre iceluy. Quant à la pratique de cette proposition, nous l'avons enseignée en nos Memoires Mathematiques, Prob. 6. de la Geo-

metrie pratique, laquelle toutesfois nous repeterons icy. Du point donné A soit menée la ligne droite AB faisant avec la ligne donnée BC, l'angle ABC; puis de A & B comme centres, & d'un même intervale, soient décrits les deux arcs DE, FG, & fait FG egal à DE, puis par les points A & G soit menée la ligne droite AG si grande qu'on voudra, & icelle sera parallele à BC.

Autrement, *si du point H on veut mener une parallele à la ligne droite IK, du centre H soit fait un arc qui touche seulement la ligne donnée IK, puis du centre I (qui est l'extremité de la ligne le plus éloigné de l'arc ja fait) & du mesme intervalle soit décrit un autre arc LM, puis du point H soit tirée la ligne droite HN, qui touche l'arc LM, & icelle ligne HN sera la parallele requise.*

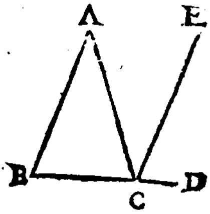


Encore autrement: *Si du point Q, il faut tirer une ligne parallele à une ligne donnée OP, soit pris en icelle ligne quelconque distance, comme OR, avec laquelle soit décrit du centre Q un arc S; puis soit pris la distance ou intervalle QO, & d'iceluy soit aussi décrit du centre R un arc qui coupe le precedent en S, & d'icelle intersection soit tirée par le point donné Q la ligne droite QS, laquelle sera parallele à OP, ainsi qu'il étoit requis.*

THEOR. 22. PROP. XXXII.

En tout triangle, l'un des côtez étant prolongé, l'angle exterieur est égal aux deux opposez interieurs; & de chacun triangle les trois angles interieurs sont égaux à deux droits.

Soit le triangle ABC, duquel le costé BC, soit prolongé jusques en D : Je dis en premier lieu que l'angle exterieur ACD, est egal aux deux opposez interieurs A & B.



Qu'il ne soit ainsi : qu'on mene CE parallele à BA par la 31. prop. & d'autant que la ligne AC tombe sur les paralleles AB, EC, par la 29. prop. les angles BAC, & ACE, seront alternativement egaux : Item l'exterieur ECD, sera egal à son opposé interieur ABC. Partant il est manifeste que le total ACD, est egal aux deux A & B, opposez interieurement.

Pour la seconde partie que les trois angles A, B, & C, interieurs du triangle ABC sont egaux à deux droits, il est evident, étant ACD egal aux deux A & B. Mais ACD & ACB, sont ensemble egaux à deux droits par la 13. prop. Partant les trois angles interieurs A, B, & ACB, seront aussi egaux à deux angles droits. Si donc de tout triangle, l'un des costez est prolongé, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

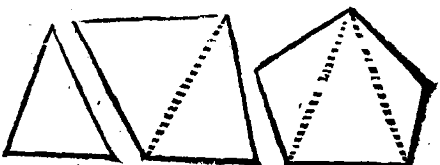
SCHOLIE.

De cette proposition nous pouvons colliger à combien d'angles droits sont egaux tous les angles internes de quelconque figure rectiligne, qui n'en a point d'externe & ce par deux manieres, dont la premiere est telle.

Tous les angles de quelconque figure rectiligne, sont egaux à deux fois autant d'angles droits, qu'icelle est entre les figures rectilignes.

C'est à dire, que tous les angles de la premiere figure rectiligne sont egaux à deux fois un droit, c'est a dire, à deux droits : Mais les angles de la seconde figure rectiligne, sont egaux à deux fois deux droits, sçavoir est à quatre droits : Mais ceux de la troisiéme figure, sont egaux à deux fois trois droits, c'est à dire à six droits, & ainsi des autres. Or le lieu qu'obtient chaque figure rectiligne entre les figures rectilignes, est monstré par le nombre des costez, ou des angles, deux d'iceux ostez ; d'autant que deux lignes droites n'enferment pas une superficie, & par consequent ne consti-

tuent une figure: mais sont requises au moins trois lignes droites pour constituer une figure rectiligne: d'où vient que le triangle est la premiere figure rectiligne: Car de ses costez, en estans ostez deux, reste un: ainsi la figure ayant douze costez, ou douze angles, sera la dixiéme figure, puis que deux estans ostez de douze restent dix: & ainsi faut-il juger des autres. Parquoy puis que la figure contenuë de douze costez, est la dixiéme, elle aura aussi douze angles equivallans à vingt angles droits, c'est à sçavoir à deux fois dix angles droits: Ainsi aussi tous les dix angles de la figure contenuë de dix costez, equivallent à seize angles droits, puis qu'icelle figure est la huitiéme en ordre entre les figures rectilignes. Or la raison de cecy est, que toute figure rectiligne se divise en autant de triangles, qu'elle est quantiéme en ordre entre les figures, ou bien qu'elle a d'angles, ou de costez, deux estans ostez: Car de quelconque angle d'une figure, on peut tirer des lignes droites à tous les angles opposez: mais aux deux plus prochains on n'en peut pas tirer. Parquoy la figure sera divisée en autant de triangles qu'elle a d'angles, deux d'iceux estans ostez. Ainsi il est evident que le triangle ne se peut diviser en autres triangles: mais le quadrangle se coupe en deux: le Pentagone en trois, &c. Vû donc que les angles



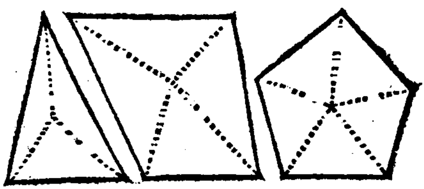
d'iceux triangles constituent tous les angles de la fig. proposée, & tous les angles de quelconque triangle rectiligne sont égaux à deux droits: il est manifeste que tous les angles de quelconque figure rectiligne sont egaux à deux fois autant d'angles droits, qu'est le nombre des triangles esquels elle se divise, c'est à dire à deux fois autant d'angles droits, qu'icelle figure est quantiéme en ordre entre les figures rectilignes. Ce qu'on voit manifestement és figures cy-dessus apposées.

Le second moyen par lequel on sçaura la valeur des an-

gles de quelconque figure rectiligne, est cettuy-cy.

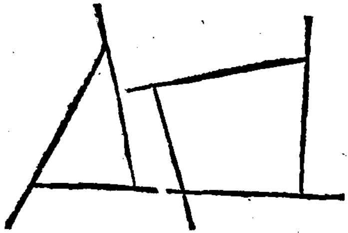
Tous les angles de quelconque figure rectiligne, sont égaux à deux fois autant d'angles droits, quatre étans ostez, qu'il y a en icelle d'angles, ou de costez.

C'est à dire, que les angles de chaque triangle sont égaux à deux fois trois droits, quatre ostez, c'est à sçavoir à deux droits: Ainsi aussi les angles de la figure de douze costez, vaudront deux fois douze angles droits, moins quatre, sçavoir est vingt angles droits, &c. Or la demonstration de cela est telle. Si de quelconque point pris dedãs la figure on tire des lignes droites à tous les angles, il y aura autant de triangles en ladite figure, qu'elle a d'angles ou de costez. Veu donc que les trois angles de chaque triangle par la 32. prop. sont égaux à deux droits, tous les angles d'iceux triangles, sont egaux à deux fois autant de droits qu'il y a de costez en la figure. Mais il est evident que les angles des mesmes triangles qui sont à l'entour du point pris dedans la figure, n'appartiennent aux angles de ladite figure proposée: & partant si on oste ces angles-là, les autres angles des triangles qui constituent ceux de la figure proposée, seront aussi egaux à deux fois autant d'angles droits, ceux d'alentour le point pris étans ostez, qu'il y a de côtez, ou d'angles à la figure. Mais tous ces angles-là d'alentour le point pris, sont seulement egaux à quatre droits, ainsi que nous l'avons colligé de la 15. prop. Parquoy les angles de quelconque figure rectiligne sont égaux à deux fois autant de droits, quatre étans ostés, que ladite figure cõtient d'angles ou de côtés



Or il apert de ce que dessus, que si chaque côté de quelconque figure rectiligne, qui n'a que des angles interieurs, est prolõgé par ordre vers une même part; tous les angles externes pris ensemble, seront egaux à quatre droits. Car par la 13 prop. les angles interieurs pris avec les exterieurs, sont egaux à deux fois autant d'angles droits, qu'il y a d'angles, ou de costez en la figure.

Mais les angles interieurs sont egaux à deux fois autant de droits, quatre ostez, que ladite figure a d'angles, comme nous avons montré cy-dessus; partant les exterieurs sont toujours egaux à quatre droits. Par exemple: En quelconque triangle, les angles interieurs & exterieurs ensemble, sont egaux à six droits: comme il apert en cette figure.



Mais par la 32 prop. les internes seuls sont egaux à deux droits. Donc les seuls exterieurs seront egaux à quatre droits. En un quadrangle, les angles exterieurs, & les interieurs ensemble, sont egaux à huit droits. Mais les interieurs seuls sont egaux à quatre droits, comme nous avons demontré; les exterieurs seuls seront donc aussi egaux à quatre droits. Toutes lesquelles choses peuvent étre veuës és figures apposées cy-dessus. Il y a la même raison en toutes autres figures qui ont tous leurs angles interieurs.

COROLLAIRE.

Il resulte de cette 32.prop. que les trois angles de quelconque triangle rectil. pris ensemble, sont égaux aux trois angles de quelconque autre triangle pris ensemble: Pource que tant ces trois-là, que ces trois-cy, sont égaux à deux droits: d'où vient que si deux angles d'un triangle sont egaux à deux angles d'un autre triangle; le troisiéme angle de l'un sera aussi égal au troisiéme angle de l'autre; & de plus, si les deux angles de ce triangle-là sont égaux aux deux angles de de cettui-cy, chacun au sien, les triangles seront equiangles.

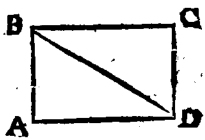
Il appert aussi que tout triangle Isoscelle, duquel l'angle compris des costez égaux est droit, à chacun des autres angles demy droit: car ces deux ensemble font un droit, puis que par la 32. prop. les trois sont égaux à deux droits, & que le troisiéme est posé droit: Parquoy puis que par *que par la 5. prop. les deux restãs sont égaux entr'eux: chacun d'iceux sera demy droit. Mais si l'angle cõtenu des cótés egaux étoit obtus, chacun des autres seroit moindre qu'un demy droit: car les deux ensemble seroient moindres qu'un droit, &c. Finalement si ledit angle estoit aigu, chacun des autres, seroit plus grand qu'un demy droit: pource que les deux ensemble seroient plus grands qu'un droit, &c. D'où resulte derechef que les triangles isoscelles, qui ont les angles du sommet égaux, sont equiangles; attendu que chacun des angles de dessus la base, sera la moitié du reste de deux droits.*

Il est pareillement manifeste, que chaque angle d'un triangle equilateral, est les deux tierces parties d'un droit, ou la tierce partie de deux droits. Car deux angles droits, ausquels sont égaux les trois angles d'un triangle equilateral par cette 32. propos. estans divisez en trois angles égaux, chacun d'iceux sera necessairement la tierce partie de deux droits, ou bien les deux tierces parties d'un droit.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Les lignes droites qui conjoignent deux lignes droites égales & paralleles, & de mesme part, sont aussi égales & paralleles.

Soient deux lignes droites AB & CD, qui conjoignent de mesme part deux autres lignes droites AD & BC égales & paralleles. Je dis que AB & CD, sont aussi égales & paralleles.



Qu'il ne soit ainsi; soit menée la diagonalle BD: Icelle tombant sur les deux paralleles AD & BC, fera les angles ADB & CBD alternativement egaux par la 29. prop. Item AD & BC étans egales, les deux triangles ABD & CBD, auront deux costez egaux à deux costez chacun au sien, & les angles qu'ils comprennent aussi egaux, & par la 4. prop. la base AB sera egale à la base CD, & l'angle ABD sera egal alternativemẽt à l'angle CDB, & par la 27. prop. icelles lignes egales AB & CD, seront aussi paralleles.

Donc les lignes droites qui conjoignent deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

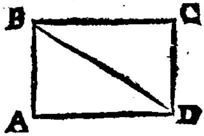
SCHOLIE.

Euclide a dit que les lignes égales & paralleles doivent être conjointes de même part, afin que celles qui les joindront soient aussi égales & paralleles pource que si on les conjoignoit de part & d'autre, comme de A à C, & de B a D il est manifeste que les lignes qui les joindroient ainsi, ne seroient jamais paralleles, ains s'entrecoupperoient toûjours, & ne seroient que rarement égales.

THEOR. 24. PROP. XXXIV.

En tout parallelogramme, les côtés & les angles opposez, sont égaux entr'eux; & la diagonalle le coupe en deux également.

Soit le parallelogramme A BCD, auquel soit menée la diagonalle BD. Je dis que le côté AB, est égal à son opposé CD & aussi le côté AD égal au côté BC: Item que l'angle A est égal à son angle opposé C, & encore l'angle A B C égal à l'angle ADC: finallement qu'iceluy parallelogramme ABCD, est couppé en deux également par la diagonalle BD.



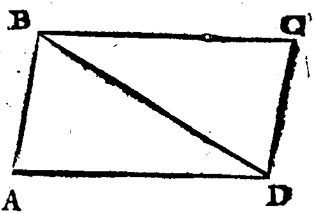
Car puis que la figure quadrilatere ABCD est un parallelogramme, le côté AB sera parallele au côté CD, & le côté AD au côté BC, & par la 29. propos. l'angle ABD sera alternativement égal à BDC. Item l'angle ADB alternativement égal à l'angle CBD. Ainsi les deux triangles BAD & DCB auront les angles A B D & B D A, égaux aux angles BDC & CBD, chacun au sien: & le côté BD commun à tous les deux susdits triangles: & partant par la 26. prop. les autres costez AB & A D, seront égaux aux autres costez C D & B C, chacun au sien, & l'autre angle A égal à l'autre angle C. Et de plus il eſt évident que les deux angles du point B enſemble, ſeront égaux aux deux enſemble du point D. Encores par la 4. propoſ. les triangles ABD & CDB ſeront égaux; & partant le parallelogramme ABCD eſt couppé en deux également par la diagonalle BD. Donc en tout parallelogramme les coſtez & les angles, &c. Ce qui eſtoit à prouver.

SCHOLIE.

Euclide à bien dit icy que la diagonalle couppe le parallelogramme en deux également, mais il n'a rien dit des angles, pource qu'icelle diagonalle les couppe quelquesfois en deux également, & d'autres fois inegallement, ainſi qu'il eſt démontré au troiſiéme Theoreme ſuivant.

1. Tout quadrilatere ayant les coſtez oppoſez égaux eſt parallelogramme.

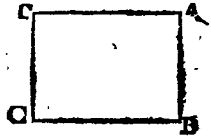
Au quadrilataire ABCD, les coſtez oppoſez AB, CD ſoient egaux, & auſſi les oppoſez AD, BC. Ie dis qu'iceluy quadrilatere ABCD eſt un parallelogramme. Car ayant mené la diagonalle BD, les deux coſtez AB, BD du triangle ABD ſeront egaux aux deux côtez DC, BD du triangle BCD, chacun au ſien, & la baſe BD, egale à la baſe BC. Donc par la 8. propoſ. l'angle ABD ſera egal à l'angle CDB, qui luy eſt alterne, & encore ADB à ſon alterne CBD par le Corollaire d'icelle 8. prop. Et par la 27. p. les lignes AB, CD ſeront paralleles; comme auſſi BC, AD: & par la 36. def. le quadrilatere ABCD eſt un parallelogramme. Ce qui étoit proposé.



De cecy reſulte que les Rhombes, & les Rhomboides ſont parallelogrammes, puis qu'ils ont leurs coſtez oppoſez egaux.

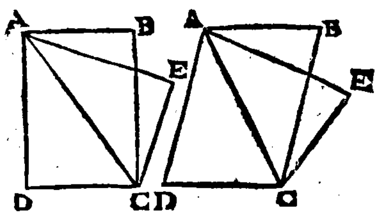
2. Tout quadrilatere qui a les angles oppoſez egaux, eſt parallelogramme.

Au quadrilatere ABCD, les angles opposez A & C soient egaux, comme aussi les opposez B & D. Ie dis que ABCD est un parallelogramme. Car si aux angles egaux A & C, on ajoûte les angles egaux B & D: par le 2. Ax. les deux angles A & B seront egaux aux deux angles C & D : partant les deux A & B seront la moitié des quatre angles A, B, C & D. Mais ces quatre cy sont egaux à quatre droits, comme nous avons demontré au Scholie de la 32. prop. Donc les deux A & B seront egaux à deux droits, & par la 28. prop. les costez AD, BC seront parallels. Par mesme raison les costez AB, DC seront aussi parallels. Parquoy le quadrilatere ABCD est un parallelogramme. Ce qui estoit proposé.



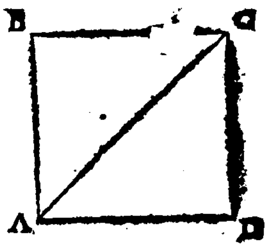
De cecy resulte que tout quadrilatere qui a tous les angles droits est parallelogramme, attendu que les deux angles A & B seront egaux à deux droits, comme aussi les deux D & C, &c. Consequemment tant le quarré, que le quarré long, sont parallelogrammes, puis qu'ils ont tous leurs angles droits.

Or par les deux Theoremes precedents sont converties les deux premieres parties de la 34. propos. mais quant à la 3. partie, on ne la peut pas convertir, vû que tout quadrilatere qui est coupé en deux egalement par la diagonalle, n'est pas parallelogramme. Car soit ABCD un quarré long, ou bien un Rhomboide, lequel sera parallelogramme, & consequemment êtant tirée la diagonalle AC, elle le coupera en deux egalement : & sur icelle soit construit le triangle AEC, en sorte que le costé AE soit egal au costé AD, & le costé CE egal au costé CD : & sera fait le trapese ADCE, duquel la diagonalle sera AC, qui le coupera en



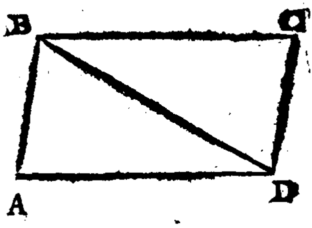
deux egalement, puis que les deux triangles ADC, AEC ayans tous leurs costez egaux chacun au sien, sont consequemment egaux.

3. Si un parallelogramme est equilateral, la diagonale coupera les angles en deux egalement : mais inégalement s'il n'est equilateral.



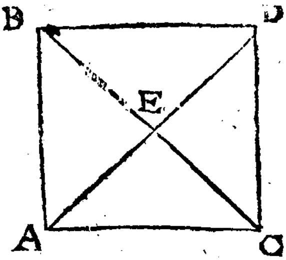
Soit un parallelogramme ABCD, duquel tous les côtez soient egaux entr'eux, & soit menée la diagonalle AC : Ie dis qu'elle coupe les angles A & C en deux egalement. Ce qui est manifeste par la 8. propos. veu que les deux triangles ABC, ADC ont tous les trois côtez egaux, chacun au sien.

Soit derechef le parallelogramme ABCD, auquel le costé AD soit plus grand que le costé AB, & soit tirée la diagonalle BD : Ie dis qu'elle coupe inégalement les angles B & D. Car puis qu'au triangle ABD le costé AD est plus grand que le costé AB, par la 18. propos. l'angle ABD sera plus grand que l'angle ADB. Mais par la 29 prop. l'angle ABD est egal à son alterne BDC, car AD est parallele à BC, puis que ABCD est un parallelogramme. Donc aussi l'angle BDC sera plus grand que l'angle ADB : & partant tout l'angle D est coupé inégalement par la diagonale BD. Il y a même raison des autres angles. Parquoy apert ce qui êtoit proposé.

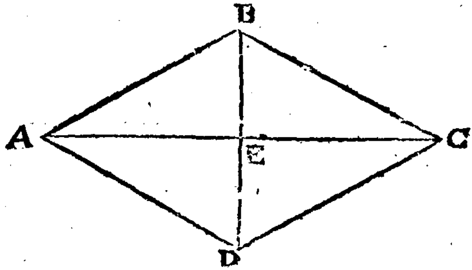


4. Si un parallelogramme a tous les angles egaux, les deux diagonalles seront egales entr'elles : mais inégales, si les angles sont inégaux.

Soit premierement un parallelogramme ABCD, duquel tous les angles soient egaux, & soient menées les deux diagonalles AC, BD: Ie dis qu'icelles diagonalles sont egales entr'elles. Car attendu que les deux costez AB, BC, du triangle ABC sont egaux aux deux costez DC, CB, du triangle BCD, chacun au sien, & l'angle B egal à l'angle C, par la 4. propos. la base AC *sera egale à la base* BD *: ce qui étoit proposé. Partant au quarré, & au quarré long les diametres sont egaux, puis que l'un & l'autre a tous les angles egaux, sçavoir droits.*



Maintenant au parallelogramme ABCD*, duquel l'angle* ABC *soit plus grand que l'angle* BAD*, & soient les deux diagonales* AC, BD. *je dis que la diagonale* AC,



qui soûtient le plus grand angle B, est plus grande que la diagonale BD, *qui soûtient le moindre angle* A. *Car d'autant qu'au triangle* ABC *les deux costez* AB, BC, *sont egaux aux deux costez* AB, AD *du triangle* BAD. *chacun au sien, & l'angle* B *plus grand que l'angle* A, *par la vingt-quatriéme proposition, la base* AC *sera plus grande que la base* BD. *Ce qui étoit proposé.*

De cecy resulte qu'au Rhombe ou Rhomboide les diagonales sont inégales : car ils ont les angles obliques, & par consequent inégaux.

5. En tout parallelogramme, les diagonales s'entrecoupent en deux egalement : & tout quadrilatere auquel les diagonales s'entrecoupent en deux egalement, est parallelogramme.

Au parallelogramme ABCD cy-dessus, soient les deux diametres AC, BD qui s'entrecoupent au point E : Ie dis que chacun d'iceux diametres est coupé en deux parties egales en E, c'est à dire que AE, CE sont egales, & BE, DE aussi egales. Car d'autant que par la 29. prop. les deux angles EAB, EBA du triangle ABE, sont egaux aux alternes ECD, EDC du triangle CDE, un chacun au sien, & le costé AB egal au costé opposé CD par la 34. prop. le costé AE sera egal au costé CE, & le costé BE au costé ED par la 26. prop. Ce qui étoit premierement proposé.

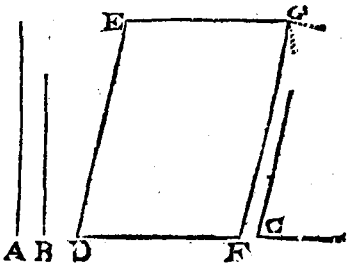
Maintenant, au quadrilatere ABCD soient les deux diagonales AC, BD, qui s'entrecoupent en deux egalement en E : Ie dis qu'iceluy quadrilatere ABCD est un paralelogramme. Car puis que les costez AE, BE du triangle AEB sont egaux aux costez CE, DE du triangle CED, chacun au sien, & que par la quinziéme proposition les angles au sommet E sont aussi egaux ; par la quatriême proposition les bases AB, CD seront egales, & l'angle ABE egal à l'angle alterne CDE : Donc les lignes droites AB, CD seront paralleles par la 27. proposition. Par même raison AD, BC seront demontrées paraleles, Parquoy ABCD est un paralelogramme.

De cecy apert que si on veut promptement construire un paralelogramme, il faut tirer deux lignes droites interminées AC, BD, qui s'entrecoupent comme que ce soit en E ; puis prendre AE, EC egales, & BE, ED aussi egales, puis soient tirées les lignes AB, BC, CD, DA : & sera fait le paralelogramme ABCD : lequel sera un Rhombe, si les angles du point E sont faits droits, & s'ils sont obliques, ce sera un Rhomboide : Mais les susdits angles étans droits, si on fait toutes les quatre lignes EA, EB, EC, ED egales entr'elles ; le paralelogramme constitué sera un quarré : Finalement lesdits angles du point E étans *obliques, & toutes les quatre susdites lignes egales, le paralelegramme constitué sera un quarré long; le tout comme il apert des choses demontrées cy-dessus.*

A ce que dessus nous adjoûterons encore ce probléme.

6. Construire un parallelogramme qui ait un angle egal à un angle donné, & les costez comprenant iceluy angle, egaux à deux lignes droites données.

Soient données deux lignes droites A, B, & un angle C: Il faut construire un parallelogramme ayant un angle egal au donné C, & les deux costez comprenant iceluy angle, egaux aux deux lignes données A & B.



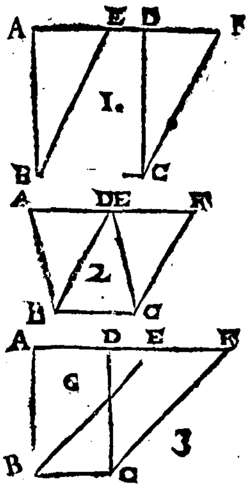
Soit prise DE *egale à A, puis à l'extremité D, soit fait l'angle* EDF *egal au donné C, faisant DF egale à B: en apres du centre E, & du méme intervale B soit décrit un arc de cercle G, puis du centre F & intervale A soit décrit un autre arc qui coupe le precedent G, & de l'intersection soient tirées les lignes droites* EG, FG: *& le quadrilatere* DEGF, *sera le parallelogramme requis, ainsi qu'il est manifeste par les choses cy-dessus demontrées.*

THEOR. 25. PROP. XXXV.

Les parallelogrammes constituez sur une même base, & entre mêmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient deux parallelogramme ABCD & BCFE, tous deux sur méme base BC, & entre mémes paralleles AF, & BC: Je dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Or le point E tombera, ou entre A & D, ou au point D, ou entre D & F: qu'il tombe premierement entre A & D, comme en la premiere figure. D'autant que par la 34. prop. au parallelogramme ABCD, le costé AD est egal au côté BC qui luy est opposé, & qu'au mesme BC est aussi egal EF costé du parallelogramme BEFD, par la 1. com. sent. les costez AD, EF seront egaux entr'eux : ôtant donc d'iceux la partie commune ED, les restes AE & DF seront egaux par la 3. com. sent. Mais par la même 34. prop. au parallelogramme ABCD, les costez opposez AB, DC sont aussi egaux ; & puis qu'étans parallels, sur iceux tombe la ligne droite FA, l'angle exterieur CDF sera egal à l'angle interieur BAE par la 29. prop. Donc les triangles ABE, DCF auront deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & les angles qu'ils comprennent aussi egaux ; & partant iceux triangles ABE, DCF seront egaux entr'eux par la 4. prop. leur ajoûtant donc le trapeze commun BEDC, sera fait le parallelogramme ABCD egal au parallelogramme BEFC. Ce qui étoit proposé.

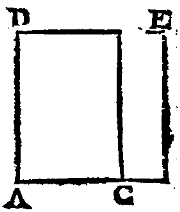


Maintenant, que le point E tombe avec le point D, comme en la deuxiéme figure, d'autant que comme dessus les lignes AD, EF seront egales entr'elles, & l'angle exterieur FEC egal à l'interieur DAB ; les triangles BAD & CEF seront egaux par la quatriéme proposition. Ajoûtant donc à chacun le triangle commun BDC, seront faits egaux les parallelogrammes ABCD, & BEFC.

En troisiéme lieu, que le point E tombe entre D & F, comme en la troisiéme fig. D'autant que par la 34. propos. les côtez opposez des parallelogrammes sont egaux, AD & BC seront egaux : Item BC & EF ; & partant AD & EF egaux, ausquels si on ajoûte la ligne commune DE ; la toute AE sera egale à la toute DF. Item AB est egale à DC, lesquelles étans paralleles, l'angle exterieur CDE sera egal à l'opposé interieur EAB : & par la quatriéme proposition les triangles BAE & CDF, seront egaux : desquels si on oste le triangle commun GDE, les demeurans trapezes BADG & CGEF, seront egaux : ausquels si on ajoûte le triangle commun BGC, le parallelogramme ABCD sera egal au parallelogramme BCFE: Donc les parallelogrammes constituez sur une mesme base, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux : Ce qui étoit à démontrer.

SCHOLIE.

Est icy à noter, que quand Euclide & les autres Geometres parlent de parallelogrammes constituez sur une même base, & entre mesmes paralleles, ils entendent que ladite base soit en l'une d'icelles paralleles comme aux exemples cy-dessus : Car entendant autrement cette proposition elle pourroit estre fausse, comme a fort bien remarqué le sieur Dounot, & ainsi qu'il appert en ces deux parallelogrammes ADFC, CFEB, lesquels sont tous deux constituez sur la base CF, & entre mesmes paralleles AB, DE: & toutesfois il est evident, qu'ils ne sont pas egaux : Ce qui advient à cause de ce que leur base commune CF, n'est pas en l'une ne l'autre des paralleles AB, DE.

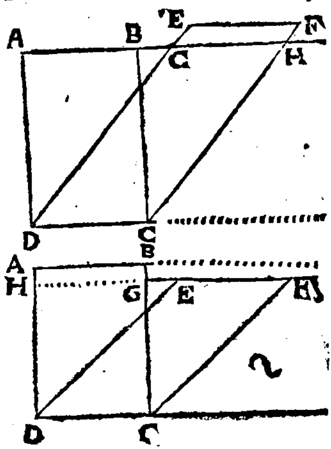


Le même se doit aussi entendre des parallelogrammes, & des triangles mentionnez aux propositions suivantes, c'est à dire, qu'ils doivent tous avoir leurs bases en l'une des paralleles.

Clavius a converty cette 35 prop. ainsi :

Les parallelogrammes egaux constituez sur une même base, & de même part, seront entre mêmes paralleles.

Soient deux parallelogrammes egaux ABCD, CDEF, sur une même base CD, & d'une même part : Ie dis qu'ils sont entre mêmes paralleles, c'est à dire, que prolongeant la ligne droite AB elle rencontrera directement EF. Car autrement si elle ne la rencontre elle tombéra,



ou au dessus d'icelle EF *ou au dessous. Premierement, qu'elle tombe au dessous, s'il est possible, comme est* AH, *en la premiere figure. Donc par la 35. proposition le parallelogramme* CDGH *sera egal au parallelogramme* ABCD: *Mais à iceluy parallegramme* ABCD *est posé egal le parallelogr.* CDEF. *Parquoy les parallelogrammes* CDEF, CDGH *seront egaux: le tout & la partie. Ce qui est absurde. Le prolongement & continuation directe de* AB *ne tombera donc pas au dessous de* EF.

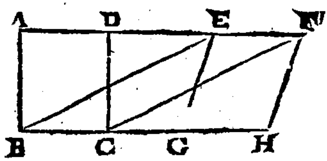
Secondement, que AB *prolongée tombe s'il est possible, au dessus de* EF, *comme en la 2. figure: donc* EF *prolongée tombera au dessous de* AB. *Parquoy comme dessus les parallelogrammes* ABCD, CDHG *seront egaux, le tout & la partie. Ce qui est absurde. Donc puis que* AB *produite ne tombera pas au dessus de* EF, *ny au dessous, elle la rencontrera directement. Ce qui étoit proposé.*

THEOR. 26. PROP. XXXVI.

Les parallelogrammes constituez sur bases egales, & entre mêmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient les deux parallelogrammes ABCD & EFGH, ayans les bases BC & GH egales, & entre mêmes paralleles AF & BH. Je dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Qu'il ne soit ainsi: soient menées les deux lignes BE, CF: d'autant que BC est posée egale à GH, & que par la 34. prop. la même GH est egale à son opposée EF, les deux lignes BC, EF seront egales entr'elles par la 1. com. sent. Mais elles sont aussi paralleles par l'hypothese: Donc les lignes BE, CF, qui les conjoignent seront aussi egales & paralleles par la 33. propos. & par consequent BEFC sera un parallelogramme constitué sur méme base BC, & entre mémes paralleles BH, AF



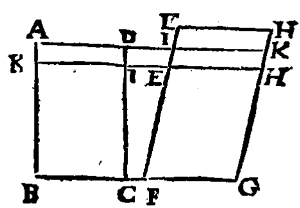
que le parallelogramme ABCD; & par la 35 prop. ils seront egaux; & par la méme prop. il sera aussi egal au parallelog. EFGH, étant sur méme base EF., avec iceluy, & entre mémes paralleles AF, BH; Et par la 1. com. sent. les parallelog. ABCD, & EFGH, seront egaux entr'eux. Donc les parallelogrammes constituez sur bases égales, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Clavius a converty cette 36. propos. ainsi qu'il ensuit.

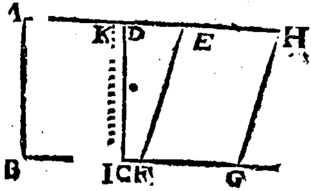
Les parallelogrammes egaux constituez sur bases egales : & de méme part sont entre mémes paralleles. Et si les parallelogrammes egaux constituez entre mémes paralleles, n'ont une méme base, ils seront sur bases egales.

Premierement, soient deux parallelogrammes egaux ABCD, EFGH, constituez sur bases egales BC, FG, & de méme part : Ie dis qu'ils sont entre mémes paralleles, c'est à dire que AD prolongée se rencontrera directement avec EH. Car autrement elle tomberoit ou au dessous d'icelle EH, ou au dessus; & il s'ensuivroit le tout estre egal à la partie:



comme il a été dit en la converse de la precedente proposition.

Secondement, soient les parallelogrammes egaux ABCD, EFGH, entre mémes paralleles AH, BG : Ie dis que leurs bases BC, FG sont egales : Car autrement l'une sera plus grande que l'autre, & soit BC la plus grande, s'il est possible, & d'icelle soit retranchée BI egale à FG : puis soit



menée IK parallele à AB. Donc par la 36. prop. le parallelogramme ABIK sera egal au parallelogramme EFGH; & puis aussi egal au parallelogramme ABCD, la partie au tout. Ce qui est absurde. La base BC n'est donc pas plus grande que la base FG: Et par mesme raison elle ne sera pas plus petite. Parquoy les bases BC, FG sont egales.

Clavius demontre encore icy cet autre Theoreme.

Si deux parallelogrammes constituez entre mesmes paralleles, ont leurs bases inegales; celuy-là sera le plus grand, qui aura la plus grande base. Et au contraire, si deux parallelogrammes inegaux sont entre mesmes paralleles; le plus grand aura une plus grande base que l'autre.

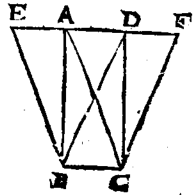
Soient les deux paralelogrammes ABCD, EFGH *de la figure precedente, entre les paraleles* AH, BG, *& soit la base* BC *plus grande que la base* FG: *Ie dis que le paralelogramme* ABCD, *qui est sur la plus grande base* BC, *est plus grand que le paralelogramme* EFGH. *Car de* BC *soit retranché* BI *egale à* FG, *& soit tirée* IK *paralele à* AB *par la 31. propos. de ce Livre. Donc par la 36. prop. les paralelogrammes* ABIK, EFGH *constituez sur bases egales, seront egaux: & puis que par le 9. ax. le paralelogramme* ABCD *est plus grand que le paralelogramme* ABIK, *le même paralelogramme* ABCD *sera aussi plus grand que le paralelogramme* EFGH. *Ce qui étoit proposé.*

Soient derechef les paralelogrammes ABCD, EFGH *inégaux, &* ABCD *le plus grand: Ie dis que la baze* BC *est plus grande que la base* FG. *Car si elle étoit egale, les paralelogrammes seroient egaux par la 33. proposition de ce livre. Ce qui est absurde, puis que* ABCD *a été posé plus grand que* EFGH. *Mais si ladite base* BC *étoit moindre, le paralelogramme* EFGH *seroit plus grand que le paralelogramme* ABCD, *comme il a été demontré cy-dessus: Ce qui est encore absurde. Donc puis que la base* BC *ne peut être egale, ny moindre que la base* FG, *elle sera plus grande. Ce qui étoit proposé.*

THEOR. 27. PROP. XXXVII.

Les triangles conſtituez ſur une même baſe ; & entre mêmes paralleles, ſont égaux entr'eux.

Soient deux triangles ABC, BDC, tous deux conſtituez ſur la meſme baſe BC, & entre meſme paralleles EF, & BC. Je dis qu'ils ſont égaux entr'eux.

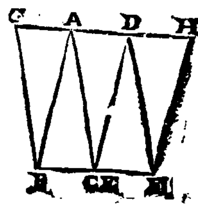


Car ſi on mene B E parallele à CA, & CF parallele à BD, afin d'accomplir les parallelog. BEAC, & BCFD, iceux ſeront égaux par la 35. prop. attendu qu'ils ſont conſtituez ſur meſme baſe BC, & entre meſmes paralleles BC, EF. Mais les triangles donnez ABC, & DBC, ſont moitiez d'iceux parallelogrammes par la 34. prop. pource qu'ils ſont couppez en deux également par les diagonales AB, DC : dont auſſi les triangles ABC ; DBC ſeront égaux, par la 7. com. ſent. Parquoy les triangles conſtituez ſur une meſme baſe, & entre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 28. PROP. XXXVIII.

Les triangles conſtituez ſur baſe egale ; & entre mêmes paralleles, ſont égaux entreux.

Soient deux triangles ABC, DEF, conſtituez ſur baſes égales BC & EF, & entre meſmes paralleles G H & B F. Je dis qu'ils ſont égaux entr'eux.



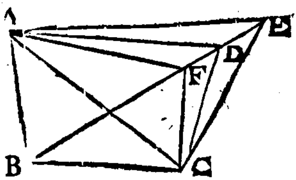
Car apres avoir mené BG, parallele à CA, & FH parallele à DE par la 31. prop. qui accompliſſent les deux parallelogram. ACBG.DEFH : iceux êtans conſtituez ſur baſes égales, & entre mêmes paralleles, ſeront égaux par la 36. prop. auſſi égales ſeront leurs moitiez ſçavoir les trianglespropoſez ABC

& DEF par la 34. prop. estans les parallelogrammes couppez en deux également par les diagonales BA & DF. Donc les triangles constituez sur bases égales, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 29 PROP. XXXIX.

Les triangles égaux constituez sur une même base, & de même part, sont aussi entre même paralleles.

Soient deux triangles égaux ABC, & BCD constituez sur une mesme base BC, & de mesme part. Je dis qu'ils sont entre mesme paralleles c'est à dire, que si on mene la ligne droite AD, elle sera parallele à BC,



Autrement, du point A, on en pourra mener une autre qui sera parallele à BC (si AD ne l'est) par la 31. prop. laquelle tombera, ou bien au dessus de AD, ou au dessous. Qu'elle tombe premierement au dessus, & soit icelle AE, s'il est possible; & apres avoir continué BD jusques en E, & mené EC, les deux triangles BAC, & BEC par la 37. prop. estans sur mesme base, & entre mesmes paralleles, seront égaux. Mais par l'hypothese les deux triangles BAC, & BDC sont aussi égaux: donc par la 1. com. sent. les triangles BEC & BDC seroient aussi égaux, la partie & le tout; partant la parallele menée du point A, ne tombera pas au dessus de AD. Le mesme inconvenient s'ensuivra si on la fait tõber au dessous de AD comme AF: car ayant mené CF. les triangles BFC & BDC se trouueroient égaux, ce qui ne peut estre: donc du point A on ne menera point d'autre ligne que AD parallele à BC. Parquoy les triangles égaux constituez sur mesme base, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

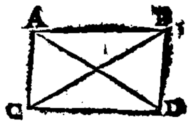
SCHOLIE.

Par cette prop. qui est la converse de la 37. il est aisé de demontrer comme a fait Commandin le Theor. suivant.

Tout quadrilatere qui est coupé en deux egalement par l'un

& l'autre diametre, est parallelogramme.

Le quadrilatere ABDC *soit divisé en deux egalement par l'un & l'autre diametre* AD, BC : *Ie dis qu'iceluy est paralelogramme. Car d'autant que les triangles* ACD, BDC *sont chacun moitié du quadrilatere* ABDC, *ils sont egaux entr'eux par le 7. ax. Et pource qu'ils ont une même base* CD, *& sont de même part, ils sont entre mêmes paraleles par la 39. prop. & partant* AB *est paralele à* CD. *Semblablement veu que les triangles* ABC, ACD *sont egaux & sur même base* AC, *icelle ligne* AC *sera aussi paralele à* BD : *donc le quadrilatere* ABDC *est paralelogramme, puis que les costez opposez d'iceluy sont paralels. Ce qui étoit proposé.*

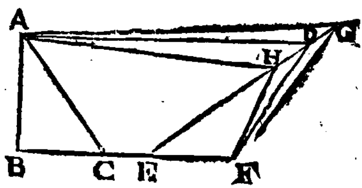


THEOR. 30. PROP. XL.

Les triangles egaux constituez sur bases egales, & de même part, sont aussi entre mêmes paralleles.

Soient deux triangles egaux ABC, & DEF, constituez sur bases egales BC & EF, & de même part. Je dis qu'ils sont aussi entre mêmes paralleles; c'est à dire, que si on mene une ligne droite de A en D, qu'icelle sera parallele à BF.

Autrement, du point A on en pourra mener une autre qui sera parall. à BF (si AD ne l'est) par la 31. prop. laquelle tombera, ou au dessus de AD, ou au dessous. Soit donc premierement au dessus, & soit icelle AG, s'il est possible, & apres avoir continué ED iusques à ce qu'il rencontre A G en G, & mené F G, les deux triangles BAC, & EGF seront egaux par la 38. prop. mais par l'hypothese

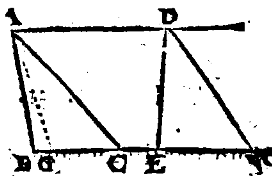


these les triangles BAC & DEF sont aussi égaux : donc par la 1. com. sent. le triangle EDF sera égal au triangle EGF, la partie au tout ; ce qui est impossible : Partant la parallele menée du point A ne tombera point au dessus de AD. Le mesme inconvenient s'ensuivra si on la fait tomber au dessous, comme AH, car les triangles EHF & EDF, se trouveroient égaux : donc du point A ne pourra estre menée autre ligne que AD parallele à BF. Parquoy les triangles égaux constituez sur bases égales, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Commandin & Clavius apres luy, demontrent en ce lieu le Theoreme suivant.

Si les triangles égaux constituez entre mesmes paralleles, n'ont une mesme base, ils seront sur bases égales.



Soient les triangles égaux ABC, DEF, entre mêmes paralleles AD, BF, & sur les bases BC, EF : Je dis qu'icelles bases sont égales entr'elles. Car si elles ne sont égales soit BC la plus grande, & d'icelle soit retranchée CG, egale à EF, & tirée AG. Donc par la 38. proposit. le triangle ACG sera égal au triangle DEF : Mais à ce même triangle a été posé égal le triangle ABC. Donc par le 1. axiome les triangles AGC, ABC seront égaux, la partie & le tout : Ce qui est absurde. Donc les bases BC, EF, ne sont pas inégales, mais égales. Ce qui étoit proposé.

En suitte de ce theoreme Clavius démontre encore le suivant.

Si deux triangles constituez entre mêmes paralleles, ont leurs bases inégales, celuy-là sera le plus grand, duquel la base sera la plus grande. Et au contraire, si deux triangles inégaux sont entre mêmes paralleles, la base du plus grand sera la plus grande.

En la figure precedente soient entre mêmes paralleles AD, BF, les triangles ABC, DEF, & soit la base BC plus grande que la base EF : Je dis que le trian-

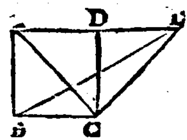
gle ABC, est plus grand que le triangle DEF. Car ayant pris CG egale a EF, & tiré AG, les triangles AGC, DEF, seront egaux par la 38. proposition. Et puis que par le 9. axiome le triangle ABC est plus grand que le triangle AGC, le même triangle ABC sera plus grand que le triangle DEF.

Soient derechef les triangles inegaux ABC, DEF, & le plus grand soit ABC. Ie dis que la base BC est plus grande que la base EF. Car si on dit qu'elle est egale, le triangle ABC sera egal au triangle DEF: ce qui est absurde, attendu qu'il a été posé plus grand. Et si on l'estime être moindre, le triangle DEF sera plus grand que le triangle ABC, comme il a été démontré cy-dessus: Ce qui est encore plus absurde, puis que ABC a été posé plus grand que DEF. Donc la base BC sera plus grande que la base EF, puis qu'elle ne peut être ny egale, ny moindre. Ce qui étoit proposé.

THEOR. 31. PROP. XLI.

Si un parallelogramme, & un triangle ont une même base, & sont entre mêmes paralleles; le parallelogramme sera double du triangle.

Soit le parallelogramme ABCD sur la méme base BC, que le triangle BCE, & tous deux entre méme paralleles AF & BC. Je dis que le parallelogrãme ABCD est double du triangle BEC.

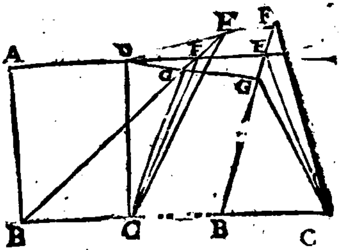


Car si on meine la diagonalle AC, le triangle ABC sera la moitié du parallelogramme ABCD par la 34. prop. Mais par la 37. prop. le méme triangle ABC sera egal au triangle BEC. Donc par la 6. com. sent. le parallelogramme ABCD, qui est double de l'un, sera aussi double de l'autre. Si donc un parallelogramme & un triangle ont une méme base, &c. Ce qu'il falloit prouver.

Si les bases étoient egales, on demontreroit encore la même chose, & en la même maniere que dessus, tirant le diametre du parallelogramme. Car d'autant que *les triangles constituez sur bases egales, & entre mêmes paralleles sont egaux entr'eux, le parallelogramme qui est double de l'un, seroit aussi double de l'autre.*

Clavius a demontré apres Commandin la converse de cette 41. prop. ainsi qu'il ensuit.

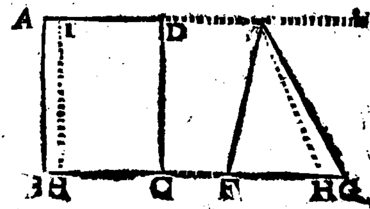
Si un parallelogramme double d'un triangle est constitué sur une méme base qu'iceluy, ou sur une base egale, & de méme part ; ils seront entre méme paralleles. Et si un parallelogramme est double d'un triangle & entre méme paralleles, leurs bases seront egales, si elles ne sont une méme.



Soit le parallelogramme ABCD double du triangle EBC, sur une même base, ou sur bases egales : Je dis qu'ils sont entre mêmes paralleles, c'est à dire que AD qui est parallele à BC, étant prolongée directement tombera au point E. Car autrement elle tombera ou au dessus de E, ou au dessous. D'où adviendra comme il a été demontré en la 39. ou 40. prop. la partie être egale au tout. Car par la 41. prop. le parallelogramme sera pareillement double du triangle BFC, ou BGC : & par le 6. axiom. les triangles EBC, FBC, ou les triangles FBC, GBC seront egaux, la partie & le tout. Ce qui est absurde.

Soit maintenant le parallelogramme ABCD double du triangle EFG, & entre mêmes paralleles. Je dis que la base BC est egale à la base FG. Car si l'une d'icelles sçavoir BC est plus grande, ayant pris CH egale à FG & tiré HI parallele à BA, on demontrera les parallelogrammes ABCD, IHCD être egaux, le tout & la partie ; (pour ce que chacun est double du triangle EFG celuy-là par l'hypothese ; & cettuy-cy par la 41. prop.) ce qui est absurde. On demontrera encore le même, si on dit la base FG être plus grande que la base BC : Car ayant fait FH egale à BC, & tiré la ligne droite

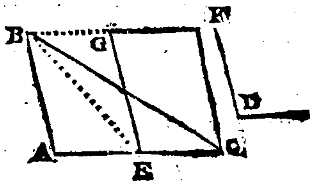
H E, les triangles EFH, EFG seront egaux, la partie & le tout; (d'autant que chacun est moitié du parallelogramme ABCD, celuy-la par la 41. prop. & cettui-cy par l'hypothese) Ce qui est absurde.



PROBL. II. PROP. XLII.

Faire un parallelogramme egal à un triangle donné, & qui ait un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit le triangle donné ABC, & l'angle rectiligne donné D il faut faire un parallelogramme egal au triangle donné A B C, & qui ait un angle egal à l'angle donné D.



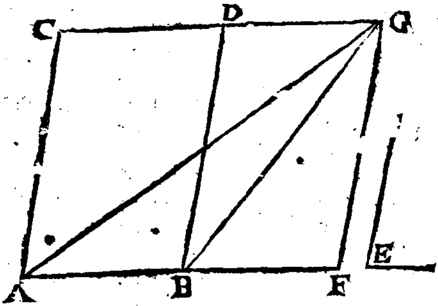
L'un des costez du triangle, sçavoir, AC soit coupé en deux egalement en E, par la 10. prop. puis soit fait l'angle CEG egal à l'angle D par la 23. prop. Et par la 31. prop. soit menée de B, la ligne BF parallele à AC, laquelle coupe EG en G. Derechef, de C soit menée CF parallele à EG, rencontrant BF en F : & sera constitué un parallelog. EGFC, ayant l'angle CEG egal au donné D, lequel parallelogramme, ie dis étre egal au triangle donné ABC. Car étant tirée la ligne BE, iceluy parallelogramme EGFC sera double du triangle EBC par la proposition precedente, duquel est aussi double le triangle A B C, iceluy étant egal aux deux ABE, EBC, qui sont egaux entr'eux par la 38. propos. Donc le parallelogramme EGFC, & le triangle A B C seront egaux entr'eux par la sixiéme commune sentence, & puis qu'iceluy parallelogramme à l'angle CEG egal au donné D par la construction, nous avons construit un parallelogramme egal à un triangle donné, &c. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

La pratique de ce probleme est enseignée au 13. de nostre Geometrie pratique: Et est si facile à entendre par la construction cy-dessus, qu'il n'est besoin d'en dire autre chose: mais nous adjousterons icy (apres Pelletier) la converse de cette 42. proposition, qui est telle.

Faire un triangle egal à un parallelogramme donné, & qui ait un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit donné le parallelogramme ABDC, & l'angle rectiligne E: il faut faire un triangle egal au parallelogrãme donné AD, ayant un angle egal au donné E. Soient prolongées CD, tant qu'il sera de besoin,



AB en sorte que BF soit egale à icelle AB; puis au point A soit fait l'angle FAG egal au donné E, tirant AG iusques à ce qu'elle rencontre CD prolongée en G, & êtant joint FG, le triangle AGF sera le requis: Car l'angle FAG est egal au donné E, & êtant tirée BG, les triangles AGB & BGF seront egaux par la 38. prop. & partant le total AGF sera double de AGB: Mais par la 41. prop. le parallelogramme AD est aussi double d'iceluy triangle ABG. Donc le triangle AGF, & le parallelogramme ACDB seront aussi egaux entr'eux. Ce qu'il faloit faire.

COROLLAIRE.

Il est evident par les deux demonstrations cy-dessus.

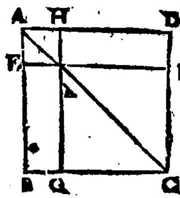
qu'un triangle qui a la base double de celle d'un parallelogramme constitué entre mêmes paralleles qu'iceluy, est egal à iceluy parallelogramme.

THEOR. 32. PROP. XLIII.

En tout parallelogramme les supplêmens des parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre, sont egaux entr'eux.

Soit le parallelogramme ABCD, son diametre AC à l'entour duquel sont les parallelogrammes AEKH & KGCF. Je dis que les parallelogrammes HKFD & EBGK, qu'on appelle suppléments, sont egaux entr'eux.

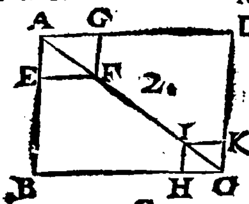
Car d'autant que par la 34. prop. les triangles ABC, ADC sont egaux entr'eux: Item les triangles CKG, CFK aussi egaux; si on oste ceux-cy de ceux-là, resteront egaux les trapezes ABGK, ADFK: Mais par la 34. prop. sont aussi egaux les triangles AEK, AHK; partant si on les oste des trapezes susdits, demeureront egaux les complemens EBGK, HKFD. Donc en tout parallelogramme les suppléments, &c. Ce qui étoit à prouver.

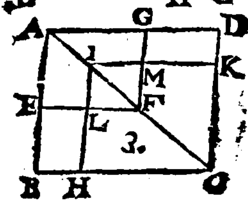


SCHOLIE.

Si les deux parallelogrammes d'alentour le diametre n'étoient conjoints au point K, ainsi qu'en la figure cy-dessus, mais que l'un fut éloigné de l'autre, comme en la 2. figure, ou bien qu'ils s'entrecoupassent ainsi qu'en la troisiéme, on démontreroit en la même maniere que dessus, être aussi egaux, les complemens ou restes, sçavoir en la 2. figure, les pentagones BEFIH, DGFIK, & en la 3. les parallelogrammes BELH, DGMK: Car puis que par la 34. prop. les triangles ABC, ADC, de l'une & l'autre figure sont egaux entr'eux, comme aussi les triangles AEF, AGF; les trapezes BEFC, DGFC seront pareillement egaux par le 3. axiome.

Parquoy si d'iceux trapezes de la seconde figure, on oste les triangles egaux HIC, KIC, resteront encore egaux les pentagones BEFIH, DGFIK. Mais adjoûtant aux trapezes de la troisiéme fig. les triangles egaux LIE, MIF, les figures BELIC, DGMIC seront egales entr'elles, desquelles si on oste les triangles egaux HIC, KIC, resteront aussi egaux les parallelogrammes BELH, DGMK. Ce qui étoit proposé.

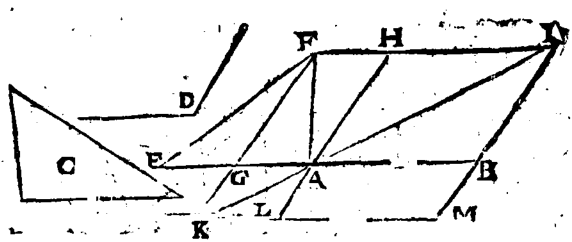




PROB. 12. PROP. XLIV.

Sur une ligne droite donnée, décrire un parallelogramme egal à un triangle donné, ayant un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit la ligne droite donnée AB, le triangle donné C, & l'angle rectiligne donné D. Il faut sur A B décrire un parallelogramme egal au triangle C, & qui ait un angle egal au dõné D.
Soit prolongée la ligne donnée A B iusques en E, tellement



que AE soit egale à quelconque des costez du triangle C, & soit achevé de construire par la 22. proposition, le triangle AFE, ayant les costez egaux aux costez dudit triangle donné C, lequel luy sera aussi egal par le Corol. de la huitiéme propos. Soit maintenant construit par la 42. prop. le parallelogr. AGFH, egal au triangle AFE, & ayant l'angle GAH egal au donné D : & apres avoir continué la ligne FH jusques en I, tellement que HI soit egale à AB, soit menée IA jusques à ce qu'elle rencontre FG prolongée en K : (ce qui doit arriver, n'étant IA parallele à FG par la 11. com. sent.) Puis du point K, soit menée KM parallele à GB, jusques a ce qu'elle rencontre IB tirée en M : & finalement soit prolongée HA jusques à ce qu'elle rencontre KM en L. Je dis que le parallelogramme ABML est le requis.

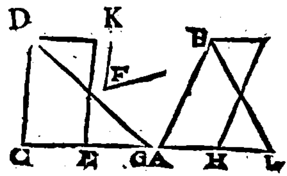
Car il est constitué sur la ligne droite donnée AB, & à l'angle BAL egal à l'angle donné D, puis que par la 15. prop. il est egal à l'angle GAH, qui a été fait egal à l'angle D : Finalement il est egal au triangle donné C, puis que par la 43. propos. il est égal au parallelogramme AHFG, lequel a été fait egal au triangle AFE, ou C. nous avons donc décrit sur la ligne donnée AB un parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous avons enseigné la pratique de ce Probl. en nos Memoires Mathematiques Probl. 15. de la Geometrie pratique, & ne differe de la construction cy-dessus. C'est pourquoy nous n'en dirons autre chose, mais nous ajoûterons icy la converse de cette propos. laquelle est telle.

Sur une ligne droite donnée, construire un triangle égal à un parallelogramme donné, & qui ait un angle égal à un angle rectiligne donné.

Soit la ligne droite donnée AB, sur laquelle il faut décrire un triangle egal au parallelogramme CDKE, & qui ait un angle égal à l'angle donné F.



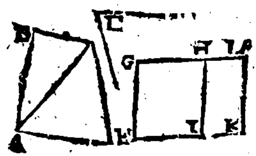
Soit prolongée CE, jusques en G, tellement que CE, EG soient égales, & soit menée DG, qui fera le triangle CDG: En apres, par la precedente prop. soit construit sur AB le parallelogramme BH égal au triangle CDG, ayant l'angle BAH egal au donné F : puis soit prolongée AH jusques en L; de sorte que HL soit egale à AH, & ayant tiré BL, le triangle ABL, sera le requis. Car.

par le corol. de la 42. prop. iceluy triangle ABL est egal au parallelogramme BH. Mais iceluy parallelog. est egal par la construction au triangle DCG, lequel est egal au parallelog. CK par le même corol. Donc le triangle ABL sera aussi egal a iceluy parallelogramme CK : mais il a l'angle A egal au donné F, & est fait sur la ligne donnée AB parquoy appert être fait ce qui étoit proposé.

PROBL. 13. PROP. XLV.

Faire un parallelogramme egal à une figure rectiligne donnée, ayant un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit la figure rectiligne donnée ABCD, & l'angle donné E: Et il faut faire un parallelogramme egal à icelle figure rectiligne ABCD, qui ait un angle egal au donné E.



Soit resoluë de la figure rectiligne donnée en triangles, sçavoir est menant la ligne droite AC : puis par la 42. propos. soit fait le parallelogramme FGHI egal au triangle ADC, ayant l'angle F egal à l'angle donné E. Item sur HI soit fait le parallelogramme HIKL, egal au triangle ABC, ayant un angle HIK egal au donné E, & sera fait ce qui est requis. Car les deux parallelogrammes FH & IL, sont construits egaux à la figure rectiligne ABCD, & ont chacun un angle egal à l'angle donné E & ces deux parallelogrammes ensemble en font un seul. Car d'autant que chacun des angles GFI, HIK, est egal à l'angle donné E, ils le feront aussi entr'eux : ausquels si on ajoûte l'angle commun FIH, les deux angles GFI, HIF, qui sont egaux à deux droits par la 29. prop. estant FH parallelogramme ; feront egaux aux deux angles HIK, HIF, lesquels partant feront egaux à deux droits, & par la 14. prop. les deux lignes FI, KI, se rencontreront directement. Pareillement les deux angles GHI, HLK estans egaux par la 34. prop. car ils sont opposez à angles egaux GFI, HIK, si à iceux on ajoûte l'angle commun IHL ; par le même discours que cy dessus les deux lignes GH & IH se rencontreront directement ainsi FK & GL étans lignes droites. & conjoignant de même part les egales & paralleles FG & KL, elles seront aussi egales & paralleles par la 33. prop. & partant FGIK sera parallelogramme; lequel nous avons construit egal à la figure rectiligne donnée ABCD, & l'angle F egal au donné E, ainsi qu'il étoit requis.

SCHOLIE.

S'il y eust eu davantage de triangles en la figure donnée, il eust fallu construire sur KL un troisiéme parallelogramme egal au troisiéme triangle: puis sur le côté opposé à KL, un autre parallelogramme egal au 4. triangle, & ainsi proceder de triangle en triangle jusques à la fin. Et quant à la demonstration, ce sera toujours la même que dessus, repetée autant de fois qu'il sera de besoin. Or comme on décrira sur une ligne droite donnée un parallelogramme egal a une figure rectiligne donnee, & qui ait un angle egal à un angle rectiligne donné, il est assez manifeste par les choses cy-dessus dittes: car pour exemple, si la ligne droite FG eust été donnée, nous eussions par la precedente prop. décrit sur icelle le parallelogramme FGHI: puis sur la même ligne FG, ou plûtost sur une egale à icelle HI, le parallelogramme HIKL, & ainsi consecutivement s'il y avoit d'avantage de triangle en la figure rectiligne donnée.

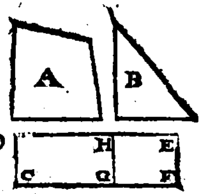
Pelletier a ajoûté en ce lieu un Probleme fort utile, lequel nous rapporterons icy, mais beaucoup plus briefvement qu'il n'a fait.

Estans données deux figures rectilignes inegales, trouver l'excez de la plus grande par dessus la moindre.

Soient données deux figures rectilignes A & B, dont A est la plus grande: il faut trouver l'excez de A par dessus B. Par la 45. prop. soit fait le parallelogramme CDEF egal au rectiligne A, ayant quelconque angle C: puis sur la ligne CD soit fait le parallelogramme CDHG, egal au rectiligne B, ayant l'angle C commun, & le par-

ralelogramme GHEF sera l'excez du rectiligne A par dessus le rectiligne B.

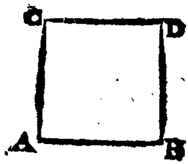
Car d'autant qu'iceluy paralelogramme GE est l'excez du paralelogramme CE egal à A, par dessus le paralelogramme CH egal à B; le même parallelogramme GE sera aussi l'excez du rectiligne A par dessus le rectiligne B. Ce qu'il falloit faire.



PROB. 14. PROP. XLVI.

Sur une ligne droite donnée, décrire un quarré.

Soit la ligne droite donnée AB, sur laquelle il faut décrire un quarré. Du point A, soit menée AC ligne perpendiculaire à AB par la 11. prop. laquelle soit faite egale à icelle AB, & apres avoir mené CD parallele à AB, & BD parallele à AC, par la 31. prop. Je dis que le quadrilatere ABDC est un quarré.



Car d'autant que par la construction il est parallelogramme, les costez & les angles opposez sont egaux par la 34. propos. partant le costé AB est egal à CD, & AC à BD : mais AC étant egal à AB par la construction; il est evident que les quatre costez sont egaux entr'eux. Item l'angle A étant droit par la construction, aussi son opposé D sera droit. Et la ligne AC tombant sur deux lignes paralleles AB, CD, les deux angles interieurs A & C, sont egaux à deux droits par la 29. prop. Mais l'angle A est droit : donc l'angle C sera aussi droit: partant aussi droit son opposé B. Ainsi les quatre angles A, B, C, D seront droits : & par la def. du quarré la figure ABDC sera quarrée. Nous avons donc décrit un quarré sur la ligne droite donnée AB. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous avons enseigné la pratique de cette propos. en nostre Geometrie pratique Probl. 12. laquelle ne differe guere de la construction cy-dessus : car ayant mené la perpendiculaire AC, & icelle fait egale à AB, du même intervale AB soient décrits des centres C & B, deux arcs qui s'entrecoupent en D, duquel étans tirées les lignes CD, BD, sera fait le quarré requis.

Proclus demontre icy : Que les quarrez de lignes egales sont egaux entr'eux : & que des quarrez egaux les lignes sont egales. *Ce qui est aisé à prouver par la superposition d'un quarré sur l'autre : Car les lignes étans egales, si l'une est posée dessus l'autre, elles conviendront entr'elles ; & les angles étans aussi egaux, c'est à sçavoir droits, ils conviendront pareillement entr'eux : & partant tout le quarré conviendra à tout le quarré. Que si les quarrez sont egaux, ils conviendront entr'eux, à cause de l'egalité des angles : donc aussi les lignes ; autrement un quarré seroit plus grand que l'autre. Nous avons laissé la demonstration de Proclus qui est tres-longue, pour suivre celle-cy qui est briéve & facile.*

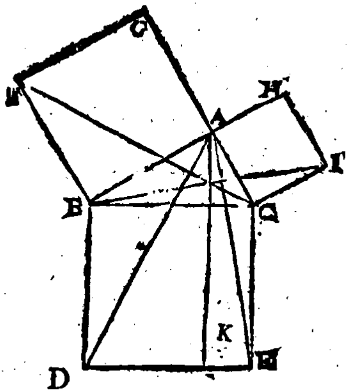
THEOR. 33. PROP. XLVII.

Aux triangles rectangles, le quarré du côté qui soûtient l'angle droit, est egal aux quarrez des deux autres côtez.

Soit le triangle rectangle ABC, sur les côtez duquel soient décrits les trois quarrez BCED, ABFG, AHIC. Je dis que le quarré BCED décrit sur le costé BC, qui soûtient l'angle droit BAC, est egal aux deux quarrez ABFG & ACIH, décrits sur les deux autres côtez AB & AC.

Car soit menée la ligne AK parallele à BD, ou à CE, & tirées les lignes AD, AE, CF & BI. D'autant que par la definition du quarré, les quatre angles au point A sont droits, les lignes droites AB, AH se rencontreront directement, & ne feront qu'une ligne droite : Item, CA, AG par la 14. prop.

Derechef, puis que les angles ABF, CBD sont egaux, car ils sont droits, si on leur ajoûte le commun ABC, le total FBC sera egal au total A B D. Le triangle A B D a donc les deux costez A B, B D, egaux aux deux côtez F B, B C du triangle CBF, chacun au sien, & les angles A B D, CBF contenus d'iceux costez, egaux, & par la 4. p. les triangles A B D, C B F seront egaux. Mais le quarré A F est double du triangle F B C par la 41. prop. car ils sont sur même base BF, & entre mémes paralleles BF, GC: il sera donc aussi double de son egal ABD, duquel le parallelogramme BK est aussi double par la méme 41. prop. & par consequent le quarré A F sera egal au parallelogramme BK: car les choses doubles d'une méme sont egales entr'elles. Par méme discours on prouvera que le parallelog. CK est egal au quarré AI: partant les deux parallelogrammes ensemble BK & CK, seront egaux aux deux quarrez ensemble AF & AI. Donc le quarré BE qui est composé d'iceux parallelogrammes BK, CK, sera aussi egal aux mémes quarrez AF, AI. Parquoy aux triangles rectangles; le quarré du costé, &c. Ce qu'il faloit prouver.



SCHOLIE.

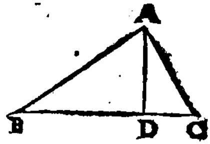
Par ce theoreme on peut facilement entendre, qu'aux triangles ambligones le quarré du costé opposé à l'angle obtus, est plus grand que les deux quarrez ensemble des deux autres costez: Et qu'en tout triangle le quarré d'un costé opposé à un angle aigu est moindre que les deux quarrez ensemble des deux autres costez. Car si l'angle obtus est resserré iusques à ce qu'il vienne à *être droit, les costez qui le comprennent demeurans les mêmes, le costé opposé viendra moindre par la 24. proposition. Mais si l'angle aigu est ouvert & élargi jusques à ce qu'il vienne droit, les costez qui le contiennent demeurans les mêmes, le costé opposé à iceluy angle sera fait plus grand par la même 24. prop. veu donc qu'il a été demontré cy-dessus que le quarré du costé opposé à l'angle droit, est egal aux deux quarrez ensemble des deux autres costez; il est evident que le quarré du costé opposé à l'angle obtus, est plus grand que les deux quarrez ensemble des deux autres costez; & que le quarré du costé opposé à un angle aigu, est moindre que les deux quarrez ensemble des deux autres costez: Mais de combien celuy-là est plus grand, & de combien cettui-cy est moindre,* Euclide *le demontrera és 12. & 13. prop. du second Livre.*

Or l'invention de ce celebre & tant renommé Theoreme est attribuée à Pythagoras, lequel en fut si content & joyeux, que pour en rendre grace aux Dieux, plusieurs disent qu'il sacrifia un Hecatombe, & d'autres rapportent qu'il ne leur sacrifia qu'un bœuf; ce qui est plus vray-semblable, que non pas qu'il en ait immolé cent, veu que ce Philosophe faisoit tres-grand scrupule d'épandre le sang des animaux. Mais quoy qu'il en soit, ce Theoreme est un des plus utiles aux choses Geometriques, encore qu'il ne semble pas si admirable que la 31. prop. du sixiéme Livre, où Euclide *demontre qu'aux triangles rectangles, la figure décrite sur le costé qui soûtient l'angle droit, est egale aux deux figures semblables, décrites & semblablement posées sur les deux costez qui contiennent iceluy angle droit.*

Par le moyen de cette 47. prop. il est fort aisé de demontrer cet autre Theoreme suivant.

Si de l'angle d'un triangle compris de deux costez inegaux, est tirée une perpendiculaire à la base, laquelle tombe dans le triangle; elle coupera la base en deux parties inegales, la plus grande desquelles sera vers le plus grand costé: Et au contraire, si la base est coupée inegalement par la perpendiculaire, les deux costez seront inegaux, & le plus grand sera celuy adjacent au plus grand segment.

Au triangle ABC, duquel le costé AB est plus grand que *le costé AC, soit la ligne AD perpendiculaire à la base BC, laquelle tombe dedans le triangle : ce qui advient toûjours quand l'un & l'autre angle d'icelle base est aigu, ainsi qu'il apert du Cor. de la 17. prop. Ie dis que la partie BD est plus grande que la partie CD. Car par la 47. prop. le quarré de AB est egal aux deux quarrez de AD, BD ; & le quarré de AC, egal aux deux de AD, CD : Mais le quarré de AB est plus grand que celuy de AC, puis que le costé AB est plus grand que le costé AC ; donc aussi les deux quarrez de AD, BD, seront plus grands que les deux quarrez de AD, DC ; pa quoy ostant le commun quarré de AD, restera le quarré de BD plus grand que le quarré de CD ; & partant la ligne droite BD sera plus grande que la ligne droite CD.*



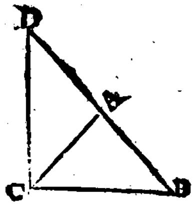
Maintenant, que la ligne perpendiculaire AD fasse le segment BD plus grand que le segment CD. Ie dis que le costé AB est plus grand que le costé AC. Car le quarré de BD sera plus grand que le quarré de CD, & adjoûtant le commun quarré de AD, les deux quarrez de BD, AD, seront plus grands que les deux de CD, AD. Mais par la 47. propos. le quarré de AB est egal aux deux de BD, AD, & celuy de AC egal aux deux de CD, AD. Donc aussi le quarré de AB sera plus grand que le quarré de AC, & par consequent le coste AB sera plus grand que le costé AC. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 34. PROP. XLVIII.

Si le quarré de l'un des côtez d'un triangle, est egal aux quarrez des deux autres côtez ; l'angle soûtenu d'iceluy côté est droit.

Au triangle ABC, le quarré du costé BC soit egal aux quarrez des deux autres costez BA & AC. Je dis que l'angle BAC, soustenu d'iceluy costé BC, est droit.

Car apres avoir mené AD perpendiculaire à AC, par la 11. prop. & fait icelle AD egale à AB, soit menée CD. Le triangle CAD sera rectangle, & par la 47. prop. le quarré de CD sera egal aux deux quarrez de CA & AD, lesquels sont egaux aux quarrez de BA & AC, étant leurs lignes egales ; & par la 1. comm. sent. le quarré de BC sera egal au quarré de CD : partant la ligne CB egale à CD. Donc les triangles BAC, & CAD auront deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base BC egale à la base DC, & par la 8. prop. l'angle BAC sera egal à l'angle droit CAD : partant il sera aussi droit. Si donc le quarré de l'un des costez d'un triangle est egal, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

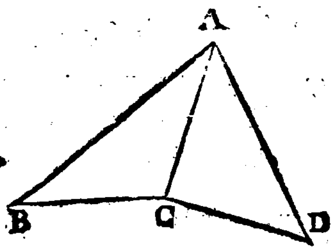


SCHOLIE.

A cette proposition, qui est converse de la precedente, nous ajoûterons cet autre theoreme.

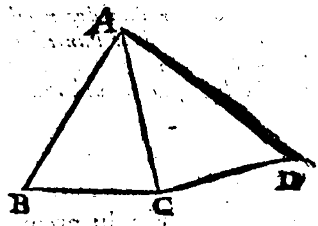
Si le quarré d'un costé de quelque triangle est plus grand que les deux quarrez ensemble des deux autres costez, l'angle soûtenu d'iceluy costé est obtus : Et s'il est moindre, aigu.

Au triangle ABC, *le quarré du côté* AB, *soit plus grand que les deux quarrez ensemble des deux autres côtez* AC, CB : *Ie dis que l'angle* ACB *opposé au côté* AB *est obtus. Car soit tiré de* C *perpendiculairement à* AC, *la ligne droite* CD *egale à* BC, *& soit joint* AD. *D'autant que par la* 47. *prop. le quarré de* AD *est egal aux deux quarrez de* AC, CD, *c'est à dire* AC, CB, *& le quarré de* AB *a*



est posé plus grand que les quarrez de AC, CB, le quarré de AD, sera moindre que le quarré de AB ; & partant la ligne AD moindre que ladite ligne AB. Parquoy veu que les costez BC, AC, du triangle ABC, sont egaux aux côtez CD, AC, du triangle ACD, un chacun au sien, & la base AB plus grande que la base AD, par la 25. prop. l'angle ACB sera plus grand que l'angle ACD : Mais iceluy ACD est droit. Donc ACB est plus grand qu'un droit ; & partant obtus. Ce qui est proposé.

Maintenant, soit le quarré de AB moindre que les deux quarrez des deux autres côtez AC, CB : Ie dis que l'angle ACB soûtenu d'iceluy côté AB, est aigu. Car ayant fait comme auparavant le triangle rectangle ACD, on prouvera par les mêmes raisons que dessus, que la base AD est plus grande que la base AB, & l'angle droit ACD plus grand que l'angle ACB, qui partant est aigu. Ce qui est proposé.



Or d'autant que l'aplication des nombres aux côtez des triangles rectangles est utile à plusieurs operations, nous remarquerons icy que tout triangle est rectangle, duquel le plus grand côté contenant 5 parties egales, le moindre contient trois des mêmes parties, & l'autre 4 : ou bien selon trois autres nombres, doubles, ou triples ou quadruples, &c. des trois susdits 5, 4, 3, comme 10, 8 & 6 : ou 15, 12 & 9 ; ou 20, 16 & 12 ; ou 50, 40, & 30 ; &c. Car il apert que le quarré du plus grand de trois tels nombres, est toûjours egal aux quarrez des deux autres nombres.

Mais si sans avoir egard aux nombres cy-dessus, on vouloit faire un triangle rectangle, ayant tous les trois côtez en nombre de parties egales sans fraction, on pourroit trouver lesdits nombres en deux manieres ; dont la premiere qu'on attribuë aussi à Pythagoras, est telle. Soit pris pour le moindre côté un nombre de parties nompair, & iceluy nombre étant quarré, soit ôtée l'unité de sondit quarré, & la moitié du reste à iceluy quarré *sera le moyen nombre, auquel adjoûtant l'unité viendra le plus grand nombre: Comme par exemple, prenant 5 pour le nombre des parties du moindre costé, son quarré est 25, duquel ôtant l'unité restent 24, dont la moitié est 12, pour le nombre des parties du moyen côté, mais adjoûtant l'unité à iceluy, viendront 13 pour le nombre des parties du plus grand côté.*

La deuxiéme maniere est attribuée à Platon, & est telle: Soit pris un nombre pair, & du quarré de la moitié d'iceluy soit ôtée l'unité, & restera l'un des deux autres nombres; mais adjoûtant ladite unité au même quarré, viendra le troisiéme nombre: comme par exemple, prenant 6 pour l'un des nombres, le quarré de la moitié d'iceluy est 9, dont l'unité étant ôtée, reste 8, pour l'un des deux autres nombres; mais adjoûtant ladite unité à iceluy quarré, viennent 10 pour le troisiéme nombre.

Fin du premier Element.

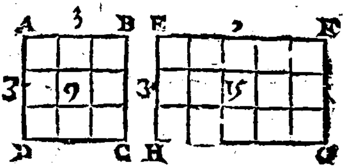
ELEMENT SECOND.

DEFINITIONS.

1. Tout parallelogramme rectangle, est dit être contenu sous deux lignes droites qui font l'angle droit.

IL a été dit en la 36. def. 1. que c'est que parallelogramme, & qu'il y en a de quatre sortes: mais maintenant il faut entendre qu'un parallelogramme est dit rectangle, lors qu'il a tous les angles droits, & par consequent il y a seulement le quarré, comme ABCD, & le quarré long, comme EFGH, qui soient rectangles: car il n'y a que ces deux sortes de parallelogrammes qui ayent les angles droits. Et est à noter, qu'en tout parallelogramme si un seul angle est donné droit, il est necessaire que les trois autres soient aussi droits: comme par exemple, si l'angle E du parallelogramme EFGH est droit. Ie dis que les trois autres F, G, H, sont aussi droits. Car d'autant que les lignes EF, GH sont paral-

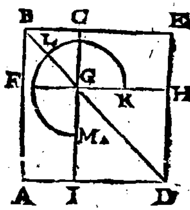
leles, les angles internes E & H, sont egaux à deux droits par la 29. p. I. Mais l'angle E est droit par l'hypotese: donc aussi l'angle H sera droit: & par la 34. p. I. leurs opposez G & F seront aussi droits. Et puis que par la 34. p. I. tout parallelogramme a les costez opposez egaux, il n'y peut avoir en un parallelogramme que deux côtez inegaux, lesquels constituent chaque angle d'iceluy: C'est pourquoy Euclide *dit icy, tout parallelogramme rectangle être contenu sous deux lignes droites, qui comprennent un angle droit; tellement que le parallelog. rectangle* EFGH *sera dit être contenu sous les deux lignes droites* EF, EH *: ou sous les deux* EF, FG *: ou sous* FG, GH *: ou finalement sous* GH, HE*: ainsi deux lignes expriment toute la magnitude ou grandeur d'un parallelogramme rectangle: sçavoir l'une comme* EF, *ou* HG, *sa longueur: & l'autre comme* EH, *ou* FG, *sa largeur: & par le mouvement imaginaire de l'une de ces deux lignes en l'autre, se fait iceluy parallelogramme. Car si l'esprit conçoit que la ligne* EF, *en allant en bas au long de la ligne* EH, *se meuve en travers, tellement qu'elle fasse tousjours angle droit avec icelle* EH, *jusques à ce que le point* E *parvienne au point* H, *& le point* F *au point* G; *sera décrit tout le parallel. rectangle* EFGH. *Le même sera fait, si on pose* EH *se mouvoir en travers, selon la ligne* EF. *D'où advient que pour obtenir l'aire ou contenu de tout parallelogramme rectangle on multiplie un costé d'iceluy par l'autre: comme par exemple, le costé* EF *étant de cinq pieds, & l'autre côté* EH *de trois: si on multiplie un nombre par l'autre, seront produit quinze pieds quarrez, pour l'aire ou contenu de tout le parallelogramme* EFGH. *Pareillement au parallelogramme rectangle ABCD, le côté AB étant de trois pieds, & le côté AD aussi de trois pieds: multipliant l'un par l'autre, seront produits neuf pieds quarrez pour l'aire d'iceluy rectangle, comme montre la figure cy-dessus.*



Or est icy à noter, qu'en ce second Livre, & és autres suivans, Euclide *appelle les parallelogrammes rectangles,* *simplement rectangles; ce qu'observent aussi les autres Geometres, tellement que par le nom de rectangle, il faut toujours entendre parallelogr. rectangle. Derechef, que pour brieveté, & afin de ne repeter souventesfois toutes les lettres apposées aux parallelogrammes, les Geometres ont de coûtume d'exprimer chaque parallelogramme soit rectangle ou non par deux lettres seulement, sçavoir celles qui sont diametralement opposées: tellement que pour denoter le parallelogramme ABCD, on dira seulement le parallelogramme AC ou BD.*

2. En tout parallelograme, l'un des parallelogrammes décrits à l'entour du diametre, avec les deux supplémens, est appellé Gnomon.

Au parallelogramme ABED, soit menée la diagonale BD; & CGI parallele à AB coupant icelle diagonale en G, & par iceluy point G soit menée FGH parallele à AD: & le parallelogramme ABED sera divisé en quatre parallelogrammes, deux desquels FC & HI, sont dits être décrits à l'entour du diametre ou diagonale, mais les deux autres EG, AG, sont appellez supplémens, ainsi que nous avons dit à la 37. def. du premier Livre. Or la figure composée d'iceux supplemens & de l'un ou l'autre des parallelogrammes d'alentour la diagonale, sera dit Gnomon: comme la figure CEDAFG, laquelle est composée des deux supplémens AG, GE, & du parallelogramme HI, qui est alentour du diametre, sera appellée Gnomon. Pour même raison la figure ABEHGI, qui est composée des deux supplémens IF, GE, & du parallelog. FC, qui est alentour le diametre, sera aussi dit Gnomon. Et à noter que pour briévement exprimer telles figures, les Geometres y décrivent quelquesfois une circonference, comme le Gnomon susdit ABEHGI, auquel est décrite la circonference KLM, sera exprimé & denoté par icelle circonference KLM.

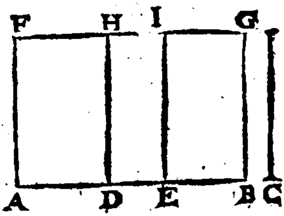


THEOR. 1. PROP. I.

Si de deux lignes droites l'une est couppée en tant de parties que l'on voudra, le rectangle contenu sous les deux toutes, est egal aux rectangles compris de la non couppée, & d'une chacune partie de celle qui est couppée.

Soient deux lignes droites AB & C, dont la premiere AB est couppée à l'avanture en plusieurs parties, sçavoir est en AD, DE, EB. Je dis que le rectangle compris d'icelles deux lignes AB & C, sera egal aux trois rectangles compris de la ligne non couppée, & d'une chacune partie de la couppée AB.

Qu'il ne soit ainsi: qu'on mene AF perpendiculaire à AB, par la 11. p. 1. laquelle soit faite egale à C, & du point F soit menée FG parallele à AB; & BG parallele à AF par la 31. prop. 1. Il est evident que le quadrilatere AFGB, sera un parallelog. rectangle, & qu'iceluy sera compris de deux lignes données AB & C, puis que AF est egale à C. Item soient menées les deux lignes DH & EI paralleles à AF par la 31. prop. 1. Donc par la deff. des parallelog.. les trois quadrilateres AH, DI, EG, seront parallelogrammes rectangles compris des lignes egales AF, DH, EI, & des trois segmens AD, DE, EB, c'est à dire de la ligne C & d'iceux trois segmens. Mais iceux trois parallelogrammes rectangles ensemble, conviennent au rectangle AG, compris des lignes données: & par la 8. com. sent. ils luy sont egaux. Parquoy si de deux lignes droites, &c. Ce qu'il falloit prouver.



SCHOLIE.

Ce qu'Euclide propose en lignes aux dix premiers Theoremes de ce second livre, nous l'avons appliqué

& demonstré en nombres au Scholie de la 14. pr. 9. Neanmoins j'estime qu'il ne sera inutile de les expliquer dés icy par nombres, comme a fait Clavius: Car d'autant que ce qui provient de la multiplication d'un nombre par un autre répond au produit d'une ligne en une autre, on peut facilement & briefvement montrer par nombres ce qui est icy demonstré en lignes avec beaucoup de paroles.

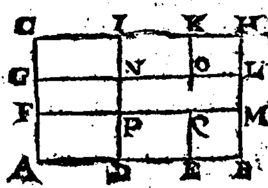
Soient donc proposez deux nombres, comme 10 & 6, le premier desquels soit divisé en trois autres nombres ou parties, 5, 3 & 2. Or multipliant les deux nombres proposez entr'eux, c'est à sçavoir 10 & 6, sera produit le nombre 60, auquel sera egale la somme de ces trois nombres 30, 18 & 12, lesquels sont procedez multipliant chaque partie du nombre divisé 10, c'est à sçavoir 5, 3, 2, par le nombre non divisé 6: ainsi qu'il appert en l'operation cy-dessous:

				30
10	5	3	2	18
6	6	6	6	12
60	30	18	12	60

Or Commandin demonstre icy deux autres Theoremes, dont le premier est tel.

S'il y a deux lignes droites, l'une & l'autre desquelles soit coupée en tant de parties qu'on voudra; le rectangle compris d'icelles deux lignes, est egal aux rectangles contenus de chaque segment de l'une, & d'un chacun des segmens de l'autre.

Soient deux lignes droites AB, AC, contenant un angle droit A, & AB soit coupée és points D & E, mais AC és points F & G. Ie dis que le rectangle contenu sous AB, AC, est egal aux rectangles compris de chaque partie AD, DE, EB, & d'un chacun segment AF, FG, GC, c'est à dire egal aux rectangles contenus de

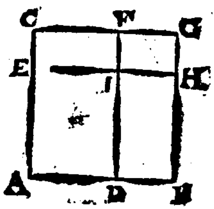


AD, AF; AD, FG; AD, GC: DE, AF; DE, FG, DE, GC: EB, AF; EB, FG; EB, GC. *Car étant accompli le rectangle* AH, *soient tirées* DI, EK *paralleles à* AC: *Item* FM, GI *paralleles à* AB, *qui couperont les premieres és points* P, Q, N, O. *Veu donc que le rectangle* AP *est contenu sous* AD, AF: *&* NF *sous* AD, FG: *&* GI *sous* AD, GC, (*pource que par la 34. prop. 1. les lignes* FP, GN *sont egales à icelle* AD.) *Item que les rectangles* DQ, PO, NK, *sont contenus sous* DE, AF: DE, FG: DE, GC. (*car* DP, PN, NI *sont egales à icelles* AF, FG, GC; *&* PQ, NO, *à icelle* DE, *par la 34. prop.* 1.) *Et par la même raison les rectangles* EM, QL, OH, *sont compris sous* EB, AF: EB, FG: EB, GC. *Il est evident que le rectangle contenu sous* AB, AC, *est egal aux rectangles compris sous chacune des parties* AD, DE, EB, *& un chacun des segmens* AF, FG, GC: *ce qui étoit proposé.*

Nous rendrons aussi manifeste ce Theoreme par nombres: & pource soient deux nombres 12 & 8, le premier desquels soit divisé en trois parties 6, 4 & 2: mais le dernier soit seulement divisé en deux parties 5 & 3. Or le produit de ces deux nombres proposez multipliez entr'eux est 96, auquel est manifestement egale la somme de ces six nombres, 30, 20, 10, 18, 12 & 6, lesquels sont produits par la multiplication de chacune des parties 6, 4, 2, en chacune des parties 5 & 3, comme vouloit Commandin en ce premier Theor. Quand au second il est tel qu'il ensuit.

S'il y a deux lignes droites coupées comme on voudra, le rectangle compris sous icelles, avec celuy compris sous une partie de l'une d'icelles lignes, & une partie de l'autre, est egal aux rectangles contenus sous les lignes totales, & les susdites parties reciproquemẽt, avec le rectangle cõtenu des deux autres parties.

Soient deux lignes droites AB, AC, *faisant l'angle droit* A, *lesquelles soient coupées comme on voudra en* D *&* E. *Ie dis que le rectangle compris sous* AB, AC, *avec celuy compris sous les parties* AD, EC, *est egal aux rectangles contenus sous* AB, EC: AC, AD: DB, AE. *Car ayant accomply le rectangle* AG, *soit me-*



née DF *parallele à* AC ; *&* EH *à* AB, *s'entrecoupans en* I. *Veu donc que le rectangle* AG *est egal aux rectangles* EG, AI, DH : *si on leur ajoûte le commun rectangle* EF : *les rectangles* AG, EF, *qui sont compris sous les toutes* AB, AC, *& les parties* AD, EC, *seront egaux aux rectangles* EG, AF, DH, *compris sous* AB, EC : AC, AD : DB, AE : *ce qui étoit proposé.*

Afin que ce theor. de Commandin soit aussi manifeste par nombres, soient proposez deux quelconques nombres 9 & 5, le premier desquels soit divisé en deux parties 5 & 4 : mais l'autre soit divisé en 3 & 2 : Or le produit de ces deux nombres proposez est 45, & celuy de la partie 5, multipliée par la partie 3 est 15 ; & la somme de ces deux produits est 60, auquel nombre est manifestement egale la somme & addition de ces trois nombres 27, 25 & 8, qui sont produits de 9 par 3, de 5 par 5, & de l'autre partie 4 par l'autre partie 2.

COROLLAIRE.

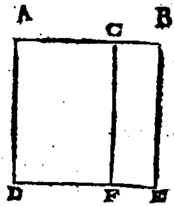
Parce que dessus est manifeste que s'il y a deux lignes droites, l'une & l'autre desquelles soit coupée comme on voudra, le rectangle compris sous icelles sera egal au rectangle compris sous une totale, & un segment de l'autre, & aux deux rectangles contenus de l'autre segment de cette-cy, & d'un chacun segment de celle-là. Car le rectangle AG, *qui est compris des deux toutes* AB, AC, *est egal au rectangle* EG, *contenu de la toute* EH, *c'est à dire* AB, *& du segment* EC, *& aux deux rectangles* AI, DH, *compris de l'autre segment* AE, *& des segmens* AD, DE. *Iceluy rectangle* AG *est aussi egal aux trois rectangles* AH, EF, IG. *Pareillement aux trois* AF, DH, IG, *comme aussi aux trois autres* DG, AI, EF.

Le même se doit aussi entendre des nombres : car il est evident que les deux nombres cy-dessus proposez, c'est assavoir 9 & 5, estans multipliez entr'eux produisent 45, auquel sont egaux ces trois nombres 27, 10 & 8, produits de la multiplication de 9 par la partie 3 : & de la partie 2 par chacune des parties 5, 4. Et ainsi de toute autre partie qu'on voudra prendre.

THEOR. 2. PROP. II.

Si une ligne droite est coupée comme on voudra: les rectangles compris de la toute & d'une chacune partie, sont egaux au quarré de la toute.

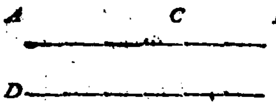
Soit la ligne droite AB, coupée en deux parties telles qu'on voudra au point C. Je dis que le rectangle de la toute AB, & de la partie AC, avec le rectangle de la toute AB, & de l'autre partie CB, sont ensemble egaux au quarré de la toute AB.



Qu'ainsi ne soit: Sur AB soit décrit le quarré AE; puis de C soit menée CF parallele à AD, laquelle CF sera egale à icelle AD, c'est à dire à AB: car icelles AD, AB sont egales par la def. du quarré. Il est donc evident que les deux rectangles AF & CE, sont compris de la toute AB ou son egale CF, & des deux parties AC & CB, & si ils conviennent avec le quarré AE, & par consequent luy sont egaux. Si donc une ligne droite est coupée comme on voudra, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Clavius demontre encore ce Theoreme ainsi. Soit prise une ligne droite D egale à AB: Or puis que AB est coupée en C, le rectangle contenu sous la non coupée D, & la coupée AB (qui est le quarré de la toute AB) sera egal aux deux rectangles compris sous la non coupée D (c'est à dire sous AB) & un chacun des segmens AC, CB par la prec. prop. Ce qui étoit proposé.



Pour accommoder ce Theoreme aux nombres. Soit le nombre 12 divisé en deux nombres 7 & 5: il est evident qu'au quarré d'iceluy nombre, qui est 144, sont egaux *les deux nombres 84 & 60, qui sont produits du même nombre 12 multiplié par chacune des parties 7 & 5 : car ils font aussi 144. comme montre l'addition d'iceux.*

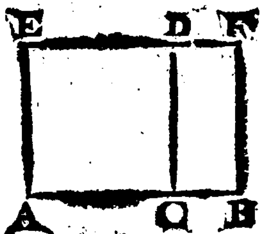
Or encore qu'en ce second Theoreme Euclide propose d'une ligne divisée en deux parties seulement, si est-ce toutesfois qu'en la même maniere sera demontré le même, si la ligne est divisée en tant de parties qu'on voudra. Ce qui se peut aussi voir par nombres, ainsi qu'il ensuit. Soit le nombre 12 divisé en trois parties 5, 4 & 3. Le quarré dudit nombre 12 sera 144 ; auquel sont egaux ces trois nombres 60, 48 & 36, lesquels sont produits d'iceluy nombre proposé 12, multiplié par chacune des parties 5, 4 & 3.

Sera aussi demontré comme dessus, que si une ligne droite est coupée en tant de parties qu'on voudra ; le quarré de la toute est egal aux rectangles contenus sous chaque segmens & un chacun segment. Ce que nous rendrons aussi manifeste par nombres : & pour ce soit le nombre 10 divisé en trois parties 5, 3 & 2 : Il est evident que le quarré du nombre total 10 est 100, & qu'à iceluy sont egaux ces neuf nombres 25, 15. 10, 15, 9. 6, 10, 6 & 4. lesquels sont produits par chacune des parties multipliée par chacune d'icelles.

THEOR. 3. PROP. III.

Si une ligne droite est coupée comme on voudra ; le rectangle compris de la toute, & de l'une des parties, est egal au rectangle compris d'icelles parties, & au quarré de la partie premierement prise.

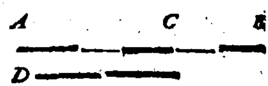
Soit la ligne droite AB coupée comme on voudra au point C. Je dis que le rectangle compris de la totale AB, & de l'une ou l'autre partie, comme AC, est egal au rectangle compris des deux parties AC & CB, & au quarré de la partie AC, laquelle avoit esté premierement prise.



Qu'il ne soit ainsi : Sur la partie AC soit fait le quarré AD par la 46. pr. 1. puis soit menée BF parallele à CD par la 31. prop. 1. rencontrant ED prolongée en F. Il est donc évident que AD est le quarré de la partie AC ; & CF le rectangle des parties AC & CB ; (car CD est egale à AC par la definition du quarré) & AF le rectangle de la toute AB & de la partie AC, sur laquelle a esté fait le quarré. Or le quarré AD, & le rectangle CF ensemble, conviennent avec le rectangle AF ; & par consequent egaux à iceluy. Si donc une ligne droite est coupée comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

SCHOLIE.

Clavius demontre encore ce Theor. ainsi. Soit prise la ligne droite D egale à la partie AC. *D'autant que la ligne droite* AB *est divisée en* C, *par la* 1. *pr. de ce livre, le rectangle contenu sous D &* AB *(c'est à dire sous* AC *&* AB *) sera egal au rectangle compris sous* D *&* CB *(c'est à dire sous* AC, CB *) & au rectangle contenu sous* D *&* BC, *c'est à dire au quarré de la partie* AC. *Ce qui est proposé.*

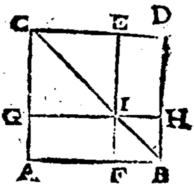


Pour accommoder ce Theor. aux nombres, soit quelconque nombre 12 *divisé en deux parties telles qu'on voudra* 7 *&* 5. *Or multipliant ledit nombre proposé* 12 *par sa partie* 7, *viendront* 84, *auquel produit sont egaux ces deux nombres* 35 *&* 49, *lesquels sont produits de* 7 *multipliez par* 5, *& de* 7 *par soy même. Mais multipliant le même nombre* 12 *par l'autre partie* 5, *sera produit le nombre* 60, *auquel sont aussi egaux ces deux nombres* 35 *&* 25, *qui sont les produits des deux parties* 7 *&* 5, *multipliées entr'elles, & de la partie* 5 *en soy même : Et partant apert ce qui a esté proposé.*

THEOR. 4. PROP. IV.

Si une ligne droite est coupée comme on voudra; le quarré de la toute est egal aux deux quarrez des parties, & à deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne donnée AB, coupée comme on voudra au point F. Je dis que les deux quarrez décrits sur les parties AF & FB, avec deux fois le rectangle d'icelle AF & FB sont ensemble egaux au quarré de la totale AB.



Qu'ainsi ne soit. Sur la ligne totale AB soit décrit le quarré AD; & apres avoir mené la diagonale BC; du point F, soit menée la ligne droite FE parallele à AC coupant la diagonale BC en I, & derechef par iceluy point I soit menée GH parallele à AB, le tout par la 31. prop. 1. Je dis premierement que les quadrilateres HF & EG sont quarrez.

Car déja il appert qu'ils sont parallelogrammes, êtans décrits entre lignes paralleles. Item puis que AD est quarré, les deux costez AB & AC seront egaux, & le triangle ABC est Isoscelle: & par la 5. prop. 1. les deux angles sur la base BC, sçavoir est ABC & ACB seront egaux. Pareillement la ligne BC tombant sur les deux paralleles AC & FE fera l'angle exterieur FIB egal à l'oposé interieur ACB par la 29. prop. 1. lequel estant egal à ABC par la 1. com. sent. ABC & FIB seront egaux, & par la 6. prop. 1. les deux costez BF & FI seront egaux: & par la 34. prop. 1. le parallelogramme HF aura les quatre costez egaux: & partant il sera quarré; car l'angle FBH estant droit, les trois autres seront aussi droits, comme nous avons demonstré à la 1. def. de ce livre. Par mesme discours on montrera GE estre aussi quarré. Maintenant, d'autant que AI & ID sont décrits entre lignes paralleles, & les angles A & D sont droits, il appert qu'ils sont parallelogrammes rectangles,

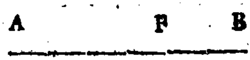
& egaux entr'eux par la 43. prop. 1. & sont compris des deux parties AF, FB, estant, EI egale à AF, & HI, IF à FB par la 34. prop. 1. & def. du quarré. Partant AI & ID sont deux fois le rectangle de AF & FB, lesquels avec les deux quarrez FH & GE conviennent avec le quarré total AD, & par la 8. com. sent. ils luy seront egaux. Si donc une ligne droite est coupée comme on voudra, le quarré de la toute est egal, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par la demonstration cy-dessus, que les parallelogrammes décrits à l'entour de la diagonalle d'un quarré, & qui ont un angle commun avec iceluy, sont aussi quarrez. Et de plus, il est évident que la diagonalle coupe en deux egalement les angles du quarré: Ce que nous avons aussi demontré au 3. Theor. du Scholie de la 34. p. 1.

SCHOLIE.

Clavius demontre encore apres Campanus ce 4. Theor. d'Euclide ainsi. D'autant que la ligne droite AB est coupée en F, par la 2. prop. 2. le quarré de la toute AB sera egal aux rectangles compris sous la toute AB,



& chacune des parties AF, FB. Mais par la 3. prop. 2. le rectangle contenu sous AB, AF est egal au rectangle compris sous AF, FB avec le quarré de la partie AF. Item le rectangle de AB, FB est egal au rectangle de FB, AF, avec le quarré de la partie FB. Donc le quarré de AB est aussi egal aux quarrez des parties AF, FB, & aux rectangles contenus sous AF, FB & sous FB, AF. Ce qui est proposé.

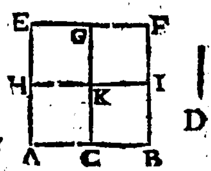
Pour accommoder ce Theoreme aux nombres: Soit le nombre 10 divisé en deux parties 6 & 4: Il est manifeste que le nombre 100, qui est le quarré du nombre total 10, est egal à 36 & 16, qui sont les quarrez des parties 6 & 4, avec deux fois 24, nombre produit desdites parties 6 & 4 multipliées entr'elles: car tous ces *quatre nombres 36, 16, 24 & 24, font ensemble 100, ainsi qu'il appert en l'operation suivante.*

10	6	4	6	36
10	6	4	4	16
				24
100.	36.	16.	24.	24
				100.

Clavius demonstre aussi en ce lieu le Theoreme suivant.

Si une ligne droite est double d'une autre, le quarré de celle-là est quadruple du quarré de cette-cy : & si un quarré est quadruple d'un autre quarré, le côté de celuy-là est double de cetui-cy.

Soient deux lignes droites AB & D, desquelles AB est double de D. Ie dis que le quarré de AB est quadruple du quarré de D. Car ayant divisé AB en deux egalement en C, si on fait telle construction qu'en cette 4. propos. il est evident que les 4. parallelogrammes AK, CI, HG, KF. seront quarrez, & egaux entr'eux. Mais le quarré AF est egal à iceux quatre quarrez : donc le quarré de AB sera quadruple du quarré de AC, c'est à dire de D, qui luy est egale : Car AB est double de l'une & de l'autre.



Pour la seconde partie : Soit le quarré de AB quadruple du quarré de D. Ie dis que AB est double de D. Car AB étant coupée en deux egalement en C, le quarré de AB sera quadruple du quarré de AC, comme il a été demontré cy-dessus. Mais le quarré de AB a été posé aussi quadruple du quarré de D : donc les quarrez des lignes AC & D sont egaux, & partant icelles lignes AC & D aussi egales. Mais AB est double de AC : donc aussi double de D.

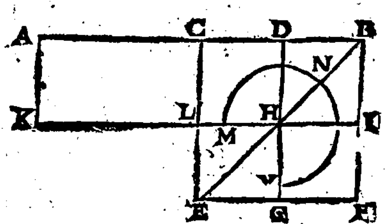
Ce Theoreme est aussi manifeste en nombres : Car soient *deux quelconques nombres* 10 *&* 5, *dont le premier est double de l'autre. Il apert que* 100, *quarré du premier nombre* 10, *est quadruple de* 25, *quarré du dernier nombre* 5.

THEOR. 5. PROP. V.

Si une ligne droite est coupée en deux parties egales, & en deux inegales; le rectangle contenu d'icelles parties inegales avec le quarré de la partie du milieu, sont egaux au quarré de la moitié de la toute.

Soit la ligne donnée AB coupée en deux parties egales au point C, & en deux inegales au point D. Je dis que le rectangle compris des deux parties inegales AD & BD, avec le quarré de la partie du milieu CD, sont egaux au quarré de la moitié CB.

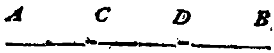
Car sur la ligne CB soit décrit le quarré CF par la 46. prop. 1. & apres avoir mené DG parallele à BF soit menée la diagonale BE coupant DG au point H, par lequel soit menée interminément IK parallele à AB, coupant CE en L: puis du point A, soit aussi menée AK parallele à DH, rencontrant KI en K. Donc par le Corol. de la prec. pr. DI, LG seront quarrez; & partant la ligne DH sera egale à la ligne DB: & par la 34. prop. 1. LH est aussi egale à CD: parquoy le rectangle AH est compris des deux segmens AD, DB; & LG sera quarré de la partie du milieu CD. Il faut donc prouver que le rectangle AH, avec le quarré GL, est egal au quarré CF, fait sur la ligne CB moitié de la toute AB.



Or le rectangle AL est egal au rectangle CI par la 36. pr. 1. d'autant d'autant qu'ils sont sur bases egales AC & CB, & entre mémes paralleles AB & KI. Pareillement les supplemens CH & HF sont egaux par la 43. prop. 1. ausquels si on ajoûte le quarré commun DI, les touts CI & DF seront egaux : & par la 1. com. sent. DF sera egal à AI, ausquels si on ajoûte aussi le supplement commun CH, le Gnomon MNX sera egal au rectangle AH. Mais iceluy Gnomon, & le quarré GL, conviennent avec le quarré CF, & partant sont egaux par la 8. com. sent. Donc aussi le rectangle AH, & le quarré GL seront egaux au quarré CF par la 1. com. sent. Parquoy si une ligne droite est coupée en deux parties egales, & en deux inegales, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Nous ajoûterons tant en ce Theor. qu'aux 5. suivans les demonstrations qu'en a fait le docte Maurolycus. D'autant que par la 4. p. 2. le quarré de CB est egal aux quarrez de CD & DB, avec deux fois le rectangle d'icelles ; & que par la 3. p. 2. le rectangle de CB, DB est egal au rectangle de CD, DB, avec le quarré de DB : le quarré de CD sera egal à l'autre quarré de CD, avec le rectangle de CB, DB, & celuy de CB, DB, ou de AC, DB. Mais par la 1. prop. 2. le rectangle des toutes AD, DB, est egal aux rectangles de DB, AC, & de DB, CD. Donc le quarré de CB sera egal au quarré de CD, avec le rectangle de AD, DB. Ce qui étoit proposé.

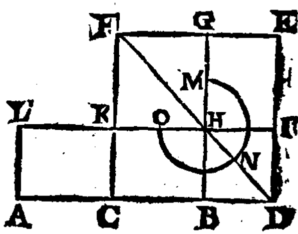


Pour accommoder ce Theoreme aux nombres, soit le nombre 12 divisé en deux parties egales 6 & 6; Et aussi en deux parties inegales 8 & 4; & par ainsi la plus grande partie de 8 excede la moitié 6 du nombre 2, qui est la partie du milieu. Il est evident que 32, nombre produit des deux nombres inegaux 8 & 4, avec 4 qui est le quarré de 2, est egal à 36, qui est le quarré de 6, moitié du nombre proposé.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si une ligne droite est coupée en deux parties egales, & qu'on luy ajoûte directement quelque autre ligne droite : le rectangle de la toute & de l'ajoûtée comme d'une, & de l'ajoûtée, avec le quarré de la moitié, est egal au quarré qui est fait de la moitié & de l'ajoûtée comme d'une.

Soit la ligne droite AB coupée en deux egalement au point C, & à icelle AB soit ajoûtée directement la ligne BD. Je dis que le rectangle compris de la totale AD, & de l'ajoûtée BD, avec le quarré de la moitié CB, est egal au quarré de la ligne CD, laquelle est composée de la moitié CB, & de l'ajoûtée BD.



Qu'ainsi ne soit : sur la ligne CD soit décrit le quarré CE, & tiré sa diagonale DF ; & apres avoir du point B, mené BG parallele à DE, laquelle coupe la diagonale au point H ; par iceluy point H soit menée interminément IKL parallele à AD par la 31. prop. 1. Item AL parallele à DI, rencontrant IL en L.

Premierement le rectangle AI est compris de la toute & ajoûtée comme d'une AD, & de l'ajoûtée DI (car icelle DI est egale à l'ajoûtée BD estant BI quarré par le Cor. de la 4. p. de ce livre.) Item KG, qui est quarré par le mesme Cor. est fait sur HK egale à la moitié CB par la 34. prop. Je dis donc que le rectangle AI, & le quarré KG sont ensemble egaux au quarré CE. Car les deux suplemens CH & HE estans egaux par la 43. pr. 1. Item les deux rectangles AK & CH aussi egaux par la 36. prop. 1. d'autant qu'ils sont sur bases egales, & entre mesme paralleles : & par la 1. com. sent. AK sera egal à HE, & en ajoûtant à chacun d'iceux le rectangle commun CI, le Gnomon MNO sera egal au rectangle AI. Mais iceluy

Gnomon avec le quarré GK, sont egaux au quarré CE : donc le rectangle AI avec le quarré KG sera egal au mesme quarré GE. Parquoy si une ligne droite est coupée en deux parties egales. &c. Ce qu'il falloit demontrer.

SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. pr. 2. le quarré de CD est egal aux deux quarrez de CB, BD avec deux fois le rectangle d'icelles CB: BD; & que par la 1. pr. 2. le rectangle des toutes AD, BD est egal aux trois rectangles de*

DB, AC; DB, CB; & DB, DB, (qui est le quarré de DB) le quarré de CD sera egal à l'autre quarré CB avec le rectangle de AD, BD. Ce qu'il falloit demontrer.

Pour apliquer ce Theor. aux nombres, soit le nombre 12 diuisé en deux nombres egaux 6 & 6; & à iceluy nombre 12 soit ajoûté 3. Il est euident que le nombre 45 produit de tout le nombre composé 15 multiplié par l'ajoûté 3, auec 36 quarré de la moitié 6. font 81, tout ainsi que le quarré de 9, composé de ladite moitié 6, & de l'ajoûté 3.

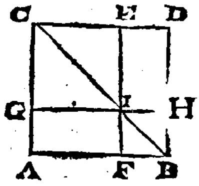
THEOR. 7. PROP. VII.

Si une ligne droite est coupée comme on voudra, le quarré de la toute, & le quarré de l'une des parties, sont egaux au quarré de l'autre partie, & deux fois le rectangle compris de la totale, & de la partie premierement prise.

Soit la ligne AB coupée comme on voudra au point F. Je dis que les deux quarrés de la totale AB. & de la partie AF, sont egaux au quarré de l'autre partie FB, & deux fois le rectangle de AB, AF.

Qu'il ne soit ainsi : sur AB soit décrit le quarré AD avec sa diagonale BC : & apres avoir mené du point F, la ligne FE paralele à AC, laquelle coupe la diagonale BC au point I.

d'icelluy point soit menée GH parallele à AB par la 12. pr. 1. Donc FH & GE seront quarrez par le Cor. de la 4. prop. de ce liv. & puis que par la 34. pr. 1. GI est egale à AF; GE sera quarré du segm. AF. Derechef pource que AC est egale à AB, le rectangle AE sera compris sous la toute AB & le segm. AF. Par même



raison le rectangle GD sera compris sous les mêmes lignes AB, AF: (car CD, CG sont egales à AB, AF, à cause des quarrez AD, GE.) Vû donc que les rectangles AE & ID, avec le quarré FH sont egaux au quarré AD: si on leur ajoûte le commun quarré EG, les quarrez AD, EG seront egaux aux rectangles AE, GD, (chacun desquels est compris de la toute AB & de la partie AF) avec le quarré FH. Parquoy si une ligne droite est coupée comme on voudra, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. pr. 2. le quarré de AB est egal aux deux quarrez de AF, FB, & deux fois le rectangle d'icelles AF, FB; si on ajoûte le quarré commun de AF, les quarrez de AB, AF seront egaux aux trois quarrez de AF, AF, FB, avec*

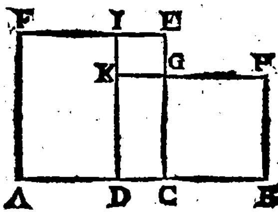
deux fois le rectangle de AF, FB. Mais par la 3. p. 2. le rectangle de AB, AF est egal au rectangle de AF, FB, avec le quarré de AF; & partant deux fois le rectangle de AB, AF, est egal à deux fois le rectangle de AF, FB, avec deux fois le quarré de AF: donc les quarrez de AB, AF, sont egaux à l'autre quarré de FB, avec deux fois le rectangle de AB, AF. Ce qui étoit à démontrer.

Pour accommoder ce Theor. aux nombres, soit divisé le nombre 12 en deux tels nombres qu'on voudra 7 & 5. Or il est evident que 144 nomb. quarré de 12, & 49 nombre quarré de la partie 7, sont ensemble egaux à 193, qui est fait de 25 nombre quarré de l'autre partie 5, & deux fois 84, produit de 12 multiplié par 7. Semblablement 144 & 25, nombres quarrez de 12 & 5, sont ensemble egaux à 169, *fait de 49 quarré de 7, & deux fois 60, produit de 12 multiplié par la partie 5.*

Commandin demontre en ce lieu le Theor. suivant.

Si une ligne droite est coupée en deux parties inegales, les quarrez d'icelles parties sont egaux au rectangle contenu deux fois sous icelles parties, & au quarré de la ligne, dont la plus grande partie excede la moindre.

Soit la ligne droite AB coupée en deux parties inegales AC, CB, desquelles AC est la plus grande, & d'icelle AC, soit prise AD egale à BC, afin que DC soit l'excez de la partie AC par dessus BC. Ie dis que les quarrez des parties AC, CB sont egaux au rectangle contenu deux fois sous AC, CB, & au quarré de DC. Car soient construits les quarrez AE, CH, & mené DI parallele à CE: puis prolongée HG jusques à ce qu'elle rencontre DI en K. Or d'autant que les lignes BC, AD sont egales, leur ajoûtant la commune DC, la toute AC, c'est à dire CE, sera egale à la toute DB. Mais CG est aussi egale à CB: donc aussi le reste GE sera egal au reste DC: & partant puis qu'aussi IE est egale à DC par la 34. pr. I. GE, IE seront egales: & partant IG sera le quarré de l'excez DC. Et d'autant que les rectangles AI, DH sont contenus sous les parties AC, CB; (car AC est egale à l'une & à l'autre ligne AF, DB: & CB à l'une & à l'autre AD, BH.) Il est manifeste que les quarrez AE, CH, des parties AC, CB sont egaux aux rectangles AI, DH, qui sont contenus sous les parties AC, CB, & à IG quarré de l'excez DC, Ce qui étoit proposé.



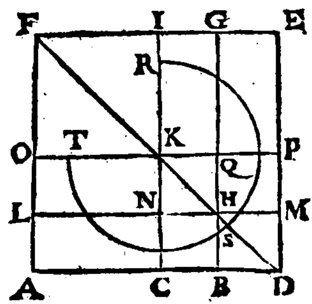
Le même est aussi manifeste par nombres: car le nombre 12 étant divisé en deux parties inegales 7 & 5: dont la plus grande excede la moindre de 2: les quarrez d'icelles parties seront 49 & 25, qui font ensemble 74, auquel nombre sont egaux deux fois 35 produit de 7 multiplié par 5. avec 4 quarré de l'excez 2.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si une ligne droite est coupée comme on voudra ; quatre fois le rectangle compris de la toute & de l'une des parties, avec le quarré de l'autre partie, est egal au quarré de la toute, & d'icelle partie premierement prise comme d'une seule ligne.

Soit la ligne donnée AB coupée comme on voudra au point C. Je dis que quatre fois le rectangle, compris de AB & de l'une ou l'autre partie, sçavoir BC, avec le quarré de l'autre partie AC, sont ensemble egaux au quarré de AD composée de la totale AB, & de la partie BC.

Qu'il ne soit ainsi : Soit prolongée AB vers D, & pris BD egale à BC, puis sur la totale AD soit fait le quarré AE avec sa diagonale FD & des deux points B & C, soient menées BG & CI paralleles à DE. Item des points H & K, ausquels elles coupent la diagonale FD, soient menées LM & OP paralleles à AD, par la 31. prop. 1. lesquelles coupent les premieres paralleles en N & Q.



Premierement, par ce qui resulte de la 4. prop. de ce Livre les rectangles OI, NQ, BM au long de la diagonale seront quarrez. Item, d'autant que CB est egale à BD : CH, & BM, seront egaux & quarrez : (étant l'un d'iceux quarré) pareillement NQ & HP aussi egaux quarrez ; ainsi les quatre CH, BM, NQ, HP, seront quarrez, & egaux : & par la 43. p. 1. les deux supplémens LK & KG seront aussi egaux entr'eux, & par la 36. pr. 1. LK est egal à AN ; & KG à QE : & par consequent iceux quatre rectangles sont aussi.

egaux entr'eux. Mais comme aux precedentes, il est evident que AH est une fois le rectangle de AB & BH, (egale à BD) qui est un des quatre rectangles avec un des quatre petits quarrez egaux : donc iceux quatre rectangles avec iceux quatre quarrez faisant le Gnomon RST seront egaux à quatre fois le rectangle de AB & BD ; lequel Gnomon avec le quarré de OK (egale à AC par la 34. p. 1.) sçavoir est OI, conuiennent avec le quarré AE : & partant par la 8. com. sent. ils luy seront egaux : Si donc une ligne droite est coupée, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Autrement, *D'autant que par la 4, prop. 2. le quarré de AD est egal aux quarrez de AB, B D, & à deux fois le rectangle d'icelles A B, B D, c'est à dire, aux quarrez de AB, B C avec deux fois le rectangle de AB, BC : & que par la precedente les quarrez de AB, BC sont egaux au quarré de AC avec deux fois le rectangle de AB, BC ; le quarré de AD sera egal à quatre fois le rectangle de AB, BC, avec le quarré de AC. Ce qu'il faloit demontrer.*

Pour accommoder ce theoreme aux nombres, soit le nombre 12, divisé comme on voudra en 7 & 5. Or ledit nombre 12 multiplié par la partie 7, fait 84, qui pris quatre fois avec 25 quarré de l'autre partie 5, font 361, qui est le nombre quarré de 19, composé de 12 & 7. Semblablement le nombre 240, qui est fait du nombre proposé 12, multiplié quatre fois par la partie 5, étant adjoûté avec 49, quarré de l'autre partie 7, font 289, tout ainsi que le quarré de 17, nombre composé du donné 12, & de la partie 5.

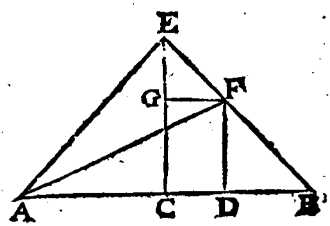
THEOR. 9. PROP. IX.

Si une ligne droite est coupée en deux parties egales, & en deux inegales : les quarrez d'icelles parties inegales seront doubles des quarrez de la moitié, & de la partie du milieu.

Soit la ligne donnée AB coupée en deux egalement au point

C, & en deux inegalement en D. Je dis que les quarrez de AD & DB parties inegales, sont doubles des quarrez de AC moitié, & de CD partie du milieu.

Qu'il ne soit ainsi : au point C soit levée la perpendiculaire CE, qu'on fera egale à CA, & apres avoir mené AE & BE, soit levée la perpendiculaire DF, coupant BE en F, duquel point soit menée FG parallele à AB, coupant CE en G : & finalement soit menée AF.



Premierement, les triangles ACE, & ECB seront Isoscelles, & feront les angles sur les bases AE & EB egaux par la 5. prop 1. estant l'angle ECB droit pour estre CE perpendiculaire. Item FDB estant droit, & DBF demy droit, aussi, par la 32. pr. 1. DFB sera demy droit, & par la 6. pr. 1 les costez DB & DF, du triangle BDF. seront egaux entr'eux. Par le mesme discours sera demontré que les costez GF, GE, du triangle FGE, sont egaux entr'eux. Item il est evident que l'angle AEB sera droit, étant composé des deux demy droits AEC, & BEC.

Maintenant par la 47. pr. 1. au triangle rectangle ACE, le quarré de AE, côté qui soûtient l'angle droit, est double du quarré de AC ; étant egal à tous les deux de AC & CE. Par même discours, le quarré de EF est double du quarré de GF, ou de CD son egal par la 34. p. 1. partant les deux quarrez de AE & EF, seront doubles des deux de AC & CD. Pareillement le quarré de AF étant egal aux deux de AE & EF par la 47. p. 1. iceluy sera double des deux de AC & CD. Mais par la même 47. pr. 1. le quarré de AF est egal aux deux de AD & DF, ou DB son egale : donc les deux quarrez de AD & DB seront doubles des deux de AC & CD. Si donc une ligne droite est coupée, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. prop. 2. Le quarré de la ligne AD est egal aux deux quarrez de AC, CD, & à deux fois le rectangle d'icelles AC, CD : si on ad-*

joûte le commun quarré de DB, les deux quarrez de AD, DB, seront egaux aux trois quarrez de AC, CD & DB, avec deux fois le rectangle de AC, CD, ou de BC, CD. Mais par la 7. prop. 2. les quarrez de BC ou AC, & de CD, sont egaux

au quarré de DB avec deux fois le rectangle de BC, CD. Donc les quarrez de AD, DB sont egau a deux fois les quarrez de AC, CD: & partant doubles d'iceux: Ce qu'il faloit demontrer.

Commandin demontre encore cette proposition autrement, ainsi qu'il ensuit. D'autant que AC est egale à CB, & icelle CB excede CD de DB, aussi AC excedera la même CD de DB. Parquoy comme il a été demontré à la 7. prop. 2. les quarrez de AC, CD, sont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD, *avec le quarré de* DB *& partant les trois quarrez de* AC, CD, DB, *avec deux fois le rectangle de* AC, CD, *sont doubles des quarrez de AC*, CD. *Mais par la 4. proposit. 2. le quarré de* AD *est egal aux quarrez de* AC, CD; *avec deux fois le rectangle de* AC, CD. *Donc les quarrez de* AD, DB *sont doubles des quarrez de* AC, CD.

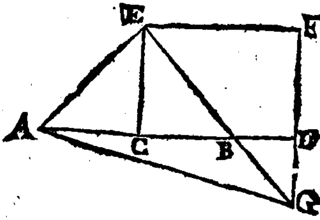
Pour aussi rendre manifeste ce Theor. par nomb. soit le n. 12 divisé en deux parties egales, 6 & 6, & en deux inegales 8 & 4. de sorte que la partie du milieu sera 2. Or il est evidẽt que 64 & 16, qui sont les quarrés des parties inegales 8 & 4, font ensemble doubles de 36 & 4, qui sont les quarrez de la moitié 6, & de la partie du milieu 2, comme vouloit la prop.

THEOR. 10. PROP. X.

Si une ligne droite est coupée en deux parties egales, & on luy ajoûte directement quelqu'autre ligne droite; le quarré de la toute avec l'ajoûtée comme d'une, & le quarré de l'ajoûtée, sont doubles des quarrez de la moitié, & de la moitié, & de l'ajoûtée, comme d'une.

Soit la ligne droite AB coupée en deux egalement au point

G, à laquelle soit ajoûtée directement B D. Je dis que les quarrez de AD & BD sont doubles des quarrez de AC & CD. Qu'ainsi ne soit : au point C soit levée la perpendiculaire C E par la 11. prop. 1. egale à AC : & apres avoir mené les deux lignes AE & EB, soient menées par la 31. prop. 1. EF parallele à CD, & DF à CE se rencontrant en F, & soient continuées EB & FD, jusques à ce qu'elles se rencontrent au point G : (elles s'y rencontreront puis que les deux angles BEF, EFD, sont moindres que les deux droits CEF, EFD.) Finalement soit tirée la ligne AG.



Premierement, puis que AC & CE sont egaux ; aussi par la 5. prop. 1. les angles EAC & CEA sont egaux, & demy droits par la 32. prop. 1. étant l'angle A C E droit. Par même discours, les angles CBE & BEC seront aussi demy droits; & l'angle AEB droit, étant composé de deux demy droits. Item par la 15. prop. 1. l'angle DBG sera egal à CBE, & demy droit : & les deux lignes CD & EF étans paralleles, par la 29. prop. 1. l'angle BEF sera egal à CBE, c'est à dire demy droit, & l'angle F étant droit par la 34. pr. 1. (car il est opposé à un droit C) BGD sera aussi demy droit par la 32. p. 1. & par la 6. p. 1. les triangles EGF & BDC, seront Isoscelles rectangles, & CF parallelogramme rectangle.

Maintenant par la 47. prop. 1. le quarré de AE, costé qui soûtient l'angle droit C, est egal aux deux quarrez des deux autres costez AC, CE, partant double du quarré de AC. Par même discours EG se trouvera double du quarré de EF, ou de CD, qui luy est egale par la 34. prop. 1. ainsi les deux quarrez de AE & EG, ou le seul de AG qui leur est egal par la 47. prop. 1. sera double des deux de AC, CD. Mais par la même 47. p. 1. il est egal aux deux quarrez de A D & D G, ou B D son egal, & par consequent les deux quarrez de AD & BD, seront doubles des deux de AC & DC. Si donc une ligne droite est coupée en deux parties egales, &c. Ce qu'il faloit prouver.

SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. prop. 2. le quarré de* AD *est egal aux quarrez de* AC, CD, *avec deux fois le rectangle d'icelles* AC, CD, *ou de* BC, CD: *Si on adjoûte le commun quarré de* BD, *les deux quarrez de* AD, BD *seront egaux aux trois quarrez de* AC, CD: BD *avec deux fois le rectangle de* BC, CD. *Mais par la 7. p. 2. le quarré de* BD *avec deux fois le rectangle de* BC, CD *est egal aux quarrez de* CD CB, *c'est à dire de* AC, CD. *Donc les quarrez de* AD, BD, *sont egaux à deux fois les quarrez de* AC, CD, *& partant ils sont doubles d'iceux. Ce qu'il falloit démontrer.*

Commandin demontre encore cette prop. ainsi. D'autant que AC est egale à CB, & CD excede icelle CB de BD, aussi la même CD excedera AC du même excez BD: Parquoy comme il a été demontré à la 7. prop. de ce livre, les quarrez de AC, CD, sont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD avec le quarré de BD: & partant les trois quarrez de AC, CD, BD avec deux fois le rectangle de AC, CD, sont doubles des quarrez de AC, CD. Mais par la 4, p. 2 le quarré de AD est egal aux deux quarrez de AC, CD. & deux fois le rectangle d'icelles AC, CD: Dont les quarrez de AD & BD sont doubles des quarrez de AC, CD.

Ce Theoreme est aussi evident en nombres: car le nombre 8 étant divisé en deux parties egales 4 & 4, si on luy ajoûte quelconque nombre 5, le nombre composé sera 13, duquel le quarré 169 avec 25 quarré du nombre adjoûté 5, fait 194, qui est double du nombre 97, somme de ces deux nombres 16 & 81, qui sont les quarrez de la moitié 4, & de 9 composé de ladite moitié & du nombre ajoûté 5.

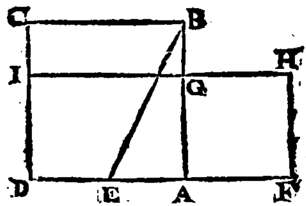
PROBL. 1. PROP. XI.

Couper une ligne droite donnée, tellement que le rectangle de la toute, & de l'une des parties, soit egal au quarré de l'autre partie.

Soit la ligne droite donnée AB, laquelle il faut diviser selon le requis de la proposition.

Apres avoir construit sur icelle AB le quarré AC, soit divisée AD en deux egalement au point E, & apres avoir mené EB, & prolongé EA vers F, tellement que EF soit egale à EB, sur AF soit fait le quarré AH; & soit continuée HG jusques en I. Je dis que la ligne AB est coupée au point G, en sorte que le rectangle CG, compris de BC egale à BA; & de BG partie de BA, est egal au quarré de l'autre partie AG, sçavoir est à GF.

Car la ligne AD estant coupée en deux egalement en E, & on luy ajoûte directement AF, & le quarré de la moitié & de l'ajoûtée comme d'une, sçavoir EF, ou de son egale EB, est egal au rectangle de DF, AF, au quarré de AE par la 6. p. de ce livre. Mais le quarré de EB est egal aux deux de BA & AE par la 47. prop. 1. ainsi les deux quarrez de BA & AE, seront egaux au rectangle de DF, AF, & au quarré de AE: ôtant



donc le quarré de AE commun, les demeurans quarré de AB, sçauoir AC, & le rectangle de DF, AF, sçavoir FI, seront egaux; desquels AC & FI, si on ôte le rectangle commun AI; le demeurant quarré FG, sera egal au demeurant rectangle GC. Parquoy nous avons coupé la ligne droite AB en G, tellement que le rectangle d'icelle & de la partie GB est egal au quarré de l'autre partie AG. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous avons enseigné en nos Memoires Mathe-

matiques Probl. 72. de la Geometrie pract. à couper une ligne droite, non seulement comme enseigne icy Euclide, mais aussi en sorte que le rectangle de la toute, & de l'une des parties soit double, ou triple, ou quadruple, &c. ou moitié, ou tiers, ou quart, &c. du quarré de l'autre partie : bref qu'iceluy rectangle soit au quarré, selon quelconque raison donnée.

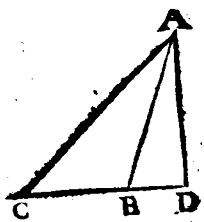
Quand aux nombres, ils ne se peuvent accommoder à ce probleme, sinon qu'on y employe les nombres irrationaux : Car aucun nombre absolu ne peut être divisé en deux autres tels que le nombre produit du tout, multiplié par l'une des parties soit egal au nombre quarré de l'autre partie, comme il sera demontré au Scholie de la 14. p. 9. auquel les 10. theoremes precedens seront demontrez en nombres ; Neanmoins pour le contentement de ceux qui entendent les operations des nombres irrationaux, nous appliquerons les nombres aux lignes & superfices mentionnez en la demonstration cy-dessus. Que la ligne A B soit 8 : donc sa moitié A E sera 4, & leurs quarrez seront 64 & 16, qui font ensemble 80, pour le quarré de B E, ou E F, qui par consequent sera irrationelle, c'est à sçavoir $\sqrt{80}$: & d'icelle EF, ostons EA 4, & resteront pour AF, ou AG, $\sqrt{80} - 4$, qui ostez de la toute AB 8, resteront pour l'autre partie BG $8 - \sqrt{80} - 4$, c'est à dire $12 - \sqrt{80}$, qui multipliez par le nombre total 8, feront $96 - \sqrt{5120}$ pour le rectangle GC, & autant est le quarré AH ; car la partie AG, qui est $\sqrt{80} - 4$, multipliée par soy-même fait aussi $96 - \sqrt{5120}$, comme vouloit ce probleme.

THEOR. II. PROP. XII.

Aux triangles ambligones, le quarré du côté qui soûtient l'angle obtus, est plus grand que les quarrez des deux autres côtez, de la quantité de deux fois le rectangle, compris d'un des côtez contenant l'angle obtus, sçavoir celuy sur lequel étant prolongé tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

Soit le triangle ambligone ABC, duquel soit prolongé le côté CB iusques en D, & du point A soit menée la perpendiculaire AD par la 12. prop. I. Je dis que le quarré du costé AC qui soûtient l'angle obtus ABC, est plus grand que les quarrez de AB & CB, de deux fois le rectangle de CB & BD, sçavoir CB, qui est l'un des costez faisant l'angle obtus, celuy sur lequel étant prolongé tombe la perpendiculaire AD, & BD prise dehors entre l'angle obtus, & la perpendiculaire, c'est à dire que le quarré du costé AC est egal aux deux quarrez des costez AB, BC, avec deux fois le rectangle de CB, BD.

Qu'il ne soit ainsi : Puis que la ligne CD est coupée en B, le quarré d'icelle CD sera egal aux deux quarrez de CB, BD, & au rectangle compris deux fois sous CB, BD, par la 4. prop. de ce Livre : Adjoûtant donc le commun quarré de AD, les deux quarrez de CD, DA, seront egaux aux trois quarrez de CB, BD, DA, & au rectangle compris deux fois

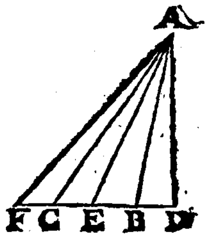


sous CB, BD. Mais par la 47. pr. I. le quarré de AC est egal aux quarrez de CD, DA : donc aussi le quarré de AC sera egal aux trois quarrez de CB, BD, DA, & au rectangle compris deux fois sous CB, BD. Et puis que par la 47. p. I. le quarré de AB est egal aux quarrez de BD, DA ; le quarré de AC sera egal aux quarrez de CB, AB, & deux fois le rectangle de

CB, BD. Parquoy aux triangles ambligones, le quarré du côté qui soûtient l'angle obtus, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

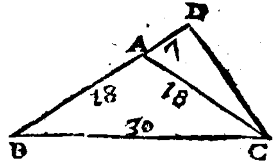
Or que la perpendiculaire tirée de A, doive tomber sur le costé CB prolongé de la part de l'angle obtus, comme l'a pris icy Euclide, nous le demontrerons ainsi: Soit le triangle ABC ayant l'angle B obtus, & le côté CB prolongé de la part de B. Ie dis que la perpendic. tirée de A tombe hors le triangle sur le costé CB prolongé, comme est la ligne droite AD. Car si elle tomboit dans le triangle, comme est la ligne AE, les deux angles ABE, AEB seroient plus grands que deux droits, contre la 17. prop. I. Mais si elle tomboit hors le triangle sur le costé BC prolongé de la part de C, comme est AF; derechef, au triangle ABF, les deux angles ABF, AFB, seroient plus grands que deux droits: ce qui est absurde.



Or afin de pouuoir par le moyen des nombres faire paroître la verité de ce theoreme, nous enseignerons icy certaines regle, par lesquelles on pourra construire divers triangles ambligones, ayans les costez commensurables en nombre entier, & aussi la ligne d'entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

REGLE I.

Pour construire un triangle ambligone Isoscelle, ayant les costez, & la ligne prise dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus commensurables en nombre entier, soit fait le segment exterieur, d'autant de parties egales que le nombre d'icelles parties se puisse diuiser exactement par 7. comme de 7. ou de 14, ou de 21. ou de 28, ou 35, &c. puis apres soit posé pour chaque costé egal, le double d'iceluy segment, & outre ce $\frac{4}{7}$ d'iceluy, mais pour le plus grand costé, le quadruple & $\frac{2}{7}$ dudit segment exterieur: comme au triangle ABC, ou le segment AD est posé de 7, & l'un & l autre des costez AB, AC de 18, qui est double & $\frac{4}{7}$ de 7; mais le plus grand costé BC de 30, qui est le quadruple & $\frac{2}{7}$ de 7. Or que ce triangle ABC composé comme dessus soit ambligone, il est evident: Car le quarré du costé BC est 900, & ceux des costez AB, AC sont seulement ensemble 648, chacun d'iceux étant 324: & partant parce que nous avons demontré au Scholie de la 48 p. 1. l'angle BAC sera obtus. Donc le triangle ABC duquel les costez & la ligne exterieure AD sont commensurables en nombre entier, est ambligone. Parquoy le quarré dudit costé BC, qui est 900 sera egal à la somme des quarrez des deux autres costez AB, AC, & de deux fois BA en DA, c'est à dire a la somme de ces quatre nombres 324, 324, 126, 126, qui font aussi 900, comme veut cette 12. proposition.



REGLE II.

Pour construire un triangle Ambligone scalene duquel non seulement les costez, & la ligne prise dehors entre la perpendiculaire tombant sur le moindre costé prolongé & l'angle obtus, mais aussi ladite perpendiculaire, soient commensurables en nombre entier:

tier; soit posé le segment exterieur d'autant de parties qu'on voudra qui se puissent exactément diviser par 5; comme de 5, 10, 15, 20, &c. puis au double d'icelles parties ajoûtez $\frac{1}{5}$ pour avoir le petit costé, $\frac{3}{5}$ pour avoir le moyen, & $\frac{2}{5}$ pour avoir la perpendiculaire, mais le quadruple dudit segment sera le plus grand costé. Ou bien posez le segment exterieur de 9, ou 18, ou 27, ou d'autre nombre de parties qui se puisse partir exactement par 9: puis pour le petit costé prenez $\frac{7}{9}$ dudit segment; pour avoir le moyen, ajoûtez à iceluy segment $\frac{2}{3}$, pour la perpendiculaire $\frac{1}{3}$, & pour le grand costé ajoustez $\frac{2}{9}$ au double d'iceluy segment: Comme si nous posons que le segment exterieur soit de 9 parties egales, le plus petit costé sera 7 d'icelles parties, le moyen 15, la perpendiculaire 12, & le plus grand costé 20. Or le quarré d'iceluy costé est 400, auquel est egale la somme de ces quatre nombres 225, 49, 63, 63, qui sont les quarrez des deux costez 15 & 7, & deux fois le produit de 9 multiplié par 7, c'est à dire le segment exterieur par le moindre costé. Parquoy appert que le triangle ainsi construit est ambligone, & cette 12. prop. estre veritable.

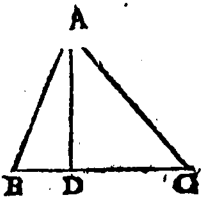
REGLE III.

Pour construire un triangle ambligone Scalene, duquel les costez & le segment exterieur du moyen costé prolongé jusques à la rencontre de la perpendiculaire tombant sur iceluy costé, soient commensurables en nombre entier: Soit pris ledit segment exterieur de 5 parties, ou de 10, ou de 15, &c. puis soit ajousté $\frac{1}{5}$ au triple d'iceluy segment, & viendra le moindre costé, le double duquel donnera le moyen costé, mais *multipliant ledit ſegment par 8, nous aurons le plus grand coſté : comme ſi nous poſons le ſegment exterieur de 5 parties, ajouſtans $\frac{1}{5}$ d'iceluy ſegment à ſon triple 15, nous aurons 16 pour le moindre coſté, & doublant iceluy coſté viendront 32 pour le moyen coſté: & finalement multipliant ledit ſegment par 8, nous aurons 40 parties pour le plus grand coſté du triangle: lequel ſera ambligone, veu que le quarré d'iceluy coſté 40, eſt 1600, & la ſomme des quarrez des deux autres coſtez 16 & 32 n'eſt que 1280; mais ces deux quarrez eſtans ajouſtez à deux fois 160 procreez de la multiplication du moyen coſté 32 par le ſegment exterieur 5, font auſſi 1600, comme veut Euclide en cette 12. prop.*

THÉOR. 12. PROP. XIII.

Aux triangles Oxigones, le quarré du côté qui ſoûtient l'angle aigu, eſt plus petit que les quarrez des deux autres côtez, de deux fois le rectangle contenu de l'un des côtez qui font l'angle aigu, ſçavoir celuy ſur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne priſe au dedans entre la perpendiculaire & l'angle aigu.

Soit le triangle ABC, ayant les angles B & C aigus, mais de l'angle A tombe AD perpendiculaire au côté BC. Je dis que le quarré du côté AB, qui ſoûtient l'angle aigu C, eſt plus petit que les deux quarrez des deux autres côtez AC & CB, de deux fois le rectangle de BC & CD : sçavoir BC, l'un des côtez qui font l'angle aigu C, sur lequel tombe la perpendiculaire, & CD prise entre la perpendiculaire, & iceluy angle aigu C.



Car d'autant que la ligne BC est coupée en D, les quarrez de BC, CD, sont egaux au quarré de BD, & deux fois le rectangle de BC, CD par la 7. pr. de ce livre, ausquels si on ajoûte le quarré commun de AD, les trois quarrez de BC, CD, AD, seront egaux aux deux quarrez de BD, AD, & deux fois le rectangle de BC, CD. Mais les deux triangles ADB, ADC étans rectangles, le quarré de AB est egal aux deux quarrez de AD, DB : & le quarré de AC aux deux quarrez de AD, DC par la 47. prop. 1. Donc les deux quarrez de AC, BC seront egaux au quarré de AB, & deux fois le rectangle de BC, CD : en ôtant donc iceux deux rectangles, le quarré de AB sera d'autant plus petit que les quarrez de AC, BC : ce qui étoit proposé à prouver. On demontrera en la même maniere que le quarré du côté AC, qui soûtient l'angle aigu, B, est plus petit que les deux quarrez des deux autres côtez AB, BC, de deux fois le rectangle de CB, BD. Donc aux triangles Oxigones, le quarré du côté qui soûtient l'angle aigu, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

CHOLIE.

Or combien qu'Euclide propose ce Theoreme des *triangles oxigones seulement : toutesfois le mesme est aussi veritable és triangles rectangles & ambligones, la perpendiculaire tombant de l'angle droit ou obtus : Car il est manifeste par la 17. pr. 1. que les deux autres angles sont aigus : & partant la perpendiculaire tombera tousjours dans le triangle, comme Euclide l'a pris en la demonstration cy-dessus : Ce qui est aussi facile à prouver. Car si elle tomboit hors le triangle, il s'ensuivroit qu'un angle aigu seroit plus grand que le droit. Ce qui est absurde.*

Et comme au precedent Scholie nous avons enseigné à construire divers triangles ambligones ayans les côtez & le segment compris entre la perpendiculaire & l'angle obtus commensurables en nombres entiers, afin de pouvoir plus facilement faire apparoir en nombres la verité de ce qu'Euclide a demontré en la 12. prop. aussi enseignerons nous icy quelques regles pour construire divers triangles oxigones ayant les costez & les segmens de la base commensurables en nombres entiers, afin de faire aussi paroistre en nombre la verité de cette 13. prop.

REGLE I.

D'autant qu'au triangle equilateral, & à l'Isoscelle la perpendiculaire tombant de l'angle compris des deux costez egaux fait les segmens de la base egaux, ainsi qu'il a esté demontré sur la 26. prop. 1. il sera fort aisé de construire tels triangles qui ayent les costez & les segmens commensurables en nombre entier, c'est pourquoy il n'est pas besoin de nous y arréter : Mais quand est requis un triangle Isoscelle, auquel la base soit plus grande que chaque costé, & que *la perpendiculaire tombe sur l'un d'iceux costez egaux; elle le coupera en deux segmens inegaux, comme nous avons demonstré à la 47. prop. 1. le moindre desquels segmens il faut poser d'autant de parties qu'on voudra, & icelles estans multipliées par 8, produiront le plus grand segment, mais les multipliant par 12, sera produit la base, & les deux segmens estans adioustez, l'on aura l'une & l'autre des iambes: ce qu'on aura aussi multipliant le moindre segment par 9. Comme par exemple, ayant posé le moindre segment de 4 parties, nous les multiplierons par 8, & viendront 32 pour le plus grand segment: mais les multipliant par 12, viennent 48 pour la base, & par 9 viennent 36 pour chaque côté. Or que ce triangle Isoscelle soit oxigone, il est manifeste parce que nous avons demonstré au Scholie de la 48. prop. 1. car veu que le quarré de la base 48 n'est que 2304, & la somme des quarrez des deux iambes est 2592, chacun d'iceux estant 1296, l'angle compris d'iceux costez sera aigu, & par consequent les autres seront aussi aigus, puis qu'ils sont plus petits par la 18. propos. 1. Et si à iceluy quarré 2304, nous adioustons 288, qui sont deux fois 144, nombre produit de 36, costé sur lequel tombe la perpendiculaire, par 4, segment compris entre la perpendiculaire & l'angle opposé à ladite base, viendront aussi 2592. Pareillement 1296, quarré de l'une des iambes est moindre que 3600, somme des quarrez de la base & de l'autre iambe, de deux fois 1152, nombre produit du costé 36, multiplié par le grand segment 32: car ces trois nombres 1296, 1152, 1152 font ensemble le mesme nombre 3600. Parquoy apert estre veritable ce que dit Euclide en cette 13. pr.*

REGLE II.

Que s'il est requis que le triangle soit Isoscelle ayant la base moindre que chacune jambe, & que sur l'une d'icelle tombe la perpendiculaire : il faudra poser le moindre segment, d'autant de parties que l'on voudra en nombre pair, & multipliant la moitié d'iceluy nombre par 7, on aura le plus grand segment, mais multipliant ledit moindre segment par 3, on aura la base, & finalement la somme des deux segmens fera chacune des jambes : qu'on aura aussi multipliant la moitié du moindre segment par 9. Parquoy ayant posé le moindre segment de 4, je multiplie sa moitié 2, par 7, & viennent 14 pour l'autre segment, tellement que toute la jambe sera 18, & multipliant ledit segment 4 par 3, viennent 12 pour la base. Or que ce triangle soit oxigone, il est evident, attendu que le quarré du costé 18 n'est que 324, & la somme des quarrez des deux autres costez est 468 : Et de plus, iceluy quarré 324 est moindre que ladite somme 468, de deux fois 72, nombre produit de la multiplication de 18, costé sur lequel tombe la perpendiculaire par 4, segment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle opposé à l'autre jambe : partant il apert estre veritable ce que dit Euclide en cette 13. prop.

REGLE III.

Que s'il est requis que le triangle soit scalene, & la perpendiculaire tombe sur le moindre costé, il faudra poser le moindre segment de 79 parties, ou de

140, ou de quelque autre nombre qui se puisse diviser exactement par 70; puis, adjouster a iceluy nombre $\frac{29}{70}$ & viendra le plus grand segment, & la somme de ces deux segmens sera le moindre costé; mais ayant doublé le moindre segment, & à iceluy double adjousté $\frac{42}{70}$ c'est à dire $\frac{3}{5}$ dudit segment, sera procreé le moyen costé; & finalement si à ce double du moindre segment on adjouste $\frac{55}{70}$, c'est à dire $\frac{11}{14}$, on aura le plus grand costé. Comme si nous posons le moindre segment de 70, & à iceluy adjoustons $\frac{29}{70}$, nous aurons 99 pour le plus grand segment, & par consequent le moindre costé sera 169; mais adjoustant $\frac{42}{70}$ au double d'iceluy moindre segment, viendront 182 pour le moyen costé: & adjoustant au méme double $\frac{55}{70}$, viendront 195 pour le plus grand costé. Or que ce triangle soit oxigone, il est evident, attendu que le quarré du plus grand costé 195 n'est que 38025, & la somme des quarrez des deux autres costez est 61680: parquoy le plus grand angle est aigu, & consequemment les autres sont aussi aigus. Que si à iceluy quarré 38025, on adjouste deux fois 11830, nombre produit de la multiplication de 169, costé sur lequel tombe la perpendiculaire par le moindre segment 70, viendra le mesme nombre 61685. Parquoy apert encore estre veritable ce que dit Euclide en cette 13. p.

REGLE IV.

Que si au triangle scalene il est requis que la perpendiculaire tombe sur le moyen costé, soit posé le moindre segment de 5 parties, ou de 10, ou de *quelqu'autre nombre qu'on puisse exactement diviser par 5, puis à iceluy segment soient ajoûtée $\frac{4}{5}$, & on aura le plus grand segment; & la somme d'iceux sera le moyen coté: mais ajoûtant $\frac{3}{5}$ au double d'iceluy moindre segment, on aura le moindre côté, & le plus grand sera le triple dudit segment. Parquoy si nous posons le moindre segment de 10 parties, ajoûtant à iceluy les $\frac{4}{5}$, nous aurons 18 pour l'autre segment, & consequemment tout le moyen côté sera 28. Mais ajoûtant 6, qui sont les $\frac{3}{5}$ du moindre segment 10, au double d'iceluy segment; viennent 26 pour le moindre costé; & le plus grand sera 30, triple dudit moindre segment. Or qu'iceluy triangle soit oxigone, il est manifeste: car le quarré du plus grand costé 30, n'est que 900, & la somme des quarrez des deux autres costez 26 & 28 est 1460: & partant le plus grand angle est aigu, & consequemment les autres angles sont aussi aigus. Maintenant si nous multiplions le costé sur lequel tombe la perpendiculaire, sçavoir 28 par le moindre segment 10, nous aurons 280, & pour le double 560, qui ajoûtées au susdit quarré de 30 sçavoir 900, font le mesme nombre 1460 somme des deux quarrez des deux autres costez 26 & 28, qui sont 676 784. Pareillement le quarré du moindre costé 26, n'est que 676, & la somme des quarrez des deux autres costez est 1684: tellement qu'il est moindre que cette dite somme de deux fois 504, nombre produit de la multiplication de 28, costé sur lequel tombe la perpendiculaire par 18, segment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle opposé à iceluy moindre costé. Parquoy appert derechef être veritable ce que dit Euclide en cette 13. proposition.*

REGLE V.

Et finalement, s'il estoit requis que la perpendiculaire tombe sur le plus grand costé, soit encore posé le moindre segment de 5 parties, ou de 10, ou de 15, &c. puis au triple d'iceluy segment soit adjoûté $\frac{1}{5}$, & viendra le plus grand segment, tellement que la somme d'iceux segmens sera le plus grand costé: mais adjoûtant $\frac{3}{5}$ au double d'iceluy moindre segment, on aura le moindre costé, & le moyen sera le quadruple dudit segment. Par ainsi le moindre segment estant posé de 5 parties, le plus grand sera de 16, & le plus grand costé 21, le moindre 13, & le moyen 20. Or le quarré de ce plus grand costé 21, n'est que 441, & la somme des deux quarrez des deux autres costez 20 & 13 est 569: parquoy l'angle opposé à iceluy costé, qui est le plus grand par la 18. prop. 1. est aigu, & consequemment le triangle susdit est oxigone. Davantage le quarré du moindre costé 13, sçavoir 169, est plus petit que la somme des quarrez des deux autres costez 20 & 21, sçavoir est 841, de deux fois 336, nombre produit de la multiplication de 21, costé sur lequel tombe la perpendiculaire par 16, segment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle opposé à iceluy moindre costé. Pareillement le quarré du moyen costé 20, sçavoir 400, est moindre que 610, somme des quarrez des deux autres costez 13, & 21, de deux fois 105, nombre produit de 21 multiplié par le moindre segment 5. Parquoy apert encore par ce 5. triangle estre veritable, ce que dit Euclide en cette 13. prop.

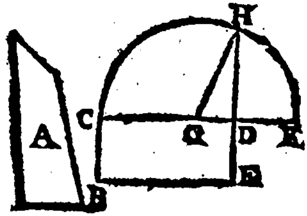
Mais il est aussi evident tant par la demonstration d'Euclide, que par l'application des nombres cy-devant faite, que ce qu'il dit icy des triangles oxigones seulement, est aussi veritable tant aux triangles rectangles qu'aux ambligones, tellement qu'on peut dire qu'en tout triangle, le quarré du costé qui soustient un angle aigu, est plus petit que la somme des quarrez des deux autres costez, de deux fois le rectangle contenu du costé sur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne comprise entre icelle perpendiculaire, & ledit angle aigu.

PROBL. 2. PROP. XIV.

Faire un quarré egal à une figure rectiligne donnée.

Soit donnée la figure rectiligne A, à laquelle il faut faire un quarré egal.

Soit premierement fait le parallelogramme BD egal à la figure donnée A, ayant un angle droit par la 45. prop. 1 puis soit prolongé un côté, comme CD, jusques en F, & fait DF egale à l'autre côté DE : & apres avoir coupé CF en deux egalement au point G, & d'iceluy point G & intervalle GC ou GF, décrit le demy cercle CHF, soit continuée ED jusques à ce qu'elle ren-



contre la circonference du demy cercle en H. Je dis que le quarré de DH est egal à la figure rectiligne A.

Car puisque CF est coupée en deux egalement au point G, & en deux inegalement au point D; le rectangle de C D & D F, sçavoir BD, avec le quarré de la partie du milieu GD, est egal au quarré de la moitié GF par la 5. prop. de ce livre, ou de son egale GH, lequel est egal aux deux quarrez de GD & DH par la 47. prop. 1. Que si on oste le quarré commun de GD, le demeurant quarré de DH se trouvera egal au demeurant rectangle BD : & par consequent à la figure rectiligne donnée A. Nous avons donc trouvé le côté d'un quarré egal à une figure rectiligne donnée A. Ce qu'il falloit faire.

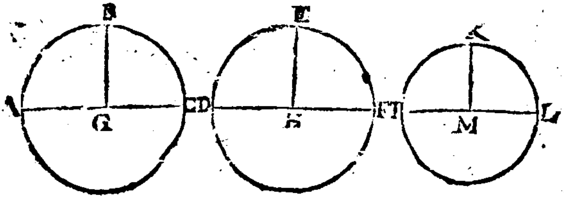
Fin du second Element.

ELEMENT TROISIÉME.

DEFINITIONS.

CERCLES egaux, sont ceux desquels les diametres sont egaux, ou desquels les lignes droites menées des centres aux circonferences, sont egales.

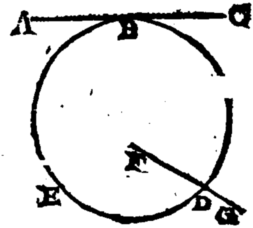
D'autant qu'Euclide demontre en ce 3. Livre diverses proprietez & affections du cercle, il explique auparavant quelques termes dont l'usage sera fort frequent en iceluy : Il dit donc premierement que ces cercles-là sont egaux, desquels les diametres ou semidiametres sont egaux. Car puis que le cercle est décrit par le mouvement & revolution du demy diametre à l'entour d'une de ses extremitez fixe & immobile, comme nous avons *dit à la 15. def. du 1. Livre ; il est evident que ces cercles-là sont egaux, desquels les demy diametres, ou les lignes droites menées des centres aux circonferences sont egales entr'elles : ou bien desquels les diametres entiers sont egaux entr'eux. Comme*



si les diametres AC, DF, ou les lignes droites GB, HE, menées des centres G & H, sont egales entr'elles, les cercles ABC, DEF seront egaux entr'eux. Et au contraire, si les cercles sont egaux, leurs diametres ou les lignes droites menees des centres aux circonferences, seront aussi egales.

De cecy il appert, que les cercles sont inegaux quand les diametres, ou les lignes droites menées des centres aux circonferences, sont inegales ; & que celuy est le plus grand, duquel le diametre, ou demy diametre est le plus grand. Comme si les diametres DF, IL, ou les lig. droites HD, MK, menées des centres aux circonfer. sont inegales, les cercles DEF, IKL seront inegaux ; & si le diametre DF est le plus grand, aussi le cercle DEF sera le plus grand. Et au contraire ; des cercles inegaux, les diametres ou semidiametres seront inegaux, c'est à sçavoir celuy du plus grand cercle, plus grand, & celuy du moindre, plus petit.

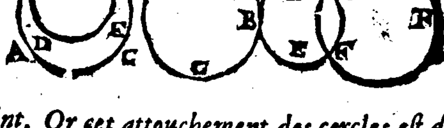
2. Vne ligne droite eſt dite toucher le cercle, laquelle touchant le cercle, ſi elle eſt continuée ne le coupe point.



Comme la ligne droite AB ſera dite toucher le cercle BDE en B, ſi elle l'y touche, en ſorte qu'étant prolongée vers C, elle ne le coupe point, ains demeure totalement dehors iceluy cercle. Mais d'autant que la ligne droite GD atteint le meſme cercle au point D, en telle ſorte qu'eſtant prolongée iuſques à F, elle coupe le cercle, & tombe dedans iceluy, elle ne ſera pas dite toucher le cercle, mais le couper.

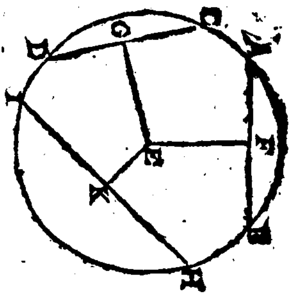
3. Les cercles ſont dits ſe toucher l'un l'autre, quand en ſe touchant ils ne ſe coupent point.

Ainſi les deux cercles ABC, DBE ſeront dits ſe toucher l'un l'autre en B, s'ils s'y touchent en ſorte qu'ils ne s'entre-



coupent point. Or cet attouchement des cercles eſt de *deux sortes ; Car les cercles s'entretouchent ou en dedans, ou en dehors : Ils se touchent en dedans, quand l'un est posé dedans l'autre ; & en dehors, quand l'un est constitué hors de l'autre, comme il apert icy. Mais si deux cercles s'atteignent de telle sorte que l'un coupe l'autre, comme sont icy les deux cercles DGE, FGH, ils seront dits se couper, & non pas se toucher.*

4. Au cercle, les lignes droites sont dites être egalement distantes du centre, lors que les perpendiculaires tirées du centre sur icelles, sont egales. Mais celle-là est dite estre plus éloignée du centre, sur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.

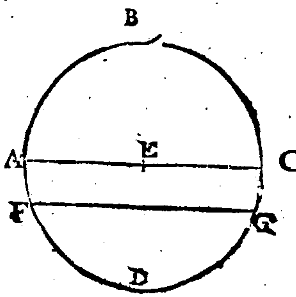


Comme au cercle ABDC, les lignes droites AB, CD, seront dites estre egalement distantes & éloignées du centre E, si les perpendiculaires EF, EG, sont egales: Mais la ligne droite AB sera dite estre plus éloignée du centre E que la ligne HI, si la perpendiculaire EF est plus grande que la perpendiculaire EK.

5. Segment, ou portion de cercle, est une figure comprise d'une ligne droite, &

de la circonference du cercle.

Si dans un cercle, comme ABCD, on mene une ligne droite qui coupe le cercle en deux parties, comme fait la ligne droite F G; tant la figure FBG contenuë sous ladite ligne droite FG, & la partie de circonference FBG, que la figure FDG comprise sous la mesme ligne droite F G, & la partie de circonference FDG, sera dite segment ou portion de cercle. Mais est icy à noter qu'il y a de trois sortes de segmens de cercle: Car si la ligne droite passe par le centre du cercle, comme AEC, elle divisera le cercle en deux segmens egaux A B C, ADC, chacun desquels s'appelle proprement demy cercle, comme il a été dit au premier livre.



Mais quand la ligne ne passe point par le centre, comme F G, elle divise le cercle en deux parties inegales F B G . FDG, l'une desquelles, sçavoir FBG, dans laquelle est le centre E, est plus grande que le demy cercle, & s'appelle portion ou segment majeur: mais l'autre portion FDG, est plus petite que le demy cercle, & s'appelle segment mineur. Davantage la ligne droite F G est appellée chorde par plusieurs Geometres, & la partie de circonference FBG, ou FDG, arc.

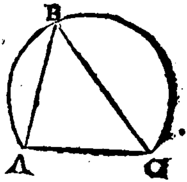
6. L'angle

6. L'angle du ſegment, eſt celuy compris d'une ligne droite, & de la circonference du cercle.

Euclide vient maintenant à definir trois ſortes d'angles que l'on conſidere aux cercles, & commence par l'angle du ſegment, diſant que l'angle mixte BFG, ou BGF, qui en la figure prec. eſt contenu ſous la ligne droite FG, & la circonference FBG, s'appelle angle du ſegment. Que ſi le ſegment eſt un demy cercle, l'angle d'iceluy ſera appellé angle du demy cercle, & tel eſt l'angle EAB, ou ECB. Mais ſi le ſegment eſt plus grand que le demi cercle l'angle d'iceluy, comme BFG, ou BGF, ſera dit angle du ſegment majeur: Et ſi le ſegment eſt plus petit que le demy cercle, l'angle d'iceluy, comme DFG, ou DGF, ſera appellé angle du ſegment mineur.

7. Un angle ſe dit être au ſegment, ou en la portion, lors qu'à un point pris en la circonference du ſegment, ſont menées deux lignes droites des extremitez de la ligne qui ſert de baſe au ſegment; & cet angle-là eſt celuy compris d'icelles deux lignes.

Soit un ſegment de cercle ABC, duquel la baſe eſt la ligne droite AC, des extremitez de laquelle ſoient menées au point B, pris en la circonference les deux lignes droites AB, CB, qui conſtituent l'angle rectiligne ABC; iceluy angle eſt dit eſtre au ſegment ABC.

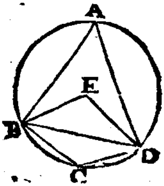


8. Mais quand les lignes droites qui comprennent l'angle embraſſent quelque circonference, l'angle eſt dit être, ou s'appuyer ſur icelle.

En la circonference du cercle ABCD ſoit pris quelconque

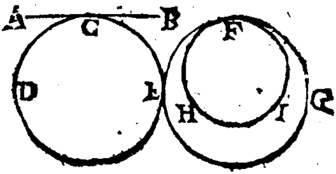
point A, & d'iceluy à deux autres points B & D d'icelle circonference, soient menées deux lignes droites AB, AD, qui constituent l'angle rectiligne DAB, & embrassent la circonference BCD: Iceluy angle BAD sera dit estre ou s'apuyer sur icelle circonference BCD.

Est icy à noter que quelques Interpretes n'ont fait aucune difference entre cet angle-cy & le precedent, mais les ont pris pour un même: & toutesfois si on les considere bien, on y trouvera une grande discrepance: Car celuy-là se refere au segment auquel il est constitué, & cettuy-cy se rapporte à la circonference qui luy sert de base: Comme par exemple, si au cercle ABCD on prend quelque segment de cercle BCD, l'angle qui est en ce segment ne sera pas le même que celuy qui insiste, ou est appuyé sur la circonference d'iceluy segment: car l'angle qui est en iceluy sera BCD, & l'angle qui insiste ou s'apuye sur la circonference d'iceluy sera l'angle BAD



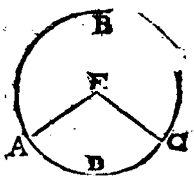
Vne autre chose est encore à remarquer icy, c'est que les angles qui s'apuyent sur la circonference, peuvent être non seulement constituez en la circonference, comme il a été dit cy-dessus, mais peuvent aussi être constituez au centre du cercle; comme par exemple, l'angle BED constitué au centre E par les deux lignes droites BE, DE, sera aussi dit s'apuyer sur la circonference BCD, tellement qu'il y a icy deux angles appuyez sur ladite circonference BCD, sçavoir BAD constitué en la circonference, & BED constitué au centre.

Or outre les trois sortes d'angles cy-dessus definis & expliquez, les Geometres en considerent encore un autre qu'ils appellent angle de contingence ou d'attouchement: cet angle est contenu d'une ligne droite touchant le cercle, & de la circonference d'iceluy cercle, ou bien de deux circonferences se touchant l'une l'autre au dehors ou au dedans. Comme par exemple, si la ligne droite AB touche le cercle CDE au point C, l'angle mixte ACD,



ou BCE *sera dit angle de contingence ou d'attouchement. Derechef, si le cercle* EFG *touche le cercle* CDE *au dehors en* E, *& le cercle en* HFI *au dedans en* F, *tant l'angle curviligne* CEF, *que* EFH *ou* GFI, *sera appellé angle de contingence ou d'attouchement.*

9. Secteur de cercle, est une figure contenuë sous deux lignes droites qui font un angle au centre, & la circonference comprise entre icelles lignes.



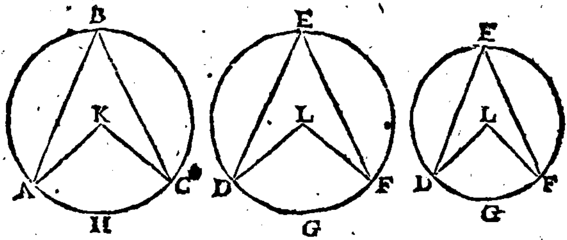
Si au cercle ABCD, *duquel le centre est* E, *les deux lignes droites* AE, CE, *constituent au centre* E, *l'angle* AEC; *la figure* AECD, *contenuë des deux lignes droites* AE, EC, *& de la circonference* ADC *comprise entre icelles lignes, sera appellée secteur de cercle. Item la figure* ABCE, *comprise des mêmes lignes droites* AE, EC, *& de la circonference* ABC, *sera aussi dite secteur de cercle.*

10. Semblables portions de cercle, sont celles qui reçoivent angles egaux; ou bien esquelles les angles sont egaux entr'eux.

Comme si aux cercles ABC, DEF, *les angles rectilignes* B, E, *sont egaux; les segmens* ABC, DEF, *qui reçoivent iceux angles egaux, ou esquels sont les susdits angles egaux, seront dits segmens semblables: Et les circonferences* ABC, DEF, *seront pareillement dites semblables, c'est à dire que le segment* ABC *sera telle partie de tout le cer-*

L 4

cle ABCH, que le segment DEF est partie de tout le cercle DEFG ; & la circonference ABC sera aussi tel-

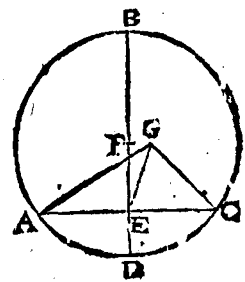


le partie de toute la circonference ABCH, que la circonference DEF est de toute la circonference DEFG. Par même raison, les arcs ou circonferences AHC, DGF, sur lesquelles s'appuyent angles egaux, sont aussi dites semblables : Comme si aux mêmes cercles ABC, DEF, les angles ABC, DEF ou AKC, DLF sont egaux ; les arcs ou circonferences AHC, DGF, sur lesquelles s'appuyent les susdits angles, seront dits arcs semblables.

Des choses susdites, l'on peut colliger que les semblables portions d'un même cercle, ou de cercles egaux, sont aussi egales entr'elles, attendu qu'elles sont parties egales d'une même chose, ou de choses egales.

PROBL. I. PROP. I.

Trouver le centre d'un cercle donné.



Soit le cercle donné ABC, duquel il faut trouver le centre.

Soit tirée en iceluy la ligne droite AC, qui coupe la circonference, comme que ce soit, és points A & C : puis par les 10. & 11. prop. 1. soit icelle AC coupée en deux egalement, & à droits angles par la ligne droite BD, se terminant à la peripheré és points B & D : & finalement icelle BD, soit aussi coupée en deux egalement en E, par la susdite 10. prop. 1. Je dis que F est le centre du cercle proposé.

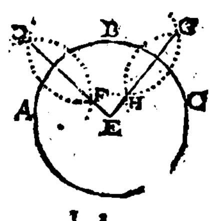
Car en icelle ligne droite BD, un autre point que F ne sera pas le centre, vû que tout autre point la divise inegalement.

Si donc le point F n'est pas le centre, le point G hors la ligne BD soit le centre, (s'il est possible) duquel soient menées les trois lignes droites GA, GE & GC. D'autant que G étant le centre, par la def. du cercle les lignes droites AG & GC seront egales: mais par la construction AE & EC sont aussi egales, & GE est commune aux deux triangles GEA & GEC; donc iceux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base AG egale à la base CG, & par la 8. pr. 1. les angles AEG & CEG seront egaux: & partant droits, & la ligne EG perpendiculaire par la 10. def. 1. Mais l'angle BEA par la constiuction est droit, & tous les angles droits sont egaux par la 10. com. sent. donc les deux angles AEG & BEA seront egaux, sçavoir le tout à sa partie: ce qui est absurde. Donc le point G n'est pas le centre. Le même inconvenient s'ensuivra prenant tout autre point hors la ligne BD. Partant le point F sera le centre du cercle ABC, requis à trouver.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, que si au cercle une ligne droite coupe une autre ligne droite en deux egalement, & à angles droits, le centre du cercle sera en icelle coupante. Car il a esté demontré qu'il est impossible que le centre du cercle ABC soit ailleurs qu'au point F, *milieu de la ligne* BD, *laquelle coupe la ligne* AC *en deux egalement, & à angles droits en* E.

SCHOLI



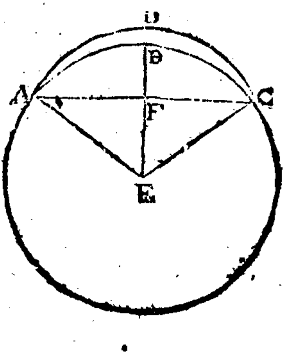
Combien que la pratique de ce Probleme soit aisée par la construction d'iceluy, si est-ce toutesfois qu'elle est encore plus briéve & facile, ainsi qu'il ensuit. Pour trouver le centre du cercle ABC, soient pris en la circonference d'iceluy les trois points A, B, C, comme en

voudra : puis des deux points A & B, soient décrits d'un même intervale, deux arcs qui s'entrecouppent és points D & F, par lesquels soit menée la ligne droite DFE interminement : en apres, des points B & C, soient aussi décrits d'un même intervalle deux autres arcs s'entrecouppans és points G & H, par lesquels soit menée la ligne droite GH, qui couppe DF en E, & iceluy point sera le centre requis.

THEOR. I. PROP. II.

Si en la circonference d'un cercle, on prend deux points comme on voudra ; la ligne droite menée de point à autre, tombera dans le cercle.

Soit le cercle ABC, & en la circonference d'iceluy soient pris deux points tels qu'on voudra A & C. Je dis que la ligne droite menée du point A au point C tombera dedans le cercle; car si elle ne tombe au dedans, elle tombera, ou sur la circonference, ou hors du cercle. Qu'elle tombe donc hors le cercle, s'il est possible, comme la ligne ADC : & ayant trouvé le centre E par la prec. prop. d'iceluy soient menées aux points A & C les lignes droites EA, EC, & à quelque point D de la ligne ADC, soit aussi menée ED, qui coupe la circonference du cercle ABC en B. Or d'autant que les deux côtez EA, EC sont egaux, le triangle AEC aura les angles EAD, ECD, sur la base ADC, egaux par la 5. prop. 1. Mais puis que du triangle AED, le costé AD est prolongé, l'angle exterieur EDC sera plus grand que son opposé interieur EAD, par la 16. proposition 1. Donc le même angle EDC sera aussi plus grand que l'angle ECD, qui est egal à EAD. Parquoy EC opposé au plus grand angle EDC



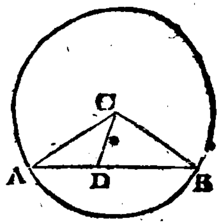
sera plus grand que ED par la 19. prop. 1. & partant EB egale à EC, sera aussi plus grande que ED, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc la ligne droite menée de A à C ne tombera pas hors le cercle. On démontrera par même raison qu'elle ne peut pas aussi tomber sur la circonference ABC. Il faut donc qu'elle tombe dedans le cercle, comme la ligne droite AFC. Parquoy si en la circonference d'un cercle, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

SCHOLIE.

Ce même Theoreme peut aussi être demontré affirmativement ainsi qu'il ensuit.

En la circonference du cercle AB, *dont le centre est* C, *soient pris deux points tels qu'on voudra* A *&* B. *Ie dis que la ligne droite* AB *menée d'un point à l'autre tombe dans iceluy cercle.*

Car soit pris en icelle ligne droite AB *quelconque point comme* D, *entre ses extremes* A *&* B, *puis du centre* C, *soient menées les lignes droites* CA, CD, CB. *D'autant que les deux costez* AC, BC, *du triangle* ACB *sont egaux, les angles* BAC, ABC *seront egaux par la 5. prop. 1. Mais l'angle externe* ADC *est plus grand que l'angle interne* ABC *par la 16. prop. 1. donc le mesme angle* ADC *sera plus grand que l'angle* BAC; *& partant par la 19. prop. 1. le costé* AC *sera plus grand que le costé* CD: *parquoy puis que* CA



est tirée de centre jusques à la circonference, la ligne droite CD *ne parviendra pas jusques à icelle circonference, & par consequent le point* D *tombe dans le cercle. Le mesme sera demontré de tout autre point qu'on voudra prendre en icelle* AB. *Donc toute la ligne droite* AB *tombe dedans le cercle proposé. Ce qu'il faloit prouver.*

COROLLAIRE.

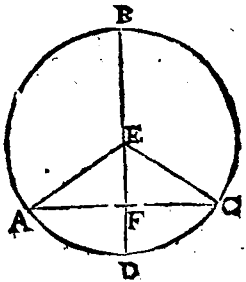
De cecy est manifeste, qu'une ligne droite touchant un cercle, le touche seulement à un point: car si elle le tou-

choit à deux points, la partie de la ligne d'entre iceux points tomberoit dans le cercle par cette proposition, parquoy elle couperoit le cercle, contre l'hypothese.

THEOR. 2. PROP. III.

Si dans le cercle quelque ligne droite passe par le centre, & coupe en deux egalement une autre ligne droite qui ne passe point par le centre; elle la coupera à angles droits: & si elle la coupe à angles droits, elle la coupera aussi en deux egalement.

Au cercle ABCD soit la ligne droite BD, laquelle passant par le centre E, coupe en deux egalement la ligne droite AC, laquelle ne passe point par le centre; Je dis que BD coupe aussi AC en angles droits au point F.



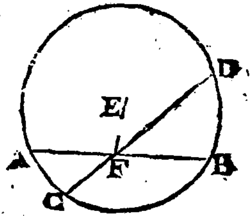
Car étans menées les deux lignes droites CE & AE, les deux triangles AEF, CEF, auront les deux côtez AF, FE, egaux aux deux costez CF, EF, chacun au sien, & la base AE egale à la base EC; & par la 8. prop. 1. les deux angles au point F seront egaux, & partant droits par la 10. def. 1.

Je dis pareillement, que si BD coupe AC à angles droits au point F; qu'elle la coupera aussi en deux egalement. Car les deux angles au point F étans droits ils seront egaux, & l'angle A est egal à l'angle C par la 5. prop. 1. estant AEC triangle Isoscelle, & le costé EF commun aux deux triangles AEF, CEF, & par la 26. prop. 1. AF sera egale à CF. Parquoy si dans le cercle quelque ligne droite passe par le centre, &c. Ce qu'il faloit prouver.

THEOR. 3. PROP. IV.

Si dans le cercle, deux lignes droites ne passans point par le centre, s'entrecoupent; elles ne se couperont pas l'une l'autre en deux egalement.

Au cercle ACBD, duquel le centre est E, soient deux lignes droites AB & CD, s'entrecoupans au point F, & desquelles ny l'une ny l'autre ne passe par le centre E. Je dis que l'une ou l'autre est coupée inegalement. Car du centre E estant menée la ligne EF; si icelles lignes AB, CD s'entrecouppent en deux egalement au point F, la ligne EF les coupera au mesme point aussi en deux egalement, & à droits angles par la pr. prec. & les angles AFE, EFB seront



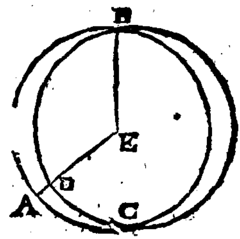
droits, & egaux à CFE, EFD aussi droits, & egaux: ce qui est impossible. n'étant AFE que partie de CFE: ainsi les lignes droites AB, CD ne s'entrecoupoient pas en deux egalement. Parquoy si dans le cercle deux lignes droites ne passant point par le centre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 4. PROP. V.

Si deux cercles se coupent l'un l'autre, ils n'auront pas même centre.

Soient les deux cercles ABC, BCD se coupans l'un l'autre en B & C. Je dis qu'ils ne sçauroient avoir un même centre.

Car s'il est possible, soit leur centre commun E, duquel soient tirées deux lignes droites, sçavoir EB à la section B: Mais EA coupant l'une & l'autre circonference en A & D. Donc puis que E est posé centre du cercle BCD, la ligne droite ED sera egale à la ligne droite EB par la 15. def. 1. Derechef, puis que E est aussi posé centre du

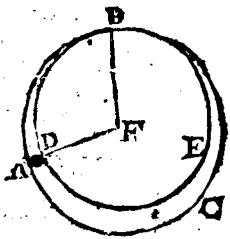


cercle ABC, la ligne droite EA sera aussi egale à la mesme ligné EB, & par la 1. com. sent. ED, EA seront egales entr'elles, la partie au tout; ce qui est impossible : partant les deux cercles ne pouvoient avoir un méme centre. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 5. PROP. VI.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dedans; ils n'auront pas mesme centre.

Soient les deux cercles ABC, & DBE se touchans l'un l'autre au dedans en B. Je dis qu'ils n'auront pas méme centre. Car s'il est possible, soit leur centre commun F, & d'iceluy soient menées les deux lignes FA & FB : sçavoir est FB à l'attouchement B; & FA, coupant l'un & l'autre cercle en D, A. D'autant que F est posé centre du cercle ABC, les lignes droites FA, FB seront egales : derechef, d'autant que F est aussi posé centre du cercle BDE, la ligne FD sera egale à la ligne FB, à laquelle a esté demontré estre aussi egale FA, donc FA, FD seront egales entr'elles; la partie au tout. Ce qui est absurde. Parquoy F ne pouvoit estre centre commun des cercles s'entretouchans interieurement en B. Ce qu'il falloit demontrer.



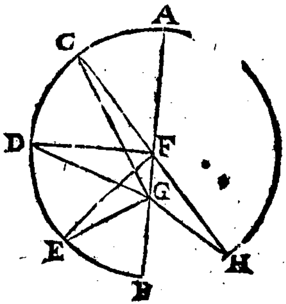
SCHOLIE.

Euclide a proposé ce Thereme des cercles s'entretouchans seulement au dedans, d'autant que des cercles qui se touchent par dehors, il appert assez que leurs centres sont divers : veu qu'un des cercles est dehors l'autre, & le centre est tousjours au milieu de son cercle.

THEOR. 6. PROP. VII.

SI au diametre du cercle l'on prend quelque point qui ne soit pas le centre du cercle, & d'iceluy point tombent quelques lignes droites à la circonference; la plus grande sera celle en laquelle est le cẽtre, & la plus petite celle qui reste: Mais des autres toûjours la plus proche de celle qui est menée par le centre, est plus grande que la plus-éloignée: Et du même point ne peuvent être menées à la circonference que deux lignes droites egales, de part & d'autre de la plus petite.

Au diametre AB du cercle ACDEB, duquel le centre est F, soit pris quelque point G outre le centre; & d'iceluy point G tombent tant qu'on voudra de lignes droites GC, GD, GE, en la circonference. Je dis en premier lieu, que de toutes les lignes menées de G à la circonference; GA en laquelle est le centre, est la plus grande. Car du centre F estans menées à C, D & E, les lignes FC, FD & FE : le triangle GFC aura les deux

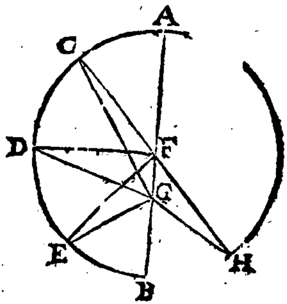


costez GF, FC, plus grands que le costé GC par la 20. pr. 1. Mais les lignes droites GF, FC sont egales aux lignes droites GF, FA, c'est à dire à toute la ligne GA : donc GA sera aussi plus grande que GC. Par mesme raison GA sera aussi plus grande que GD, & que GE : parquoy la ligne GA est la plus grande de toutes celles menées de G à la circonference.

Secondement, ie dis que GB est plus petite que GD, ou autre quelconque : car au triangle DFG, les deux costez DG &

GF, seront plus grands que le troisiéme DF par la 20. prop. 1. ou que son egale BF. Que si on oste la ligne commune GF, le demeurant GD sera plus grand que le demeurant GB. Par méme raison GB, sera aussi plus petite que GE, & que GC, ou autre quelçonque tombant de G à la circonference.

Tiercement, ie dis que GC plus proche de la ligne AG que GD, est plus grande qu'icelle GD: & pour la méme raison GD plus grande que GE, & ainsi des autres s'il y en avoit davantage de tirées de G à la circonference. Car les deux costez GF, FC du triangle GFC, sont egaux aux deux costez GF, FD du triangle GFD, chacun au sien: mais l'angle CFG est plus grand que l'angle DFG, & partant par la 24. p. 1. la base GC sera plus grande que la base GD. Pour méme raison GC sera aussi plus grande que GE: Item GD plus grande qu'icelle GE. Parquoy la ligne la plus proche de celle qui est menée par le centre, est plus grande que celle qui en est plus éloignée.



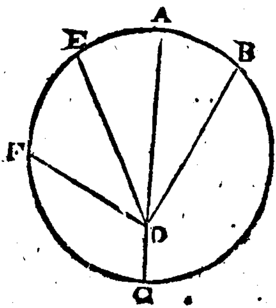
Finalement, ayant fait l'angle BFH egal à l'angle BFE, & tiré GH: ie dis que les lignes GE, GH, sont egales entr'elles, & qu'on n'en peut mener de G à la circonference aucune autre egale à icelles. Car d'autant que les costez EF, FG du triangle EFG, sont egaux aux costez HF, FG du triangle AFG, & les angles EFG, HFG aussi egaux: les lignes GH, GE, qui sont de part & d'autre du diametre, sont egales entr'elles. Et il est evident qu'on ne pourra tirer du point G une autre ligne dans le cercle, qui ne s'aproche ou recule de la ligne BA, tombant de costé ou d'autre de GE, ou GH; & par ce qui a esté montré cy-dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles GE, GH. Donc du point G à la circonference ne se peuvent tirer plus de deux lignes droites qui soient egales entr'elles. Parquoy si au diametre d'un cercle on prend quelconque point qui ne soit pas le centre, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Iaçoit qu'Euclide ait seulement demonstré que des lignes droites tirées de mesme part du diametre, la plus proche de celle tirée par le centre est plus grande que la plus éloignée, toutesfois cela est aussi vray, si elles sont tirées de diverse part: comme si la ligne droite GD est plus proche de GA que la ligne droite GH; icelle GD sera plus grande que GH: car si de la part de GD on fait l'angle BGE egal à l'angle BGH les lignes GE, GH seront egales, attendu qu'elles sont egalement distantes de GA, & le point E tombera entre B & D, puis que GD a esté posée plus proche de GA que GH. Mais par cette prop. GD est plus grande que GE: donc la mesme GD sera aussi plus grande que GH. Quelques Interpretes veulent convertir cette 7. prop. ainsi qu'il ensuit.

Si on prend un point dedans le cercle, & d'iceluy point tombent des lignes droites à la circonference, entre lesquelles soient la plus grande & la plus petite qui puissent étre menées de ce point-là à ladite circonference: mais des restantes, les unes soient inegales, & les autres egales: la plus grande passera par le centre du cercle, & la plus petite sera le reste du diametre: mais des autres les plus grandes seront les plus proches du centre, & les egales en seront egalement distantes.

Au cercle ABC soit pris le point D, duquel tombent en la circonference tant qu'on voudra de lignes droites DA, DB, DC, DE, DF, desquelles DA soit la plus grande qui puisse estre tirée d'iceluy point à ladite circonference, & DC la moindre: mais des autres, DE soit plus grande que DF, & egale à DB. Ie dis premierement que DA passe par le centre du cercle: Car si elle n'y passe, étant tirée



quelque ligne droite de D par ledit centre, elle sera la plus grande de toutes celles tombantes de D par la 7. propos. 3. Ce qui est absurde, puis que DA est posée la plus grande. Donc DA passe par le centre.

En second lieu, ie dis que DC est le reste du diametre, c'est à dire qu'elle est directement à DA: Car autrement icelle DA étant prolongée directement, son prolongement sera autre que DC, & la plus petite ligne qui puisse tomber de D à la circonference, par la 7. prop. 3. Ce qui ne peut estre, puis que DC a esté posée la plus petite: donc DC est l'autre partie du diametre.

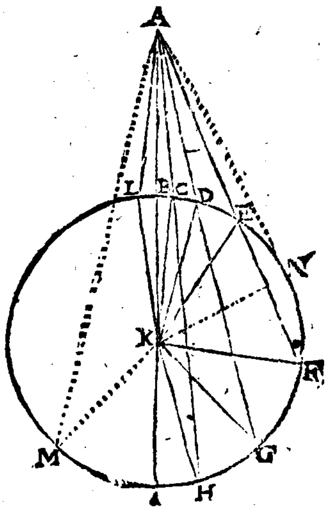
Tiercement, ie dis que DE est plus proche de DA que DF. Car elle n'y pourroit pas estre egalement distante, attendu que par la susdite prop. elles seroient egales, & elles ont esté posées inegales. Mais DE ne peut pas aussi estre plus éloignée de la mesme DA que DF: car elles seroient plus petites qu'icelle DF, par la mesme proposition, & elle a esté posée plus grande.

En dernier lieu, ie dis que DB, DE sont egalement distantes de DA: Car si l'une en estoit plus proche elle seroit plus grande que l'autre par la mesme 7. prop. & elles ont esté posées egales.

THEOR. 7. PROP. VIII.

Si on prend quelque point hors le cercle, & d'iceluy point soient menées quelques lignes droites dans iceluy cercle, desquelles l'une passe par le centre, & les autres où l'on voudra: celle qui passe par le centre sera la plus grande de toutes celles qui seront menées en la circonference concave. Quant aux autres, tousjours la plus proche de celle qui passe par le centre est plus grande que la plus éloignée. Mais de celles qui tombent à la circonference convexe, la plus petite est celle qui est comprise entre le point & le diametre : Quant aux autres, la plus éloignée de la plus petite est plus grande que celle qui en est plus proche : Et d'iceluy point ne peuvent tomber à la circonference que deux lignes droites egales de part & d'autre de la plus petite.

Du point A hors le cercle BCDE, le centre duquel est K, soient menées les lignes droites AF, AG, AH & AI coupans ledit cercle, desquelles lignes AI passe par le centre K, & les autres comment que ce soit. Je dis premierement que AI qui passe par le centre, est la plus grande de toutes icelles lignes tirées à la circonference concave : puis apres, que AH qui est la plus proche d'icelle AI est plus grande que AG, qui en est plus éloignée : Et pour méme raison AG plus grande que AF. Et au contraire, ie dis que AB côprise entre le point A & la circonference convexe, est la plus petite ligne de toutes celles qui sont hors le cercle : puis apres, que la ligne AC plus prochaine de la plus petite AB est moindre que AD, qui en est plus éloignée : et par méme raison icelle AD moindre que AE. Finalement, ie dis que de A, on peut seulement mener deux lignes droites egales de part & d'autre de la plus petite AB.



Car du centre K étans menées aux points C, D, E, F, G, & H, les lignes droites KC, KD, KE, KF, KG & KH ; les deux costez AK, KH, du triangle AKH, sont plus grands que la ligne AH par la 20. pr. 1. Mais les lignes AK, KH sont egales aux lignes AK, KI, c'est à dire à toute la ligne droite AI: icelle AI sera donc aussi plus grande que AH. Pour la même raison AI sera plus grande que AG, & aussi que AF. Parquoy la ligne AI est la plus grande de toutes celles qui tombent du point A dans le cercle.

Puis apres, d'autant que les costez Ak & KH du triangle AKH sont egaux aux costez AK, KG du triangle AkG, chacun au sien, & l'angle AKH plus grand que l'angle AKG; la base AH sera plus grande que la base AG, par la 24. prop. 1. Par même raison AH sera plus grande que AF; item AG plus grāde que la même AF. Parquoy la ligne plus proche de celle qui passe par le centre, est plus grande que celle qui en est plus éloignée.

Derechef, puis qu'au triangle ACK la ligne AK, est moindre que les deux AC, CK; si on ôte les egales BK, CK, demeurera encore AB moindre que AC. Par semblable raison AB sera plus petite que AD, & aussi que AE. Parquoy la ligne AB est la plus petite de toutes celles qui sont menées de A à la circonference convexe.

Derechef, d'autant que dans le triangle ADK tombent deux lignes droites AC, CK, dès extremitez du côté AK, icelles AC, Ck, seront moindres que AD, DK par la 21. prop. 1. desquelles si on ôte les egales CK, DK, restera encore AC moindre que AD. Par même raison on prouvera que AC est moindre que AE: Item AD moindre que la mesme AE. Parquoy la ligne la plus proche de la plus petite AB, est moindre que la plus éloignée.

Finalement, soit fait l'angle AκL egal à l'angle AκC, tirant κL, jusques à ce qu'elle rencontre la peripherie en L, & soit menée la ligne AL. D'autant que les costez Aκ, κC du triangle AκC, sont egaux aux costez Ak, κL du triangle AκL; & les angles AκC, AκL aussi egaux, les lignes droites AC, AL de part & d'autre de la moindre AB, seront egales entr'elles par la 4. prop. 1. Or que nulle autre puisse estre egale à icelles, il est evident; car si on en mene une autre du point A, il faudra qu'elle soit plus proche ou plus éloignée de AB; & par ce qui a été demontré cy-dessus, elle sera plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles AC, AL. Donc du point A tomberont seulement deux lignes droites egales de part & d'autre de la moindre AB. Parquoy si on prend quelque point hors le cercle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

Par même raison de A ne peuvent tomber en la circonference concave que deux lignes droites egales de part & d'autre de la plus grande AI. Car ayant fait l'angle AKM egal à l'angle AKG, & mené AM, les triangles AKM, AKG auront les bases AG, AM egales par la 4. prop. 1. & on ne peut de A mener à ladite circonference concave d'autre ligne egale à icelle AG, AM, attendu qu'elle seroit plus proche ou plus éloignée de AI, & par consequent plus grande ou plus petite qu'icelles, ainsi qu'il appert par ce qui a été demontré cy-dessus.

Il appert aussi que quand l'une des lignes tombantes de A, touche le cercle, comme AN, qu'icelle touchante est plus petite qu'aucune de celles qui tombent en la circonference concave: Car étant tirée du centre à l'attouchement la ligne droite KN, les deux costez AK, KF du triangle AKF, seront egaux aux deux costez AK, KN du triangle AKN, chacun au sien, & l'angle AKF est plus grand que l'angle AKN, & par la 24. pr. 1. la base AF sera plus grande que la base AN: Et par même raison toute autre ligne tombante en la circonference concave sera plus grande qu'icelle AN.

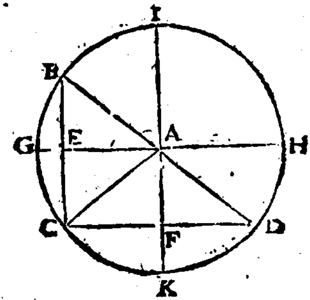
Mais la même ligne touchante AN sera la plus grande de toutes les autres lignes qui tombent de A en la circonference convexe. Car puis que par la 21. prop. 1. les deux costez AE, EK sont moindres que les deux costez AN, NK, si on en oste les lignes egales KE, KN, restera AE moindre que AN; & ainsi des autres.

Au reste ce qu'Euclide a demontré en cette 8. prop. avenir aux lignes menées d'une même part de la plus grande ou plus petite, aviendra encore, les lignes estans menées de diverses parts, c'est à dire, que si AH est plus proche de AI que AM: Icelle AH sera aussi plus grande que ladite AM, jaçoit qu'elles ne soient toutes deux d'une même part: & si AD est plus éloignée de AB que AL, elle sera aussi plus grande qu'icelle AL. Ce qu'on peut demontrer procedant, ainsi qu'au precedent Scholie pour les lignes tirées de diverse part.

THEOR. 8. PROP. IX.

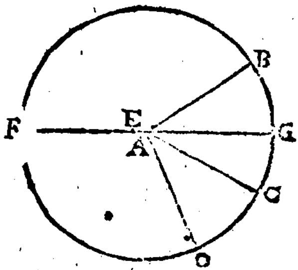
Si on prend quelque point au dedans d'un cercle, & d'iceluy point tombent à la circonference plus de deux lignes droites egales, le point pris est le centre du cercle.

Soit pris le point A au cercle BCD, & d'iceluy point tombent à la circonference les trois lignes droites egales AB, AC, AD. Je dis que le point pris A, est le centre du cercle.



Qu'il ne soit ainsi: soient menées les lignes droites BC & CD, & apres les avoir coupées en deux egalement aux points E & F, d'iceux points au point A, soient menées les deux lignes droites EA, FA, & prolongées de part & d'autre en la circonference. D'autant que les deux triangles BEA & CEA, ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & les bases AB, AC aussi egales, les deux angles au point E seront egaux, & partant droits, & par le Corol. de la 1. prop. de ce livre le centre du cercle sera en ligne droite GAH, puis qu'elle divise la ligne droite BC en deux egalement, & à angles droits en E. Par même discours le centre du cercle se trouvera aussi en la ligne droite KI. Il faut donc que ce soit à leur commune section A, n'y ayant point d'autre point commun. Parquoy si on prend quelque point dedans un cercle, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

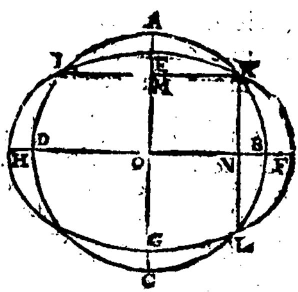
Autrement. Si le point A n'est le centre du cercle, soit iceluy centre au point E, si faire se peut, duquel soit mené par A le diametre FG. D'autant donc qu'au diametre FG, est pris le point A outre le centre, duquel tombent en la circonference les lignes droites AD, AC; icelle AD qui est plus proche de AF tirée par le centre B, sera plus grande que AC par la 7. p. 3. Ce qui est absurde, car icelles AB, AC ont été posées egales. La même absurdité s'ensuivra toûjours si on pose le centre être à un autre point que A: parquoy iceluy point A sera le centre du cercle ABC. Ce qu'il faloit prouver.



THEOR. 9. PROP. X.

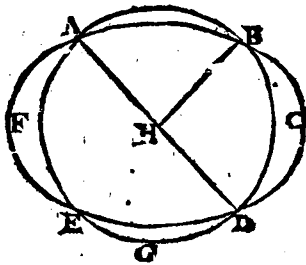
Un cercle ne coupe pas un autre cercle en plus de deux points.

Soient les deux cercles ABCD & EFGH, se coupans aux trois points I, K & L, s'il est possible. Item soient menées les deux lignes droites IK & KL, lesquelles soient coupées en deux egalement aux points M & N par la 10. prop. 1. & soient menées les lignes droites MC, NH, à droits angles sur Ik & KL. Il faudra par le Corol. de la 1. pr. de ce livre que les deux centres des deux cercles soient en la ligne AC; ils seront aussi en la ligne FH: Ce sera donc au point de la commune section O, & en ce faisant les deux cercles auroient même centre contre la 5. prop. de ce livre. Donc les cercles ABCD &



EFGH ne se pouvoient pas couper en plus de deux points; Ce qu'il faloit demontrer.

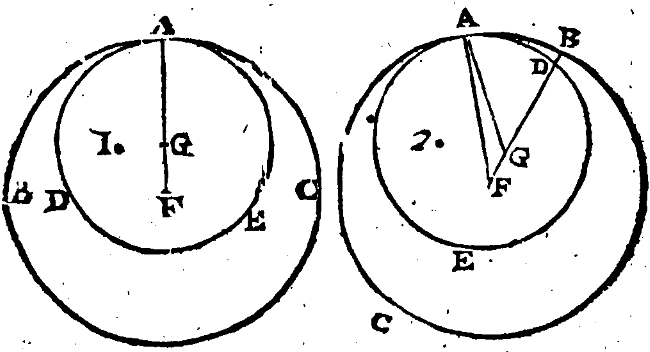
Autrement. Que les deux cercles ABCDEF, & ABDGE se coupent, s'il est possible, en plus de deux points, c'est à sçavoir en A, B, D: & soit trouvé le centre du cercle ABDGE, lequel soit H, & d'iceluy soient menées les lignes droites HA, HB, HD, lesquelles seront egales entr'elles par la defin. du cercle. Et d'autant qu'au cercle ABCDEF on a pris le point H, duquel tombant à la circonference plus de deux lignes egales, iceluy point H sera le centre dudit cercle, par la 9. prop. 3. Mais il est aussi le centre du cercle ABDGE. Donc deux cercles s'entrecoupans ont même centre. Ce qui est absurde.



THEOR. 10. PROP. XI.

Si ayant pris les centres de deux cercles qui se touchent l'un l'autre au dedans, on conjoint iceux centres par une ligne droite; icelle ligne étant prolongée tombera en l'attouchement des cercles.

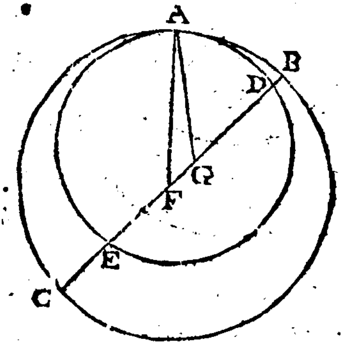
Soient deux cercles ABC & ADE s'entretouchans interieurement au point A, & par la 1. pr. 3. soit trouvé le centre du cercle ABC, lequel soit F; puis que par la 6. pr. 3. deux cercles s'entretouchans au dedans ne peuvent avoir un même centre, F ne sera pas le centre du cercle ADE: Soit donc aussi trouvé son centre, qui soit G. Je dis que la ligne droite menée du centre F au centre G, & prolongée de ce costé là jusques à la circonference du plus grand cercle ABC, tombera au point de l'attouchement A, comme à la premiere figure. Car autrement il faudra qu'elle tombe à quelqu'autre point de ladite circonference, car d'autant que les deux centres F & G sont au dedans du cercle A B C, ladite ligne FG étant conti-



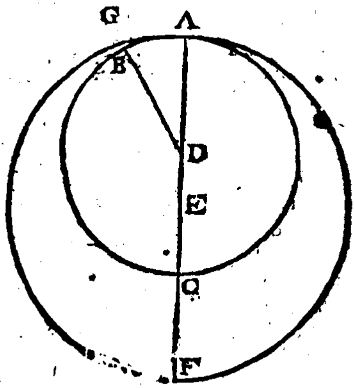
nuée, elle ira necessairement rencontrer la circonference d'iceluy cercle : & si quelqu'un dit que ce n'est pas au point d'atouchement, soit, s'il est possible, à quelconque autre point, comme B en la 2 figure ; tellement que la ligne FGB coupe la circonference du moindre cercle A D E au point D. D'autant donc que les centres F & G, & le point d'atouchement A ne sont pas en une ligne droite, si dudit point A on mene des lignes droites aux deux centres F & G, elles feront un triangle avec la ligne FG, qui est la distance d'un centre à l'autre, lequel triangle soit AFG. Donc puis que par la 20. prop. 1. les deux costez AG, FG dudit triangle AFG, sont plus grands que l'autre costé F A ; & iceluy F A est egal à la ligne F B, (pource que F est le centre du cercle ABC) aussi les lignes AG, GF seront plus grandes que FB : ostant donc FG commune, restera G A, plus grande que GB. Et partant, puis que GA est egale à G D ; (car G est le centre du cercle ADE) G D sera aussi plus grande que GB, la partie que le tout : ce qui est absurde. Donc la ligne droite conjoignant les deux centres des cercles A BC, ADE, & produite, ne tombera pas ailleurs qu'à l'atouchement A. Parquoy si deux cercles se touchent l'un l'autre au dedans, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Candalle, Errard & quelques autres Interpretes demonstrerent cette 11. *prop. ainsi qu'il ensuit. Soient deux circonferences ABC & ADE se touchans interieurement au point A, & de la plus grande ABC, le centre soit F, duquel au point d'attouchement A soit menée la ligne droite AF: Ie dis que le centre de la plus petite circonference ADE est en icelle ligne AF. Autrement qu'il soit hors d'icelle, s'il est possible, comme au point G, & soit conjoint FG, & prolongé de la part de G jusques à ce qu'il coupe les deux circonferences aux points D & B, puis soit menée GA. D'autant que par la* 20. *prop.* 1. *les deux costez* AG, FG *du triangle* AFG *sont plus grands que l'autre costé FA, & iceluy FA est egal à la ligne FB; puis que F est le centre du cercle ABC; aussi* AG, FG *seront plus grandes que FB. Ostant donc* FG *commune, restera* GA *plus grande que* GB; *mais* GA *est egale à GD (car* G *a été posé centre du cercle* ADE.) *Donc aussi* GD *sera plus grande que GB; la partie que le tout; ce qui est absurde. Parquoy le centre de l'autre circonference* ADE *ne sera pas hors la ligne FA: & partant les deux centres des circonferences ABC & ADE seront en ladite ligne FA. Donc la ligne conjoignant iceux centres & prolongée tombera au point d'attouchement A.*



Encore *autrement selon* Pelletier & Billingsley. *Soient deux cercles* ABC, AFG *s'entretouchans au dedans en A, & par la* 1. *pr.* 3. *soit trouvé le centre du cercle ABC, qui soit D, & aussi le centre de A F G, lequel soit* E: *Ie dis que la ligne droite menée du centre* E *à D & prolongée jusques à la circonference du plus grand cercle tombera au* *point de l'atouchement A. Car autrement elle tombera de part ou d'autre d'iceluy atouchement A; qu'elle tombe donc, s'il est possible, à un autre point, comme G: tellement que FEDG soit diametre du grand cercle AGF, & CEDB du petit cercle ABC, & soit tirée DA. D'autant qu'au diametre FEDG, le point D est autre que le centre E, la ligne droite DA sera plus grande que DG par la 7. pr. 3. Mais DB est egale à DA par la def. du cercle: donc DB sera aussi plus grande que DG, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Parquoy la ligne ED prolongée vers A ne pourra tomber ailleurs qu'à iceluy point d'atouchement A.*

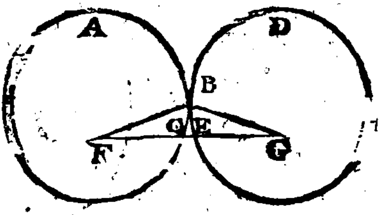


THEOR. 11. PROP. XII.

Si deux cercles se touchent l'un l'autre au dehors, la ligne droite menée d'un centre à l'autre, passera par l'atouchement.

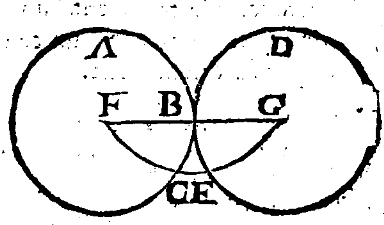
Soient deux cercles ABC, DBE se touchans l'un l'autre au dehors au point B, desquels les centres soient F & G. Je dis que si d'un centre à l'autre on mene une ligne droite, qu'icelle passera par le point d'atouchement B.

Autrement, il s'ensuivra absurdité: car si icelle ligne ne passe par le point d'atouchement B, qu'elle passe ailleurs, s'il est possible, sçavoir aux points C & E, où elle coupe les deux circonferences, & du point d'atouchement B soient menées les deux lignes droites FB, GB, lesquelles par la 20. prop. 1. feront plus grandes que FG, & par la def. du cercle, il s'ensuit que F C, étant egale à F B, & G E à G B, que les deux lignes FC & GE, feront plus grandes que FG, la partie que le tout. La ligne droite menée d'un centre à l'autre, passera donc par l'atouchement B. Parquoy si deux cercles se touchent l'un l'autre au dehors, &c. Ce qu'il faloit demontrer.



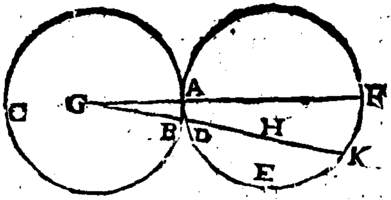
SCHOLIE.

*D'autant qu'en cette demonstration d'*Euclide*, les centres ne demeurent en leurs vrayes places, & que cela pourroit peut-être causer quelque doute, Oronce & Schubelius en ont ajouté une autre où les centres retiennent leurs places, laquelle est telle. Que les cercles ABC, DBE s'entretouchent au dehors en B, & d'iceux les centres soient* F *&* G*: Ie dis que la ligne droite menée d'un centre à l'autre passera par le point d'atouchement B, c'est à dire que si on mene à iceluy point B les lignes droites* FB, GB, *elles feront une seule ligne droite* FBG. *Car autrement elles feront un angle à iceluy point B, & de F à G on pourra mener une ligne droite, laquelle soit (s'il est possible) FCEG, qui coupe les circonferences en C & E. Donc icelle ligne droite FCEG constituera un triangle avec les*



deux lignes FB, GB; puis qu'on a posé qu'elles s'in linent & font angle au point B: & par la 20. p. 1. icelles FB, GB sont plus grandes que FCEG: Mais par la def. du cercle FC est egale à FB, & GE à GB: donc FC & GE seront aussi plus grandes que la même FCEG, la partie que le tout; (car icelle FCEG outre FC; GE contient encore la ligne droite CE,) Ce qui est absurde.

Pelletier, & apres luy Billingsley demontrent encore cette 12. pr. ainsi. Soient les deux cercles ABC & DEF qui s'entretouchent par dehors au point A; & que G soit le centre du cercle ABC, duquel soit tirée par l'atouchement des cercles, la ligne droite GA jusques à ce qu'elle rencontre la circonference DEF au point F: Ie dis que le centre du cercle ADE est en icelle ligne droite GAF. Autrement qu'il soit hors d'icelle, s'il est possible, comme au point H, & du centre G à iceluy centre H soit tirée la ligne droite GHK jusques à ce qu'elle rencontre la circonference en K, coupant la periphere ABC en B, & la circonference ADE en D. D'autant que du point G, qui est hors le

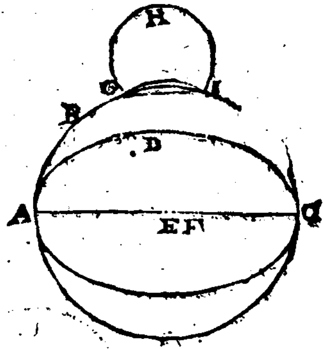


cercle ADE, sont tirées à iceluy cercle les deux lignes droites GK, GF, desquelles GK passe par le centre H, par la 8. pr. 3. la partie exterieure GD sera moindre que GA partie exterieure de GF. Mais AG est egale à GB par la def. du cercle: donc aussi GD sera moindre que GB, le tout que la partie: ce qui est absurde. Donc le centre du cercle ADE ne sera pas hors la ligne GAF, & partant les deux centres des cercles ABC, & ADE seront en icelle ligne GF; parquoy la ligne conjoignant iceux centres passera par l'atouchement des cercles.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Un cercle ne touche point un autre cercle à plus d'un point, tant dehors que dedans.

Soient les deux cercles ABC, & ADC se touchans interieurement aux deux points A & C, s'il est possible : & d'autant qu'ils ne peuvent avoir un même centre par la 6. pr. de ce livre, soient les deux centres divers E & F, par lesquels étant tirée la ligne droite EF, & produite de part & d'autre, il faut qu'elle tombe és points d'atouchement A & C par la 11. pr. de ce mesme livre : & par la def. du cercle, il faut que les lignes droites EA & EC soient egales. Item FA & FC. Mais FA est plus grande que EA. Partant FC sera aussi plus grande que EC, la partie que le tout : ce qui est impossible. Donc les deux cercles ne se toucheront point en deux points au dedans.

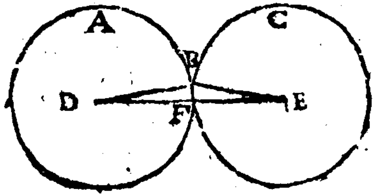


Pareillement, il est impossible qu'ils se touchent exterieurement à plus d'un point : car si le cercle GHI pouvoit toucher en dehors le cercle ABC en deux points, comme G & I, il faudroit que la ligne droite GI menée par lesdits deux points tombast dedans l'une & l'autre cercle par la 2. pr. 3. ce qui est impossible : car icelle ligne droite GI tombant dedans le cercle ABC, elle ne peut pas tomber dedans le cercle GHI, puis qu'iceluy est tout dehors ABC. Parquoy les cercles ne se touchent point à plus d'un point, tant dehors que dedans. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Cette 2. partie est encore demontrée par plusieurs Interpretes ainsi. Que les deux cercles AB & CB, dont les centres sont D & E, s'entretouchent par dehors au point F : Ie dis qu'ils ne se peuvent toucher à un autre point. Car ayant mené du centre D au centre E la ligne droite DE, elle passera par ledit atouchement F par la prece-

dente prop. & si les cercles se touchoient encore à un autre point, comme B, la ligne droite menée d'un centre à l'autre passeroit aussi par iceluy atouchement B; & par ainsi les deux lignes



droites DFE, DBE encloirraient une superficie, ce qui est impossible.

Clavius demontre en ce lieu le Theoreme suivant.

Si au demy diametre d'un cercle produit, on prend un point outre le centre, le cercle décrit d'iceluy point comme centre, par le point extréme du demy diametre, touchera le premier cercle en iceluy point extréme du semy-diametre, & tombera tout dehors le même cercle.

Soit le cercle ABC, (voyez la derniere figure de la page 182.) duquel le centre est D, & au demy diametre AD prolongé, soit pris quelconque point comme E, duquel & de l'intervalle EA soit décrit le cercle AFG, lequel je dis toucher le cercle ABC au seul point A. Car ou le point E est dans le cercle ABC, ou dehors. S'il est dedans: d'autant que AE est plus grand que AD, c'est à dire que DC, & à plus forte raison que EC; la ligne EF qui est egale à EA sera aussi plus grande que EC: & partant le point F est hors le cercle ABC: & le cercle AFG hors le même cercle prés du point F. Iceluy point F tombera beaucoup davantage hors le cercle ABC, si E est hors le même cercle ABC. Si donc le cercle AFG ne tombe tout dehors le cercle ABC, tellement qu'il le touche au seul point A, que le cercle AFG coupe ou touche le cercle ABC, en un autre point B, si faire se peut, & soit tirée la ligne DB. Vû donc qu'au diametre du cercle AFG est pris le point D, outre le centre E, la ligne DA sera la plus petite de toutes les lignes droites tom-

bantes de D à la circonferenee, par la 7. prop. 3. Donc DA est moindre que DB, ce qui est absurde; car DA, DB tombant du centre D en la circonference d'un même cercle ABC, sont egales. Donc le cercle AFG ne coupe ou touche le cercle ABC en un autre point que A, mais tombe tout dehors iceluy: ce qui étoit proposé.

Que si au semy-diametre non produit, on prend un point outre le centre, le cercle décrit d'iceluy point comme centre, par le point extréme du semy-diametre touchera pareillement le premier cercle au susdit point extréme du demy-diametre, & tombera tout dedans le même cercle. Comme si au semy-diametre AE, du cercle AFG, on prend le point D, duquel & de l'intervale DA, on décrive le cercle ABC, iceluy tombera totalement dedans AFG, & le touchera au seul point A. Car puis qu'il a été demontré cy-dessus que le cercle AFG tombe tout dehors le cercle ABC, pareillement tout cétui-ci tombera dedans celui-là. tellement qu'ils s'entretouchent au seul point A; & par ainsi apert ce qui étoit proposé.

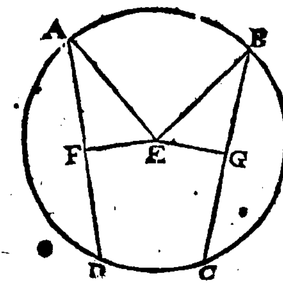
THEOR. 15. PROP. XIV.

Dans le cercle, les lignes droites egales, sont egalement distantes du centre; & les egalement distantes du centre sont egales entr'elles.

Au cercle ABCD, duquel le centre est E, soient deux lignes droites egales AD & BC. Je dis qu'elles seront egalement distantes du centre E.

Qu'ainsi ne soit, par la 12. prop. 1. du centre E soient menées les deux lignes EF, EG, perpendiculaires aux deux lignes droites AD, BC: puis soient tirées les deux lignes AE & BE. Or les deux lignes droites AD & BC, étans coupées en angles droits par les perpendiculaires EF & EG, elles seront aussi coupées en deux egalement par la 3. p. 3. & puis qu'icelles AD, BC sont posées egales, la moitié AF sera egale à la moitié BG. Pareillement AE étant egale à BE par la def. d: cercle. le quarré de AE sera egal au quarré de BE. Mais iceluy quarré de AE est egal aux deux quarrez de

AF, FE, par la 47. prop. 1. & le quarré de BE est egal aux deux quarrez de BG, GE. Donc les deux quarrez de AF, FE seront egaux aux deux quarrez de BG, GE. Mais puis que les lignes AF, BG sont egales, le quarré de AF est egal au quarré de BG, & par consequent le quarré de FE, est egal au quarré de GE. Parquoy la ligne FE sera egale à la ligne GE, & par la 4. def. du 3. AD & BC seront egalement distantes du centre E.



Quant à la seconde partie. Je dis que si AD, BC sont egalement distantes du centre E, qu'elles seront egales entr'elles : car ayant construit, comme dessus, les perpendiculaires EF & EG seront egales par la 4. def. de ce liv. & couperont AD, BC en deux egalement par la 3. pr. de ce même liv. & par deduction de la 47. p. 1. comme cy-dessus, AF se trouvera egale à BG, & par consequent aussi leurs doubles AD & BC seront egales entr'elles. Si donc au cercle les lignes droites egales, &c. Ce qui étoit à demontrer.

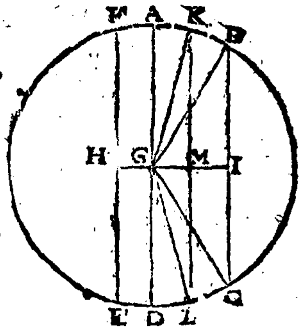
THEOR. 14. PROP. XV.

Dans le cercle, la plus grande ligne est le diametre : quant aux autres toûjours la plus proche du centre est plus grande que la plus éloignée.

Au cercle ABCDEF, duquel le centre est G soit le diametre AD, & la ligne FE la plus proche d'iceluy. mais BC la plus éloignée. Je dis que de toutes ces lignes AD est la plus grande, & que FE est plus grande que BC.

Car soient tirées du centre G les lignes droites GH, GI perpendiculaires aux lignes droites FE, BC : & pource que BC est plus éloignée du centre que FE ; la perpendiculaire

GI sera plus grande que GH, par la 4. def. de ce Livre. Soit donc coupé d'icelle GI, la ligne GM egale à GH, & par M soit menée KML perpendiculaire à GI, & soient tirées les lignes GK, GB, GC, GL. Donc puis que les perpendiculaires GM, GH sont egales, les lignes droites KL, FE seront egalemẽt distantes du centre par la 4. def. de ce Livre, & partant egales entr'elles par la prop. precedente. Derechef, puis que GK, GL, sont plus grandes que KL par la 20. prop. 1. & icelles GK, GL sont egales au diametre AD; iceluy diametre AD sera aussi plus grand que KL ou FE. Par mesme raison on demontrera que AD est plus grande que toutes les autres lignes.



Item, d'autant qu'aux triangles GKL & GBC, les costez GK, GL, GB, GC sont egaux par la definition du cercle, & l'angle GKL est plus grand que l'angle BGC, par la 24. prop. 1. la base KL, ou son egale FE, sera plus grande que la base BC, & ainsi des autres. Parquoy dans le cercle la plus grande ligne est le diametre, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

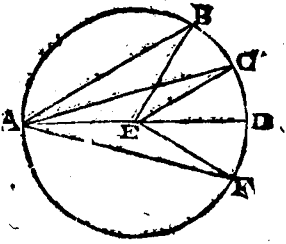
SCHOLIE.

Clavius demonstre icy le Theoreme suivant pris de Commandin.

Si en la circonference du cercle on prend un point, & d'iceluy l'on mene quelque ligne droite au cercle, l'une desquelles passe par le centre, & les autres où l'on voudra: celle qui passe par le centre sera la plus grande de toutes: mais des autres les plus proches de celle-là qui passe par le centre seront plus grandes que les plus éloignées: & n'y en peut avoir que deux egales de part & d'autre de la plus grande.

En la circonference du cercle AB, CD soit pris le point

A, & d'iceluy soient menées plusieurs lignes droites AB, AC, AD, desquelles AD passe par le centre E: ie dis que AD est la plus grande de toutes, & AC estre plus grande que AB, qui est plus éloignée d'icelle AD. Car estans menées les lignes BE, CE; au triangle AEC les deux costez AE, EC seront plus grands que le costé AC par la 20. pr. I. Mais icelles lignes AE, EC sont egales



aux lignes droites AE, ED, c'est à dire à la ligne droite AD. Donc icelle AD sera plus grande que AC: & par mesme raison elle sera aussi plus grande que AB, & ainsi des autres.

En apres, d'autant qu'au triangle AEC les deux costez AE, EC sont egaux aux deux costez AE, EB du triangle AEB, chacun au sien, & tout l'angle AEC plus grand que l'angle AEB, la base AC sera plus grande que la base AB par la 24. propos. I. Et par mesme raison AC sera plus grande que toute autre ligne plus éloignée du centre E.

En 3. lieu: ie dis que du point A on ne peut mener au cercle que deux lignes droites egales entr'elles de part & d'autre de la plus grande AD. Car ayant fait l'angle AEF egal à l'angle AEC, & joint AF, les deux costez AE, EC seront egaux aux deux costez AF, EF, & les angles AEC, AEF, contenus d'iceux costez, aussi egaux, & par la 4. prop. I. les bases AC, AF sont egales: & il est evident que du mesme point A on ne peut tirer dans le cercle une autre ligne, qui ne s'aproche ou éloigné de AD; & partant plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles AC, AF. Donc du point A ne se peuvent tirer dans le cercle que deux lignes droites egales entr'elles.

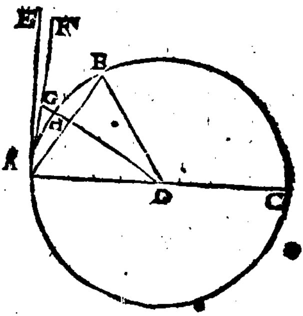
Que si de AB, AF, tirées de diverses parts du diametre AD, on dit que AF est plus proche d'iceluy diametre AD, on demontrera, comme au Scholie de la 7.

prop. de ce livre, que ladite AF est plus grande que AB.

THEOR. 15. PROP. XVI.

Si à l'extremité du diametre d'un cercle, on leve une ligne perpendiculaire, elle tombera hors le cercle: & entre icelle perpendiculaire & la circonference ne tombera pas une autre ligne droite, & l'angle du demy cercle est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & celuy qui reste plus petit.

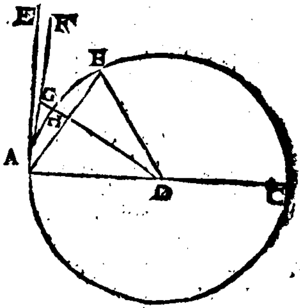
Du cercle ABC, soit le centre D, & le diametre AC, sur l'extremité duquel A, soit levée la ligne perpendiculaire AE, par la 11. prop. 1. Je dis premierement qu'icelle ligne AE tombe hors le cercle.



Car si elle tomboit dans iceluy, ainsi que AB, étant tirée DB, les deux angles DAB, DBA, seront egaux par la 5. prop. 1. Mais DAB est droit par la construction: donc DBA sera aussi droit: ce qui est absurde, puis que par la 17. prop. 1. deux angles d'un triangle sont moindres que deux droits. Donc la perpendiculaire ne tombera pas dans le cercle. Pour la méme raison elle ne tombera pas aussi en la circonference, mais dehors, comme est AE.

Maintenant, ie dis que de A ne peut tomber entre la perpendiculaire AE, & la circonference AB une autre ligne droite. Car s'il est possible que quelque ligne droite y tombe, comme AF, de D soit menée sur icelle la perpendiculaire DG, coupant la circonference en H, laquelle tombera necessairement de la part de l'angle aigu DAF par le Corol. de la 17. prop. 1. Veu donc qu'au triangle DAG, les deux angles DAG, DGA, sont

sont moindres que deux droits par la 17. prop. 1. & par la construction DGA est droit, l'angle D A G sera moindre qu'un droit, & partant la ligne D A, ou son egale D H, sera plus grande que DG, par la 19. pr. 1. la partie que le tout : ce qui est absurde. Entre la perpendiculaire AE, & la circonference AB ne tombera donc pas une autre ligne droite.



Je dis finalement, que tout l'angle du demy cercle BAC contenu du diametre AC, & de la circonference AB, est plus grand que tout angle rectiligne aigu, & que celuy qui reste BAE contenu de la ligne droite AE, & de la circonference AB est plus petit que tout angle rectiligne aigu. Car puis que CAE est angle droit divisé par la seule circonference AB, & qu'entre icelle circonference AB & la ligne droite A E, ne peut tomber une autre ligne droite; l'angle B A E ne peut estre divisé par aucune ligne droite, & par ainsi ne sera diminuë par aucune ligne droite, ny par consequent l'angle B A C ne sera augmenté par aucune ligne droite. Si donc à l'extremité du diametre d'un cercle on leve une perpendiculaire, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

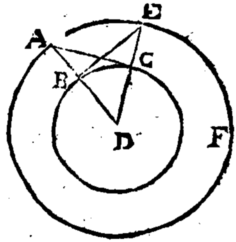
COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste qu'une ligne droite tirée perpendiculairement de l'extremité du diametre, touche le cercle en un seul point. Car il a esté demontré qu'elle tombe hors le cercle : & partant elle le touche seulement au point extréme du diametre. Parquoy s'il étoit requis tirer une ligne droite par le point A donné en la circonference du cercle, laquelle touchast le cercle en A nous tirerions de A au centre D *la ligne droite A*D*, & sur icelle seroit élevée la perpendiculaire AE, laquelle toucheroit le cercle en A, comme il a été demontré.*

PROBL. 2. PROP. XVII.

D'un point donné, mener une ligne droite qui touche un cercle donné.

Soit le point donné A, duquel il faut mener une ligne droite qui touche le cercle donné BC, dont le centre est D.



Soit menée la ligne AD coupant le cercle BC en B : puis du centre D, & intervalle DA, soit décrit le cercle AEF : Et apres avoir levé au bout du demy diametre BD la perpendiculaire BE par la 11. p. 1. laquelle coupe la circonference AEF en E, soit menée la ligne ED coupant le cercle BC au point C, & du point donné A, à iceluy point C, soit menée la ligne AC: ie dis qu'elle touche le cercle donné BC au point C.

Car les deux triangles ACD & EBD ayans deux costez egaux, & l'angle D commun, la base AC sera egale à la base EB, & l'angle droit ACD egal à l'angle EBD, qui sera aussi droit. Et par le Corol. de la preced. prop. la ligne AC touchera le cercle BC au seul point C. Nous avons donc du point donné A mené la ligne droite AC, qui touche le cercle donné au point C. Ce qu'il falloit demontrer.

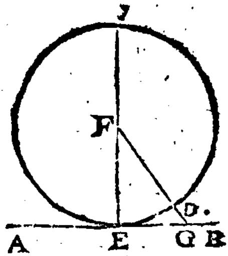
SCHOLIE.

La pratique de cette prop. est aisée à entendre par la construction d'icelle : mais nous avons enseigné en nôtre Geometrie pratique, Prob. 20. une autre maniere beaucoup plus facile, laquelle nous rapporterons encore à la 32. prop. de ce livre.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si une ligne droite touche un cercle : & du centre à l'atouchement on mene une ligne droite, elle sera perpendiculaire à la touchante.

Soit la ligne droite AB touchant le cercle CDE, au point E, & d'iceluy point d'atouchement soit menée la ligne droite EC passant par le centre F. Ie dis qu'elle sera perpendiculaire à AB.



Car si elle ne l'est, soit menée FG perpendiculaire à AB, coupant la circonference en D. Veu donc qu'au triangle EFG les deux angles FEG, FGE sont moindres que deux droits, par la 17. prop. 1. & FGE est droit par la construction FEG sera moindre qu'un droit, & par la 10. p. 1. la ligne FE, ou FD son egale sera plus grande que FG, la partie que le tout: ce qui est absurde. Donc FE est perpendiculaire à AB. Parquoy si une ligne droite touche un cercle, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

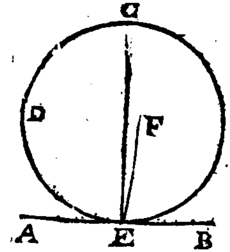
SCHOLIE.

Clavius démontre encore cette prop. ainsi. Si EC n'est perpendiculaire à AB, l'un des angles qu'elle fait au point E sera obtus, & l'autre aigu. Soit donc CEB aigu. ; & veu qu'il est plus grand que l'angle du demy cercle CED, *l'angle du demy cercle sera plus petit que quelque angle rectiligne aigu : ce qui est contre la 16. pr. 3. & partant absurde.*

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si une ligne droite touche un cercle, & au point de l'attouchement est levée une perpendiculaire ; en icelle sera le centre du cercle.

Soit la ligne droite AB, touchant le cercle CDE au point E: & d'iceluy soit levée E C perpendiculaire à A B. Je dis que le centre du cercle sera dans icelle ligne perpendiculaire E C.

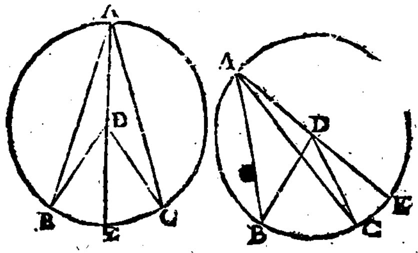


Autrement, il sera dehors icelle ligne; soit donc au point F, s'il est possible, & d'iceluy point soit menée la ligne droite E F au point de l'attouchement E; icelle ligne E F sera aussi perpendiculaire à AB par la prec. prop. ce qui est impossible: car les deux angles A E C, A E F seroient droits & egaux, la partie au tout: partant le centre du cercle n'estoit pas hors la ligne E C, ains dedans Si donc une ligne droite touche un cercle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 18. PROP. XX.

Au cercle, l'angle du centre est double de l'angle de la circonference, quand iceux angles ont une même circonference pour base.

Au cercle ABC, duquel le centre est D, soient constituez



les deux angles BAC & BDC, sçavoir BAC en la circonferenne, & B D C au centre, ayant pour base une mesme circonference B C. Je dis que l'angle B D C sera double de l'angle B A C.

Car premierement, si les lignes droites A B, A C enclosent les lignes DB, DC, comme en la premiere figure; étant menée par le centre D la ligne droite A D E, & les lignes D A, DB & DC, étans egales, les deux triangles A D B & A D C seront Isosceles, & par la 5. pr. 1. ils auront les angles egaux sur les bases A B & A C. Mais l'angle exterieur BDE par la 32. p. 1. est egal aux deux angles interieurs D A B & D B A, qui sont egaux : partant il sera double du seul D A B : par mesme discours EDC se trouvera aussi double de D A C, & par consequent les deux ensemble B D C seront doubles des deux ensemble B A C.

Que si l'angle de la circonference B A C est comme en la seconde figure, il s'ensuivra toûjours le mesme, sçavoir que l'angle B D C sera double de l'angle B A C.

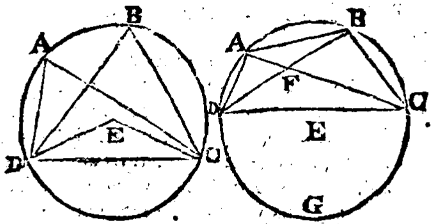
Car apres avoir mené par le centre D la ligne A D E, par la 32. pr. 1. l'angle exterieur BDE sera egal aux deux opposez interieurs A B D, D A B, & double du seul D A B, le triangle étant Isoscele : par mesme discours CDE sera double de C A D, & par la 20. com. sent. si de BDE double de B A B on ôte CDE, double de C A E, le demeurant BDC sera double du demeurant B A C. Parquoy au cercle, l'angle du centre est double de l'angle de la circonference, &c. Ce qu'il faloit prouver.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Au cercle, les angles qui sont en une même portion, sont egaux entr'eux.

Toute portion de cercle, est ou plus grande, ou plus petite que le demy cercle. Soit donc premierement au cercle A B C D, le centre duquel est E, une plus grande portion D A B C, en laquelle soient les angles DAC & DBC. Je dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Car si du centre E on mene les deux lignes ED & EC, l'angle du centre DEC sera double de l'angle en la circonference DAC par la prop. prec. & par la même prop. il sera aussi double de l'autre angle D B C. Mais les choses qui sont moitié d'une même, sont



egales entr'elles : Donc aussi les angles A & B seront egaux entr'eux.

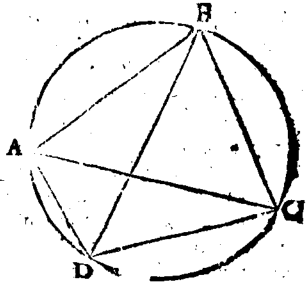
Soit maintenant une portion plus petite que le demy cercle, comme en la 2. figure. Je dis que les deux angles DAC, DBC, étans en la mesme portion DABC sont egaux.

Car si on mene la ligne droite AB, il se fera une portion BGA, plus grande que le demy cercle ; & comme nous avons demontré cy-dessus, les deux angles ADB & BCA, qui sont en une mesme portion AGB, seront egaux : pareillement aux deux triangles DAF & CBF, les angles opposez au point F sont egaux par la 15. pr. 1. & par ce qui a été demontré à la 32. pr. 1. le troisiéme angle DAF sera egal au troisiéme angle CBF. Donc au cercle, les angles qui sont, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Les figures de quatre côtez inscrites au cercle, ont les angles opposez egaux à deux angles droits.

Soit le cercle ABCD, auquel soit inscrite la figure de quatre côtez ABCD. Je dis que les angles opposez ABC, ADC; item BAD, BCD, sont egaux à deux droits. Car si on mene les deux diagonales AC & BD, les deux angles ACD & ABD, étans en une mesme portion ABCD, seront egaux par la pr. prec. Pareillement les deux angles DBC & CAD, étans en une mesme portion DABC, seront egaux ; donc les deux angles sous le point B, seront egaux aux deux DAC & DCA, lesquels avec les deux du point D, sont egaux à



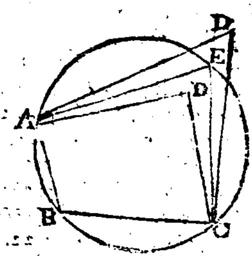
deux droits par la 32. pr. 1. partant aussi les deux sous le point B avec les deux sous le point D : c'est à dire le total ABC, avec le total ADC, seront egaux à deux droits. Nous demontrerons en la mesme maniere que les deux angles BAD, BCD, sont egaux à deux droits. Car derechef les deux angles ABD, ACD, sont egaux. Item les deux BCA, BDA; & partant tout l'angle BCD sera egal aux deux ABD, ADB, lesquels avec BAD sont egaux à deux droits par la 32. p. 1. Donc aussi les deux BCD, BAD, seront egaux à deux droits. Parquoy les figures de quatre costez inscriptes au cercle, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

La converse de cette 22. prop. peut être demontrée ainsi qu'il ensuit.

Si deux angles opposez d'un quadrilatere sont egaux à deux droits, le cercle décrit par trois angles d'iceluy passera aussi par le quatriéme angle.

Au quadrilatere ABCD, les deux angles opposez B & D soient egaux à deux droits, & par les trois angles A, B, C, soit décrit un cercle : Ie dis qu'il passera aussi par le 4 angle D. Car s'il n'y passe, il passera ou au deçà de D, ou au delà. Soient donc tirées les deux lignes droites AE, CE, en telle sorte que ne coupant les lignes droites CD, AD, elles constituent au cercle un quadrilatere ABCE. Donc par la 22. pr. 3. les deux angles opposez B, E sont egaux à deux droits: Mais par l'hypothese les deux angles B & D, sont aussi egaux à deux droits; & partant les deux angles B & E

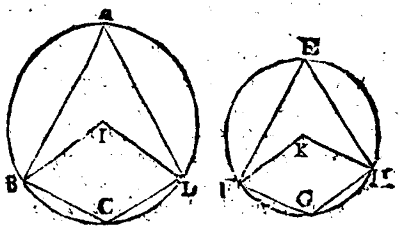


seront egaux aux deux B *&* *D*. *Parquoy en ôtant l'angle commun* B; *resteront les angles* D *&* E *egaux* : *Ce qui est absurde, car étant tirée la ligne droite* *CA*, *l'angle* *D* *sera plus grand que l'angle* E *par la* 21. *pr.* 1. *ou au contraire l'angle* E *sera plus grand que l'angle* *D*. *Le cercle passera donc par le point* *D*.

Nous demontrerons encore icy quatre theoremes non seulement utils aux choses Geometriques, mais aussi necessaires aux Astronomiques.

1. Aux cercles, les angles qui s'apuyent sur arcs semblables sont egaux entr'eux, soit qu'ils soient constituez aux centres ou aux circonferences : & au contraire, les arcs ausquels s'apuyent angles egaux constituez aux centres ou aux circonferences, sont semblables.

Aux cercles *ABCD*, *EFGH*, *desquels les centres* *I* *&* *K*, *soient premierement les arcs semblables* *BCD*, *FGH*, *ausquels insistent & s'apuyent les angles* *I* *&* *K* *aux centres; & les angles* *A* *&* E *aux circonferences. Ie dis que tant ces deux là, que ces deux-cy sont egaux entr'eux. Car étans constituez en iceux arcs les angles* *C*, *G*, *qui par la* 10. *d.* 3. *seront egaux: & par la* 22. *p.* 3. *tant les deux angles* *C*, *A*, *que les deux* *G*, E, *sont*



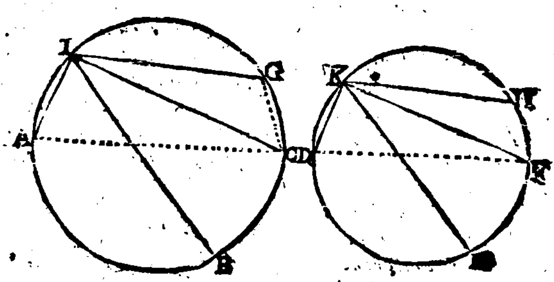
egaux à deux droits. Otant donc les egaux *C*, G, *les restans* *A*, E *seront aussi egaux* : *Mais d'iceux sont doubles les angles* *I*, *K*, *par la* 20. *prop.* 3. *& par consequent ils sont aussi egaux. Ce qui étoit proposé.*

Secondement, soient egaux tant les angles *I*, K, *que* A, E, *lesquels s'apuyent sur les arcs* *BCD*, *FGH* : *Ie dis qu'iceux arcs* BCD, *FGH* *sont semblables. Car* A *&* E *sont egaux, & par la* 22. *prop.* 3. *tant les deux angles* A *&* *C* *que les deux* E *&* *G* *sont egaux à deux droits, les deux autres* *C* *&* *G* *seront aussi egaux; & partant les arcs*

BCD, FGH, ausquels insistent les angles A, E *aux circonferences, seront semblables par la* 10. *d.* 3. *Mais si les angles I & K aux centres sont egaux, leurs moitiez A & E, seront aussi egales. Parquoy comme dessus, les arcs BCD, FGH sont semblables. Ce qu'il faloit demonstrer.*

2. Si aux demy cercles, ou autres segmens semblables, l'on ajoûte des segmens semblables; les totals segmens seront aussi semblables: & si des cercles, demy cercles, ou autres segmens semblables, on oste des segmens semblables; les segmens restans seront aussi semblables.

Aux cercles, ABC, DEF, *soient les segmens ou arcs semblables* ABC, *DEF qui soient demy cercles ou non, & à iceux soient ajoûtez les arcs semblables* CG, *FH: Je dis que tout l'arc* ABG *est semblable à tout l'arc DEH. Car étans pris aux arcs restans les deux points I,* K, *comme on voudra, soient menées les lignes droites* AI, *CI, GI:* DK, Fk, HK. *D'autant que les arcs ABC, DEF sont semblables, les angles AIC, DKF, seront*



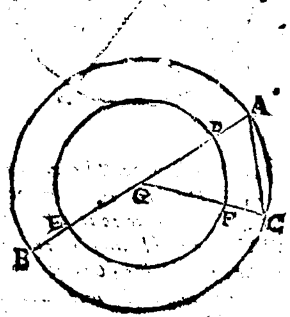
egaux par le prec. Theor. Et par mesme raison les angles CIG, FkH seront aussi egaux, à cause des arcs semblables CG, FH. *Donc tout l'angle* AIG *sera egal à tout l'angle D*KH*: & par le mesme theor. prec. les arcs* ABG, DEH *seront semblables: Ce qui étoit proposé.*

Maintenant, que des segmens ou arcs semblables ABC, DEF, *soient retranchez les arcs semblables* AB, DE. Ie dis que les arcs restans BC: EF, sont aussi semblables. Car estans pris derechef les deux points I, K, aux peripheres restantes des arcs donnez soient menées les lignes droites AI, BI, CI : DK, EK, FK. Donc puis que tout l'arc ABC est semblable à tout l'arc DEF, tout l'angle AIC sera egal à tout l'angle DKF par le prec. theor. Et par mesme raison l'angle retranché AIB sera egal à l'angle retranché DKE, à cause des arcs semblables AB, DE: donc aussi l'angle restant BIC sera egal à l'angle restant EKF ; & consequemment les arcs BC, EF, seront semblables. Ce qu'il faloit demontrer.

Que si des cercles entiers on oste les segmens semblables IAC, KDF, les segmens restans CGI, FHK seront aussi semblables. Car ayant pris aux arcs d'iceux segmens les points A, G, D, H, soient menées les lignes droi- IA, CA, IG, CG : KD, FD, KH, FH. D'autant que les segmens IAC, KDF sont semblables, les angles IAC, KDF seront egaux par la 10. def. 3. Et puis que par la 22. prop. 3. tant les deux angles opposez A, G, que les deux D, H, sont egaux à deux droits ; en ostant les deux angles egaux A & D, les deux restans G & H seront aussi egaux, & partant les segmens IGC, KHF seront semblables par la mesme def. Ce qui estoit proposé.

3. Si deux ou plusieurs cercles sont décrits d'un mesme centre, & d'iceluy soient menées deux ou davantage de lignes droites, qui coupent les circonferences ; les arcs compris entre deux quelconques d'icelles lignes, seront semblables.

Soient deux cercles ABC, DEF, décrits d'un mesme centre G, duquel soient menées les deux lignes droites GB, GC, qui coupent les circonferences en B, C, & E, F : Ie dis que les arcs EF, BC, sont semblables. Car estant prolongée la ligne BG iusques en A, & tirées les lignes droites AC, DF, l'angle G constitué au centre sera double de chacun des angles A, D,

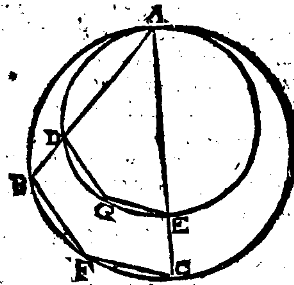


en la circonference par la 20. *prop.* 3. *Donc par le* 1. *de ces theor. les arcs* BC, EF, *sur lesquels ils s'apuyent seront semblables. Ce qui estoit proposé.*

Autrement. *D'autant que sur les arcs* EF, BC *s'apuyent angles egaux au centre; ou plûtost un seul & mesme angle* BGC; *iceux arcs* EF, BC *seront semblables par le theor. susdit.*

4. Si deux ou davantage de cercles s'entretouchent au dedans, & du point d'atouchement soient tirées deux ou davantage de lignes droites qui coupent les cercles; les arcs compris entre deux quelconques d'icelles lignes seront semblables; comme aussi les arcs compris entre le point d'atouchement, & laquelle on voudra d'icelles lignes.

Que les deux cercles ABC, ADE *s'entretouchent au dedans au point* A, *duquel soient menées les deux lignes droites* AB, AC, *qui coupent les cercles en* B, C, *&* D, E: *Ie dis que tant les arcs* BC, DE, *que* AB, AD: & ACB, AED *sont semblables. Car ayant pris les deux points* F, G, *& tiré les lignes droites,* BF, CF, DG, EG; *les deux angles* DAE, DGE, *seront egaux aux deux angles* BAC, BFC, *attendu que tant ces deux-là, que ces deux cy sont egaux à deux droits par la* 22. *pr.* 3. *& partant l'angle commun* BAC *estant osté, les deux autres angles* DGE, BFC *demeureront egaux: & par la* 10. *def.* 3. *les arcs* DE, BC *seront semblables.*

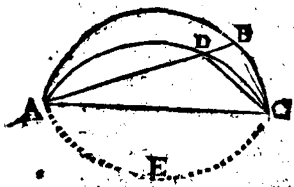


Et d'autant que si on conçoit estre tirée la ligne droite AC *par le centre du cercle, elle tombera en l'attouchement* A *par la* 11. *prop.* 3. *& en la mesme maniere que dessus les arcs* DE, BC *seront semblables, lesquels estans ôtez des demy cercles semblables, resteront aussi semblables les arcs* AD, AB *qui ostez des circõferences entieres, resteront encore les arcs* AED, ACB *semblables, comme nous avons demontré au* 2. *theor. Ce qui estoit proposé.*

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Deux portions de cercles, semblables & inegales, ne se mettront pas dessus une même ligne droite, & de même part.

Car si faire se peut, soient deux portions de cercles semblables, & inegales ABC & ADC, sur la ligne droite AC, & de même costé. Il est evident qu'elles s'entrecouperont seulement és points A & C, puis que par la 10. pr. de ce livre un cercle ne coupe pas un autre cercle en plus de deux points; & partant la circonference d'une portion sera toute dehors la circonference de l'autre. Soit donc menée la ligne droite A B coupant les circonferences en D & B, & tirées les deux lignes droites BC & DC; par la definition des semblables portions, les deux angles ABC & ADC seront egaux, ce qui est absurde; car par la 16. pr. 1. l'angle exterieur ADC doit estre plus grand que l'oposé interieur B. Donc les deux portions ABC & ADC, estans semblables & inegales, ne se pouvoient mettre sur une même ligne droite AC, & de mesme part. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

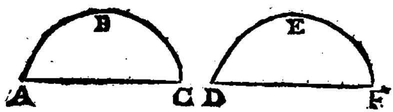
Encore qu'en cette 23. prop. & demonstration d'icelle les portions de cercles soient constituées de mesme part, si est-ce toutesfois que la prop. sera aussi veritable, si lesdites portions sont posées de diverse part; comme sont les portions ABC, AEC. Car si on conçoit que l'une d'icelles portions, comme AEC, soit, meüe à l'entour de la ligne droite AC, & vienne à être de même part que ABC, il aviendra toûjours la même absurdité que dessus, attendu qu'une porsion ne conviendra point à l'autre, à cause de leur inegalité.

Davantage ; il est évident, que ce qui est dit icy de deux portions constituez sur une même ligne droite, se doit aussi entendre de celles constituées sur lignes droites egales : car l'une d'icelles lignes étant superposée à l'autre, elle luy conviendra, & partant les deux portions seront lors posées sur une même ligne droite, ainsi que dessus, &c.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Semblables portions de cercles êtans constituées sur lignes droites egales, sont egales entr'elles.

Soient deux portions de cercles semblables ABC & DEF constituées sur lignes droites egales AC, & DF Je dis qu'icelles portions sont egales entr'elles.



Autrement, si elles estoient inegales il s'ensuivroit que deux portions semblables & inegales, pourroient estre posées sur lignes droites egales, ou bien sur une mesme, contre la prop. precedente : donc les deux portions ABC & DEF constituées sur lignes droites egales, seront egales; Ce qu'il falloit prouver.

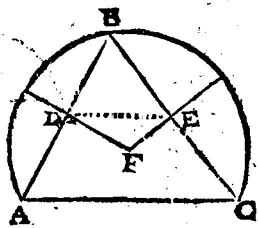
SCHOLIE.

Il est aisé de demontrer la converse tant de cette prop. que de la precedente, c'est à sçavoir que les egaux segmens de cercles constituez sur lignes droites egales, ou sur une mesme, sont semblables. Car à cause de l'egalité desdits segmens, ou portions de cercles, l'une conviendra à l'autre, & partant tous les angles constituez en icelles sont egaux : Parquoy icelles portions seront semblables. Que si quelqu'un dit que lesdites portions ne conviennent entr'elles, il faudroit ou que l'une *tombast toute hors de l'autre, & elles ne seroient egales entr'elles, contre l'hypothese; ou bien que la circonference de l'une coupast la circonference de l'autre, & par ainsi un cercle en couperoit un autre à plus de deux points, contre la 10. prop. 3.*

PROBL. 3. PROP. XXV.

La portion d'un cercle êtant donnée, décrire le cercle duquel elle est portion.

Soit une portion de cercle ABC, de laquelle il faut trouver le centre pour achever le cercle d'icelle.

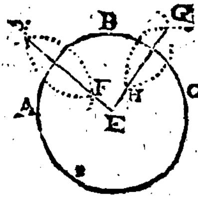


En la circonference d'icelle portion soient pris comme on voudra les trois points A, B, C, & apres avoir mené les deux lignes droites AB & BC, & icelles coupées en deux egalement en D & E par la 10. prop. 1. d'iceux points soient levées par la 11. prop. 1. les perpendiculaires DF, & EF, se rencontrans au point F: (or elles se doivent rencontrer, pour ce que si on menoit une ligne droite de D à E, comme DE, seroient faits deux angles EDF, DEF, moindres que deux droits.) Je dis que le point F est le centre cherché.

Car par le Corol. de la 1. prop. de ce livre le centre sera en la ligne DF: Il sera aussi en EF: ce sera donc au point F, qui leur est commun. Parquoy nous avons trouvé le centre du cercle, duquel le segment donné ABC est portion: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La pratique de cette prop. n'est differente à celle de la *premiere, c'est à sçavoir qu'ayant pris en la circonference les trois points A, B, C, il faut des points A & B, décrire d'un même intervalle deux arcs qui s'entrecoupent en D, F, & par iceux mener une ligne droite DFE : en apres, des points B & C, décrire encore d'un même intervalle deux autres arcs qui s'entrecoupent en G & H, par lesquels soit menée une ligne droite GHE,*

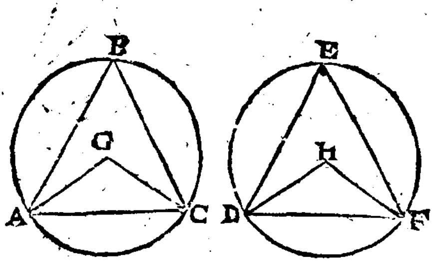


qui coupe la precedente DF en E, qui sera le centre requis.

THEOR. 23. PROP. XXVI.

Aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent sur circonferences egales, soit qu'ils s'apuyent êtans constituez aux centres, ou aux circonferences.

Soient les cercles egaux ABC & DEF, lesquels les centres sont G & H, & à iceux soient constituez les angles egaux G, H : Item les angles B, E constituez aux circonferences, soient

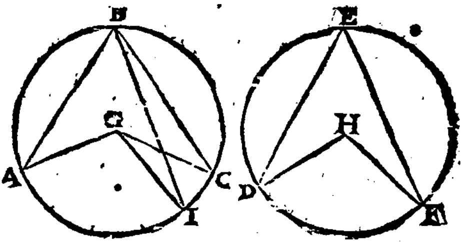


aussi egaux. Je dis que les circonferences AC & DF, sur lesquelles iceux angles s'apuyent, sont egales.

Car d'autant que les cercles sont egaux, les lignes tirées du centre à la circonference seront egales par la 1. def. de ce livre. Parquoy ayant tiré les deux lignes droites A C, DF, les deux triangles AGC, & DHF, auront deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & l'angle G egal à l'angle H : & par la 4. prop. 1. la base AC sera egale à la base D F. Pareillement l'angle B ètant egal à l'angle E, la portion ABC sera semblable à la portion DEF, par la 10. def. de ce livr. & par la 24. prop. elles seront egales; & qui de cercles egaux ôte portions egales, sçavoir ABC & DEF, le demeurant AC sera egal au demeurant DF : ainsi les angles egaux s'apuyeront dessus circonferences egales AC, DF. Donc aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent sur circonferences egales, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

Que si les susdits angles ètoient inegaux, le plus grand s'apuyeroit sur un plus grand arc que le moindre. Car aux cercles egaux ABC, DEF, soit l'angle AGC au



centre G, *plus grand que l'angle* DHF *au centre* H. *Item l'angle* ABC *en la circonference, plus grand que l'angle DEF en la circonference. Ie dis que l'arc AC est plus grand que l'arc* DF. *Car ayant fait l'angle* AGI *egal à l'angle* DHF, *& l'angle ABI egal à l'angle* DEF; *par ce qui a èté demontré cy-dessus, les arcs AI, DF seront egaux; & partant AG sera plus grand que DF.*

Or ce

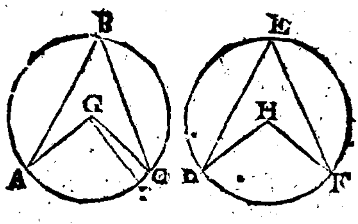
Or ce qu'Euclide dit des cercles egaux en cette proposition, & aux trois prochaines suivantes, se doit aussi entendre d'un même cercle; c'est à dire qu'en un même cercle, les angles egaux s'appuyent sur circonferences egales, &c. Car toûjours la même demonstration qui se fera en deux ou plusieurs cercles egaux, aura aussi lieu en un même cercle.

THEOR. 24. PROP. XXVII.

Aux cercles egaux, les angles qui s'apuyent dessus circonferences egales, sont egaux entr'eux, soit qu'ils s'apuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.

Soient deux cercles egaux ABC & DEF, les centres desquels sont G & H, & sur les circonferences egales AC & DF, soient les angles ABC & DEF, tous deux en la circonference. Item AGC & DHF au centre: ie dis premierement qu'iceux angles AGC & DHF, seront egaux.

Autrement, l'un d'iceux angles sera plus grand que l'autre: Soit donc AGC plus grand que DHF, s'il est possible, & par la 23. pr. 1. sur AG soit fait l'angle AGI egal à DHF, & par la precedente prop. les circonferences AI & DF seront egales; ce

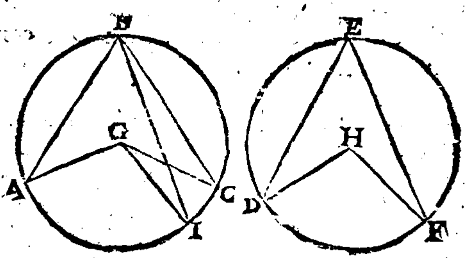


qui est contre nôtre hypothese; car nous avons posé AC egale à DF. Il faudroit doncques que AC & AI fussent egales, contre la 8. com. sent. Donc l'angle AGC n'êtoit point plus grand que l'angle DHF, & partant egal: ce qui estoit proposé.

Or l'egalité des angles du centre estant prouvée, les angles de la circonference sont entendus egaux, puis qu'ils sont moitiez d'iceux par la 20. proposition de ce livre. Donc aux cercles egaux les angles qui s'apuyent dessus circonferences egales, sont egaux, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

SCHOLIE.

Que si les arcs étoient inegaux, l'angle insistant sur le plus grand arc seroit plus grand que celuy du moindre: Comme en la figure du Scholie precedent, soit l'arc AC plus grand que l'arc DF; Ie dis que l'angle AGC est plus grand que l'angle DHF, & l'angle ABC, plus grand



que l'angle DEF. Car ayant fait l'arc AI egal à l'arc DF, & tiré les lignes droites GI, BI; tant les angles AGI, DHF, que les angles ABI, DEF, seront egaux, comme il a esté demontré cy-dessus: & partant l'angle AGC sera plus grand que l'angle DHF, & l'angle ABC plus grand que l'angle DEF.

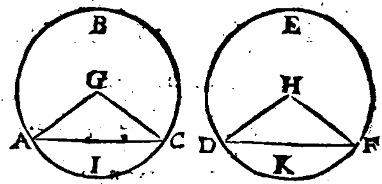
THEOR. 25. PROP. XXVIII.

Aux cercles egaux, les lignes droites egales prennent circóferences egales, sçavoir la plus grande à la plus grãde, & la plus petite à la plus petite.

Soient deux cercles egaux ABC & DEF, desquels les centres sont G & H, & dans ces cercles soient deux lignes droites egales AC & DF: Je dis que les circonferences qu'elles coupent, sont egales, sçavoir la petite AIC à la petite DKF,

& la grande ABC à la grande DEF.

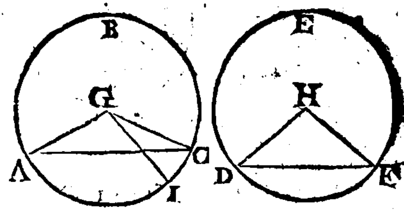
Qu'il ne soit ainsi ; des centres G & H, soient menées les lignes GA, GC, HD, HF, qui seront egales par la 1. def. de ce livre, estans les cercles egaux ; & la ligne droite AC estant egale à la ligne droite DF, les deux triangles AGC & DHF, auront les trois côtez egaux aux trois costez, chacun au sien : & par la 8. pr. 1. l'angle G sera egal à l'angle H, & par la 26. pr. dece livr. ils s'apuyeront dessus circonferences egales AIC, DKF ; & qui de cercles egaux oste icelles circonferences egales, resteront les circonferences ABC DEF, aussi egales. Donc aux cercles egaux, les lignes droites egales prennent circonferences egales, &c. Ce qu'il falloit demontrer.



SCHOLIE.

Que si les lignes droites étoient inegales, la plus grande prendroit aux segmens mineurs une plus grande circonference que la moindre : mais une moindre aux segmens majeurs.

Comme aux cercles egaux ABC, DEF, *desquels les centres sont* G *&* H, *soit la ligne droite* AC *plus grande que la ligne droite* DF : *Ie dis que la circonference* AC *moindre que le demy cercle est plus grande que la circonference* DF : *& que la circõference* ABC *est moindre que la periphere* DEF. *Car étãs tirées les lignes droites* AG, GC, DH *&* HF : *les costez* AG, GC *du triangle* AGC, *seront egaux aux costez* DH, HF *du triangle* DHF : *& la base* AC *est posée plus grande que la base*



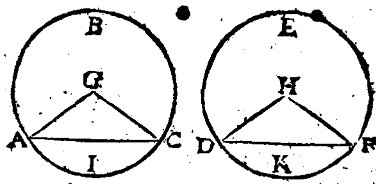
DF : Donc l'angle AGC sera plus grand que l'angle DHF par la 25. pr. 1. Parquoy soit fait l'angle AGI egal à l'angle DHF par la 23. prop. 1. & par la 26. pr. 3. l'arc AI sera egal à l'arc DF, & partant la circonference AIC sera plus grande que la circonference DF, & consequemment le reste ABC sera moindre que le reste DEF.

THEOR. 26. PROP. XXIX.

Aux cercles egaux, les circonferences egales, soûtendent lignes droites egales.

Es cercles egaux ABC & DEF, desquels les centres sont G & H, soient les circonferences ABC, DEF egales : item les circonferences AIC, DKF aussi egales & soustenduës des lignes droites AC & DF. Je dis qu'icelles lignes soustendantes sont egales.

Qu'ainsi ne soit : des centres G & H soient menées les lignes droites GA, GC, HD, HF. Or d'autant que l'on pose les circonferences AIC, DKF egales, les angles G & H qui s'apuyent dessus icelles circonferences, seront egaux par la 27. proposition de ce livre : pareillement les côtez GA & GC estans egaux aux côtez HD & HF par 1. d. 3. la base AC sera egale à la base DF par la 4. proposition 1. Donc aux cercles egaux les circonferences, &c. Ce qui estoit à prouver.



SCHOLIE.

Mais si les circonferences étoient inegales, la plus grande seroit soustenduë d'une plus grande ligne que la moindre, lesdites circonferences étans moindres que la *demy cercle : Car si elles étoient plus grandes, la moindre d'icelles circonf. seroit soustendue d'une plus grande ligne que la plus grande. Comme aux cercles egaux ABC, DEF, desquels les centres sont G & H, soient les circonferences AC, DF chacune moindre que le demy cercle, & soit AC plus grande que DF, & partant ABC moindre que DEF : Ie dis que la ligne droite AC est plus grande que la ligne droite* DF. *Car étans tirées les lignes droites AG, GC, DH, & HF, l'angle AGC sera plus grand que l'angle DHF par le Scholie de la 27. prop. de ce livre ; & puis que les côtez AG, GC, du triangle AGC sont egaux aux cotez DH, HF du triangle DHF, par la 24. prop. 1. la base AC sera plus grand que la base DF.*

Clavius, apres Commandin, demontre en ce lieu les quatre Theoremes suivans.

1. Les cercles, desquels les lignes droites egales retranchent semblables circonferences, sont egaux.

Soient deux cercles ABC, DEF, desquels les lignes droites egales AC, DF, coupent semblables circonferences ABC, DEF : Ie dis qu'iceux cercles sont egaux. Car si les segmens ABC, DEF sont semblables, les segmens restans AIC, DKF, seront aussi semblables, comme nous avons demontré au Scholie de la 22. prop. de ce livre. Derechef, pource que sur les lignes droites egales AC, DF, sont constituez les semblables segmens ABC, DEF, ils seront egaux par la 24. p. 3. Par mesme raison seront aussi egaux les semblables segmens AIC, DKF. Donc les cercles entiers ABC, DEF, seront egaux : Ce qui étoit proposé.

2. Des cercles inegaux, les lignes droites egales coupent circonferences dissemblables.

En la mesme figure precedente les lignes droites AC, DF soient posées egales, & les cercles ABC, DEF, inegaux. Ie dis que les circonferences ABC, DEF *sont dissemblables. Car si elles étoient semblables, les cercles seroient egaux, comme nous avons demontré cy-dessus, contre l'hypothese. Donc les circonferences ABC,* DEF, *sont dissemblables. Par mesme raison les circonferences AIC, DKF, seront aussi dissemblables. Ce qu'il faloit demontrer.*

O 3

3. Les lignes droites, qui prennent circonferences semblables de cercles inegaux, sont inegales.

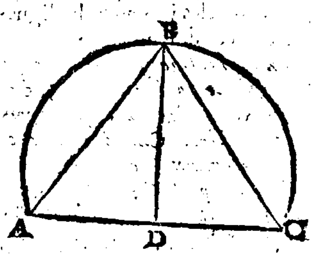
En la mesme figure soient posez les cercles inegaux, & les circonferences ABC, DEF semblables; Ie dis que les lignes droites AC, DF sont inegales. Car si elles étoient egales, les cercles seroient egaux par le premier Theor. cy-dessus, contre l'hypoth. icelles lignes droites AC, DF, sont donc inegales.

4. Les lignes droites, qui de quelconques cercles prennent circonferences semblables & inegales, sont inegales.

En la mesme figure, soient posées les circonferences ABC, DEF semblables & inegales. Ie dis que les lignes droites AC, DF sont inegales. Car les cercles sont ou egaux, ou inegaux: Soient premierement egaux. Si donc les lignes droites AC, DF, sont dites egales, par la 28. prop. 3. les circonferences ABC, DEF, seront egales: ce qui est contre l'hypoth. Icelles lignes droites AC, DF, ne sont donc pas egales. Soient puis apres les cercles inegaux. Donc les lignes droites AC, DF, étans les circonferences ABC, DEF, semblables, seront inegales, comme il a été demontré au precedent Theor. En la mesme maniere nous demontrerons les lignes droites AC, DF estre inegales, si les circonferences AIC, DKF, sont posées semblables, & inegales.

PROBL. 4. PROP. XXX.

Couper une circonference donnée en deux egalement.



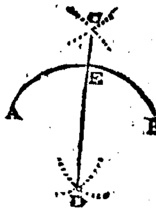
Soit la circonference donnée ABC, laquelle il faut couper en deux egalement.

Soit menée la ligne droite AC, laquelle soit coupée en deux egalement au point D, duquel point soit élevée la perpendiculaire DB par la 11. prop. 1. qui rencontre la circonference en B. Je dis que la circonference ABC est coupée en deux egalement en B.

Qu'il ne soit ainsi : soient menées les lignes droites AB & BC. D'autant que les deux costez AD & DB du triangle ADB, sont egaux aux deux costez CD & DB du triangle CDB, chacun au sien, & les deux angles au point D egaux ; par la 4. p. 1. la base AB sera egale à la base BC, & par la 28. prop. de ce livre les circonferences AB & BC seront egales. Nous avons donc coupé la circonference donnée en deux egalement. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

La pratique de cette proposition est fort aisée, car il n'y a qu'à décrire deux arcs de cercles de chaque extremité de la circonference donnée A & B, qui s'entrecoupent és points C & D, desquels points étant menée une ligne droite C D, elle coupera la circonference donnée AB en deux egalement au point E.

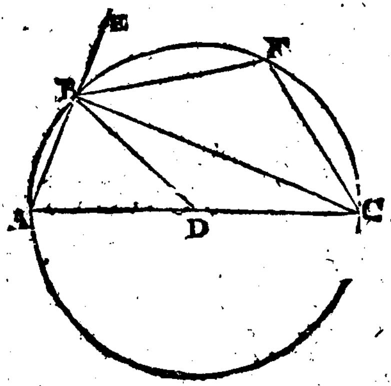


THEOR. 27. PROP. XXXI.

Au cercle, l'angle qui est au demy cercle est droit ; & celuy qui est en la plus grande portion, est plus petit qu'un droit ; mais celuy qui est en la plus petite, est plus grand qu'un droit. Et davantage, l'angle de la plus grande portion, est plus grand qu'un droit : mais l'angle de la plus petite portion est moindre qu'un droit.

Au cercle ABC, duquel D est le centre, & AC le diametre soit constitué au demy cercle ABC, l'angle rectiligne ABC ; & en la plus grande portion BAC, l'angle BAC : mais en la moindre portion BFC, l'angle CFB. Je dis en premier lieu que l'angle ABC au demy cercle, est droit.

Car apres avoir mené la ligne BD, & continué AB jusques en E : il est evident que les triangles ABD & CBD sont Isosceles, & par la 5. p. 1. ils auront les angles sur la base egaux, sçavoir BAD à ABD,& CBD à BCD : & partant les deux ensemble ABD. CBD, seront egaux aux deux ensemble BAD & BCD. Mais par la 32. p. 1. l'exterieur CBE est egal à iceux deux angles BAD, BCD : & partant les deux au point B, faisant le seul ABC, seront aussi egaux à l'exterieur CBE, & par la 10. def. 1. les deux angles ABC & CBE, seront deux droits.



Je dis en second lieu, que l'angle BAC, qui est en la plus grande portion CAB, est plus petit qu'un droit : ce qui est aisé à prouver par la 32. pr. 1. d'autant qu'au triangle BAC, l'angle ABC, estant droit, les deux autres ensemble ne vaudront qu'un droit : & partant le seul angle BAC est plus petit qu'un angle droit, & ainsi des autres.

Ie dis tiercement, que l'angle BFC, qui est en la petite portion CFB, est plus grand qu'un droit : car par la 22. p. de ce livre la figure de quatre costez ABFC inscrite au cercle, a les deux angles opposez A & F, egaux à deux droits. Mais nous avons prouvé A estre plus petit qu'un droit, par consequent F sera plus grand.

Ie dis en quatriéme lieu, que l'angle de la plus grande portion, sçavoir CBA, compris de la ligne droite BC, & de la periphere BAC, est plus grand qu'un angle droit : ce qui est evident ; car l'angle droit rectiligne ABC n'est que partie d'iceluy angle mixte C B A.

Finalement, je dis que l'angle de la petite portion, compris de la ligne droite BC & de la circonference B F C, c'est à dire l'angle mixte CBF est moindre qu'un droit, car iceluy n'est que partie de l'angle droit CBE. Donc au cercle, l'angle qui est au demy cercle est droit, &c. Ce qu'il faloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De ce que dessus, est manifeste qu'un angle d'un triangle estant egal aux deux autres, est droit.

SCHOLIE.

La converse de cette prop. est manifestement vraye, c'est à sçavoir que

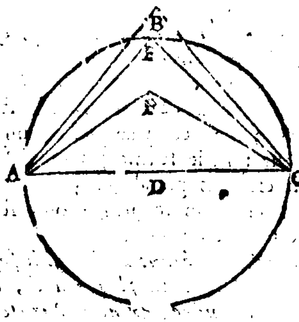
Le segment de cercle, auquel est constitué un angle droit, est demy cercle ; & celuy auquel est un angle aigu, est segment majeur : mais celuy auquel est un angle obtus, est segment mineur : Et le segment duquel l'angle est plus grand qu'un droit est plus grand que le demy cercle ; mais celuy duquel l'angle est moindre que le droit, est ou demy cercle, ou moindre que le demy cercle.

Car l'angle étant droit, si le segment n'est pas un demy cercle, il sera ou plus grand, & ainsi l'angle sera aigu ; ou moindre, & ainsi l'angle sera obtus : contre l'hypothese. Derechef, l'angle étant aigu, si le segment n'est pas plus grand que le demy cercle, il sera ou demy cercle, & ainsi l'angle en iceluy sera droit : ou moindre que le demy cercle, & ainsi l'angle en iceluy sera obtus. Ce qui est aussi contre l'hypothese. Finalement, l'angle étant obtus, si le segment n'est moindre que le demy cercle, il sera ou demy cercle, & ainsi l'angle en iceluy sera droit ; ou plus grand, & ainsi l'angle sera aigu : Ce qui est semblablement contre l'hypothese. Davantage, quand l'angle du segment est plus grand qu'un droit, si le segment n'est pas plus grand que le demy cercle, il sera ou demy cercle, ou moindre que le demy cercle, & ainsi l'angle d'iceluy sera moindre qu'un droit, contre la position. Et quand l'angle du segment est moindre qu'un *droit, si le segment n'est pas demy cercle, ou moindre que le demy cercle, il sera plus grand, & par ainsi l'angle d'iceluy sera pareillement plus grand que le droit: ce qui est contre l'hypothese.*

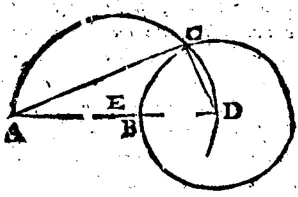
Clavius demontre en ce lieu le theoremt suivant.

Si le costé opposé à l'angle droit d'un triangle rectangle est coupé en deux egalement, & du point de la section est décrit un cercle de l'intervale de la moitié d'iceluy costé; iceluy cercle passera par l'angle droit du triangle.

Au triangle rectangle ABC, le costé AC opposé à l'angle droit B, soit coupé en deux egalement au point D, duquel & de l'intervale DA, ou DC, soit décrit le cercle AEC, lequel je dis passer par B. Car s'il passoit au dessus de B, ou au dessous, étans tirées les lignes droites AE, CE, tellement qu'elles ne coupent les lignes droites AB, BC, ains qu'elles tombent au deçà d'icelles, ou au delà: l'angle AEC au demy cercle sera droit par la 31. p. 3. & consequemment les angles B & E seront egaux, étans droits: ce qui est absurde, vû que l'angle E par la 21. prop. 1. est necessairement ou plus grand, ou plus petit que l'angle B. Le cercle AEC passera donc par le point de l'angle droit B. Ce qui étoit proposé.



Or de la demonstration de la premiere partie de cette pr. nous colligeons un facile moyen pour d'un point donné hors un cercle mener une, ou deux lignes droites qui touchent iceluy cercle, ce qui se fait ainsi. Soit

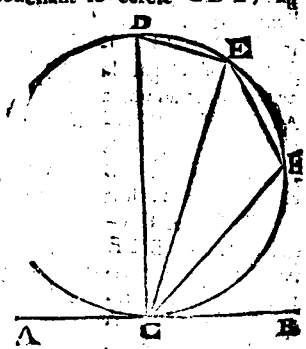


donné le point A hors du cercle BC, le centre duquel est D: & il faut mener de A une ligne droite, qui touche iceluy cercle donné. Ayant mené la ligne AD, soit coupée icelle en deux egalement en E par la 10. p. 1. & de E comme centre, & de l'intervale EA soit décrit un cercle ACD qui coupe le donné en C, auquel point C soit menée la ligne droite AC, & icelle touchera le cercle donné en C. Car étant tirée la ligne droite CD, l'angle ACD au demy cercle sera droit par ladite 31. pr. 3. & partant la ligne droite AC, touchera le cercle BC en C par le Cor. de la 16. p. 3. Et si du même point A, on vouloit encore tirer une autre ligne qui touche semblablement ledit cercle BC, il n'y auroit qu'à décrire le cercle entier ACD, & il couperoit encore la circonference BC à un autre point au dessous de AD, &c.

THEOR. 28. PROP. XXXII.

Si quelque ligne droite touche le cercle, & de l'atouchement on mene une autre ligne droite coupant le cercle, les angles qu'elle fait à la touchante sont egaux à ceux qui sont aux segmens alternes du cercle.

Soit la ligne droite AB touchant le cercle CDE, au point C, & d'iceluy point soit menée la ligne droite CE, coupant le cercle en deux portions CDE, CFE. Je dis que l'angle ECB, est egal à tout angle qui peut être fait en la portion alterne CDE, & que l'angle ECA est aussi egal à tout angle qui peut être fait en la portion alterne CFE.



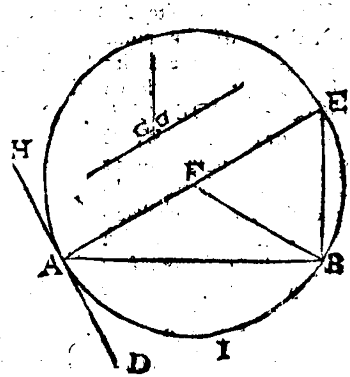
Qu'il ne soit ainsi, apres avoir mené par le centre le diametre CD, soient menées les lignes droites DE, EF, FC. Maintenant par la prop. precedente l'angle DEC dans le demy cercle est droit, & par la 32. p. 1. les deux autres D & ECD sont egaux à un droit, c'est à dire à DCB, lequel est droit par la 18. prop. de ce livre, desquels si on oste l'angle commun ECD, le demeurant ECB sera egal au demeurant D. Pareillement par la 22. prop. la figure de quatre costez inscrite au cercle CFED, aura les angles opposez F & D, egaux à deux droits : c'est à dire aux deux ECA, ECB, desquels si on oste choses egales, c'est à sçavoir les angles egaux D & ECB, les demeurans F & ECA seront egaux.

Que si la ligne coupant le cercle étoit le diametre d'iceluy, tous les angles qui se feroient tant en l'un qu'en l'autre demy cercle, seroient droits par la prop. prec. & partant appert ce qui est proposé. Si donc quelque ligne droite touche le cercle, &c. Ce qu'il faloit prouver.

PROBL. 5. PROP. XXXIII.

Dessus une ligne droite donnée, décrire une portion de cercle capable d'un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnée AB, & l'angle rectiligne C : il faut sur icelle ligne décrire une portion de cercle comprenant un angle egal à l'angle donné C.



Soit construit sur icelle ligne AB. & à l'extremité A, l'angle BAD egal à l'angle donné C par la 23. pr. 1. & au point A soit levée AE perpendiculaire à AD; puis sur la ligne AB & au point B, soit fait l'angle ABF egal à l'angle BAE par la 23. prop. 1. tirant la ligne BF jusques à ce qu'elle rencontre la perpendiculaire AE au point

F : donc par la 6. pr. 1. les costez FA, FB, seront egaux: Partant le cercle décrit du centre F & de l'intervale FA, passera aussi par le point B : & apres avoir mené la ligne droite BE. Je dis que l'angle E, qui est en la portion AEB est egal à l'angle donné C. Car d'autant que la ligne droite AE passe par le centre F, & qu'à icelle AE, la ligne DA est perpendiculaire ; par le Corol. de la 16. prop. de ce livre le cercle touchera icelle DA en A. Parquoy par la preceden. prop. l'angle BAD, qui par la construction est egal à l'angle C, sera egal à l'angle E, décrit dans la portion alterne AEB, par consequent iceluy angle E sera egal à l'angle C. Nous avons donc décrit une portion de cercle sur la ligne donnée AB, capable d'un angle egal à un angle donné C.

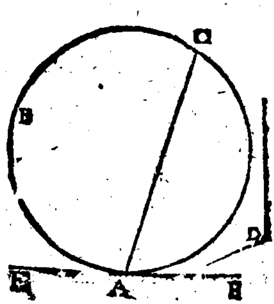
Que si l'angle donné eut esté obtus, comme G, il eût falu construire l'angle BAH egal à iceluy, & chercher le centre F comme dessus, pour décrire le cercle AEBI, & par la prop. precedente la portion mineure AIB eust compris un angle egal à l'angle donné G.

Que si l'angle donné eût esté droit, il n'eust falu que décrire un demy cercle sur la ligne donnée, attendu que tout angle fait au demy cercle est droit par la 31. pr. 3. Or nous avons donc construit sur la ligne donnée AB, un segment de cercle, &c. Ce qu'il faloit faire.

PROBL. 6. PROP. XXXIV.

D'un cercle donné, ôter une portion capable d'un angle egal à un angle rectiligne donné.

Soit le cercle donné ABC ; duquel il faut ôter une portion capable d'un angle rectiligne egal à l'angle donné D.



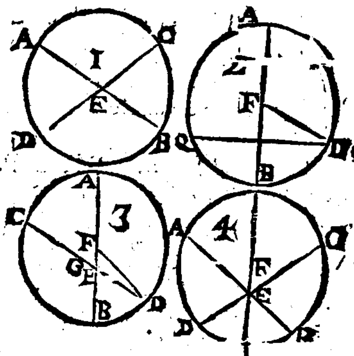
Soit menée la ligne droite EF touchant le cercle en A : puis par la 23. prop. 1. soit fait sur icelle ligne, & au point A, l'angle rectiligne FAC egal au donné D; faisant que la ligne droite AC coupe le cercle en deux portions. Je dis que tout angle qui sera fait en la portion alterne ABC sera egal au donné D. Car il sera egal à l'angle FAC par la 32.

prop. de ce livre, lequel est egal à D par la construction: Nous avons donc du cercle donné ABC coupé une portion, &c. Ce qu'il faloit faire.

THEOR. 29. PROP. XXXV.

Si dans un cercle, deux lignes droites se coupent l'une l'autre ; le rectangle contenu des deux parties de l'une, est egal au rectangle compris des deux parties de l'autre.

Soient deux lignes droites AB, CD dans le cercle ACBD s'entrecoupans en E. Je dis que le rectangle compris des deux parties AE & EB, est egal au rectangle contenu des deux parties CE & ED.



Or les lignes qui se coupent dans le cercle, ou elles passent toutes deux par le centre, ou bien l'une d'icelles seulement, ou ny l'une ny l'autre. Que si elles passoient toutes deux par le centre comme en la premiere figure, les quatre parties seront egales; & par ainsi la proposition est evidente.

Que si la seule AB, passe par le centre F, & divise DC en deux egalement comme en la seconde figure, elle la divisera aussi à droits angles, par la 3. prop. de ce livre. Et apres avoir mené FD, il est évident par la 5. pr. 2. que le rectangle de AE, & EB avec le quarré de EF, sera egal au quarré de FB, ou FD, (car la ligne AB est coupée en deux egalement au point F, & en deux inegalement en E) & par la 47. prop. 1. le quarré de FD estant egal aux deux quarrez de FE & ED, en ostant le quarré commun de FE, le demeurant rectangle de AE & EB, se trouvera egal au quarré de ED, c'est á dire au rectangle de CE & ED, puis que CD est coupée en deux egalement en E.

Que si la ligne AB passant par le centre F (comme en la troisiéme figure) divise inegalement CD, ne passant point par le centre, il s'ensuivra la mesme chose. Car apres avoir mené la perpendiculaire FG, & la ligne droite FD : pour autant que AB est coupée en deux egalement en F, & en deux inegalement en E, le rectangle de AE & EB, avec le quarré de EF, sera egal au quarré de FB, ou de son egale FD par la 5. prop. 2. Mais le quarré de FE est egal aux deux de FG & GE par la 47. pr. 1. Pareillement le quarré de FD, est egal aux deux de FG & GD par la 47. prop. Donc aussi le rectangle de AE & EB, avec les deux quarrez de FG & GE, sera egal aux deux quarrez de FG & GD : & partant en ostant le quarré commun de FG le demeurant quarré de GD, sera egal au rectangle de AE & EB, & quarré de GE. Mais le mesme quarré de GD est aussi egal au rectangle de CE & ED, avec le quarré de GE; par la 5. prop. 2. puis que CD est coupée en deux egalement en G, par la perpendiculaire FG & en deux inegalement en E. Parquoy iceluy rectangle de CE & ED avec le quarré de GE sera egal au rectangle de AE & EB avec le quarré de GE : en ôtant donc le quarré commun de GE, le rectangle de AE, EB, se trouvera egal au rectangle de CE & ED.

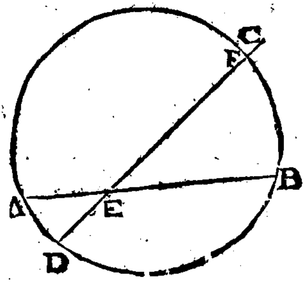
Que si ny l'une ny l'autre des deux lignes ne passe par le centre F, (comme en la 4. figure) il s'ensuivra le mesme : car si on mene le diametre HI, passant par le point commun E de la 4. figure, le rectangle de IE & EH, sera egal au rectangle de CE & ED, comme cy-dessus a esté dit; & par mesme raison il sera aussi egal au rectangle de AE & EB; & par la 1. comm. sent. les deux rectangles de AE, EB; Item de CE, ED, seront egaux. Si donc dans un cercle, deux lignes droites, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

SCHOLIE.

Nous convertirons cette 35. prop. ainsi.

Si deux lignes droites s'entrecoupent, tellement que le rectangle compris des segmens de l'une soit egal au rectangle contenu sous les segmens de l'autre, le cercle décrit par trois des points extrémes d'icelles lignes quels qu'ils soient, passera aussi par le 4 point.

Que les lignes droites AB, CD s'entrecoupent en E, & que le rectangle compris sous AE, EB soit egal au rectangle compris des parties CE, ED. Je dis que les quatre points A, D, B, C, tombent en la circonference d'un cercle, c'est à dire qu'estant décrit un cercle passant par les trois points A, D, B, il passera necessairement par l'autre point C. Car s'il n'y passe, il passera, ou au dela de C, ou au deça, comme par le point F. D'autant que par la 35. proposition 3. le rectangle compris sous FE, ED est egal au rectangle compris de AE, EB, & que le rectangle contenu sous CE, ED est aussi posé egal au méme rectangle de AE, EB; les rectangles compris sous CE, ED, & sous FE, ED, seront egaux, la partie au tout: ce qui est absurde. Par même raison le cercle ne passera pas au dela du point C. Donc le cercle décrit par les trois points A, D, B, passera par le quatriéme point C. Ce qu'il faloit demontrer.



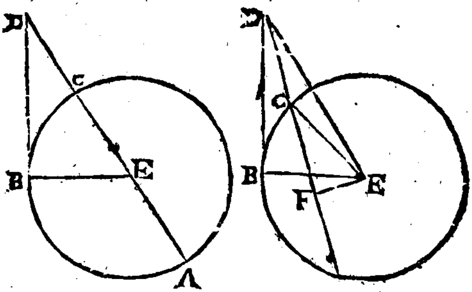
THEOR. 30. PROP. XXXVI.

Si dehors le cercle on prend quelque point, & d'iceluy vers le cercle tombent deux lignes droites, l'une desquelles coupent le cercle, & l'autre le touche; le rectangle contenu de toute la coupante, & de sa partie prise dehors entre le point & la circonference convexe, est egal au quarré de la touchante.

Hors le cercle ABC soit pris le point D, duquel soit menée la ligne DA, coupant le cercle en C, & la ligne DB touchant iceluy cercle en B. Je dis que le rectangle de la toute AD & de la partie CD, prise entre le point donné & le cercle, est egal au quarré de la touchante BD.

Premierement

Premierement que la ligne AD passe par le centre E, com-



me en la premiere figure, & d'iceluy centre E au point d'attouchement B, soit menée la ligne EB, laquelle par la 18. pr. de ce livre sera perpendiculaire à icelle touchante ED: & pour autant que la ligne AC est coupée en deux egalement au point E, & à icelle est ajoûtée directement CD, le rectangle de la totale AD, & de sa partie CD avec le quarré de CE, ou BE son egale, est egal au quarré de ED par la 6. pr. 2. ou aux deux de DB & BE par la 47. pr. 1. Que si on ôte le quarré commun de BE, le demeurant quarré de BD, sera egal au demeurant rectangle de AD & CD, par la 2. com. sent.

Que si la ligne AD ne passe par le centre du cercle proposé, comme en la seconde figure, il faudra demontrer en cette sorte: du centre E soient menées les lignes EB, EC, ED, & la perpendiculaire EF, laquelle coupera AC en deux egalement par la 5. prop. de ce livre. Et par la 6. pr. 2. comme cy-dessus, le rectangle de AD & CD, avec le quarré de CF, sera egal au quarré de DF, ausquelles choses egales si on ajoute le quarré commun de EF, le rectangle de AD & DC, avec les deux quarrez de CF & FE, ou le seul de CE par la 47. pr. 1. sera egal aux deux quarrez de DF & FE, ou au seul de DE par la 47. pr. 1. ou aux deux de DB & BE par la même 47. pr. 1. Que si on oste les quarrez egaux de CE & BE, les demeurans quarré de DB, & le rectangle de AD & CD, seront egaux. Parquoy si hors le cercle on prend quelque point, &c. Ce qu'il faloit demontrer.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste, que si d'un point pris hors le cercle, sont tirées plusieurs lignes droites, coupant le cercle; les rectangles compris sous chacune d'icelles & sa partie exterieure, seront egaux entr'eux : pource que chacun de ces rectangles-là, sera egal au quarré de la ligne touchante.

Appert aussi que deux lignes droites tirées d'un mesme point, & touchant le cercle, sont egales entr'elles : puis que le quarré de chacune d'icelles sera egal au rectangle de la ligne tirée du mesme point, & coupant le cercle, & de la partie exterieure d'icelle.

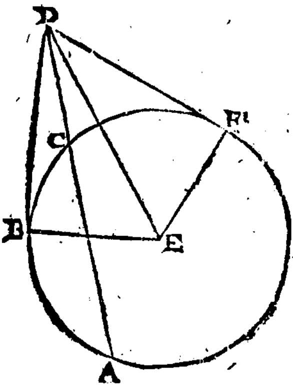
Est aussi evident que d'un mesme point pris hors le cercle, peuvent être seulement tirées deux lignes droites qui touchent le cercle : Car il faudroit qu'elles fussent toutes egales entr'elles : & partant du point D pourroient être menées plus de deux lignes droites egales de part & d'autre de D E, *contre la 8. prop. de ce troisiéme livre.*

THEOR. 31. PROP. XXXVII.

Si dehors le cercle on prend quelque point, & d'iceluy point tombent deux lignes droites au cercle, l'une desquelles coupe le cercle, & l'autre l'atteint : Si le rectangle compris de toute la coupante, & de la partie prise entre le point & la circonference convexe, est egal au quarré de celle qui atteint; celle qui atteint touchera le cercle.

Hors le cercle A B C soit pris le point D, & d'iceluy soit menée la ligne droite D A qui coupe le cercle au point C, & la ligne DB qui atteint le cercle au point B : & soit le rectangle de la toute A D & de la partie CD, egal au quarré de DB. Je dis que D B touche le cercle en B.

Car du point D, étant menée la ligne DF touchant le cercle au point F, & du centre E les lignes EB, ED, EF, par la proposition precedente, le quarré de DF sera egal au rectangle de AD & CD. Mais par l'hypothese le quarré de DB, est aussi egal à iceluy rectangle: & partant les quarrez, & les lignes DF & BD, seront egales. Item EF & EB, sont aussi egales par la def. du cercle, & ED à soy-même: ainsi les deux triangles DBE & DFE, ayans les trois côtez egaux aux trois costez,



chacun au sien, les angles B & F, seront egaux par la 8. p. 1. & F étant droit par la 18. prop. de ce livre, aussi B sera droit; & par le Cor. de la 16. prop. 3. la ligne DB touchera le cercle. Parquoy si dehors le cercle on prend quelque point, &c. Ce qu'il faloit prouver.

Fin du troisiéme Element.

ELEMENT QUATRIE'ME.

DEFINITIONS.

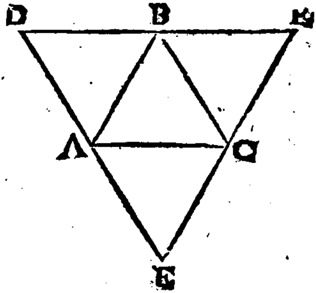
VNE figure rectiligne ſe dit être inſcrite en une figure rectiligne, lors qu'un chacun des angles de la figure inſcrite, touche un chacun coſté de la figure en laquelle elle eſt inſcrite.

2. Semblablement auſſi une figure ſe dit être circonſcrite à une figure, quand un chacun côté de la circonſcrite touche un chacun angle de l'inſcrite.

Ainſi le triangle ABC, duquel chaque angle touche un chacun coſté du triangle DEF *eſt dit eſtre inſcrit en iceluy triangle* DEF. *Et au contraire, à cauſe que chaque coſté d'iceluy triangle* DEF *touche chaque angle du triangle ABC, il eſt dit eſtre circonſcrit à iceluy triangle ABC.*

Il faut entendre le meſme des inſcriptions & circonſcriptions des autres figures rectilignes: & jaçoit qu'el-

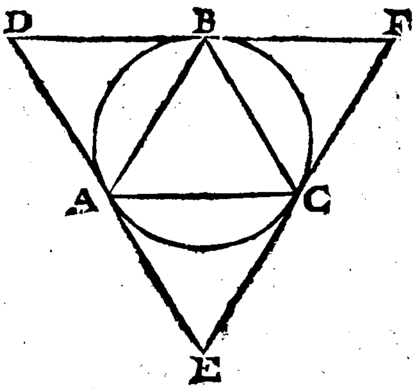
les soient proprement dites estre inscrites, ou circonscrites quand le nombre des costez de l'inscrite est egal au nombre des costez de la circonscrite, & le nombre des angles aussi egal : si est-ce toutesfois qu'il n'est pas du tout necessaire, veu que plusieurs Geometres ont enseigné à inscrire un quarré, un pentagone, &c. dedans un triangle, &c.



3. Mais une figure rectiligne se dit être inscrite au cercle, quand un chacun angle de la figure inscrite, touche la circonference du cercle.

4. Et une figure rectiligne se dit être circonscrite au cercle, quand un chacun des côtez de la figure circonscrite, touche la circonference du cercle.

Ainsi le triangle A B C sera dit estre inscrit au cercle A B C, à cause que chaque angle d'iceluy triangle touche la circonference dudit cercle A B C. Mais le triangle D E F sera dit estre circonscrit au cercle



ABC, pource que chaque costé d'iceluy triangle DEF *touche la circonference dudit cercle és points ABC.*

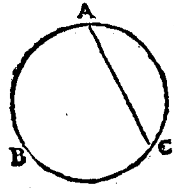
5. Semblablement aussi le cercle se dit être inscrit en une figure rectiligne, quand la circonference du cercle touche un chacun costé de la figure en laquelle il est inscrit.

6. Mais le cercle se dit être circonscrit à une figure, quand la circonference du cercle touche un chacun des angles d'icelle figure à l'entour de laquelle il est décrit.

Comme par exemple, en la figure prec. le cercle ABC est dit estre inscrit au triangle DEF, *à cause qu'il touche chaque costé d'iceluy triangle és points A, B, C: mais le même cercle ABC est dit estre circonscrit au triangle ABC, pource qu'il touche chaque angle d'iceluy triangle.*

7. Une ligne droite se dit être accommodée au cercle, quand les extremitez d'icelle sont en la circonference du cercle.

Ainsi la ligne droite AC sera dite estre accommodée au cercle ABC, à cause que les extremitez d'icelle ligne AC sont en la circonference dudit cercle.

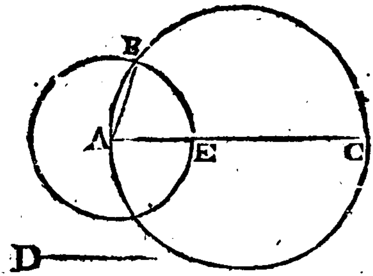


PROBL. I. PROP. I.

Au cercle donné, accommoder une ligne droite egale à une ligne droite donnée, laquelle ne soit pas plus grande que le diametre du cercle.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut accommoder une ligne droite egale à la ligne droite donnée D, qui n'est pas plus grande que le diametre d'iceluy cercle.

Soit mené le diametre AC, & si la ligne donnée est egale à iceluy diametre, on aura accommodé au cercle ABC la ligne AC egale à la donnée D. Mais si D est moindre que le diametre AC, d'iceluy soit retranchée la partie AE egale à ladite ligne D. En apres du centre A, & de l'intervale AE soit décrit le cercle BE coupant le cercle donné au point B, & soit menée la ligne droite AB : icelle sera accommodée au cercle, & egale à D.



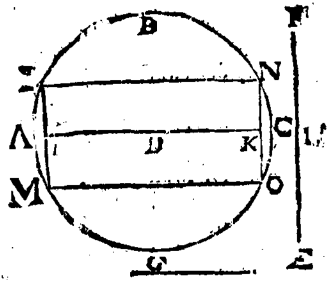
Car les extremitez d'icelle AB sont en la circonference du cercle ABC étant menée de l'extremité du diametre A au point de l'intersection B. Mais par la def. du cercle les lignes droites AB & AE sont egales, & par la construction, icelle AE est egale à D : donc par la 1. com. sent. AB & D seront egales entr'elles. Nous avons donc accommodé au cercle donné une ligne droite, &c. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

Commandin adjoûte en cet endroit le probl. suivant.

En un cercle donné accommoder une ligne droite egale à une ligne droite donnée, qui ne soit pas plus grande que le diametre du cercle, & parallele à une autre ligne droite donnée.

Soit le cercle donné ABC, duquel le centre est D, auquel il faut accommoder une ligne droite egale à une donnée EF, qui n'est pas plus grande que le diametre du cercle, & laquelle soit parallele à la ligne droite donnée G. Par le centre D soit tiré le diametre ADC parallele à la ligne donnée G. Que si EF est egale au diametre AC, sera fait ce qui estoit requis : Mais si elle n'est egale à *iceluy diametre, soit icelle coupée en deux egalement au point H, & soit prise DI egale à EH, & DK egale à HF, afin que la toute IK soit egale à la toute EF : puis par les points I, K, soient tirées à angles droits LM, NO, & soit joint MO : Icelle MO accommodée au cercle sera egale à EF, & parallele à G. Car puis que LM, NO*



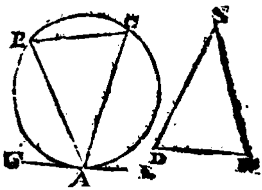
sont egalement distantes du centre D, elles seront egales entr'elles par la 14. pr. 3. & par la 3. prop. 3. elles seront coupées en deux egalement en I & K, étans coupée à angles droits par le diametre AC; & partant IM, KO sont egales entr'elles; & pource qu'elles sont aussi paralleles par la 28. pr. 1. semblablement IK, MO seront egales & paraleles par la 33. pr. 1. Parquoy veu que IK est egale à EF & parallele à G, aussi MO sera egale à icelle EF, & parallele à G par la 30. pr. 1. Par même raison, si on tire LN, elle sera egale à EF, & parallele à G. Donc au cercle ABC, est accommodée la ligne droite MO, ou LN, egale à EF & parallele à G. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 2. PROP. II.

Dans un cercle donné, inscrire un triangle equiangle à un triangle donné.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inscrire un triangle equiangle au donné DSF.

Soit menée la ligne droite GH, qui touche le cercle au point A, auquel point soient faits les deux angles GAB egal à l'angle D, & HAC egal à l'angle F, par la 23. pr. 1. tirant les lignes AB, AC, iusques à ce qu'elles rencontrent la circonference en B & C : puis soit menée BC. Je dis



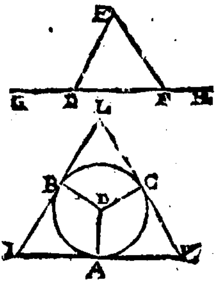
que le triangle inscrit ABC est equiangle au donné DSF.

Car puis que la ligne GH touche le cercle, & la ligne AB le coupe en deux porrions, l'angle C en la portion BCA sera egal à l'angle de l'atouchement GAB, & par consequent à l'angle D son egal par la 32. pr. 3. & par la même raison, la ligne AC coupant le cercle, l'angle B sera aussi egal à l'angle F, & par la 32. pr. 1. le troisiéme angle A sera aussi egal à l'angle S : & par consequent les triangles DSF, BAC seront equiangles. Au cercle donné nous avons donc décrit un triangle equiangle à un triangle donné. Ce qu'il faloit faire.

PROBL. 3. PROP. III.

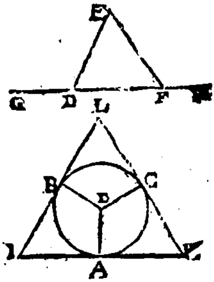
A l'entour d'un cercle donné, décrire un triangle equiangle à un triangle donné.

Soit le cercle donné ABC, à l'entour duquel il faut décrire un triangle equiangle au triangle donné DEF.



Soit prolongé le costé DF de part & d'autre jusques en G & H, & du centre D soit menée comme on voudra la ligne DA, sur laquelle & au point D, soient construits les deux angles ADB egal à EDG, & ADC egal à l'angle HFE par la 23. pr. 1. & aux trois lignes DA, DB, DC, soient menées les trois lignes perpendiculaires IK, IL, KL, lesquelles toucheront le cercle és points A, B, C, par le Corol. de la 16. pr. 3. & icelles se rencontrans aux trois points I, K, L, feront le triangle IKL, lequel ie dis estre le triangle demandé.

Car il apert deja qu'il est circonscrit au cercle; puis que tous les costez d'iceluy le touchent és points A, B, C. Et d'autant que toute figure de quatre costez à les quatre angles egaux à quatre angles droits (comme nous avons demontré à la 32. pr. 1.) le trapeze ADBI aura les quatre angles egaux à quatre droits. Mais les deux A & B estans droits par la construction, les deux autres D & I, seront egaux à deux droits, c'est à dire egaux aux deux GDE & FDE, qui sont egaux à deux angles droits par la 13. proposition 1. & par la construction ADB est egal à GDE : donc l'angle I sera egal à l'angle EDF. Par mesme discours l'angle K se trouvera egal à l'angle DFE. Et par la 32. pr. 1. le troisiéme L sera egal au troisiéme E : ainsi le triangle circonscrit IKL sera equiangle au triangle donné DEF : Parquoy nous avons fait ce qui estoit requis.

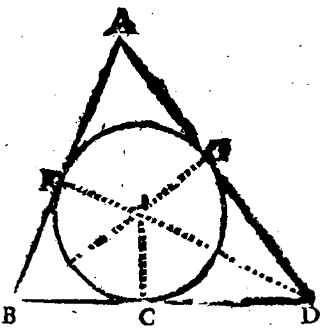


PROBL. 4. PROP. IV.

Dans un triangle donné, décrire un cercle.

Soit le triangle donné, ABC, dans lequel il faut décrire un cercle.

Par la 9. prop. 1. les deux angles B & C soient coupez en deux egalement par les deux lignes BD & CD, se rencontrans au point D : Item d'iceluy point de rencontre D, soient menées les trois perpendiculaires DE, DF, DG, par la 12. pr. 1. & du centre D, & intervalle DE soit décrit le cercle EFG. Je dis qu'iceluy cercle est inscrit au triangle donné ABC.



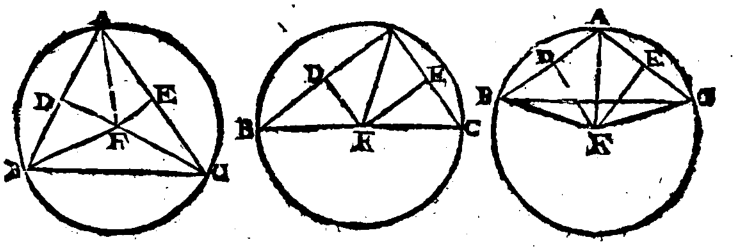
Car d'autant que l'angle DEB est droit, il sera egal à l'angle DFB, qui est pareillemẽt droit, & le total B étant coupé en deux egalement, les deux DEB & DBE, seront egaux aux deux DFB & FBD, &, le costé DB estant cõmun, le costé FD sera egal au costé DE par la 26. pr. 1. Par mesme discours DG se prouvera egale à DE, & par la 1. com. sent. les trois lignes DE, DF, DG, seront egales entr'elles: ainsi le cercle EFG décrit de l'intervale DE, le sera aussi de l'intervale des deux autres: & partant il passera par les points E, F, G, & en iceux touchera les trois costez du triangle par le Corol. de la 16. pr. 3. pource qu'à iceux costez sont perpendiculaires les demy diametres DE, DF, DG. Donc par la 5. def. de ce livre, le cercle EFG sera inscrit au triangle donné: Ce qu'il faloit faire.

PROBL. 5. PROP. V.

A l'entour du triangle donné décrire un cercle.

Soit le triangle donné ABC, à l'entour duquel il faut décrire un cercle.

Soient coupez en deux egalement les deux costez AB & AC aux points D & E par la 10. pr. 1. & par la 11 pr. 1. d'iceux points D & E, soient levées les perpendiculaires DF, EF, se rencontrans au point F, lequel sera ou dans le triangle, ou au costé BC, ou hors le triangle: & apres avoir mené les trois lignes



FA, FB, FC, les deux triangles ADF, BDF, auront les côtez AD, BD egaux, & DF commun, & les deux angles au point D egaux pour estre droits: donc les bases AF, BF, seront egales par la 4. prop. 1. Par mesme discours AF, CF, seront aussi egales : & par la 1. com. sent. les trois lignes FA, FB, FC, seront egales entr'elles : & partant le cercle décrit de F, & de l'intervalle FA, passera aussi par les points B & C. Nous avons donc décrit un cercle à l'entour du triangle donné ABC : Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste, que si le centre tombe dans le triangle, les trois angles sont aigus : car ils sont tous en une grande portion de cercle : mais s'il tombe en l'un des costez, l'angle opposé à iceluy sera droit, attendu qu'il sera au demy cercle : si finalement il tombe hors le triangle, l'angle opposé sera obtus, car il sera en une moindre portion de cercle.

Et au contraire, il est evident que si le triangle est oxigone, le centre tombera dedans iceluy : mais s'il est rectangle, il tombera au costé opposé à l'angle droit : & finalement s'il est ambligone, le centre tombera dehors.

SCHOLIE.

On peut aussi colliger de ce Probléme la maniere de décrire un cercle par trois points donnez, lesquels ne soient en une ligne droite : car ayant joint iceux points par lignes droites, on aura un triangle, à l'entour duquel il faudra décrire un cercle, comme il est enseigné en ce Prob. Cecy se pratique aussi plus facilement, comme nous avons enseigné en nostre Geometrie practique, Probl. 21.

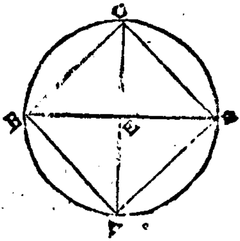
PROBL. 6. PROP. VI.

Dans un cercle donné, décrire un quarré.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut décrire un quarré.

Soient menées les deux diametres AC & BD se coupans au centre E en angles droits, & soient menées les quatre lignes droites AB, BC, DC, & DA. Je dis que le quadrilatere ABCD est un quarré inscrit au cercle donné.

Car d'autant que les quatre angles au point E sont droits, & egaux par sa construction, les 4. arcs ausquels ils insistent seront egaux par la 26. pr. 3. & partant les lignes droites qui soustendent iceux arcs seront aussi egales par la 29. prop. 3. donc tous les costez du quadrilatere ABCD seront egaux entr'eux. Mais par la 31. prop. 3. les angles d'iceluy quadrilatere sont droits, chacun d'iceux estant au demy cercle: donc le quadrilatere ABCD est un quarré inscrit au cercle proposé. Ce qu'il faloit faire.

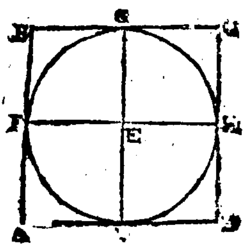


PROBL. 7. PROP. VII.

A l'entour d'un cercle donné décrire un quarré.

Soit le cercle donné FGSI à l'entour duquel il faut décrire un quarré.

Soient menez les deux diametres FS & GI se coupans à angles droits au centre E, & par la 31. pr. 1. des points G & I, soient menées les deux lignes BC, AD paralleles au diametre FS: Item par les points F & S, soient aussi menées les deux lignes AB, DC paralleles à GI, & icelles 4. lignes paralleles se rencontrans aux points A, B, C, D, feront le quadrilatere ABCD, lequel ie dis estre le quarré demandé.



Car en premier lieu, il est evident par la construction qu'il est parallelogramme, & par la 34. prop. 1. les quatre côtez seront egaux, chacun d'iceux estant egal à l'un des deux diametres FS, GI, qui sont egaux entr'eux. Pareillement par la mesme trente-quatre proposition 1. les quatre angles

A, B, C, D, sont egaux aux quatre qui sont au point E, chacun à son opposé, d'autant que ce sont parallelogrammes. Mais chacun d'iceux angles du point E étant droit, aussi chacun des quatre A, B, C, D, sera droit; & par consequent le parallelogramme ABCD, aura les quatre costez egaux, & les quatre angles droits, & partant il sera quarré, les costez duquel touchent le cercle és points, F, G, S, I, par le Corol. de la 16. prop. 3. Parquoy nous avons décrit un quarré à l'entour d'un cercle donné. Ce qu'il faloit faire.

PROBL. 8. PROP. VIII.

Dans un quarré donné, décrire un cercle.

Soit le quarré donné ABCD, (en la fig. prec.) dans lequel il faut décrire un cercle.

Soient coupez en deux egalement les quatre costez du quarré aux points F, G, S, I; & aprés avoir mené les deux lignes FS & GI s'entrecoupans au point E, d'iceluy point E, & de l'intervale EF, soit décrit un cercle FGSI, lequel sera le demandé.

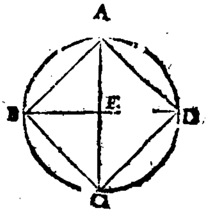
Car d'autant que AD, BC sont egales & paralleles, leurs moitiez AI, BG seront aussi egales & paralleles, & par la 33. pr. 1. AB sera egale & parallele à IG. Semblablement CD sera egale & parallele à la mesme IG: & par mesmes raisons on demontrera que AD, BC sont egales & paralleles à FS. Donc le quarré donné sera aussi divisé en quatre parallelogrammes, lesquels par la 34. prop. 1. auront les costez opposez egaux: ainsi AF & IE seront egaux; Item FE & AI; FB & EG; ID & ES; mais toutes icelles moitiez des costez du quarré sont egales entr'elles; partant EF, EG, ES, EI, seront aussi egales entr'elles. Parquoy le cercle décrit du point E, & de l'intervale de l'une d'icelles, comme EF, passera aussi par les points G, S, I, & touchera le quarré aux mesmes points F, G, S, I, par le Corol. de la 16. prop. 3. pource que les angles à iceux points sont droits. Nous avons donc décrit un cercle dans le quarré donné ABCD: Ce qu'il faloit faire.

PROBL. 9. PROP. IX.

A l'entour d'un quarré donné, décrire un cercle.

Soit le quarré donné A B C D, à l'entour duquel il faut décrire un cercle.

Soient menées les deux diagonales A C & BD, s'entrecoupans au point E : puis du centre E, & de l'intervale EA, soit décrit le cercle ADCB. Je dis qu'il sera le demandé, c'est à dire qu'il passera par les quatre angles du quarré donné A B C D.



Car le costé A B étant egal au costé A D, le triangle BAD sera Isoscele : & par la 5. prop. 1. les angles ABD & ADB, sur la base BD seront egaux, & chacun demy droit par la 32. prop. 1. estant l'angle BAD droit par la def. du quarré. Par mesme discours, nous demontrerons que tous les autres angles des points A, B, C, D, seront aussi demy droits : & partant egaux entr'eux : ainsi au triangle AED les deux angles EAD & EDA seront egaux, & par consequent les lignes droites EA, ED, aussi egales par la 6. prop. 1. & par mesme discours ED sera egale à EC, & EC à EB ; comme aussi EB à EA : & partant les quatre lignes droites EA, ED, EC & EB, seront egales entr'elles. Parquoy le cercle décrit du centre E, & de l'intervale de l'une d'icelles lignes passera par l'extremité des autres, qui sont les angles du quarré donné ABCD. Nous avons donc décrit un cercle à l'entour d'un quarré donné : ce qu'il faloit faire.

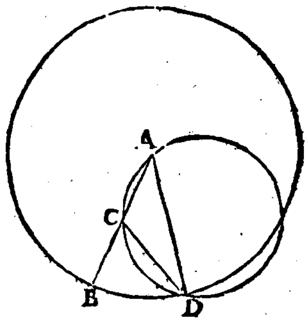
PROBL. 10. PROP. X.

Décrire un triangle Isoscele, ayant un chacun des angles de dessus la base double de l'autre.

Soit pris quelconque ligne droite A B, laquelle par la 11.

p. 2. ſoit coupée en C, en ſorte que le rectangle compris de AB, BC, ſoit egal au quarré de AC : puis du centre A, & de l'intervale AB ſoit décrit un cercle, dans lequel ſoit accommodée la ligne droite BD egale à AC : & apres ſoit menée la ligne AD. Je dis que ABD eſt un triangle Iſoſcele ayant chacun des angles ABD, ADB double de l'autre angle A, ainſi qu'il étoit requis.

Car en premier lieu, il apert aſſez qu'iceluy triangle ABD eſt Iſoſcele, puis que les deux coſtez AB, AD, procedent du centre A à la circonference BD : & apres avoir mené CD, à l'entour du triangle ACD, ſoit décrit le cercle ACD par la 5. p. 4. D'autant que par la conſtruction le rectangle de AB & BC eſt egal au quarré de CA, ou de ſon egale DB; par la 37. pr. 3. la ligne DB touchera le cercle ACD en D, & par la 32. pr. 3. l'angle CDB



ſera egal à l'angle A, qui eſt au ſegment alterne CAD : & ſi à iceux angles on ajoûte le commun ADC, les touts ſeront egaux ; ſçavoir le total ADB, au deux CAD & ADC: mais l'angle exterieur DCB, eſt auſſi egal aux deux oppoſez interieurs CAD & ADC par la 32. pr. 1. partant il ſera auſſi egal à l'angle ADB, ou ABD, qui luy eſt egal par la 5. p. 1. puis que le triangle eſt Iſoſcele : & par la 6. p. 1. le triangle DCB ſera auſſi Iſoſcele, & le coſté CD egal à DB : & partant auſſi egal à CA ; & le triangle DCA eſtant Iſoſcele, il aura les deux angles ſur la baſe AD egaux par la 5. prop. 1. & l'angle exterieur DCB (qui eſt egal à tous les deux) ſera double du ſeul A ; auſſi ſera ſon egal B, & partant auſſi ſon autre egal ADB. Nous avons donc conſtruit le triangle Iſoſcele ABD, ayant chacun des angles de deſſus la baſe BD double du troiſiéme : Ce qu'il faloit faire.

COROL.

COROLLAIRE.

Pource que les trois angles du triangle ABD, sont egaux à deux droits, c'est a dire à cinq cinquiémes de deux droits : Il est evident que l'angle A est la cinquiéme partie de deux droits, & chacun des autres B & D, les deux cinquiémes parties : Item A estre les deux quints d'un droit, & chacun des deux B & D les quatre quints, puis que tous les trois sont egaux à deux droits, c'est à dire à dix quints d'un droit.

SCHOLIE.

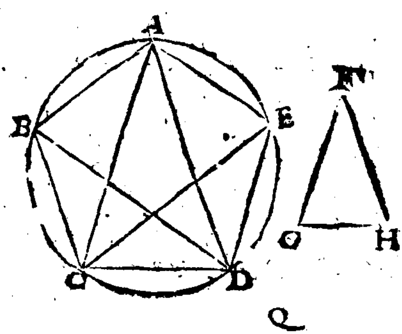
Or par quelle maniere on doit construire un triangle Isoscele, ayant un chacun des angles de dessus la base, non seulement double de l'autre, comme fait icy Euclide, mais aussi selon quelconque raison donnée, nous l'avons enseigné (apres Pappus & Clavius) en nostre Geometrique practique Prob. 37. & Scholie du 126.

PROBL. 11. PROP. XI.

Dans un cercle donné, décrire un pentagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDE, dans lequel il faut inscrire le pentagone demandé.

Soit par la prec. prop. construit le triangle FGH Isoscele, qui ait chacun des angles G & H double de l'angle F : puis au cercle donné soit inscrit le triangle ACD equiangle au triangle FGH



par la 2. p. 4. Et ayant coupé les angles ACD, ADC en deux egalement par les lignes droites CE & DB par la 9. p. 1. soient menées les lignes droites CB, BA, AE, ED. Je dis que le pentagone ABCDE inscrit au cercle donné, est equiangle & equilateral.

Car puisque le triangle FGH à chacun des deux angles sur la base GH, double du troisiéme F; le triangle ACD, qui est equiangle à iceluy FGH, aura aussi chacun des angles de dessus la base CD double du troisiéme A, lesquels étans coupez en deux egalement par les lignes droites CE & DB, les cinq angles ADB, BDC, CAD, DCE, ACE seront egaux, & par la 26. prop. 3. ils auront circonferences egales pour bases: mais les egales circonferences comprennent lignes droites egales par la 29. pr. 3. donc tous les cinq costez AB, BC, CD, DE & EA, étans egaux, le pentagone sera equilateral.

Aussi est-il manifeste par la 27. prop. 3. qu'il est equiangle, d'autant que chaque angle d'iceluy est soûtenu de circonferences egales, sçavoir de trois arcs comprenans trois costez du pentagone, vû que nous avons prouvé que tous iceux arcs sont egaux. Nous avons donc décrit dans un cercle donné un pentagone equiangle, & equilateral: Ce qu'il faloit faire.

COROLLAIRE.

De cecy, il s'ensuit, que l'angle du pentagone equilateral & equiangle, comprend les trois cinquiémes parties de deux droits, ou bien les 6 quints d'un droit. Car puis que les trois angles BAC, CAD, DAE sont egaux par la 27. prop. 3. & CAD est le quint de deux droits, ou les deux quints d'un droit; le total BAE, qui est composé de ces trois, sera les trois quints de deux angles droits, ou bien les six quints d'un droit.

SCHOLIE.

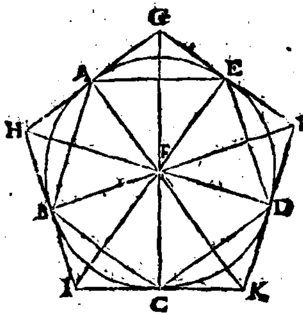
Clavius enseigne en ce lieu-cy deux manieres pour décrire un pentagone equilateral, & equiangle sur une ligne droite donnée & terminée, la plus facile desquelles nous avons enseignée en nostre Geometrie pratique Prob. 38. c'est pourquoy nous n'en ferons icy repetition.

PROBL. 12. PROP. XII.

A l'entour d'un cercle donné, décrire un pentagone, equiangle & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDE, à l'entour duquel il faut décrire un pentagone equilateral & equiangle.

Dans iceluy cercle soit décrit le pentagone ABCDE par la prec. prop. & apres avoir mené du centre F les 5 lignes FA, FB, FC, FD, FE, soient menées sur icelles les 5 lignes perpendiculaires GH, HI, IK, KL, LG par la 11. prop. 1. se rencontrans aux cinq points G, H, I, K, L: (elles se doivent rencontrer; car puis que les angles GAE, GEA sont moindres que deux droits, étans parties des angles droits GAF, GEF par la 11. com. sent. les lignes droites AG, EG se rencontreront de la part de G, & ainsi des autres.) Je dis que GHIKL est le pentagone demandé.



Car il est evidemment circonscrit au cercle donné, puis que par le Coroll. de la 16. p. 3. les lignes droites GH, HI, IK, KL, LG touchent ledit cercle és points A, B, C, D, E: En apres si on mene les cinq lignes FG, FH, FI, FK, FL; d'autant que les angles FAG, FEG sont droits par la 47. prop. 1. le quarré de FG sera egal aux deux quarrez de FA, AG; il sera aussi egal aux deux de FE, & EG; & par consequent les deux quarrez de FA, AG, seront egaux aux deux de FE, EG. Mais les quarrez de FA, FE sont egaux (étans décrits sur lignes egales.) Donc ceux de AG, & EG seront aussi egaux; & les lignes AG & EG egales: Parquoy les deux costez AF, FG du triangle AGF sont egaux aux deux costez EF, FG du triangle EGF, chacun au sien, & la base AG egale à la base GE; & par la 8. prop. 1. les angles AFG, EFG seront egaux;

& partant AFE sera double de AFG. Par mesme discours AFB, qui est egal à AFE par la 27. p. 3. (car ils ont egales circonferences pour bases) sera aussi double de AFH, & par consequent AFG & AFH seront egaux: Donc les triangles AGF, AHF ont deux angles egaux à deux angles, chacun au sien, & le costé AF commun: & par la 26. prop. 1. AG sera egale à AH. Par mesme discours GE & EL se trouveront egales: mais AG & EG estans egales, aussi leurs doubles GH & GL seront egales. Par mesme discours on prouvera tous les autres costez egaux, & partant le pentagone GHIKL sera equilateral.

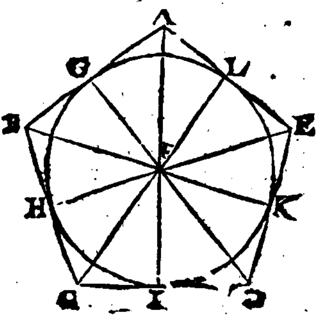
Qu'il soit aussi equiangle, il est evident: car nous avons monstré que les angles des triangles AGF, EGF sont egaux, sçavoir est, les angles AGF, EGF: Item AGF, AHF: & qu'on en pouvoit dire autant des autres: donc les deux angles sous le point G, seront egaux aux deux angles sous le point H, & ainsi des autres: partant le pentagone sera equiangle & equilateral. Nous avons donc décrit à l'entour d'un cercle donné un pentagone, &c. Ce qu'il faloit faire.

PROBL. 13. PROP. XIII.

Dans un pentagone donné equiangle, & equilateral, décrire un cercle.

Soit donné un pentagone equiangle, & equilateral ABCDE, dans lequel il faut inscrire un cercle.

Par la 9. prop. 1. soient coupez en deux egalement deux des angles d'iceluy A & B, par les lignes AF & BF se rencontrans au point F, & par la 12. pr. 1. d'iceluy point F soient menées FG, FI, FH, FK, FL, perpendiculaires sur les costez du pentagone; puis du centre F, & intervale FG soit décrit le cercle GHIKL.



Je dis qu'il est inscrit au pentagone donné.

Car ayant mené les lignes droites FC, FD & FE : d'autant que les deux costez AB, BF, du triangle ABF sont egaux aux deux costez CB, BF du triangle BFC, chacun au sien, & les angles ABF. CBF, contenus d'iceux costez, egaux par la construction; les bases AF, CF seront egales, & les angles BAF, BCF aussi egaux par la 4. p. 1. Mais puis que les angles du pentagone A & C sont posez egaux, & que par la construction l'angle BAF est moitié de BAE; l'angle BCF sera aussi moitié de BCD, & consequemment iceluy BCD, est divisé en deux egalement par la ligne FC. Par même raison nous montrerons que les deux autres angles du pentagone D & E sont divisez en deux egalement par les lignes FD & FE. Maintenant puisque par la construction les deux angles sous le point A sont egaux, ayant esté le total coupé en deux egalement, & que l'angle droit G est egal à l'angle droit L, & le costé FA commun aux deux triangles AGF, ALF, par la 26. prop. 1. les deux autres costez seront egaux, sçavoir AG à AL, & FG à FL : par mesme discours FH, FI, FK, se trouveront egales : & partant le cercle décrit de F & intervale FG, passe par les points G, H, I, K, L, esquels il touche les costez du pentagone proposé par le Cor. de la 16. p. 3. Le cercle GHIKL est donc inscrit au pentagone donné. Ce qu'il faloit faire.

PROBL. 14. PROP. XIV.

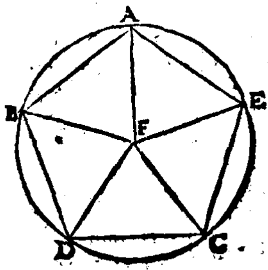
A l'entour d'un pentagone donné, lequel est equiangle, & equilateral, décrire un cercle.

Soit le pentagone equiangle, & equilateral donné ABCDE, à l'entour duquel il faut décrire un cercle.

Soient coupez les deux angles A & B en deux egalement par la 9. p. 1. avec les lignes droites AF & BF se rencontrans au point F, & d'iceluy point F; & intervale de l'une d'icelles deux lignes, soit décrit le cercle ABCDE. Je dis qu'il sera circonscrit au pentagone donné.

Car ayant mené les trois lignes FC, FD, FE, nous demontrerons comme au precedent Probl. qu'elles couperont en deux egalement les angles C, D, E. En apres, puis que le pentagone est equiangle, & chaque angle d'iceluy est coupé en deux egalement, au triangle AFB les deux angles sur la base BA se-

seront egaux, & par la 6. prop. 1. les deux costez AF & BF, seront aussi egaux : par le mesme discours BF & FC seront aussi egales, & ainsi des autres coupantes ; & par la 1. com. sent. il est evidét qu'icelles 5. lignes FA, FB, FC, FD, FE seront egales entr'elles, & partant que le cercle décrit de l'intervale de l'une d'icelles, passera par les extremitez des autres, qui sont aussi les cinq angles du pentagone donné. Parquoy nous avons décrit un cercle á l'entour d'un pentagone equiangle, & equilateral donné. Ce qu'il faloit faire.

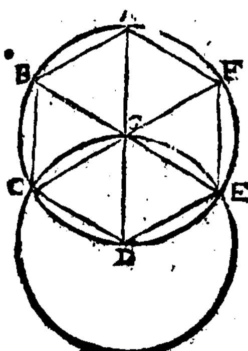


PROBL. 15. PROP. XV.

Dans un cercle donné, inscrire un hexagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDEF, dont le centre est G ; dans lequel cercle il faut inscrire un hexagone equiangle, & equilateral.

Soit mené le diametre AD, puis du centre D, & intervale DG, soit décrit le cercle GCE coupant le donné aux points C & E, desquels points soient menées les deux lignes CGF, EGB. finalement ; soient menées les lignes droites AB, BC, CD, DE, EF, FA ; & on aura décrit au cercle donné l'hexagone ABCDEF, que je dis être equilateral, & equiangle.



Car il est evident (demonstrant comme en la 1. p. 1.) que les deux triangles CDG, DEG construits sur la ligne DG sont equilateraux, & par le Cor. de la 5. p. 1. chacun d'iceux sera aussi equiangle, & par la 32. p. 1. un chacun de leurs angles vaudra le tiers de deux angles droits : & puis que par la 13. p. 1. les deux angles CGE ; EGF sont egaux à deux droits, l'angle EGF vaudra aussi le tiers de deux angles droits : donc tous les angles du point G seront egaux entr'eux, valant chacun un tiers de deux angles droits; puis que par la 15. p. 1. les opposez au sommet sont egaux : partant les six bases AB, BC, CD, DE, EF, FA, seront egales, & les angles sur icelles aussi egaux par la 4. p. 1. Donc l'hexagone ABCDEF sera equilateral : mais il est aussi equiangle. Car puis que tous les angles des six triangles sont egaux, les deux du point A seront egaux aux deux du point B, & ainsi des autres. Nous avons donc décrit dans un cercle donné un hexagone equiangle & equilateral : Ce qu'il faloit faire.

COROLLAIRE.

Par cecy est manifeste que le costé de l'hexagone est egal au demy diametre du cercle ; car le costé de l'hexagone DC, est egal au semidiametre DG par la def. du cercle.

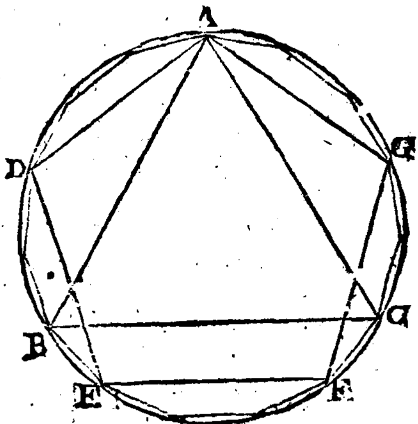
PROBL. 16. PROP. XVI.

Dans un cercle donné, décrire un quindecagone equiangle & equilateral.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inscrire un quindecagone equiangle & equilateral.

Soit premierement décrit dans iceluy cercle le triangle equilateral ABC par la 2. p. de ce livre ; les trois costez étans egaux, la circonference sera divisée en trois egalement par les 26. ou 28. pr. 3. pareillement, soit en iceluy cercle inscrit le pentagone ADEFG par la 11. prop. de ce livre, ayant l'un des angles au point A. Je dis qu'ayant mené la ligne droite BE, ce sera le costé du quindecagone demandé.

Car, comme il a esté dit, l'arc ADB est le tiers de toute la circonference ; partant doit contenir cinq costez du quindecagone. Item la ligne droite AD, costé du pentagone, soûtient l'arc AD, cinquiéme partie de [illegible] circonference : partant doit contenir trois costez du quindecagone : & consequemment les deux arcs AD & DE contiendront six costez du quindecagone. Mais l'arc ADB en contient cinq : donc l'arc BE sera la quinziéme partie de toute la circonference : & partant la ligne droite BE sera le costé du quindecagone, & si par la 1. p. de ce livre on accommode au cercle encores 14 lignes droites egales à icelle BE, sera inscrit au cercle un quindecagone equilateral, & aussi equiangle par la 27. pr. 3. puis que tous ses angles soustendent arcs egaux, chacun d'iceux angles étant composé de 13 arcs egaux. Nous avons donc au cercle donné décrit un quindecagone, &c. Ce qu'il faloit faire.



Pareillement aussi, tout ainsi qu'au pentagone, si par les quinze points des divisions egales du cercle, nous tirons des lignes droites qui le touchent, se décrira un quindecagone equilateral & equiangle à l'entour dudit cercle : & davantage nous décrirons & circonscrirons un cercle à un quindecagone equilateral & equiangle donné, suivant la mesme methode pratiquée au pentagone.

176

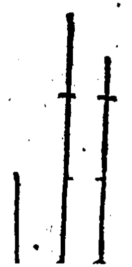
Fin du quatriéme Element.

ELEMENT CINQUIÉME

DEFINITIONS.

PArtie est une grandeur tirée d'une autre plus grande, lors que la plus petite mesure la plus grande.

C'est à dire que lors qu'une grandeur en mesure une autre plus grande, elle est dite partie d'icelle: Comme A qui est contenu 3 fois en B, est dit partie d'iceluy. Or entre les Mathematiciens il y a deux sortes de partie: car il y en a une qui mesure son tout; comme A, lequel repeté 3 fois constituë son tout B: & l'autre sorte ne me-



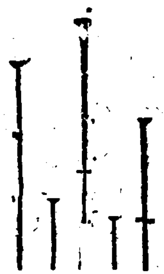
A B C

2 6 5

sure pas son tout, mais prise ie ne sçay combien de fois excede iceluy, ou defaut au même, comme A, lequel êtant pris 3 fois excede C, mais êtant pris seulement 2 fois, il est excedé par le même C : Or la premiere est dite partie aliquote; & l'autre, partie aliquante: de cette-là seulemẽt parle icy Euclide, puis que cette-cy ne mesure son tout, & aussi ne l'apelle-il pas partie au 7. livre, mais parties.

2. Multiplice, est une grandeur plus grande qu'une autre plus petite, quand la plus grande est mesurée de la plus petite.

C'est à dire que si la grandeur A, est mesurée par B, moindre grandeur qu'icelle A, elle est ditte multiplice de B ; ainsi aussi la grandeur C, qui est mesurée 5. fois par D, est dite multiplice d'icelle D.



Or quand deux petites grandeurs en mesurent egalement deux autres plus grandes, c'est à dire, qu'une moindre est contenuë autant de fois en une plus grande, qu'une autre moindre en une autre plus grande, ces deux plus grandes là sont dites equimultiplices d'icelles moindres : comme les grandeurs A & E sont dites equimultiplices de B & D, pour ce que tout ainsi que A contient trois fois B, ainsi aussi E contient trois fois D. Et le même se doit entendre, si plusieurs moindres grandeurs en mesurent egalement plusieurs grandes.

3. Raison, est une habitude de deux grandeurs de même genre, comparées l'une à l'autre selon la quantité.

C'est à dire que quand deux quantitez de même genre, comme deux nombres, deux lignes, deux superficies, deux solides, &c. sont comparez entr'eux selon la quantité, c'est à dire selon que l'une est plus grande que l'autre, ou moindre, ou egale, telle comparaison est apelée raison, & par quelqu'uns proportion; Parquoy on ne peut pas dire, qu'il y ait quelque raison d'une ligne à une superficie, ou d'un nombre à une ligne, puis que ny la ligne & la superficie, ny le nombre & la ligne, ne sont pas quantitez de même genre. Semblablement si on confere une ligne avec une ligne selon la qualité, c'est à dire, selon que l'une est blanche, & l'autre noire; ou bien que l'une est chaude, & l'autre froide, &c. encore que l'une & l'autre soient de même genre, cette comparaison n'est pas dite raison, pource qu'elle n'est pas faite selon la quantité.

Or jaçoit que la raison se trouve proprement ès seules quantitez, si est-ce toutesfois que toutes autres choses, qui en quelque maniere prennent la nature de la quantité, cõme sont les temps, les sons, les voix, les lieux, les mouvemens, les pois, & les puissances, sont aussi dites avoir raison, si leur habitude est considerée selon la quantité, comme quand nous disons un temps être plus grand qu'un autre temps, ou moindre; ou deux temps estre egaux, &c. telle habitude sera dite raison, pource qu'alors les temps sont considerez ainsi que certaines quantitez.

En toute raison cette quantité-là, qui est referée à une autre, est dite par Euclide, & autres Geometres, antecedant de la raison; & celle-là à laquelle elle est referée, est dite consequent d'icelle raison: Comme en la raison de A à B; A est dit antecedant de la rai-

son, & B consequent; Que si au contraire B est comparé à A; B sera apellé antecedant, & A consequent.

A———
B———

Or cette raison definie par Euclide, est divisée en raison rationelle, & irrationelle.

La rationelle, est celle qui se peut exprimer en nom-bres: comme la raison d'une ligne de 10 pieds à une autre de cinq pieds, laquelle est exhibée par ces nombres 10 & cinq. Mais l'irrationelle, est cette raison-là qui ne se peut exprimer en nombres: comme la raison du diametre d'un quarré au côté d'iceluy, laquelle ne se peut trouver ny exprimer en nombre; comme est demontré par Euclide, en la derniere proposition du 10. livre.

Autres disent que la raison ou portion rationelle, est celle qui a les deux quantitez commensurables, c'est à dire, qui ont une commune partie aliquote, ou bien qui sont mesurées par une même commune mesure: comme la raison d'une ligne de 20 pieds à une autre de 8 pieds: car une ligne de 4 pieds ou de 2, est partie aliquote de l'une & l'autre de ces deux-là, & par consequent mesure icelles. Mais la raison ou proportion irrationelle, est celle (disent-ils) qui a les deux quantitez incommensurables, c'est à dire, qui n'ont nulle partie aliquote, ou desquelles on ne peut trouver aucune commune mesure. Comme la raison du costé d'un quarré à sa diagonalle, & de plusieurs autres lignes dont est traité au 10. livre.

Cette raison se divise aussi en raison d'egalité, & d'inegalité: La raison d'egalité, est quand deux quãtitez egales se cõparent entr'elles, comme 10 à 10; une ligne de 12 pieds à une autre ligne de 12 pieds, &c. Mais la raison d'inegalité, est quand deux *quantitez inegales se comparent entr'elles, comme 10 à 4 est raison d'inegalité; telle est aussi celle de 5 à 93 celle d'une ligne de 7 pieds à une autre de 15 pieds. &c.*

Cette raison d'inegalité, est subdivisée en raison d'inegalité majeure, & d'inegalité mineure. La raison d'inegalité majeure, est quand la plus grande quantité est comparée à la moindre: comme la raison de 8 à 5, est dite raison d'inegalité majeure: item la raison d'une ligne de 10 pieds à une de 4, &c. Mais la raison d'inegalité mineure, est quand on compare la moindre quantité à la plus grande: comme la raison de 7 pieds à 9, s'apelle raison de moindre inegalité: item celle d une ligne de 9 pieds à une autre de 12 pieds, &c.

La raison rationelle d'inegalité majeure, est divisée en cinq genres, sçavoir raison multiple, superparticuliere, superpartiente, multiple superparticuliere, & multiple superpartiente: les trois premieres desquelles sont simples, & les deux dernieres composées d'icelles premieres.

La raison multiple, est quand l'antecedant d'icelle contient le consequent plusieurs fois precisément: & cette raison contient sous soy diverses especes. Car si l'antecedant contient le consequent deux fois precisement, elle est dite double: si trois fois, triple, si 4, quadruple: si dix, deculpe, &c. Comme la raison de 20 à 4 est dite quintuple, pource que l'antecedant 20 contient le consequent 4, cinq fois, & la raison d une ligne de 18 pieds, à une autre de 3 pieds, est dite sextuple, d'autant que 18 contient 3 six fois, & ainsi des autrei.

La raison superparticuliere, est quand l'antecedent *contient le consequent une fois, & en outre une partie aliquote d'iceluy consequent : & cette raison a diverses especes. Car si ceste partie aliquote est moitié d'iceluy consequent, est constituée une raison sesquilatere, comme la raison de 3, à 2; en laquelle l'antecedent, 3 contient le consequent 2, une fois & encore $\frac{1}{2}$ d'iceluy; si elle est tierce partie, sesquitierce, si une quarte partie, sesquiquarte: si une cinquiéme partie, sesquiquinte, &c. Commençant tousiours le nom de ladite raison par* sesqui, *& se terminant par le denominateur de la partie aliquote.*

La raison superpatiente, est quand l'antecedant contient le consequent une fois; & en outre plus d'une partie aliquote d'iceluy: & a aussi cette raison plusieurs especes. Car si l'antecedant contient le consequent une fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'iceluy, est constituée une raison superbipatiente tierces comme la raison de 20 à 12, en laquelle le nombre 20 contient 12 une fois & $\frac{2}{3}$ d'iceluy: si $\frac{3}{4}$, sera constituée une raison supertripartiente quarte, comme la raison d'une ligne de 63 pieds à une de 36, & ainsi des autres; le nom d'icelles commençant tousiours par super, *& prenant à son milieu le numerateur de la partie aliquote & le denominateur à la fin d'iceluy.*

La raison multiple superparticuliere, est quand l'antecedant contient le consequent plusieurs fois, & encore une partie aliquote d'iceluy: cette-cy est composée de la premiere & de la deuxiéme: & tout ainsi que chacune d'icelles contient plusieurs especes, aussi fait telle-cy. Car si l'antecedant contient le consequent 2 fois, & encore $\frac{1}{2}$ d'iceluy, cette raison sera apellée double sesquialtere, comme la raison de 5 à 2, en laquelle 5 contient 2 deux fois & $\frac{1}{2}$ d'iceluy: si $\frac{1}{3}$, comme d'une *ligne de 7 pieds à une autre de 3 pieds ; cette raison s'apellera double sesquitierce : & la raison de 29 à 7 s'apellera quadruple sesquiseptuble, d'autant qu'en 29.7. est cõtenu 4 fois & $\frac{1}{7}$ d'iceluy, & ainsi des autres.*

La raison multiple superpatiente, est quand l'antecedant contient le consequent plusieurs fois, & plusieurs parties aliquotes d'iceluy : cette raison est composée de la premiere & troisiéme ; & tout ainsi que chacune d'icelles contient sous soy plusieurs especes, aussi fait cette-cy : comme si l'antecedant contient le consequent, 2 fois, encore $\frac{2}{3}$ parties d'iceluy, cette raison sera apellée double superbipartiente tierce, comme est la raison de 8 à 3 : mais s'il le contient 3 fois, & encore $\frac{3}{4}$ d'iceluy, elle s'apellera triple superpatiente quarte, comme est la raison de 15 à 4 s'il le contient 4 fois, & encore $\frac{6}{7}$ d'iceluy, elle sera dite quadruple supersextupartiente septuple, comme est la raison de 34 à 7, & ainsi des autres.

Or tout ce qui a été dit cy-dessus des cinq especes de raison rationelle d'inegalité majeure, se doit aussi entendre des cinq especes de l'inegalité mineure, excepté qu'il faut tousiours aposer cette syllabe sub, *disant submultiple au lieu de multiple, subsuperparticuliere, au lieu de superparticuliere, & ainsi des autres.*

Et pource que les denominateurs des raisons rationelles cy-dessus exposées sont assez utiles, nous enseignerons icy par quels nombres elles se dénomment. Nous apellons denominateur d'une raison, le nombre qui exprime distinctement, & apertement la quantité de la grandeur antecedante au respect de la consequente : comme le dominateur de la raison quintuple est 5, pource que ce nombre là montre que la grandeur ou quantité antecedante contient 5 fois la consequente.

Semblablement le denominateur de la raison sesquiquarte est 1 $\frac{1}{4}$, pource qu'iceluy nombre signifie que la quantité antecedante contient la consequente une fois & $\frac{1}{4}$ d'icelle: Item le denominateur de la raison subtriple, est $\frac{1}{3}$, car il demonstre que l'antecedant est la tierce partie du consequent: & ainsi des autres. C'est pourquoy, comme j'estime, Euclide au 6. livre, & autres Mathematiciens, apellent le denominateur de quelconque raison la quantité d'icelle, car il denomme & exprime comme nous avons dit, combien une grandeur est au respect d'une autre avec laquelle elle est conferée, ainsi qu'il apert par les exemples proposez.

Or de ces choses on peut facilement colliger le denominateur de quelconque raison. Car le denominateur de la raison multiple, est le nombre entier contenant autant d'unitez, que l'antecedant de la raison contient de fois le consequent. Comme le denominateur de la raison double, est 2; de la sextuple, 6; de la centuple 100, &c. Mais le denominateur de quelconque raison submultiple est un nombre rompu, duquel le numerateur est tousiours l'unité: mais le denominateur est le nombre denommant la raison multiple correspondante. Comme le denominateur de la raison subdouble est $\frac{1}{2}$: de la subsextuple $\frac{1}{6}$ de la subcentuple $\frac{1}{100}$ &c. Il est donc facile de trouver le denominateur de quelconque raison multiple ou submultiple; puis que la prolation montre le denominateur de la raison, comme il est evident par les exemples proposez cy-dessus.

Le denominateur de quelconque raison superparticuliere est l'unité avec la partie aliquote que l'antecedant doit comprendre outre le consequent. Comme le denominateur de la raison sesquialtere, est 1 $\frac{1}{2}$: de la sesquitierce $\frac{1}{3}$; &c. Il n'est donc pas difficile de trouver

ver le denominateur d'une raison superparticuliere, puis que la prolation d'icelle raison exprime le denominateur par sa partie aliquote, comme il apert par les exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison subsuperparticuliere est un nõbre rompu, duquel le numerateur est moindre que le denominateur seulement d'une unité. Comme le denominateur de la raison subsequialtere, est $\frac{2}{3}$: & celuy de la subsesquitierce, est $\frac{3}{4}$ &c. Donc le denominateur de telle raison sera aisément trouvé, car il n'y a qu'à prendre pour numerateur de la fraction, le denominateur de la partie aliquote : & pour le denominateur d'icelle fraction, le nombre plus grand de l'unité. Comme le denominateur de la raison subsesquiquinte est $\frac{5}{6}$: & celuy de la raison subsesquiseptiéme est $\frac{7}{8}$: mais celuy-là de la raison subsesquineufiéme, est $\frac{9}{10}$.

Le denominateur de quelque raison superpartiente, est une unité avec les parties aliquotes que l'antecedant doit contenir outre le consequant. Comme le denominateur de la raison supertripartiente quarte, est $1\frac{3}{4}$: celuy de la raison superquadripartiente quintes, est $1\frac{4}{5}$; & ainsi des autres. Or les denominateurs de telles raisons sont faciles à trouver, pource que la prolation même de la raison exhibe le propre denominateur d'icelle, comme il apert és exemples cy-dessus. Mais le denominateur de quelconque raison subsuperpartiente, est un nombre rompu, duquel le numerateur est moindre que le denominateur, d'autant d'unitez, que la quantité consequente contient de parties aliquotes par dessus l'antecedante. Comme le denominateur de la raison subsupertripartiente quarte est $\frac{4}{7}$; celuy de subsuperquadripartiente quinte, est $\frac{5}{6}$ &c. On trouvera donc le denominateur de telle raison, si pour le numerateur de *la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes exprimées en la raison proposée, auquel si on ajoûte le nombre d'icelles parties, on aura le denominateur d'icelle fraction : comme le denominateur de la raison subsupertripartiente quinte est $\frac{5}{8}$, pource que le numerateur de cette fraction est le nombre denommant les quintes, sçavoir 5, auquel est ajoûté le nombre 3, des trois parties, afin de faire 8, denominateur de la fraction : mais le denominateur de la raison subsuperquadripartiente neufiéme est $\frac{9}{13}$: & ainsi des autres.*

Le denominateur de quelconque raison multiple superparticuliere est le nombre entier denommant la raison multiple proposée avec la partie que la quantité antecedante doit contenir outre la consequente. Comme le denominateur de la raison triple sesquiseptiéme est $3\frac{1}{7}$: mais celuy de la raison quadruple sesquiquinte, est $4\frac{1}{5}$, &c. Le denominateur de telle raison est aisé à exhiber, pource que la prolation de la raison exprime distinctement tant le denominateur de la multiple raison, que la partie aliquote, comme il se voit és exemples proposez. Et le denominateur de quelconque raison submultiple superparticuliere est une fraction dont le numerateur est le nombre denommant les parties aliquotes contenuës en la raison. Comme le denominateur de la raison subtriple sesquiquarte, est $\frac{4}{13}$; de subquintuple sesquineufiéme, $\frac{9}{46}$, &c. On trouvera le denominateur de telle raison, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur de la partie aliquote, & iceluy étant multiplié par le denominateur de la raison multiple, si on ajoûte 1 au produit, on aura le denominateur de la fraction, comme il est manifeste par les exemples cy-dessus.

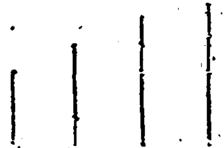
Le denominateur de quelconque raison multiple su-

perpartiente, est le nombre entier, denommant la raison multiple obtenuë en icelle, avec les parties aliquotes que la quantité antecedente doit contenir de la consequente. Comme le denominateur de la raison triple superbipartiente tierces, est $3\frac{2}{3}$; de quadruple supertripartiente quintes, $4\frac{3}{5}$, &c. Il est facile de trouver le denominateur de telles raisons, pource que la prolation exprime distinctement, tant le denominateur de la raison multiple, que les parties aliquotes, comme apert és exemples cy-dessus: & le denominateur d'une raison submultiple superpartiente, est une fraction, dont le numerateur est le nombre denommant les parties aliquotes d'icelle raison: comme le denominateur de la raison subtriple superbipartiente tierces, est $\frac{3}{11}$: de subquadruple supertripartiente quintes $\frac{5}{23}$, &c. Le denominateur de telles raisons sera trouvé, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominatenr des parties aliquotes: lequel étant multiplié par le denominateur de la raison multiple, & au nombre produit ajoûté le nombre des parties aliquotes, viendra le denominateur de la fraction, ainsi qu'il apert és exemples posez cy-dessus.

Finalement le denominateur de la raison d'egalité est toûjours l'unité, pource que les termes ou quantitez d'icelle raison sont egales entr'elles; & partant l'une contient l'autre une fois precisément.

4. Proportion, est une similitude de raisons.

Tout ainsi que la comparaison de deux quantitez entr'elles est dite raison; ainsi la comparaison & ressemblance de deux ou plusieurs raisons entr'elles, est dite proportion: comme si la raison de A à B, est semblable à la raison de C à D, l'habitude d'entre ces raisons sera dite proportion. Et c'est ce que les Grecs apellent analogie, & *quelques Latins* proportionalité: *Selon Boëtius & Iordanus il y en a de plusieurs sortes, dont les principales qu'ils apellent* Medieté, *sont la proportion Arithmetique, la Geometrique, & l'Harmonique. Mais Euclide ne traite icy que de la Geometrique, laquelle est ou continuë, ou discrete: la proportion continuë, est celle de laquelle les grandeurs entre moyennes sont prises deux fois, tellement qu'il ne se fait nulle interruption de raisons, ains chaque quantité entre moyenne est antecedent & consequent, sçavoir antecedant de la quantité subsequente, mais consequent à la quantité antecedante: comme si on dit que telle qu'est la raison de A à B, telle est celle de B à C, où la quantité B est antecedant de la quantité C, & consequent de la quantité A. Mais la proportion discrete ou non continuë, est celle en laquelle chaque quantité entremoyenne, est prise seulement une fois, tellement qu'il se fait interruption de raisons, & aucune quantité n'est antecedant & consequent: mais seulement antecedent ou consequent: comme quand on dit que la raison de A à B, est comme celle de C à D.*



A. B. C. D.
8. 12. 18. 27

5. Les grandeurs sont dites avoir raison l'une à l'autre, lesquelles étans multipliées se peuvent exceder l'une l'autre.

Euclide ayant en la 3. def. apelé raison l'habitude de deux grandeurs de même genre, il explique en cette-cy quelle chose requierent deux quantitez de même genre, afin qu'elles soient dites avoir raison, sçavoir est, que l'une ou l'autre d'icelles étant multipliée, elles s'augmente en sorte, que finalement elle surpasse l'au-

tre : ainsi il y a raison entre le costé d'un quarré, & le diametre d'iceluy, puis que le costé multiplié par 2. c'est à dire pris deux fois, excede le diametre. Car d'autant que deux costez du quarré & le diametre, constituent un triangle Isoscele, par la 20. p. 1 les deux costez du quarré seront plus grands que le diametre. Ainsi pareillement entre la circonference d'un cercle & le diametre d'iceluy, il y a raison (laquelle toutesfois n'est encore connuë) puis que le diametre multiplié par 4. c'est à dire pris 4 fois, excede la circonference: car toute la circonference, comme il est demontré par Archimede, ne contient que trois fois le diametre, & encore une particule peu moindre qu'une septiéme partie d'iceluy diametre. Mais il s'ensuit de cette def. qu'une ligne finie n'aura raison à une infinie, encores qu'icelles deux lignes soient de mesme genre de quantité: car en quelque sorte que ce soit multipliée la ligne finie elle ne pourra surpasser l'infinie. S'ensuit aussi qu'il n'y a point de raison entre un angle rectiligne, & un angle contingent. Car il apert de la 16. pr 3 qu'iceluy angle contingent, ne peut jamais exceder un angle rectiligne.

6. Les grandeurs sont dites être en même raison, la premiere à la seconde, comme la troisiéme à la quatriéme, quand les equimultiplices de la premiere & troisiéme, aux equemultiplices de la seconde & quatriéme, en quelque multiplication que ce soit, defaillent ensemble, sont egaux, ou excedent, un chacun à un chacun, prenant ceux-là qui s'entre-répondent.

Ayãt été dit par Euclide, que c'est que raison, & quelles grandeurs sont dites avoir raison l'une à l'autre, main-

tenant il declare quelle condition requierent les grandeurs pour être en même raison. sçavoir est, que les equemultiplices de la premiere & troisiéme grandeur excedent, soient egaux ou defaillent aux equemultiplices de la deuxiéme & quatriéme en quelque multiplication que soient pris iceux equemultiplices, comme apert en ces quatre quantitez A, B, C, D, ou les equemultiplices de A & C, premiere & 3, sont E & F, & les equemultiplices de B & D, 2e & 4e quantitez sont G & H: tellement qu'il se voit qu'ayant multiplié A & C, par un même nombre; & B, D, par quelconque même nombre, si le multiplice E excede le multiplice G qui luy correspond, aussi le multiplice F excede le multiplice H; s'il est egal, l'autre sera aussi egal; s'il defaut aussi sera l'autre, & ce en quelconque multiplication qu'on prenne les equemultiplices : & partant il y a même raison de A premiere quantité à B seconde, que de C troisiéme à D quatriéme.

Par la converse de cette def. s'il y a telle raison de la premiere à la seconde, que de la troisiéme à la quatriéme, il s'ensuit que les equemultiplices de la pre-

miere & troisiéme excedent, sont egaux, ou defaillent aux equemultiplices de la deuxiéme & quatriéme, engendrées de quelque multiplication que ce soit.

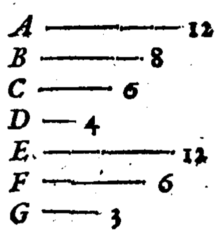
Et aussi s'il n'y a même raison de la premiere à la seconde, que de la tierce à la quatriéme, il s'ensuivra que les equemultiplices de la premiere & troisiéme n'excederont, ne seront egaux, ou ne defaudront aux equemultiplices de la deuxiême & quatriéme produite de quelque multiplication que ce soit.

Or ce qui est dit icy de quatre grandeurs se doit aussi entendre de trois, prenant celle du milieu deux fois, afin qu'il y en ait quatre.

7. Les grandeurs qui sont en même raison sont apelées proportionnelles.

Comme si des grandeurs A, B, C, D, il y a mesme raison de A à B, que de C à D, icelles grandeurs sont dites proportionnelles.

Et les grandeurs E, F, G, lesquelles sont en proportion continuë, sont aussi dites continuellement proporttionnelles.



8. Quand des equemultiplices, celuy de la premiere grandeur excede celuy de la seconde, & le multiplice de la troisiéme n'excede celuy de la quatriéme, lors il y aura plus grande raison de la premiere grandeur à la seconde, que de la troisiéme à la quatriéme.

Euclide declare icy quelle condition doivent avoir 4 grandeurs, afin que la premiere soit dite avoir plus grande raison a la seconde que la tierce à la 4^e^, disant qu'ayant pris les equemultiplices de la premiere & de la 3^e^, & les equemultiplices de la deuxiéme & 4^e^, si la multiplice de la premiere excede la multiplice de la 2^e^ mais la multiplice de la 3^e^ n'excede la multiplice de la 4^e^ il y aura plus grande raison de la premiere grandeur à la seconde, que de la 3^e^ a la 4^e^, comme il apert en l'exemple ici posé, auquel sont prises E & F, doubles de A & C, premiere & 3^e^ grandeurs, mais G & H triples de B & D, deuxieme & 4^e^ grandeurs: & pource que E multiplice de A premiere est plus grand que G multiple de B 2^e^, & F multiplice de C 3^e^ n'est pas plus grand que H multiplice de D 4^e^, la raison de A premiere grandeur à B 2^e^, est dite plus grande que la raison de C 3^e^ à D 4.

Or afin que quatre grandeurs soient dites étre en même raison, il est necessaire que les equemultiplices d'icelles, pris selon quelconques multiplications, excedent, soient egaux ou defaillent, comme il a été exposé en la 6. def. Mais afin que la premiere grandeur soit dite avoir plus grande raison a la 2^e^, que la 3^e^ à la 4^e^: c'est assez que des equemultiplices pris selon quelque multiplication, celuy de la premiere grandeur excede celui de la deuxiéme: & le multiplice de la troisiéme n'excede celuy de la quatriéme, encore que selon plusieurs autres multiplications ces equemultiplices ne soient tels. Parquoy pour conclurre en quelque demonstration qu'il y a plus graude raison d'une grandeur à une au-

tre, que d'une troisiéme à une quatriéme. Il suffira de demontrer que selon quelque multiplication, le multiplice de la premiere grandeur excedant celuy de la seconde, le multiplice de la troisiéme n'excede celuy de la quatriéme.

Et convertissant cette 8 def. s'il y a plus grande raison de la premiere grandeur à la deuxiéme, que de la troisiéme à la quatriéme, le multiplice de la premiere excedant celuy de la deuxiéme, il se peut faire quelque multiplication par laquelle le multiplice de la troisiéme n'excede celuy de la quatriéme.

Que si au contraire d'icelle def. le multiplice de la premiere grandeur ne surmonte celuy de la deuxiéme, & le multiplice de la tierce excede celuy de la quarte, la premiere grandeur sera dite avoir moindre raison à la deuxiéme que la tierce à la quarte. La converse a aussi lieu.

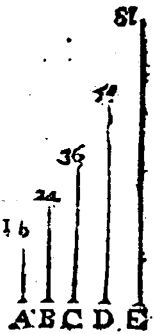
9. Proportion ne peut être constituée sur moins de trois termes.

Puis qu'il a été dit en la 3. def. que raison est l'habitude de deux quantitez, & que proportion par la 4. def. est une similitude de deux ou plusieurs raisons: il s'ensuit qu'il n'y peut avoir moins de trois quantitez ou termes en une proportion, si elle est proportion continuë, mais il en faut quatre au moins, si elle est proportion discrette.

10. Quand trois grandeurs sont proportionnelles, la premiere est dite avoir à la troisiéme la raison doublée de la premiere

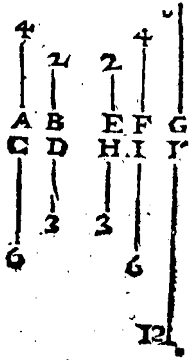
à la seconde : mais s'il y en a quatre, la premiere est dite être à la quatriéme, en raison triplée de la premiere à la seconde : & toûjours d'un même ordre une plus, jusques à ce que la proportion soit achevée.

Comme si les grandeurs A, B, C, D, E, sont continuellement proportionnelles, la premiere quantité A est dite avoir à la 3e quantité C, la raison doublée de celle de A à la 2e B, pource qu'être A & C sont deux raisons, qui sont egales à la raison de A à B, sçavoir est la raison de A à B, & celle de B à C, tellement que la raison de A à C, prend par ce moyen la raison doublée de A à B, c'est à dire posée deux fois d'ordre. Mais la raison de la premiere grandeur A à la 4e D, est dite triplée de celle de A à B, pource qu'entre A & D, se trouvent 3 raisons, lesquelles sont egales à celle de A à B; c'est à sçavoir la raison de A à B, celle de B à C, & celle de C à D: & partant la raison de A à D enclost par ce moyen la raison triplée de A à B, c'est à dire posée trois fois d'ordre. Et ainsi pareillement la raison de A à E, est dite quadruplée de la raison de A à B; pource qu'entre A & E sont encloses 4 raisons, qui sont egales à celle de A à B, &c.



11. Les grandeurs sont dites homologues, ou de semblables raisons, les antecedans aux antecedans, & les consequens aux consequens.

C'est à dire que si plusieurs quantitez sont proportionnelles, comme A,B,C,D, sçavoir que comme A est à B, ainsi C soit à D, les quantitez A & C, antecedantes de chaque raison, seront dites homologues, ou de semblable raison, comme aussi les quantitez consequentes B & D. Ainsi pareillement, si les quantitez E,F,G, sont proportionnelles aux quantitez H, I, K: les termes E & H, seront dits homologues, ou de semblable raison: comme aussi le terme F sera dit homologue au terme I: & aussi G à K: ainsi les côtez des figures étans comparez entr'eux, on entend quels costez doivent estre antecedans des raisons, & quels consequens.



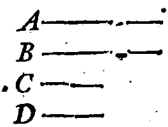
12. Raison alterne, est prendre l'antecedant comparé à l'antecedant, & le consequent au consequent.

Euclide explique en cette def. & ès suivãtes, aucuns moyens d'argumenter ès proportions, desquels l'usage est fort frequent en la Geometrie. Il dit donc icy que la raison alterne ou permutée, est quand de quatre grandeurs proportionnelles proposées, comme A, B, C, D, sçavoir que comme A est a B ainsi C est à D; on vient à conclurre qu'il y a mesme raison de l'antecedant A à l'antecedant C, que du consequent B au consequent D: & cette maniere d'argumenter (laquelle est demontré à la 16. p. de ce liv.) se couche ordinairement ainsi: comme A est à B, ainsi

ainsi C est à D : Donc en permutant comme A sera à C, ainsi B à D. Et est à noter qu'en cette maniere d'argumenter, les quatre grandeurs doivent être de même genre.

13. Raison inverse ou transposée, est lors qu'on prend le consequent comme antecedent pour le comparer à l'antecedant, comme si c'étoit le consequent.

Comme si A est à B, ainsi que C à D, nous infererons que par raison inverse, comme B est à A, ainsi que D est à C, c'est à dire les consequens aux antecedans. En cette sorte d'argumenter les Autheurs parlent presques toûjours ainsi : comme A est à B, ainsi C est à D : donc en changeant, ou au contraire, B sera à A, comme D à C.

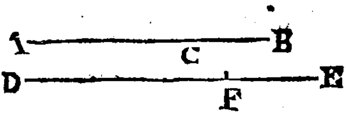


Cette maniere d'argumenter sera demontrée au Corrollaire de la 4. proposition de ce livre.

14. Composition de raison, est lors qu'on prend l'antecedent avec le consequent, comme une seule chose, pour le comparer au même consequent.

Comme si AC est à CB, comme DF à FE, & on vient à conclure que la toute AB est à CB, comme la toute DE à FE ; c'est à dire que la composée de l'antecedant AC & du consequent CB, est au mesme consequent CB, comme la composée de l'antecedant DF, & du consequent FE, est à iceluy consequent

FE; cette maniere d'argumenter sera dite composition de raison, & se prononce ainsi; comme AC est à CB, ainsi DF à FE: donc en composant AB sera à CB, comme DE à FE: laquelle sorte d'argumenter sera demontrée en la 18. pr. de ce livre.



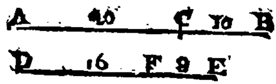
A ce moyen d'argumenter, par la composition de raison, en peuvent estre ajoûtez deux autres: le premier peut estre dit composition converse de raison, sçavoir quand on prend l'antecedant & le consequent comme un seul, pour le comparer à l'antecedant. Comme si AC est à CB, comme DF à FE; & nous inferons, donc comme AB composée de l'antecedant & du consequent, est à l'antecedant AC, ainsi DE composée de l'antecedant & du consequent est à l'antecedant DF: laquelle façon d'argumenter nous demontrerons estre valable sur la 18. p. 5.

L'autre moyen d'argumenter peut estre dit composition contraire de raison; c'est à sçavoir quand l'antecedant est comparé à l'antecedant & consequent comme un seul. Comme si AC est à CB, ainsi que DF à FE, & nous inferons par composition contraire de raison: donc comme AC antecedant sera à la toute AB, composée de l'antecedant & du consequent, ainsi DF antecedant sera à la toute DE, composée de l'antecedant & du consequent. Nous demontrerons sur la 18 p. de ce liv. que cette forme d'argumẽter est valable.

15. Division de raison, est lors qu'on prend l'excez par lequel l'antecedant surpasse

le consequent, pour le comparer à iceluy même consequent.

Comme si on dit qu'il y a telle raison de AB à CB, que de DE à FE : donc aussi AC, excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent, sera à CB consequent, comme DF excez par lequel l'antecedant excede le consequent, sera à FE consequent. Or les Autheurs concluent ordinairement avec cette raison ainsi : comme AB est à CB, ainsi DE est à FE: donc en



divisant AC sera aussi à CB, comme DF à FE. Ce qui sera démontré en la 17. p. de ce livre.

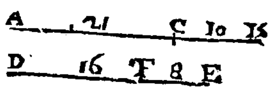
A ce moyen d'argumenter en peuvent aussi estre ajoûtez deux autres : le premier peut estre apellé division converse de raison ; c'est à sçavoir quand le consequent est comparé à l'excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent : Comme si AB est à CB, comme DE à FE ; & nous inferons : donc aussi par division converse de raison, comme CB consequent sera à AC, excez par lequel l'antecedant surmonte le consequent, ainsi FE consequent sera à DF, excez par lequel l'antecedant surpasse le consequent : laquelle maniere d'argumenter nous demontrerons pouvoir estre sur la 17. pr. 5. Il est manifeste qu'en l'une & l'autre d'icelles argumentations par division de raison, l'antecedant doit estre plus grand que le consequent.

L'autre moyen d'argumenter peut estre dit division contraire de raison, c'est à sçavoir quand l'antecedant est conferé à l'excez, par lequel le consequent excede l'antecedant. Comme quand on dit, AC estre à AB, *comme DF à DE : Donc aussi par division contraire de raison AC antecedant sera à CB, excez par lequel le consequent surmonte l'antecedant, comme DF antecedant sera à EF, excez par lequel le consequent surpasse l'antecedant: lequel moyen d'argumenter nous demontrerons sur la 17. prop. de ce livre.*

Il est evident qu'en cette division contraire de raison, le consequent doit estre plus grand que l'antecedant.

16. Conversion de raison, est comparer l'antecedant à l'excez, par lequel l'antecedant surpasse le consequent.

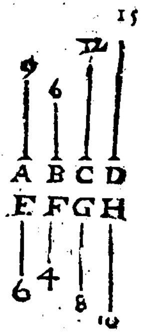
Comme si on dit, que comme AB est à CB, ainsi DE à FE : & on vient à conclure, que AB antecedant sera aussi à AC, excez par lequel il surmonte le consequent comme DE antecedant sera à DF, excez par lequel l'antecedant excede le consequent, cela sera dit conversion de raison. En cette sorte d'argumẽter les Autheurs parlent ordinairement ainsi: comme AB est à CB, ainsi DE est à FE : Donc par conversion de raison AB sera à AC, comme DE à DF : laquelle sorte d'argumenter sera demontrée au Cor. de la 19. pr. de ce livre.



17. Raison egale, est lors qu'il y a plusieurs grandeurs d'un costé, & autant de l'autre en multitude, prise de deux en deux en mẽme raison, & que la premiere des premieres grandeurs, est à la derniere des mesmes, comme la premiere des secondes est à la derniere des mesmes.

Autrement, c'est lors qu'on prend les extrêmes par la soustraction des moyennes.

Comme s'il y a d'un costé quatre quantitez, A, B, C, D : & autant d'un autre E, F, G, H, lesquelles soient prises deux à deux en mesme raison, c'est à dire que A soit à B, comme E à F ; & B à C, comme F à G ; & C à D, comme G à H : si on infere que comme A est à D, premiere & derniere des premieres grandeurs, ainsi E est à H, premiere & derniere des secondes. Cette maniere d'argumenter est dite raison egale, ou bien d'egalité. Et d'autant que cette maniere d'argumenter se prend ordinairement en deux sortes, sçavoir est quand les grandeurs qui sont en mesme raison sont prises d'ordre : & quand l'ordre est perverty : Euclide explique és deux def. suivantes que c'est que proportion ordonnée, & perturbée.



18. Proportion ordonnée, est quand l'antecedant est au consequent, comme l'antecedant est au consequent : & que le consequent est à quelqu'autre, comme le consequent est aussi à quelqu'autre.

Cecy est aisé à entendre par l'exemple de la def. precedente, où nous avons posé A estre à B, comme E à F ; & B à C, comme F à G, & C à D, comme G à H :

Car

Car ainsi les termes des 4. premieres quantitez sont pris d'un mesme ordre, que ceux des 4. dernieres ; & partant cette proportion est dite ordonnée. Or que le moyen d'argumenter par raison d'egalité, la proportion d'ordre estant observée, soit bon, il sera demonstré en la 22. p. de ce livre.

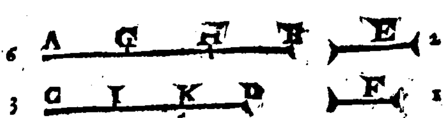
19. Proportion troublée, est quand trois grandeurs étans d'un côté, & autant d'un autre, la premiere est à la seconde, comme la cinquiéme à la sixiéme, & comme la seconde à la troisiéme, ainsi la quatriéme à la cinquiéme.

Comme si A est à B, ainsi que E est à F ; & comme B est à C, ainsi D à E : cette proportion sera dite troublée ou perturbée, d'autant qu'un mesme ordre n'est pas gardé en la comparaison des premieres grandeurs entr'elles, qu'és secondes aussi entr'elles. Car és premieres quantitez, la premiere est comparée à la seconde, & cette-cy à la 3e : mais és secondes quantitez, la 2e est comparée à la 3e, & la premiere à la seconde. Or que le moyen d'argumenter par raison égale, la proportion troublée estant gardée, soit bon, il sera demonstré en la 23. p. de ce livre.

THEOR. 1. PROP. 1.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra équemultiplices d'autant d'autres grandeurs, chacune à la sienne ; comme l'une sera multiplice de l'une, ainsi les toutes seront multiplices des toutes.

Soient tant de grãdeurs qu'on voudra AB & CD, équemultiplices



d'autant d'autres grandeurs E & F. Je dis que les grandeurs AB & CD ensemble, seront autant multiplices de E & F ensemble, comme AB l'est de E, ou CD de F.

Car puis que AB est multiplice de E; E mesurera AB certain nombre de fois par la 2. def. de ce livre, qu'elle la mesure donc trois fois, & soit icelle AB couppée en trois parties égales, AG, GH HB, chacune desquelles sera égale à E. Le même se peut dire de la grandeur CD, laquelle on couppera aussi en trois parties égales CI, IK, KD, étant chacune d'icelles égale à F: mais qui a choses égales, sçavoir à AG & E, adjoûte choses égales, sçavoir CI & F, les toutes AG, CI ensemble, seront égales aux toutes E & F ensemble. Par même raison GH & IK ensemble, seront égales à icelles E & F ensemble pareillement HB & KD, aux mêmes E & F. Autant donc qu'il y a de grandeurs en AB, égales à E; & en CD d'égales à F: autant y en a-t'il en AB & CD prises ensemble, qui sont égales à E & F prises ensemble; Parquoy les deux AB & CD ensemble, seront triples des deux ensemble E & F, comme la seule AB est triple de la seule E; ou la seule CD de la seule F. S'il y a donc tant de grandeurs qu'on voudra equemultiplices, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

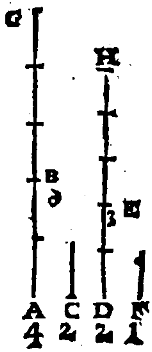
THEOR. 2. PROP. II.

Si la premiere est autant multiplice de la seconde, que la troisiéme de la quarte, & la cinquiéme autant multiplice de la seconde, que la sixiéme de la quarte; la composée de la premiere & cinquiéme, sera autant multiplice de la seconde, comme la composée de la troisiéme & sixiéme, le sera de la quarte.

Soit la premiere grandeur AB, autant multiplice de la seconde C, comme la 3. DE l'est de la 4. F: & soit la 5. BG autant multiplice de la 2. C, comme la 6. EH de la 4. F: Je dis que AG composée de la premiere & cinquiéme AB & BG, sera autant multiplice de la 2.

C, comme DH composée de la tierce & sixiéme DE & EH, le sera de la quarte F.

Car puis que AB est autant multiplice de C, comme DE de F, il y a en AB autant de grandeurs égales à C, qu'il y en a en DE d'égales à F. Par même raison, il y aura aussi en BG autant de grandeurs égales à C, comme il y en a en EH d'égales à F. Il y aura donc en AG autant de grandeurs égales à C, qu'il y en a en DH d'égales à F : parquoy AG composée de la premiere & cinquiéme est autant multiplice de la seconde C, comme DH composée de la tierce & sixiéme l'est de la quarte F. Parquoy si la premiere est autant multiplice de la seconde, que la troisiéme de la quarte, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

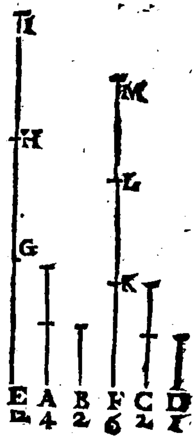


THEOR. 3. PROP. III.

Si la premiere est autant multiplice de la seconde, comme la tierce de la quarte ; & on prend des équemultiplices de la premiere, & troisiéme : aussi le multiplice de la premiere sera autant multiplice de la seconde, que le multiplice de la tierce le sera de la quarte.

Soit A autant multiplice de B, comme C l'est de D; & de la premiere & tierce A, C, soient pris les equemultiplices E & F. Je dis que E sera autant multiplice de B 2e, que F de D 4e.

Car puis que E est autant multiplice de A, que F l'est de C : E contiendra autant de parties égales à A, comme F de parties égales à C. Soit donc E divisée en EG, GH & HI, chacune égale à A : Item F divisée en FK, KL & LM, chacune égale à C : & d'autant que EG & FK sont égales à A & C, lesquelles sont equemultiplices de B & D par l'hypothese, aussi EG & FK



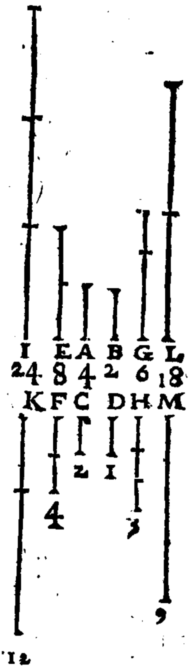
seront equemultiplices des mêmes B & D. Par même raison GH & KL : item HI & LM, seront equemultiplices d'icelles B & D. Vû donc que EG premiere grandeur est autant multiplice de la seconde B, que FK tierce l'est de D quarte. Item GH cinquiéme autant multiplice de la même seconde B, que KL sixiéme de la quatriéme D ; aussi EH composée de la premiere & cinquiéme sera autant multiplice de la seconde B, que FL composée de la tierce & sixiéme l'est de la quatriéme D, par la prec. prop. Derechef puis que EH, premiere grandeur est autant multiplice de la seconde B, que FL tierce l'est de D quarte, & HI cinquiéme est aussi autant multiplice de la seconde B, que LM sixiéme l'est de la quatriéme D : EI composée de la premiere & cinquiéme sera aussi autant multiplice de la seconde B, que FM composée de la tierce & sixiéme l'est de D quatriéme par la 2. p. de ce livre. Si donc la premiere est autant multiplice de la seconde, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 4. PROP. IV.

Si la premiere est à la seconde, en même raison que la tierce à la quarte : aussi les equemultiplices de la premiere & tierce, auront même raison aux equemultiplices de la seconde & quarte, en quelque multiplication que ce soit ; si elles sont prises ainsi qu'elles s'entrerespondent.

Soit A à B en même raison que C à D, & soient prises E & F equemultiplices de A premiere & C tierce : Item G & H equemultiplices de B seconde & D quarte, selon quelque multiplication que ce soit, Je dis qu'il y a même raison de E à G, que de F à H.

Car si on prend I & K équemultiplices de E & F, pareillement L & M équemultiplices de G & H : d'autant que E premiere, est autant multiplice de A seconde, que F tierce l'est de C quarte, & I, K sont prinses équemultiplices d'icelles E, F premiere & tierce; aussi par la 3. prop. de ce livre I & K, seront equemultiplices de A & C, seconde & quarte. Par mesme raison L & M, seront aussi équemultiplices de B & D : & puis que A est à B comme C à D : & d'icelles A & C, premiere & tierce, ont été demonstrées I & K équemultiplices; Mais de B & D seconde & quarte, autres équemultiplices L & M : par la converse de la 6. def. de ce livre, si I deffaut, est égal, ou plus grand que L, aussi K deffaudra, sera égal, ou plus grand que M, selon quelconque multiplication que soient pris iceux équemultiplices. Et pour autant que I & K, sont équemultiplices de E & F ; pareillement L & M de G & H ; par la mesme 6. def. il y aura mesme raison de E à G, comme de F à H. Si donc la premiere est à la seconde en mesme raison que la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



COROLLAIRE.

Par cecy est manifeste la preuve de la raison inverse, qu'Euclide a expliquée en la 13. def. de ce livre, sçavoir est que si 4. grandeurs sont proportionnelles, elles le seront aussi estans prises à rebours, c'est à dire que E estant à G comme F à H, aussi en changeant G sera à E comme H à F. Car puis qu'il a esté de-

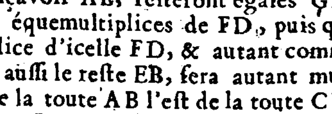
monstré que si I defaut, est égal ou plus grand que L, aussi K defaudra, sera égal, ou plus grand que M, selon quelconques multiplices. Il appert aussi que si L defaut, est égal, ou plus grand que I, aussi M defaudra, sera égal, ou plus grand que K, selon quelconques multiplications : Et partant par la 6. def, il y aura mesme raison de G à E que de H à F.

THEOR. 5. PROP. V.

Si une grandeur est autant multiplice d'une grandeur, que la retranchée de la retranchée : aussi le reste sera autant multiplice du reste que la toute de la toute.

Soit la toute AB, autant multiplice de la toute CD, comme la retranchée AE, de la retranchée CF, Je dis que le reste EB sera autant multiplice du reste FD, que la toute AB l'est de la toute CD.

Car AG étant faite autant multiplice de FD comme AE l'est de CF, ou comme la toute AB l'est de la toute CD : d'autant que AE, AG sont equemultiplices de CF, FD : par la 1. pr. de ce livre, la toute GE, sera autant multiplice de la toute CD, comme AE de CF : Mais aussi AB, est autant multiplice de CD comme AE de CF, donc GE, AB, sont équemultiplices de CD, & partant égales entr'elles par la 6. com. sent. Parquoy en ostant ce



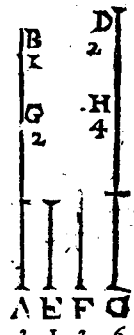
qui leur est commun, sçavoir AE, resteront égales GA, EB ; qui partant seront équemultiplices de FD, puis que GA a été posée multiplice d'icelle FD, & autant comme AB l'est de CD : donc aussi le reste EB, sera autant multiplice du reste FD, que la toute AB l'est de la toute CD. Parquoy si une grandeur est autant multiplice d'une grandeur, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux grandeurs sont équemultiplices de deux autres grandeurs, & d'icelles on retranche des équemultiplices : ou les restes seront égaux aux mêmes, ou équemultiplices d'icelles.

Soient les grandeurs AB, CD, équemultiplices des grandeurs E, F, & les retranchées AG, CH aussi équemultiplices des mêmes grandeurs E, F. Je dis que les restes GB, HD, seront ou égaux aux mêmes E, F, ou équemultiplices d'icelles.

Car d'autant que AB & CD, sont équemultiplices de E & F ; en AB il y aura autant de grandeurs égales à E, comme en CD de grandeurs égales à F. Pareillement d'autant que la retranchée AG est autant multiplice de E, que la retranchée CH l'est de F ; AG contiendra autant de grandeurs égales à E, que CH de grandeurs égales à F, par la 1. & 2. def. de ce livre. Si donc d'égales multitudes de grandeurs AB & CD, on ôte égales multitudes de grandeurs AG & CH, les multitudes restantes GB & HD seront égales ; c'est-à-dire que GB contiendra autant de fois E, comme HD contiendra F ; ou bien si GB est égale à E, aussi HD sera égale à F : & par ainsi iceux restes GB, HD seront égales à E & F, chacune à la sienne, ou bien seront equemultiplices d'icelles. Parquoy si deux grandeurs sont equemultiplices de deux autres grandeurs, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

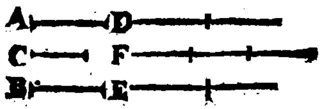


THEOR. 7. PROP. VII.

Les grandeurs égales, ont même raison à une même grandeur ; & cette-cy aura même raison aux grandeurs égales.

Soient deux grandeurs égales A & B, & une autre quelle qu'elle soit C. Je dis que A & B ont même raison l'une que l'autre à C, & que C aura même raison à A qu'à B.

Qu'il ne soit ainsi; soient pris D & E équemultiplices de A premiere, & B tierce, soit aussi pris F quelcõque multiplice de C, seconde & quarte : donc puis que D est autant multiplice de A, que E est multiplice de B; & que A & B sont posées égales : aussi D & E seront égales par la 6. com. sent. Si donc D est plus grande, égale, ou plus petite que F, aussi E sera plus grande, égale, ou plus petite que la méme F, & par la susdite 6. def. de ce livre, il y aura telle raison de A à C, comme de B à la méme C.



Quant à l'autre partie, elle se prouve tout de méme par la susdite def. en prenant les mémes équemúltiplices, & montrant l'excez, &c. ou bien plus facilement par la raison inverse. Car puis qu'il a été demontré que A est à C comme B à C, en changeant C sera à A, comme C à B par le Corol. de la 4. prop. de ce livre. Donc les grandeurs égales ont même raison à une même, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Des grandeurs inégales, la plus grande a plus grande raison à une méme grandeur, que la plus petite : & une méme grandeur a plus grande raison à la plus petite grandeur, qu'à la plus grande.

Soient deux grandeurs inégales AB & C, desquelles AB est la plus grande, & une troisiéme quelle qu'elle soit D. Je dis que AB a plus grande raison à la troisiéme D, que non pas C : item, que D a plus grande raison à C, qu'à AB.

Qu'il ne soit ainsi : soit entenduë AB premiere grandeur, D seconde, C tierce, & D quarte. D'autant que AB est plus grande que C, soit retranchée AE égale à icelle

C, & soient pris des équemultiplices, à sçavoir FG de BE, & GH de EA, en sorte que chacune d'icelles FG & GH soit plus grande que D; & puis que les deux FG, GH, sont équemultiplices des deux BE, EA, par la 1. prop. de ce livre, la toute HF sera autant multiplice de la toute AB, comme HG de AE, ou de C son égale: Maintenant soit prise IK aussi multiplice de D, en sorte qu'elle soit plus petite que HF, mais plus grande que HG: (ce qui est facile, puis que D est plus petite que ny FG, ny GH: si bien qu'il faut seulement adjoûter tant de fois la grandeur D, jusques à ce que l'on ait ce que l'on cherche.) D'autant que FH, GH sont équemultiplices de AB premiere, & C troisiéme, si IK est prise pour l'équemultiplice, tant de D seconde, que D quatriéme, il est évident que HF multiplice de A B premiere, étant plus grande que IK multiplice de D seconde, HG multiplce de C tierce, n'est pas plus grande que IK multiplice de D quarte: & partant par la huitiéme def. de ce livre, il y aura plus grande raison de AB à D, que de C à la même D.

Quant à la seconde partie: d'autant que IK multiplice de la premiere D, (car il faut maintenant poser D premiere & troisiéme, C seconde, & AB quatriéme) est plus grande que HG multiplice de la seconde C; & IK multiplice de la troisiéme D, est moindre que FH multiplice de AB quatriéme: Il y aura plus grande raison de D à C, que de D à AB, par la 8. def. de ce livre. Parquoy des grandeurs inégales, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Les grandeurs qui ont même raison à une même grandeur, sont égales entr'elles: & celles-là aussi sont égales, ausquelles une même grandeur a même raison.

Soient premierement deux grandeurs A & B, lesquelles ayent même raison l'une que l'autre à la troisiéme C. Je dis qu'elles sont égales entr'elles.

Car si elles n'étoient égales, il faudroit que l'une ou l'autre fust plus grande; & par la precedente prop. icelle plus grande auroit plus grande raison à C, que la plus petite, ce qui est contre l'hypothese: donc A & B ne sont pas inégales, mais égales.

A B C

Soient maintenant A & B, à chacune desquelles C ait une même raison. Je dis qu'icelles A & B sont aussi égales entr'elles: car autrement il faudroit que l'une fust plus petite que l'autre: & par la même 8. prop. à icelle plus petite, C auroit plus grande raison qu'à la plus grande: ce qui est contre l'hypothese: A & B ne sont donc pas inégales, mais égales. Donc les grandeurs qui ont même raison, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 10. PROP. X.

Des grandeurs qui ont raison à une même grandeur, celle qui a plus grande raison est la plus grande: & celle-là à laquelle une même grandeur a plus grande raison, est la plus petite.

Soient trois grandeurs A, B, C: & en premier lieu la raison de A à C soit plus grande que de B à la même C. Je dis que A sera plus grande que B.

Autrement, si A n'étoit plus grande que B, elle seroit égale, ou plus petite, ce qui est impossible: car si elles étoient égales, elles auroient même raison l'une que l'autre à C, par la 7. prop. de ce livre, ce qui seroit contre l'hypothese: si aussi elle étoit plus petite, elle auroit plus petite raison à C que non pas B, par la 8. prop. de ce même livre, ce qui est pareillement contre l'hypothese. Donc A ne sera pas moindre ny égale à B: & par consequent sera plus grande.

ABC

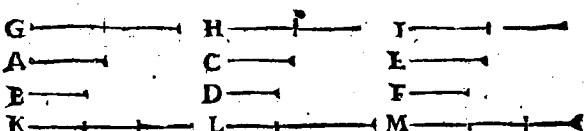
Maintenant que C aye plus grande raison à B, que non pas à A: Je dis que B sera plus petite que A. Autrement si B n'étoit moindre que A, elle seroit égale, ou plus grande, ce qui est impossible : car si A & B étoient égales, C auroit même raison à l'une qu'à l'autre par la susdite 7. prop. de ce livre : ce qui est contre nôtre hypothese : si aussi elle étoit plus grande, C auroit plus grande raison à A qu'à B par la susdite 8. pr. ce qui est aussi contre l'hypothese. Donc B sera moindre que A. Parquoy des grandeurs qui ont raison à une même grandeur, &c, Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 11. PROP. XI.

Les raisons qui sont de même à une autre, sont aussi de même entr'elles,

Soit A à B, comme C à D, & comme C à D, ainsi E à F : Je dis que comme A est à B, ainsi E sera à F.

Qu'il ne soit ainsi : de toutes les antecedantes A, C, E, soient prises quelconques équemultiplices, G, H, I. Pareillement, des consequentes B, D, F, quelconques équemultiplices, K, L, M. D'autant que A est à B



comme C à D, par la converse de la 6. def. de ce livre, si G multiplice de A, est égale, plus grande, ou plus petite que K multiplice de B : aussi H multiplice de C, sera égale, plus grande, ou plus petite que L, multiplice de D. Item, puis que comme C est à D, ainsi E est à F, si H multiplice de C est égale, plus grande, ou plus petite que L multiplice de D, aussi I multiplice de E, sera égale, plus grande, ou plus petite que M multiplice de F : Parquoy si G multiplice de A premiere, est plus grande, égale, ou plus petite que K multiplice de B seconde, aussi I multiplice de E tierce, sera plus grande, égale, ou plus petite que M multiplice de F quarte ; & par la susdite 6. def. comme A sera à B, ainsi E sera à F. Parquoy les raisons qui sont de même, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Clavius démontre en suite de ce, que les raisons qui sont de même à d'autres, sont aussi de même entr'elles : Comme si A est à B, ainsi que C à D, & que E soit à F, comme A à B; & G à H, comme C à D; Aussi comme E sera à F, ainsi G sera à H. Car d'autant que les raisons de E à F, & de C à D sont de même à la raison de A à B, par la 11. p. 5. comme E sera à F, ainsi C à D. Derechef, pource que les raisons de E à F, & de G à H sont de même à la raison de C à D : aussi par la même 11. prop. 5. comme E sera à F, ainsi G sera à H.

A	B	C	D
3.	2.	6.	4.
E	F	G	H
9.	6.	12.	8.

Derechef, si les raisons de A à B, de C à D & de E à F sont de même entr'elles; & que comme A est à B, ainsi G soit à H; & comme C à D, ainsi I à K; & comme E est à F, ainsi L soit à M : aussi les raisons de G à H, de I à K, & de L à M sont de même entr'elles : Car suivant ce que nous avons démontré cy-dessus de quatre raisons, comme G est à H, ainsi I est à K, pource que ces raisons sont semblables aux raisons de A à B, & de C à D. Et en la même maniere, comme I sera à K, ainsi L sera à M, d'autant qu'icelles raisons sont de même aux raisons de C à D, & de E à F, lesquelles sont semblables. Item, comme G sera à H, ainsi L à M; puis que ces raisons sont de même que les raisons de A à B, & de E à F, qui sont posées égales : Le même seroit encores démontré s'il y avoit davantage de raisons.

A	B	C	D	E	F
3.	2.	6.	4.	9.	6.
G	H	I	K	L	M
12.	8.	18.	12.	30.	20.

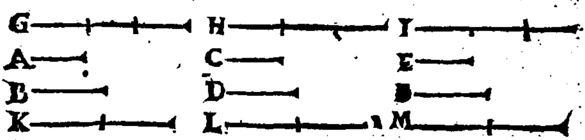
THEOR. 12. PROP. XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles : comme l'une des antecedantes sera à sa consequente, ainsi toutes les antecedantes seront à toutes les consequentes.

Soient six grandeurs proportionnelles A, B, C, D, E, F, sçavoir que A soit à B, comme C est à D, & E à F:

Je dis que comme l'une des antecedantes est à sa consequente ; sçavoir est A à B, ainsi toutes les antecedantes ensemble A, C, E, seront à toutes les consequentes ensemble B, D, F.

Car étans prises des antecedantes A, C, E, les équemultiplices G, H, I : item des consequentes B, D, F, les équemultiplices K, L, M ; toutes les trois multiplices G, H, I ensemble, seront autant multiplice des trois grandeurs A, C, E ensemble, comme la seule G est multiplice de la seule A, par la premiere prop. de ce livre. Aussi par la même raison toutes les trois multiplices K, L, M ensemble, seront autant multiplice des trois grandeurs B, D, F ensemble, comme K sera multiplice de B. Partant puis que A, B, C, D, E, F sont proportionnelles, si G multiplice de A premiere,



est plus grande, égale, ou plus petite que K multiplice de B seconde, aussi H multiplice de C troisiéme, sera plus grande, égale, ou plus petite que L, multiplice de D quatriéme, par la converse de la 6. def. de ce livre, & ainsi des deux autres : Partant si G est plus grande, égale, ou plus petite que K, le composé des trois G, H, I, sera aussi plus grand, égal, ou plus petit que le composé des trois K, L, M. Donc par la même 6. def, comme A sera à B, ainsi les trois A, C, E ensemble, seront aux trois B, D, F ensemble. Parquoy si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si la premiere est à la seconde comme la tierce à la quarte : mais la tierce a plus grande raison à la quarte, que la cinquiéme à la sixiéme : aussi la premiere aura plus grande raison à la seconde, que la cinquiéme à la sixiéme.

Soit A premiere à B seconde, (*en la prec. fig.*) comme C tierce à D quarte, & qu'il y ait plus grande raison de C tierce à D quarte, que de E cinquiéme à F sixiéme. Je dis qu'il y aura aussi plus grande raison de A premiere à B seconde, que de E cinquiéme à F sixiéme.

Car estans prises des antecedantes A, C, E, les équemultiplices G, H, I, & des consequentes B, D, F, les équemultiplices K, L, M: D'autant que A est à B, comme C à D, si G multiplice de A est égale, plus grande, ou plus petite que K multiplice de B, aussi par la converse de la 6. def. de ce livre, H multiplice de C, sera égale, plus grande, ou plus petite que L multiplice de D. Pareillement, d'autant qu'il y a plus grande raison de C premiere à D seconde, que de E tierce à F quatriéme, si H multiplice de C, est plus grande que L multiplice de D, il n'est pas necessaire que I multiplice de E excede M multiplice de F, par la 8. def. de ce livre convertie: donc aussi si G excede K, necessairement I n'excede pas M: & partant par ladite 8. def. il y a plus grande raison de A à B, que de E à F. Si donc la premiere est à la seconde, comme la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Que si la tierce C a moindre raison à la quarte D, que la cinquiéme E à la sixiéme F : aussi la premiere A aura moindre raison à la seconde B, que la cinquiéme E à la sixiéme F. Car si la raison de C à D est moindre que celle de E à F, c'est à dire, que la raison de E premiere à F seconde étant plus grande que celle de C tierce à D quarte, si I excede M, il n'est pas necessaire que H excede L, car quelquesfois elle defaut, ou est égale à icelle par la 8. def. de ce liv. convertie. Mais si H defaut, ou est égale à L, aussi G défaudra, ou sera égale à K par la 6. def. convertie, parce qu'on a posé C 1. estre à D 2. comme A 3. à B 4. Parquoy si I excede M necessairement G n'extedera pas K : & partant par la susdite 8. def. il y aura plus grande raison de E à F, que de A à B, c'est à-dire que la raison de A à B sera moindre que de E à F : ce qui étoit proposé.

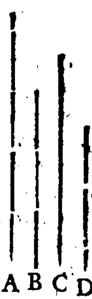
En la mesme maniere sera demonstré, que s'il y a plus grande raison de la premiere à la seconde, que de la tierce à la quarte : mais la tierce a plus grande raison à la quarte, que la *cinquiéme à la sixiéme ; pareillement la premiere aura beaucoup plus grande raison à la seconde, que la cinquiéme à la sixiéme.*

Que si la premiere a moindre raison à la seconde, que la tierce à la quarte, & la tierce a moindre raison à la quatriéme, que la cinquiéme à la sixiéme : aussi la premiere aura beaucoup moindre raison à la seconde, que la cinquiesme à la sixiesme.

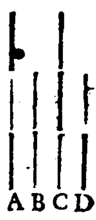
THEOR. 14. PROP. XIV.

Si la premiere est à la seconde, comme la tierce à la quarte, & que la premiere soit plus grande que la tierce : aussi la seconde sera plus grande que la quarte : & si égale, égale : si plus petite, plus petite.

Soit A à B, comme C est à D, & que A premiere soit plus grande, égale, ou plus petite que C troisiéme : Je dis que B seconde sera aussi plus grande, égale, ou plus petite que D quatriéme.

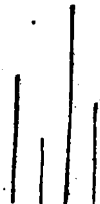


Soit premierement A plus grande que C: il y aura donc plus grande raison de A à B, que de C à la même B, par la 8. prop. de ce livre, & par consequent plus grande raison de C à D, que de C à B, estant icelle la même raison que de A à B, & par la 10. prop. de ce même livre B sera plus grande que D.



Soit puis apres A égale à C, & par la 7. prop. de ce même livre A sera à B, comme C à B : & puis que les raisons de C à D, & C à B, sont les mêmes que de A à B, les raisons de C à D & de C à B, seront de même entr'elles, par la 11. prop. de ce livre, & partant par la 9. prop. B & D, seront égales.

Finalement soit A moindre que C, & par la susdite 8. prop. il y aura plus grande raison de C à D, que de A à D; & par consequent plus grande raison de A à B, que de A à D, puis qu'il y a même raison de A à B, que de C à D, & par la 10. prop. de ce même livre B sera moindre que D. Si donc la premiere est à la seconde, comme la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit prouver.



A B C D

SCHOLIE.

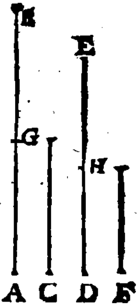
Que si la seconde est plus grande, ou égale, ou moindre que la quarte: aussi la premiere sera plus grande, ou égale, ou moindre que la tierce. Car puis que A est à B comme C à D, en changeant B sera à A comme D à C par le Cor. de la 4. p. de ce livre. Donc si B est plus grande, ou égale, ou moindre que D, aussi A sera plus grande, ou égale, ou moindre que C par la susdite 14. prop.

Or Euclide n'a pas demonstré que si la premiere est plus grande, égale, ou plus petite que la seconde: aussi la tierce sera plus grande, égale, ou moindre que la quarte, pource que cela est evident à cause de la similitude des raisons. Ce que nous pourrions neantmoins demonstrer apres Commandin: mais d'autant que sa demonstration ne compete qu'aux grandeurs de mesme genre, nous nous tiendrons à ce que la nature des proportions nous monstre, encore que les grandeurs soient de divers genres.

THEOR. 15. PROP. XV.

Les grandeurs sont entr'elles, comme sont leurs équemultiplices entr'elles: étans prises comme elles s'entrerespondent.

Soit AB autant multiplice de C comme DE est multiplice de F. Je dis que AB sera à DE, comme C à F. Car puis que AB & DE sont equemultiplices d'icelles C & F, il y il y aura en AB autant de parties égales à C, comme DE contient de parties égales à F : soit donc divisée AB és parties AG, GB égales à C, & DE és parties DH, HD égales à F; & par la 7. prop. de ce livre une chacune partie de AB, sera à une chacune partie de DE, comme C est à F ; & par la 12. prop. toutes les antecedantes AB, seront à toutes les consequentes DE, comme AG l'une des antecedantes, est à DH sa consequente, c'est-à-dire comme C à F, puis que c'est la même raison Parquoy les grandeurs sont entr'elles, &c. Ce qu'il falloit prouver.

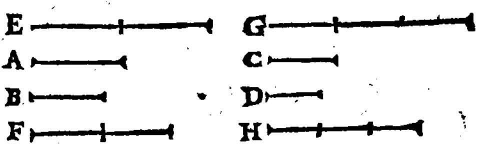


THEOR. 16. PROP. XVI.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles le seront aussi étans permutées.

Soit A à B, comme C à D. Je dis qu'en permutant A sera à C, comme B est à D.

Car si on préd E & F equemultiplices de A & B ; item G & H



equemultiplices de C & D; E sera à F, comme A à B par la prop. precedente, & G à H comme C à D ; & par consequent E étant à F, & C à D, en même raison que A à B, elles sont de même entr'elles par la 11. prop. de ce livre. Derechef puis que les raisons de E à F, & G à H sont les mêmes que de C à D, elles seront aussi de même entr'elles par la susdite 11. prop. c'est-à-dire, que comme E premiere est à F seconde, ainsi sera G tierce à H quarte : parquoy par la 14. prop. de ce même livre, si E premiere est plus grande, égale, ou moindre que G tierce, aussi F seconde sera plus grande, égle, ou moindre que H quatriéme, en quelconque multiplication que soient prises les equemultiplices; & par la 6. def. d'iceluy cinquiéme livre *A* sera à C, comme B à D: (puisque E & F sont equemultiplices de A premiere, & *B* troisiéme; & G & H equemultiplices de *C* seconde & D quatriéme, & celles-là defaillent, sont égales, ou excedent celles-cy, &c.) Parquoy si quatre grandeurs sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

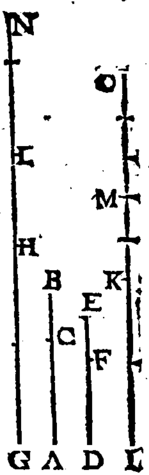
Or la demonstration de cette proposition a seulement lieu quand les quatre grandeurs sont de mesme genre. Car si les deux A & B étoient d'un genre, & les deux C & D d'un autre: aussi les équemultiplices E & F seroient d'un genre, c'est à sçavoir duquel sont A & B, & les equemultiplices G & H d'un autre genre, c'est à sçavoir de celuy duquel sont C & D: Parquoy on ne pourroit pas dire E estre plus grande, égale, ou moindre que G: & partant rien ne se concluroit par la 6. def. de ce livre. La raison permutée a donc seulement lieu quand les quatre grandeurs sont d'un mesme genre.

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si les grandeurs composées sont proportionnelles; icelles étans divisées, seront aussi proportionnelles.

Soient les grandeurs composées AB, CB, & DE, FE, proportionnelles; c'est-à-dire, que AB soit à CB, comme DE à FE. Je dis que les mêmes grandeurs étans divisées sont aussi proportionnelles, c'est-à-dire que comme AC est à CB, ainsi DF est à FE.

Car d'icelles AC, CB, DF, FE soient prises les équemultiplices GH, HL, IK, KM, chacune à chacune, & par la 1. prop. de ce livre GL sera autant multiplice de AB, que GH de AC, c'est-à-dire comme IK de DF. Mais icelle IK est autant multiplice de DF, que IM de DE par la même 1. prop. donc GL, IM sont équemultiplices de AB, DE. Derechef soient prises LN,



MO equemultiplices de CB, FE. Pour autant que HL premiere est autant multiplice de CB seconde, que KM tierce de la quarte FE, & LN cinquiéme autant multiplice de CB seconde, que MO sixiéme de la quarte FE; par la 2. p. de ce livre, HN sera autant multiplice de CB seconde, que KO de FE quatriéme. Et puis que AB est à CB, comme DE à FE: & ont été prises GL, IM equemultiplices de AB, DE, mais HN, KO de CB, FE: par la 6. def. convertie si GL multiplice de AB premiere excede, est égale, ou moindre que HN multiplice de CB seconde, aussi IM, multiplice de DE tierce, excedera, sera égale, ou moindre, que KO multiplice de FE quarte: ôtant donc les choses communes HL, KM, si GH excede LN, aussi IK excedera MO; & si égale, égale; & si moindre, moindre. Et d'autant que GH, IK sont equemultiplices de AC premiere & DF tierce. Item LN, MO equemultiplices de CB seconde & FE quarte, & il a été demontré (en quelconque multiplication qu'ayent été prises icelles equemultiplices) que les equemultiplices de la premiere & troisiéme excedent, sont égales, ou moindres, que les equemultiplices de la seconde & quatriéme, par la susdite 6. def. de ce cinquiéme livre AC sera à CB, comme DF à FE: ce qui étoit proposé. Si donc les grandeurs composées sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Nous démontrerons icy ce moyen-là d'argumenter, lequel en la 15. def. nous avons dit converse de la raison divisée: c'est-à-dire que si AB est à CB, comme DE à FE, aussi CB sera à AC, comme FE à DF. Car d'autant que comme AB à CB, ainsi DE à FE, en divisant par la 17. p. 5. comme AC sera à CB, ainsi DE à FE: & en changeant, comme CB sera à AC, ainsi FE sera à DF: ce qui étoit proposé.

Par même maniere, sera démontré ce moyen-là d'argumenter, lequel en la même 15. def. nous avons appellé contraire division de raison : c'est-à-dire que si AC est à AB, comme DF à DE : aussi AC sera à CB ; ainsi que DF à FE. Car puis que AC est à AB, comme DF à DE : en changeant, comme AB sera à AC, ainsi DE à DF : donc en divisant par la 17. p. 5. comme CB à AC : ainsi FE à DF : & en changeant derechef, comme AC à CB, ainsi DF à FE : ce qui étoit à demontrer.

THEOR. 18. PROP. XVIII.

Si les grandeurs divisées sont proportionnelles ; icelles étans composées seront aussi proportionnelles.

Soient les grandeurs divisées AB, BC ; & DE, EF proportionnelles. Je dis qu'en composant, AC est à CB, comme DF à EF.

Car si comme AC est à BC, ainsi DF n'est pas à EF ; DF aura à quelque grandeur moindre ou plus grande que EF, même raison que AC à BC. Soit donc premierement DF à GF, moindre que EF, en même raison que AC à BC, s'il est possible : & en divisant par la precedente proposition, DG sera à GF comme AB à BC. Mais comme AB à BC, ainsi DE est à EF : donc aussi comme DG sera à GF, ainsi DE sera à EF par la 11. prop. de ce livre. Mais DG premiere est plus grande que DE troisiéme : donc par la 14. proposition de ce même livre GF seconde, sera aussi plus grande que EF quatriéme, la partie que le tout : ce qui est absurde. Il n'y aura donc pas de DF à GF, moindre que EF, même raison que de AC à BC.

Par même discours on démontrera que DF n'aura pas à une grandeur plus grande que EF, même raison que AC à BC. Donc comme AC est à BC, ainsi DF est à EF, puisque DF ne peut être à une grandeur moindre, ou plus grande que

EF, en même raison que AC à BC. Parquoy si les grandeurs divisées sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Nous démontrerons icy ces deux moyens-là d'argumenter ès proportions, lesquels nous avons descrits en la 14. def. de ce livre. Quant au premier, que nous avons nommé converse composition de raison : soit comme AB à BC ainsi DE à EF. Je dis, que comme AC est à AB, ainsi DF à DE. Car puis que comme AB est à BC, ainsi DE à EF, en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF a DE : donc en composant par la 18. p. cy-dessus, comme AC sera à AB, ainsi DF à DE : Ce qu'il falloit prouver.

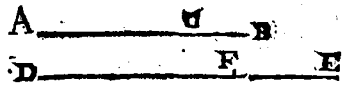
Quant à l'autre moyen que nous avons appellé contraire composition de raison : soit derechef comme AB à BC, ainsi DE à EF : Je dis que par le contraire de composition de raison, comme AB à AC, ainsi DE à DF. Car puis que comme AB est à BC, ainsi DE à EF ; en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF à DE : donc aussi en composant par la même prop. comme AC sera à AB, ainsi DF à DE ; & partant en changeant derechef, comme AB sera à AC, ainsi DE sera à DF : Ce qui étoit proposé à prouver.

THEOR. 19. PROP. XIX.

Si le tout est au tout, comme le retranché au retranché ; le reste sera aussi au reste, comme le tout est au tout.

Soit la toute AB à la toute DE, comme le retranché AC, au retranché DF. Je dis que le reste CB est aussi au reste FE, comme la toute AB à la toute DE.

Car puis que AB est à DE, comme AC à DF, aussi en permutant par la 16. prop. de ce livre AB sera à AC, comme DE à DF ; & par la 17. prop. de ce même livre, en divisant comme CB sera à AC, ainsi FE sera à DF : parquoy en permutant derechef par la susdite 16. prop. CB sera à FE, comme AC à DF, c'est-à-dire comme la toute AB à la toute DE, puis que AB, DE, & AC, DF, ont été posées en même raison. Parquoy si le tout est au tout comme le retranché au retranché, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

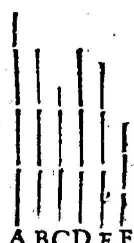
Nous demontrerons icy ce moyen-là d'argumenter ês proportions, qui est pris par la conversion de raison. Car soit comme AB à CB, ainsi DE à FE. Je dis par conversion de raison, AB être aussi à AC, comme DE à DF. Car puis que comme AB est à CB, ainsi DE est à FE en divisant par la 17. prop. de ce livre, comme AC à CB, ainsi DF à FE: donc aussi en changeant comme CB à AC, ainsi EF à DF: & partant en composant par la 18. prop. de ce cinquiesme livre, comme AB sera à AC, ainsi DE sera à DF : ce qui étoit proposé.

THEOR. 20. PROP. XX.

Si trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, étans prises de deux en deux; sont en même raison, & qu'en raison égale la premiere soit plus grande que la troisiéme; aussi la quatriéme sera plus grande que la sixiéme; & si égale, égale; si plus petite, plus petite.

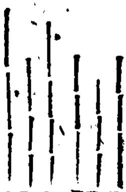
Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & comme A à B, ainsi D à E, & comme B à C, ainsi E à F: & que A premiere soit plus grande que C troisiéme. Je dis que D 4. sera aussi plus grande que F 6.

Car puis que A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A à B que de C à B par la 8. prop. de ce cinquiéme livre. Mais comme A est à B ainsi D à E, & par la 13. p. 5. il y aura plus grande raison de D à E, que de C à B. Item comme C est à B, ainsi F à E: (car puis que B est à C, comme E à F, en changeant comme



C sera à B, ainsi F à E.) il y aura donc aussi plus grande raison de D à E que de F à E, & par la 10. pr. 5. D sera plus grande que F.

Que si A est égale à C; je dis aussi que D sera égale à F. Car puis que A est égale à C, par la 7. p. de ce livre, A sera à B comme C à B. Mais comme A est à B, ainsi D à E: & par la 11. pr. 5. D sera à E, comme C à B: & comme C est à B, ainsi F à E. Donc D sera aussi à E comme F à E: & partant D & F seront égales par la 9. prop. de ce même livre.



ABC EDF

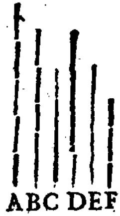
En troisiéme lieu, si A est moindre que C, je dis aussi que D est moindre que F. Car puisque A est moindre que C, il y aura moindre raison de A à B, que de C à B par la 8. p. 5. Mais comme A est à B, ainsi D est à E: il y aura donc aussi moindre raison de D à E, que de C à B, par la 13. prop. de ce cinquiéme livre. Mais en changeant comme dessus, C est à B, comme F à E. Il y a donc pareillement moindre raison de D à E, que de F à E: & partant par la 10. p. 5. D sera moindre que F. Parquoy si trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

ABC DEF

THEOR. 21. PROP. XXI.

Si trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, prises de deux en deux sont en même raison, étant leur proportion sans ordre, & qu'en raison égale la premiere soit plus grande que la troisiéme; aussi la quatriéme sera plus grande que la sixiéme; & si égale, égale; si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'un côté A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, lesquelles prises de deux en deux soient en même raison, étant leur proportion troublée, sçavoir que comme A à B, ainsi E à F, & comme B à C, ainsi D à E. Je dis que comme A sera égale, plus grande, ou plus petite que C, aussi D sera égale, plus grande, ou plus petite que F.



Car si A est plus grande que C, il y aura plus grande raison de A à B, que de C à B par la 8. pr. de ce livre. Mais comme A à B, ainsi E à F; il y aura donc plus grande raison de E à F, que de C à B par la 13. prop. d'iceluy cinquiéme livre. Et d'autant que comme B est à C, ainsi D est à E, en changeant comme C sera à B, ainsi E à D. Il y aura donc aussi plus grande raison de E à F, que de E à D: & partant par la 10. prop. 5. D sera plus grande que F.

On peut prouver, comme en la precedente, si A est égale, ou plus petite que C; aussi D être égale, ou moindre que F. Parquoy si trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 22. PROP. XXII.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, lesquelles étans prises de deux en deux soient en même raison; icelles en raison égale seront proportionnelles.

Soient trois grandeurs d'un côté A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & soit A à B comme D à E, & B à C comme E à F. Je dis qu'en raison égale comme A est à C, ainsi D à F.

Car étans prises G, H equemultiplices de A, D: Item I, K, equemultiplices de B, E: Item L, M, equemultiplices de C, F: puisque A est à B, comme D à E, aussi G multiplice de A premiere sera à I multiplice de B deuxiéme ; comme H multiplice de D troisiéme à K multiplice de E quatriéme par la 4. p. de ce cinquiéme livre. Par même raison I sera à L, comme K à M. Vû donc que les trois grandeurs, G, I, L, & les trois autres H, K, M, étans prises de deux en deux sont en même raison, par la 20. pr. 5. si G excede L, aussi H excedera M ; & si égale, égale ; & si plus petite, plus petite : & partant puis que G, H, equemultiplices de A & D défaillent, sont égales, ou excedent L, M, equemultiplices quelconques de C & F, par la 6. def. A sera à C, comme D à F : ce qu'il falloit prouver.

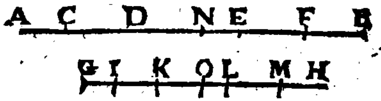
Maintenant soient plus de trois grandeurs, tellement que C soit aussi à N, comme F à O. Je dis que *A* est encore à N comme D à O. Car puisque nous venons de demonstrer que A est à C, comme D à F ; & on a posé C estre à N, comme F à O, il y aura trois grandeurs A, C, N, & trois autres D, F, O, lesquelles sont prises de deux en deux en même raison. Donc comme il a été demonstré és trois grandeurs cy-dessus, A sera derechef à N, comme D à O. En la même maniere sera demonstré en tant de grandeurs qu'on voudra. Si donc il y a tant de grandeurs qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Le docte Stevin en la 19. def. de ses Probl. Geomet. explique une sorte d'argumenter és proportions, qu'il appelle proportion transformée, qui peut estre reduite en un tel theoreme que le suivant.

S'il y-a deux grandeurs, desquelles chacune soit couppée en tant de parties qu'on voudra égales en multitude, & proportionnelles : la composée de tant de parties qu'on voudra de la premiere grandeur, sera à la composée des parties restantes, en mesme raison que la composée, d'autant de parties de la derniere grandeur, sera à la composée des parties restantes d'icelle. Et si quelconque partie de l'une est couppée en deux autres parties, & la partie de l'autre correspondante à cette partie-là, est aussi couppée en deux autres parties proportionnelles à ces deux-là: les totales grandeurs seront aussi couppées proportionnellement.

Soit une grandeur AB couppée en tant de parties qu'on voudra AC, CD, DE, EF, FB; & une autre grandeur GH, couppée en autant de parties que AB, sçavoir ès cinq GI, IK, KL, LM, MH, proportionnelles à celles là de AB. Je dis que AD composée des deux parties AC, CD, est à DB composée des trois parties restantes, comme GK composée des deux parties GI, IK, est à KH composée des trois autres parties restantes. Car puis que comme AC est à CD, ainsi GI est à IK, en composant par la 18. p. de ce livre AD sera à GD, comme GK à IK. Mais comme CD à DE, ainsi IK à KL: donc par la 22. prop. de ce mesme livre, en raison égale, comme AD sera à DE, ainsi GK sera à KL. Derechef, pource qu'en changeant, BF est à FE, comme HM à ML, aussi en composant BE sera à FE, comme HL a ML. Mais FE est à ED, comme ML à LK: donc en raison égale, BE sera à ED comme HL à LK; & en composant, BD sera à ED, comme HK à IK; & en changeant, DE à DB, comme KL à KH. Parquoy puis qu'il a esté demontré que AD est à DE, comme GK à KL, & DE est à DB, comme KL à KH, par la susdite 22. prop. 5. en raison égale comme AD sera à DB, ainsi GK sera à KH.



Nous demontrerons en la mesme maniere, que comme AC est à CB, ainsi GI est à IH. Car derechef en changeant, composant, & par égalité de raison, comme BC sera à DC, ainsi HI à KI: & en changeant, comme CD sera à CB, ainsi IK sera à IH. Veu donc que comme AC est à CD, ainsi GI est à IK, & comme CD à CB, ainsi IK à IH: en raison egale, comme AC sera à CB, ainsi GI sera à IH.

Par mesme raison, comme AF sera à FB, ainsi GM sera à MH: Car derechef en composant, & par egalité de raison, comme AF sera à EF, ainsi GM sera à LM, par les susdites 18. & 21. prop. de ce livre. Mais aussi comme EF est à FB, ainsi LM à MH: Donc en raison egale, comme AF est à FB, ainsi GM est à HM, & ainsi des autres: appert donc ce qui estoit premierement proposé.

Maintenant soit couppée, (comme pour exemple) la troisiéme partie DE en deux quelconques parties DN, NE; & aussi *la troisiesme KL en deux parties KO, OL proportionnelles a celle-là. Ie dis que comme AN à NB, ainsi GO à OH. Car en changeant, comme*

EN sera à ND, ainsi LO à OK ; & en composant par la 18. prop. 5. comme ED sera à DN, ainsi LK à KO. Parquoy puis que comme CD est à DE ; ainsi IK à KL : & comme DE à DN, ainsi KL à KO : par la 22. prop 5. en raison egale, comme CD sera à DN, ainsi IK à KO : donc les parties AC, CD, DN, sont proportionnelles aux parties GI, IK KO. Derechef, pource qu'en changeant, comme FE est à ED, ainsi ML à LK : & en composant, comme DE à NE, ainsi KL à OL, en raison egale, comme FE sera à EN, ainsi ML, à LO, & en changeant, comme NE à EF, ainsi OL à LM : & partant toutes les parties AC, CD, DN, NE EF, FB, sont proportionnelles à toutes les parties GI, IK, KO, OL, LM, MH. Donc comme il a esté demonstré en la premiere partie, AN sera à NB comme GO à OH : appert donc ce qui estoit proposé en second lieu.

A ce Theoreme nous en joindrons deux autres, le premier desquels est tel.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, lesquelles prises de deux en deux, soient en mesme raison : toutes les grandeurs d'un ordre, seront à laquelle on voudra d'icelles en mesme raison, que toutes les grandeurs de l'autre ordre seront à la correspondante.

Soient trois grandeurs d'un costé A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, & soit A à B, comme D à E, & B à C, comme E à F: je dis, que comme toutes les grandeurs A, B, C ensemble, seront à laquelle on voudra d'icelles, par exemple à la derniere C, ainsi toutes les grandeurs D, E, F ensemble, seront à la derniere F. Car puisque comme A est à B, ainsi D à E, en composant A, B sont à B comme D, E, à E. Mais B est à C, comme E à F : donc en raison égale A, B seront à C, comme D, E à F : & en composant A, B,

C, seront à C, comme D, E, F à F. Ce qu'il falloit prouver.

Que s'il y avoit davantage de grandeurs, la demonstration ne seroit dissemblable à celle cy-dessus : car il n'y auroit qu'à repeter la composition & égalité de raison autant de fois qu'il seroit de besoin : Comme par exemple, soient encore G & H, tellement que C soit à G, comme F à H. D'autant que A, B, est à C, comme D, E est à F ; & C à G, comme F à H ; en raison égale A, B, sont à G comme D, E à H, & en composant A, B, G, sont à G, comme D, E, H à H. Mais puis que comme C est à G, ainsi F à H, en changeant, comme G sera à C, ainsi H à F : donc en raison égale, comme A, B, G sont à C, ainsi D, E, H, à F ; & en composant comme toutes les grandeurs A, B, G, C, ensemble, seront à la seule C, ainsi toutes les grandeurs D, E, H, F ensemble, seront à la seule F.

Mais si on vouloit prouver, que comme toutes les quatre grandeurs A, B, C, G, sont à la derniere G, ainsi les quatres autres D, E, F, H, sont à la derniere H, il seroit bien plus bref : Car puis que nous avons demontré, que comme A, B, C, sont à C, ainsi D, E, F à F, & que comme C est à G, ainsi F est à H en raison égale, comme A, B, C seront à G, ainsi D, E, F à H : donc en composant, toutes les grandeurs A, B, C, G, seront à G, comme toutes les grandeurs D, E, F, H seront à H.

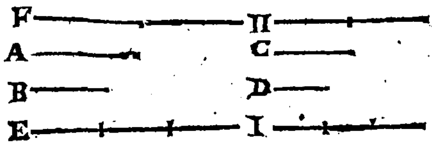
En la même sorte on demontrera, que toutes lesdites grandeurs A, B, C, G seront à A, comme toutes les grandeurs D, E, F, H, seront à D, n'y ayant autre difference, sinon qu'il faut prendre au contraire de ce que dessus.

Et de ce est manifeste, que comme laquelle on voudra des grandeurs du premier ordre, est à sa correspondante du second ordre, ainsi toutes les grandeurs du premier ordre seront à toutes les grandeurs de l'autre ordre.

Le second Theoreme est demontré par Clavius au Scholie de cette 22. prop. & est tel.

Si la premiere est à la seconde en même raison que la tierce à la quarte : les equemultiplices de la premiere & troisiéme auront aussi une même raison à la seconde & quatriéme. Item les equemultiplices de la seconde & quatriéme, auront une même raison à la premiere & troisiéme. Et au contraire, la seconde & quatriéme auront une même raison aux equemultiplices de la premiere & troisiéme. Item la premiere & troisiéme auront une même raison aux equemultiplices de la deuxiéme & quatriéme.

Soit A à B, comme C à D, & soient F, H, equemultiplices de A, C : item G, I, equemultiplices de B, D. Je dis que F est à B, comme H à D : item que G est à A, comme I à C. Et au contraire que B est à F, comme D à H : item A à G, comme C à I. Car puis que F est autant multiplice de A, que H l'est de C, comme F est à A, ainsi H à C, & par l'hypothese A est à B, comme C à D ; donc en raison égale par la 22. pr. 5. comme F sera à B, ainsi H sera à D. Derechef, pource que G est à B, comme I à D, & comme B à A, ainsi D à C : (car puis que A est à B comme C à D par l'hypothese, en changeãt comme B à A, ainsi D à C) en raison égale, comme G sera à A, ainsi I à C par la susdite 22. prop. 5.



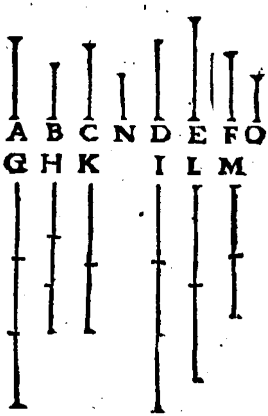
Maintenant pource que B est à A, comme D à C par raison inverse : & comme A à F, ainsi C à H : en raison égale, comme B sera à F, ainsi D à H. Derechef, puis que A est à B, comme C à D: & comme B est à G, ainsi D à I; en raison égale, comme A sera à G, ainsi C à I, par ladite 22. prop. 5. Ce qui estoit proposé.

Par cecy est manifeste un moyen d'argumenter, dont les Geometres s'aident souvent, principalement Archimedes, Apolonius Pergeus, & autres : sçavoir est comme A à B, ainsi C est à D : donc comme F double, ou triple, ou quadruple, &c. de A est à B, ainsi aussi H double, ou triple, ou quadruple, &c. de C est à D : Item comme A est à B, ainsi C à D : donc comme A est au double, triple, ou quadruple, &c. de B, sçavoir à G ; ainsi aussi C sera au double, au triple, ou quadruple, &c. de D, sçavoir à I.

THEOR. 23. PROP. XXIII.

Si trois grandeurs, & autant d'autres, prises de deux en deux sont en même raison, & en proportion troublée : icelles en raison égale seront proportionnelles.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & soient prises de deux en deux en même raison, étant leur proportion troublée, sçavoir que comme A à B, ainsi E à F, & comme B à C, ainsi D à E. Je dis qu'en raison égale A sera à C, comme D à F.



Car étans prises G, H, I, equemultiplices de A, B, D: item K, L, M, quelconques autres equemultiplices de C, E, F. Par la 15. p. de ce livre comme A sera à B, ainsi G à H, puis que G, H, sont. equemultiplices d'icelles A, B,. Mais comme A est à B, ainsi est E à F: donc par la 11. p. 5. comme G est à H, ainsi E est à F. Mais comme E est à F, ainsi aussi L est à M, par la susdite 15. pr. 5. pource que L, M, sont equemultiplices d'icelles E, F: donc aussi comme G est à H, ainsi L est à M, par la 11. p. 5. & puis que comme B est à C, ainsi D à E, par la 4. pr. 5. comme H multiplice de la premiere B, sera à K multiplice de la seconde C, ainsi I multiplice de la troisiéme D, sera à L multiplice de la quatriéme E: donc les trois grandeurs G, H, K, & les trois autres I, L, M, étans prises de deux en deux sont en mesme raison, & la proportion d'icelles sans ordre, puis qu'il a été démontré, que comme G est à H, ainsi L est à M, & comme H est à K, ainsi I à L; & partant par la 21. p. 5. si G est plus grande, égale, ou moindre que K, aussi I sera plus grande, égale, ou moindre que M, & par la 6. def. 5. comme A sera à C, ainsi sera D à F. Parquoy si trois grandeurs, & autant d'autres, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Que s'il y avoit plus de trois grandeurs, & que leur propor-

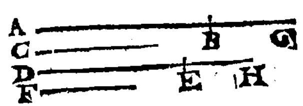
tion soit troublée, sçavoir est que comme A est à B, ainsi F soit à O, & comme B est à C, ainsi E soit à F, & comme C à N, ainsi D à E. Je dis que A sera à N, comme D à O. D'autant qu'il a esté demontré en trois grandeurs que comme A est à C, ainsi F est à O, & que par l'hypothese comme C est à N, ainsi D est à E, il y aura trois grandeurs d'un côté A, C, N, & trois d'un autre D, E, O, lesquelles prises de deux en deux sont en mesme raison, & en proportion troublée. Donc derechef en raison égale demontrée en trois grandeurs A sera à N, comme D à O. Le mesme sera aussi demontré en cinq grandeurs par quatre, comme il a esté demontré en quatre par trois, & ainsi semblablement de davantage.

THEOR. 24. PROP. XXIV.

Si la premiere est à la seconde, comme la troisiéme à la quatriéme, & la cinquiéme à la seconde, comme la sixiéme à la quatriéme; la composée de la premiere & cinquiéme, sera à la seconde, comme la composée de la troisiéme & sixiéme, sera à la quatriéme.

Soit la premiere AB à la seconde C, comme la troisiéme DE est à la quatriéme F; & la cinquiéme BG à la deuxiéme C, comme la sixiéme EH à la quatriéme F. Je dis que la toute AG, sera à C, comme la toute DH à F.

Car puisque comme BG à C, ainsi EH à F, aussi en changeant, comme C sera à BG, ainsi F à EH Vû donc que AB est à C, comme DE à F, & C à



BG, comme F à EH, en raison égale, AB sera à BG, comme DE à EH, par la 22. p. 5. & en composant, comme la toute AG sera à BG, ainsi la toute DH sera à EH, par la 18. pr. d'iceluy 5. livre: & derechef puis que AG est à BG, comme DH à EH, & BG à C, comme EH à F, en raison égale, AG sera à C, comme DH à F.

Si donc la premiere est à la seconde, comme la troisiéme à la quatriéme, &c. Ce qui étoit à prouver.

SCHOLIE.

Presque en la mesme manière sera demontré en tout genre de proportion, ce qui a esté demontré à la 6. prop. de ce 5. livre, tant seulement aux grandeurs multiplices; sçavoir est,

Si deux grandeurs ont même proportion à deux autres grandeurs, & que des retranchées ayent même proportion à icelles; les restantes auront aussi même proportion à icelles.

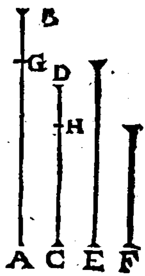
Que AG & DH ayent mesme proportion à C & F, c'est à dire que comme AG est à C, ainsi DH soit à F. Item les retranchez AB & DE ayent mesme proportion à icelles C & F, tellement que comme AB est à C, ainsi DE soit aussi à F: Je dis que les restantes BG, EH ont mesme proportion à icelles C, F, c'est à dire que comme BG est à C, ainsi EH est à F. Car d'autant que comme AB est à C, ainsi DE est à F, par raison inverse, comme C à AB, ainsi F à DE: donc puis que AG est à C, comme DH à F, & C à AB, comme F à DE, en raison égale AG sera à AB, comme DH à DE: & en divisant comme BG sera à AB, ainsi DH à DE. Et derechef, puis que BG est à AB comme EH à DE; & AB à C, comme DE á F, en raison égale BG sera á C, comme EH á F. Ce qui est proposé.

THEOR: 25. PROP. XXV.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande & la plus petite, sont plus grandes que les deux autres.

Soient quatre grandeurs proportionnelles AB, CD, E, F, desquelles AB soit la plus grande & F la plus petite. Je dis que AB & F ensemble, sont plus grandes que les deux autres CD & E ensemble.

Car si de AB on retranche AG égale à E, & de CD on retranche CH égale à F; AG sera à CH, comme E à F, c'est c'est-à-dire comme AB à CD. Et puisque la toute AB est à la toute CD, comme la retranchée AG à la retranchée CH; par la 19. prop. de ce livre, comme la toute AB sera à la toute CD, ainsi le reste GB sera au reste HD: Parquoy iceluy reste GB sera plus grand que le reste HD, comme la toute AB est plus grande que la toute CD. Et pour autant que AG & E sont égales, si on adjoûte à icelles les grandeurs égales F & CH, c'est à sçavoir, F à icelle AG, & CH à E; viendront AG & F ensemble, égales à E & CH ensemble. Et adjoûtant à ces choses égales, les inégales GB, & HD, seront faites AB & F ensemble plus grandes que GE & CD ensemble, puis que GB est plus grande que HD. Parquoy si quatre grandeurs sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



SCHOLIE.

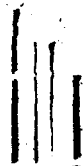
Or il s'ensuit necessairement que si la grandeur antecedante d'une raison, est la plus grande de toutes celles de la proportion, que la consequente de l'autre raison, sera la plus petite de toutes, comme on peut voir en l'exemple proposé. Car d'autant que comme AB est à CD, ainsi E á F; & que AB premiere est plus grande que E tierce, par la 14. prop. 5. CD seconde sera aussi plus grande que F quatriéme.

Semblablement, pource que AB est plus grande que CD, aussi E sera plus grande que F á cause de la similitude des raisons, comme nous avons dit au Scholie de la mesme 14. prop. Que si au contraire la grandeur antecedante d'une raison est la plus petite de toutes, la consequente de l'autre sera la plus grande, comme il appert, si on dit que F est á E, comme CD á AB.

Commandin adjoûte en ce lieu, le theoreme suivant.

Si trois grandeurs sont proportionnelles, la plus grande & la plus petite d'icelles, seront plus grandes que le double de l'autre.

Soient trois grandeurs proportionnelles A, B, C, tellement que *comme A est à B, ainsi B à C & soit A la plus grande, & D la plus petite : Je dis que A & D ensemble, sont plus grandes que le double de B. Car ayant pris D égale à B, comme A sera à B, ainsi D sera à C ; & partant A & C ensemble, seront plus grandes que B & D ensemble par la 25. prop. 5. c'est à dire que le double de B. Ce qui est proposé.*



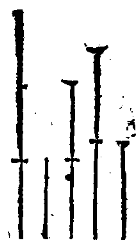
A B D C

Euclide finit icy son 5. livre des Elemens ; mais d'autant que Campanus, Commandin & Clavius y adjoûtent quelques autres propositions, dont les bons Autheurs s'aident fort souvent, & les citent, comme si elles estoient d'Euclide, nous les adjoûterons aussi icy.

THEOR. 26. PROP. XXVI.

Si la premiere a plus grande raison à la seconde, que la troisiéme à la quatriéme : en changeant, la seconde aura moindre raison à la premiere, que la quatriéme à la tierce.

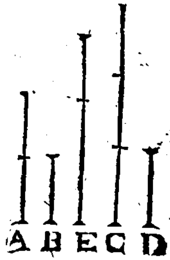
Que A ait plus grande raison à B que C à D : Je dis que la raison de B à A est moindre que la raison de D à C. Car soit entendu E estre à B, comme C est à D. Donc aussi la raison de A à B sera plus grande que celle de E à B ; & par la 10. prop. 5. A sera plus grande que E ; & partant B aura moindre raison à A qu'à E par la 8. prop. 5. Mais comme B est à E, ainsi est en changeant D à C. Donc aussi la raison de B à A est moindre que celle de D à C. Ce qu'il falloit demonstrer.



A B E C D

SCHOLIE.

Nous demonstrerons presque en la mesme maniere que si la premiere a moindre raison à la seconde, que la troisiéme à la quatriéme ; en changeant, la seconde aura plus grande raison à la premiere, que la quarte à la tierce.

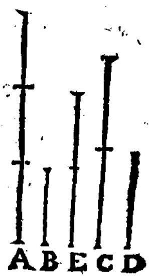


Que A ait moindre raison à B, *que* C à D : *Je dis qu'en changeant* B *a plus grande raison* à *A, que* D à C. *Car soit entendu* E *estre* à B, *comme* C à D : *& la raison de A* à B *sera pareillement moindre que celle de* E à B, *parce que nous avons demonstré au Scholie de la* 13. *prop.* 5. *Donc par la* 10. *prop.* 5. *A sera moindre que* E : *& par la* 8. *prop.* 5. *la raison de* B à *A sera plus grande que de* B à E. *Mais comme* B *est* à E, *ainsi est en changeant* D à C : *Donc aussi la raison de* B à *A sera plus grande que de* D à C.

Autrement. *D'autant que la raison de A* à B, *est moindre que de* C à *D : la raison de* C à *D sera plus grande que celle de A* à B : *donc en changeant par la* 26. *prop.* 5. *la raison de* D à C, *sera moindre que de* B à *A : & partant il y aura plus grande raison de* B à *A que de D* à C. *Ce qui estoit proposé.*

THEOR. 27. PROP. XXVII.

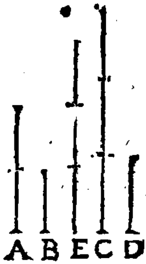
Si la premiere a plus grande raison à la seconde, que la tierce à la quarte ; aussi en permutant la premiere aura plus grande raison à la tierce, que la seconde à la quarte.



Que A ait plus grande raison à B que C à D. Je dis qu'en permutant A aura plus grande raison à C, que B à D. Car soit entendu E estre à B, comme C à D : & la raison de A à B sera aussi plus grande que de E à B : & partant A sera plus grande que E par la 10. prop. 5. donc la raison de A à C sera plus grande que de E à C par la 8. prop. 5. Mais pource qu'en permutant comme E est à C, ainsi B est à D, (car E est posée à B, comme C à D,) il y aura aussi plus grande raison de A à C, que de B à D. Ce qui est proposé.

SCHOLIE.

Nous demonstrerons semblablement, que si la premiere a moindre raison á la seconde, que la troisiéme à la quatriéme: en permutant la premiere aura moindre raison á la tierce, que la seconde á la quarte.

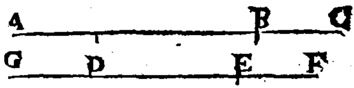


Car soit la raison de A á B moindre que de C á D: Je dis qu'en permutant A aura moindre raison à C, que B á D. Car soit entendu E estre á B, comme C á D, & la raison de A á B sera pareillement moindre que de E á B: & par la 10. prop. 5. A sera moindre que E: parquoy la raison de A à C sera moindre que de E á la mesme C par la 8. prop. 5. Et puis que E est posée estre à B, comme C á D: en permutant comme E à C, ainsi B á D. Donc aussi la raison de A à C sera moindre que de B á D. Ce qui est proposé.

Autrement. *D'autant qu'il y a moindre raison de A á B, que de C á D, il y aura plus grande raison de C à D que de A à B: donc en permutant par la 27. p. 5. il y aura aussi plus grande raison de C á A que de D á B: & par la 26. prop. 5. en raison inverse, il y aura moindre raison de A á C, que de B à D. Ce qui est proposé.*

THEOR. 28. PROP. XXVIII.

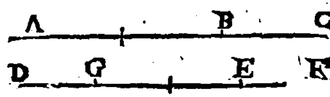
Si la premiere a plus grande raison à la seconde que la tierce à la quarte: la composée de la premiere & de la seconde aura aussi plus grande raison à la seconde, que la composée de la tierce & de la quarte à la quarte.



Que AB premiere ait plus grande raison à BC seconde, que DE tierce à EF quarte: Je dis qu'en composant AC aura plus grande raison à BC, que DF à EF. Car soit entendu comme AB est à BC, ainsi quelque autre GE soit à EF; & il y aura aussi plus grande raison de GE à EF, que de DE à EF; & par la 10. prop. 5. GE sera plus grande que DE. Donc puis que comme AB est à BC, ainsi GE est à EF: en composant comme AC sera à BC, ainsi GF sera à EF: Mais il y a plus grande raison de GF à EF, que de DF à EF; par la 8. p. 5. (car GF est plus grande que DF.) Donc aussi AC aura plus grande raison à BC que DF à EF. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Que si AB a moindre raison à BC que DE à EF, aussi en composant AC aura moindre raison à BC que DF à EF. Car derechef si comme AB est à BC, ainsi quelque autre GE est à EF: Icelle GE sera moindre que DE par la 10. prop. 5. Et en composant AC sera à BC, *comme GF, à* EF. *Mais GF a moindre raison à* EF *que* DF *à* EF *par la 8. pr. 5. attendu que* GF *est moindre que* DF*: donc aussi AC aura moindre raison à* CB, *que* DF *à* EF.

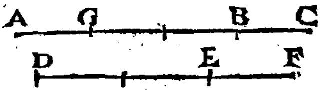


Autrement. *D'autant qu'il y a moindre raison de* AB *à* BC, *que de DE à* EF, *il y aura plus grande raison de DE à* EF, *que de* AB *à* BC; *& par la 28. p. 5. en composant il y aura aussi plus grande raison de* DF *à* EF, *que de AC à* BC: *& partant il y aura moindre raison de AC à* BC, *que de* DF *à* EF.

THEOR. 29. PROP. XXIX.

Si la composée de la premiere & seconde a plus grande raison à la seconde, que la composée de la tierce & quarte à la quatriéme: Aussi en divisant, la premiere aura plus grande raison à la deuxiéme, que la troisiéme à la quatriéme.

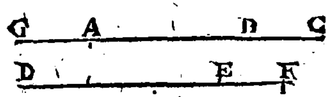
Que AC ait à BC plus grande raiſon que DF à EF : Je dis qu'en diviſant AB, aura auſſi à BC plus grande raiſon que DE à EF. Car ſoit entendu que comme DF eſt à EF, ainſi quelque autre GC ſoit à CB ; & il y aura auſſi plus grande raiſon de AC à BC que de GC



à BC : & partant AC ſera plus grande que GC par la 10. p. 5. Oſtant donc BC commun, reſtera AB plus grande que GB : & par la 8. prop. 5. il y aura plus grande raiſon de AB à BC, que de GB à BC. Mais en diviſant par la 17. prop. 5. comme GB eſt à BC, ainſi DE eſt à EF : (car on a poſé GC être à BC, comme DF à EF.) Donc auſſi la raiſon de AB à BC ſera plus grande, que celle de DE à EF. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Que ſi AC a moindre raiſon à BC *que* DF *à* EF, *auſſi en diviſant* AB *aura moindre raiſon à* BC *que DE à* EF. *Car ſi on entend GC être à* BC, *comme* DF *à* EF ; *la raiſon de AC à* BC *ſera pareillement moindre que celle de GC à* BC : *& par la* 10. *prop.* 5. AC *ſera moindre que* GC. *Oſtant donc* BC *commune, reſtera* AB *moindre que* GB ; *& par la* 8. *prop.* 5. *la raiſon de* AB



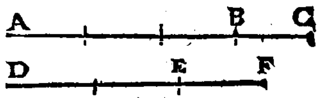
à BC *ſera moindre que de* GB à BC : *Mais puis que* GC *eſt* à BC *commme* DF à EF, *en diviſant* GB *ſera* à BC *comme DE* à EF ; *il y aura donc auſſi moindre raiſon de* AB à BC *que de* DE à EF.

Autrement. *D'autant que la raiſon de* AC à BC *eſt moindre que de* DF à EF, *il y aura plus grande raiſon de* DF à EF, *que de* AC à BC : *donc auſſi en diviſant, il y aura plus grande raiſon de* DE à EF, *que de* AB à BC *par la* 29. *p.* 5. *& partant la raiſon de* AB à BC *ſera moindre que de* DE à EF.

THEOR. 30. PROP. XXX.

Si la composée de la premiere & seconde à plus grande raison à la seconde, que la composée de la tierce & quarte à la quarte : par conversion de raison, la premiere & seconde aura moindre raison à la premiere, que la tierce & quarte à la tierce.

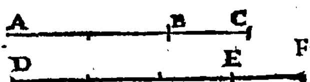
Que AC ait plus grande raison à BC que DF à EF: Je dis par conversion de raison, que AC a moindre raison à AB, que DF à DE. Car AC ayant plus grande raison à BC que DF à EF, en divisant AB aura plus grande raison à BC que DE à EF par la 29. prop. 5.



Donc par raison inverse, il y aura moindre raison de BC à AB que de EF à DE par la 26. pr. 5. Et partant en composant, il y aura aussi moindre raison de la toute AC à AB, que de la toute DF à DE. Ce qui étoit à démontrer.

SCHOLIE.

Semblablement si AC *a moindre raison á* CB *que* DF *á* EF, *aussi par conversion de raison* AC *aura plus grande raison á* AB *que* DF *á* DE. *Car puis qu'il y a moindre raison de* AC *á* BC *que de* DF *á* EF, *par la* 29. *prop.* 5. *en divisant il y aura moindre raison de* AB *á* BC *que de* DE *á* EF, *& en changeant par la* 26. *prop.* 5. *il y aura pareillement moindre raison de* BC *á* AB, *que de* EF *á* DE: *donc en composant par la* 28. *prop.* 5. *il y aura plus grande raison de* AC *á* AB *que de* DF *á* DE.



Autrement. *D'autant que la raison de* AC *á* BC *est moindre que celle de* DF *á* EF, *il y aura plus grande raison de* DF *á* EF *que de* AC *á* BC : *donc par conversion de raison,* *il y aura moindre raison de* DF *á* DE, *que de* AC *á* AB, *c'est-á-dire qu'il y aura plus grande raison de* AC *á* AB, *que de* DF *á* DE.

THEOR. 31. PROP. XXXI.

S'il y a trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, & qu'il y ait plus grande raison de la premiere des premieres à la seconde, que de la premiere des dernieres à la seconde, & aussi plus grande raison de la seconde des premieres à la tierce, que de la seconde des dernieres à la tierce : En raison égale, il y aura pareillement plus grande raison de la premiere des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la tierce.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & la raison de A à B soit plus grande que celle de D à E : Item, la raison de B à C soit aussi plus grande que de E à F : Je dis qu'en raison égale, il y aura plus grande raison de A à C que de D à F.

Car soit entendu G estre à C, comme E à F; & il y aura plus grande raison de B à C, que de G à C : Donc par la 10. prop. 5. B sera plus grande que G; & par la 8. prop. 5. il y aura plus grande raison de A à G, que de A à B: Mais la raison de A à B est posée plus grande que de D à E; Il y aura donc beaucoup plus grande raison de A à G, que de D à E. Soit derechef posée H estre à G, comme D à E : Il y aura donc aussi plus grande raison de A à G, que de H à G : & par la 10. prop. 5. A sera plus grande que H : & partant A aura plus grande raison à C, que H à la mesme C, par la 8. prop. 5. Mais comme H est à C, ainsi est en raison égale D à F. (pource que comme D est à E, ainsi H a G, & comme E est à F, ainsi G a C.) Il y aura donc aussi plus grande raison de A à C, que de D a F. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

Nous démontrerons en la mesme maniere, que si la raison de A à B *est la mesme que de* D a E, *& celle de* B a C *plus grande que de* E a F *: ou au contraire, si la raison de A* à E *est plus grande que de* D à E, *& celle de* B a C *la mesme que de* E a F *: en raison égale, il y aura pareillement plus grande raison de A* à C, *que de* D a F *: car soit premierement A* à B, *comme* D à E, *mais la raison de* B à C *plus grande que de* E à F. *Soit posée* G a C *comme* E à F ; *& la raison de* B a C *sera plus grande que de* G à C, *& consequemment* B *plus grande que* G, *par la* 10. *prop.* 5. *Parquoy il y aura plus grande raison de A* à G *que de A* à B. *Mais A est posée* à B, *comme* D à E. *Donc aussi la raison de A* à G *sera plus grande que de* D à E. *Soit posée derechef* H à G, *comme* D a E ; *& il y aura plus grande raison de A* à G *que de* H à G ; *& par la* 10. *prop.* 5. *A sera plus grande que* H *: Parquoy la raison de A* à C *sera plus grande que de* H à C. *Mais comme* H *est* a C *ainsi est en raison égale* D à F*: (attendu que comme* D à E, *ainsi* H à G, *& comme* E à F, *ainsi* G à C.) *Il y aura donc aussi plus grande raison de A* à C *que de* D à F.

Maintenant la raison de A á B *soit plus grande que celle de D á* E, *mais* B *soit á C, comme* E *á* F. *Soit posée* G *á C, comme E á* F ; *&* B *sera aussi á C, comme* G à C *: & par la* 9. *prop.* 5. B *sera égale* à G. *Parquoy A sera* a G, *comme A* a *B par la* 7. *prop.* 5. *Mais la raison de A* à *B est posée plus grande que de* D à E. *Donc aussi la raison de A* à G *sera plus grande que de* D à F. *Soit derechef posée* H à G *comme* D a E ; *& il y aura plus grande raison de A* á G, *que de* H á G *: & partant A sera plus grande que* H *par la* 10. *prop.* 5. *& il y aura plus grande raison de A* á C *que de* H á C. *Mais comme* H *est* á C, *ainsi en raison égale* D *est* á F : *(car comme* D á E, *ainsi* H á G, *& comme* E *est* a F, *ainsi* G á C.) *Il y aura donc pareillement plus grande raison de A* á *C que de* D á F.

Nous démontrerons semblablement que si A a moindre raison à *B, que* D á E; *&* B a C *moindre raison que* E á F : *aussi en raison égale A aura moindre raison* à *C que* D à F. *Et le* *mesme adviendra encore, si A étant à B comme D à E, la raison de B à C est moindre que de E à F: Ou au contraire, si la raison de A a B étant moindre que de D à E, B est à C comme E à F: Car il est manifeste que la demonstration sera toûjours la mesme que dessus.*

THEOR. 32. PROP. XXXII.

S'il y a trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, & qu'il y ait plus grande raison de la premiere des premieres à la seconde, que de la seconde des dernieres à la tierce: Semblablement, qu'il y ait plus grande raison de la seconde des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la seconde: En raison égale, il y aura pareillement plus grande raison de la premiere des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la tierce.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & que A ait plus grande raison à B, que E à F, & B à C que D à E: Je dis qu'en raison égale, A aura plus grande raison à C, que D à F.

Car soit entendu que G est à C, comme D à E; & il y aura aussi plus grande raison de B à C, que de G à C: partant B sera plus grande que G, par la 10. prop. 5. Parquoy la raison de A à G sera plus grande que de A à B, par la 8. prop. 5. Mais la raison de A à B est plus grande que de E à F: il y aura donc encore beaucoup plus grande raison de A à G que de E à F. Soit derechef entendu H estre à G, comme E est à F, & il y aura aussi plus grande raison de A à G, que de H à G, & par la 10 prop. 5. A sera plus grande que H: parquoy il y aura plus grande raison de A à C que de H à la mesme C. Mais comme H est à C, ainsi est en raison égale D à F : (car comme D est à E, ainsi G est à C, & comme E est à F, ainsi H à G.) Il y aura donc aussi plus grande raison de A à C que de D à F. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

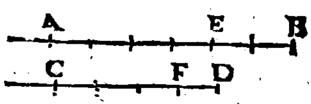
On démontrera semblablement, que si A *a même raison à* B *que* E *à* F, *&* B *à* C *plus grande que* D *à* E *: Ou au contraire, si la raison de* A *à* B *est plus grande que de* E *à* F, *mais celle de* B *à* C *la même que de* D *à* E; *en raison égale, la raison de* A *à* C *sera plus grande que de* D *à* F.

Par même raison on démontrera aussi, que si les raisons des premieres grandeurs sont moindres ; aussi la raison des extrêmes sera moindre; c'est-à-dire, que si A *a moindre raison à* B *que* E *à* F, *&* B *à* C *que* D *à* E : *aussi* A *aura moindre raison à* C, *que* D *à* F.

THEOR. 33. PROP. XXXIII.

S'il y a plus grande raison du tout au tout, que du retranché au retranché, il y aura aussi plus grande raison du reste au reste, que du tout au tout.

Que la toute AB ait plus grande raison à la toute CD, que la retranchée. AE à la retranchée CF : Je dis que le reste EB aura plus grande raison au reste FD, que la toute AB à la toute CD.



Car d'autant qu'il y a plus grande raison de AB à CD, que de AE à CF, en permutant, il y aura aussi plus grande raison de AB à AE, que de CD à CF par la 27. prop. 5. & par conversion de raison il y aura moindre raison de AB à EB, que de CD à FD, par la 30. prop. 5. Donc en permutant, il y aura aussi moindre raison de AB à CD, que de EB à FD par la 27. prop. 5. c'est-à-dire, que le reste EB aura plus grande raison au reste FD, que la toute AB, à la toute CD; Ce qu'il falloit démontrer.

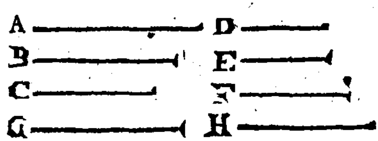
SCHOLIE.

Que si la toute AB *a moindre raison* à *la toute* CD, *que la retranchée* AE à *la retranchée* CF: *aussi le reste* EB *aura moindre raison au reste* FD, *que la toute* AB à *la toute* CD, *comme il appert par la demonstration cy-dessus.*

THEOR. 34. PROP. XXXIV.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra d'un côté, & autant d'un autre, & qu'il y ait plus grande raison de la premiere des premieres à la premiere des dernieres, que de la seconde à la seconde; & cette-cy soit aussi plus grande que de la tierce à la tierce, & ainsi de suitte: Toutes les premieres ensemble auront plus grande raison à toutes les dernieres ensemble, que toutes les premieres, la premiere ôtée, à toutes les dernieres, la premiere aussi ôtée; mais moindre raison que la premiere des premieres à la premiere des dernieres; & finalement aussi plus grande raison que la derniere des premieres à la derniere des dernieres.

Soient premierement trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F; & la raison de A à D soit plus grande que celle de B à E, & celle-cy plus grande que celle de C à *F*: Je dis que A, B, C ensemble, ont plus grande raison à D, E, *F* ensemble, que B, C ensemble à E, *F*



ensemble : mais moindre que A á D, & aussi plus grande que C á *F*.

Car puis qu'il y a plus grande raison de A á D que de B á E, en permutant, il y aura aussi plus grande raison de A á B que de D á E par la 27. prop. 5. Donc en composant A & B ensemble, auront plus grande raison á B, que D & E ensemble á E par la 28. prop. 5. Et en permutant derechef, A & B ensemble, auront plus grande raison á D & E ensemble que B à E. Et puis que la toute A, B, á plus grande raison á la toute D, E, que la retranchée B á la retranchée E, la restante A aura aussi plus grande raison á la restante D, que la toute A, B, á la toute D, E, par la prec. prop. Par même raison, il y aura plus grande raison de B á E, que de la toute B, C, á la toute E, F. Il y aura donc encore bien plus grande raison de A á D, que de la toute B, C á la toute E, *F*. Donc en permutant, il y aura plus grande raison de A á B, C ensemble, que de D á E, F ensemble par la 27. prop. 5. Et en composant, il y aura plus grande raison de A, B, C á B, C, que de D, E, *F* à E, F, par la 28. prop. 5. Et en permutant derechef il y aura plus grande raison des toutes A, B, C ensemble, aux toutes D, E, *F* ensemble, que de B, C á E, *F* : ce qui est premierement proposé.

Et puis qu'il y a plus grande raison de la toute A, B, C à la toute D E, F, que de la retranchée B, C á la retranchée E, F, il y aura aussi plus grande raison de la restante A á la restante D, que de la toute A, B, C, á la toute D, E, *F*, par la prop. prec. Ce qui est secondement proposé

Mais d'autant qu'il y a plus grande raison de B à E, que de C á *F* : en permutant il y aura aussi plus grande raison de B á C, que de E á *F* par la 27. prop. 5. Et en composant, la toute B, C aura plus grande raison á C, que la toute E, *F*, á *F* par la 28. prop. 5. Donc en permutant derechef, il y aura plus grande raison de B, C á E, *F*, que de C á *F*. Mais il a été démontré que A, B, C, ensemble ont plus grande raison á D, E, *F*, ensemble, que B, C, à E, *F* : Il y aura donc encore bien plus grande raison des toutes A, B, C, aux toutes D, E, F, que de la derniere C á la derniere F. Ce qui est tiercement proposé.

Soient maintenant quatre grandeurs de part & d'autre, avec la même hypothese, c'est-á-dire, que la raison de C tierce à F tierce soit plus grande, que de G quarte à H quatriéme. Je dis que la même chose s'ensuit. Car comme il a déja été démontré en trois grandeurs, il y a plus grande raison de B à E que de B, C, G ensemble á E, F, H ensemble. Donc il y aura encore plus grande raison de A à D, que de B, C, G, á E, F, H. Et en permutant il y aura plus grande raison de A à B, C, G que de D à E, F, H. Parquoy en composant il y aura aussi plus grande raison de A, B, C, G à B, C, G, que de D, E, F, H à E, F, H: & en permutant il y aura plus grande raison de A, B, C, G à D, E, F, H, que de B, C, G à E, F, H. Ce qui est premierement proposé.

Et vû qu'il y a plus grande raison de la toute A, B, C, G, à la toute D, E, F, H, que de la retranchée B, C, G, à la retranchée E, F, H, la restante A aura plus grande raison à la restante D, que la toute A, B, C, G, à la toute D, E, F, H. Ce qui est secondement proposé.

Mais comme il a été démontré en trois grandeurs, B, C, G ont plus grande raison à E, F, H, que G à H: & A, B, C, G plus grande à D, E, F, H, que B, C, G, à E, F, H: Il y aura donc beaucoup plus grande raison de A, B, C, G à D, E, F, H, que de la derniere G à la derniere H: ce qui est tiercement proposé.

En la même maniere on conclurra la même en 5 grandeurs par 4: & en 6 par 5, &c. tout ainsi qu'il est démontré en 4 par 3. Parquoy s'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

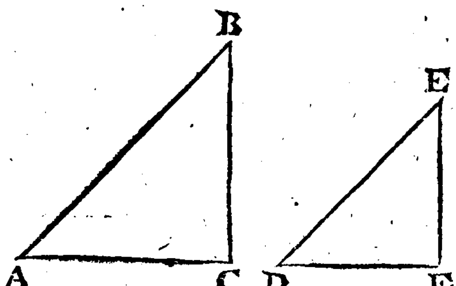
Fin du cinquiéme Livre.

ELEMENT SIXIÉME.

DEFINITIONS.

SEMBLABLES figures rectilignes, ſont celles qui ont les angles égaux, un chacun au ſien, & les côtez qui contiennent les angles égaux, proportionnaux.

C'eſt-à-dire, que toutes figures rectilignes ſont dites ſemblables, ſi étans equiangles elles ont les côtez d'alentour leurs angles égaux proportionnaux: comme les deux triangles ABC, DEF, ſeront dits ſemblables, ſi l'angle A étant égal à l'angle D, l'angle B égal à l'angle E, &

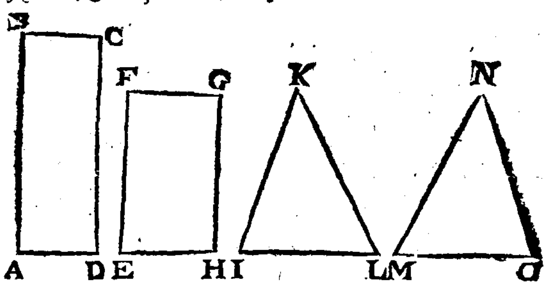


l'angle C à l'angle F ; les côtez qui font & constituent iceux angles égaux, sont proportionnaux ; c'est à sçavoir, que comme AB est à AC, ainsi DE soit à DF, & comme AB est à BC, ainsi DE soit à EF, & comme AC est à BC, ainsi DF soit à EF.

Que si l'une ou l'autre des deux conditions susdites manque, c'est-à-dire, que chacun des angles de l'une des figures étant égal à chacun des angles de l'autre, si les côtez d'alentour leurs angles égaux ne sont proportionnaux ; ou au contraire telles figures ne seront dites semblables, comme sont le quarré, & le quarré long : car ces deux figures ont bien les angles égaux, sçavoir droits : mais les côtez de l'une ne sont pas en même raison que les côtez de l'autre : car ceux du quarré sont en raison d'égalité, & ceux d'alentour l'angle droit du quarré long, sont en raison d'inégalité, puis que l'un est plus grand que l'autre. D'où est manifeste, que toutes figures rectilignes équiangles & équilaterales, lesquelles ont les angles & les côtez égaux en nombre, sont semblables, combien qu'elles soient inégales.

2. Les figures sont reciproques, quand les termes antecedans & consequens des raisons, sont en l'une & en l'autre figure.

C'est à dire, que s'il y a deux figures semblables ou non, dont le premier & dernier des termes proportionnaux soient en l'une des figures, & le second & troisiéme terme en l'autre ; icelles



figures seront dites reciproques. Comme si aux deux parallelogrammes ABCD, EFGH, les côtez AB, BC, sont proportionnaux

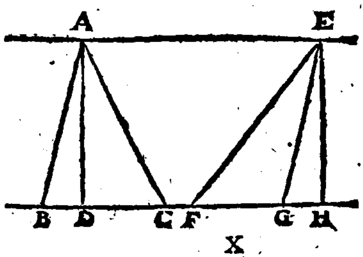
naux aux côtez EF, FG; tellement qu'il y ait mesme raison de AB à EF, que de FG à BC; ou bien que AB soit à FG comme EF à BC: Iceux parallelogrammes seront dits figures reciproques, d'autant qu'en chacun d'iceux est le terme antecedant de l'une des raisons, & le consequent de l'autre. Item les triangles IKL, MNC, seront aussi dits reciproques, si IK est à MN, comme MC à IL; ou bien IK à MC, comme MN à IL.

3. Une ligne droite est dite estre divisée en la moyenne & extréme raison, quand la toute est au plus grand segment, comme le plus grand segment est au moindre.

Quand quelque ligne droite, comme AB, est couppée inegalement en C, de telle sorte que la toute AB, soit au plus grand segment AC, comme iceluy plus grand segment AC, est au moindre segment BC: cette ligne AB sera dite estre couppée en C selon la moyenne & extreme raison. Or comme cela se fait, Euclide l'enseignera en la 30. prop. de ce livre, combien que sous autres paroles il l'ait déja enseignée à la 11. prop. 2.

4. La hauteur d'une chacune figure, est la perpendiculaire tirée du sommet à la base.

Si de A sommet du triangle ABC, l'on mene AD perpendiculaire à la base BC, icelle perpendiculaire sera la hauteur d'iceluy triangle ABC: tellement que ledit triangle sera dit avoir autant de hauteur qu'est icelle perpendiculaire AD. Semblablement la perpendiculaire EH tirée de E, sommet du triangle EFG, sur la base FG, prolongée de la part de G, sera la hauteur d'iceluy triangle EFG. Parquoy si les perpendiculaires de deux figures menées



des sommets d'icelles sur leurs bases (soit qu'icelles bases soient prolongées, ou non) sont égales; icelles figures seront dites avoir même hauteur. Or telles perpendiculaires seront égales, quand les bases des figures & leurs sommets seront constituez en mêmes paralleles : Comme sont les perpendiculaires AD, EH, des triangles ABC, FEG, constituez entre mêmes paralleles. Car puis que les deux angles ADH, EHD, interieurs, & de même part, sont droits, les lignes AD, EH, seront paralleles par la 28. prop. 1. Mais AE, DH, sont aussi paralleles, puis que les triangles ABC, EFG, sont posez être constituez entre mêmes paralleles : Donc le quadrilatere ADHE, sera parallelogramme, & partant les côtez opposez AD, EH, seront égaux par la 34. prop. 1. Ce qui étoit à prouver.

5. Une raison est dite être composée de raisons, quand les quantitez des raisons multipliées entr'elles font quelque raison.

C'est-à-dire, que quand les quantitez de deux ou plusieurs raisons multipliées entr'elles, produisent quelque quantité de raison : icelle raison est dite être composée de celles-là. Or la quantité d'une raison est le dénominateur d'icelle, comme nous avons déja dit sur la 3. def. 5. tellement que la quantité de la raison triple est 3 : mais de la subtriple c'est $\frac{1}{3}$, &c. Ainsi la raison double se dit être composée de la sesquialtere, & de la sesquitierce, pource que les quantitez ou dénominateurs d'icelles, sçavoir est $1\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{3}$, étans multipliez entr'eux produisent 2, dénominateur ou quantité de la raison double.

Derechef, la même raison double sera dite être composée de la double sesquialtere, & de la subsesquiquarte : car les quantitez ou dénominateurs de ces deux raisons, étans multipliez *entr'eux, produisent encore 2, dénominateur de la même raison double. Pareillement la raison trigecuple se dit être composée des raisons double, triple & quintuple; d'autant que les dénominateurs d'icelles raisons, sçavoir est 2, 3, & 5, étans multipliez entr'eux produisent 30, dénominateur d'icelle raison trigecuple. Parquoy étans posées tant de grandeurs qu'on voudra par ordre, la raison des extrémes sera composée des raisons entre-moyennes, pource que le dénominateur ou quantité de la raison de la premiere grandeur à la derniere, est produite & procreée par les dénominateurs des raisons entre-moyennes multipliez entr'eux : comme pour exemple, soit A à B en raison sesquialtere; B à C en raison double; & C à D en raison superbipartiente tierce : la raison des extrémes AD, qui est quintuple, est composée des trois raisons susdites. Car il est évident que multipliant le dénominateur de la raison de A à B, par celuy de B à C, sçavoir 1 $\frac{1}{2}$ par 2 viendront 3 : & partant A est à C en raison triple, & multipliant le dénominateur d'icelle, sçavoir est 3 par le dénominateur de la raison de C à D, qui est 1 $\frac{2}{3}$ proviennent 5; & partant A qui est à D en raison quintuple, est produite & composée des raisons entre-moyennes.*

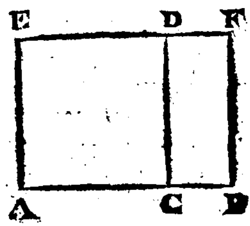
A.	B.	C.	D.
30.	20.	10.	6.

Quelques interpretes afin de rendre plus intelligibles, tant les 27 28 & 29 prop. de ce livre, que plusieurs du 10. adjoûtent icy cette def.

6. Un parallelogramme étant appliqué selon quelque ligne droite donnée, est dit defaillir d'un

parallelogramme, lors qu'il n'occupe pas toute ladite ligne : mais il est dit exceder, quand il en occuppe une plus grande; en sorte toutesfois qu'iceluy parallelogramme defaillant, ou excedant ait deux angles communs avec le parallelogramme appliqué sur toute la ligne proposée : & la difference de ces deux parallelogrammes est dite defaut, ou excez.

Soit une ligne droite AB sur laquelle soit constitué le parallelogramme ACDE, qui n'occupe pas toute ladite ligne AB, ains laisse CB; & soit achevé le parallelogramme ABFE tirant EF parallele à CD jusques à ce qu'elle rencontre ED prolongée en F. Or le parallelogramme AD appliqué selon la ligne droite AB, ayant les deux angles A, E communs avec le parallelogramme AF, appliqué & décrit sur toute ladite ligne AB, est dit defaillir du parallelogramme CF; & iceluy parallelogramme CF sera appellé le defaut.

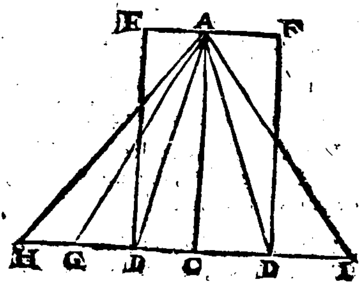


Derechef, soit une ligne droite AC, sur laquelle soit constitué le parallelogramme AF, ayant le côté AB plus grand que la ligne proposée AC, & soit tirée CD parallele à BF. Donc le parallelogramme AF appliqué selon la ligne droite AC, & qui avec le parallelogramme AD décrit sur toute ladite ligne AC a les deux angles A, E communs, sera dit exceder AD du parallelogramme CF, tellement qu'iceluy CF est dit l'excez.

THEOR. 1. PROP. I.

Les triangles, & les parallelogrammes de même hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases.

Soient deux triangles ABC & ACD de mesme hauteur, sur les bases BC & CD : soient aussi deux parallelogrammes CE, CF de mesme hauteur, les bases desquels soient les mesmes BC, CD. Je dis premierement que le triangle ABC, est au triangle ACD, comme la base BC, est à la base CD : c'est à sçavoir que si on pose pour premiere grandeur la base BC, pour seconde la base CD, pour troisiéme le triangle ABC, & pour quatriéme le triangle ACD ; les equemultiplices de la premiere & troisiéme seront plus petites, égales, ou plus grandes, que les equemultiplices de la seconde & quatriéme, ainsi que le requert la 6. definition du 5. livre.



Qu'il ne soit ainsi : qu'on prolonge BD de part & d'autre, & aprés avoir pris d'un côté BG & GH chacune égale à BC : item de l'autre côté, DI égale à CD, soient menées les lignes droites AG, AH, AI. Donc par la 38. prop. 1. les trois triangles ABC, ABG, AGH, étans sur bases égales & entre mesmes paralleles, seront égaux : aussi par les mesmes raisons les deux triangles ACD & ADI seront égaux ; ainsi il est évident qu'autant de fois que la base HC contiendra la base BC, autant de fois le triangle ACH contiendra le triangle ABC. Pareillement, autant de fois que la base CI contiendra la base CD, autant de fois le triangle ACI contiendra le triangle ACD. Parquoy si la base CH, est égale à la base CI, le triangle ACH sera aussi égal au triangle ACI, par la 38. prop. 1. Mais si la base est plus grande, consequemment le triangle sera plus grand ; si plus petite, plus petit, & par la 6. def. 5. comme la base BC sera à la base CD, ainsi le triangle ABC sera au triangle ACD : ce qui étoit à démontrer pour la premiere partie.

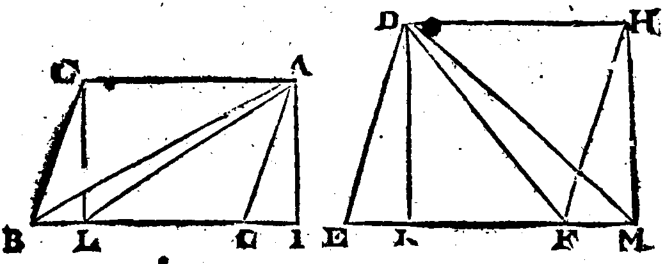
Quant à la seconde partie touchant les parallelogrammes CE, CF, le même se peut dire que des triangles, parce qu'iceux parallelogrammes sont doubles des triangles ABC, ACD par la 41. prop. 1. & par la 15. prop. 5. ce qui est prouvé d'iceux triangles s'entendra des parallelogrammes. Donc les triangles, & les parallelogrammes de même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Commandin adjoûte en ce lieu cet autre Theoreme.

Les triangles, & les parallelogrammes, desquels les bases sont égales, ou une même, sont entr'eux, comme leurs hauteurs.

Soient deux triangles ABC, DEF, & les parallelogrammes AGBC, DEFH, ayans les bases BC, EF égales : Je dis que le triangle ABC est au triangle DEF, & le parallelogramme AGBG au parallelogramme DEFH, comme la hauteur AI est à la hauteur DK. Car si on prend les lignes IL, KM égales aux bases BC, EF, & on tire les lignes LA, MD, le triangle ALI sera égal au triangle ABC par la 38. prop. 1. puis qu'ils sont sur bases égales LI, BC, & entre mêmes paralleles AG, IB : Par même raison le triangle DKM sera égal au triangle



DEF. Parquoy par la 7. prop. 5. comme ABC sera à DEF, ainsi ALI sera à DKM. Mais par la 1. prop. 6. comme ALI est à DKM, ainsi AI à DK. (car si AI, DK sont posées les bases, les lignes droites égales LI, KM seront les hauteurs.) Donc aussi ABC sera à DEF, comme AI à DK.

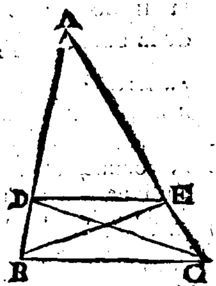
Et d'autant que par la 15. prop. 5. comme ABC est à DEF, ainsi le parallelogramme AGBC au parallelogramme DEFH: (car iceux parallelogrammes sont doubles des triangles par *la 41. prop. 1.) aussi AGBC sera à DEFH, comme AI à DK. Le même s'ensuivra si les triangles, & les parallelogrammes ont une même base.*

THEOR. 2. PROP. II.

Si on meine une ligne droite parallele à l'un des côtez d'un triangle, laquelle couppe les deux autres côtez ; elle les couppera proportionnellement : & si deux côtez d'un triangle sont couppez proportionnellement, la ligne couppante sera parallele à l'autre côté.

Soit le triangle ABC, dans lequel soit menée la ligne droite DE parallele au côté BC, couppant les deux autres côtez AB & AC aux points D & E. Je dis que les côtez AB, AC sont couppez proportionnellement aux points D & E, c'est-à-dire que AD sera à DB, comme AE est à EC.

Car estans menées les deux lignes BE & CD : par la 37. p. 1. les deux triangles DEB & EDC, estans sur même base, & entre mesmes paralleles, sont égaux ; & par la 7. p. 5. ils auront même raison l'un comme l'autre au troisiéme ADE. Mais par la 1. p. 6. les triangles DEB & DEA, estans de mesme hauteur, sont l'un à l'autre comme la base BD à la base DA : & par la mesme proposition, le triangle CDE, estant de mesme hauteur qu'iceluy triangle EDA, ils seront aussi l'un à l'autre, comme CE est à EA : & partant par la 11. prop. 5. BD sera à DA, comme CE à EA : (puisque ces deux raisons sont les mêmes que du triangle BED au triangle DEA, & du triangle CDE au même triangle DEA.) Ce qui étoit proposé.



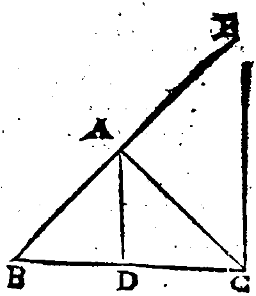
Pour la seconde partie : je dis que si DB est à DA, comme CE à EA, la ligne couppante DE sera parallele au côté BC.

Car les triangles DEB & DEA, seront par la 1. prop. 6. l'un à l'autre, comme DB à DA. Item les deux autres triangles CDE, EDA, seront aussi l'un à l'autre, comme CE à EA : & par la 11. prop. 5. le triangle DEB sera au triangle DEA, comme le triangle CDE est au même triangle DEA : & par la 9. prop. 5. les deux triangles BED, & EDC seront égaux, lesquels étans sur même base DE, par la 39. prop. 1. ils seront entre mêmes paralleles : & partant DE sera parallele à BC. Parquoy si l'on meine une ligne parallele à l'un des côtez d'un triangle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si l'angle d'un triangle est couppé en deux également par une ligne droite, laquelle couppe aussi la base ; les segmens de la base seront l'un à l'autre comme les autres côtez du triangle : Et si les segmens de la base sont l'un à l'autre comme les autres côtez du triangle: la ligne droite tirée du sommet à la section de la base, couppe l'angle en deux également.

Au triangle ABC, soit l'angle BAC couppé en deux également par la ligne AD, laquelle couppe aussi la base BC au poinct D : Je dis premierement, que BD est à DC, comme AB à AC.



Qu'il ne soit ainsi : aprés avoir du poinct C mené CE parallele à DA, soit continué BA directement jusques à ce qu'il rencontre CE en E; (Or BA, CE se rencótrerót, d'autant que les deux angles B & BCE sont moindres que deux droits, étans égaux aux deux B & BDA, qui sont moindres que deux droits par la 17. prop. 1.) & parce que DA

& CE sont paralleles, l'angle CAD sera égal à son alterne ACE par la 29. prop. 1. Et si l'exterieur DAB sera égal à l'opposé interieur AEC. Mais BAD, CAD étans égaux par l'hypothese, aussi par les com. sent. AEC, ACE seront égaux : & partant par la 6. prop. 1. les côtez AE & AC seront égaux. Mais par la precedente prop. BA est à AE, comme BD a DC; (étant AD parallele à CE) & par consequent BA sera aussi à AC, (égale à AE) comme BD à DC. Ce qui étoit proposé.

Pour la seconde partie : je dis que si BA est à AC, comme BD à DC, que l'angle CAB sera couppé en deux également par la ligne droite AD.

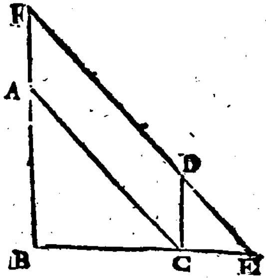
Car aprés avoir construit comme dessus, BA sera à AE, comme BD à DC, par la precedente prop. Et partant par la 11, prop. 5. BA sera à AE, comme le même BA est à AC, & par la 9. prop. 5. AE & AC seront égaux; & partant par la 5. prop. 1. les deux angles AEC, ACE, seront aussi égaux; & par la 29. prop. 1. ils sont égaux, l'un à DAB, & l'autre à DAC, lesquels par ce moyen seront aussi égaux; ce qui étoit proposé. Parquoy si l'angle d'un triangle est couppé en deux également, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 4. PROP. IV.

Des triangles équiangles, les côtez qui sont au long des angles égaux, sont proportionnaux; & les côtez qui soûtiennent les angles égaux, sont de même raison.

Soient deux triangles ABC, DCE, équiangles : c'est-à-dire, que l'angle ABC soit égal à l'angle DCE, & l'angle ACB à l'angle E, & le troisiéme au troisiéme. Je dis que comme AB est à BC, ainsi DC à CE; & comme BC à CA, ainsi CE à ED; & finablement comme AB à AC, ainsi DC à DE. Car ainsi les côtez d'alentour les angles égaux, sont les proportionnaux, & les côtez homologues, ou de même raison, sont ceux-là qui soûtiennent les angles égaux, c'est-à-dire que tous les antecedans, & semblablement les consequens regardent les angles égaux.

Soient constituez les côtez BC, CE selon une ligne droite; tellement que l'angle externe DCE soit égal à l'interne ABC, & pareillement l'externe ACB à l'interne DEC : & d'autant que par la 17. prop. 1. les deux angles ABC, ACB sont moindres que deux droits, & l'angle DE[illegible] égal à l'angle ACB, au[illegible] angles B & E seront moi[illegible]es que deux droits : & partant les lignes BA & ED étans produittes de la part de A & D, se rencontreront; Qu'elles soient donc prolongées & conviennent en F. Il est évident que l'angle exterieur ECD, étant par l'hypothese égal à son opposé interieur CBA; DC sera parallele à FB par la 28. prop. 1. Pareillement l'angle exterieur ACB étant égal à son opposé interieur DEC, aussi par la mesme 28. prop. 1. CA & EF seront paralleles. Partant ACDF sera parallelogramme, & par la 34 prop. 1. il aura les angles, & les côtez opposez égaux. Mais AC étant parallele à EF, par la 2. prop. 6. AB sera à AF, ou CD son égale, comme BC à CE; & en permutant par la 16. prop. 5. AB sera à BC, comme DC à CE. Pareillement CD étant parallele à BF, comme BC sera à CE, ainsi FD, ou CA son égale, sera à ED par la 2. prop. 6. & en permutant BC sera à AC, comme CE à ED.



Veu donc que AB est à BC, comme DC à CE, & BC à CA comme CE à ED, aussi en raison égale AB sera à AC, comme DC à ED, Parquoy des triangles équiangles, &c. Ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

De cecy resulte, que si une ligne droite parallele a un côté d'un triangle, couppe les deux autres côtez d'iceluy, elle ôtera un triangle semblable au tout. Comme au triangle BFE *étant menée la ligne droite* AC *parallele au côté* FE, *qui couppe les deux autres côtez en* A *&* C : *Je dis que le triangle*

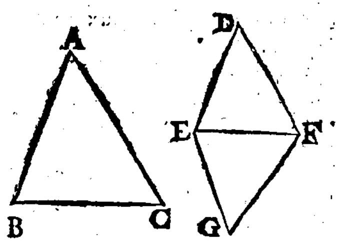
ABC retranché par icelle ligne AC, est semblable au triangle BFE. Car d'autant que par la 29. prop. 1. l'angle externe BAC est égal à l'interne de même côté F, & que l'angle B est commun à tous les deux triangles BAC, BFE, ils seront équiangles par le Corol. de la 32. prop. 1. Parquoy, comme il a été démontré cy-dessus, ils ont les côtez autour des angles égaux proportionnaux : & partant selon la 1. def. 6. iceux triangles BAC & BEF seront semblables.

THEOR. 5. PROP. V.

Si deux triangles ont les côtez proportionnaux, ils seront équiangles, & auront les angles égaux, sous lesquels les côtez de mesme raison seront subtendus.

Soient deux triangles ABC, & DEF, ayans les côtez proportionnaux, & soit AB à BC comme DE à EF, & BC à CA, comme EF à FD, & encore AB à AC comme DE à DF. Je dis que les triangles sont équiangles, sçavoir l'angle A estre égal à l'angle D, & l'angle B à l'angle E, & l'angle C à l'angle F : car ainsi les angles égaux regardent les côtez de mesme raison.

Qu'il ne soit ainsi : sur la ligne EF, & aux deux points E & F soient construits deux angles, sçavoir FEG égal à l'angle B, & EFG égal à l'angle C, tirant les lignes EG, & FG jusques à ce qu'elles se rencontrent en G: Et par la 32. prop. 1. le 3e angle G sera égal au 3e angle A. Parquoy les triangles ABC, GEF sont équiangles : & par la 4. prop. 6. comme AB est à BC, ainsi GE à EF. Mais comme AB est à BC, ainsi aussi a été posé DE à EF : Donc par



la 11. prop. 5. comme GE à EF, ainsi DE à la mesme EF : & partant par la 9. prop. 5. GE, DE seront égales. Et d'autant que par la proposition precedente, comme BC

est à CA, ainsi EF est à FG ; & par l'hypothese comme BC est à CA, ainsi EF est à FD : par la 11. prop. 5. comme EF sera à FG, ainsi la mesme EF sera a FD : & par la 9. prop. 5. FG, FD seront égales. Veu donc que les côtez EG, FG du triangle GEF, sont égaux aux côtez DE, DF du triangle DEF, chacun au sien, & la base EF commune aux deux triangles, les angles G & D seront égaux par la 8. prop. 1. & partant par la 4. prop. 1. les autres angles GEF, GFE seront aussi égaux aux autres DEF, DFE, chacun au sien. Parquoy l'angle G étant égal à l'angle A, aussi l'angle D sera égal au mesme angle A : & ainsi l'angle DEF sera égal à l'angle B, & l'angle DFE à l'angle C, ainsi qu'il étoit proposé. Si donc deux triangles ont les côtez proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, & les côtez au long d'iceux angles égaux, proportionnaux ; ils seront équiangles, & auront les angles égaux sous lesquels les côtez de mesme raison sont subtendus.

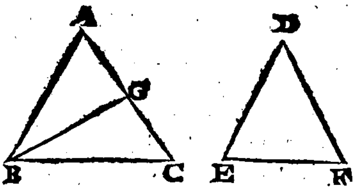
Soient les deux triangles ABC & DEF, ayans l'angle B égal à l'angle E, & comme AB à BC, ainsi DE soit à EF. Je dis que les triangles sont équiangles, sçavoir que l'angle A est égal à l'angle D, & l'angle C à l'angle F, car ainsi les angles égaux sont subtendus des côtez homologues.

Qu'il ne soit ainsi ; sur la ligne EF soit construit, comme en la proposit. & fig. precedente, le triangle GEF équiangle au triangle ABC : & par la 4. prop. 6. GE sera à EF, comme AB à BC, ou DE à EF, (car ils sont en la mesme raison) & par la 9. prop. 5. GE & DE (qui ont une mesme raison à EF) seront égaux ; & partant les deux triangles GEF & DEF, auront deux côtez égaux à deux côtez, sçavoir GE, EF, à DE, EF, chacun au sien, & les deux angles au point E, égaux (car ils sont chacun égal à l'angle B) & par la 4. prop. 1. ils auront la base égale à la base, & les autres angles égaux aux autres angles, chacun au sien, & partant iceux triangles seront équiangles. Mais l'un d'iceux triangles, sçavoir GEF, est équiangle au triangle ABC par la construction. Donc l'autre triangle DEF sera aussi équiangle au mesme triangle ABC. Parquoy si deux triangles ont un angle égal à un angle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, & les côtez au long d'un autre angle, proportionnaux, étans les troisiémes angles de mesme espece : Iceux triangles seront équiangles, & auront les angles égaux, au long desquels les côtez seront proportionnaux.

Soient deux triangles ABC, & DEF, desquels les deux angles A & D soient égaux, & les côtez AB, BC d'alentour l'angle ABC, proportionnaux aux côtez DE, EF d'alentour l'angle E, c'est-à-dire que comme AB est à BC, ainsi DE soit à EF: mais les autres angles C & F soient de mesme espece, c'est à dire aigus, droits, ou obtus: & soient premierement aigus. Je dis que les triangles sont équiangles, sçavoir est, que les angles ABC & E, à l'entour desquels sont les côtez proportionnaux, & les angles C & F sont égaux.



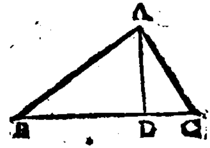
Car si l'angle B est égal à l'angle E, il appert par la precedente prop. que les triangles seront équiangles. Mais si lesdits angles ne sont égaux, soit B plus grand que E, & soit fait ABG égal à E par la 23. prop. 1. Donc le troisiéme angle AGB, sera égal au troisiéme F, & partant aigu comme iceluy; & les deux triangles ABG & DEF seront équiangles; & par la 4. prop. 6. comme AB sera à BG, ainsi DE à EF. Mais par l'hypothese, comme

AB est à BC, ainsi DE à EF : donc par la 11. prop. 5. comme AB sera à BG, ainsi le méme AB sera à BC; & partant par la 9. prop. 5. BG, & BC seront égaux, & par la 5. prop. 1. les deux angles C & BGC sur la base CG seront égaux, & tous deux aigus, & par consequent l'angle BGA sera plus grand qu'un droit, puis que par la 13. prop. 1. les deux BGC, AGB sont égaux à deux droits : Mais l'angle AGB a été démontré égal à l'angle F : donc F seroit aussi plus grand qu'un droit; & on l'a posé aussi moindre : ce qui est absurde. Maintenant, tant l'angle C que F ne soit aigu ; & comme dessus l'angle C sera égal à l'angle BGC ; & partant iceluy BGC ne sera aussi aigu, & les deux C & BGC ne seront moindres que deux droits, mais égaux ou plus grands que deux droits : ce qui est absurde : car par la 17. prop. 1. ils sont moindres que deux droits. Les angles ABC & E ne sont donc pas inégaux, ains égaux, & partant par la 32. prop. 1. le troisiéme C sera aussi égal au troisiéme F : ce qui est proposé. Si donc deux triangles ont un angle égal à un angle, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on tire une perpendiculaire sur la base; elle coupera iceluy triangle en deux autres triangles semblables entr'eux, & au total.

Soit le triangle rectangle ABC, & l'angle droit A, duquel soit menée à la base BC la perpendiculaire AD. Je dis que les triangles ABD & ADC, ausquels est divisé iceluy triangle ABC par la perpendiculaire AD, sont semblables entr'eux, & au total ABC.



Qu'ainsi ne soit : d'autant que AD est perpendiculaire, l'angle BDA est droit, & égal à l'angle droit BAC, du triangle total ABC, & l'angle B est commun à tous les deux triangles BAD & ABC, & par la 32. prop. 1. le troisiéme angle BAD, sera égal au troisiéme ACB: & partant les deux triangles BAD & ABC, seront équiangles; & par la 4. prop. 6. ils auront les côtez au long des angles égaux proportionnaux, c'est-à-dire, que comme CB sera à AB, ainsi AB à BD; & comme BA à AC, ainsi BD à DA: & comme BC à CA, ainsi BA à AD: & partant par la 1. def. de ce livre les triangles ABC, ABD seront semblables.

Par même discours, on prouvera que les deux triangles ABC & ADC, sont aussi équiangles, & semblables: car l'angle C étant commun à tous les deux triangles, & l'angle droit BAC égal à l'angle droit ADC, le troisiéme angle CAD sera égal au troisiéme angle B, par la 32. prop. 1. & par la 4. prop. 6. comme BC sera à CA, ainsi CA à CD: & comme CA à AB, ainsi CD à DA, & comme CB à BA, ainsi CA à AD.

On démontrera en la même maniere, les triangles ADB, ADC être semblables entr'eux, puisque les angles au poinct D sont droits, & tant les angles ABD, CAD, que BAD, ACD, ont été démontrez égaux: & partant par la 4. prop. 6. comme BD sera à DA, ainsi DA à DC: & comme DA à AB, ainsi DC à CA: & comme AB à BD, ainsi CA à AD. Si donc de l'angle droit d'un triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, que la perpendiculaire tirée de l'angle droit d'un triangle rectangle à la base, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de la base: & chacun des côtez comprenant l'angle droit, être aussi moyen proportionnel entre toute la base, & le segment qui le touche.

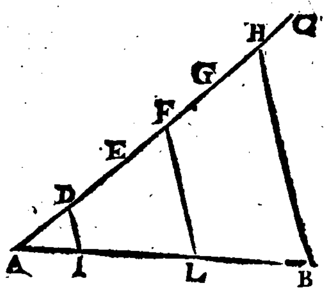
Car il a été démontré, que comme BD est à DA, ainsi DA est à DC: & partant DA est moyenne prop. entre BD & DC: item que comme CB est à BA: ainsi BA à BD: & par ainsi BA est moyenne prop. entre CB & BD: finalement que comme BC est à CA, ainsi CA à CD: & partant CA est moyenne proportionnelle entre BC & CD.

PROB. 1. PROP. IX.

D'une ligne droite donnée, ôter une partie demandée.

Soit la ligne droite donnée AB, de laquelle il faut ôter la cinquiéme partie, ou autre telle qu'on voudra.

Du point A soit menée la ligne droite AC intermine-ment, faisant quelconque angle avec AB, comme BAC, & en icelle AC, soient prises à l'advanture autant de parties égales que dénotte la partie qu'on veut oster, comme en l'exemple proposé; il faut prendre cinq parties égales AD, DE, EF, FG, GH: & apres avoir conjoinct les points B & H par la ligne BH, du point D soit menée DI, parallele à HB: Je dis que AI est la cinquiéme partie requise de AB.



Car puis qu'au triangle ABH, la ligne DI est parallele au côté HB, par la 2. prop. 6. comme HD sera à DA, ainsi BI à IA : & en composant par la 18. prop. 5. comme HA sera à DA, ainsi BA à IA : mais par la construction HA est quintuple de AD : donc aussi BA sera quintuple de AI : & partant AI sera la cinquiéme partie de la ligne droite AB, laquelle avoit été demandée. Donc d'une ligne droite donnée, &c. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

Que si de AB il falloit coupper plusieurs parties, comme pour exemple les trois cinquiémes, il est évident par ce qui a été démontré cy-dessus, qu'étant tirée la ligne FL parallele à HB, le segment AL sera les trois cinquiémes de AB, tout ainsi que AF est les trois cinquiémes de AH. Et pour promptement

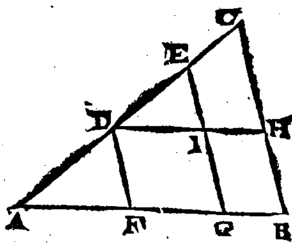
ment pratiquer cecy, il faut décrire du centre F, *& de l'intervalle* HB *un arc au dessous de la ligne donnée* AB, *mais de* B *& de l'intervalle FH, décrire un autre arc qui couppe le precedent, puis tirer une ligne droite de la section d'iceux arcs à* F, *& icelle couppera la partie requise AL.*

PROBL. 2. PROP. X.

Coupper une ligne droite donnée non couppée, semblablement à une autre ligne droite donnée & couppée.

Soient données les lignes droites AB, AC, desquelles AC est couppée en D & E : & il faut coupper AB en parties semblables & proportionnelles à celles de AC.

Soient accommodées icelles lignes données, en sorte qu'elles fassent quelconque angle BAC; & apres avoir mené BC, des points D & E, soient menées DF, EG, paralleles à icelle BC, par la 31. pr. 1. Je dis que la ligne AB est semblablement couppée en F & G, comme la ligne AC est couppée en D & E. Car par la 2. prop. 6. comme AD est à DE, ainsi AF à FG.



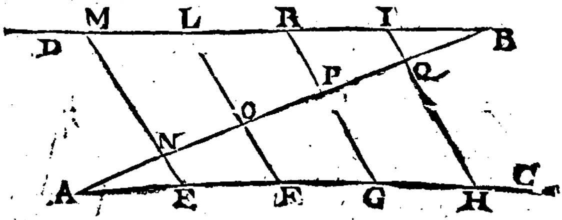
Que si on tire DH parallele à AB couppant EG en I. Derechef, par la susdite 2. prop. 6. comme DE sera à EC, ainsi DI à IH, c'est-à-dire, ainsi FG à GB, pource que par la 34. prop. 1. FG est égale à DI, & GB à IH. Parquoy les parties FG, GB seront aussi proportionnelles aux parties DE, EC. Les trois parties AF, FG, GB, sont donc proportionnelles aux trois parties AD, DE, EC : & partant AB est couppée semblablement à AC, ainsi qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous adjousterons icy deux Probl. fort utiles, & necessaires aux choses geometriques.

1. Estant donnée une ligne droite, la coupper en tant de parties égales qu'on voudra.

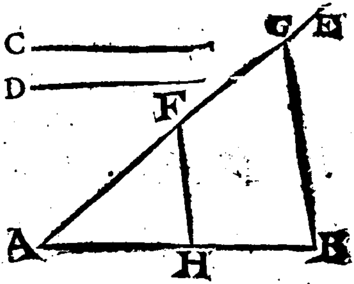
Soit la ligne donnée AB, qu'il faut coupper en cinq parties égales. De l'extrêmité A, soit menée la ligne AC, tant qu'il sera de besoin, faisant quelconque angle avec AB; puis de l'extrêmité B, soit menée BD parallele à AC, & d'icelle AC soient couppées quatre parties égales AE, EF, FG, & GH, qui est une partie moins que le nombre des parties esquelles il faut coupper la ligne donnée; en aprés, du poinct B en BD,



soient aussi prises les quatre parties BI, IK, KE, & LM égales á celles de la ligne AC; puis étans menées les lignes EM, FL, GK, & HI, elles coupperont la ligne donnée AB en cinq parties égales. Car puis que par la construction les lignes EF, ML, sont égales & paralleles entr'elles, par la 33. prop. 1. ME, LF, seront aussi paralleles entr'elles: Et par même raison LF, KG, HI, seront pareillement paralleles. Vû donc que AH est couppée en quatre parties égales, AQ le sera aussi. Par même raison BN sera encore divisee en quatre parties esgales, parce que BM a été couppee en autant de parties esgales. Parquoy vû que tant AN que BQ sont esgales à chaque partie NO, OP, PQ toutes les cinq parties AN, NO, OP, PQ, & QB, seront esgales entr'elles. Ce qu'il falloit faire.

2. Coupper une ligne droite donnée en deux parties, qui soient entr'elles selon une raison donnée.

Soit la ligne droite donnee AB, *qu'il faut coupper en deux parties, qui ayent telle raison entr'elles que C à D : Du poinct A, soit menée AE faisant quelconque angle avèc* AB; *& d'icelle AE, soit couppee AF esgale à C, & puis FG esgale à D : en aprés soit menée* BG, *& du poinct F tirée FH parallele à icelle* BG, *laquelle couppe* AB *en H : & icelle* AB *sera couppée à iceluy poinct H, selon la raison de C à D, puis que par la 2. prop. de ce livre, AH est à* HB, *comme AF à FG, qui sont esgales à C & D. Ce qu'il falloit faire.*

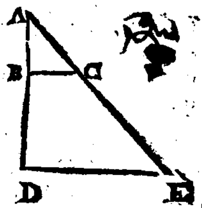


PROBL. 3. PROP. XI.

A deux lignes droites données, en trouver une troisiéme proportionnelle.

Soient deux lignes droites données AB & AC, ausquelles il en faut trouver une troisiéme proportionnelle.

Soient disposées icelles lignes en un angle CAB; & aprés avoir prolongé AB interminément, soit faite BD égale à AC, & mené CB; puis du point D, soit tirée DE parallele à BC, rencontrant AC prolongée en E. Je dis que CE est la troisiéme proportionnelle requise, c'est-à-dire que comme AB est à AC, ainsi AC à CE. Car puis qu'au triangle ADE, la ligne droite BC est parallele au côté DE, par la 2. prop. 6. comme AB sera à BD, ainsi AC à CE : mais par la 7. prop. 5. comme AB est à BD, ainsi la même AB est à AC, égale à icelle BD. Donc comme

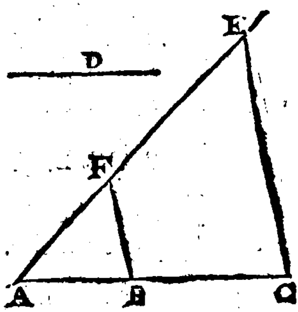


AB est à AC, ainsi AC à CE. Partant à deux lignes droites données, nous en avons trouvé une troisiéme proportionnelle. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 4. PROP. XII.

A trois lignes droites données, en trouver une quatriéme proportionnelle.

Soient les trois lignes droites données AB, BC, & D, ausquelles il en faut trouver une quatriéme proportionnelle.



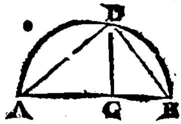
Soient disposées les deux premieres AB, BC, selon une ligne droite AC; & ayant tiré de A une ligne droite interminée AE, faisant avec la premiere AB, quelconque angle, comme A; d'icelle AE, soit coupée AF égale à D, & menée BF: en aprés, de C, soit menée CE parallele à icelle BF, rencontrant AE en E. Je dis que FE est la quatriéme proportionnelle requise. Car puis qu'au triangle AEC, la ligne BF est parallele à CE, par la 2. prop. 6. comme AB est à BC, ainsi AF, où D son égale est à FE. Nous avons donc trouvé une quatriéme ligne proportionnelle à trois données: Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 5. PROP. XIII.

Entre deux lignes droites données, trouver une moyenne proportionnelle.

Soient deux lignes droites données AC & CB, entre lesquelles il en faut trouver une moyenne proportionnelle.

Soient icelles lignes AC, CB, disposées en une ligne droite AB, sur laquelle soit décrit un demy cercle ADB : & aprés avoir du poinct C levé la perpendiculaire CD, qui rencontre la circonference en D : Je dis qu'icelle CD est la moyenne proportionnelle demandée.



Car étans menées les deux lignes droites AD & BD, l'angle ADB dans le demy cercle, sera droit par la 31. prop. 3. Vû donc que de l'angle droit ADB du triangle rectangle ADB, est tirée DC perpendiculaire à la base AB, par le Corol. de la 8. pr. 6. icelle CD sera moyenne proportionnelle entre AC, CB. Nous avons donc trouvé une moyenne proportionnelle entre deux lignes données : Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

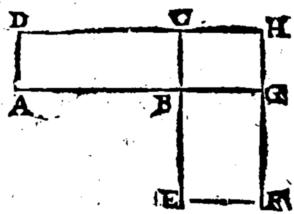
De cecy est évident qu'une ligne droite tiree perpendiculairement de quelconque poinct du diametre d'un cercle, jusques à la circonference d'iceluy, est moyenne proportionnelle entre les segmens du diametre faits par icelle perpendiculaire. Car de quelconque poinct pris au diametre AB*, étant levee une perpendiculaire jusques à la circonference, par les mêmes raisons que dessus, icelle perpendiculaire sera moyenne prop. entre les deux segmens du diametre* AB.

THEOR. 9. PROP. XIV.

Des parallelogrammes égaux, qui ont un angle égal à un angle ; les côtez au long des angles égaux, sont reciproques : & les parallelogrammes qui ont un angle égal à un angle, & les côtez au long des angles égaux reciproques, sont égaux.

Soient deux parallelogrammes égaux ABCD, & BEFG, desquels les deux angles ABC & EBG soient égaux :

Je dis que les côtez qui sont autour d'iceux angles égaux, sont reciproques : c'est-à-dire, que AB est à BG, comme EB à BC.



Car les parallelogrammes AC, BF, étans disposez de telle façon que les deux côtez AB & BG, fassent une ligne droite AG; les deux côtez EB, BC, feront aussi une ligne droite EC, à cause des angles égaux ABC, EBG, comme il est évident par les 2. com. sent. 13. & 14. prop. 1. & soient prolongez DC, FG, jusques à ce qu'ils se rencontrent en H. Puis donc que les deux parallelogrammes AC, EG, sont égaux, ils auront une même raison au parallelogramme BH, par la 7. prop. 5. Mais la raison du parallelogramme AC au parallelogramme BH, est par la 1. prop. 6. comme celle de la base AB à la base BG. Item celle des parallelogrammes EG, BH, est comme celle de EB à BC : & partant par la 11. prop. 5. comme AB à BG, ainsi EB à BC. Ce qui étoit proposé.

Pour la seconde partie; si AB est à BG, comme EB à BC, & que les angles ABC & EBG soient égaux : Je dis que les parallelogrammes AC & EG seront aussi égaux.

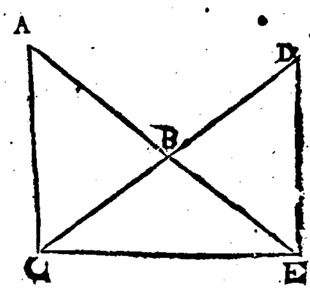
Car ayant fait la mesme construction que devant, on prouvera par la 1. prop. 6. qu'il y a mesme raison du parallelogramme AC au parallelogramme BH, que de la base AB à la base BG : pareillement qu'il y a mesme raison du parallelogramme EG au parallelogramme BH, que de EB à BC : mais les raisons des bases sont posées semblables : donc aussi les raisons des parallelogrammes AC & EG, au troisiéme BH seront semblables par la 11. pr. 5. & partant par la 9. prop. 5. ils seront égaux. Parquoy des parallelogrammes égaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 10. PROP. XV.

Les triangles égaux ayans un angle égal à un angle, ont les côtez au long des angles égaux reci-

proques : & les triangles qui ont un angle égal à un angle, & les côtez au long des angles égaux reciproques, sont égaux.

Soient deux triangles égaux ABC, & DBE, ayans les angles au point B égaux : Je dis que les côtez qui sont au long d'iceux angles égaux, sont reciproques : c'est-à-dire, que comme AB est à BE, ainsi DB sera à BC.



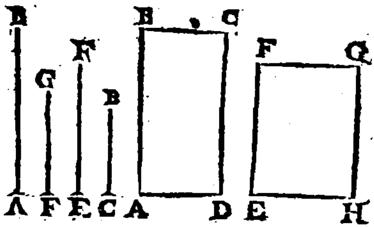
Car les triangles étans disposez en sorte que les deux lignes AB & BE se rencontrent directement, & fassent une seule ligne droite AE, les deux lignes DB, BC, feront aussi une ligne droite CD par les 2. com. sent. 13. & 14. p. 1. & soit menée la ligne CE. Pour autant que les deux triangles ABC & DBE sont égaux, ils auront une mesme raison au triangle BEC par la 7. prop. 5. mais par la 1. prop. 6. la raison du triangle ABC au triangle BEC, (étant de même hauteur) est comme de la base AB à la base BE : pareillement par la même 1. prop. 6. le triangle DBE sera au triangle ECB, comme DB est à BC : & partant par la 11. prop. 5. AB sera à BE, comme DB à BC. Ce qui a été proposé.

Pour la seconde partie : soient les côtez d'alentour les angles égaux au poinct B, reciproques, c'est à sçavoir, que comme AB est à BE, ainsi DB à BC. Je dis que les triangles ABC, DBE, sont égaux. Car ayant fait la même construction que cy-dessus, par la 1. prop. 6. comme AB sera à BE, ainsi le triangle ACB au triangle BCE, & comme DB à BC, ainsi le triangle BED au même triangle BEC : mais par l'hypothese les raisons des bases sont semblables : donc aussi les raisons des triangles ACB, BED, au troisiéme CBE seront semblables par la 11. prop. 5. & partant ils seront égaux par la 9. pr. 5. Donc les triangles égaux ayans un angle égal à un angle, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 11. PROP. XVI.

Si quatre lignes droites ſont proportionnelles ; le rectangle compris des extrêmes, eſt égal à celuy des moyennes ; & ſi le rectangle compris des extrêmes, eſt égal au rectangle compris des moyennes ; les quatre lignes ſont proportionnelles.

Soient quatre lignes droites proportionnelles AB, FG, EF, BC, ſçavoir eſt que AB ſoit à FG, comme EF à BC, & ſoit le rectangle ABCD compris des extrêmes AB, BC ; & le rectangle EFGH compris ſous les moyennes EF, FG. Je dis qu'iceux rectangles AC, EG, ſont égaux.



Car puis que les angles droits B & F ſont égaux, & que comme AB eſt à FG, ainſi EF à BC ; les côtez au long des angles égaux B & F, ſeront reciproques par la 2. def. 6. & partant par la 14. prop. 6. les parallelogrammes AC & EG ſeront égaux. Ce qui a été propoſé.

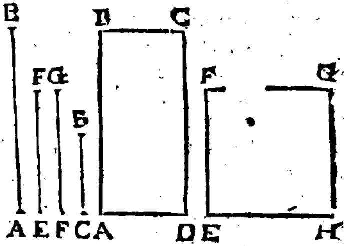
Quant à la ſeconde partie : ſoient les rectangles AC, EG égaux. Je dis que les quatre lignes AB, FG, EF, BC, ſont proportionnelles : c'eſt-à-dire, que comme AB eſt à FG, ainſi EF à BC. Car puis que les rectangles ſont égaux, & ont les angles B & F auſſi égaux, ſçavoir droits, ils auront les côtez au long d'iceux angles égaux, reciproques par la 14. prop. 6. ſçavoir eſt, que comme AB eſt à FG, ainſi EF à BC. Si donc quatre lignes droites ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 12. PROP. XVII.

Si trois lignes droites sont proportionnelles, le rectangle compris des extrêmes, sera égal au quarré de la moyenne : & si le rectangle compris des extrêmes est égal au quarré de la moyenne, les trois lignes seront proportionnelles.

Soient trois lignes droites proportionnelles AB, EF, BC, & soit le rectangle ABCD compris sous les extrêmes AB, BC, & le quarré de la moyenne EF soit EFGH. Je dis que le rectangle AC est égal au quarré EG.

Car étant prise FG égale à EF, les quatre lignes AB, EF, FG, BC, seront proportionnelles, & le quarré EG sera compris sous les moyennes EF, FG, à cause de l'égalité d'icelles. Parquoy par la prec. prop. le rectangle AC compris des deux extrêmes AB, BC, est égal au rectangle des moyennes EF, FG, c'est-à-dire au quarré EG. Ce qui étoit proposé.



Pour la seconde partie ; le rectangle AC soit égal au quarré EG : Je dis que comme AB est à EF, ainsi EF à BC. Car puis que les rectangles AC, EG sont égaux, par la 16. prop. 6. comme AB sera à FE, ainsi FG à BC : mais par la 7. prop. 5. comme FG est à BC, ainsi EF, égale à icelle FG, est à la même BC: & partant comme AB est à EF, ainsi EF est à BC. Si donc trois lignes droites sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

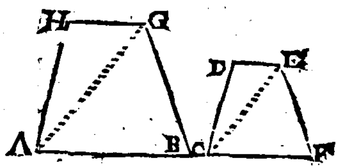
COROLLAIRE.

Il est manifeste par la derniere partie de ce Theoreme, qu'une ligne droite est moyenne proportionnelle entre deux autres lignes droites, qui comprennent un rectangle esgal au quarré d'icelle ligne. Car pource que le rectangle de AB, BC est esgal au quarré de EF, il a été démontré, que comme AB à EF, ainsi EF à BC; & partant EF est moyenne proposition entre AB & BC.

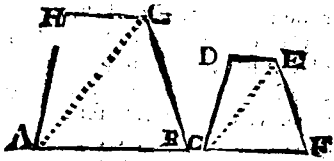
PROBL. 6. PROP. XVIII.

Sur une ligne droite donnée, décrire une figure rectiligne semblable, & semblablement posée à une figure rectiligne donnée.

Soit la ligne droite donnée AB, sur laquelle il faut construire une figure semblable, & semblablement posée à la figure rectiligne donnée CDEF.



De quelque angle que ce soit de la figure donnée soient menées des lignes droites à chacun des angles opposez, afin de diviser icelle figure en triangles, comme icy de l'angle C, soit menée à l'angle opposé E, la ligne droite CE, laquelle divise la figure donnée en deux triangles CEF, CDE : en aprés par la 23. prop. 1. soit décrit sur la ligne AB, & aux points extrémes A & B, les deux angles BAG & ABG, égaux, sçavoir l'un à l'angle FCE, & l'autre à l'angle CFE. Il est évident par la 32. prop. 1. que le troisiéme AGB sera égal au troisiéme CEF, & les triangles CEF, AGB seront équiangles, & auront les côtez au long des angles égaux proportionnaux par la 4. prop. 6. Pareillement sur la ligne AG, & aux deux points A & G, soient décrits les deux angles GAH & AGH, égaux aux deux DCE & CED, chacun au sien : aussi par la 32. prop. 1. le troisiéme H sera égal au troisiéme D, & les triangles CDE & AHG seront équiangles, & par la 4. prop. 6. ils auront les côtez au long des angles égaux proportionnaux : ainsi l'angle D étant égal à l'angle H, & l'angle F à l'angle B, les deux de C aux deux de A, & les deux de E aux deux de G : les deux figures CDEF, ABGH, seront équiangles : & pour autant qu'elles sont composées de triangles équiangles, lesquels ont les côtez au long des angles égaux proportionnaux, comme CF sera à FE, ainsi AB à BG : item comme CF est à CE, ainsi AB à AG ; & comme CE à CD, ainsi AG à AH : & en raison égale, comme CF sera à CD, ainsi AB sera à AH ; par ainsi les côtez au long des angles égaux F, B, & FCD, BAH, seront proportionnaux, & ainsi des autres. Parquoy les figures CDEF, AHGB seront semblables, & semblablement décrites. Nous avons donc fait ce qui étoit requis.



SCHOLIE.

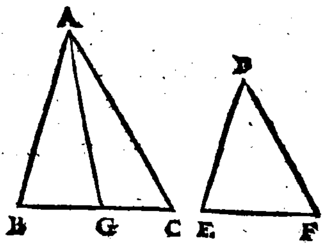
Il est évident par ce que nous avons dit sur la 32. prop. 1. que si la figure donnée avoit plus de quatre côtez, elle seroit divisée en plus de deux triangles : & alors il faudroit pour les deux premiers operer ainsi que dessus, puis aprés proceder de triangle en triangle jusques à la fin, décrivant toûjours sur & aux extrêmitez de la derniere ligne deux angles égaux aux deux de dessus la diagonalle correspondante, ainsi qu'il a été fait icy sur AG, homologue & correspondante à la diagonalle CE.

THEOR. 13. PROP. XIX.

Les triangles semblables, sont l'un à l'autre en raison doublée de leurs côtez de même raison.

Soient deux triangles semblables ABC & DEF, ayans les angles B & E égaux ; item C & F ; mais comme AB est à BC ainsi DE a EF, &c, Je dis qu'ils seront l'un à l'autre en raison doublée de leurs côtez de même raison AB & DE, ou AC & DF, ou BC & EF, c'est-à-dire que si à deux quelconques de ces côtez de même raison, comme par exemple BC & EF, on trouve la troisiéme proportionnelle BG, le triangle ABC sera au triangle DEF, comme la ligne BC est à la troisiéme proportionnelle BG: car telle est la raison doublée par la 10. def. 5.

Car étant tirée la ligne AG : d'autant que les triangles ABC, DEF sont semblables, & que comme AB est à BC ainsi DE est à EF, en permutant par la 16. prop. 5. comme AB sera à DE, ainsi BC sera à EF ; mais comme BC est à EF, ainsi EF est à BG par la construction. Donc comme AB sera à DE, ainsi EF sera à BG par la 11. prop. 5. & par ainsi les deux triangles ABG, DEF, auront les côtez au long des angles égaux B & E, reciproques : & par la 15. prop. 6. iceux triangles ABG, DEF, seront égaux entr'eux : & partant comme le triangle ABC sera au triangle DEF, ainsi sera le même triangle ABC au triangle ABG par la 7. prop. 5. Mais comme le triangle ABC est au triangle ABG de même hauteur, ainsi est la base BC à la base BG par la 1. prop. 6. Donc comme le triangle ABC est au triangle DEF, ainsi est BC à BG. Mais BC, EF, BG, étans continuellement proportionnelles, BC est à BG en raison doublée de BC à EF par la 10. def. 5. donc aussi le triangle ABC est au triangle DEF en raison doublée du côté BC au côté EF. Donc les triangles semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.



COROLLAIRE.

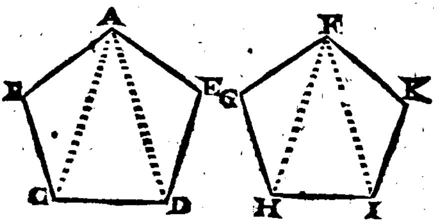
De cecy est manifeste, qu'étans trois lignes droites proportionnelles, comme la premiere sera à la troisiéme, ainsi le triangle décrit sur la premiere sera au triangle semblable, & semblablement posé sur la seconde. Car il a été démontré, que comme BC 1. est à BG 3. ainsi le triangle ABC au triangle DEF.

THEOR. 14. PROP. XX.

Les polygones semblables peuvent estre divisez en nombre égal de triangles semblables entr'eux, & proportionnaux à leur tout : & les polygones sont l'un à l'autre en raison doublée de leurs côtez de mesme raison.

Soient deux polygones semblables ABCDE, & FGHIK, ayans les angles A, F, égaux. Item B, G, &c. Je dis premierement qu'iceux polygones peuvent estre divisez en nombre égal de triangles semblables.

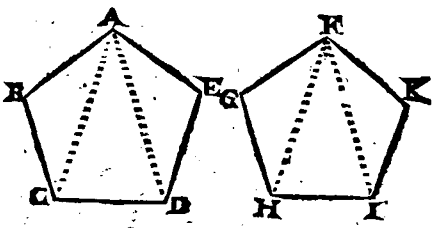
Car aprés avoir mené les lignes AC, AD, FH, FI, il est évident que l'une des figures est divisée en autant de triangles que l'autre.



Et d'autant que l'angle B est posé égal à l'angle G, & que comme BA est à BC, ainsi GF à GH : par la 6. prop. de ce livre, les triangles ABC & FGH seront équiangles, & par la 4. prop. de ce mesme livre, ils auront les côtez au long des angles égaux proportionnaux, & par consequent ils seront semblables : par mesme discours, les triangles AED & FKI, seront aussi semblables.

Pareillement par ce qui a été dit cy dessus AC est à CB, comme FH à HG ; mais BC est à CD comme GH a HI: car ce sont côtez de figures semblables : donc en raison égale par la 22. prop. 5. AC sera à CD, comme FH à HI : & d'autant que les angles BCD, GHI sont égaux, & les angles BCA, GHF aussi égaux ; ceux-cy étans ôtez de ceux-là, les restans ACD, FHI, seront pareillement égaux : & partant par la 6. prop. 6. les triangles ACD, & FHI, seront équiangles, & par consequent semblables.

Je dis secondement, qu'iceux triangles sont proportionnaux à leur tout : c'est-à-dire, que chaque triangle de l'un des polygones a telle raison à son triangle correspondant de l'autre polygone, que tout le polygone a tout le polygone. Car d'autant que les trois triangles de l'une des figures sont semblables aux trois triangles de l'autre, chacun au sien, & que par la prop. preced. ils sont l'un à l'autre, en raison doublée de leurs côtez de mesme raison : les triangles ABC & FGH, seront l'un à l'autre en raison doublée de AC à FH : aussi en la mesme raison doublée seront les triangles ACD, FHI : & le troisiéme AED étant au troisiéme EKI en raison doublée de AD à FI,



qui est la même que de AC à FH, étans côtez de triangles semblables : aussi les triangles ACD, FKI, seront l'un à l'autre en raison doublée de AC à FH : & par la 12. prop. 5. tous les triangles du premier polygone, seront à tous les triangles de l'autre polygone, comme l'un des triangles de l'un d'iceux, sera à son respondant de l'autre.

Je dis tiercement, que le polygone est au polygone en raison doublée des côtez de même raison, comme CD & HI : car puisque toute la figure ABCDE, est à toute la figure FGHIK, comme l'un des triangles de l'une, sçavoir ACD, est à l'un des triangles de l'autre, sçavoir FHI, lesquels triangles par la prop. prec. sont en raison doublée de CD à HI, par la 11. prop. 5. le polygone sera au polygone, en raison doublée des mêmes côtez CD & HI. Parquoy les polygones semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

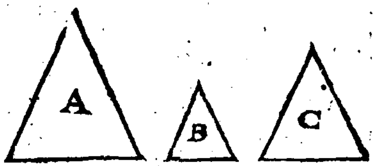
COROLLAIRE.

Par cecy est manifeste, qu'étans trois lignes droites proportionnelles, comme la premiere sera à la tierce, ainsi le polygone décrit sur la premiere sera au polygone semblable, & semblablement décrit sur la seconde ; puis qu'il a été démontré que les polygones sont entr'eux en raison doublée de leurs côtez de même raison, c'est-à-dire, comme le côté du premier a une troisiéme proportionnelle ausdits côtez de même raison.

THEOR. 15. PROP. XXI.

Les figures rectilignes semblables à une même figure rectiligne, sont aussi semblables entr'elles.

Soit la figure rectiligne A semblable à la figure rectiligne *B*, & la figure rectiligne C, aussi semblable à la même *B* : Je dis que les figures A & C seront semblables entr'elles.



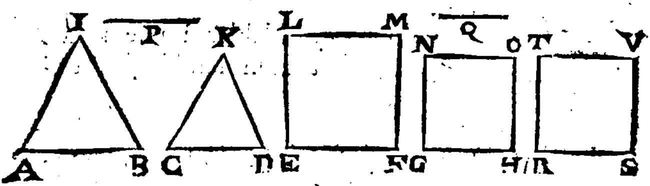
Car d'autant que chacune d'icelles figures A & C est semblable à *B*, elle a les angles égaux aux anglés de *B*, & les côtez d'autour iceux angles égaux proportionnaux par la 1. def. 6. & partant par la 1. com. sent. les angles de A, seront aussi égaux aux angles de C ; & par la 11.

prop. 5. les côtez au long des angles égaux seront proportionnaux : & par la 1. def. 6. A & C seront semblables : donc les figures rectilignes semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 16. PROP. XXII.

Si quatre lignes droites sont proportionnelles ; les figures rectilignes semblables, & semblablement décrites sur icelles, seront aussi proportionnelles : & si icelles figures ainsi décrites sont proportionnelles, icelles lignes droites seront aussi proportionnelles.

Soient quatre lignes droites proportionnelles AB, CD, EF, GH : & sur AB, CD, soient constituées deux quelconques figures rectilignes ABI, CDK semblables, & semblablement décrites : Item sur EF & GH deux autres



quelconques figures rectilignes semblables, & semblablement décrites EFML, GHON. Je dis premierement que ces quatre figures rectilignes sont proportionnelles, c'est-à-dire, que comme ABI est à CDK, ainsi EFML est à GHON.

Qu'il ne soit ainsi : aux deux lignes AB & CD, soit trouvée P troisiéme proportionnelle par la 11. prop. 6. & aux deux EF & GH, soit trouvée Q aussi troisiéme proportionnelle : & d'autant que AB est à CD, commme EF est à GH : Item CD à P comme GH à Q : en raison égale AB sera à P, comme EF à Q par la 22. prop. 5. Mais comme AB est à P, ainsi le rectiligne ABI est au rectiligne CDK par le coroll. de la 19. ou 20. prop. 6. Item comme

comme EF est à Q, ainsi le rectiligne EM est au rectiligne GO. Donc comme ABI est à CDK, ainsi EM est à GO par la 11. prop. 5.

Je dis pour la seconde partie, que si icelles figures semblables, & semblablement décrites sont proportionnelles, que les lignes sur lesquelles elles sont décrites, seront aussi proportionnelles, c'est à sçavoir, que comme AB est à CD, ainsi EF est à GH.

Car ayant trouvé RS quatriéme proportionnelle aux trois lignes AB, CD, EF par la 12. prop. 6. sur icelle RS soit décrit le rectiligne RV semblable, & semblablement posé au rectiligne EM par la 18. prop. 6. & partant aussi semblable au rectiligne GO par la prop. precedente; & d'autant que comme AB est à CD, ainsi EF est à RS, par ce qui a été démontré cy-dessus, comme le rectiligne ABI sera au rectiligne CDK, ainsi le rectiligne EM sera au rectiligne RV. Mais comme ABI est à CDK, ainsi aussi a été posé EM à GO: donc par la 11. prop. 5. comme EM sera à RV, ainsi EM sera à GO; & partant par la 9. prop. 5. les rectilignes RV, GO seront égaux: lesquels étans semblables, & semblablement décrits, consistent necessairement (comme nous démontrerons incontinent) sur lignes droites égales RS, GH. Parquoy par la 7. prop. 5. comme EF sera à RS, ainsi EF sera à GH. Mais par l'hypothese EF est à RS, comme AB à CD: donc par la 11. prop. 5. comme AB sera à CD, ainsi aussi EF sera à GH. Parquoy si quatre lignes sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

LEMME.

Or que les rectilignes égaux semblables & semblablement décrits, tels que sont GO, RV, consistent sur lignes droites égales, on le prouvera ainsi. Si les lignes GH, RS peuvent être inégales, soit GH la plus grande: & puis que les rectilignes sont semblables, comme GH est à HO, ainsi RS à SV: & GH ayant été posée plus grande que RS, par la 14. prop. 5. HO sera aussi plus grande que SV: & partant le rectiligne GO plus grand que le rectiligne RV; puis que cettuy-cy peut être constitué dans celuy-là; ce qui est absurde, ayans *été posez égaux. Les lignes GH, RS ne sont donc pas inégales, mais égales. Ce qui étoit proposé.*

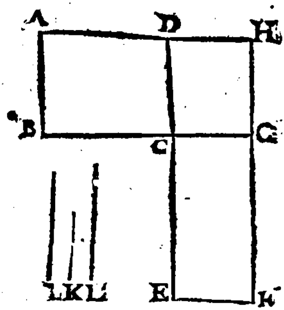
SCHOLIE.

Il est évident, que s'il y a aussi trois lignes droites proportionnelles, les figures rectilignes semblables, & semblablement décrites sur icelles, seront pareillement proportionnelles, &c. Car la ligne moyenne, & son rectiligne étant prise deux fois, on aura quatre lignes proportionnelles : donc aussi quatre rectilignes proportionnaux, comme il a été cy-dessus démontré. Vû donc que le rectiligne qui sera décrit sur la seconde ligne, sera égal à celuy décrit sur la troisiéme; est manifeste ce qui étoit proposé.

THEOR. 17. PROP. XXIII.

Les parallelogrammes équiangles, sont l'un à l'autre en la raison composée de celles de leurs côtez.

Soient deux parallelogrammes équiangles ABCD, & CEFG, ayans les deux angles BCD, ECG égaux : Je dis que la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF est composée de celles de leurs côtez, sçavoir est composée de la raison qui est de BC à CG, & de celle qui est de DC à CE.



Car soient disposez les deux parallelogrammes l'un contre l'autre, en sorte que BC & CG se rencontrent directement, & ne fassent qu'une seule ligne droite, & alors DC & CE seront aussi une ligne droite, puis que les angles BCD, ECG sont égaux, comme il est évident par les 2. com. sent. 13. & 14. prop. 1. Soient prolongez les côtez AD, FG, qui se rencontrant en H, fassent le parallelogramme DCGH ; puis soit prise quelconque ligne droite I ; & aux trois BC, CG & I, soit trouvée la 4. proportionnelle K. Item aux trois DC, CE & K, la 4. prop. L. Vû donc que par la 1. prop. 6. comme BC est à CG, ainsi AC à DG ; & comme BC à CG, ainsi aussi I est à K par l'hypothese : pareillement comme AC sera à DG, ainsi sera I à K, par la 11. prop. 5. Mais par même raison DG est à CF, comme K à L, (attendu que comme DG à CF, ainsi DC à CE, par la 1. prop. 6. qui est la méme raison que de K à L.) Donc en raison égale, comme AC sera à CF, ainsi I sera à L par la 22. prop. 5. Mais la raison de I à L est composée de la raison de BC à CG, & de celle de DC à CE par la 5. def. de ce livre. Donc aussi d'icelles raisons est composée la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF. Parquoy les parallelogrammes équiangles sont l'un à l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

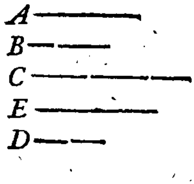
SCHOLIE.

Le mesme sera encore démontré plus briefvement, ainsi qu'il ensuit. Les parallelogrammes AC, CF étans disposez comme auparavant, AC sera à CH, comme BC à CG ; & CH à EG comme DC à EC par la 1. prop. 6. Mais la raison de AC à EG, est composée des raisons entre-moyennes, sçavoir de AC à CH, & de CH à EG par la 5. def. 6. Donc la mesme raison de AC à EG sera aussi composée des raisons de BC à CG, & de DC à CE, qui sont égales à icelles entre-moyennes. Ce qui est proposé.

Or il est facile de colliger des choses cy-dessus dites & démontrées par Euclide en cette 23. prop. comment on compose en lignes, ou en nombres une raison de deux ou de davantage de raisons. Car des raisons de BC à CG, & de DC à CE, a été composée la raison de I à L en lignes : mais de 3 à 2 en nombres. Que s'il faut composer une raison de trois autres *proposées ; ayant trouvé celle composée de deux, d'icelle & de la troisiéme nous en composerons une autre en la même maniere, laquelle sera composée de trois : & ainsi consequemment des autres.*

Cette 23. prop. est aussi veritable en nombres, comme le démontre Euclide au 8. l. prop. 5. C'est pourquoy nous enseignerons icy comme il faut trouver la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF, les raisons de leurs côtez, étans connuës en nombres. Comme par exemple, si la raison de BC à CG est la mesme que de 5 à 2, & celle de DC à CE, la mesme que de 3 à 5, nous trouverons la raison d'iceux parallelogrammes ainsi. Ayant posé la premiere raison estre 5 à 2, soit fait que comme 3 est à 5, (qui est la derniere raison) ainsi 2 soit à un autre nombre, qui sera trouvé estre $3\frac{1}{3}$: Cela fait, nous aurons les trois nombres 5, 2, $3\frac{1}{3}$, lesquels auront entr'eux les deux raisons proposées, & consequemment en delaissant le nombre entre-moyen 2, demeurera 5 à $3\frac{1}{3}$ pour la raison composée d'icelles : & telle sera la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF, laquelle reduitte en nombres entiers sera 15 à 10, ou 3 à 2, qui est raison sesquialtere.

On peut aussi en la mesme maniere que dessus oster une raison d'une autre raison plus grande : comme par exemple, soit la raison de A à B, qu'il faut oster d'une plus grande raison C à D.



Soit fait que comme A est à B, ainsi C soit à quelque autre, sçavoir E, qui soit posée moyenne entre C & D : & la raison de E à D sera la raison re-

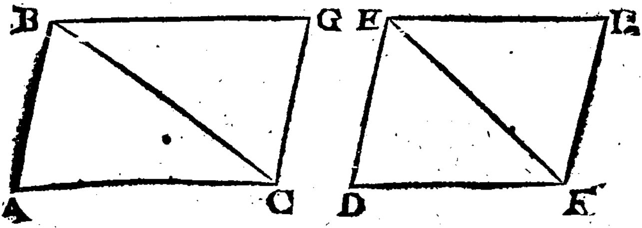
stante de la soustraction requise. Car puisque la raison de C à D est composée de celle de C à E, & de E à D; si on en oste celle-là de C à E, ou de A à B, qui luy est égale, restera la susdite raison de E à D.

Qu'il faille encore oster la raison de 4 à 3, de celle de 6 à 2, soit fait que comme 4 est à 3, ainsi 6 soit à un autre nombre, sçavoir $4 \frac{1}{2}$: & la raison de $4 \frac{1}{2}$ à 2, sera le reste requis. Car il est évident que la raison de 6 à 2, est composée de celles de 6 à $4 \frac{1}{2}$, & de $4 \frac{1}{2}$ à 2: & partant en ostant de ces deux raisons celle de 6 à $4 \frac{1}{2}$, ou de 4 à 3, qui luy est égale, restera la susdite raison de $4 \frac{1}{2}$ à 2, qui est double sesquiquarte.

Commandin démontre en ce lieu les trois Theor. suivans.

1 Les triangles qui ont un angle égal à un angle, sont en raison composée des côtez, qui comprennent l'angle égal.

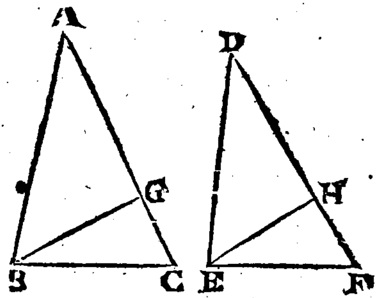
Soient les triangles ABC, DEF, ayans l'angle B esgal à l'angle E: Je dis que le triangle ABC est au triangle DEF en raison composee des côtez comprenans les angles esgaux B & E. Car ayant achevé les parallelogrammes AG, DH, ils seront esquiangles: & partant par la 23. prop. 6. la raison d'iceux sera composee de celle de leurs cô-



tez: Vû donc que les triangles ABC, DEF, desquels ils sont moitiez par la 34. prop. 1. sont en la méme raison *qu'iceux par la 15. prop. 5. aussi iceux triangles seront l'un à l'autre en icelle raison composee des côtez.*

2. Les triangles qui ont un angle égal à un angle, sont l'un à l'autre, en la même raison que les rectangles compris sous les côtez, qui contiennent l'angle égal.

Soient les triangles ABC, DEF, ayans l'angle A esgale à l'angle D : Je dis que le triangle ABC est au triangle DEF, comme le rectangle de AB, AC, est au rectangle de DE, DF. Car êtans tirees sur AC, DF, les perpendiculaires BG, EH ; les triangles ABG, DEH, seront esquiangles, comme appert par le Corol. de la 32. prop. 1. Donc par la 4. prop. 6. comme GB est à BA, ainsi HE à ED. Mais par la 1. prop. 6. comme GB est à BA, ainsi le rectangle de BG, AC, au rectangle de BA, AC, pource que posant GB, BA, bases, la hauteur d'iceux rectangles sera une même, sçavoir AC. Semblablement comme HE à ED ainsi est le rectangle de EH, DF au rectangle de DE, DF. Donc par la 11. prop. 5. le rectangle de BG, AC, est au rectangle de AB, AC, comme le rectangle de EH, DF au rectangle de DE, DF ; & en permutant le rectangle de BG, AC sera au rectangle de EH, DF, comme le rectangle de AB, AC au rectangle de DE, DF. Mais le rectangle de BG, AC, est au rectangle de EH, DF, ainsi que le triangle ABC au triangle DEF par la 15. prop. 5. pource que ces triangles sont moitiez d'iceux rectangles, par la 41. prop. 1. (Car ils ont mêmes bases qu'iceux AC, DF, & mêmes hauteurs BG, EH : & partant entre mêmes paralleles) donc aussi le triangle ABC sera au triangle DEF, comme le rectangle de AB, AC, est au rectangle de DE, DF. Ce qui étoit proposé.

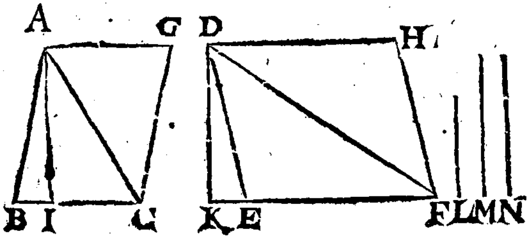


COROLLAIRE.

De cecy resulte que les parallelogrammes esquiangles sont aussi entr'eux, en la même raison que les rectangles compris sous les côtez des angles esgaux, puis qu'ils sont doubles d'iceux triangles.

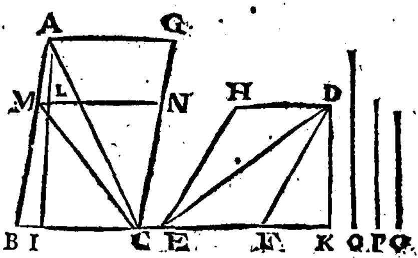
3. Les triangles, & les parallelogrammes, sont entr'eux en la raison composée de la raison des bases, & de celle des hauteurs.

Soient les triangles ABC, DEF; *& les parallelogrammes* BG, EH; *& les hauteurs d'iceux soient* AI, DK. *Je dis que la raison tant d'iceux triangles, que des parallelogrammes, est composée de la raison de la base* BC *à la base* EF, *& de celle de la hauteur* AI *à la hauteur* DK. *Car premierement soient les hauteurs esgales, mais les bases, ou aussi esgales ou inesgales : & soit fait comme* BC *à* EF, *ainsi* L *à* M : *& comme* AI *à* DK, *ainsi* M *à* N,



lesquelles seront esgales, puis que AI, DK, *sont posées esgales : & partant par la 7. prop. 5.* L *sera à* N, *comme* L *à* M, *c'est-à-dire comme* BC *à* EF. *Mais par la 1. prop. 6. comme* BC *est à* EF, *ainsi est le triangle* ABC *au triangle* DEF; *& le parallelogramme* BG *au parallelogramme* EH : *Donc par la 11. prop. 5. comme* L *sera à* N, *ainsi le triangle au triangle, & le parallelogramme au parallelogramme : Mais la raison de* L *à* N *est composée de la raison de* L *à* M, *c'est-à-dire de la raison de* BC *à* EF, *& de la raison de* M *à* N, *c'est-à-dire de* AI *à* DK : *donc la raison du triangle* ABC *au triangle* DEF, *& du* *parallelogramme BG au parallelogramme EH, est aussi composee des mêmes raisons.*

Soient maintenant les hauteurs AI, DK inesgales, & AI la plus grande: mais les bases BC, EF, esgales, ou aussi inesgales. Soit fait que comme AI est à DK, ainsi O à P; & comme BC à EF, ainsi P à Q: puis ayans couppé IL esgale à DK, par L, soit tiree MN parallele à BC, & joint CM. D'autant que le triangle ABC est au triangle MBC, & le parallelogramme BG au parallelogramme BN, comme la hauteur AI a la hauteur IL ou DK qui luy est esgale, c'est-à-dire comme O à P, par le Scholie de la 1. prop. 6. & comme le triangle MBC est au triangle DEF, & le parallelogramme BN au parallelogramme FH, ainsi est la base BC à la base EF, (pource qu'ils sont de même hauteur) c'est-à-dire ainsi P à Q: en raison esgale ABC sera à DEF, & BG à FH comme O à Q. Parquoy puis que la raison de O à Q est composee de la raison de O à P, c'est-à-dire de AI à DK, & de la raison de P à Q, c'est-à-dire de la base BC à la base EF: la raison du triangle ABC au triangle DEF: & du parallelogramme BG au parallelogramme FH, sera composée des mêmes raisons. Ce qui étoit proposé.

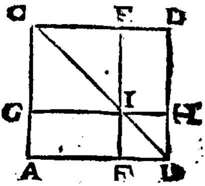


On peut demontrer en la même maniere, que le triangle DEF, qui a la moindre hauteur, est au triangle ABC, & le parallelogramme FH au parallelogramme BG en la raison composee de celle de la base EF à la base BC, & de celle de la hauteur DK à la hauteur AI; & ce en faisant que comme EF à BC ainsi Q à P; & puis comme DK à AI, ainsi P à O; & tout le reste comme dessus. Appert donc ce qui étoit proposé.

THEOR. 18. PROP. XXIV.

En tout parallelogramme, les parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre, ayans un angle commun au total, sont semblables entr'eux, & au total.

Soit le parallelogramme ABDC, duquel le diametre est BC, & à l'entour d'iceluy diametre soient les deux parallelogrammes GE & FH, ayans les angles B & C communs avec le total : Je dis qu'iceux parallelogrammes GE & FH sont semblables entr'eux, & au total ABDC.



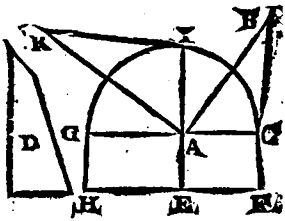
Car d'autant que les lignes AB & GH sont paralleles, sur lesquelles tombent les lignes CB & CA par la 29. prop. 1. l'angle externe CIG sera égal à l'interne IBF, & l'externe CGI à l'interne A, auquel est aussi égal l'externe IFB, attendu que BA tombe sur les deux paralleles EF & CA. Parquoy les trois triangles CAB, CGI & IFB ayans chacun deux angles égaux à deux angles, chacun au sien, les troisiémes angles seront aussi égaux, & consequemment iceux triangles seront équiangles entr'eux. Et par méme raison les trois autres triangles CDB, CEI & IHB, qui par la 34. pr. 1. sont égaux aux trois precedents seront aussi équiangles entr'eux : Donc les parallelogrammes composez d'iceux triangles, sçavoir AD, GE & FH, seront pareillement équiangles entr'eux. Davantage, puis que le triangle CAB est équiangle au triangle CGI, & & le triangle CDB au triangle CEI, par la 4. prop. 6. comme CA sera à AB, ainsi CG à GI : & par ainsi les côtez d'autour les angles égaux A & G, sont proportionnaux. Derechef, comme AB est à BC, ainsi GI est à IC, & comme CB est à BD, ainsi CI est à IE. Donc en raison égale, comme AB sera à BD, ainsi GI sera à IE : & partant les côtez d'allentour les angles égaux

ABD, GIE sont proportionnaux. On prouvera en la même maniere que les côtez d'allentour les autres angles égaux d'iceux parallelogrammes AD & GE sont aussi proportionnaux. Donc par la 1. def. 6. le parallelogramme GE sera semblable au parallelogramme total AD. Et par mêmes raisons, le parallelogramme FH se prouvera aussi semblable au même parallelogramme AD. Donc par la 21. prop. 6. tous les trois parallelogrammes AD, GE & FH seront semblables entr'eux. Parquoy en tous parallelogrammes; les parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBL. 7. PROP. XXV.

Décrire une figure rectiligne, semblable à une figure rectiligne donnée, & égale à une autre proposée.

Soient deux figures rectilignes ABC & D: il faut faire une autre figure rectiligne égale à D, & semblable à ABC.



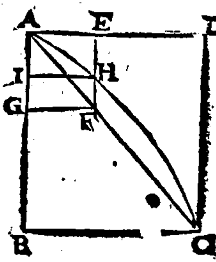
Sur la ligne AC (qui est l'un des côtez du rectiligne ABC, auquel on en doit faire un semblable) soit fait le rectangle ACFE. égal à ladite figure ABC: Item sur la ligne AE, soit construit le rectangle GE égal à la figure donnée D, le tout par les 44. & 45. prop. 1. & aprés avoir trouvé AI, moyenne proportionnelle entre GA & AC: Sur icelle AI, soit décrite la figure AIK semblable & semblablement posée à la figure ACB, par la 18. prop. 6. Je dis qu'icelle figure AKI sera aussi égale à la figure donnée D.

Car par la construction le rectangle GE est égal au rectiligne D, & le rectangle AF au rectiligne ABC, & par la 1. prop. 6. AF est à GE, comme CA à AG: Mais les deux figures semblables ABC & AKI sont l'une à l'autre en la mesme raison de AC à AG, par le Corol. de la 19. ou 20. prop. 6. attendu qu'icelles figures sont décrites sur les deux premieres lignes des trois proportionnelles CA, AI & AG. Donc par la 11. prop. 5. ACB sera à IKA, comme AF à GE. & en permutant ACB sera à AF, comme IKA à GE, par la 16. prop. 5. & partant ACB étant égal à AF : aussi IKA sera égal à GE, & par consequent égal à D : & par la construction, iceluy rectiligne IKA est aussi semblable, & semblablement posé au rectiligne ABC. Nous avons donc décrit une figure rectiligne semblable à une autre donnée, & égale à une proposée. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 19. PROP. XXVI.

Si d'un parallelogramme on oste un parallelogramme semblable & semblablement posé au tout, ayant un angle commun avec le tout; l'osté sera avec le tout à l'entour d'un mesme diametre.

Du parallelogramme ABCD soit retranché le parallelogramme AEFG semblable & semblablement posé au total BD, & ayant l'angle A commun avec iceluy : Je dis qu'ils sont tous deux constituez à l'entour d'un mesme diametre, c'est-à-dire qu'ayant mené au parallelogramme total BD le diametre AC, il passera par F, comme AFC.

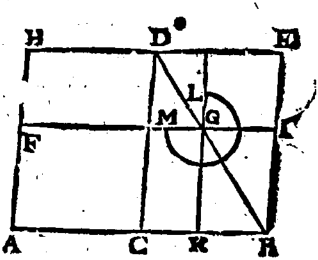


Autrement, soit (s'il est possible) un autre diametre AHC, qui ne passe par l'angle F du parallelogramme retranché EG : ains couppe le côté EF en H, & d'iceluy point soit menée HI parallele à AB, par la 31. prop. 1. donc le parallelogramme IE étant à l'entour d'un mesme diametre avec le total DB sera semblable à iceluy, par la 24. prop. 6. auquel total, GE est aussi semblable par l'hypothese : & partant par la 21. prop. 6. les parallelogr. GE & IL seront semblables entr'eux : & par la 1. def. 6. AE sera à EF comme AE à EH : mais AE étant égal à soy mesme, il faudroit aussi par la 14. prop. 5. que EF 2 fust égale à EH 4, c'est à sçavoir le tout à la partie, ce qui est absurde : donc le parallelogr. total BD, & le retranché GE, étoient constituez à l'entour d'un mesme diametre : car il adviendra toûjours la mesme absurdité, si on dit que le diametre de BD couppe à quelconque autre point, soit le côté EF ou FG, du parallelogramme retranché GE. Si donc d'un parallelogramme on oste un parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 20. PROP. XXVII.

De tous les parallelogrammes appliquez selon une mesme ligne droite, & defaillans de parallelogrammes semblables & semblablement posez à un autre décrit sur la moitié de la mesme ligne; le plus grand est celuy-là qui est décrit sur l'autre moitié de la ligne, & semblable au defaut.

Soit la ligne droite AB couppée en deux également en C, & sur CB moitié d'icelle, soit constitué quelconque parallelogramme BCDE, duquel le diametre est BD : Si donc on accomplit tout le parallelogramme ABEH, le parallelogramme AD constitué sur la moitié AC, sera appliqué selon la ligne AB, & defaillant du parallelogramme CE, & semblable à iceluy defaut CE. Je dis que de tous les parallelogrammes qui peuvent estre appliquez



selon icelle ligne AB, & defaillans d'une figure semblable & semblablement posée à CE, le plus grand est AD, qui est décrit sur la moitié AC, & defaillant du parallelogramme CE.

Car étant pris au diametre BD quelconque point G, & tirées par iceluy point les lignes droites FGI, KG, paralleles aux lignes droites AB, BE; le parallelogramme AKGF appliqué selon la ligne AB, sera defaillant du parallelogramme KI, lequel par la 24. prop. 6. est semblable & semblablement posé à CE. Et d'autant que par la 43. prop. 1. les complemens CG, GE, sont égaux, si on leur adjouste KI commun; aussi CI, KE seront égaux. Mais CI, CF, étans sur bases égales, sont pareillement égaux par la 36. prop. 1. donc aussi CF, KE seront égaux, & leur adjoustant CG commun, le parallelogramme AG sera égal au gnomon LM. Parquoy puis que CE est plus grand qu'iceluy gnomon LM: (car CE, outre le gnomon, contient encore le parallelogramme DG) aussi AD qui est égal à CE, par la 36. prop. 1. sera plus grand que le parallelogramme AG, du même parallelogramme DG. Et en la même maniere sera démontré que AD est plus grand que tous autres parallelogrammes, qui seront appliquez selon la même ligne droite AB, & defaillans de figures parallelogrammes semblables & semblablement posées à CE. Parquoy de tous les parallelogrammes appliquez selon une même ligne droite, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

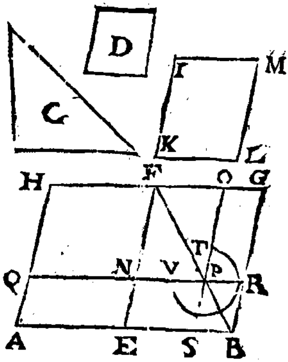
PROBL. 8. PROP. XXVIII.

A une ligne droite donnée, appliquer un parallelogramme égal à une figure rectiligne donnée; & defaillant d'un parallelogramme semblable à un autre donné, mais il faut que la figure rectiligne donnée ne soit plus grande que le parallelogramme, qui étant appliqué à la moitié de la ligne donnée, est semblable au parallelogramme donné.

Soit la ligne droite donnée AB, à laquelle il faut appliquer un parallelogramme égal à la figure rectiligne donnée C, defaillant d'un parallelogramme semblable au parallelogramme donné D.

Ayant couppé AB en deux également en E, sur la moitié EB soit décrit le parallelogramme EF, GB semblable & semblablement posé à iceluy D, par la 18. prop. 6. & soit accomply le parallelogramme AHGB.

Maintenant, si AF est égal à C, on a ce que l'on demande : car il est appliqué selon la ligne AB, & defaillant du parallelogramme EG, qui est fait semblable à D. Mais si C est plus petit que AF, (car par l'hypothese il ne peut être plus grand) il sera aussi plus petit que EG égal à iceluy AF: soit donc trouvé l'excez de EG par dessus C, (cette égalité ou inégalité, & excez sera connu par ce que nous avons dit à la 45. prop. I.) lequel excez par la 25. prop. 6. soit reduit en parallelogramme IKLM, semblable & semblablement posé à EG : & vû que EG est plus grand que KM, il est évident que les côtez EF, FG, seront aussi plus grands que les côtez homologues KI, IM : parquoy d'iceux EF, FG soient couppez FN, FO, égaux à iceux KI, IM, afin qu'étant accomply le parallelogramme NFOP, il soit égal à KM, & semblable & semblablement posé au même KM ; & partant aussi à EG : & par consequent qu'étant tiré le diametre BF, iceux parallelogrammes EG, NO, soient autour d'iceluy diametre par la 26. prop. 6. & aprés avoir continué de part & d'autre les côtez NP, OP, tant qu'il sera de besoin, sera constitué le parallelogramme AP, lequel je dis être le parallelogramme demandé.



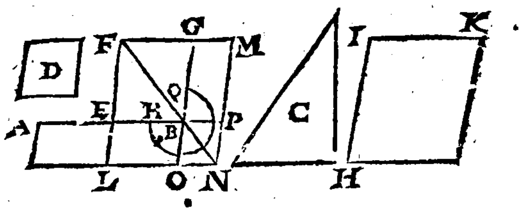
Car il est appliqué à la ligne AB, & defaillant du parallelogramme SR, lequel par la 24. prop. 6. est semblable à EG, partant aussi à D. Item puis que IL est l'excez par lequel EG excede C, & qu'à iceluy excez est égal NO : Il est évident que le gnomon TV sera égal à la figure C. Mais il est aussi égal à AP, comme il a été prouvé à la precedente : donc aussi AP sera égal à C : Mais il est appliqué à la ligne donnée AB, & defaillant du parallelogramme SR semblable au donné D. Nous avons donc à une ligne droite donnée appliqué un parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 9. PROP. XXIX.

A une ligne droite donnée, appliquer un parallelogramme égal à une figure rectiligne donnée, excedant d'un parallelogramme semblable à un autre donné.

Soit la ligne droite donnée AB, à laquelle il faut appliquer un parallelogramme égal au rectiligne donné C, mais excedant d'un parallelogramme semblable au parallelogramme donné D.

La ligne AB soit couppée en deux également au poinct E, & sur la moitié EB soit décrit le parallelogramme EFGB semblable, & semblablement posé à D par la 18. prop. *6*. En aprés, soit décrit le parallelogramme HK égal aux deux figures C & EG, & semblable, & semblablement posé à EG par la 25. prop. *6*. & partant à cause de la similitude d'iceux parallelogrammes HK, EG, comme HI sera à IK, ainsi EF sera à FG ; &



par consequent HK étant plus grand que EG, aussi les côtez HI, IK seront plus grands que les côtez EF, FG: étans donc prolongez les côtez FE, FG, tellement que

FL, FM, soient égales aux lignes IH, IK, & achevé le parallelogramme LFMN, il sera semblable, & semblablement posé à EG. Parquoy par la 26. prop. 6. les parallelogrammes LM, & EG seront constituez à l'entour d'un même diametre; lequel soit FN. Maintenant étant prolongez AB & GB jusques en P & O; & achevé le parallelogramme LA : le parallelogramme AN sera appliqué à la ligne AB, l'excedant du parallelogramme OP, qui est semblable à EG par la 24. prop. 6. & partant à D. Mais je dis aussi qu'iceluy parallelogramme AN est égal au rectiligne C; car puisque par la 36. prop. 1. AL, EO sont égaux, & par la 43. prop. 1. EO est égal au complement BM, aussi AL sera égal à iceluy BM : leur adjoûtant donc LP commun; le parallelogramme AN sera égal au gnomon QR, lequel est égal au rectiligne C : (car puisque HK, c'est-à-dire LM, est égal aux rectilignes C & EG ensemble : si on ôte EG commun, resteront égaux le gnomon QR, & le rectiligne C.) Donc aussi le parallelogramme AN sera égal au rectiligne C. A la ligne droite AB, nous avons donc appliqué le parallelogramme AN égal au rectiligne C, excedant du parallelogramme OP, qui est semblable à un autre donné D : Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 10. PROP. XXX.

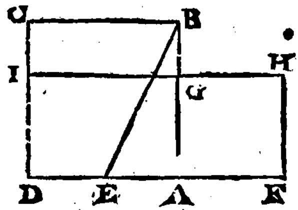
Coupper une ligne droite donnée & terminée, selon la moyenne & extréme raison.

Soit la ligne droite donnée AB, laquelle il faut coupper selon la moyenne & extréme raison.

Ayant décrit sur icelle ligne AB, le quarré AC, au côté DA soit appliqué par la 29. prop. 6. le rectangle DH égal à iceluy quarré AC, excedant du parallelogramme AH, semblable à iceluy AC; & la ligne AB sera couppée en G, selon la moyenne & extréme raison.

Car premierement l'excez AH sera quarré, puis qu'il est semblable au quarré AC; & d'autant que DH est fait égal à AC, si d'iceux on ôte le parallelogramme commun AI, resteront égaux les parallelogrammes CG & AH,

& AH, lesquels ont aussi les angles au poinct G égaux. Donc par la 14. prop. 6. les côtez d'alentour iceux angles seront reciproques ; tellement que comme IG est à GH, ainsi AG est à GB.



Mais par la 34. prop. 1. IG est égale à BC, c'est à dire à AB, & GH à AG: Donc comme AB sera à AG, ainsi AG sera à GB. Et puisque AB 1. est plus grande que AG 3. par la 14. prop. 5. AG 2. est aussi plus grande que GB 4. Veu donc que la toute AB est au plus grand segment AG, comme iceluy plus grand segment AG est au plus petit GB ; icelle AB est couppée en G, selon la moyenne & extréme raison, par la 3. def. 6. Ce qu'il falloit faire.

Autrement. La ligne donnée AB soit couppée en G, par la 11. prop. 2. en sorte que le quarré de la partie AG soit égal au rectangle de la toute AB, & de la partie GB. Je dis que AB sera couppée selon la moyenne & extréme raison au point G.

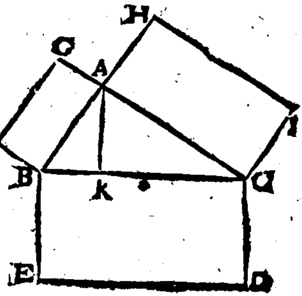
Car puis que le quarré de AG est égal au rectangle de AB & GB, les trois lignes AB, AG & GB, seront continuellement proportionnelles, par la 17. prop. 6. c'est à dire que la toute AB sera au plus grand segment AG, comme iceluy segment AG est au plus petit segment GB; & par la 3. def. 6. AB est couppée en G, selon la moyenne & extréme raison. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 21. PROP. XXXI.

Aux triangles rectangles, la figure décrite sur le côté qui soûtient l'angle droit, est égale aux deux autres figures qui luy sont semblables, & semblablement décrites sur les deux autres côtez.

Soit le triangle rectangle ABC, ayant l'angle BAC, droit, & sur le côté BC, qui soûtient iceluy angle, soit décrite quelconque figure rectiligne BD, & sur les deux autres côtez AB, AC, soient constituées les deux figures AF, AI semblables, & semblablement posées à BD : Je dis qu'icelle figure BD est égale aux deux autres AF, AI.

Car si du poinct A, on meine sur BC la perpendiculaire AK, par la 8. prop. 6. elle fera deux triangles semblables entr'eux, & au total; & par ainsi les trois triangles BAK, ABC, CAK, seront semblables entr'eux, & par la 19. prop. 6. ils seront l'un à l'autre en raison doublée des côtez de même raison AB, BC, CA. Mais par la 20. prop. 6. les trois figures AF, BD & AI, étans semblables, & semblablement posées, elles seront aussi l'une à l'autre en raison doublée de leurs côtez de même raison AB, BC, CA, qui sont les mêmes côtez des triangles : donc par la 11. prop. 5. les rectilignes AF, BD, AI, seront entr'eux, comme les triangles BAK, BAC, CAK entr'eux, c'est-à-dire, que comme le triangle BAK est au triangle ABC, ainsi le rectiligne AF est au rectiligne BD, & comme le triangle CAK est au triangle ABC, ainsi le rectiligne AI est au rectiligne BD : Donc par la 24. prop. 5. comme le composé des triangles BAK, CAK, 1. & 5. grandeurs, sera au triangle ABC, 2. grandeur, ainsi le composé des rectilignes AF, AI, 3. & 6. grandeurs, sera au rectiligne BD, 4. grandeur : mais le triangle BAC, est égal aux deux autres ABK, ACK : donc la figure BD sera aussi égale aux deux autres AF, AI. Parquoy aux triangles rectangles, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

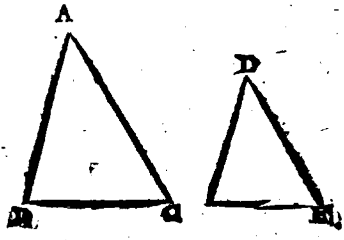


Autrement. D'autant que par la 20. prop. 6. les figures semblables sont en raison doublée de leurs côtez homologues, comme le quarré de AB 1. grandeur, est au quarré de BC 2. grandeur, ainsi la figure AF 3. grandeur, est à la figure BD 4. grandeur: Mais aussi comme le quarré de AC 5. grandeur, est au quarré de BC 2. grandeur, ainsi la figure AI 6. grandeur, est à la figure BD 4. grandeur. Donc par la 24. prop. 5. le composé de la 1. & 5. grandeur, sçavoir le quarré de AB avec celuy de AC, sera à la 2. grandeur BC, comme le composé de la 3. & 6. grandeur, sçavoir la figure AF avec la figure AI, sera à la 4. grandeur BD. Mais par la 47. prop. 1. les deux quarrez de AB, AC, sont égaux au seul quarré de BC: donc aussi les deux figures AF, AI ensemble, seront égales à la figure BD. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 22. PROP. XXXII.

Si deux triangles ayans deux côtez proportionnaux à deux côtez, sont disposez selon un angle, tellement que les côtez de même raison soient parallels; les deux autres côtez se rencontreront directement.

Soient deux triangles ABC & CDE, ayans les côtez BA & AC proportionnaux aux côtez CD & DE, disposez de telle façon qu'ils fassent l'angle ACD, & que BA soit parallele à CD, & AC à DE: Je dis que les deux autres côtez BC & CE se rencontreront directement.

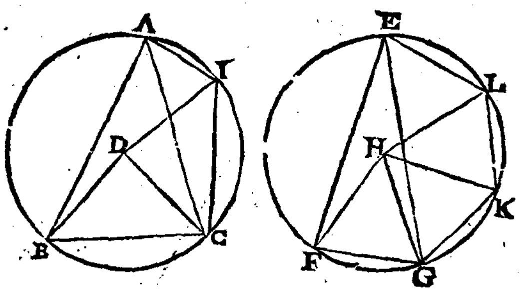


Car puisque BA & CD sont paralleles, l'angle ACD sera égal à son alterne A, par la 29. pro. 1. aussi AC étant parallele à DE, l'angle D sera égal à son alterne ACD: parquoy l'angle D sera égal à l'angle A. Mais par l'hypothese les côtez qui constituent iceux angles égaux, ſont proportionnaux : donc par la 6. prop. 6. les deux triangles ABC, DCE, ſeront équiangles, & auront les angles B & DCE égaux : leur adjouſtant donc les égaux A & ACD, les deux B & A enſemble, ſeront égaux aux deux DCE, & ACD enſemble ; c'eſt à dire au ſeul angle ACE : parquoy adjoûtant derechef à ces angles égaux, le commun ACB, les deux angles ACE, ACB, ſeront égaux aux trois angles du triangle BAC, c'eſt à dire à deux droits par la 32. prop. 1. & par la 14. prop. 1. les deux lignes BC & CE ſe rencontreront directement. Si donc deux triangles ayans deux côtez proportionnaux à deux côtez, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Aux cercles égaux, les angles conſtituez tant aux centres qu'aux circonferences, ſont entr'eux, comme les circonferences qui les ſouſtiennent. Et les ſecteurs ſont auſſi de meſme entr'eux

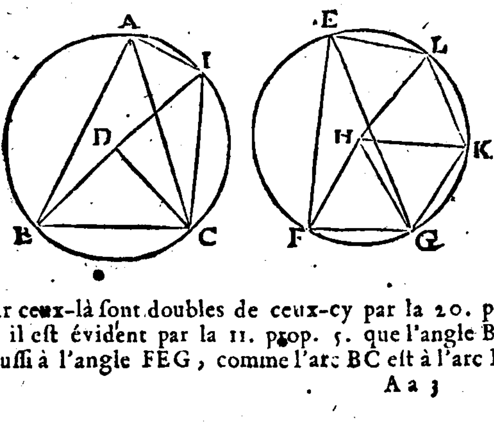
Soient deux cercles égaux ABC & EFG, deſquels les centres ſont D & H ; & ſoient les deux angles BDC, FHG aux centres ; mais les deux BAC, FEG, aux cir-



conferences. Je dis premierement, que comme la circonference BC eſt à la circonference FG, ainſi l'angle BDC eſt à l'angle FHG, & l'angle BAC à l'angle FEG.

Car ayant mené les deux lignes droites BC, FG, soient accommodées aux cercles des lignes droites, sçavoir CI égale à BC ; & GK, KL chacune égale à FG : puis soient menées les lignes ID, KH & LH. Veu donc que les deux lignes droites BC & CI sont égales, les arcs BC & CI seront aussi égaux par la 28. prop. 3. & partant les angles BDC & CDI, seront égaux par la 27. prop. 3. Pour mêmes raisons, tant les trois arcs FG, GK, & KL, que les trois angles FHG, GHK, & KHL sont égaux entr'eux : donc l'arc FGKL est autant multiplice de l'arc FG, comme l'angle FHL est multiplice de l'angle FHG : & l'arc BCI autant multiplice de l'arc BC, comme l'angle BDI, est multiplice de l'angle BDC, puisque les angles BDI, FHL sont divisez chacun en autant de parties égales, que les arcs BCI, FGKL, sur lesquels ils s'appuient : partant si l'arc BCI est égal à l'arc FGKL, l'angle BDI sera égal à l'angle FHL par la 27. prop. 3. si plus grand, plus grand ; & si plus petit, plus petit : donc puisque BCI, BDI, sont équemultiplices de BC, BDC, premiere & troisiéme grandeur ; & FGKL, FHL équemultiplices de FG, FHG 2e & 4e grandeur ; par la 6. def. 5. comme l'arc BC est à l'arc FG, ainsi l'angle BDC est à l'angle FHG.

Et d'autant que par la 15. prop. 5. l'angle BDC est à l'angle FHG, comme l'angle BAC est à l'angle FEG ;



(car ceux-là sont doubles de ceux-cy par la 20. prop. 3.) il est évident par la 11. prop. 5. que l'angle BAC est aussi à l'angle FEG, comme l'arc BC est à l'arc FG.

Ce qu'on peut encore démontrer par les mesmes raisons, & argumens employez pour les angles du centre, si on tire les lignes droites IA, KL, LE, &c.

Secondement, Je dis que le secteur BDC est au secteur FHG, comme l'arc BC est à l'arc FG : Car (demeurant la mesme construction que dessus) il est manifeste que les cordes BC & CI étans égales, & leurs arcs aussi égaux, les angles BAC, & CAI seront pareillement égaux par la 27. prop. 3. & consequemment que les segmens sur lesquels ils insistent & s'appuient, sont semblables & égaux entr'eux. Mais les deux triangles BDC, CDI, sont aussi égaux par la 4. prop. 1. leur adjoustant donc les deux segmens égaux, les deux secteurs BDC, CDI seront égaux : Parquoy l'arc BCI sera autant multiplice de l'arc BC, que le secteur BDI le sera du secteur BDC : & par mesme discours, l'arc FGKL sera montré autant multiplice de l'arc FG, que le secteur FHL l'est du secteur FHG. Partant si l'arc BCI est égal à l'arc FGKL, aussi le secteur BDI sera égal au secteur FHL; & si plus grand, plus grand; & si plus petit, plus petit. Donc les deux arcs BC, FG, avec les deux secteurs BDC, FHG, sont quatre grandeurs, de la 1e & 3e desquelles BCI, BDI, sont equemultiplices, mais de la 2e & 4e sont aussi equemultiplices FGKL, FHL. Et puis que nous avons prouvé que si l'arc BCI est égal à l'arc FGKL, aussi le secteur BDI est égal au secteur FHL; & si plus grand, plus grand; & si moindre, moindre : par la 6. def. 5. comme l'arc BC sera à l'arc FG, ainsi le secteur BDC, sera au secteur FHG. Parquoy aux cercles égaux, les angles constituez tant aux centres qu'aux circonferences, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

De cecy il s'ensuit que comme le secteur est au secteur, ainsi l'angle est à l'angle. Car l'une & l'autre raison est la même que de l'arc à l'arc; & partant par la 11. prop. 5. ils seront aussi entr'eux en la même raison.

Il est aussi évident que comme un angle au centre, est à quatre angles droits, ainsi est l'arc soustendant iceluy angle, à toute la circonference : & au contraire, que comme quatre *angles droits ſont à un angle au centre, ainſi toute la circonference eſt à l'arc ſouſtendant iceluy angle.*

Car comme l'angle au centre eſt à l'angle droit au centre, ainſi l'arc qui ſoûtient iceluy angle, eſt au quadrant qui ſoûtient l'angle droit par la 33. prop. 6. Parquoy comme l'angle au centre ſera au quadruple de l'angle droit, c'eſt à ſçavoir à quatre angles droits, ainſi l'arc ſouſtendant iceluy angle, ſera au quadruple du quadrant, c'eſt-à-dire à toute la circonference, par les choſes démontrées à la fin du Scholie de la 22. prop. 5. Puis aprés, d'autant qu'un angle au centre eſt à quatre angles droits, comme l'arc qui ſoûtient iceluy angle, eſt à toute la circonference; auſſi en permutant, comme quatre angles droits ſeront à un angle au centre, ainſi toute la circonference ſera à l'arc ſouſtendant l'angle au centre: Ce qui a été proposé.

Fin du ſixiéme Element.

ELEMENT SEPTIÉME.

DEFINITIONS.

L'Unite, est selon laquelle une chacune des choses qui sont, est appellée une.

Euclide ayant traité és 6. livres precedents de la premiere partie de Geometrie, sçavoir est de celle-là qui considere les plans, auparavant que venir à l'autre partie, laquelle traitte des solides, il explique en ce septiéme livre & és deux suivants, les proprietez & affections des nombres, pour puis aprés traitter au 10. livre des lignes commensurables & incommensurables, necessaires pour avoir entiere & parfaite connoissance des proprietez des solides. Euclide commençant donc selon sa coûtume par les principes, il définit premierement que c'est que l'unité, & dit que c'est cela selon quoy toute chose qui est se nomme une: & selon cette unité nous avons de coûtume de dire une pierre, un animal, un corps, &c. Mais *est à noter que tout ainsi qu'en la Geometrie le poinct n'a aucune partie étant indivisible, aussi és nombres l'unité ne reçoit aucune division, mais est indivisible selon nôtre autheur, lequel n'a égard en ces Elemens-cy qu'aux nombres entiers : mais nous y joindrons aussi quelque chose des fractions & nombres rompus, afin de faire voir que toutes les regles enseignées en nôtre Arithmetique pratique, ne sont moins veritables & certaines, que si elles étoient restraintes seulement aux nombres entiers dont traitte icy Euclide.*

2. Nombre, est une multitude composée de plusieurs unitez.

C'est-à-dire qu'étans assemblées plusieurs unitez ensemble, leur aggregé & collection s'appelle nombre : dont s'ensuit qu'en tout nombre il y a autant de parties qu'il y a d'unitez qui le constituent : de sorte que l'unité est la partie de chaque nombre dénommée par le même nombre duquel elle est partie : comme le nombre 4 composé de quatre unitez, se divise en autant de parties, sçavoir est en quatre unitez, chacune desquelles est ditte quatriéme partie du nombre 4. Ainsi aussi le nombre 20 composé de vingt unitez se divise en autant de parties, chacune desquelles est dite vingtiéme partie d'iceluy nombre 20, &c. D'où resulte que tous les nombres sont commensurables entr'eux, puis qu'ils sont tous mesurez par une même & commune mesure, sçavoir par l'unité, comme il est dit : ce qui ne peut pas convenir à toutes les grandeurs, puis que plusieurs *d'icelles n'ont point de commune mesure, mais sont incommensurables, comme il sera démontré au* 10. *livre.*

3. Un nombre est partie d'un autre nombre, le plus petit du plus grand, lors que le plus petit mesure le plus grand.

C'est-à-dire, que lors qu'un nombre en mesure ou divise exactement un plus grand, sans qu'il reste rien, il est dit partie d'iceluy: comme 4 *est dit partie de* 12, *d'autant qu'iceluy nombre* 12 *est divisé exactement par* 4 *sans qu'il reste rien: semblablement chacun de ces nombres* 2, 3, 6 *et* 9, *est partie du nombre* 18, *puis que chacun le mesure ou divise exactement. Or toute partie, comme nous avons dit à la* 1. *def.* 5. *est appellée aliquote, & prend son nom du nombre par lequel elle en mesure un autre; tellement que* 2 *est dit partie aliquote de* 4; *& se nomme* $\frac{1}{2}$; *pource que* 2 *mesure* 4 *par* 2: *et cinq est dit partie aliquote de* 15, *c'est à sçavoir* $\frac{1}{3}$, *pource que* 5 *mesure* 15 *par* 3: *ainsi* 4 *qui mesure* 28 *par* 7, *est dit* $\frac{1}{7}$, *&c.*

4. Mais un nombre est dit parties d'un autre plus grand, lors que le plus petit ne mesure pas le plus grand.

C'est-à-dire, que lors qu'un petit nombre n'en mesure pas un plus grand, il n'est pas dit partie d'iceluy, mais parties. Comme 6 *est dit parties de* 9: *car il ne le mesure pas précisément, mais* *est deux parties d'iceluy, sçavoir est $\frac{2}{3}$: ainsi 12 est parties de 16, sçavoir $\frac{3}{4}$ pource que 4, qui mesure l'un & l'autre nombre, est 3 fois en 12, & 4 fois en 16 : aussi 15 est parties de 24, sçavoir est $\frac{5}{8}$, puis que 3, qui est commune mesure, est 5 fois en 15, & 8 fois en 24. Semblablement 5 est parties de 7, sçavoir est $\frac{5}{7}$: & 4 est parties de 9, sçavoir est $\frac{4}{9}$, &c.*

5. Mais un grand nombre est dit multiple d'un petit, lors que le petit mesure le grand.

Tout ainsi que tout petit nombre n'est pas dit partie d'un plus grand, ains seulement de celuy-là qu'il mesure precisément ; ainsi aussi tout grand nombre n'est pas dit multiple, ou le plusieurs fois de tout autre nombre plus petit, mais seulement de ceux là qui le peuvent precisément mesurer : tellement que de deux nombres inégaux, si le petit mesure precisément le grand, ce moindre est dit partie du grand, mais celuy-cy est aussi dit multiple de celuy-là : Ainsi 4 est bien dit partie de 12, mais aussi iceluy 12 est dit multiple de 4. Pareillement 30 est dit multiple tant de 5 que de 6, qui sont parties d'iceluy, puis que l'un & l'autre le mesure.

6. Nombre pair, est celuy qui peut être divisé en deux également.

Comme tous ces nombres 2, 4, 8, 20, 50, sont appellez nombres pairs, pource que chacun *d'iceux peut être divisé en deux également, c'est-à-dire en deux parties égales; car leurs moitiez sont 1, 2, 4, 10, 25. &c.*

7. Mais l'impair, est celuy qui ne peut être divisé en deux égalcment : ou bien celuy qui est different du nombre pair de l'unité.

Comme tous ces nombres-cy 3, 5, 7, 9, 11, 13, 51, sont nommez impairs, pource qu'ils ne peuvent être divisez en deux également : Ou bien d'autant qu'ils sont differens de l'unité des nombres pairs, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 50, &c.

8. Nombre pairement pair, est celuy qu'un nombre pair mesure par un nombre pair.

C'est-à-dire, que si un nombre pair en mesure un autre par un nombre qui soit aussi pair, le nombre mesuré sera dit pairement pair : comme 32, lequel 8 mesure par 4, est dit nombre pairement pair : Semblablement 24 sera dit nombre pairement pair, pource que 6 nombre pair le mesure par 4 nombre pair, &c.

9. Et pairement impair, est celuy qu'un nombre impair mesure par un nombre pair.

C'est-à-dire, que si un nombre pair en mesure un autre par un nombre impair, le mesuré sera dit pairement impair : comme 42 est dit nombre *pairement impair, pource que 6, nombre pair le mesure par 7, nombre impair. Semblablement 24 sera dit nombre pairement impair, d'autant que 3, nombre impair le mesure par 8, nombre pair. Et est à noter, qu'il y a plusieurs nombres qui sont pairement pair, & pairement impair, comme 12, 24, 48, 96. &c. Et que ce soit l'intention d'Euclide, les 32, 33, & 34. prop. 9. le montrent assez.*

10. Mais nombre impairement impair, est celuy qui est mesuré d'un nombre impair par un nombre impair.

Comme 15, lequel est mesuré de 5, par 3, est dit nombre impairement impair: & tels sont aussi les nombres suivans, 9, 21, 25, 27, 33, 35, &c.

11. Nombre premier, est celuy qui est mesuré par la seule unité.

C'est-à-dire, que si un nombre n'est mesuré par aucun autre nombre, mais seulement par soy même, & l'unité, il est nombre premier, & tels sont tous ceux-cy 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, &c. Car chacun d'iceux n'est mesuré par aucun autre nombre, mais par la seule unité.

12. Nombres premiers entr'eux, sont ceux-là qui n'ont autre commune mesure que l'unité.

C'est-à-dire, que si deux ou davantage de *nombres n'ont autre commune mesure que l'unité, ils seront dits premiers entr'eux, jaçoit que chacun d'iceux puisse étre mesuré par quelque nombre outre l'unité. Comme ces deux nombres 15 & 8, sont dits premiers entr'eux, pource qu'il n'y a que l'unité qui les puisse mesurer tous deux: car encore que le premier soit mesuré par 5 & 3, & le dernier par 4 & 2, si est-ce toutesfois qu'aucun d'iceux quatre nombres ne peut mesurer l'un & l'autre des proposez, ains la seule unité est leur commune mesure.*

13. Nombre composé, est celuy qui est mesuré par quelque autre nombre.

Comme 15 est appellé nombre composé, pource qu'il est mesuré par 5 & 3: Aussi 27 est nombre composé, d'autant qu'il est mesuré par 9 & 3, &c.

14. Mais les nombres composez entr'eux, sont ceux-là qui ont autre commune mesure que l'unité.

C'est-à-dire; que si deux ou davantage de nombres sont mesurez par quelque nombre outre l'unité, comme par leur commune mesure, ils seront dits nombres composez entr'eux: ainsi les nombres 9 & 15 sont composez entr'eux, d'autant que 3 mesure l'un & l'autre d'iceux, comme leur commune mesure. Aussi 7, 21, & 28, sont composez entr'eux, pource que le premier d'iceux mesure soy-méme, & les deux autres.

15. Un nombre eſt dit multiplier un nombre, lors qu'il en eſt procreé un autre, qui eſt autant de fois composé de celuy qui eſt multiplié qu'il y a d'unitez au multipliant.

Comme 4 ſera dit multiplier 6, ſi iceluy nombre 6 eſt pris ou composé quatre fois, c'eſt à ſçavoir autant de fois qu'il y a d'unitez au multipliant 4; & le nombre procreé, qu'on appelle vulgairement produit, *ſera 24. Auſſi le nombre 6 ſera dit multiplier le nombre 4, ſi nous prenons iceluy nombre 4, ſix fois; c'eſt à ſçavoir autant de fois qu'il y a d'unitez en 6 nombre multipliant; & en ſera procreé le même nombre 24. Ainſi un nombre ſera dit être procreé ou produit de deux nombres, quand il ſera produit en multipliant l'un d'iceux nombres par l'autre. Comme le nombre 36 ſera dit être le produit de ces deux nombres 4 & 9, pource qu'il eſt procreé en multipliant le nombre 4 par le nombre 9, ou au contraire le nombre 9 par le nombre 4.*

Or de ce que deſſus il s'enſuit que le nombre produit de la multiplication d'un nombre par un autre, a même raiſon auquel on voudra d'iceux nombres que l'autre à l'unité. Car puis que ſelon la def. d'Euclide, pour avoir le produit de deux nombres il faut prendre autant de fois l'un d'iceux, qu'il y a d'unitez en l'autre, iceluy produit contiendra autant de fois l'un ou l'autre des nombres multiplians qu'il y a d'unitez en l'autre: & partant il y aura même raiſon du nombre pro-

duit à l'un ou l'autre des multiplians, que de l'autre multipliant à l'unité : parquoy la multiplication d'un nombre en un autre peut être définie ainsi.

La multiplication d'un nombre par un autre, est l'invention d'un nombre qui ait même raison auquel on voudra des nombres multiplians, que l'autre à l'unité.

Ainsi tu vois que de la multiplication de 5 par 7, est produit le nombre 35, lequel est à 5, comme 7 à 1; ou à 7, comme 5 à 1.

A cette définition Clavius adjoûte la suivante.

Un nombre est dit diviser un nombre, quand on en prend un autre, qui contient autant d'unitez que le nombre divisant est contenu de fois au nombre divisé.

Comme le nombre 6 sera dit diviser le nombre 24, si on prend le nombre 4; qui montre par ses quatre unitez, que le nombre 6 est contenu 4 fois au nombre divisé 24. Aussi le nombre 4 sera dit diviser le même nombre 24, si on prend le nombre 6, lequel dénotte par ses six unitez, que le nombre divisant est contenu six fois au divisé 24.

De cecy il advient que le nombre provenant de la division, lequel on appelle vulgairement quotient, *a même raison à l'unité, que le nombre divisé au diviseur. Car puis que, comme nous avons dit en la def. le quotient doit montrer & indiquer par ses unitez, combien de fois le nombre diviseur est contenu au divisé, iceluy quotient contiendra autant de fois l'unité, que le nombre divisé*

visé contient le diviseur; & partant il y aura même raison du quotient à l'unité, que du nombre divisé au diviseur. Parquoy la division d'un nombre par un autre se peut aussi définir ainsi.

La division d'un nombre par un nombre, est l'invention d'un nombre qui ait même raison à l'unité, que le nombre divisé au divisant.

Ainsi appert que de la division du nombre 24 par six, est provenu le nombre 4, lequel est à 1, comme 24 à 6. Item de la division du même nombre 24, par 4, est produit le nombre 6, qui est à 1, comme 24 à 4.

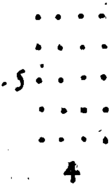
De cecy il advient qu'étant divisé un nombre par un nombre, le nombre divisé sera procreé de la multiplication du nombre trouvé, c'est-à-dire du quotient, par le nombre diviseur. Car ayant divisé le nombre A par B, le quotient soit C. Je dis que le nombre A sera produit de la multiplication du nombre C par le nombre B. D'autant que par la def. de la multiplication le nombre procreé de C multiplié par B, est à B, comme C à l'unité D; & que par la def. de la division A est aussi à B, comme C à l'unité D; il est manifeste que le nombre procreé par la multiplication de C en B est le nombre A, vû que tant iceluy nombre procreé, que le divisé A, a même raison à B, que C à l'unité D.

A.	B.	C.	D.
48.	8.	6.	1.

Or ce que nous avons dit cy-dessus touchant la multiplication & division des nombres entiers, convient aussi aux nombres rompus; tellement que le nombre ½ sera dit multiplier le nombre 20, *si le nombre 20 est pris autant de fois qu'il y a d'unitez en $\frac{1}{2}$, & sera procreé le nombre 10 : car d'autant que l'unité est seulement par sa moitié en $\frac{1}{2}$, il faut aussi prendre le nombre 20 par sa moitié, qui est 10. Semblablement le nombre 20, sera dit multiplier $\frac{1}{2}$, si $\frac{1}{2}$ est pris vingt fois, c'est à sçavoir autant de fois que l'unité est en 20; & le produit sera le même nombre 10. Item, $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ seront dits s'entremultiplier; si on prend la troisiéme partie de $\frac{1}{2}$, tout ainsi que $\frac{1}{3}$ contient seulement la troisiéme partie de l'unité : ou bien si on prend la moitié de $\frac{1}{3}$, parce que $\frac{1}{2}$ contient seulement la moitié de l'unité : & par ainsi le produit sera $\frac{1}{6}$; car c'est la troisiéme partie du nombre $\frac{1}{2}$, ou de $\frac{3}{6}$, & la moitié du nombre $\frac{1}{3}$, ou $\frac{2}{6}$.*

Mais le nombre $\frac{1}{2}$. sera dit diviser le nombre 10, si on prend le nombre 20, qui montre que le nombre divisant $\frac{1}{2}$ est contenu vingt fois au nombre divisé 10; tellement qu'il y ait la même raison du nombre procreé 20 à 1, que du nombre divisé 10 au divisant $\frac{1}{2}$. Ainsi aussi $\frac{1}{2}$ sera dit diviser $\frac{1}{6}$ si on prend le nombre $\frac{1}{3}$, lequel montre que le nombre divisant $\frac{1}{2}$, n'est pas tout contenu au divisé $\frac{1}{6}$, ains seulement la troisiesme partie d'iceluy : car puis que le nombre $\frac{1}{2}$ est le même que $\frac{3}{6}$, il est évident que la troisiesme partie d'iceluy; c'est à sçavoir $\frac{1}{6}$, est contenu en $\frac{1}{6}$. Or comme il faut faire & pratiquer non seulement la multiplication & division en nombres rompus, mais aussi toutes les autres regles & operations d'Arithmetique, nous l'avons enseigné en nôtre Pratique d'Arithmetique, & à la fin de ce 7. livre d'Euclide nous en ferons les demonstrations.

16. Lors que deux nombres ſe multiplient l'un l'autre, le produit eſt appellé plan; & les nombres multiplians ſont dits côtez d'iceluy plan.



C'eſt-à-dire que tout nombre produit de la mutuelle multiplication de deux nombres eſt appellé nombre plan: d'autant que chaque unité de l'un d'iceux nombres étant poſée & étenduë d'ordre autant de fois qu'il y a d'unité en l'autre nombre, eſt repreſenté un parallelogramme rectangle, duquel les côtez ſont les deux nombres ſe multiplians, comme il a été dit au 2. livre. Ainſi le nombre 20 produit de 5 par 4 eſt dit nombre plan, & iceux nombres 5 & 4 ſont dits côtez d'iceluy plan.

17. Mais quand trois nombres ſe multiplient l'un l'autre, le produit eſt appellé ſolide, & les multiplians ſont dits côtez d'iceluy.

Comme ſi on multiplie 6 par 5, & leur produit 30 par 4, ſera procreé le nombre 120; lequel s'appellera nombre ſolide, & les trois nombres multiplians 6, 5 & 4, ſeront dits côtez d'iceluy ſolide.

18. Nombre quarré, eſt celuy qui eſt également égal: ou bien c'eſt le produit de deux nombres égaux.

Comme le nombre plan 16 eſt appellé quarré, pource qu'il eſt procreé de la multiplication de 4 *par 4, & consequemment égal de tous côtez. Ainsi aussi 49, produit de la multiplication de 7 par 7, sera appellé nombre quarré.*

19. Nombre cube, est celuy qui est également égal également : ou bien c'est le produit de trois nombres égaux.

Comme si le nombre 4 est multiplié par 4, & puis leur produit 16 encore par 4, sera procreé le nombre 64, qui s'appellera nombre cube.

20. Les nombres sont proportionnaux, quand le premier est autant multiple, ou mesme partie, ou mesmes parties du second, comme le troisiéme du quatriéme.

C'est à dire, que quand un nombre est même partie, ou mêmes parties d'un nombre, qu'un autre d'un autre, iceux quatre nombres sont dits proportionnaux. Ainsi pource que le nombre A est même partie du nombre B, que le nombre C du nombre D, c'est à sçavoir la moitié, iceux quatre nombres A, B, C, D, sont proportionnaux. Aussi les quatre nombres E, F, G, H sont proportionnaux, puis que E est mêmes parties de F, que G de H, c'est à sçavoir deux troisiémes parties.

A	*B*	*C*	*D*
5.	10.	4.	8.
E	*F*	*G*	*H*
6.	9.	4.	6.
I	*K*	*L*	*M*
20.	5.	8.	2.

Item les quatre nombres I, K, L, M, sont aussi proportionnaux, d'autant que comme I est quadruple de K, aussi L est quadruple de M; ou bien pour-

ce que M est telle partie de L que K de I : Car il est évident que si le premier nombre I est autant multiple du second K, que le troisiéme L, l'est du quatriéme M : en prenant les mesmes nombres par ordre contraire, M sera telle partie de L, que K de I, c'est à sçavoir le quart. Parquoy on peut asseurément conclurre que quatre nombres sont proportionnaux, quand le moindre des deux premiers est même partie, ou mesmes parties de l'autre, que le moindre des deux derniers est de l'autre, moyennant qu'ils soient pris d'un même ordre, c'est-à-dire que si le moindre nombre des deux premiers est antecedant, le moindre des deux derniers soit aussi antecedant ; & si consequent, consequent. Et c'est à mon advis ainsi qu'il faut entendre cette 20. def. pour la rendre universelle, car autrement on ne pourroit pas conclurre par icelle la proportionnalité de plusieurs nombres, comme par exemple de ces quatre N, O, P, Q, vû que les prenant selon l'ordre qu'ils sont posez ; le premier N n'est pas multiple du second O, ny aussi partie ou parties, puis qu'il est plus grand qu'iceluy ; & neanmoins ils sont proportionnaux, vû que le moindre des deux premiers, c'est à sçavoir O, contient autant de parties de l'autre N, que le moindre des deux autres, qui est Q, en contient de l'autre P, c'est à sçavoir quatre cinquiémes parties. Semblablement ces quatre autres nombres R, S, T, V, sont proportionnaux, puis que V contient autant de parties de T, que S en con-

N	O	P	Q
15.	12.	25.	20.

R	S	T	V
36.	27.	24.	18.

tient de R ; ou bien à cause que S est mesmes parties de R , que V de T, c'est à sçavoir les trois quarts.

Clavius estimant que cette def. a été corrompuë, pour la restituer, y a adjoûté ces mots : Ou bien quand le premier contient également le second, & le troisiéme le quatriéme, & en outre une même partie, ou mesmes parties d'iceluy. *Mais je n'estime pas que cette addition y soit necessaire, puis que le moindre nombre de chaque raison étant conferé à l'autre ladite def. convient à toutes sortes de proportions : & que ce soit l'intention, d'Euclide, il appert assez par les démonstrations des 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 & 13. prop. de ce 7. livre.*

Or Euclide definit seulement icy les nombres proportionnaux, qui ont une même raison d'inégalité : Car de la raison d'égalité, il est évident que le premier nombre étant égal au second, aussi le troisiéme doit être égal au quatriéme, afin qu'ils soient dits proportionnaux.

De cette 20. def. resulte appertement, que les nombres égaux ont même raison à un même nombre; & au contraire qu'un même nombre a aussi même raison à des esgaux : Ce qui a été démontré en toutes grandeurs à la 7. prop. 5. Il en resulte encore que les nombres qui ont même raison à un même nombre, ou ausquels un même nombre a même raison, sont égaux entr'eux. Ce qui a aussi été démontré en toutes sortes de grandeurs en la 9. prop. 5.

De cette même def. on collige aussi que de deux nombres inégaux, le plus grand a plus grande rai-

ſon à un même nombre, que le plus petit ; & au contraire qu'un même nombre a plus grande raiſon à un petit nombre, qu'à un plus grand. Item que des nombres inégaux, celuy qui a plus grande raiſon à un même, eſt le plus grand : & celuy auquel un même nombre a plus grande raiſon, eſt le plus petit : Toutes leſquelles choſes ſont claires, & évidentes, ſi cette def. eſt bien entenduë. Cecy a auſſi été démontré és grandeurs au 5. livre prop. 8. & 10.

Or cette définition, & tout ce que nous avons dit cy-deſſus, convient auſſi aux nombres rompus : Car ces quatre nombres $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ſont proportionnaux, attendu que le premier eſt autant multiple du ſecond, que le troiſiéme du quatriéme, ſçavoir double ; ainſi qu'il appert en reduiſant les deux premiers en même dénomination, ſçavoir à $\frac{6}{8}$ & $\frac{3}{8}$, mais les deux autres à $\frac{2}{4}$ & $\frac{1}{4}$. Semblablement ces quatre nombres $2\frac{3}{8}$, $4\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, ſont proportionnaux, puis que le premier eſt telle partie du ſecond, que le troiſiéme du quatriéme, ſçavoir la moitié, &c.

21. Les nombres ſemblables plans, ou ſolides, ſont ceux qui ont les côtez proportionnaux.

Comme 24 & 6, ſont nombres plans ſemblables, pource que 6 & 4, côtez de cettuy-là ſont proportionnaux à 3 & 2, côtez de celuy-cy : ainſi auſſi 192 & 24, ſont nombres ſolides ſemblables, pource que 8, 6, 4, côtez de cettuy-là ſont proport. à 4, 3, 2, côtez de celuy-cy. Et eſt à *noter que ces nombres plans, & solides semblables peuvent bien être aussi compris sous des côtez non proportionnaux; mais toutesfois nous ne les considerons icy qu'entant qu'ils sont contenus sous leurs côtez proportionnaux.*

22. Nombre parfait, est celuy qui est égal à toutes ses parties aliquotes.

Comme 6 est dit nombre parfait, pource que les parties aliquotes d'iceluy, sçavoir 1, 2, 3, prises ensemble, luy sont égales. Ainsi aussi 28, duquel les parties aliquotes, sçavoir est 1, 2, 4, 7, 14, étans prises ensemble, luy sont égales; sera dit nombre parfait; & tels sont aussi 496, 8128, &c.

Mais quand toutes les parties aliquotes d'un nombre prises ensemble, sont plus grandes qu'iceluy, il est dit abondant; & quand elles sont moindres, il est appellé diminué.

A ces définitions d'Euclide, Clavius en adjoûte quelques autres, touchant les raisons & proportions des nombres, comme de la raison égale, de l'alterne, de l'inverse, & autres dont est traitté en general au 5. livre: Mais pource que nous les avons tellement expliquées en ce lieu-là, qu'on les peut entendre & adapter, non seulement aux lignes, superficies & solides, mais aussi aux nombres, & en general à toutes sortes de grandeurs & quantitez soient continuës ou discrettes; je n'estime pas qu'il soit besoin de les repeter icy, c'est pourquoy nous viendrons aux

PETITIONS OU DEMANDES.

1. Qu'à tout nombre donné on en puisse prendre tant qu'on voudra d'égaux ou multiples.
2. Qu'à tout nombre donné on en puisse prendre un plus grand.

Combien que selon nôtre Autheur le nombre ne puisse être diminué infiniment, ains seulement jusques à l'unité qu'il fait indivisible, si est-ce toutesfois qu'il peut être augmenté infiniment par la continue addition de l'unité : Parquoy étant proposé quelconque nombre, on en peut trouver un plus grand, c'est à sçavoir celuy qui est produit de l'addition d'une ou de plusieurs unitez au nombre donné.

AXIOMES OU COMMUNES SENTENCES.

1. Les nombres equemultiplices de nombres égaux, ou d'un même nombre, sont égaux entr'eux.
2. Et ceux desquels un même nombre est equemultiplice, ou desquels les equemultiplices sont égaux, sont aussi égaux entr'eux.
3. Mais les nombres qui sont une même partie, ou même parties de nombres égaux, ou d'un même, sont égaux entr'eux.
4. Et ceux desquels un même nombre, ou nombres égaux, sont même partie, ou mesmes parties: sont aussi égaux entr'eux.
5. L'unité mesure tout nombre par les unitez qui sont en iceluy, c'est-à-dire par le même nombre.
6. Tout nombre mesure soy-même par l'unité.
7. Si un nombre multipliant un nombre, en produit quelqu'un, le multipliant mesurera le produit

par le multiplié : mais le multiplié mesurera le même produit par le multipliant.

8. Si un nombre mesure un nombre ; aussi celuy par lequel il le mesure, mesurera le même par les unitez qui sont au mesurant, c'est-à-dire par iceluy nombre mesurant.

9. Si un nombre mesurant un nombre, multiplie celuy par lequel il le mesure, ou est multiplié par iceluy, sera produit celuy lequel est mesuré.

10. Le nombre qui en mesure deux ou davantage, mesure aussi le composé d'iceux.

11. Mais celuy qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré.

12. Et celuy qui mesure le tout, & le retranché, mesure aussi le reste.

THEOR. 1. PROP. I.

Si de deux nombres inégaux proposez, on soustrait toûjours alternativement le plus petit du plus grand, & que le plus petit reste ne mesure jamais le precedant jusques à ce qu'on ait pris l'unité ; les nombres proposez au commencement, seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres inégaux AB & CD, tels que si on soustrait continuellement le plus petit du plus grand ; le plus petit reste ne mesure jamais le precedant, jusques à ce qu'on parvienne à l'unité : Je dis qu'iceux nombres AB & CD, seront premiers

A. . . . 5 F. . 2 G. 1 B
C. . . 3 H. . 2 D
E. . 2

entr'eux, c'est-à-dire, qu'ils ont pour commune mesure la seule unité. Autrement, s'ils ne sont premiers, ils seront composez, & par la 14. def. de ce livre ils seront mesurez par quelque nombre : soit iceluy E commune mefure à tous les deux : ainsi CD plus petit nombre estant soustrait de AB, soit le reste FB plus petit que CD: item FB estant soustrait de CD, soit le reste HD plus petit que FB : Pareillement HD estant soustrait de FB, soit le reste GB, unité. Puis donc que E mesure CD, il mesurera aussi son égal AF; & d'autant qu'il mesure le tout AB, par la 12. com. sent. E mesurera aussi le reste FB, lequel mesure CH ; & partant par la 11. com. sent. E mesurera aussi CH ; & puis qu'il mesure le tout CD, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le reste HD, & par consequent son égal FG : mais il mesure aussi le tout FB ; E mesurera donc pareillement l'unité restante GB, sçavoir le tout la partie : ce qui est impossible. Donc AB & CD ne peuvent estre mesurez par aucun nombre, ains par l'unité seulement : & partant ils sont nombres premiers entr'eux par la 12. def. de ce livre. Si donc de deux nombres inégaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Commandin demonstre icy la proposition suivante.

Estant proposez deux nombres composez entr'eux, si on soustrait toûjours alternativement le moindre du plus grand, la soustraction ne parviendra pas jusques à l'unité.

Ce qui est evident, car si on parvenoit à l'unité, les nombres proposez seroient premiers entr'eux, comme il a esté demonstré en la prop. cy-dessus : & ils sont posez composez.

Or il est manifeste par ces choses, qu'estans proposez deux nombres, nous connoistrons facilement s'ils sont premiers entr'eux ou non. Car estant faite la soustraction, comme dit est, si on parvient jusques à l'unité, lesdits nombres proposez seront premiers entr'eux : mais si on n'y parvient pas, ils seront composez.

PROBL. 1. PROP. II.

Estans donnez deux nombres non premiers entr'eux ; trouver la plus grande commune mesure d'iceux.

Soient donnez deux nombres non premiers entr'eux AB & CD, desquels CD soit le moindre : il faut trouver la plus grande commune mesure d'iceux.

A.........9	E.......6	B
C.....6	F...3	D
G...4		

Soit soustrait le plus petit nombre CD, tant de fois que faire se pourra du plus grand AB: s'il reste quelque chose, comme EB, iceluy soit osté de CD, tellement qu'il reste encor FD; & ainsi soit soustrait continuellement le plus petit du plus grand, jusques à ce qu'on parvienne à un nombre qui mesure le precedent : ce qui aviendra necessairement : car si on parvenoit jusques à l'unité, les nombres AB, CD, par la prec. prop. seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Donc que FD mesurant EB, il ne reste rien. Je dis que FD est la plus grande commune mesure de AB & CD.

Car qu'il les mesure tous deux, nous le prouverons ainsi. D'autant que FD mesure EB, & EB mesure CF, par la 11. com. sent. FD mesurera aussi le mesme CF; & mesurant soy-mesme, il mesurera le tout CD, composé des deux CF, FD par la 10. com. sent. Mais iceluy CD mesure AE: donc FD mesurera aussi AE: Et puisqu'il mesure aussi EB; il mesurera le tout AB composé d'iceux AE, EB. Par ainsi FD mesure tous les deux nõbres AB & CD.

Il est aussi leur plus grande commune mesure; autrement en soit (s'il est possible) une autre plus grande, comme G. Veu donc que G mesure CD, il mesurera aussi AE; & mesurant le tout AB, par la 12. com. sent. il mesurera aussi le reste EB; & par consequent il mesurera CF. Mais il mesure aussi le tout CD; il mesurera donc aussi le reste FD, sçavoir le plus grand nombre le plus petit; ce qui est impossible. Donc un plus grand nombre que FD ne mesure pas les nombres AB, CD: partant iceluy nombre FD est leur plus grande commune mesure.

A.......	8	B
C....	4	D

Que si le moindre nombre CD mesuroit le plus grand AB; il est manifeste qu'il seroit la plus grande commune mesure, attendu qu'il mesure soy-mesme, ainsi qu'il appert icy. Nous avons donc trouvé la plus grande commune mesure de deux nombres, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cecy est évident que qui mesure deux nombres, il mesure aussi leur plus grande commune mesure, puis qu'il a été démontré que si G mesure AB, & CD, il mesurera aussi FD leur plus grande commune mesure.

SCHOLIE.

Par les choses cy-dessus dites, nous connoistrons facilement si trois ou davantage de nombres proposez sont premiers entr'eux, ou non. Car soient donnez les trois nombres A, B, C. Premierement donc soit veu par ce qui est dit à la 1. prop. si les deux nombres A & B sont premiers entr'eux, ou non; Que s'ils sont premiers, il est évident que les trois nombres A, B, C, ne seront composez entr'eux. Mais si A & B étoient composez entr'eux, soit trouvée par la 2. prop. leur plus grande commune mesure D; que si elle mesure aussi le nombre C, il est manifeste que les trois nombres A, B, C, sont composez entr'eux, puis qu'ils ont le nombre D pour commune mesure.

A	12
B	9
C	6
D	...3

Que si D plus grande commune mesure de A & B, ne mesure C; C & D seront premiers entr'eux, ou non: s'ils sont premiers, les trois nombres A, B, C, ne seront composez entr'eux, mais premiers: Car s'ils étoient composez, ils auroient une commune mesure, laquelle mesureroit aussi le nombre D plus grande commune mesure de A & B, par le Corol. de cette prop. & partant C & D ne seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Mais si C & D ne sont premiers entr'eux, les trois nombres A, B, C, seront composez entr'eux. Car étant trouvée par la 2. prop. 7 E la plus grande commune mesure de C & D; iceluy nombre E mesurera aussi

A	9
B	6
C	5
D	...3

A	12		
B	8		
C	6		
D	4	E	..2

A & B par la 11. com. sent. puis que D les mesure. Parquoy veu que le mesme E mesure aussi C ; il mesurera les trois A, B, C : & partant iceux seront composez entr'eux. Ce qui étoit proposé.

En la mesme maniere sera examiné & connu si plus de trois nombres sont premiers entr'eux, ou non. Car s'il y a quatre nombres donnez, il en faudra éprouver premierement trois ; si cinq, quatre, &c. & achever comme nous avons dit, de trois nombres proposez.

a PROBL. 2. PROP. III.

Estans donnez trois nombres, non premiers entr'eux ; trouver leur plus grande commune mesure.

Soient donnez trois nombres non premiers entr'eux A, B, C ; desquels il faut trouver la plus grande commune mesure.

A 12	D 4
B 8	E . . 2
C 6	F . . . 3

Soit trouvé par la prec. prop. la plus grande commune mesure des deux nombres A & B, qui soit D. Si donc D mesure aussi C, nous avons ce que nous demandons : car si un plus grand nombre que D mesuroit A, B, C, par le Corol. de la prop. precedente, il mesureroit aussi D, la plus grande commune mesure de A & B, sçavoir est, un grand nombre, un moindre : ce qui est absurde. Que si D ne peut mesurer C, si est-ce que D & C seront composez entr'eux, tant par l'hypothese, que par le susdit Corol. de la 2. prop. donc par icelle même proposition soit trouvée E plus grande commune mesure de C & D. Il est évident par la 11. com. sent. que E mesurera tous les trois nombres A, B, C, d'autant qu'elle mesure C & D ; lequel D mesure B & A. Je dis davantage que E est aussi la plus grande commune mesure. Autrement si elle n'est la plus grande, en soit une autre plus grande, sçavoir F, s'il est possible : Or mesurant A, & B, elle mesurera aussi D, leur plus grande commune mesure par le même Corol. de la 2. prop. & par la même raison mesurant C & D, elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure E, sçavoir le plus grand, le plus petit : ce qui est impossible. Donc un plus grand nombre que E ne mesure pas les nombres donnez A, B, C; & partant iceluy nombre E sera leur plus grande commune mesure. Parquoy nous avons trouvé la plus grande commune mesure de trois nombres proposez, non premiers entr'eux. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par cecy il est manifeste qu'un nombre qui en mesure trois, mesurera aussi la plus grande commune mesure d'iceux.

SCHOLIE.

En la même maniere, étans donnez plus de trois nombres non premiers entr'eux, sera trouvée leur plus grande commune mesure; c'est-à-dire, que s'il y a quatre nombres, il faudra premierement trouver la plus grande commune mesure de trois, si 5, de quatre : si 6, de cinq, &c. puis achever, comme il a été dit de trois nombres donnez. Et aura aussi lieu le Corol. precedent; tellement que le nombre qui en mesure quatre, mesurera aussi leur plus grande commune mesure, &c.

THEOR. 2. PROP. IV.

Tout nombre moindre, est partie ou parties de tout nombre plus grand.

A	6
B	...3

Soient deux nombres A & B inégaux, desquels A soit le plus grand. Je dis que le plus petit B, est ou partie ou parties du plus grand A.

Car ou B mesure A, ou non. S'il le mesure, il est partie par la 3. def. de ce livre : s'il ne le mesure pas, ou bien A & B, seront entr'eux nombre premiers, ou composez.

Premierement qu'ils soient premiers: d'autant que chaque unité de B est partie de A, il est évident que B est parties de A, à sçavoir autant de parties qu'il y a d'unitez en B.

A. 6
B. 5

Secondement A & B soient composez entr'eux : & puis que B ne mesure pas A, soit trouvée C leur plus grande commune mesure par la 2. p. 7. & soit divisé B, en parties BD, DE, chacune égale à C. Vû donc que C est partie de A, car il le mesure, BD sera aussi partie de A ; item DE. Partant tout le nombre B est parties de A, à sçavoir autant de parties que C est autant de fois en BE. Parquoy tout nombre moindre est partie, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A. 6
B. .2 D. .2 E
C. .2

THEOR. 3. PROP. V.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second, que le tiers du quart ; le premier & tiers ensemble, seront telle partie du second & du quart ensemble, qu'est le premier du second.

Soient quatre nombres A, BC, D & EF, desquels A 1. est telle partie de BC 2, que D 3, l'est de EF 4. Je dis que A & D ensemble sont telle partie de BC & EF ensemble, comme A l'est de BC.

Car puis que A est telle partie de BC, que D de EF ; BC contiendra A autant de fois, comme EF contiendra D par la 3. def. Ayant donc divisé BC en autant de parties qu'il contient de fois A, sçavoir en BG & GC ; EF se divisera aussi en autant de parties égales à D, sçavoir en EH & HF : & d'autant que BG est égal à A, & EH à D, si à choses égales A & BG, on ajoûte choses égales, D & EH : A & D ensemble, seront égaux

A. . .3
B. . .3 G. . .3 C
D. . . .4
E. . . .4 H. . . .4 F

à BG

à BG & EH enſemble : ſemblablement A & D enſemble, ſeront égaux à GC & HF enſemble, & ainſi de ſuite, s'il y avoit davantage de parties en BC & EF : & partant autant de fois que BC contient A, autant de fois BC & EF enſemble, contiendront A & D enſemble : Parquoy ſi de quatre nombres le premier eſt telle partie du ſecond, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

Le même eſt auſſi veritable en nombres rompus, ainſi qu'il appert en cet exemple, où le nombre A eſt telle partie du nombre BC, que le nombre D du nombre EF : & partant ſera démontré comme deſſus A, D, enſemble être la même partie de BC, EF enſemble que A de BC : Sçavoir eſt, ſi BC, EF ſont diviſez ês parties BG, GC ; EH, HF, égales à iceux nombres A & D, &c.

A $\frac{2}{7}$ D $\frac{3}{8}$

B $\frac{2}{7}$ G $\frac{2}{7}$ C E $\frac{3}{8}$ H $\frac{3}{8}$ F

Or cette 5. prop. peut être transferée à tant de nombres qu'on voudra ainſi.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra, qui ſoient même partie d'autant d'autres nombres, chacun du ſien correſpondant ; auſſi les touts ſeront même partie des touts, que l'un ſera de l'un ſon correſpondant.

Soient les nombres A, B, C, une même partie des nombres DE, FG, HI, chacun de ſon correſpondant : Je dis que tous les nombres A, B, C, enſemble ſont la même partie de tous

A....4 B...3 C..2

D....4 K....4 E F...3 L...3 G H..2 M..2 I

les nombres DE, FG, HI enſemble, que A de DE. Car étans diviſez les nombres DE, FG, HI en parties égales à iceux A, B, C ; il y aura en DE autant de parties égales à A qu'en FG d'égales à B, & qu'en HI d'égales à C. Vû donc que A & DK, ſont égaux, ſi on leur adjoûte les égaux

B & FL; A, B ensemble seront égaux à DK, FL ensemble; & si à iceux on adjoûte encores les egaux C & HM: aussi A, B, C ensemble, seront egaux à DK, FL, HM, ensemble. Par même raison A, B, C ensemble seront égaux à KE, LG, MI ensemble: & ainsi de suitte, s'il y avoit davantage de parties en DE, FG, HI: donc l'aggregé des nombres A, B, C sera autant de fois égal à l'aggregé des parties des nombres DE, FG, HI, que A sera contenu de fois en DE. Parquoy A, B, C ensemble, seront la même partie de DE, FG, HI ensemble, que A de DE.

Or cecy convient aussi aux nombres rompus, soit qu'ils le soient tous, soit qu'avec iceux il y ait aussi quelque nombre entier, voire même l'unité, ainsi qu'en cette autre figure. Car il est évident que cette diversité de nombres ne peut apporter aucun changement en la démonstration cy dessus.

A $\frac{2}{5}$ B. 1 C. $1\frac{1}{2}$

D $\frac{2}{5}$ K $\frac{2}{5}$ E F. 1 L. 1 G H. $1\frac{1}{2}$ M. $1\frac{1}{2}$ I

Commandin a demontré en ce lieu le theoreme suivant.

Si un nombre est autant multiple d'un nombre qu'un autre l'est d'un autre; l'un & l'autre ensemble sera autant multiple de l'un & l'autre ensemble, qu'un seul l'est d'un seul.

Soit le nombre A autant multiple du nombre B, que le nombre C, l'est du nombre D: Je dis que A & C ensemble sera autant multiple de B & D ensemble, que A de B. Car puis que A est multiple de B, & C autant multiple de D; B sera telle partie de A, que D de C: & par la 5. prop. 7. B & D ensemble sera telle partie de A & C ensemble, que A de B: partant A & C ensemble sera autant multiple de B & D ensemble, que A de B. Ce qu'il falloit démontrer.

A. 8

B. . . . 4

C. 6

D. . . 3

Ce qui est icy démontré de deux nombres, se doit aussi entendre de davantage, tellement que la prop. se peut rendre universelle disant ainsi;

S'il y a tant de nombres qu'on voudra equemultiples d'autant d'autres nombres, chacun du sien correspondant ; les touts seront autant multiple des touts, que l'un sera multiple de l'un, son correspondant.

Ce qui correspond à ce qui a été démontré en toutes sortes de grandeurs à la 1. prop. 5. Et neanmoins nous le démontrerons encor ainsi. Soient trois nombres A, B, C, equemultiplices de trois autres D, E, F, chacun de son correspondant : Je dis que les touts A, B, C,

A........8	B.......6	C.....4
D....4	E...3	F..2

ensemble, sont autant multiples des touts, D, E, F ensemble, que A est multiple de D. Car puis que A est autant multiple de D, que B de E, & C de F : au contraire D sera telle partie de A, que E de B, & F de C. Donc par les choses cy-dessus démontrées, D, E, F ensemble, seront telle partie de A, B, C ensemble, que D de A : & par le contraire les toutes A, B, C ensemble, seront autant multiples des toutes D, E, F ensemble, que A de D. Et n'importe que les nombres proposez soient nombres entiers, ou nombres rompus, car il est évident que la demonstration des uns est la même que des autres.

THEOR. 4. PROP. VI.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second, que le tiers du quart : le premier & tiers ensemble, seront telles parties du second & quart ensemble, que le premier du second.

Soient quatre nombres AB, C, DE & F, desquels le premier AB contient autant de parties du second C, que le troisiéme DE en contient du quatriéme F. Je dis que AB & DE ensemble, contiennent autant de parties de C & F ensemble, que AB de C.

A...3 G...3 B
C..........9
D....4 H....4 E
F..............12

Car d'autant que AB contient telles parties de C, que DE de F; étans AB & DE divisez en AG, GB; & DH, HE, selon qu'ils sont parties de C & F, il y aura autant de parties de C en AB, comme de F en DE, & par la pr. preced. AG & DH ensemble sera telle partie de C & F ensemble, que AG de C. Item GB & HE ensemble, sera telle partie de C & F ensemble, que GB de C; & ainsi de suite, s'il y avoit davantage de parties en AB & DE. Parquoy iceux AB & DE ensemble, seront telles parties de C & F ensemble, que AB de C. Donc si de quatre nombres le premier contient telles parties, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Cette même prop. avec sa demonstration a aussi lieu en nombres rompus, comme il appert en cet exemple.

A $\frac{1}{9}$ G $\frac{1}{9}$ B   D $\frac{2}{7}$ H $\frac{2}{7}$ E

C $\frac{3}{9}$ F $\frac{6}{7}$

Mais cette 6. prop. peut aussi être estenduë à tant de nombres qu'on voudra, soient entiers, ou rompus, ainsi qu'il ensuit.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra, qui soient mesmes parties, d'autant d'autres nombres, chacun d'un chacun; aussi les touts seront mesmes parties des touts, que l'un de l'un son correspondant.

Car c'est la même demonstration que dessus; observant seulement qu'au lieu de la 5. prop. il se faut servir icy de l'universelle démontrée au Scholie d'icelle 5. prop.

THEOR. 5. PROP. VII.

Si un nombre est telle partie d'un autre nombre, que le retranché du retranché; le reste sera aussi telle partie du reste, comme le tout est du tout.

Soit le nombre AB telle partie du nombre CD que le retranché AE est du retranché CF. Je dis que le reste EB, sera telle partie du reste FD, que le tout AB est du tout CD.

A . . . . 4E . . 2B
G . . . . 4C . . . . 8F 4D

Car étant pris le nombre GC, en sorte que telle partie qu'est le retranché AE du retranché CF, telle partie le reste EB soit d'iceluy GC; par la 5. prop. les deux nombres AE & EB ensemble seront telle partie des nombres GC & CF ensemble, qu'est AE de CF, c'est-à-dire qu'est le tout AB du tout CD : & partant puis que le nombre AB est telle partie du nombre CF que de CD : iceux nombres GF, CD seront égaux entr'eux par la 4. com. sent. en ôtant donc le nombre commun CF, les demeurans GC & FD seront égaux : & partant le reste EB sera telle partie du reste FD, que de GC : c'est-à-dire que le tout AB du tout CD, puis que EB a été posé telle partie de GC, que AE de CF; qui par l'hypothese est la même que AB de CD. Si donc un nombre est telle partie d'un autre nombre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Cette prop. avec sa démonstration convient aussi aux nombres rompus : Et encore le theoreme suivant, lequel Commandin démontre en cét endroit.

Si un nombre est autant multiple d'un autre nombre que le retranché du retranché; aussi le reste sera autant multiple du reste, que le tout du tout.

Soit le nombre AB autant multiple du nombre CD, que le retranché AE du retranché CF : Je dis aussi que le reste EB est autant multiple du reste FD, que le tout AB l'est du tout CD.

A . . . . . 6 E . . . . 4 B
C . . . 3 F . . 2 D

Car puis que AB, AE sont equemultiplices de CD, CF, par le contraire *le tout CD sera telle partie du tout AB, que le retranché CF du retranché AE : & partant par la susdite prop. 7. aussi le reste FD, sera telle partie du reste EB, que le tout CD du tout AB : donc au contraire EB sera autant multiple de FD, que le tout AB est multiple du tout CD. Ce qui étoit proposé à démontrer.*

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si un nombre contient telles parties d'un autre nombre, que le retranché du retranché : aussi le reste contiendra telles parties du reste, que le tout du tout.

Si le nombre total AB contient telles parties du total CD, que le retranché AE du retranché CF : Je dis que le reste EB contiendra telles parties du reste FD, que le total AB, du total CD.

G. .2 A. . . . . .6 E. .2 B
C. . . . . .9 F. . .3 D

Car si on pose GA contenir telles parties de FD, que AE de CF, ou AB de CD, par la 6. prop. les deux nombres GA, AE ensemble, seront telles parties des deux CF, FD ensemble, (c'est-à-dire le tout GE du tout CD) que GA de FD, ou AB de CD: & partãt puis que GE & AB contiennent telles parties de CD, l'un que l'autre, ils seront égaux: parquoy en ostant le nombre commun AE, resteront GA & EB égaux. Mais GA contient telles parties de FD, que AB de CD : Donc aussi EB contiendra telles parties d'iceluy FD, que AB de CD. Parquoy si un nombre contient telles parties d'un autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

Que si aux nombres entiers cy-dessus apposez l'on substituë des nombres rompus, tu démontreras en la même maniere cette 8. prop. être aussi veritable en fractions ; & semblablement les 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, &c.

THEOR. 7. PROP. IX.

Si de quatre nombres, le premier eſt telle partie du ſecond, que le tiers du quart; auſſi en permutant le premier ſera telle, ou telles parties du tiers, que le ſecond du quart.

Soient quatre nombres A, BC, D & EF, deſquels A ſoit telle partie de BC, que D eſt de EF. Je dis qu'en permutant, A ſera telle partie, ou contiendra telles parties de D, que BC de EF, pourvû que A & BC ſoient plus petits que D & EF, chacun au ſien; car ainſi ſe doit entendre cette propoſition.

A. . .3
B. . .3 G. . .3 C
D. . . .4
E. . . .4 H. . . .4 F

Qu'ainſi ne ſoit: d'autant que par l'hypotheſe, A eſt telle partie de BC comme D de EF: BC contiendra autant de parties égales à A que EF en contient d'égales à D: ſoit donc diviſé le nombre BC és parties BG, GC, chacune égale à A; & le nombre EF és parties EH, HF chacune égale à D. Et puis que A eſt poſé moindre que D, par la 4. prop. de ce livre, A eſt partie ou parties de D, & ainſi conſequemment des autres, ſçavoir BG de EH, & GC de HF: mais parce que BG eſt égale à GC, & EH à HF; BG ſera telle ou telles parties de EH, que GC de HF: & partant par la 5. ou 6. prop. BG, GC enſemble, c'eſt-à-dire BC, ſera telle ou telles parties de EH, HF enſemble, ſçavoir EF, que BG de EH, c'eſt-à-dire que A de D. Parquoy ſi de quatre nombres le premier eſt telle partie, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 8. PROP. X.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du ſecond, que le tiers du quart; auſſi en permutant le premier contiendra telle ou telles parties du tiers, que le ſecond du quart.

Soient quatre nombres AB C, DE & F, desquels AB contienne telle parties de C, que DE de F. Je dis qu'en permutant, AB sera telle ou telles parties de DE, que C est de F, moyennant que AB & C soient plus petits que DE & F, chacun au sien, car cette prop. aussi bien que la precedente se doit ainsi entendre.

A..2 G..2 B
C.....6
D.....5 H.....5 E
F...............15

Car AB estant divisé en AG, GB parties de C; & DE en DH, HE parties de F; AB sera divisé en autant de parties que DE, & tant AG que GB sera telle partie de C, que DH & HE de F: donc en permutant par la 9. prop. de ce livre, AG sera telle partie ou parties de DH, & GB de HE, que C de F: & partant AG sera telle partie, ou parties de DH, que GB de HE. Donc par la 5. ou 6. prop. AG, GB ensemble, sçavoir est le premier nombre AB, sera aussi telle partie, ou parties de DH, HE ensemble, c'est-à-dire du troisiéme nombre DE, que AG de DH, c'est-à-dire que le second nombre C du quart F: Parquoy si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 9. PROP. XI.

Si le tout est au tout, comme le retranché au retranché; aussi le reste sera au reste, comme le tout au tout.

Soit le tout AB au tout CD, comme le retranché AE au retranché CF: Je dis que le reste EB est au reste FD, comme le tout AB au tout CD.

A....4 E..2 B
C......6 F...3 D

Car puis que AB est à CD, comme AE à CF; AB estant plus petit nombre que CD, il sera telle ou telles parties d'iceluy CD, que AE de CF,

& par la 7. ou 8. prop. le reste EB sera telle ou telles parties du reste FD, que le tout du tout : & partant par la 20. def. le reste EB sera au reste FD, comme le tout AB au tout CD. Ce qu'il falloit demontrer.

SCHOLIE.

Or combien qu'en cette démonstration Euclide pose le nombre AB plus petit que le nombre CD, si est-ce toutesfois qu'elle auroit aussi lieu, si AB étoit plus grand que CD. Car ou iceluy nombre CD mesureroit AB, ou il ne le mesureroit pas. Que CD mesure donc premierement AB ; & d'autant que comme

A . . . . 8E 6B
C . . . . 4F . . . 3D

AB est à CD, ainsi AE est à CF, par la 20. def. AB, AE, seront equemultiplices de CD, CF, c'est-à-dire que CD sera telle partie de AB, que CF de AE ; & par la 7. prop. le reste FD sera aussi méme partie du reste EB, que le tout CD du tout AB : donc par le contraire AB, EB, seront equemultiplices d'icelles CD, FD : & par la 20. def. convertie, comme le tout AB sera au tout CD, ainsi le reste EB sera au reste FD.

Maintenant que CD ne mesure pas AB : derechef puis que comme AB est à CD, ainsi AE est à CF, telles parties que CD est de AB, telles parties CF est aussi de AE par la susdite 20. def. & par la 8. prop. le reste FD sera méme parties du reste EB, que le tout CD du tout AB : donc par la méme def. convertie, le reste EB sera au reste FD, comme le tout AB sera au tout CD. Ce qu'il falloit démontrer.

A . . . . . . 6E . . . 3B
C . . . . 4F . . 2 D

THEOR. 10. PROP. XII.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra proportionnaux ; comme l'un des antecedans sera à son consequent, ainsi tous les antecedans seront à tous les consequens.

Soient tant de nombres qu'on voudra proportionnaux A, B; C, D; E, F; c'eſt à ſçavoir qu'il y ait telle raiſon de A à B, que de C à D, & que de E à F. Je dis que tous les antecedans A, C, E enſemble, seront à tous les conſequens B, D, F enſemble, comme A, l'un des antecedans, eſt à B ſon conſequent.

A......6	C....4	E..2
B.........9	D......6	F...3

Car puis que les ſuſdits nombres ſont proportionnaux, & A, C, E, ſont moindres que B, D, E; par la 20. def. A ſera telle ou telles parties de B, que C de D, & E de F; & par la 5. ou 6. prop. de ce meſme livre A & C enſemble ſeront telle, ou telles parties de B & D enſemble, que A de B, ou E de F. Derechef, puis que A, C enſemble comme un ſeul, eſt telle partie, ou parties de B, D enſemble, comme un ſeul, que E de F, auſſi par les meſmes prop. A, C enſemble avec E, ſeront telle ou telles parties de B, D enſemble avec F, que A de B: parquoy par la ſuſdite 20. def. convertie tous les antecedans A, C, E enſemble, auront même raiſon à tous les conſequens B, D, F enſemble, que A à B: Si donc il y a tant de nombres qu'on voudra proportionnaux, comme l'un des antecedans, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

Euclide n'ayant démontré cette prop. qu'en quatre nombres, nous avons delaißé ſa demonſtration pour prendre celle cy, qu'on peut eſtendre à tant de nombres qu'on voudra: & combien qu'en cette démonſtration nous ayons poſé, comme il a fait, les nombres antecedans moindres que les conſequens, ſi eſt-ce toutesfois qu'étans plus grands la démonſtration n'en ſera differente, ſinon en ce qu'il faudra, comme au Scholie precedent, prendre iceux antecedans equemultiples des conſequens; & puis aprés iceux conſequens meſmes parties deſdits antecedans, &c.

THEOR. 11. PROP. XIII.

Si quatre nombres ſont proportionnaux: auſſi en permutant ils ſeront proportionnaux.

Soient quatre nombres proportionnaux A, B, C, D, sçavoir qu'il y ait telle raison de A à B, que de C à D; Je dis qu'en permutant, il y aura telle raison de A à C, que de B à D.

A	6
B	9
C	8
D	12

Car puis que comme A est à B, ainsi C à D, par la 20. def. A étant plus petit que B, & C que D; A sera telle ou telles parties de B, que C est de D; & partant en permutant par la 9. ou 10. prop. de ce livre A sera telle ou telles parties de C, que B est de D, & par la susdite 20. def. convertie, il y aura même raison de A à C que de B à D. Parquoy si quatre nombres sont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

A	...4
B	...3
C	8
D	6

Cette demonstration d'Euclide a seulement lieu, quand les nombres antecedans sont moindres que les consequens, & que A est moindre que C : mais s'ils sont plus grands, & que A soit plus grand que B, & moindre que C, la demonstration s'en fera ainsi. D'autant que comme A est à B ainsi C est à D, par la 20. def. B sera même partie, ou mesmes parties de A, que D de C : donc en permutant par la 9. ou 10. prop. 7. B sera même partie ou parties de D, que A de C : & par la susdite 20. def. A sera à C, comme B à D.

A	9
B	6
C	...3
D	..2

Que si A est plus grand que B, & que C, on argumentera ainsi. D'autant que comme A est à B ainsi C est à D, par la 20. def. D sera même partie ou parties de C que B de A : donc en permutant par la 9. ou 10. prop. 7. C sera telle partie, ou telles parties de A, que D de B; & partant par la même def. A sera à C, comme B à D.

Finalement si A est moindre que B, & plus grand que C, on dira ainsi: d'autant que comme A est à B, ainsi C est à D, par la 20. def. 7. C est même partie ou parties de D, que A de B : donc en changeant par la 9. ou 10. prop. 7. C sera même partie, ou parties de A, que D de B; & par la susdite 20. def. convertie, A sera à C, comme B à D.

A	4
B	8
C	2
D	4

THEOR. 12. PROP. XIV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra d'un côté, & autant d'un autre, qui soient prins de deux en deux, & en mesme raison; iceux en raison égale, seront aussi en mesme raison.

Soient tant de nombres qu'on voudra A, B, C, & autant d'autres D, E, F; & qu'il y ait telle raison de A à B, que de D à E, & de B à C, que de E à F. Je dis qu'en raison égale, il y aura telle raison de A à C, que de D à F.

A	9	D	6
B	6	E	4
C	3	F	2

Car puis que comme A est à B, ainsi D à E, en permutant par la preced. prop. comme A sera à D, ainsi B à E : semblablement aussi puis que comme B est à C, ainsi E à F, en permutant comme B sera à E, ainsi C à F. Donc comme A sera à D, ainsi C sera à F (car puis que A est à D, & C à F, en mesme raison que B à E, aussi A sera à D en la mesme raison que C à F, comme sera incontinent démontré) & partant en permutant, comme A sera à C, ainsi D sera à F : Ce qu'il falloit prouver.

LEMME.

Or que A estant à D, & C à F, en même raison que B à E, ils soient de même raison entr'eux, nous le demon-

trerons ainsi. D'autant que comme A est à D, ainsi B à E; E plus petit sera telle ou telles parties de B, que D de A : Derechef puis que comme B à E, ainsi C à F; F moindre sera telle, ou telles parties de C, que E de B : Parquoy F sera telle ou telles parties de C, que D de A : & partant par la 20. def. convertie, comme A sera à D, ainsi C sera à F. Donc les raisons des nombres qui sont de même à une, sont aussi de même entr'elles. Ce qui a esté demontré en toutes grandeurs au 5. livre prop. 11.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si l'unité mesure quelque nombre autant de fois qu'un tiers mesure un quart; aussi en permutant le second mesurera le quart autant de fois que l'unité mesure le tiers.

Soit l'unité A, qui mesure BC autant de fois que D mesure EF : Je dis qu'en permutant BC mesurera EF autant de fois que A mesure D.

Car ayant divisé BC selon les unitez BG, GH, HC, il y aura en EF autant de parties égales à D, lesquelles soient EI, IK, KF; & partant BG sera mesme partie de EI, que GH de IK, & HC de KF :

A .1
B .1 G .1 H .1 C
D. .2
E . . 2 I . . 2 K . . 2 F

donc par la 20. def. BG est à EI, comme GH à IK, & HC à KF : & partant par la 12. prop. tous les antecedans BC seront à tous les consequents EF, comme BG à EI, ou leurs égaux A à D : & par la susdite 20. def. convertie BC sera mesme partie de EF que A de D; & par consequent BC mesure EF autant de fois que A mesure D. Parquoy si l'unité mesure quelque nombre, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre, leurs produits seront égaux entr'eux.

Soient deux nombres A & B; & que A multipliant B produise C; & B multipliant A produise D : Je dis qu'iceux deux produits C & D sont égaux entr'eux.

Car puis que A multipliant B produit C; B sera autant de fois en C, que l'unité en A par la 15. def. & partant mesurera C autant de fois que l'unité mesure A, & par la 15. prop. en permutant A mesurera C autant de fois que l'unité mesurera B. Item B multipliant A & produisant D; A sera autant de fois en D, qu'il y a d'unitez en B par la même 15. def. & par consequent mesurera D autant de fois que l'unité mesure B : mais nous avons prouvé que A mesureroit aussi C autant de fois que l'unité mesure B : donc A mesure C & D également, & partant par la 1. com. sent. C & D seront égaux entr'eux: Parquoy si deux nombres se multiplient l'un l'autre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

Vnité.	
A . . . 3	B 4
C 12	
D 12	

SCHOLIE.

On demontrera cette prop. en nombres rompus ainsi. D'autant que A multipliant B produit C; par la def. de la multiplication C sera à B comme A à l'unité : & en permutant C sera à A comme B à l'unité. Mais par la même def. comme B est à l'unité, ainsi aussi D est à A, pource que B multipliant A a produit D. Donc comme C sera à A ainsi D sera au même A, par le Lemme de la 14. prop. &c. partant C & D sont égaux entr'eux.

Vnité.	
A $\frac{2}{3}$	B $4\frac{5}{7}$
D $3\frac{1}{7}$	C $3\frac{1}{7}$

THEOR. 15. PROP. XVII.

Si un nombre en multiplie deux autres, les produits seront entr'eux en même raison que les multipliez.

Soit le nombre A, lequel multipliant les nombres B & C fasse D & E : Je dis que les deux produits D & E sont entr'eux, comme B à C.

Car par la 15. def. B multiplié par A est autant de fois contenu en son produit D, que l'unité en A ; & C dans son produit E, comme la mesme unité en A : & partant B mesurera autant de fois D, que C mesure E. Donc B sera telle partie de D, que C de E : & par la 20. def. B sera à D, comme C à E ; & en permutant par la 13. prop. 7. comme B sera à C, ainsi D sera à E : Si donc un nombre en multiplie deux autres, &c. Ce qu'il falloit prouver.

Vnité.
A . . 2
B . . . 3 C 4
D 6
E 8

SCHOLIE.

Cette prop. a aussi lieu en nombres rompus, & se demontre ainsi. D'autant que A multipliant B & C, produit D & E ; par la def. de la multiplication il y aura telle raison tant de D à B, que de E á C, comme de A á l'unité, & partant par le Lemme de la 14. prop. 7. comme D sera á B, ainsi E á C : donc en permutant comme D sera á E, ainsi B á C.

A $\frac{1}{2}$
B $\frac{3}{4}$ C $7\frac{1}{5}$
D $\frac{3}{8}$ E $3\frac{3}{5}$

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si deux nombres en multiplient un autre, les produits seront entr'eux, en mesme raison que les multiplians.

Soient deux nombres A & B, qui multiplians C produisent D & E. Je dis que comme A est à B, ainsi D est à E.

A...3	B....4
C..2	
D......6	E.........8

Car puis que A multipliant C produit D, aussi C multipliant A produit le mesme D par la 16. prop. Semblablement, puis que B multipliant C produit E, aussi C multipliant B produira le mesme E : vû donc qu'un mesme nombre C multipliant A & B, produit D & E, comme A est à B, ainsi D est à E par la prop. prec. Parquoy si deux nombres en multiplient un autre, &c. Ce qui estoit à prouver.

SCHOLIE.

Vû que la demonstration tant de cette prop. que des deux suivantes, est la même en nombres rompus, qu'en nombres entiers, nous ne nous y arrêterons davantage; mais dirons icy que Clavius a accommodé (aprés Campanus) tant cette prop. que la precedente á tant de nombres qu'on voudra; en cette sorte.

Si un nombre multiplie tant de nombres qu'on voudra, ou quelconques nombres en multiplient quelque autre; les produits seront entr'eux en mesmes raisons que les multipliez, ou multiplians.

Car le nombre A multipliant les nombres B, C, D, ou étant multiplié par iceux, soient produits les nombres E, F, G. Je dis que E, F, G, sont entr'eux comme les nombres multipliez ou multipliant B, C, D; c'est-à-dire que comme B

A...3		
B..2	C...3	D....4
E......6	F.........9	G............12

est á C, ainsi E á F; & comme C á D, ainsi F á G. Car puis que E, F sont produits de A multipliant B, C; ou de B, C, multipliez par A, comme B sera á C, ainsi E sera á F par la 17. ou 18. prop. Semblablement pource que F, G, sont produits de A en C, D, ou de C, D par A, aussi comme C sera á D, ainsi F sera á G, & ainsi des autres. Appert donc ce qui étoit proposé.

THEOR.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si quatre nombres ſont proportionnaux, le produit du premier multiplié par le quart, ſera égal au produit du ſecond par le tiers: Et ſi le produit du premier multiplié par le quart, eſt égal au produit du ſecond par le tiers, iceux quatre nombres ſont proportionnaux.

Soient quatre nombres proportionnaux A, B, C, D, ſçavoir que comme A eſt à B, ainſi C eſt à D; & que le premier A multiplié par le dernier D produiſe E, & le ſecond B par le tiers C produiſe F. Je dis que E & F ſont égaux.

A......6	B...4
C...3	D..2
E............12	
F............12	
G.................18	

Qu'ainſi ne ſoit: Soit multiplié A par C, & le produit ſoit G: d'autant que A multiplié par C & D, produit G & E, il y aura telle raiſon de G à E, que de C à D, par la prop. prec. Pareillement d'autant que C multipliant A & B, produit G & F, il y aura telle raiſon de G à F, que de A à B, par la 17. prop. ou de C à D, qui ſont en meſme raiſon que A & B. Parquoy G eſtant à E, & G à F en meſme raiſon que C à D, par le Lemme de la 14. prop. comme G ſera à E, ainſi G ſera à F; parquoy G aura même raiſon à E qu'à F; & partant E & F ſeront nombres égaux, ainſi que nous avons dit ſur la 20. def.

Pour la ſeconde partie, ſoit E produit de A multiplié par D, égal à F, produit de B multiplié par C: Je dis que A eſt à B comme C eſt à D.

Car ſi G eſt produit de A multiplié par C, E & F nombres égaux auront même raiſon à G, comme nous avons dit en la ſuitte de la 20. def. Mais il y a telle raiſon de G à E, comme de C à D, par la preced. prop. & telle raiſon de G à F, comme de A à B par la 17. prop. & partant par le Lemme de la 14. prop. A ſera à B, comme

C à D : si donc quatre nombres sont proportionnaux, le produit du prémier & quart,&c. Ce qu'il falloit prouver.

CHOLIE.

Clavius adjoûte icy cet autre Theoreme, la demonstration duquel a lieu tant en nombres entiers qu'en fractions.

Si de quatre nombres, le premier a plus grande raison au second, que le troisiéme au quatriéme; le produit du premier multiplié par le quatriéme sera plus grand que le produit du second multiplié par le troisiéme; & si le nombre produit du premier & quatriéme est plus grand, que celuy du second & troisiéme, il y aura plus grande raison du premier au second que du troisiéme au quatriéme.

Soient quatre nombres A, B, C, D, & qu'il y ait premierement plus grande raison du premier A au second B, que du troisiéme C au quatriesme D : Je dis que le nombre procreé de A en D est plus grand que celuy fait de B en C. Car si on pose que E soit à B, comme C à D, il y aura aussi plus grande raison

A.......7	E......6
B....4	
C..........9	
D......6	

de A à B, que de E à B; & partant A sera plus grand que E, comme nous avons annotté sur la 20. def. 7. Parquoy il se fera un plus grand nombre de A en D, que de E par le même D. Mais par la 19. prop. 7. le produit de E en D est esgal à celuy de B en C : donc aussi le nombre procreé de A en D sera plus grand que celuy fait de B en C. Ce qu'il falloit prouver.

Maintenant que le nombre procreé de A en D, soit plus grand, que celuy fait de B en C : Je dis qu'il y a plus grande raison de A à B, que de C à D. Car si on entend que le

A.....5	E......6
B....4	
C...3	
D..2	

nombre E en D fasse le même nombre, que de B en C;

le produit de A en D sera aussi plus grand que celuy de E par le même D : & partant A sera plus grand que E. Parquoy il y aura plus grande raison de A à B, que de E au même B. Mais par la 19. prop. 7. comme E est à B, ainsi C est à D: donc aussi la raison de A à B sera plus grande que de C à D. Ce qu'il falloit prouver.

Que s'il y avoit moindre raison du premier nombre au second, que du troisiesme au quatriesme, le nombre fait du premier multiplié par le quatriesme seroit moindre, que celuy fait du second par le troisiesme : Et si le nombre procreé du premier multiplié par le quatriesme estoit moindre, que celuy fait du second par le troisiesme, il y auroit moindre raison du premier nombre au second, que du troisiesme au quatriesme. La demonstration n'est differente à la precedente, sinon en ce qu'il faut changer plus grand *en* moindre.

A ce Theoreme nous en adjoûterons un autre fort util, qui est tel.

Si trois ou davantage de nombres se multiplient entr'eux, le produit sera toûjours le même, en quelque façon & ordre qu'on les multiplie.

Soient trois nombres A, B, C, & le produit de A multiplié par B soit D, lequel multiplié par C produise E : Mais changeant d'ordre le produit de B par C soit F, & iceluy multiplié par A produise G : changeant derechef d'ordre, le produit de A en C soit H, qui multiplié par B fasse I. Je dis que les trois produits E, G, I, sont un même nombre. Car puis que B multipliant A & C produit D, F, par la 17. prop. 7. comme A est à C, ainsi D à F, & par la 19. prop. 7. le produit de A en F, qui est G, sera esgal au produit de C en D, qui est E. Item puisque C multipliant A & B, produit H & F, comme A est à B, ainsi H à F; & partant le produit de A en F, qui est G, sera esgal au produit de B en H, qui est I. Par ainsi les deux nombres E & I estans esgaux au nombre G, tous les trois E, G, I, sont esgaux entr'eux, c'est-à-dire un même nombre : Ce qu'il falloit prouver.

A 3.	B 4.	C 5.
D 12.	F 20.	H 15.
E 60.	G 60.	I 60.

Maintenant soient quatre nombres A, B, C, D, & multipliant A par B, & le produit par C, soit fait E, qui multiplié par D produise F : Mais changeant d'ordre, & multipliant D par C, & le produit par B, soit fait G, qui multiplié par A, fasse H : Je dis que F & H sont un même nombre, & qu'en quelque autre façon qu'on multiplie entr'eux les quatre nombres proposez A, B, C, D, sera toûjours produit le même nombre. Car puis que multipliant d'un côté les trois nombres A, B, C entr'eux, & d'un autre côté les trois D, C, B

A 2.	B 3.	C 4.	D 5.
E 24.	I 12.	G 60.	
F 120.		H 120.	

aussi entr'eux sont produits les deux E & G, soient multipliez B & C entr'eux, & le produit soit I. Or par ce qui a esté demontré cy-dessus de trois nombres, le nombre E qui se fait multipliant A par B, & le produit par C, se fera aussi multipliant B par C, & le produit (sçavoir I) par A. Par même discours, on prouvera que G seroit produit multipliant D par I. Vû donc que I multipliant A & D, produit E & G, comme A est à D, ainsi E est à G; par la 17. prop. 7. & partant le produit des extrémes A & G sera le méme que des moyens D & E par la 19. prop. 7. donc F & H sont un méme nombre. Et par semblable discours on prouvera toûjours le méme : Car de quatre nombres en multipliant trois entr'eux d'un côté, & trois d'un autre, il se rencontrera que de trois pris d'un côté, & d'autre, il y en aura toûjours deux qui seront communs de part & d'autre, & par ainsi la mesme demonstration aura toûjours lieu.

Que si l'on propose cinq nombres, on en prendra quatre d'un côté, & quatre d'un autre, & s'en trouvera toûjours trois qui seront communs d'un côté & d'autre : tellement que s'aydant de ce qui a esté demontré en trois, & en quatre nombres, on accomplira la demonstration en la mesme sorte. Et si on propose six nombres, l'on se servira de ce qui aura esté demontré en cinq, & ainsi toûjours en augmentant de nombre en nombre, si on en propose davantage. Ce que le docte Bachet a aussi demontré en ses Problemes plaisans; & est veritable en toutes sortes de nombres, soient entiers ou fractions.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si trois nombres sont proportionnaux, le produit des extrémes est égal au produit du milieu : & si le produit des extrémes est égal à celuy du milieu, iceux trois nombres seront proportionnaux.

Soient trois nombres proportionnaux A, B, C, sçavoir que comme A est à B, ainsi B à C : Je dis que le produit de A, 1. multiplié par C, 3ᵉ, est égal au produit du moyen B multiplié par soy-mesme.

A	9
B	6
D	6
C	4

Car étant pris D égal à B, comme A sera à B, ainsi D sera à C; & par la prec. prop. le produit de A par C, sera égal au produit de B par D, c'est-à-dire de B par soy-même.

Pour la seconde partie ; soit le produit de A, 1. multiplié par C, 3ᵉ, égal au produit de B moyen multiplié par soy-même : Je dis que les nombres A, B, C, sont proportionnaux.

Car derechef étant pris D égal à B, comme A sera à B, ainsi D sera à C; & par la prop. prec. le produit de A par C sera égal au produit de B par D, c'est à dire de B par soy-même, puis que D luy est égal : partant les trois nombres A, B, C, sont proportionnaux. Si donc trois nombres sont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Que s'il y a plus grande raison du premier nombre au second, que du second au troisiéme ; le nombre procreé du premier multiplié par le troisiéme sera plus grand, que celuy fait du second multiplié par soy-même : & si le nombre fait du premier multiplié par le troisiéme est plus grand que du second en soy-méme, il y aura plus grande raison du premier au second, que du second au troisiéme. Item s'il y a moindre raison du premier au second, que du second au troisiéme, le produit du premier *par le troiſiéme ſera moindre que le produit du ſecond par ſoy-même : & ſi un moindre nombre eſt fait du premier multiplié*

A........8	A....4
B......6	B.......6
D......6	D......6
C.....5	C.......7

par le troiſiéme, que du ſecond en ſoy ; il y aura moindre raiſon du premier nombre au deuxiéme, que du deuxiéme au troiſiéme : Ce qui ſera evident par ce qui eſt démontré au Scholie precedent, ayant poſé le nombre D égal au ſecond nombre B, afin qu'il y ait quatre nombres : Car alors il y aura plus grande raiſon du premier au deuxiéme, que du troiſiéme au quatriéme, ou moindre, &c. Comme il appert aux exemples cy apposés, ſoit que les nombres ſoient entiers ou rompus.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont la même raiſon avec iceux, meſurent également les nombres qui ont la même raiſon, ſçavoir le plus grand, le plus grand ; & le plus petit.

Soient deux nombres A & B, les plus petits en leur raiſon, & deux autres nombres plus grands C & D en même raiſon qu'iceux A & B, c'eſt à dire que comme A eſt à B, ainſi C à D: Je dis que A & B meſurent également C & D, c'eſt à dire que A meſure C autant de fois que B meſure D.

A...3	B....4
C......6	D........8

Car puis que iceux A, B, C, D, ſont proportionnaux, en permutant par la 13. prop. A ſera à C comme B à D : & puis que A & B ſont plus petits que C & D, par la 20. def. ils ſeront même partie ou parties d'iceux C & D. Or ils ne peuvent être parties ; car il eſt évident qu'ils ne ſeroient les plus petits nombres de leur raison, contre l'hypothese. Donc A est même partie de C, que B de D : & partant A mesure C, autant de fois que B mesure D : Parquoy les plus petits nombres de tous ceux qui ont une même raison, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois nombres d'un côté, & autant d'un autre, lesquels pris de deux en deux soient en même raison, la proportion étant troublée, en raison égale, ils seront proportionnaux.

Soient trois nombres d'un côté A, B, C, & trois d'un autre D, E, F, lesquels pris de deux en deux soient en même raison, & leur proportion troublée, sçavoir que A soit à B, comme E à F, & B à C, comme D à E : Je dis qu'en raison égale A sera à C, comme D à F.

A....4	D.............12
B...3	E.........8
C..2	F......6

Car puis que A est à B, comme E à F, le produit de A multiplié par F, sera égal au produit de B multiplié par E, par la 19. prop. Item, puis que B est à C, comme D à E, le même produit de B multiplié par E, sera égal au produit de C multiplié par D, par la même prop. & partant le produit de A par F, sera égal au produit de C par D, & par la susdite 19. prop. il y aura même raison de A à C que de D à F : Parquoy s'il y a trois nombres d'un côté, & autant d'un autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

Il est evident que cette démonstration convient aussi aux nombres rompus. Et d'autant que de six moyens d'argumenter és proportions, lesquels Euclide a expliqué en grandeur, & démontré au 5. livre, il en démontre en celuy-cy seulement deux en nombres ; il ne sera hors de propos de démontrer aussi en *nombres les quatre autres moyens, comme ont fait plusieurs Interpretes.*

1. Si quatre nombres sont proportionnaux ; par raison inverse, ou en changeant, ils seront aussi proportionnaux.

Soit A à B comme C à D. Je dis qu'en changeant comme B à A, ainsi D à C. Car puis que comme A à B, ainsi C à D, en permutant par la 13. prop. comme A sera à C, ainsi B à D. Derechef puis que B est à D comme A á C, par la mesme prop. B *sera à A comme D à C. Ce qui étoit proposé.*

A......6	C...3
B...4	D..2

2. Si les nombres composez sont proportionnaux, iceux divisez seront aussi proportionnaux.

*Soit A*B *à C*B *comme DE à EF. Je dis qu'aussi en divisant, comme AC à C*B*, ainsi DF à FE. Car puis que comme A*B *à C*B*, ainsi DE à FE : en permutant par la 13. prop. comme le tout A*B *au tout DE, ainsi le retranché C*B *au retranché FE : & partant par la 11. pr. comme le tout A*B *est au tout DE, ainsi le reste AC sera au reste DF : c'est à dire AC à DF comme C*B *à FE : donc en permutant comme AC sera à C*B*, ainsi DF sera à FE. Ce qui étoit proposé.*

A......6	C...3	B
D...4	F..2	E

*Par la même maniere nous démontrerons comme au livre 5. la division converse, & contraire de raison. Car soit premierement comme A*B *à C*B*, ainsi DE à FE ; Je dis que, par division converse de raison, comme C*B *à AC, ainsi FE à DF. Car puis que comme A*B *à C*B*, ainsi DE à FE ; en divisant ; comme AC sera à C*B*, ainsi DF à FE : & en changeant, comme C*B *sera à AC, ainsi FE sera à DF.*

*Soit maintenant comme AC à A*B*, ainsi DF à DE. Je dis par division contraire de raison, que comme AC est à C*B*, ainsi DF à FE. Car puis que comme AC à A*B*, ainsi DF à DE : en changeant comme A*B *sera à AC, ainsi DE à DF. Donc en divisant comme C*B *à AC, ainsi FE à DF : & en changeant, comme AC sera à C*B*, ainsi DF à FE. Ce qui étoit proposé.*

3. Si les nombres divisez sont proportionnaux, iceux composez seront aussi proportionnaux.

Soit AB à BC, comme DE à EF. Je dis qu'en composant comme AC est à BC, ainsi DF, à EF. Car puis que comme AB à BC, ainsi DE à EF, en permutant par la 13. prop. comme AB à DE, ainsi BC à EF, & partant par la 12. prop. comme AB, BC ensemble, à DE, EF ensemble, c'est-à-dire le tout AC au tout DF, comme BC à EF : & en permutant par la 13. prop. comme AC à BC, ainsi DF à EF. Ce qui estoit proposé.

A......6B...3C
D....4E..2F

Semblablement nous demontrerons icy comme au 5. livre la composition converse & contraire de raison. Car soit premierement comme AB à BC, ainsi DE à EF. Je dis par composition converse de raison, que comme AC est à AB, ainsi DF à DE. Car vû que AB est à BC, comme DE à EF: en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF à DE : & en composant comme AC sera à AB, ainsi DF sera à DE.

Maintenant soit derechef AB à BC, comme DE à EF. Je dis que par composition contraire de raison, comme AB est à AC, ainsi DE à DF : car puis que comme AB à BC, ainsi DE á EF : en changeant comme BC sera á AB, ainsi EF á DE. Donc en composant, comme AC á AB, ainsi DF á DE : & en changeant comme AB sera á AC, ainsi DE á DF.

4. Si les nombres composez sont proportionnaux, ils le seront aussi par conversion de raison.

Soit comme AB à CB, ainsi DE à FE. Je dis que par conversion de raison, comme AB est à AC, ainsi DE à DF. Car puis que comme AB à CB, ainsi DE à FE : en permutant par la 13. prop. comme le tout AB sera au tout DE, ainsi le retranché CB sera au retranché FE : & partant par la 11. prop. comme le tout AB au tout DE, ainsi le reste AC au reste DF. Donc en permutant comme AB sera à AC, ainsi DE à DF. Ce qui estoit proposé.

A......6C...3B
D....4F..2E

A ces quatre theoremes nous adjoûterons les quatre suivans.

5. S'il y a tant de nombres qu'on voudra d'un côté, & autant d'un autre, lesquels pris de deux en deux soient en même raison ; comme tous les nombres du premier ordre ensemble seront à l'un d'iceux, ainsi tous les nombres de l'autre ordre ensemble seront au correspondant à iceluy pris du premier ordre.

Soient quatre nombres A, B, C, D d'un côté, & quatre d'un autre E, F, G, H, & que A soit à B, comme E à F; & B à C comme F à G; & C à D comme G à H : Je dis que comme tous les nombres A, B, C, D, ensemble, seront au dernier D, ainsi tous les nombres E, F, G, H, ensemble seront au dernier H. Car d'autant que comme A est à B, ainsi E est à F ; en composant comme A, B, ensemble seront

A...3	B....4	C..2	D.....5
E......6	F..........8	G....4	H..........10

à B, ainsi E, F ensemble seront à F. Mais comme B est à C, ainsi F à G : donc en raison esgale, comme A B, ensemble sont à C. Ainsi E, F ensemble sont à G; parquoy, en composant comme A, B, C ensemble seront à C, ainsi E, F, G, ensemble seront à G. Mais comme C à D, ainsi G à H : donc en raison esgale comme A, B, C ensemble seront à D, ainsi E, F, G ensemble seront à H : Et en composant comme A, B, C, D ensemble sont à D, ainsi E, F, G, H ensemble seront à H. Ce qu'il falloit prouver.

D'où est manifeste que comme l'un des nombres du premier ordre est à son correspondant de l'autre ordre, ainsi tous les nombres du premier ordre ensemble seront à tous ceux du second ordre ensemble. Car puisque comme A, B, C, D ensemble sont à D, ainsi E, F, G, H ensemble sont à H; en permutant A, B, C, D ensemble sont á E, F, G, H ensemble, comme D á H.

6. Si le premier a même raison au second, que le troisiéme au quatriéme, & que le cinquiéme ait aussi mê-

me raiſon au ſecond, que le ſixiéme au quatriéme : le composé du premier & cinquiéme aura même raiſon au ſecond, que le composé du troiſiéme & ſixiéme au quatriéme.

Soit AB premier á C deuxieſme, comme DE troiſieſme á F *quatrieſme. Item ſoit BG cinquieſme á C deuxieſme, comme* EH *ſixieſme á* F *quatrieſme. Je dis que AG, composé du premier & du cinquieſme eſt á* C *deuxieſme, comme DE composé du troiſieſme & ſixieſme eſt á* F *quatrieſme. Car*

A......6B..26	D..........9E...3H
C....4	F.....6

puis que comme BG *eſt á* C, *ainſi* EH *á* F, *en changeant comme* C *ſera á* BG, *ainſi* F *á* EH. *Vû donc que comme AB à C, ainſi DE* à F, *& comme* C à BG, *ainſi* F à EH ; *en raiſon eſgale, comme AB eſt à* BG, *ainſi DE eſt* à *EH : & en composant, comme AG* à BG, *ainſi* DH à *EH ; partant puis que derechef comme AG* à BG, *ainſi* DH à EH, *& comme* BG a C, *ainſi EH* à F ; *en raiſon eſgale, comme AG ſera* à C, *ainſi* DH à F. *Ce qui eſt proposé.*

7. Si le premier a même raiſon au ſecond, que le troiſiéme au quatriéme ; & que le premier ait auſſi la même au cinquiéme, que le troiſiéme au ſixiéme ; auſſi le premier aura même raiſon au composé du ſecond & cinquiéme, que le troiſiéme au composé du quatriéme & ſixiéme.

Soit le tout AB à *C, comme le tout* DE à F : *Item le retranché AG ſoit* à *C, comme le retranché* DH à F : *Je dis que le reſte GB eſt* à *C, comme le reſte HE* à F. *Car puis*

A......6G..2B	D..........9H..E
C....4	F.....6

que comme AG à *C ainſi* DH à F, *en changeant comme* C *ſera* à *AG ainſi* F à DH. *Vû donc que comme* AB à C, *ainſi*

DE à F, & comme C à AG, ainsi F à DH; en raison esgale, comme AB à AG, ainsi DE à DH. Parquoy en divisant comme GB à AG, ainsi HE à DH. Mais puis que derechef, comme GB à AG, ainsi HE à DH, & comme AG à C, ainsi DH à F; en raison esgale, comme GB sera à C, ainsi HE sera á F. Ce qui est proposé.

8. Si deux nombres, & des retranchés d'iceux, ont une même raison à deux nombres : aussi les restes auront même raison aux mesmes nombres.

Soit A premier à BC deuxiesme, comme D troisiesme à EF quatriesme : & comme A premier CG cinquiesme, ainsi D troisiesme à FH sixiesme. Je dis que comme A premier est à BG, composé du deuxiesme & cinquiesme, ainsi D troisiesme à EH composé du quatriesme & sixiesme. Car puis que comme A est à BC, ainsi D à EF, en changeant comme BC sera à A, ainsi EF à D. D'autant donc que comme

A . . . . . . 6 D 9
B . . . . 4 C . . 2 G E . . . . . . 6 F . . . . 4 H

BC à A, ainsi EF à D, & comme A à CG, ainsi D à FH; en raison esgale, comme BC à CG, ainsi EF à FH : & en composant comme BG à CG, ainsi EH à FH, & en changeant comme CG à BG, ainsi FH à EH. Vû donc que comme A à CG, ainsi D à FH, & comme CG à BG, ainsi FH à EH; en raison esgale, comme A sera à BG, ainsi D à EH. Ce qui est proposé.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Les nombres premiers entr'eux, sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison avec iceux.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B. Je dis qu'ils sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison qu'eux.

Car s'il n'est ainsi, soient, s'il est possible, C & D plus petits en la mesme raison ; & par la 21. prop. ils mesureront A & B, l'un comme l'autre : qu'ils les mesurent donc par le nombre E. Donc E sera commune mesure des nombres A & B, ainsi ils ne seroient pas premiers entr'eux, mais composez, contre l'hypothese. A & B sont donc les plus petits de tous ceux qui sont en mesme raison qu'eux. Parquoy les nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

A......6 B.....5
C---- D-- E-

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont une mesme raison, sont premiers entr'eux.

Soient les nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison : Je dis qu'ils sont premiers entr'eux.

Autrement, s'ils ne sont premiers, que C les mesure tous deux, s'il est possible, sçavoir A autant de fois qu'il y a d'unitez en D, & B autant de fois qu'il y a d'unitez en E. Vû donc que C mesure A par les unitez qui sont en D, & B par les unitez qui sont en E ; C multipliant D & E, produira A & B par la 9. com. sent. Parquoy par la 17. prop. il y aura mesme raison de A à B que de D à E : & partant puis que D & E sont parties d'iceux A & B, ils sont moindres : ainsi A & B ne seront pas les plus petits nombres de tous ceux qui ont la mesme raison, ce qui est contre nostre hypothese : A & B sont donc nombres premiers entr'eux. Parquoy les plus petits nombres de tous ceux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

A......6 D--
C-
B......5 E--

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, celuy qui en mesurera l'un sera premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, l'un ou l'autre desquels sçavoir A, soit mesuré par le nombre C. Je dis que C est premier à l'autre B.

A . . . . . . 6 B 5
C . . . 3 D –

Autrement, si B & C ne sont premiers entr'eux, que D les mesure tous deux, s'il est possible. Vû donc que D mesure C, & C mesure A; par la 11. com. sent. D mesurera aussi A: mais il mesure pareillement B. Donc A & B ne sont premiers entr'eux, contre l'hypothese. C est donc premier à B. Si quelque nombre mesure B, on prouvera en la mesme maniere qu'il sera premier à l'autre A. Parquoy si deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si deux nombres sont premiers à quelque autre; le produit des deux sera aussi premier à cet autre.

Soient deux nombres A & B, tous deux premiers à C; & que A multiplié par B produise D. Je dis que D est aussi premier à C.

A . . 2 B . . . 3 C 5
D . . . . . . 6 E . . 2 F . . . 3

Autrement, si D & C ne sont premiers entr'eux qu'ils soient composez, & que E les mesure tous deux, sçavoir D par le nombre F. Donc E multipliant F, produit D par la 9. com. sent. comme fait aussi A par B: Parquoy A, E, F, B, seront proportionnaux par la 19. prop. Et d'autant que A & C sont premiers entr'eux, E mesurant C sera premier à A par la prop. precedente; & par la 23. prop. A & E estans premiers, ils seront les plus petits de leur raison; & partant ils mesureront également F & B, qui sont en la mesme raison, sçavoir A mesurera F, & E mesurera B par la 21. pr. Mais il mesure aussi c: donc B & C ne seroient pas premiers, contre l'hypothese. Parquoy D sera premier à C. Si donc deux nombres sont premiers à quelque autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, le produit de l'un d'iceux multiplié par ſoy, eſt premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers A & B, & que l'un ou l'autre d'iceux, ſçavoir A, multiplié par ſoy produiſe C. Je dis que B & C ſont premiers entr'eux.

A . . . 3		B 4	
C 9		D . . . 3	

Car ſi on prend D, égal à A, B ſera auſſi premier à D. Ainſi A & D eſtans premiers à B par la 26. p. 7. A multiplié par D, c'eſt à dire par ſoy-même, produira C premier au meſme B. Si donc deux nombres ſont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si deux nombres ſont premiers à deux autres; (l'un & l'autre à l'un & à l'autre) leurs produits ſeront auſſi premiers entr'eux.

Soient deux nombres A & B premiers à deux autres C & D, & que E ſoit le produit de A multiplié par B, & F produit de C multiplié par D: Je dis que E, & F ſont premiers entr'eux.

A . . 2	B 4
C . . . 3	D 5
E 8	F 15

Car A & B eſtans premiers à C, leur produit E ſera auſſi premier au meſme C par la 26. pr. Par le meſme diſcours E ſera auſſi premier à D; ainſi C & D eſtans premiers à E, leur produit F ſera auſſi premier à E par la même 26. prop. Si donc deux nombres ſont premiers à deux autres, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 27. PROP. XXIX.

Si deux nombres premiers entr'eux ſont multipliez chacun par ſoy, leurs produits ſeront premiers entr'eux : Et ſi iceux produits ſont encore multipliez par les nombres propoſez au commencement, leurs produits ſeront encores premiers entr'eux : & cecy aviendra toûjours environ les extrémes.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, & que A multiplié par ſoy-meſme produiſe C, mais B multiplié auſſi par ſoy produiſe D. Je dis que C & D, ſeront premiers entr'eux. Item ſi A multipliant C produit E, & B multipliant D produit F. Je dis que E & F. ſeront auſſi premiers entr'eux.

A . . 2	B . . . 3
C 4	D 9
E 8	F 27
G 16	H 81.

Car par la 27. pr. A & B eſtans premiers, C produit de A multiplié par ſoy, ſera premier au reſtant B: par meſme raiſon B & C eſtans premiers entr'eux, D ſera auſſi premier à C. Derechef, puis que A & B ſont premiers, par la meſme 27. prop. C ſera auſſi premier à B, & D à A : Mais il a été demontré que C eſt auſſi premier à D: parquoy l'un & l'autre nombre A, C, ſera premier à l'un & à l'autre nombre B, D; & partant par la 28. prop. E produit de A en C, ſera premier à F, produit de B par D.

Que ſi encore A multipliant E produit G; & B multipliant F produit H: G & H ſeront auſſi premiers entr'eux. Car puis que A & C ſont premiers à B, leur produit E ſera auſſi premier à B par la 26. prop. Par meſme raiſon F ſera auſſi premier à A: Ainſi les deux nombres A, E, ſeront

premiers

premiers aux deux B, F, ſçavoir l'un & l'autre, à l'un & à l'autre; & partant par la 28. prop. G produit de A en E, ſera auſſi premier à H produit de B en F, & ainſi à l'infiny. Parquoy ſi deux nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 28. PROP. XXX.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, le compoſé d'iceux ſera premier à chacun d'eux: & ſi le compoſé de deux nombres eſt premier à quelqu'un d'iceux, ils ſeront premiers entr'eux.

Soient deux nombres premiers entr'eux A B & B C: Je dis que le compoſé des deux A C, ſera premier à chacun d'iceux A B, B C,

A . . . 3 B . . . . 4 C
D —

Car ſi AC, AB ne ſont premiers, ſoit D leur commune meſure, s'il eſt poſſible: ſi donc D meſure le tout AC, & la partie A B, il meſurera auſſi le reſte BC, par la 12. com. ſent. Ainſi AB & BC ne ſeroient premiers entr'eux, contre l'hypotheſe. Parquoy AC ſera premier à AB: on demontrera par la meſme maniere que AC eſt auſſi premier à BC.

Secondement, ſi le tout AC eſt premier à AB ou à BC. Je dis qu'iceux AB & BC ſeront premiers entr'eux. Autrement, que D les meſure s'ils ne ſont premiers; il meſurera auſſi le compoſé des deux AC, par la 10. com. ſent. Ainſi AC ne ſeroit premier à AB, & BC, ce qui eſt contre l'hypotheſe. AB & BC ſont donc premiers entr'eux. Si donc deux nombres ſont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

COROLLAIRE.

Il s'enſuit de cecy, que ſi un nombre compoſé de deux, eſt premier à l'un d'iceux, il ſera auſſi premier à l'autre. Car ſi AC eſt premier à AB: AB, BC ſeront premiers entr'eux par la ſeconde partie de cette prop. Donc auſſi AC ſera premiere à

EC par la premiere partie de la mesme prop. ce qui a esté proposé.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Tout nombre premier, est premier à tout autre nombre qu'il ne mesure pas.

Soit un nombre premier A, qui ne mesure le nombre B : Je dis que A & B sont premiers entr'eux.

A.....5 B.........8
C —

Car s'ils ne le sont, ils auront une commune mesure autre que l'unité; laquelle soit C, s'il est possible. Or C ne peut estre égal à A puis que nous avons posé que A ne mesure pas B ; & par ainsi A estant mesuré par quelque autre nombre, il ne seroit premier contre l'hypothese. Parquoy A & B sont premiers entr'eux. Donc tout nombre premier, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Si deux nombres se multiplient l'un l'autre, & que quelque nombre premier mesure leur produit, il mesurera aussi l'un d'iceux nombres posez au commencement.

Soient deux nombres A & B, de la multiplication desquels soit produit C, & que D nombre premier mesure iceluy C. Je dis qu'il mesurera aussi l'un ou l'autre d'iceux A & B, s'il ne les mesure tous deux.

A....4 B......6
C..........................24
D...3 E.........8

Autrement, s'il ne mesure l'un ny l'autre, qu'il mesure C par le nombre E : Si donc D ne mesure A, par la prop. prec. il ſera premier à iceluy, & par la 23. prop. ils ſeront les plus petits de leur raiſon. Mais d'autant que D multiplié par E fait C, auſſi bien que A multiplié par B, par la 19. prop. A ſera à D, comme E à B, & par la 21. prop. A & D meſureront également E & B, c'eſt-à-dire que A meſurera E, & D meſurera B. En la meſme maniere ſera demontré que ſi D ne meſure pas B, qu'il meſurera A. Si donc deux nombres ſe multiplient l'un l'autre, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Tout nombre compoſé eſt meſuré par quelque nombre premier.

Soit le nombre compoſé A. Je dis qu'il ſera meſuré par quelque nombre premier.

Car puis qu'il eſt compoſé, il ſera meſuré de quelque nombre par la 13. def. & ſoit de B, lequel ſera compoſé ou non : s'il eſt premier, la prop. eſt manifeſte : mais s'il eſt compoſé, il ſera meſuré par un autre nombre, & ſoit C, lequel ſera premier ou non : s'il eſt premier, puis qu'il meſure B; & B meſure A, auſſi C meſurera A par la 11. com. ſent. Mais ſi C eſt compoſé, il ſera meſuré par quelque nombre : Et pource qu'un nombre ne ſe diminuë infiniment, nous viendrons finalement à quelque nombre que nul autre ne meſurera; & partant à un nombre premier, lequel meſurant tous les precedents, meſurera auſſi le compoſé A. Parquoy tout nombre compoſé eſt meſuré par quelque nombre premier. Ce qu'il falloit prouver.

A........	8
B....	4
C..	2

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Tout nombre eſt premier, ou bien meſuré par quelque nombre premier.

Soit quèlconque nombre A : Je dis qu'iceluy est ou nombre premier, ou que quelque nombre premier le mesure.

A 5	
A 6	

Car s'il n'est nombre premier, il est nombre composé, & par la prec. prop. tout nombre composé, est mesuré par quelque nombre premier. Parquoy tout nombre est premier, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBL. 3. PROP. XXXV.

Tant de nombres qu'on voudra étans donnez, trouver les plus petits nombres de tous ceux qui auront même raison.

Soient donnez tant de nombres qu'on voudra A, B, C; & il faut trouver les plus petits en la même raison.

Lesdits nombres A, B, C sont ou nombres premiers, ou nombres composez : s'ils sont premiers entr'eux, ou à ce que l'on cherche par la 23. prop. mais s'ils sont composez, soit trouvé D plus grande commune mesure d'iceux A, B, C, par la 3. prop. laquelle mesure A selon E; B selon F; & C selon G. Je dis que E, F & G sont les plus petits nombres qui soient en la raison de A, B, & C.

Car il est évident qu'iceux E, F, G sont és mêmes raisons que A, B, C, d'autant que D mesurant iceux A, B, C, par les nombres E, F, G; D multipliant iceux E, F, G, seront produits A, B, C, par la 9. com. sent.

A 6	B 4	C 8	
	D . . 2		
E . . . 3	F . . 2	G 4	
H-	I-	K--	L-

& par ce que nous avons démontré à la 18. prop. E, F, G, auront la même proportion entr'eux que les multipliez A, B, C. Et qu'ils soient les plus petits, on le démontrera ainsi. S'ils ne sont tels, soient H, I, K, les plus petits nombres ayans même proportion qu'iceux A, B, C : ils les mesureront donc également par la 21. prop. & soit par le nombre L ; ce qu'étant , par la 9. com. sent. L multipliant H, I, K, seront produits les nombres A, B, C. Veu donc que D multipliant E, fait A ; & L multipliant H, fait le même A ; par la 19. prop. il y aura telle raison de D à L, que de H à E : mais H est moindre que E : donc D sera aussi moindre que L : & puis que H, I, K mesurent A, B, C par L ; L mesurera aussi iceux A, B, C par la 8. com. sent. & ainsi D ne sera pas la plus grande commune mesure d'iceux A, B, C : ce qui est contre l'hypothese. Il n'y a donc point d'autres nombres moindres que E, F, G, qui soient en même raison , que les proposez A, B, C. Parquoy étans donnez quelconques nombres , nous avons trouvé les plus petits , &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Il appert icy que la plus grande commune mesure de quelconques nombres , mesure iceux par les nombres qui sont les plus petits de tous ceux qui sont en la même raison qu'iceux proposez.

SCHOLIE.

Par ces choses appert le moyen de trouver les deux plus petits nombres qui ont la même raison, que tant de nombres qu'on voudra donner continuellement proportionnaux. Comme si on propose les nombres A, B, C, continuellement proportionnaux, nous trouverons les deux moindres en la même raison , si par ce prob. nous prenons E & F en la même raison des deux A & B, c'est à sçavoir ces nombres-là , par lesquels D plus grande commune mesure d'iceux A & B, mesure iceux. Car par le corol. cy dessus , E & F seront les plus petits de tous ceux qui sont en la même raison que A à B : c'est à dire en la raison des continuellement proportionnaux A, B, C.

Or il advient quelquesfois qu'un des nombres E, F, G, trouvez par cette 35. prop. est l'unité , c'est à sçavoir quand D, plus grande commune mesure des nombres proposez A, B, C, est égal à l'un d'iceux : & alors les nombres trouvez E, F, G sont les plus petits en la continuation de leur proportion , puis qu'il ne se peut donner un nombre moindre que l'unité.

PROBL. 4. PROP. XXXVI.

Trouver le plus petit nombre que peuvent mesurer deux nombres donnez.

Soient les nombres donnez A & B : il faut trouver le plus petit nombre mesuré par iceux.

Si le plus petit nombre des deux donnez mesure le plus grand, il est évident qu'iceluy plus grand sera le nombre que nous cherchons : que si l'un ne mesure l'autre, ou A & B seront premiers entr'eux, ou non ; si premiers, soit multiplié A par B, & le produit soit C. Je dis que C est le plus petit nombre mesuré par A, & par B. Car par la 7. com. sent. il est évident que C sera mesuré par l'un & par l'autre, & s'il n'est le moindre nombre mesuré par iceux A, B, en soit un autre plus petit D, s'il est possible, lequel A mesure selon le nombre E, & B selon le nombre F. Ce qu'étant, D sera produit tant de A multiplié par E, que de B par F, par la 9. com. sent. & partant par la 19. prop. A sera à B comme F à E. Item A & B, étans premiers, ils seront les plus petits de leur raison par la 23. prop. & A mesurera F par la 21. prop. & d'autant que B multipliant A produit C, & multipliant F produit D, il y aura telle raison de C à D, que de A à F, par la 17. prop. Mais nous avons montré que A mesuroit F : donc C mesurera aussi D, sçavoir le plus grand mesurera le plus petit, ce qui est impossible. C étoit donc le moindre nombre que A & B peuvent mesurer.

A . . . 3 B 4
C 12
D ------
E -- F-

Soient maintenant les deux nombres A & B composez, & par la prec. prop. soient trouvez C & D les plus petits nombres de la même raison, tellement que ces 4. nombres A, B, C, D, soient proportionnaux : Quoy posé par la

A . . . . 4 B 6
C . . 2 D . . . 3 E 12

19. prop. le produit de A multiplié par D, sera égal au produit de B multiplié par C : iceluy produit soit E. Donc E sera mesuré par B, & par A : & par le même discours de la precedente démonstration, on montrera qu'il est le plus petit nombre mesuré par A, & par B. Nous avons donc trouvé le plus petit nombre, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

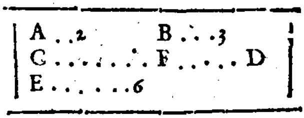
De cecy il s'ensuit, que si deux nombres multiplient les plus petits de leur raison, sçavoir le plus grand, le plus petit, & le plus petit le plus grand ; le produit sera le plus petit nombre qu'ils mesurent. Car C & D estans posez les plus petits en la raison de A à B, il a esté prouvé que E produit de A plus petit multiplié par D, plus grand ; & de B plus grand par C plus petit, est le plus petit nombre mesuré par A & B.

THEOR. 33. PROP. XXXVII.

Si deux nombres mesurent un autre nombre ; le plus petit qu'ils mesurent, mesurera aussi cet autre nombre.

Soient deux nombres A, & B, qui en mesurent un autre CD, & que le plus petit nombre qu'ils mesurent soit E. Je dis que E mesurera aussi CD.

Autrement, si E ne mesure CD ; aprés avoir ôté E de CD, tant de fois que l'on pourra, il restera un nombre moindre que E : qu'il laisse donc FD plus petit que E, s'il est possible : A & B mesurans E, ils mesureront aussi CF



par la 11. com. sent. Mais ils mesurent le tout CD par la 12. com. sent. ils mesureront donc aussi le reste FD plus petit que E, ce qui est impossible, étant le plus petit qu'ils mesurent. Parquoy E mesurera CD : Si donc deux nombres mesurent un autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

PROBL. 5. PROP. XXXVIII.

Trouver le plus petit nombre que peuvent meſurer trois nombres donnez.

Soient trois nombres donnez A, B, C; il faut trouver le plus petit nombre qu'ils peuvent meſurer.

Soit trouvé D plus petit nombre que peuvent meſurer A & B, par la 36. prop. Or C meſure auſſi D, ou il ne le meſurera pas : s'il le meſure; Je dis qu'il eſt auſſi le plus petit qu'iceux A, B, C, peuvent meſurer : car s'il ne l'eſt, en ſoit quelque autre plus petit E, s'il eſt poſſible, lequel tous les trois A, B, C meſurent. D'autant que A & B meſurent E moindre que D, iceluy D, ne ſera le moindre que A & B meſurent, ce qui eſt contre l'hypotheſe. D eſt donc le moindre nombre que peuvent meſurer les nombres propoſez A, B, C.

A . . 2 B . . . 3 C 6
D 6
E —

Que ſi D n'eſt auſſi meſuré par C : par la même 36. prop. ſoit trouvé E plus petit nombre meſuré par C & D; Je dis que E ſera le plus petit nombre meſuré par A, B, C.

Car premierement E eſt meſuré par A, B, C : d'autant que C & D le meſurent; & A & B meſurant D, par la 11. com. ſent. ils meſureront auſſi E meſuré par D. Que ſi on dit que E n'eſt le plus petit nombre meſuré par A, B, C, ſoit F plus petit, s'il eſt poſſible : donc A & B meſurant F; D le plus petit meſuré par eux, meſurera auſſi F par la prec. prop. Mais C meſure auſſi F; (car A, B & C le meſurent) donc C & D meſureront F. Et par la même prop. E plus petit meſuré par C & D, meſurera auſſi F; le plus grand un plus petit; ce qui eſt impoſſible. Donc E étoit le plus

A . . 2 B . . . 3 C 4
D 6
E 12
F - - - - - - -

petit nombre mesuré par A., B, C. Estant donc donnez trois nombres nous avons trouvé le plus petit qu'ils peuvent mesurer : Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, que si trois nombres en mesurent quelque autre ; le plus petit qu'ils mesureront, mesurera aussi cet autre. Car il a été démontré que A, B, C, mesurant F ; aussi E le plus petit nombre mesuré par A, B, C, mesure le même nombre F.

SCHOLIE.

Par même raison étans donnez plus de trois nombres, nous trouverons le plus petit nombre qu'ils mesurent. Car si 4. nombres sont donnez, il faudra trouver le moindre que trois mesurent : si 5, il faudra trouver le plus petit que 4 mesurent, &c. procedant au reste tout ainsi qu'il a été dit de trois nombres.

THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si un nombre mesure un autre nombre ; le mesuré aura une partie dénommée par le mesurant.

Soit le nombre A, lequel mesure le nombre B. Je dis qu'iceluy B contiendra une partie dénommée par A.

Qu'ainsi ne soit ; que A mesure B selon C, c'est-à-dire, autant de fois qu'il y a d'unitez en C ; par la 15. prop. C mesurera B autant de fois que l'unité mesure A ; & C sera telle partie de B que l'unité de A. Mais l'unité est une partie de A, dénommée par iceluy A, comme nous avons dit en la 2. def. de ce 7. livre : donc aussi C sera une partie de B dénommée par A. Si donc un nombre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

	Vnité.		
A ...3	B 6	C ..2	

THEOR. 35. PROP. XL.

Si un nombre a une partie quelle qu'elle soit, le nombre nommant cette partie le mesurera.

Soit le nombre A, ayant la partie B dénommée par le nombre C. Je dis que C mesure A.

Car puis que B est partie dénommée par C; & l'unité est une partie de C, dénommée par le même C; comme l'unité mesure C, ainsi B mesure A: & par la 15. prop. en permutant comme l'unité mesurera B, ainsi C mesurera A. Parquoy si un nombre a quelconque partie, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A 12
B . . . 3 C 4

PROBL. 6. PROP. XLI.

Trouver le plus petit nombre, qui ait les parties données.

Soient les parties données A, B, C; il faut trouver le plus petit nombre qui ait icelles parties.

Soient pris les trois nombres D, E, F, dénommez par icelles parties A, B, C; & par la 38. prop. soit trouvé G, le plus petit nombre que peuvent mesurer D, E, F: Je dis qu'iceluy nombre G contient les parties A, B, C.

Car puis que D, E, F mesurent G; par la 39. prop. G aura les parties dénommées par D, E, F, c'est-à-dire les parties A, B, C. Je dis aussi que G est le plus petit nombre qui ait icelles parties. Car s'il ne l'est, soit H plus petit, s'il est possible, ayant icelles parties. Et H sera mesuré par les nombres D, E, F dénommées par les parties A, B, C,

A *deuxiéme* D . . 2
B *tiers* E . . . 3
C *quart.* F 4
G 12
H - - - - -

par la precedente proposition : & partant puis que H est moindre que G ; iceluy nombre G ne sera pas le plus petit que peuvent mesurer les nombres D, E, F, contre l'hypothese. Donc G est le moindre nombre, ayant les parties données A, B, C. Parquoy nous avons trouvé le plus petit nombre ayant les parties données : Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Combien que nous ayons remarqué en ce 7. livre les prop. & démonstrations qui conviennent & ont lieu aussi bien aux nombres rompus qu'aux entiers ; si est-ce neanmoins que pour donner une entiere & parfaite intelligence des regles & preceptes enseignez en nôtre Pratique d'Arithmetique touchant les fractions, nous avons estimé être besoin d'adjoûter icy les prop. suivantes.

DEMONSTRATIONS DES fractions, ou nombres rompus.

1. Si deux fractions ont un même dénominateur, & que l'unité soit le numerateur de l'une d'icelles fractions ; elles auront même raison entr'elles que les numerateurs.

Soient deux fractions AB, CB, *ayans un même denominateur* B, *& le numerateur* C *soit l'unité : Je dis que le nombre rompu* AB *est au nombre rompu* CB, *comme le numerateur* A *est au numerateur* C. *Car vû que la fraction* AB *se divise en autant de fractions esgales à la fraction* CB *qu'il y a d'unitez en* A, *chacune d'icelles fractions ayant le numerateur* C, *& le denominateur* B ; *autant de fois que l'unité* C *est contenuë en* A, *autant de fois la fraction* CB *est contenuë en la fraction* AB : *parquoy l'unité* C *est même partie du nombre* A, *que la fraction* CB *de la fraction* AB ; *& partant par la* 20. *def.* 7. *comme l'unité* C *est à* A, *ainsi la fraction* CB *est à la fraction* AB ; *& en changeant, le numerateur* A *sera au numerateur* C, *comme la fraction* AB *sera à la fraction* CB. *Ce qui estoit à prouver.*

A 5	C 1
B 8	B 8

2. Le numerateur de quelconque fraction a même raison au dénominateur, qu'icelle fraction a à l'entier duquel elle provient.

Soit quelconque fraction AB : *Je dis que le numerateur* A *est au denominateur* B *comme la fraction* AB *est à son entier. Soit pris une fraction* CB *dont le numerateur* C *est l'unité, & le denominateur est le même* B ; *mais soit une autre fraction* DB, *de laquelle le numerateur* D *soit esgal au mesme denominateur* B, *afin qu'icelle fraction* DB *soit esgale à l'entier de la fraction* AB. *D'autant que par la prop. prec. comme A est à C, ainsi la fraction* AB *est à la fraction* CB: *& comme C est à D, ainsi la fraction* CB *est à la fraction* DB ; *en raison esgale, comme A sera à* D, *c'est-à-dire le numerateur* A *au denominateur* B, (*car* B *est esgal à* D) *ainsi la fraction* AB *sera à la fraction* DB, *c'est-à-dire à l'entier : ce qui a esté proposé.*

A 5	C 1	D 8
B 8	B 8	B 8

3. Les fractions qui ont un même dénominateur sont entr'elles en même raison que leurs numerateurs.

Soient quelconques fractions AB, CB, *ayans un mesme denominateur* B : *Je dis que la fraction* AB *est à la fraction* CB, *comme le numerateur A est au numerateur* C. *Car puis que par la prop. prec. comme* A *est à* B, *ainsi la fraction* AB *est à son entier, & que comme* B *est à* C, *ainsi l'entier est à la fraction* CB ; (*car par la mesme prop. prec. comme* C *à* B, *ainsi la fraction* CB *à son entier, & en changeant comme* B *à* C, *ainsi l'entier à la fraction* CB) *en raison esgale, comme le numerateur A sera au numerateur* C, *ainsi la fraction* AB *sera à la fraction* CB. *Ce qui estoit à demontrer.*

A 7	C 5
B 21	B 21

S'il y avoit plus de deux fractions ; on prouveroit en la mesme maniere que la seconde seroit à la troisiesme, comme le numerateur au numerateur ; & puis aprés la troisiesme à la quatriesme, & ainsi consecutivement de fraction en fraction.

4. S'il y a tant de fractions qu'on voudra, & qu'on multiplie le numerateur de chacune d'icelles par les dénominateurs de toutes les autres, les nombres produits seront entr'eux, en même proportion que les fractions.

Nous disons le numerateur d'une fraction être multiplié par le denominateur de toutes les autres, quand iceluy numerateur est multiplié par le denominateur de l'une des autres fractions, & puis encore le produit par le denominateur de l'une des restantes, & ainsi continuellement tant qu'il y aura de fraction : & n'importe par quel ordre on les prenne, puis que le produit est toûjours le mesme, comme nous avons demontré au Scholie de la 19. *prop.* 7.

Soient premierement deux fractions AB, CD, *&* *de* A *en* D *soit fait* E, *mais de* C *en* B *soit fait* F : *Je dis que le produit* E *est au produit* F, *comme la fraction* AB, *est à la fraction* CD. *Qu'ainsi ne soit ; de* B *en* D *soit fait* G : *donc puis que* D *multipliant* A *&* B, *a fait* E *&* G, *par la* 17. *prop.* 7. *comme* A *sera à* B, *ainsi* E *sera à* G : *Mais par la* 2. *prop. comme* A *est à* B, *ainsi la fraction* AB *est à son entier. Donc aussi comme la fraction* AB *sera à son entier, ainsi* E *sera à* G. *Derechef, pource que* B *multipliant* D *&* C *a fait* G *&* F, *par la mesme* 17. *prop.* 7. *comme* D *sera à* C, *ainsi* G *sera à* F. *Mais comme* D *est à* C, *ainsi l'entier est à la fraction* CD : *(car puis que par la* 2. *prop. comme* C *à* D, *ainsi la fraction* CD *à son entier, en changeant comme* D *à* C, *ainsi l'entier à la fraction* CD. *) Donc comme* G *sera à* F, *ainsi l'entier sera à la fraction* CD. *Parquoy la fraction* AB, *l'entier, & la fraction* CD *seront en mesme proportion que les trois produits* E, G, F. *Donc en raison esgale comme* E *sera à* F, *ainsi la fraction* AB *sera à la fraction* CD. *Ce qui a esté proposé.*

E8	F9
A $\frac{2}{3}$ B	C $\frac{3}{4}$ D
G12	

Soient maintenant les trois fractions AB, CD, HI, *& que de* A *en* D *soit fait* E, *& de* E *en* I *soit produit* L : *mais que de* C *en* B *soit fait* F, *& de* F *en* I *vienne* M : *fina-*

blement que de B *en* D *soit fait* G, *& de* G *en* H *vienne* N: *je dis que les trois produits* L, M, N *sont entr'eux en mesme proportion que les fractions proposées* AB, CD, HI. *Car puis que* I *multipliant* E *&* F *fait* L *&* M, *par la* 17. *prop.* 7. *comme* E *est á* F, *ainsi est le produit* L *au produit* M: *par la demonstration prec. comme* E *est à* F, *ainsi la fraction* AB *est à la fraction* CD. *Donc le produit* L *est au produit* M *comme la fraction* AB *à la fraction* CD. *Derechef puis que* B *multipliant* C *&* D *a fait* F *&* G, *comme* C *à* D, *ainsi* F *à* G: *Mais aussi* I *multipliant* F *&* G *a fait* M *&* K. *Donc iceux produits* M *&* K *seront entr'eux comme* F *à* G, *c'est-à-dire comme* C *à* D. *Mais par la* 2. *prop. comme* C *à* D, *ainsi la fraction* CD *à son entier: Donc aussi comme la fraction* CD *sera à l'entier, ainsi sera* M *à* K. *Semblablement* G *multipliant* I *&* H, *fait* K *&* N; *partant comme* I *à* H, *ainsi* K *à* N. *Mais il appert par ce qui a esté demontré cy-dessus, que comme* I *est à* H, *ainsi est l'entier à la fraction* HI. *Donc comme l'entier sera à la fraction* HI, *ainsi* K *sera à* N. *Parquoy la fraction* CD, *l'entier, & la fraction* HI, *seront en même proportion que les produits* M, K *&* N: *donc en raison esgale, comme la fraction* CD *sera à la fraction* HI, *ainsi le produit* M *sera au produit* N. *Mais nous avons déja demontré cy-dessus, que comme la fraction* AB *est à la fraction* CD, *ainsi est le produit* L *au produit* M: *donc les trois produits* L, M, N *seront entr'eux en même proportion que les trois fractions* AB, CD, HI. *Ce qu'il falloit prouver.*

L 40	M 45	
E 8.	F 9	N 24
A 2	C 3	H 2
B 3	D 4	I 5
G 12	K 60	

Que s'il y a quatre fractions, on demontrera en la même sorte que comme la troisiesme sera à la quatriesme, ainsi le produit correspondant à cette là sera au produit correspondant à cette-cy; & ainsi continuellement de fraction en fraction, repetant toûjours la demonstration cy-dessus.

Or il appert de cette demonstration que si les susdits produits estoient esgaux, les fractions seroient aussi esgales: & au contraire que les fractions estans esgales, lesdits produits seront pareille-

uent esgaux : Mais qu'estans inesgales, le produit de la plus grande sera le plus grand, & de la moindre, le moindre, & ainsi des autres.

5. L'entier a même raison à la somme de deux ou davantage de fractions, que le nombre produit des dénominateurs multipliez entr'eux à la somme des produits du numerateur de chaque fraction multiplié par les dénominateurs de toutes les autres fractions.

Soient trois fractions AB, *CD*, *EF*, *& que de* B *en* D *&* F *soit procreé K; & de A en* D *&* F *soit fait G; mais de C par* B *&* F *soit produit H; & de* E *par* B *&* D *soit fait I: Je dis que l'entier est à la somme des fractions* AB, *CD*, *EF*, *comme le produit* K *est à la somme des produits G, H, I. Car puisque par la prop. prec. les fractions* AB, *CD*, *EF*, *sont entr'elles comme les produits G, H, I, par le 5. theor. du Scholie de la 22. prop. 7. comme la somme d'icelles fractions AB, CD, EF est à la fraction EF, ainsi la somme des produits G, H, I est au produit I. Mais comme la fraction EF est à l'entier, ainsi I est à K: (car par la 2. pro. comme la fraction EF est à l'entier, ainsi E est à F, & par la 18. prop. 7. comme E à F, ainsi I à K, pource que E, F multipliant le produit de B en D ont fait I & K.) Donc en raison esgale comme la somme des fractions* AB, *CD*, *EF est à l'entier, ainsi la somme des produits G, H, I est à K: & au contraire, comme l'entier est à la somme des fractions* AB, *CD*, *EF*, *ainsi K est à la somme des produits G, H, I. Ce qu'il falloit demontrer.*

G 16	H 12	I 18
$\frac{A\,2}{B\,3}$	$\frac{C\,1}{D\,2}$	$\frac{E\,3}{F\,4}$
	K 24	

6. Si deux fractions ont un même numerateur, comme la premiere fraction sera à la seconde, ainsi le dénominateur de la seconde sera au dénominateur de la premiere.

Soient deux fractions AB, *AC, ayans un même nume-*

rateur A : Je dis que la fraction AB *est à la fraction AC, comme le denominateur* C *est au denominateur* B. *Car de A en C soit fait D, & de* A *en* B *soit produit* E. *Or puis que A multipliant* C *&* B, *fait D & E, par la 17. prop. 7. comme C sera à* B, *ainsi D sera à E. Mais par la 4. prop. comme D est à E, ainsi la fraction* AB *est à la fraction AC: Donc aussi la fraction* AB *sera à la fraction AC, comme* C *sera à* B. *Ce qu'il falloit prouver.*

D 10	E 6
$\frac{A\ 2}{B\ 3}$	$\frac{A\ 2}{C\ 5}$

7. Les fractions desquelles les numerateurs ont une même raison aux dénominateurs sont égales entr'elles : Et des fractions égales, les numerateurs ont une même raison aux dénominateurs : Mais des inégales, celles dont le numerateur a plus grande raison au dénominateur, est la plus grande : Et de la plus grande, le numerateur a plus grande raison au dénominateur.

Soient deux fractions AB, *CD; & qu'il y ait même raison du numerateur A au denominateur* B, *que du numerateur C au denominateur D : Je dis qu'icelles fractions* AB, *CD, sont esgales. Car ayant fait E de A en D, & F de B en C; comme la fraction* AB *est à la fraction CD, ainsi E à F, par la 4. prop. Mais puis que comme A est à B, ainsi C est à D; par la 19. prop. 7. les deux produits E & F seront égaux : donc aussi la fraction AB sera égale à la fraction CD. Ce qu'il falloit prouver.*

E 12	F 12
$\frac{A\ 2}{B\ 3}$	$\frac{C\ 4}{D\ 6}$

Soient maintenant deux fractions égales AB, *CD : Je dis que comme A est à B, ainsi C à D : Car comme á la prec. démonst. ayant fait E de A en D, & F de B en C, comme* AB *sera á CD, ainsi E á F. Mais* AB *est égale á CD: donc aussi E sera égal á F; & par la 19. prop. 7. comme A sera á B, ainsi C sera á D : Ce qu'il falloit démontrer.*

En troisiéme lieu, qu'il y ait plus grande raison de A à B, que de C á D : Je dis que la fraction AB *est plus grande que la fraction CD. Car ayant fait E de A en D, & F de B en C, par la 4. prop. comme la fraction* AB *sera á la fraction CD,*

ainsi

ainsi E à F. Mais par le Scholie de la 19. prop. 7. le nombre E est plus grand que le nombre F : donc aussi la fraction AB sera plus grande que la fraction CD. Ce qu'il falloit prouver.

E 14	F 9
A 2	C 3
B 3	D 7

Finablement, que la fraction AB soit plus grande que la fraction CD : Je dis que la raison de A à B est plus grande que celle de C à D. Car comme dessus la fraction AB sera à la fraction CD, comme E à F. Mais par l'hypothese la fraction AB est plus grande que la fraction CD : donc aussi E sera plus grand que F. Et puis que E est le produit de A en D, & F celuy de B en C, par le Scholie de la 19. prop. 7. il y aura plus grande raison de A à B, que de C à D. Ce qu'il falloit prouver.

8. Les fractions dont les numerateurs sont en même raison que les dénominateurs, sont égales entr'elles. Et des fractions égales, les numerateurs ont même raison entr'eux, que les dénominateurs. Mais des fractions inégales, celle dont le numerateur a plus grande raison au numerateur, que le dénominateur au dénominateur, est la plus grande; & de la plus grande, le numerateur a plus grande raison au numerateur, que le dénominateur au dénominateur.

Soient deux fractions AB, CD, & qu'il y ait même raison du numerateur A au numerateur C, que du dénominateur B au dénominateur D : Je dis qu'icelles fractions AB, CD, sont égales. Car en raison permutée A sera à B, comme C à D; & partant par la proposition precedente les fractions sont égales. Ce qu'il falloit prouver.

A 2	C 4
B 3	D 6

Mais soient les fractions AB, CD, égales : Je dis que comme A est à C, ainsi B est à D. Car par la prop. prec. comme A sera à B, ainsi C sera à D; & en permutant, comme A sera à C, ainsi B sera à D. Ce qui étoit à prouver.

A 5	C 2
B 6	D 3

Maintenant, qu'il y ait plus grande raison de A à C, que de B à D : Je dis que la fraction AB *est plus grande que la fraction* CD. *Car en permutant il y aura plus grande raison de* A *á* B, *que de* C *á* D; *& par la prec. prop. la fraction* AB, *sera plus grande que la fraction* CD : *Ce qu'il falloit prouver.*

En dernier lieu, soit la fraction AB *plus grande que la fraction* CD : *Je dis qu'il y a plus grande raison de* A *á* C *que de* B *á* D. *Car par la prec. prop. il y aura plus grande raison de* A *á* B, *que de* C *á* D; *& partant en permutant, la raison de* A *á* C *sera plus grande que de* B *á* D: *Ce qu'il falloit prouver.*

9. Reduire les fractions de diverses dénominations á autant d'autres fractions de même dénomination, qui leur soient égales, chacune à la sienne.

Soient premierement les deux fractions AB, CD, *ayans divers dénominateurs* B, D : *& il faut les reduire á deux autres fractions qui leur soient égales, & d'une même dénomination. Soit fait* E *de A en* D; *&* F *de* B *en* C; *mais* G *de* B *en* D : *Je dis que les fractions* EG, FG, *qui ont un même dénominateur* G, *sont égales aux fractions* AB, CD, *chacune á la sienne, c'est-á-dire que* EG *est égale á* AB, *&* FG *á* CD. *Car d'autant que A & B multipliant* D, *ont fait* E *&* G : *par la* 18. *prop.* 7. *comme A á B, ainsi* E *á* G : *& par la* 7. *prop. les fractions EG, AB sont égales. Par même raison on prouvera que la fraction* FG *est égale á la fraction* CD.

E8	F9
A2	C3
B3	D4
G12	

Maintenant, soient trois fractions de diverses dénominations AB, CD, EF, lesquelles il faut reduire á trois autres d'une même dénomination, qui leur soient égales, chacune á la sienne. Tout ainsi que dessus soit fait G de A en D, & H de B en C; mais I de B en D : puis aprés soit fait K de G en F; L de H en F; M de I en E; & N de I en F. Je dis que les trois fractions KN, LN, & MN, qui ont un même dénominateur N, sont égales aux trois fractions AB, CD, EF, chacune á la sienne.

K12	L16	
G3	H4	M18
A1	C2	E3
B2	D3	F4
I6	N24	

Car premierement, il appert par ce qui a été démontré cy-dessus, que G I est égale á AB, & H I á C D : Mais puis que F multipliant G, H I, a produit K, L, N, par le Scholie de la 18. prop. 7. iceux produits sont entr'eux en méme proportion, que G, H, I. Parquoy K N sera aussi égale á A B, & L N á C D. Semblablement, pource que I multipliant E & F, fait M & N, comme E est á F, ainsi M á N, & par la 7. prop. la fraction MN sera égale á la fraction EF. Par ainsi nous avons trouvé les trois fractions K N, L N & M N, qui ont un mesme dénominateur N, & sont égales aux trois proposées A B, C D, E F, chacune á la sienne. Ce qu'il falloit faire.

Que s'il y avoit quatre fractions, il faudroit en reduire premierement trois comme dessus, puis multiplier chaque numerateur d'icelles par le dénominateur de la quatriéme fraction & leur dénominateur commun tant par le numerateur que dénominateur d'icelle quatriéme fraction : & ainsi on auroit quatre fractions d'une méme dénomination égales aux proposées. Bref, il appert assez que quelque nombre qu'il y ait de fractions de diverses dénominations á reduire á une méme dénomination, que multipliant le numerateur de chacune d'icelles fractions par les dénominateurs de toutes les autres, viendra le numerateur de chacune, & puis multipliant tous les dénominateurs entr'eux, sera procreé le dénominateur commun : & ce en quelconque ordre & façon qu'on fasse lesdites multiplications, puis que par le 2. Theor. du Scholie de la 19. prop. 7. lors que trois ou davantage de nombres se multiplient entr'eux, le produit est toûjours un méme en quelque façon, & ordre qu'on les multiplie.

10. Reduire quelque entier que ce soit à une fraction dont le dénominateur est donné.

Premierement l'entier soit l'unité A, qu'il faut reduire à une fraction dont le dénominateur est B.

	C 4
A 1	B 4

Soit pris le numerateur C égal au dénominateur B : Je dis que la fraction CB est égale à l'unité A ; Car par la 2. prop. comme C est à B, ainsi la fraction CB est à l'entier A. Mais C est égal à B; donc aussi la fraction CB est égale à l'entier A, c'est à dire à l'unité, *Maintenant que l'entier soit le nombre A, lequel il faut reduire à la fraction dont le dénominateur est B. De A en B soit fait le numerateur C : Je dis que la fraction CB est égale au nombre entier A. Soit posée l'unité D au dessous de A, afin que la fraction AD soit égale à autant d'unitez qu'il y en a au nombre A. Or d'autant que de la multiplication de A en B est fait C, par la 15. def. 7. le nombre B sera aussi autant de fois en C, qu'il y a d'unitez en A. Donc comme A sera à D, ainsi C sera à B. Parquoy des fractions AD, CB les numerateurs A & C, ont une même raison aux denominateurs D & B : partant*

A 5	C 35
D 1	B 7

elles seront égales entr'elles par la 7. prop. Mais la fraction AD est égale à l'entier A, à cause que le dénominateur D est l'unité : Donc aussi la fraction CB sera égale au même entier A. Nous avons donc fait ce qui étoit requis.

11. Doubler & medier une fraction donnée.

Premierement qu'il faille doubler la fraction AB. Soit doublé le numerateur A, afin que soit fait le numerateur C demeurant le même dénominateur B : Ou bien lors que le dénominateur B est pair en soit pris la moitié, afin d'avoir le dénominateur D, demeurant le même numerateur A. Je dis que chaque fraction CB, AD, est double de la fraction AB. Car puis que les fractions AB, CB,

A 5	C 10	A 5
B 12	B 12	D 6

ont un même dénominateur B, par la 3. prop. comme le numerateur C sera au numerateur A, ainsi la fraction CB sera à la fraction AB. Mais par la construction C est double de A : donc aussi la fraction CB sera double de la fraction AB.

Derechef, pource que les fractions AB, AD, ont un même numerateur A, par la 6. prop. comme le dénominateur B sera au dénominateur D, ainsi la fraction AD sera à la fraction AB. Mais par la construction B est double d'iceluy D : donc aussi la fraction AD sera double de la fraction AB.

Maintenant qu'il faille prendre la moitié de la fraction AB. Soit doublé le dénominateur B, afin qu'il en vienne le dénominateur C, demeurant le même numerateur A : Ou bien quant le numerateur A est pair, en soit pris la moitié, qui soit D, avec le même dénominateur B. Je dis que chaque fraction

AC, DB est moitié de la fraction AB. Car puis que les fractions AB, AC ont un même numerateur par la 6. prop. comme B sera à C, ainsi la fraction AC sera à la fraction AB. Mais par la construction B est la moitié de C: Donc aussi la fraction AC sera moitié de la fraction AB.

$\frac{A\,8}{B\,9}$	$\frac{A\,8}{C\,18}$	$\frac{D\,4}{B\,9}$

Derechef, puis que les fractions AB, DB, ont un même dénominateur, par la 3. prop. comme D sera à A, ainsi la fraction DB sera á la fraction AB. Vû donc que par la construction D est moitié de A, aussi la fraction DB sera moitié de la fraction AB. Nous avons donc doublé, & pris la moitié de la fraction donnée AB. Ce qu'il falloit faire.

En la même maniere une fraction donnée sera triplée, quadruplée, &c. si on triple, quadruple, &c. le numerateur demeurant le même dénominateur: Ou bien si on prend (quand il se peut faire) le tiers, le quart, &c. du dénominateur, demeurant le même numerateur. Pareillement on aura le tiers, le quart, &c. D'une fraction donnée, si on triple, quadruple, &c. le dénominateur, demeurant le même numerateur: Ou bien si on prend (lors qu'il se peut faire) le tiers, le quart, &c. du numerateur, le même dénominateur demeurant: Ce qu'on démonstrera en la même maniere que dessus.

12. La fraction de fraction est égale à la fraction simple, de laquelle le numerateur est procreé de la multiplication des numerateurs entr'eux, & le dénominateur est produit des dénominateurs aussi multipliés entr'eux.

Soit premierement AB une fraction de la fraction CD, la valeur de laquelle au respect de l'unité, ou du nombre entier E, soit exprimee par F; mais de A en C soit fait G, & de B en D soit produit H: Je dis que la fraction de fraction donnee est esgale à la simple fraction GH, au respect de l'entier E. Car soit encore fait I de B en C; & par la 2. prop. comme A est à B, ainsi la fraction AB est à son entier, c'est à sçavoir à la fraction CD, de laquelle l'entier est E. Mais par la 18. prop. 7. comme A est à B ainsi G à I, pource que A, B, multiplians C, produisent iceux G, I: donc aussi comme la fraction AB sera à la fraction CD, ainsi sera G à I. Derechef, pource que par la 2. prop. comme C est à D, ainsi la fraction CD *est à son entier E, & que par la 17. prop. 7. comme C à D, ainsi I à H : aussi la fraction CD sera à son entier E, comme I à H. Vû donc que comme la fraction AB est à la fraction CD, ainsi G est à I ; & comme la fraction CD est à son entier E, ainsi est I à H ; en raison égale, comme AB fraction de la fraction CD est*

G6	I9		
A2	C3	E1	
B3	D5	E20	F$\frac{2}{5}$
H15			

à l'entier E, ainsi G est à H : Mais nous avons posé qu'à icelle fraction de fraction soit esgale la simple fraction F : donc aussi la fraction F sera à l'entier E, comme G à H. Mais par la 2. prop. comme G est à H, ainsi la fraction GH est au même entier E : Donc les fractions simples F & GH seront égales ; & partant puis que la fraction F est égale à la fraction de fraction donnée, aussi la fraction GH sera esgale à la fraction AB au respect de la fraction CD, duquel l'entier est E. Ce qu'il falloit prouver.

Soit maintenant AB fraction de CD, qui est aussi fraction de la fraction EF ; & soit fait G de A en C ; & H de B en D : Item I de G en E ; & K de H en F : Je dis que la fraction IK est égale à la fraction de fraction donnée. Ce qui est manifeste, veu que par la démonstration prec. la fract. GH est esgale á AB, fraction de la fraction CD ; tellement qu'icelle GH est fraction de la fraction EF, à laquelle est aussi esgale la fraction IK, par la même démonstration.

G10	I30	
A5	C2	E3
B6	D3	F4
H18		

Que s'il y avoit davantage de fractions, c'est à dire que EF fust encore fraction d'une autre fraction, le produit de I, K, par cette autre fraction, donneroit pareillement la fraction simple esgale à la fraction de fraction donnée ; & ainsi continuellement s'il y avoit davantage de fractions.

Il appert donc qu'estant donnée une fraction de tant de fractions qu'on voudra on la reduira en une simple fraction, multipliant tous les numerateurs entr'eux, & puis aussi tous les denominateurs entr'eux.

13. Reduire une fraction donnée à minimes termes.

Soit une fraction AB, qu'il faut reduire aux plus petits termes d'icelle. Or les nombres A, B, seront premiers entr'eux, ou non; s'ils sont premiers, la fraction AB ne pourra être reduite à plus petite dénomination. Car soit reduite, s'il est possible, à moindres termes C, D, tellement que la fraction CD soit égale à la fraction AB. D'autant que par la 7. prop. comme A est a B, ainsi C á D, & que les nombres C, D, sont moindres que les nombres A, B; iceux A, B, ne seront les moindres termes de cette raison: Mais par la 23. prop. 7. ils sont aussi les plus petits, veu qu'ils sont premiers entr'eux: Ce qui est absurde.

A 7	C.
B 8	D.

Maintenant que A, B, ne soient premiers entr'eux: & par la 2. prop. 7. la plus grande mesure d'iceux soit C, qui mesure A par D; & B par E: Je dis que la fraction DE est égale á la fraction AB, & constituée aux plus petits termes qu'elle puisse estre. Car puis que C mesure A & B par D & E; par la 7. com. sent. 7. Iceux A, B, seront produits de C en D, E, & par la 19. prop. 7. comme A sera á B, ainsi D á E, & partant par la 7. prop. les fractions AB, DE, seront esgales. En apres, pource que C, plus grande mesure des nombres A, B, les mesure par D, E; par le corol. de la 35. prop. 7. iceux D, E, seront les plus petits nombres de tous ceux qui ont même raison que A á B. Nous avons donc reduit la fraction donnée AB en sa plus petite denomination DE: Ce qu'il falloit faire.

A 6	D 2
B 9	E 3
C 3	

14. Estant donnée une fraction, la reduire (si faire se peut) à une autre égale de dénomination donnée.

Soit donnée la fraction AB, qu'il faut reduire á une autre esgale, de laquelle le dénominateur soit C. De A en C, soit fait D, lequel B mesure par E: Je dis que la fraction EC, qui a le denominateur donné C est esgale á la fraction donnee AB. Car puis que B mesure D par E, par le 9. ax. 7. D sera fait de B en E: Mais il a aussi esté fait de A en C. Donc par la 19. proposition 7. comme A sera á B, ainsi E sera á C; & par la 7. proposition les fractions AB, EC seront esgales.

A 2	E 6
B 3	C 9
D 18	

Que si B ne mesure D procreé de A en C, la fraction donnée ne se pourra reduire à la dénomination donnée C. Car soit reduitte, s'il est possible, à la fraction EC. Donc puisque les fractions AB, EC sont égales, comme A sera à B, ainsi E sera à C par la 7. prop. & partant par la 19. prop. 7. le nombre produit de B en E sera égal à celuy fait de A en C, c'est à sçavoir D. Donc par le 7. ax. 7. B mesurera D par E : Ce qui est absurde, puis qu'on a posé que B ne mesure D.

A 2	E ·
B 5	C 7
D 14	

Or la reduction de fraction, qui en l'Arithmetique pratique, est vulgairement appellée Evaluation, *despend de cette prop. veu qu'evaluer une fraction n'est autre chose, que trouver une fraction égale à la donnée, qui ait pour dénominateur le nombre & valeur de l'entier proposé.*

Comme par exemple, quand on veut évaluer les $\frac{2}{5}$ d'une livre, ce n'est autre chose que trouver une autre fraction égale à $\frac{2}{5}$, qui ait pour dénominateur le nombre 20, qui est la valeur de la livre : & suivant ce qui est icy démontré, si ayant multiplié ledit nombre 20 par 2, numerateur de la fraction donnée, on divise le produit 40 par le dénominateur 5, viendra 8 pour le numerateur de ladite fraction cherchée, c'est à dire, que la fraction $\frac{8}{20}$ sera égale à la donnée $\frac{2}{5}$; au lieu de laquelle fraction $\frac{8}{20}$, on peut aussi dire 8 sols, puis que l'entier auquel se referoit la fraction donnée vaut 20 sols.

A 2	E 8
B 5	C 20
D 40	

15. Quand un nombre est divisé par un autre plus grand, le quotient est une fraction de laquelle le nombre à diviser est numerateur, & le diviseur dénominateur.

Soit le nombre A, qu'il faut diviser par un plus grand nombre B : Je dis que le quotient est la fraction AB, de laquelle le nombre à diviser A, est numerateur, & le diviseur B dénominateur.

A 5	B 7	$\frac{A\,5}{B\,7}$

Car d'autant que par la 7. prop. comme A est à B, ainsi la fraction AB est à l'entier, c'est-à-dire à l'unité par la def. de la division (La division d'un nombre par un nombre est l'invention d'un nombre qui ait même raison à l'unité que le nombre dividande au diviseur) la fraction AB sera quotient du nombre A divisé par le nombre B. Ce qu'il falloit prouver.

16. Adjoûter plusieurs fractions en une somme.

Qu'il faille premierement adjoûter ensemble deux fractions AB, CB d'une même dénomination. Soient adjoûtez ensemble les numerateurs A, C, la somme desquels soit D, au dessous de laquelle soit posé le même dénominateur B : Je dis que la

$\frac{A\,2}{B\,7}$	$\frac{C\,3}{B\,7}$	$\frac{D\,5}{B\,7}$

fraction DB, est la somme de l'addition des fractions AB, CB. Car d'autant que les fractions ont un même dénominateur, par la 3. prop. comme A sera à C, ainsi la fraction AB sera à la fraction CB ; & en composant, comme A, C, *ensemble à C, ainsi les fractions AB, CB ensemble à la fraction CB. Mais par la même 3. prop. comme C à D, ainsi la fraction CB à la fraction DB. Donc en raison égale, comme AC, ensemble à D, ainsi les fractions AB, CB ensemble à la fraction DB. Vû donc que par la construction A, C, ensemble sont égales à D, aussi les fractions AB, CB ensemble, seront égales à la fraction DB.*

Soient maintenant trois fractions de diverses dénominations AB, CD, EF, lesquelles il faut adjoûter ensemble. Les fractions proposées soient reduites à autant d'autres fractions de même dénomination GK, HK, IK, par la 9. prop. puis soient adjoûtez ensemble les numerateurs G, H, I, dont la somme soit L, à laquelle soit supposé le dénominateur commun K, & la fraction LK, sera la somme des trois fractions proposées.

G 12	H 16	I 18	
$\frac{A\,1}{B\,2}$	$\frac{C\,2}{D\,3}$	$\frac{E\,3}{F\,4}$	$\frac{L\,46}{K\,24}$
	K 24		

Car d'autant que par la 3. prop. les numerateurs G, H, I, sont en même proportion que les fractions GK, HK, IK, par le 5. Theor. du Scholie de la 22. prop. 7. G, H, I ensemble seront à I, comme les trois fractions AB, CD, EF ensemble seront à la fraction EF. Mais par la 3. prop. comme I est à L, ainsi aussi la fraction EF est à la fraction LK. Donc en raison égale, comme les trois nombres G, H, I ensemble seront à L, ainsi les trois *fractions AB, CD, EF ensemble seront à LK. Mais par la construction le nombre L est égal aux trois G, H, I: Donc aussi la fraction LK sera égale aux trois proposées AB, CD, EF. Nous avons donc fait ce qui étoit requis.*

Or ayant reduit les fractions proposées à une même dénomination, & adjoûté ensemble les numerateurs trouvez, puis à la somme L, supposé le dénominateur commun K; on prouvera encore que la fraction LK est égale aux proposées en cette sorte. D'autant que par la 5. prop. comme l'entier est à la somme des fractions AB, CD, EF, ainsi le dénominateur commun K est à la somme des produits G, H, I, c'est-à-dire L; en changeant, comme la somme des fractions AB, CD, EF, sera à l'entier, ainsi L sera à K. Mais par la 2. prop. comme L est à K, ainsi aussi la fraction LK est au même entier. Donc comme la somme des fractions AB, CD, EF, est à l'entier, ainsi la fraction LK est au même entier: & partant la somme des fractions AB, CD, EF, sera égale à la fraction Lk. Ce qui étoit proposé.

Que si les fractions proposées à adjoûter ne se referoient à l'unité, ains à quelque nombre entier, la somme d'icelles se rapporteroit au même nombre. Par exemple s'il falloit adjoûter $\frac{2}{3}$ du nombre 60 avec les $\frac{2}{5}$ du même nombre, la somme d'icelles fractions seroit $\frac{19}{15}$, qui se refereroient aussi au même nombre 60; tellement que ce seroit 76: car les $\frac{2}{3}$ de 60 sont 40, & les $\frac{3}{5}$ sont 36, lesquels deux nombres adjoûtez ensemble, font le susdit nombre 76.

17. Oster une petite fraction d'une plus grande.

De la fraction AB, qu'il en faille ôter une moindre fraction CB, laquelle est de même dénomination. Soit ôté le numerateur C du numerateur A, & au dessous du reste D, soit posé le même dénominateur B : Je dis que la fraction DB est ce qui reste aprés avoir soustrait la fraction CB

$\frac{A\,3}{B\,4}$	$\frac{C\,1}{B\,4}$	$\frac{D\,2}{B\,4}$

de la fraction AB. Car puisque C ôté de A, reste D ; A est composé de C & D : donc la fraction AB, de laquelle le numerateur A est l'aggregé des numerateurs C, D, est la somme des deux fractions CB, DB, comme il a été démontré en la prec. prop. Parquoy ayant ôté la fraction CB de la fraction AB, restera la fraction DB.

Mais si de AB, il faut ôter une moindre fraction CD, qui a un autre dénominateur que AB : par la 9. prop. icelles fractions AB, CD, soient reduittes à deux autres d'une même dénomination EG, FG : puis soit ôté le numerateur F du numerateur E, & reste H, au dessous duquel soit apposé le dénominateur commun G : Je dis qu'aprés avoir ôté la fraction CD de la plus grande fraction AB, reste la fraction HG, ainsi qu'il appert par la démonstration cy-dessus. Ce qu'on peut encore démontrer ainsi, d'autant que D multipliant A, B fait E, G, par la 17. prop. 7. comme A sera à B, ainsi E sera à G. Mais par la 2. prop. comme A est à B, ainsi la fraction AB est à l'entier.

Donc aussi comme E à G, ainsi la fraction AB est à l'entier. Derechef, pource que B multipliant C, D, fait F, G, comme C sera D, ainsi F à G. Mais aussi comme C à D, ainsi la fraction CD est à l'entier. Donc comme F à G, ainsi la fraction CD est à l'entier. Vû donc que comme F premiere est à G deuxiéme,

E 15	F 8	
$\frac{A\,3}{B\,4}$	$\frac{C\,2}{D\,5}$	$\frac{H\,7}{G\,20}$
	G 20	

ainsi la fraction CD troisiéme est à l'entier quatriéme, & que par la 2. prop. comme H cinquiéme est au même G deuxiéme, ainsi la fraction HG sixiéme est au même entier quatriéme par le 6. Theor. du Schol. de la 22. prop. 7. comme F, H, premiere & cinquiéme ensemble sera à G deuxiéme, ainsi les fractions CD, HG, troisiéme & sixiéme ensemble, sera à l'entier quatriéme. Mais comme F, H, ensemble sont à G, ainsi E égal à iceux F, H (Car F ôté de E reste H) est au même nombre G. Donc aussi comme E sera à G, ainsi les fractions CD, HG ensemble seront à l'entier. Mais il a été démontré que comme E à G, ainsi la fraction AB à l'entier. Donc aussi comme la fraction AB sera à l'entier, ainsi les fractions CD, HG ensemble seront au même entier : Et partant les fractions CD, HG ensemble seront égales à la fraction AB. Parquoy ayant ôté la fraction CD de la fraction AB, le reste sera la fraction HG. Ce qu'il falloit faire.

Or si les fractions proposées ne se referoient à *l'unité, ains à quelque nombre entier, le reste se refereroit aussi au même nombre. Par exemple, s'il falloit soustraire $\frac{2}{5}$ du nombre 40, des $\frac{3}{4}$ du même nombre, le reste $\frac{7}{20}$ se refereroit au même nombre 40; & partant ce seroit 14 : car par la 15. prop. les $\frac{2}{5}$ de 40, sont 16, & les $\frac{3}{4}$ sont 30.*

18. Multiplier une fraction par une fraction.

Soit une fraction AB, qu'il faut multiplier par la fraction CD : de la multiplication des numerateurs A, C, entr'eux soit fait E, au dessous duquel soit posé F produit des denominateurs B, D, multipliez entr'eux : Je dis que la fraction EF est le produit des fractions AB, CD, multipliées entr'elles. Car

H 45	G 30	
A 2	C 3	E 6
B 3	D 5	F 15

soit fait G de E en D; & H de C en F : Et par la 4. prop. comme la fraction EF sera à la fraction CD, ainsi G à H. Mais pource que C multipliant A, F, fait E, H, par la 17. prop. 7. comme A sera à F, ainsi E à H; & en permutant, comme A sera à E, ainsi F sera à H. Derechef, pource que D multipliant E, B fait G, F, par la 17. prop. 7. comme E sera à B ainsi G à F. Parquoy les trois nombres A, E, B sont proportionnels aux trois G, F, H en proportion troublée : donc en raison égale, comme A sera à B, ainsi G à H. Mais nous avons demontré que comme G est à H, ainsi la fraction EF est à la fraction CD; & par la 2. prop. comme A est à B, ainsi la fraction AB, *est à l'entier, c'est-à-dire á 1. Donc aussi comme la fraction EF est á la fraction CD ; ainsi la fraction AB est á 1. Et par la def. de la multiplication (La multiplication d'un nombre en un nombre est l'invention d'un nombre qui ait même raison á l'un des multiplians que l'autre à l'unité) la fraction EF est produite de la multiplication de la fraction AB en la fraction CD: parquoy nous avons fait ce qui estoit requis.*

Or quand on multiplie des fractions, qui ne se rapportent pas à l'unité, ains à quelque nombre entier donné; il ne faut pas referer le nombre produit de la multiplication d'icelles fractions, au nombre entier proposé, ainsi qu'en l'addition et soustraction; mais il le faut comparer au quarré d'iceluy nombre donné : Car vû que la comparaison se doit faire entre choses semblables, & que de la multiplication de deux nombres est produit un nombre plan : il faudra referer le nombre produit de la multiplication avec le plan du nombre entier proposé, c'est-á-dire avec son quarré, si toutes les deux fractions se referent á un même nombre entier, pource qu'iceluy nombre (suivant ce que nous avons dit á la 14. prop.) leur est comme dénominateur, & par consequent il le faut multiplier par soy-même afin d'avoir le dénominateur du produit desdites fractions. Mais si les fractions se referoient à divers nombres entiers, il faudroit referer le produit de leur multiplication au nombre plan fait des nombres entiers proposez. Ainsi lors qu'on multiplie les $\frac{2}{5}$ d'une livre, c'est-à-dire les $\frac{2}{5}$ de 20 sols, par $\frac{1}{2}$ du même nombre 20, le produit est cette fraction $\frac{2}{10}$, laquelle il ne faut pas rapporter au nombre en-

tier proposé 20, mais à son quarré 400; tellement que ce produit $\frac{2}{10}$ est 80, & il ne seroit que 4, si on le referoit seulement au nombre proposé 20. Ce qui est apparent, car par la 14. prop. les $\frac{2}{5}$ du nombre 20. sont 8 & $\frac{1}{2}$ du même nombre 20, est 10; & de 8 en 10, est fait 80, qui est $\frac{2}{10}$ du nombre 400, quarré du nõbre 20, entier proposé. Nous dirons donc que $\frac{2}{5}$ d'une livre multipliez par $\frac{1}{2}$ livre, ne produisent pas $\frac{2}{10}$ d'une livre, qui sont seulement 4 sols, mais produisent $\frac{2}{10}$ de 400, qui sont 80 s. ou 4 livres. Mais lors qu'on multiplie les $\frac{2}{5}$ du nombre entier 20, par les $\frac{3}{4}$ du nombre entier 24, le produit est $\frac{6}{20}$, ou $\frac{3}{10}$ du nombre 480, c'est-à-dire 144: Car par la 14 prop. les $\frac{2}{5}$ du nombre entier 20 sont 8, ou $\frac{8}{20}$, & les $\frac{3}{4}$ de 24 sont 18, ou $\frac{18}{24}$, qui multipliez comme dit est cy-dessus, produisent 144, ou la fraction $\frac{144}{480}$: tellement que les $\frac{6}{20}$ trouvez ne se doivent referer à l'un ny à l'autre entier proposé 20 & 24; ains au nombre plan 480, produit d'iceux entiers.

19. Diviser une fraction par une fraction.

Soit la fraction AB, qu'il faut diviser par la fraction CD: & premierement que les nombres de cette-cy C, D, mesurent les nombres de celle-là AB, par E, F; tellement que A étant divisé par C le quotient soit E, & ayant divisé B par D, le quotient soit F: Je dis que la fraction EF, est le quotient de la fraction AB divisée par la fraction CD. Car d'autant que C mesure A par E.

$\frac{A\,5}{B\,12}$	$\frac{C\,5}{D\,6}$	$\frac{E\,1}{F\,2}$
$\frac{A\,4}{B\,9}$	$\frac{C\,2}{D\,9}$	$\frac{E\,2}{F\,1}$
$\frac{A\,9}{B\,10}$	$\frac{C\,3}{D\,5}$	$\frac{E\,3}{F\,2}$

par E,

par E, & D mesure B par F par le 9. ax. 7. A est procreé de C en E; & B de D en F. Donc par la prec. prop. la fraction AB, est produite de la multiplication de la fraction EF par la fraction CD : & partant par la def. de la multiplication, comme la fraction AB sera à la fraction CD, ainsi la fraction EF sera à l'unité. Parquoy puis que comme AB, fraction divisée, est à CD, fraction divisante, ainsi la fraction EF est à l'unité, par la def. de la division, la fraction EF sera le quotient de la division de la fraction AB par la fraction CD. Ce qui estoit proposé.

Maintenant, que les nombres de la fraction CD, ne mesurent les nombres de la fraction AB: Par la 9. prop. les fractions proposées AB, CD, soient reduites à deux autres égales de même dénomination EG, FG; puis des deux numerateurs E & F, soit fait à part la fraction EF. Je dis qu'icelle fraction EF est le quotient de la fraction AB divisée par la fraction CD. Car par la 3. prop. la fraction EG est à la fraction FG, comme le numerateur E est au numerateur F; & par la 2. prop. comme E est à F, ainsi la fraction EF est à son entier,

E12	F10		E8	F9	
A4	C2	E12	A2	C3	E8
B5	D3	F10	B3	D4	F9
	G15			G12	

c'est-à-dire à l'unité. Donc aussi comme la fraction EF est à l'unité, ainsi la fraction EG est à la fraction FG, c'est-à-dire la fraction AB à la fraction

CD, puis qu'elles leur ſont égales par la conſtruction ; & partant par la def. de la diviſion, la fraction EF ſera le quotient de la fraction AB diviſée par la fraction CD. Ce qui étoit proposé.

Or il appert aſſez que cette démonſtration a lieu en toutes fractions, ſoit que les nombres de la fraction diviſante meſurent ou non les nombres de la fraction à diviſer ; & auſſi que le dénominateur commun G n'entre point au quotient de la diviſion, ains ſeulement les deux numerateurs E, F ; c'eſt pourquoy en la pratique d'Arithmet. il ſuffit de multiplier le numerateur de la fraction à diviſer par le dénominateur de la fraction diviſante, pour avoir le numerateur du quotient ; mais le numerateur de la fraction diviſante par le dénominateur de la fraction à diviſer pour avoir le dénominateur d'iceluy quotient.

Il eſt auſſi manifeſte que ſi les nombres de la fraction diviſante ſont changez de lieu à autre, que la diviſion ſe fera comme la multiplication, c'eſt à ſçavoir en multipliant les numerateurs entr'eux, & puis aprés les dénominateurs. Comme par exemple, voulant diviſer $\frac{5}{6}$ par $\frac{2}{3}$, nous changerons les nombres de cette fraction $\frac{2}{3}$, & aurons $\frac{3}{2}$, par leſquels nous multiplierons $\frac{5}{6}$, c'eſt à ſçavoir 5 par 3, & 6 par 2, & viendront $\frac{15}{12}$ pour le quotient de $\frac{5}{6}$ diviſez par $\frac{2}{3}$.

Fin du ſeptiéme Element.

ELEMENT HUITIÉME.

THEOR. 1. PROP. I.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que les extrémes soient premiers entr'eux; ils seront les plus petits de leur raison.

A....4	D—
B......6	E——
C.........9	F———

SOIENT tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C; & que les extrémes A & C, soient premiers entr'eux: Je dis que A, B, C, sont les plus petits qui soient en la même raison.

Car s'ils ne sont tels, soient D, E, F, plus petits en la même raison, s'il est possible. Par ainsi il y a d'un côté les trois nombres A, B, C, & d'un autre les trois D, E, F, qui prins de deux en deux sont en même raison: Donc en raison égale, D sera à F, comme A est à C par la 14. prop. 7. & parce que A & C sont premiers entr'eux, ils seront les plus petits de leur raison, par la 23. prop. 7. & par la 21. prop. 7. ils mesureront également D & F: ce qui est impossible, pour être plus petits qu'iceux. Donc A, B, C, étoient les plus petits en la même raison, Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBL. 1. PROP. II.

Trouver tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, les plus petits en une raison donnée.

Soient deux nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la même raison : il faut premierement trouver trois nombres continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison donnée de A à B.

		F8.
	C4.	
A2.		G12.
	D6.	
B3.		H18.
	E9.	
		I27.

Que A multiplié par soy-même produise C ; A par B produise D ; & B par soy produise E : Je dis premierement que C, D, E, sont continuellement proportionnaux en la raison de A à B. Car puis que A multipliant A & B, produit C & D; comme A sera à B, ainsi C sera à D par la 17. prop. 7. Derechef, puis que B multipliant A & B, produit D & E, comme A sera à B, ainsi D sera à E : Parquoy C, D, E, seront continuellement proportionnaux en la raison de A à B. Je dis aussi qu'ils sont les plus petits d'icelle raison donnée. Car d'autant que A & B sont les plus petits de leur raison, par la 24. prop. 7. ils sont premiers entr'eux, & par la 29. prop. 7. C & E seront aussi premiers entr'eux : & par la precedente prop. les trois nombres C, D, E, seront les plus petits en la raison donnée de A à B.

Maintenant, qu'il en faille trouver quatre. Que A multipliant les trois trouvez C, D, E, produise F, G, H, & B multipliant le dernier E fasse I : Je dis que les quatre nombres F, G, H, I, sont continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de A à B. Car d'autant que A multipliant C, D, E a fait F, G, H, iceux sont en la même raison que C, D, E, c'est-à-dire en la raison de A à B. Derechef; puis que A & B multipliant E ont fait H & I, par la 18. prop. 7. comme A sera à B, ainsi H sera à I : & partant F, G, H, I, seront continuellement proportionnaux en la raison donnée de A à B. Davantage, puis que A & B étans les plus petits de leur raison, sont premiers entr'eux par la 24. prop. 7, aussi les extrémes F & I seront premiers entr'eux par la 29. prop. 7. attendu que A & B multipliez par eux-mêmes, ont produit C & E, & iceux multipliez par les mêmes A & B, ont produit les extrémes F & I. Donc par la prop. prec. les quatre nombres F, G, H, I, seront les plus petits de leur raison. Et en cette façon on en trouvera tant que l'on voudra. Nous avons donc trouvé des nombres continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Il resulte de cecy que trois nombres continuellement proportionnaux, étans les plus petits de leur raison; les extrémes seront quarrez : s'il y en a quatre, qu'iceux extrémes seront Cubes. Car des trois C, D, E, les extrémes C & E, ont été produits de A & B multipliez par eux-mêmes; & des quatre F, G, H, I, les extrémes F & I, ont été produits de la multiplication de A & B par leurs quarrez C & E.

Il resulte encore que les extrémes des nombres continuellement proportionnaux trouvez selon cette prop. sont premiers entr'eux. Car il a été démontré par les 24. & 29. prop. 7. que les extrémes C, E, & F, I, sont premiers entr'eux.

THEOR. 2. PROP. III.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont la même raison : les extrémes seront premiers entr'eux.

Soient quatre nombres A, B, C, D continuellement proportionnaux, les plus petits de tous ceux qui sont en la même raiſon : Je dis que les extrémes A & D, ſont premiers entr'eux.

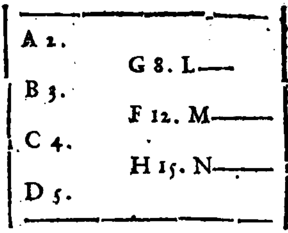
Car ſoient trouvez par la 35. prop. 7. les plus petits qui ſoient en la raiſon de A à B, ſçavoir F & G : ils ſeront premiers entr'eux par la 23. prop. 7. & comme il a été enſeigné en la preced. ſoient trouvez des nõbres continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raiſon de F à G, ſçavoir premierement les trois H, I, K ; puis aprés les quatre L, M, N, O ; & ainſi conſecutivement un plus, juſques à ce qu'on en ait autant qu'il y en aura de propoſez : il ne faut donc icy que ces quatre L, M, N, O. Or iceux étans les plus petits en la raiſon de F à G, ils ſeront égaux aux quatre A, B, C, D, qui ſont auſſi les plus petits en la même raiſon. Et comme les extrémes L & O, ſont premiers entr'eux par le corol. de la preced. les extrémes A & D ſeront auſſi premiers entr'eux. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

A 8.			L 8.
		H 4.	
B 12.	F 2.		M 12.
		I 6.	
C 18.	G 3.		N 18.
		K 9.	
D 27.			O 27.

PROBL. 2. PROP. IV.

Eſtans données tant de raiſons qu'on voudra en nombres les plus petits d'icelles raiſons ; trouver tant de nombres qu'on voudra les plus petits continuellement proportionnaux ſelon les raiſons données.

Soient données les deux raiſons de A à B, & de C à D, aux plus petits termes d'icelles : il faut trouver trois nombres en continuelle proportion, les plus petits de ceux qui ſont ſelon les raiſons données.



Soit trouvé par la 36. p. 7. le plus petit nombre qui soit mesuré par B, & par C, lequel soit F: en apres, soit trouvé G, autant de fois mesuré par A, que F par B : Pareillement H autant de fois mesuré par D que F par C. Je dis que les trois nombres G, F, H sont continuellement proportionnaux, les plus petits qui soient selon les raisons données.

Car d'autant que A mesure autant de fois G, que B mesure F; & par consequent A & B multiplians un même nombre (sçavoir celuy par lequel ils mesurent G & F) ont produit G & F : par la 18. p. 7. G est à F, en mesme raison que A à B. Et par mesme discours F sera à H, comme C à D : Donc G, F, H, sont continuellement proportionnaux, selon les raisons données. Mais ils sont aussi les plus petits, selon icelles raisons données : car s'il n'est ainsi, en soient trouvez de plus petits L, M, N, s'il est possible, & qui répondent aux raisons données, comme les trois G, F, H. Or vû que A & B sont les plus petits en leur raison, par la 21. p. 7. ils mesureront également L & M, iceux estans en la mesme raison, c'est à sçavoir le consequent B, le consequent M : Par mesme discours C & D mesureront également M & N, sçavoir l'antecedant C l'antecedant M. Parquoy B & C mesurans M; par la 37. p. 7. F, qui est le plus petit nombre qu'ils mesurent, mesurera aussi M, sçavoir est, le plus grand, le plus petit : ce qui est impossible. Partant les nombres G, F, H, estoient les plus petits selon les raisons données.

Maintenant soient données trois raisons aux plus petits termes A à B, C à D, & F à G, selon lesquelles il faut trouver quatre nombres tels que requiert la proposition.

Soient trouvez les trois nombres I, H, K, comme dessus : ce fait, ou F mesurera K, ou non. S'il le mesuroit, il faudroit prendre L autant de fois mesuré par G, que K par F : & par la precedente demonstration, il est évident qu'on auroit satisfait. Que si F ne mesure K, soit trouvé O le plus petit nombre mesuré par F, & par K, par la 36. p. 7. Et que G mesure autant de fois P, que F mesure O. Item que comme K mesure O, ainsi H mesure N, & I mesure M. Je dis que M, N, O, P sont les quatre nombres continuellement proportionnaux requis.

A 2.		
	I 8.	M 16.
B 3.		
	H 12.	N 24.
C 4.		
	K 15.	O 30.
D 5.		
F 6.	L —	P 35.
G 7.		

Car puisque I, H, K mesurent également M, N, O, comme dit est cy-dessus, I sera à H ainsi que M à N, & comme H sera à K, ainsi N à O. Mais il y a mesme raison de I à H que de A à B, & de H à K que de C à D, pource que A & B mesurent également iceux I & H, & C, D, également H & K. Donc comme A à B, ainsi M à N ; & comme C à D, ainsi N à O ; aussi comme F à G, ainsi O à P, à cause que F, G mesurent également O, P. Les quatre nombres M, N, O, P, sont donc continuellement proportionnaux és raisons données. Et qu'ils soient les plus petits, on le demontrera en la mesme façon qu'on a fait cy-dessus de trois nombres.

Or en la mesme maniere sera procedé, si 4, ou davantage de raisons sont données aux plus petits termes. Parquoy estans données tant de raisons qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 3. PROP. V.

Les nombres plans sont l'un à l'autre en la raison composée de leurs costez.

Soient deux nombres plans A & B, les costez de A, soient C & D ; & les costez de B, soient E & F. Je dis que le plan A est au plan B, en la raison composée de C à E, & de D à F.

	C 3.
A 12.	
	D 4.
G 8.	
	E 2.
B 18.	
	F 9.

Qu'il ne soit ainsi. Que D multiplié par E produise G. Donc D multipliant C & E, produira A & G, qui seront en mesme raison que C à E, par la 17. p. 7. Et par mesme discours E multipliant D & F, produira G & B, qui seront aussi en mesme raison que D à F. Parquoy les trois nombres A, G, B sont continuellement proportionnaux és raisons de C à E, & de D à F, costez. Mais par la 5. d. 6. la raison de A à B est composée de A à G, & de G à B. Donc la raison du nombre plan A au nombre plan B, sera composée de la raison des costez C à E, & D à F. Parquoy les nombres plans sont l'un à l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 4. PROP. VI.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que le premier ne mesure le second, aussi pas un autre ne mesurera pas un autre.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D, E; & que A premier ne mesure B 2e. Je dis que pas un autre n'en mesurera pas un autre.

A 16.	B 24.	C 36.	D 54.	E 81.
F 4.	G 6.	H 9.		

Car premierement, comme A ne mesure B, ainsi B ne mesurera C; ny C ne mesurera D; ny D, E, d'autant qu'ils sont en mesme raison : par ainsi aucun d'iceux nombres ne mesure son prochain suivant. Je dis aussi qu'en passant quelqu'un, les extrémes ne se pourront mesurer, comme A ne pourra mesurer C. Car ayant trouvé trois nombres F, G, H les plus petits en la raison de A à B, ou de A, B, C par la 35. p. 7. en raison égale A sera à C comme F à H, par la 14. p. 7. & puis que par l'hypothese, A ne mesure B, aussi F ne mesurera G; & partant F ne sera pas l'unité, autrement il mesureroit G, vû que l'unité mesure tout nombre. Et d'autant que par la 3. prop. de ce livre F & H sont nombres premiers, & que F n'est pas l'unité; iceluy F ne mesurera pas H: Mais nous avons demontré que comme A est à C, ainsi F est à H. Donc comme F ne mesure H, aussi A ne mesurera C. Par mesme discours on prouvera que B ne mesurera D, ny C ne mesurera E. Que si on prend quatre nombres les plus petits en la raison de A à B, on demontrera en la mesme maniere que A ne mesurera le quatriéme D, ny B un quatriéme E, & ainsi des autres. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 5. PROP. VII.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux, & que le premier mesure le dernier, il mesurera aussi le second.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D; & que le premier A mesure le dernier D. Je dis qu'il mesurera aussi le second B.

A 3.	B 9.	C 12.	D 24.

Car par la precedente, si A ne mesuroit B, aussi pas un autre ne mesureroit pas un autre, & par consequent A ne mesureroit pas D, contre l'hypothese. A mesurera donc B. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux, il en tombera autant entre deux autres, estans en la mesme raison.

Soient les nombres A & B, entre lesquels tombent C & D continuellement proportionnaux : & qu'il y ait telle raison de E à F, que de A à B. Je dis qu entre E & F se trouveront autant de nombres moyens continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

A 3.	C 9.	D 27.	B 81.
G 1.	H 3.	I 9.	K 27.
E 2.	L 6.	M 18.	F 54.

Car ayant trouvé par la 2. prop. 8. les quatre nombres G, H, I, K, continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raison de A, C, D, B; en raison égale, comme A sera à B, ou E à F (car c'est la même raison) ainsi G à K par la 14. prop. 7. Mais G & K sont premiers entr'eux par la 3. prop. 8. & les plus petits nombres de leur raison par la 23. prop. 7. & par la 21. prop. 7. ils mesureront également E & F.. Donc autant de fois que G & K mesureront E & F; qu'autant de fois H & I mesurent d'autres nombres L & M : tellement que les nombres G, H, I, K, mesurent également les nombres E, L, M, F, par la 9. com. sent. G, H, I, K, multiplians le nombre par lequel ils mesurent E, L, M, F, produisent iceux E, L, M, F, lesquels seront entr'eux comme G, H, I, K, ainsi que nous avons démontré à la 18. prop. 7. Mais G, H, I, K, sont continuellement proportionnaux : donc aussi E, L, M, F, seront continuellement prop. & partant puis que la multitude E, L, M, F, est égale à la multitude A, C, D, B, il tombera autant de moyens proportionnaux entre E & F, qu'entre A & B. Parquoy si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

SCHOLIE.

De cette démonstration appert non seulement, qu'il tombe autant de moyens prop. entre E *&* F, *qu'entre* A *&* B, *mais aussi que la proportion des nombres* E, L, M, F, *est la même que des nombres* A, C, D, B. *Car il a été démontré que la proportion de* E, L, M, F, *est la même que celle des nombres* G, H, I, K : *Mais iceux sont par la construction en la même proportion que* A, C, D, B : *donc aussi* E, *L, M, F, sont en même proportion que A, C, D, B.*

Il appert aussi de ce Theoreme, qu'entre nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartienté, ne peut tomber un nombre moyen proportionnel. Car puis que la raison double, és moindres nombres, est trouvée entre le binaire & l'unité; mais la superparticuliere, entre les nombres differens seulement de l'unité; & la superbipartiente, entre les nombres, desquels la difference est le binaire: si entre deux nombres de raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, tombe un moyen prop. il en tombera pareillement un (par ce Theor.) entre le binaire & l'unité, ou entre les nombres differens de la seule unité, ou du binaire; c'est à sçavoir entre les plus petits nombres qui ont la même raison que ceux-là; ce qui est impossible. Car il èst tout évident qu'entre le binaire & l'unité, ny entre deux nombres differens seulement de l'unité, ne peut tomber aucun nombre moyen prop. Et quant aux nombres differens seulement du binaire, tombe seulement un nombre, qui differe à l'un & l'autre de l'unité: lequel nous démontrerons ne pouvoir être milieu prop. entre iceux. Soient les nombres AB & CD, differens du binaire, entre lesquels tombe le nõbre EF moindre que AB de l'unité, mais plus grand que CD, aussi de l'unité. Je dis que EF n'est moyen prop. entre

A . . . . . 6 G . B	A . . G . B
E . . . . . 5 H F .	E . H . F
C . . . . . D	C . D

AB, CD. Car si on dit que comme AB à EF, ainsi EF à CD: étant ôté de AB, le nombre AG égal à EF, afin qu'il reste l'unité GB; & de EF, le nombre EH égal à CD, afin qu'il reste aussi l'unité HF; pareillement comme AB sera à EF, ainsi le retranché AG sera au retranché EH. Donc aussi le reste GB sera au reste HF; c'est-à-dire l'unité à l'unité, comme le tout AB au tout EF, le plus grand au moindre: Ce qui est absurde; dont EF n'est pas moyen prop. entre AB & CD.

Parquoy entre les nombres de raison triple ne peut tomber un nombre moyen prop. Autrement il en tomberoit aussi un entre 3 & 1, les plus petits nombres de la raison triple, qui different entr'eux du binaire: Ce qui est impossible, comme nous venons de démontrer.

Par même raison, ne peut aussi tomber un moyen prop. entre deux nombres de quintuple raison. Car s'il y en tomboit un, il en tomberoit aussi un (par ce Theor.) entre 5 & 1, les plus petits nombres de la raison quintuple : ce qui ne se peut faire. Car s'il est possible qu'entre le quinaire AB & l'unité C, tombe un moyen prop. D binaire, ou ternaire ; tellement que AB soit à D, comme D à C : en changeant C sera à D comme D à AB. Et pource que l'unité C mesure D, aussi D mesurera AB. Mais le binaire, ou ternaire D mesure pareillement le senaire AE : donc D mesurera le tout AE, & le retranché AB ; & partant par la 11. com. sent. aussi D mesurera le reste BE unité. Ce qui est absurde. La même absurdité adviendra toûjours, si on dit qu'un nombre quartenaire soit moyen prop. entre iceluy quinaire AB, & l'unité C. Il ne tombera donc point de milieu prop. entre 5 & 1. & par consequent entre quelconques nombres de raison quintuple.

A . . . . . B . E
D . . D . . .
C .

THEOR. 7. PROP. IX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, autant de nombres continuellement proportionnaux qui tomberont entre iceux, autant en tombera-il entre chacun d'iceux, & l'unité.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, entre lesquels tombent quelques nombres continuellement proportionnaux C & D. Je dis qu'entre chacun d'iceux A, B, & l'unité, il tombera autant de nombres cõtinuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

A8.		C12.		D18.		B27.
			Vnité.			
		E1.		F3.		
	G4.		H6.		I9.	
K8.		L12.		M18.		N27.

Car ayant posé l'unité, soient pris E & F, les plus petits nombres qui soient en la raison de A à C, par la 35. prop. 7. puis par la 2. prop. 8. soient trouvez les trois plus petits en la même raison G, H, I: puis les quatre K, L, M, N; & ainsi consequemment jusques à ce que la multitude des pris soit égale à la multitude A, C, D, B. D'autant que les extrémes A, B, sont premiers entr'eux, par la 1. prop. 8. A, C, D, B, seront les plus petits en la raison de E à F : Mais leurs égaux en multitude K, L, M, N, sont aussi les plus petits en la même raison par la construction. Donc K, L, M, N, sont égaux à iceux A, C, D, B, chacun au sien, comme K à A, & N à B. Et pource que (comme il appert par la démonstration de la 2. pr. 8.) E multipliant soy-même a produit G; & multipliant G a fait K, par la 7. com. sent. E mesurera G par E; & G iceluy K par le même E : mais par la 5. com. sent. l'unité mesure iceluy E par E. Donc l'unité mesurera également E; & E iceluy G; & G iceluy K : & partant l'unité sera même partie de E, que E de G, & G de K. Donc par la 20. def. 7. l'unité & les nombres E, G, K, sont continuellement proportionnaux. Par même discours l'unité & les trois nombres F, I, N, seront aussi prouvez continuellement proportionnaux. Et puis que tant la multitude E, G, K, que F, I, N, avec l'unité, est égale à la multitude K, L, M, N, ou A, C, D, B; il s'ensuivra qu'entre l'unité & le nombre K ou A, qui luy est égal; & aussi entre l'unité & le nombre N ou B, tomberont autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre les nombres A & B. Parquoy si deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 8. PROP. X.

Autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'unité & chacun de deux nombres proposez; autant en tombera-t'il entre iceux deux nombres.

Soient deux nombres proposez A & B, & qu'entre l'unité C, & chacun d'iceux, tombent quelques nombres continuellement proportionnaux, comme D & E, entre C & A : Item F & G, entre C & B. Je dis qu'il en tombera aussi deux continuellement proportionnaux entre A & B.

A 8.	I 12.	K 18.	B 27.
	E 4.	H 6.	G 9.
	D 2.	F 3.	
	C 1.		

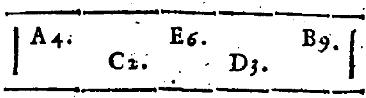
Car si on vient à multiplier, comme en la 2. prop. 8. pour trouver les trois nombres H, I, K, c'est à sçavoir que H soit le produit de D multiplié par F ; I, le produit de D par H : & K, le produit de F par H. Puis que comme C à D, ainsi D à E, & E à A ; & que par la 5. com. sent. C unité mesure D, par les unitez qui sont en D ; aussi D mesurera E, par les unitez qui sont en D ; & E mesurera A, par les mêmes unitez de D ; ainsi il est évident que D multiplié par soy-même produit E, & E multiplié par D, a produit A. Par même discours se prouvera que F multiplié par soy-même, a produit G, & que G par F a produit B.

Maintenant, puis que D multiplié par soy-même, & par F a produit E & H, par la 17. prop. 7. comme D à F, ainsi E à H. Pareillement F multiplié par D, & par soy-même, a produit H & G ; aussi H sera à G comme D à F : parquoy les trois nombres E, H, G, seront continuellement proportionnaux. Davantage D multipliant E & H, produit A & I ; & partant comme E sera à H, ainsi A sera à I, par la 17. prop. 7. & puis que D & F multipliant H, produisent I & K ; I sera à K, comme D à F. Par la 18. prop. 7. Par même discours K sera à B, comme H à G, étans les produits de H & G multipliez par F. Parquoy A, I, K, B, sont continuellement proportionnaux ; & partant les deux nombres I & K sont tombez en continuelle proportion entre A & B, c'est à sçavoir autant qu'il y en a entre chacun d'iceux A & B, & l'unité C. Parquoy autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'unité, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 9. PROP. XI.

Entre deux nombres quarrez tombe un moyen proportionnel : & le quarré est au quarré en raison doublée du côté au côté.

Soient deux nombres quarrez A & B, desquels les côtez soient C & D. Je dis qu'entre iceux quarrez A & B, tombera un moyen proportionnel : & que le quarré A est au quarré B en la raison doublée du côté C au côté D.



Car le nombre C multiplié par D, produise E : Et puis que C est le côté de A; iceluy C multiplié par soy-même produit A; & par D fait E : donc comme C à D, ainsi A à E par la 17. prop. 7. Derechef, puis que D multipliant C produit E, & multipliant soy-même fait le quarré B, par la 17. prop. 7. comme C à D, ainsi E à B. Partant E est moyen proportionnel entre A & B.

Pour la seconde partie : puis que A, E, B sont continuellement proportionnaux, A 1. est à B 3. en raison doublée de A 1. à E 2. par la 10. deff. 5. qui est la même raison que de C à D, ainsi qu'il a été démontré cy dessus. Parquoy entre deux nombres quarrez tombe un moyen proportionnel, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 10. PROP. XII.

Entre deux nombres cubes tombent deux moyens proportionnaux : & le cube est au cube en raison triplée du côté au côté.

Soient deux nombres cubes A & B, desquels les côtez soient C & D. Je dis que entre iceux cubes A & B, tomberont deux moyens proportionnaux : & que la raison du cube A au cube B, est la raison triplée du côté C au côté D.

Qu'il

Qu'il ne soit ainsi. Que C se multipliant soy-même produise E ; & D par soy produise F ; mais C & D l'un par l'autre produise G : & iceluy G multiplié par l'un & l'autre C & D, produise H & I. Or puis que C multipliant C & D a fait E & G ; comme C sera à D, ainsi E à G par la 17. prop. 7. Item puis que D multipliant C & D a fait G & F ; aussi G sera à F comme C à D : Partant E, G, F, sont continuellement proportionnaux en la raison de C à D. Derechef, pource que C multipliant E fait le cube A, & multipliant G a fait H, par la même prop. A sera à H, comme E à G, c'est-à-dire comme C à D. Item puis que D multipliant G a fait I, & multipliant F est produit le cube B ; par la 17. prop. 7. I sera à B, comme G à F, c'est-à-dire comme C à D. Mais par la 18. prop. 7. H est aussi à I, comme C à D, attendu que C, D, multiplians G, ont fait H & I : donc A, H, I, B seront continuellement proportionnaux selon la raison de C à D. Partant H & I, seront deux moyens proportionnaux entre les nombres cubes A & B.

A 27.	H 36.	I 48.	B 64.
E 9.	G 12.	F 16.	
C 3.	D 4.		

Quant à la seconde partie, elle est manifeste, car d'autant que A, H, I, B sont continuellement proportionnaux, A 1. est à B 4e en raison triplée de A 1. à H 2e par la 10. def. 5. Mais comme A est à H, ainsi C est à D. Donc le cube A est au cube B en raison triplée du côté C au côté D. Parquoy entre deux nombres cubes, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 11. PROP. XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, iceux étans multipliez chacun par soy, leurs produits seront aussi continuellement proportionnaux : & si chacun multiplie encores son produit, les derniers produits seront aussi continuellement proportionnaux : & cela adviendra toûjours environ les extrémes.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C, lesquels multipliez chacun par soy-même, produisent D, E, F; & que les mêmes A, B, C, multiplians chacun son produit fassent G, H, I, & ainsi continuellement. Je dis que D, E, F, & G, H, I, sont continuellement proportionnaux.

		A2.	B4.	C8.		
	D4.	N8.	E16.	O32.	F64.	
G8.	P16.	Q32.	H64.	R128.	S256.	I512.

Qu'il ne soit ainsi, que N soit le produit de A multiplié par B : & O celuy de B par C. Pareillement que A multipliant N, E fasse P & Q : mais B multipliant O, F produise R, S. Donc par la 17. prop. 7. A multipliant soy-même, & B, les produits D & N seront en la même raison de A à B : & par même discours B multipliant A & soy-même, les produits N & E seront aussi en la même raison de A à B, & ainsi des autres : Partant D, N, E, O, F, seront continuellement proportionnaux en la raison de A à B : par ainsi D, N, E; & E, O, F, sont continuellement proportionnaux en une même raison ; & partant en raison égale, comme D sera à E, ainsi E à F : parquoy D, E, F, seront continuellement proportionnaux.

Pareillement d'autant que A multipliant D, N, E a fait G, P, Q; par ce que nous avons demontré à la 18. prop. 7. G, P, Q seront entr'eux, comme les proportionnaux D, N, E; c'est-à-dire comme A à B. Item pource que A & B multiplians E ont produit Q & H, aussi par la 18. prop. 7. comme A sera à B, ainsi Q à H. Donc G, P, Q, H, sont proportionnaux en la raison de A à B. Par mesme discours H, R, S, I, seront prouvez proportionnaux en la mesme raison de A à B : & partant en raison égale, comme G sera à H, ainsi H à I : parquoy G, H, I seront continuellement proportionnaux. S'il y a donc tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 12. PROP. XIV.

Si un nombre quarré mesure un nombre quarré; aussi le costé mesurera le costé : que si le costé mesure le costé, aussi le quarré mesurera le quarré.

Soit le nombre quarré A qui mesure le nombre quarré B; & d'iceux quarrez les costez soient C & D. Je dis en premier lieu que le costé C mesurera aussi le costé D.

A 4.	E 12.	B 36.
C 2.	D 6.	

Car ayant multiplié C par D, il est évident par la demonstration de la 11. prop. 8. que le produit E est moyen proport. entre A & B, en la raison de C à D : mais de ces trois nombres A, E, B, le premier A mesure le dernier B : donc par la 7. prop. 8. il mesurera aussi le second E. Parquoy puis que comme A à E, ainsi C à D : aussi le costé C mesurera le costé D.

Je dis en second lieu, que si le costé C mesure le costé D, aussi le quarré A mesurera le quarré B. Car comme dessus A, E & B seront continuellement proportionnaux en la raison de C à D : Et puisque C mesure D, aussi A mesurera E, & E musurera B, & par consequent A mesurera aussi B, car qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré, par la 11. com. sent. Parquoy si un nombre quarré mesure un nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit demontrer.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si un nombre cube mesure un nombre cube : aussi le costé mesurera le costé : & si le costé mesure le costé ; aussi le cube mesurera le cube.

Soit un nombre cube A, qui mesure un autre nombre cube B, & d'iceux cubes les costez soient C & D. Je dis premierement que le costé C mesurera aussi le costé D.

Car que chaque côté C, D multipliant soy-même fasse E, F, mais se multipliant l'un l'autre fassent G, & multipliant derechef G, produisent H, I. Il est évident par la démonstration de la 12. prop. 8. que

A 8.	H 24.	I 72.	B 216.
E 4.	G 12.	F 36.	
C 2.	D 6.		

tant E, G, F, que A, H, I, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de C à D. Et puis que par l'hypothese A 1. mesure B dernier, il mesurera aussi H 2^{e}, par la 7. prop. 8. Mais A étant à H, comme C à D, aussi le côté C mesurera le côté D.

Secondement, que le côté C mesure le côté D: Je dis que le cube A mesurera le cube B. Car comme il a été dit cy-dessus A, H, I, B, seront continuellement proportionnaux en la raison de C à D: Parquoy le côté C mesurant le côté D, aussi le cube A mesurera son prochain moyen proport. H, lequel mesurera l'autre moyen proport. I, & iceluy l'autre cube B; & par consequent le cube A mesurera l'autre cube B par la 11. com. sent. Si donc un nombre cube, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si un nombre quarré ne mesure un nombre quarré, aussi le côté ne mesurera le côté; que si le côté ne mesure le côté, aussi le quarré ne mesurera le quarré.

Soient les nombres quarrez A & B, desquels les côtez sont C & D; mais que le quarré A ne mesure le quarré B: Je dis premierement que le côté C ne mesurera pas le côté D.

A 16.	B 81.
C 4.	D 9.

Car par la 14. prop. de ce livre, si ledit côté C mesuroit le côté D, aussi le quarré A mesureroit le quarré B, contre l'hypothese. Secondement que le côté C ne mesure pas le côté D: Je dis que le quarré A ne mesurera pas aussi le quarré B. Cecy est aussi manifeste, car si le quarré A mesuroit le quarré B, aussi le côté C mesureroit le côté D par la susdite 14. prop. 8. contre l'hypothese. Si donc un nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 15. PROP. XVII.

Si un nombre cube ne mesure un nombre cube, aussi le côté ne mesurera le côté : que si le côté ne mesure le côté, aussi le cube ne mesurera le cube.

Soient les nombres cubes A & B, dont les côtez sont C & D ; & que A ne mesure B : Je dis que le côté C ne mesure pas aussi le côté D : & davantage que si le côté C ne mesure pas le côté D, aussi le cube A ne mesurera pas le cube B.

A 8.	B 27.
C 2.	D 3.

Cette démonstration se fait par l'impossible de la 15. prop. 8. Car par icelle, si le côté mesuroit le côté, aussi le cube mesureroit le cube, ce qui est contre l'hypothese. Et pour le second : Si le cube mesuroit le cube, aussi le côté mesureroit le côté, par la susdite 15. prop. 8. ce qui est aussi contre l'hypothese. Parquoy si un nombre cube ne mesure un nombre cube, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Entre deux nombres plans semblables, il y a un moyen proportionnel : & le plan est au plan en raison doublée des côtez de semblable raison.

Soient deux nombres plans semblables A & B, & leurs côtez soient C D, & E, F. Je dis qu'entre iceux plans A & B se trouvera un moyen proportionnel ; & que A est à B en raison doublée de C à E, ou de D à F, côtez de même raison.

A 12.	G 18.	B 27.	
C 6.	D 2.	E 9.	F 3.

Car puis que les plans

A & B sont semblables, par la 21. def. 7. C sera à D comme E à F ; & si A sera le produit de C par D : Item B le produit de E par F, par la 17. def. 7. Maintenant que D multipliant E produise G : par la 17. prop. 7. puis que D multipliant C & E produit A & G : A sera à G, comme C à E, ou D à F (car puis que comme C à D, ainsi E à F, en permutant, comme C à E, ainsi D à F.) Item E multipliant D & F, produit G & B : partant iceux G & B seront l'un à l'autre comme D à F : ainsi A, G, B, seront continuellement proportionnaux en la raison de C à E, & partant G sera un moyen proportionnel entre A & B.

Quant à la seconde partie, elle est évidente : car puis que A, G, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de C à E : par la 10. def. 5. A est à B en raison doublée de A à G, qui est la même raison que de C à E, ou de D à F, côtez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres plans semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Entre deux nombres solides semblables, tombent deux moyens proportionnaux ; & le solide est au solide en raison triplée des côtez de semblable raison.

Soient deux nombres solides semblables A & B ; & de A les côtez soient C, D, E, mais ceux de B soient F, G, H.

Je dis qu'entre A & B, on trouvera deux moyens proportionnaux, & que A est à B en raison triplée de C à F, ou de D à G, ou E à H, côtez de même raison.

A 30.	M 60.	N 120.	B 240.		
I 6.	L 12.	K 24.			
C 2.	D 3.	E 5.	F 4.	G 6.	H 10.

Car I soit le produit de C multiplié par D : K le produit de F par G : L le produit de F par D, & finalement M & N, soient les produits de L par E & H.

Maintenant puis que par la 21. def. 7. les côtez C, D, E, sont proportionnaux aux côtez F, G, H : en permutant, ils seront aussi proportion. c'est-à-dire que comme C sera à F, ainsi D sera à G, & E à H. Et puis que D multipliant C & F, a produit I & L, par la 17. prop. 7. I sera à L comme C à F, c'est-à-dire comme D à G, ou E à H. Semblablement F multipliant D & G, a produit I & K; parquoy I sera à K comme D à G : & partant I, L, K, sont continuellement proportionnaux en la raison de D à G, ou C à F, ou E à H. Pareillement puis que le solide A, est le produit de la multiplication des trois nombres C, D, E : & I, le produit de C par D : aussi A sera le produit de I par E: Item le solide B étant produit de la multiplication des trois nombres F, G, H : & K le produit de F en G: aussi B sera le produit de K par H. Donc puis que par la 17. prop. 7. E multipliant I & L, produit A & M en la raison de I à L : & semblablement que L multipliant E & H, produit M & N en la raison de E à H, qui est la même que de I à L : aussi H multipliant L & K, les produits N & B seront en la raison de L à K, qui est la même que de I à L. Et partant les quatre nombres A, M, N, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de I à L, c'est-à-dire de C à F : & M, N seront deux moyens proportionnaux entre A & B.

Pour la seconde partie, elle est évidente ; car puis que les quatre nombres A, M, N, B, ont été prouvez continuellement proportionnaux en la raison de C à F, par la 10. def. 5. A est à B en raison triplée de A à M : Mais A est à M, comme C à F, ou D à G, ou E à H : donc A sera à B en raison triplée de C à F, ou D à G, ou E à H, côtez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres solides semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si entre deux nombres, tombe un moyen proportionnel : iceux seront nombres plans semblables.

Soient deux nombres A & B, entre lesquels tombe un moyen proportionnel C. Je dis que A & B sont nombres plans semblables.

Car ayant pris D & E, les plus petits termes en la raison de A, C, B : par la 21. prop. 7. iceux D & E mesureront également A & C; qu'ils les mesurent par F : Ils mesureront aussi également C & B, qui sont en la même raison : qu'ils les mesurent par G. Donc F multipliant D & E, sera produit A & C par la 9. com. sent. Item G multipliant les mêmes D & E, seront produits C & B. Vû donc que E multipliant F & G a fait C & B; comme C sera à B, ainsi F à G par la 17. prop. 7. Mais comme C est à B, ainsi étoit D à E. Donc comme D sera à E, ainsi F sera à G; & en permutant comme D sera à F, ainsi E à G. Et puis que F multipliant D a fait A, iceluy A sera un plan duquel les côtez sont D, F. Item pource que G multipliant E a fait B; B sera le plan duquel E & G sont les côtez. Mais ces côtez ont été démontrez proportionnaux, c'est-à-dire D être à F, comme E à G. Donc par la 21. def. 7. A & B seront plans semblables. Parquoy si entre deux nombres tombe un moyen proportionnel, &c. Ce qui étoit à prouver.

A 12.	C 18.	B 27.	
D 2.	E 3.	F 6.	G 9.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si entre deux nombres, tombent deux moyens continuellement proportionnaux; iceux seront nombres solides semblables.

Soient deux nombres A & B, entre lesquels tombent deux moyens continuellement proportionnaux C & D. Je dis que A & B sont nombres solides semblables.

Qu'il ne soit ainsi. Soient trouvez par la 2. prop. 8. les trois nombres E, F, G, les plus petits en la raison de A, C, D, B. Veu donc qu'entre E & G tombe un moyen proportionnel F, par la preced. pro. E & G seront plans semblables : Soient

A16.	C24.	D36.	B54.		
	E4.	F6.	G9.		
H2.	I2.	M4.	K3.	L3.	N6.

leurs côtez H, I ; & K, L, lesquels seront proportionnaux par la 21. def. 7. & puisque E, F, G sont les plus petits en la raison de A, C, D, ils les mesureront également par la 21. prop. 7. soit selon le nombre M : c'est-à-dire que E, F, G, étans multipliez par M produisent A, C, D. Item par le même discours E, F, G, mesureront également les trois nombres C, D, B, chacun le sien : soit selon le nombre N, c'est à dire, que N multipliant E, F, G, produise C, D, B. Il est donc évident, que A & B sont nombres solides, desquels les côtez sont H, I, M, & K, L, N. Mais d'autant que M & N multiplians F, produisent C & D, par la 18. prop. 7. M sera a N en la raison de C à D, & C est à D en même raison que E à F par la 17. prop. 7. pource que N multipliant E & F a produit iceux C & D ; mais aussi E est à F en la même raison que H à K, ou I à L. Donc aussi H sera à K, ou I à L, comme M à N ; & en permutant, H sera à I, comme K à L ; & I à M comme L à N : & partant les côtez H, I, M sont proportionnaux aux côtez K, L, N ; & par la 21. def. 7. A & B seront nombres solides semblables : Parquoy si entre deux nombres tombent, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si trois nombres sont continuellement proportionnaux, & que le premier soit quarré ; le troisiéme sera aussi quarré.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C, desquels le premier A soit quarré : Je dis que le troisiéme C est aussi quarré.

Car puisque entre A & C tombe un moyen proportionnel, par la 20. prop. de ce livre, ils seront plans semblables ; & partant l'un d'iceux étant quarré, aussi sera l'autre.

A 4. B 6. C 9.

Si donc trois nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si quatre nombres sont continuellement proportionnaux, & que le premier soit cube, aussi le quart sera cube.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux, A, B, C & D, le premier desquels A soit cube: Je dis que le quatriéme D est aussi cube.

A 8.	B 12.	C 18.	D 27.

Car puisque entre A & D tombent deux moyens proportionnaux B & C, par la 21. prop. de ce livre, iceux A & D seront solides semblables: mais l'un est cube, & partant aussi sera l'autre. Parquoy si quatre nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré; & que l'un d'iceux soit quarré, aussi sera l'autre.

Soient deux nombres A & B, lesquels soient entr'eux, comme le quarré C au quarré D, & soit A quarré. Je dis que B est aussi quarré.

A 16.	F 24.	B 36.
C 4.	E 6.	D 9.

Car puisque A est à B comme C à D; & par la 11. prop. 8. il tombe entre C & D, un moyen proportionnel, sçavoir est E; il en tombera aussi un entre A & B par la 8. prop. 8. & soit F. Vû donc que les trois nombres A, F, B, sont continuellement proportionnaux, & le premier A est quarré; aussi par la 22. prop. 8. le troisiéme B sera quarré. Parquoy si quatre nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

Il appert des choses cy-dessus dites, que la raison de quelque nombre quarré que ce soit à quelconque nombre non quarré, ne peut être exhibée en deux nombres quarrez: Car si elle y estoit exhibée, par la 24. prop. 8. les deux premiers nombres ayans la même raison que les quarrez de la raison exhibée seroient aussi quarrez puis que l'un est posé quarré. Ce qui est absurde: car l'un est posé non quarré. D'où vient que les nombres ayant la raison double, ne sont comme nombre quarré à nombre quarré. Car tous ces nombres cy 4. 8. 16. 32, &c. seroient quarrez; d'autant que 4 estant quarré, par la 24. prop. 8. aussi 8 seroit quarré; donc aussi 16 & 32, &c. Ce qui est absurde. Car entre 4 & 8; & entre 8 & 16; & entre 16 & 32, &c. tomberoit un moyen proportionnel, s'ils estoient quarrez, par la 11. prop. 8. & nous avons démontré au Scholie de la 8. prop. 8. qu'il ne peut tomber de moyen proportionnel entre quelconques nombres de la raison double.

Semblablement les nombres en raison quintuple, ne sont aussi comme nombre quarré à nombre quarré. Car s'ils y estoient, par la 11. prop. 8. il tomberoit entre iceux un milieu proportionnel: donc aussi entre 5 & 1, les plus petits nombres de la raison quintuple par la 8. prop. 8. Ce qui est impossible, comme nous avons démontré au Scholie de la même proposition.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube, & que l'un d'iceux soit cube, aussi sera l'autre.

A8.	G12.	H18.	B27.
C64.	E96.	F144.	D216.

Que A soit à B, comme le cube C au cube D, & que A soit cube: Je dis que B est aussi cube.

Car puisque A est à B comme C à D, il tombera deux moyens proportionnaux entre les deux cubes C & D par la 12. prop. de ce livre, lesquels soient E & F : Mais par la 8. prop. 8. il en tombera aussi deux entre A & B, & soient iceux G & H. Veu donc que les quatre nombres A, G, H, B sont continuellement proportionnaux, & que le premier A est cube, aussi sera le quatriéme B par la 23. prop. 8. Parquoy si deux nombres sont l'un à l'autre, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il appert aussi des choses cy-dessus, que la raison de quelque nombre cube que ce soit à quelconque nombre non cube, ne se peut exhiber par deux nombres cubes.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Les nombres plans semblables, sont l'un à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré.

Soient deux nombres plans semblables A & B. Je dis que A sera à B comme nombre quarré à nombre quarré.

A 20.	C 30.	B 45.
D 4.	E 6.	F 9.

Car par la 18. prop. 8. il tombera entre A & B un moyen prop. & soit C : si donc on prend les trois nombres D, E, F, les plus petits en la raison continuë de A, C, B, les extrémes D & F seront quarrez par le corol. de la 2. prop. 8. Parquoy puis qu'en raison égale A est à B, comme D à F, il est manifeste que A est à B comme nombre quarré à nombre quarré, , c'est à sçavoir comme le nombre quarré D au nombre quarré F. Parquoy les nombres plans semblables, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Clavius a démontré aprés Commandin la converse de cette proposition c'est à sçavoir :

Que les nombres qui sont l'un à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré, sont plans semblables.

Car les nombres A & B étans entr'eux, comme les quarrez D & F, par la 11. prop. 8. Il tombera un moyen prop. entre iceux quarrez: & aussi un entre A & B, par la 8. prop. 8. & partant A & B sont plans semblables.

Et par cecy est manifeste que les nombres plans qui ne sont semblables, ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Les nombres solides semblables, sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube.

Soient deux nombres solides semblables A, B. Je dis que A sera à B, comme nombre cube à nombre cube.

A 16.	C 24.	D 36.	B 54.
E 8.	F 12.	G 18.	H 27.

Car par la 16. prop. 8. entre A & B tomberont deux moyens proportionnaux, & soient iceux C & D. Que si on prend les plus petits termes de la raison de A à C, & qu'en la raison d'iceux on trouve, par la 2. prop. 8. les quatre nombres E, F, G, H, en continuelle proportion, les extrémes E & H seront cubes par le corol. de la 2. prop. 8. & en raison égale comme E à H, ainsi A à B: Parquoy les nombres solides semblables sont l'un à l'autre, &c. Ce qui étoit à démontrer.

SCHOLIE.

Clavius démontre aussi aprés Commandin la converse de cette proposition sçavoir est:

Que les nombres qui sont l'un à l'autre comme nombre cube à nombre cube, sont solides semblables.

Car les nombres A & B, étans entr'eux, comme les cubes E & H, par la 12. prop. 8. il tombera deux moyens prop.

entre les nombres cubes E & H ; il en tombera aussi deux entre A & B par la 8. prop. 8. & partant par la 21. prop. 8. A & B sont solides semblables.

Il est évident par toutes les choses cy-dessus dites, qu'aucuns nombres ayans raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, ne sont plans, ou solides semblables. Car s'ils étoient plans semblables, par la 18. prop. 8. un moyen proportionnel tomberoit entr'eux, ce qui ne se peut faire, comme il a été démontré au Scholie de la 8. prop. 8. Ils ne seront pas aussi solides semblables, puis qu'entre iceux ne peuvent tomber deux moyens prop. car autrement il en tomberoit aussi deux entre les plus petits nombres des mesmes raisons par la 8. prop. 8. Ce qui ne se peut faire, pource qu'iceux sont seulement distans entr'eux de l'unité ou du binaire, comme il a été dit au susdit Scholie, entre lesquels il est certain que deux nombres moyens proport. ne peuvent tomber.

Semblablement deux nombres premiers, quels qu'ils soient, ne peuvent être plans, ou solides semblables, pource qu'ils ne peuvent avoir les côtez proportionnaux. Car quelque nombre plan que ce soit étant nombre premier, a seulement soy-méme & l'unité pour côtez, encore improprement. Comme ces nombres plans 7 & 13, desquels les côtez sont 7, 1; & 13, 1, puis qu'ils sont produits de la multiplication d'iceux côtez, lesquels appert n'être proportionnaux. Et le nombre solide, qui aussi est nombre premier, a seulement pour côtez soy-même, & deux unitez: & par consequent il est manifeste qu'ils ne peuvent être proportionnaux.

Pareillement deux nombres premiers entr'eux, n'étans quarrez, ou cubes, ne peuvent être plans, ou solides semblables: Car s'ils étoient tels, par la 18 ou 19. prop. 8. tomberoit entre iceux, un ou deux moyens prop. & puis que les extrémes sont posez premiers entr'eux; tous les trois, ou les quatre seroient premiers entr'eux, pource que aucun nombre ne sera commune mesure d'iceux, les extrémes n'en ayans point: Parquoy il est évident par la 23. prop. 7. qu'ils seront les plus petits en leur prop. Et partant par le corol. de la 2. prop. 8. les deux extrémes seront quarrez, ou cubes. Ce qui est absurde: car ils ont été posez n'être quarrez ny cubes.

De ces choses s'ensuit que s'il y a deux nombres plans, ou solides semblables, desquels le moindre soit premier, il mesurera le plus grand. Car autrement par la 31. prop. 7. iceux *deux nombres proposez seroient premiers entr'eux : & partant (comme nous venons de prouver) ils ne seroient plans ou solides semblables. Ce qui est absurde : car ils ont été posez tels.*

De cecy est évident que deux nombres premiers entr'eux, desquels le moindre est premier, ne peuvent étre plans, ou solides semblables. Car s'ils l'étoient, le moindre mesureroit le plus grand, comme appert cy-dessus. Vû donc qu'il se mesure aussi soy-méme, ils ne seroient premiers entr'eux, mais composez : Ce qui est contre l'hypothese.

Parquoy il est facile de trouver deux nombres plans, ou solides non semblables. Car si on prend deux nombres ayans raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente ; ou certainement deux nombres premiers, ou deux premiers entr'eux, desquels l'un ny l'autre soit quarré, ou cube ; il est évident par ce que dessus, qu'ils seront plans, ou solides dissemblables.

Derechef, s'il y a deux nombres, desquels l'un soit quarré, & l'autre non quarré, comme 16 & 20 ; ils ne sont plans semblables. Car autrement par la 26. prop. 8. ils seroient comme quarré à quarré : & 16 étant quarré, par la 24. prop. 8. 20 seroit aussi quarré, contre l'hypothese. Par méme raison, si de deux nombres, l'un est cube, & l'autre ne l'est pas ; comme 27 & 40 ; ils ne sont pas solides semblables. Car s'ils l'étoient, par la 27. prop. 8. ils seroient comme cube à cube : & 27 étant cube, par la 25. prop. 8. 40 seroit aussi cube, contre l'hypothese.

Fin du huitiéme Element.

ELEMENT

NEUFIEME.

THEOR. 1. PROP. I.

Si deux nombres plans semblables se multiplient l'un l'autre, le produit sera quarré.

Soient deux nombres plans semblables A & B, lesquels se multiplians mutuellement, produisent C. Je dis que C est quarré. Car A se multipliant soy-même produit D quarré. Et puis que A multipliant A & B a produit D & C, comme A sera à B, ainsi D à C par la 17. prop. 7. Mais A & B étans plans semblables, il tombera entr'eux un moyen proportionnel par la 18. prop. 8. Il en tombera donc aussi un entre D & C, par la 8. prop. 8. & soit E. Et puisque des trois nombres continuellement proportionnaux D, E, C, le premier D est quarré par la construction; le tiers C sera aussi quarré par la 22. prop. 8. Parquoy si deux nombres plans semblables, &c. Ce qui étoit à prouver.

A 4.		B 9.
D 16.	E 24.	C 36.

THEOR.

THEOR. 2. PROP. II.

Si deux nombres ſe multiplians l'un l'autre produiſent un nombre quarré, iceux ſeront plans ſemblables.

Soient deux nombres A & B qui ſe multiplians l'un l'autre, produiſent C quarré. Je dis que A & B ſont plans ſemblables.

Car que A ſe multipliant ſoy-même produiſe D quarré. Veu donc que A multipliant A & B a produit D & C, comme A ſera à B, ainſi D à C par la 17. prop. 7. Et par la 11. pro. 8. entre les quarrez D & C tombe un moyen proportionnel : il en tombera donc auſſi un entre A & B, par la 8. prop. 8. & partant par la 20. prop. 8. A & B ſeront plans ſemblables. Parquoy ſi deux nombres ſe multiplians l'un l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

A 4.	B 9.
D 16.	C 36.

THEOR. 3. PROP. III.

Si un nombre cube ſe multiplie ſoy-même, le produit ſera cube.

Soit le nombre cube A, lequel ſe multipliant ſoy-même produiſe B. Je dis que B eſt nombre cube.

Car ſoit C côté du cube A: & de C multiplié en ſoy, ſoit produit D; il eſt manifeſte que C multipliant D, produit le cube A. Vû donc que C multipliant ſoy-même a fait D, par la 7. com. ſent. C meſurera D par C. Mais par la 5. com. ſent. l'unité meſure auſſi C par C. L'unité ſera donc même partie de C, que C de D; & partant comme l'unité eſt à C, ainſi C à D par la 20. def. 7. De-

A 8.	
E 16.	D 4.
F 32.	C 2.
B 64.	*Vnité.*

rechef, puisque C multipliant D a fait A, par la 7. com. sent. D mesurera A par C. Mais aussi C mesure D par C. Donc C est même partie de D, que D de A; & partant comme C à D, ainsi D à A; mais comme C à D, ainsi étoit l'unité à C. Donc comme l'unité à C, ainsi C à D, & D à A: ainsi entre l'unité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D. Derechef, pource que A mesure B par A; (car B a été fait de A multiplié en soy) & que l'unité mesure aussi A par A; l'unité sera même partie de A, que A de B: partant comme l'unité sera à A, ainsi A sera à B. Parquoy puis qu'entre l'unité & le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D, par la 8. prop. 8. il en tombera aussi deux entre A &, B, & soient iceux E & F. Et vû que les quatre nombres A, E, F, B sont continuellement proportionnaux, & que A premier est cube, aussi B quatriéme sera cube par la 23. prop. 8. Parquoy si un nombre cube, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 4. PROP. IV.

Si un nombre cube multiplie un nombre cube, le produit sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant le nombre cube B, produise C: Je dis que C est aussi nombre cube.

A 8.	B 27.
D 64.	C 216.

Car si on prend D, produit de A multiplié par soy-même, il sera cube par la prop. precedente: & pource que A multipliant B & soy-même, a produit C & D; il y aura telle raison de D à C, que de A à B, par la 17. prop. 7. Et par la 12. prop. 8. il tombera deux moyens proportionnaux entre A & B: il en tombera donc aussi deux entre D & C, par la 8. prop. 8. Et partant D étant cube, par la 23. prop. 8. C sera aussi cube. Si donc un nombre cube, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 5. PROP. V.

Si un nombre cube multipliant quelque autre nombre, produit un nombre cube, le multiplié sera aussi cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant quelque nombre B, produise le nombre cube C. Je dis que B multiplié est aussi nombre cube.

A8.	B27.
D64.	C216.

Car si on prend D, produit de A multiplié par soy-même, il sera cube par la 3. prop. 9. & d'autant que A multipliant A & B, a fait D & C, par la 17. prop. 7. A sera à B comme D à C, & par la 8. prop. 8. entre A & B se trouveront deux moyens proportionnaux, comme entre les deux nombres cubes D & C. Et par la 23. prop. 8. A étant cube, B multiplié sera aussi nombre cube. Parquoy si un nombre cube, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si un nombre se multipliant soy-même produit un nombre cube; iceluy nombre sera aussi cube.

Soit le nombre A, lequel multiplié par soy-même produise le nombre cube B. Je dis que A est aussi nombre cube.

A8.	B64.	C512.

Car si on prend C produit de A multiplié par B, il sera cube par la definition du nombre cube; & par la 5. prop. 9. A sera aussi cube. Si donc un nombre se multipliant soy-même, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Un nombre composé étant multiplié par quelque autre nombre le produit sera solide.

Soit le nombre composé A, lequel étant multiplié par quelque nombre B produise C. Je dis que C est nombre solide.

A6.	B5.	C30.
D2.	E3.	

Car puisque A est composé, quelque nombre outre l'unité le mesurera par la 13. def. 7. Que D mesure donc A par E. Ce qu'étant posé, D multipliant iceluy E, produira A par la 9. com. sent. Et puisque B multipliant A a produit C, iceluy C sera procreé de la mutuelle multiplication des trois nombres D, E, B; partant par la 17. prop. 7. il sera nombre solide, duquel les côtez sont D, E, B. Parquoy un nombre composé, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, le troisiéme depuis l'unité sera quarré, & tous les autres qui en laisseront un : Mais le quatriéme sera cube, & tous les suivans qui en laisseront deux : & le septiéme sera cube & quarré ensemble, & tous les suivans qui en laisseront cinq.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux depuis l'unité, A, B, C, D, E, F, G, H, I. Je dis que le troisiéme B sera quarré, ensemble tous les autres qui en laisseront un de l'ordre, comme D, F & H : en aprés, que le quatriéme C est

Vnité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.	I.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.	2187.	6561.	19683.

cube, & tous les autres nombres qui en intermettent ou laissent deux, comme F & I. Pareillement que le septiéme nombre F est cube & quarré ensemble, comme aussi tous les autres qui pourroient suivre en laissant toûjours cinq nombres.

Pour la premiere partie : puis que les nombres sont continuellement proportionnaux, comme l'unité mesure A selon les unitez qui sont en A, par la 5. com. sent. ainsi chacun mesurera son suivant selon les unitez de A: partant B troisiéme, qui sera en ce faisant le produit de A multiplié par soy, sera quarré : & par la 22. prop.

8. puis que B, C, D, sont continuellement proportionnaux, & B est quarré, aussi D sera quarré. Par même discours en prenant les trois continuellement proportionnaux D, E, F; vû que D est quarré, aussi F sera quarré; & ainsi de tous les autres nombres qui en laissent un.

Pour la seconde partie : puis que A multiplié par soy produit B; & B par A produit C; Il est évident par les définitions du 7. que C sera cube, & par la 23. prop. 8. C, D, E, F, étans continuellement proportionnaux, F sera aussi cube : par même raison, étans prins les quatre continuellement proportionnaux F, G, H, I, puis que F est cube, aussi I sera cube; & ainsi de tous les autres nombres, en laissant deux, si davantage y en avoit.

Pour la troisiéme partie. D'autant que par les deux precedentes parties F a été prouvé quarré & cube; iceluy sera cube & quarré ensemble : Et il en sera ainsi de tous les autres. Si donc depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'unité soit quarré, aussi tous les autres seront quarrez : & s'il est cube, aussi tous les autres seront cubes.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux depuis l'unite A, B, C, D, E, F. Je dis premierement que si le premier A est quarré, que tous les autres seront aussi quarrez.

Vnité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	4.	16.	64.	256.	1024.	4096.

Car puis qu'iceux nombres A, B, C, D, E, F, sont continuellement proportionnaux depuis l'unité, par la prec. prop. le troisiéme nombre B sera nombre quarré, comme aussi tous les autres qui en laissent un, sçavoir D & F. Mais pource que A, B, C sont continuellement proport. & que A est quarré par l'hypothese; par la 22. prop. 8. C sera aussi quarré : & par la même raison prenant les continuellement proportionnaux C, D, E, le premier C étant quarré, aussi le sera le troisiéme E: partant tous les nombres A, B, C, D, E, F sont quarrez : Et ainsi de tous autres.

Je dis en second lieu, que si A est cube, aussi tous les autres seront cubes : Car d'autant que A, B, C, D, E, F sont continuellement propor.

Vnité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	8.	64.	512.	4096.	32768.	262144.

depuis l'unité, C quatriéme est cube, & tous les autres qui en laissent deux, sçavoir F, par la prec. prop. Or que les autres nombres B, D, E, soient aussi cubes, nous le prouverons ainsi. D'autant que par l'hypothese l'unité est à A, comme A à B; l'unité mesurera A, & iceluy A le nombre B également. Mais par la 5. com. sent. l'unité mesure A par le même A : donc A mesurera aussi B par le même A : & par la 9. com. sent. A multiplié en soy produira B, lequel A étant cube, B sera aussi cube par la 3. prop. 9. Mais tous les autres nombres suivans sont en la raison de A à B, & partant par la 23. prop. 8. ils seront tous cubes. Si donc depuis l'unité il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 10. PROP. X.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui suit l'unité, ne soit nombre quarré : aussi pas un autre ne sera quarré, sinon le troisiéme depuis l'unité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent un. Que si celuy qui suit l'unité n'est nombre cube, aussi

pas un autre ne sera cube, sinon le quatriéme depuis l'unité, & tous les autres qui en l'ordre en laissent deux.

Soient depuis l'unité tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D, E, F; & premierement que A qui suit l'unité, ne soit nombre quarré. Je dis que pas un autre ne sera quarré, sinon le troisiéme B, & tous les autres qui en l'ordre en laissent un, sçavoir D & F.

Car par la 8. prop. 9. B, D, F sont quarrez : Et si quelqu'un

Vnité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

veut dire qu'il y en a aussi d'autres, comme C, il faudroit par la 22. prop. 8. que A fust aussi nombre quarré, (étans C, B, A, continuellement proportionnaux & C quarré) ce qui est contre l'hypothese. Par même raisons on démontrera qu'aucun autre ne peut être quarré, sinon les susdits.

Maintenant, que A proche de l'unité ne soit nombre cube : Je dis qu'aucun autre ne sera cube, sinon C quatriéme depuis l'unité, & tous les autres qui en laisseront deux, comme F, &c.

Car par la 8. prop. 9. C & F sont cubes : Et si quelqu'un veut dire que D soit aussi cube, d'autant que D, C, B, A sont continuellement proportionnaux, il faudroit par la 23. prop. 8. que A fut pareillement cube, ce qui est contre l'hypothese : donc D n'est pas cube. Par mêmes raisons on démontrera qu'aucun autre, outre les susdits, ne peuvent être cube. Si donc depuis l'unité, il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 11. PROP. XI.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux : le plus petit mesurera le plus grand selon quel-

qu'un de ceux qui sont entre les proportionnaux.

Depuis l'unité A, soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux B, C, D, E, F. Je dis que le plus petit nombre B mesurera le plus grand F par quelqu'un des nombres C, D, E.

Car d'autant que A, B, C, D, E sont en même raisõ que B, C, D, E, F, en raison égale, l'unité A sera à E,

A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	243.

comme B est à F. Et par la 20. déf. du 7. l'unité mesurera E; & le nombre B le nombre F, également. Mais par la 5. com. sent. l'unité A mesure E par E: donc aussi B mesurera F par E. Le même peut-on dire des autres. Parquoy si depuis l'unité, il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Il appert par ce que dessus, que le plus grand nombre est autant éloigné du grand qui le mesure, que l'unité est distante d'iceluy nombre par lequel le moindre mesure le grand: & ce d'autant qu'il y doit avoir une même raison du moindre nombre au plus grand, que de l'unité à celuy par lequel le moindre mesure le grand, comme il appert icy.

Ainsi B mesurera F par D; & C mesurera F par C, c'est-à-dire par soy-même, &c. Pource que tant entre B & F, qu'entre l'unité & D se trouvent trois nombres: & tant entre C & F, qu'entre l'unité & C sont interposez deux nombres.

Unité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

Il appert encore que quelconque de ces nombres multiplié par soy-même, en produit un autre, qui entre les proportionnaux est autant éloigné d'iceluy, comme il est distant de l'unité. Mais si un petit nombre en multiplie un grand, celuy qui en proviendra sera autant éloigné du *grand que le moindre de l'unité : Car si un nombre qui en mesure un autre, multiplie celuy par lequel il le mesure, sera produit celuy-là qui est mesuré, par la 9. com. sent. Ainsi C multipliant soy-même produit F, qui est autant éloigné de C, qu'iceluy C de l'unite. Pareillement B multipliant D, sera le méme F, pource que D mesure iceluy nombre F par B, &c.*

THEOR. 12. PROP. XII.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux : tous les nombres premiers qui mesurent le dernier, mesureront aussi celuy qui est proche de l'unité.

Soient depuis l'unité A, tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, B, C, D, E. Je dis que tous les nombres premiers qui se trouveront mesurer le dernier E, mesureront aussi B, lequel suit l'unité ; c'est à dire que si quelque nombre premier que ce soit, comme F, mesure iceluy dernier nombre E, il mesurera aussi B.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	3.

Car si ledit nombre premier F mesurant E dernier, ne mesure pas aussi B ; B & F seront nombres premiers par la 31. prop. 7. Et d'autant que B multiplié par soy produit C ; comme nous avons dit au Scholie de la prop. preced. C & F seront aussi premiers par la 27. prop. 7. Item B multipliant C produit D : D & F seront donc aussi premiers par la 26. prop. 7. Pareillement B multipliant D produit E : partant E & F seroient aussi nombres premiers, & par ainsi F ne mesureroit pas E : ce qui est contre l'hypothese : Donc F mesuroit aussi B. Parquoy si depuis l'unité il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy d'aprés l'unité soit premier: Le plus grand ne sera mesuré par aucun autre nombre, sinon par ceux qui sont entre les proportionnaux.

Depuis l'unité A soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux B, C, D, E, & que B qui suit l'unité soit premier. Je dis que le plus grand nombre E ne sera mesuré par aucun autre que d'iceux B, C, D.

A 1.	B 3.	C 9.	D 27.	E 81.
	K --	I --	H --	G --

Autrement, s'il est possible, que quelque autre nombre, comme G, mesure E: Or G sera premier ou composé: s'il est premier, & mesurant E extréme, par la prec. prop. il mesurera aussi B, premier proche de l'unité: ce qui est absurde. Donc G n'est premier, mais composé, & mesuré par quelque nombre premier par la 33. prop. 7. qui ne peut être autre que B: d'autant qu'il mesurera E, par la 11. com. sent. & par la prop. preced. il faudroit qu'il mesurast aussi B nombre premier: ce qui est absurde. Il n'y a donc point d'autre nombre premier que B, qui mesure G. Que maintenant B mesure G par H: & puis que par les choses dites au Scholie de la 11. prop. de ce livre, B multipliant D & H produit E & G, par la 17. prop. 7. comme E sera à G, ainsi D à H: mais G mesure E: donc aussi H mesurera D. On prouvera comme dessus qu'il ne peut être premier ny mesuré par un autre nombre premier que B: Car si H étoit premier, mesurant D, il mesureroit aussi B: ce qui ne se peut faire, ayant été posé premier. Que si H est composé, celuy nombre premier qui le mesurera sera B, ou si c'est un autre, cet autre mesurera aussi D, & celuy qui mesure D, c'est à sçavoir B, par la 11. com. sent. ce qui est absurde. Il n'y a donc que le nombre premier B qui mesure H: & posant que ce soit par le nombre I. On prouvera aussi comme dessus, que comme H mesure D, ainsi I mesure C, & que I ne peut être nombre premier, ny mesuré par aucun autre nombre premier sinon B. Donc que I mesure C par le nombre K: par mêmes raisons, comme I mesure C, ainsi K mesurera B nombre premier : il faut donc qu'à tout le moins il luy soit égal, ce qui est impossible : d'autant que B est moyen proportionnel entre K & I, par la 20. prop. 7. puis que C est produit de K multiplié par I, & qu'il est aussi le produit de B multiplié par soy-même. Partant aucun nombre ne mesurera E, sinon B, C, D, qui le mesurent, par la 11. prop. 9. Parquoy si depuis l'unité, il y a tant de nombres qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Le plus petit nombre de tous ceux qui peuvent être mesurez par certains nombres premiers, ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, que par ceux qui le mesuroient au commencement.

Soit A le plus petit nombre de tous ceux qui peuvent être mesurez par les trois nombres premiers B, C, D. Je dis qu'aucun nombre premier autre que B, C, D, ne mesurera A.

A.	B.	C.	D.
30.	2.	3.	5.
E---		F.-	

Autrement, s'il est possible, que E autre nombre premier mesure A par F : donc par la 9. com. sent. E multiplié par F produira A, lequel est mesuré par B, C, D; & par la 32. prop. 7. iceux B, C, D, mesureront l'un des deux E, F : Or ils ne mesureront pas E, autre nombre premier que pas un d'iceux ; ils mesureront donc F, qui est plus petit que A : ce qui est absurde ; puis que A est posé le plus petit de tous ceux qui peuvent être mesurez par B, C, D. Donc E ne pouvoit mesurer A. Parquoy le plus petit nombre de tous ceux qui peuvent être mesurez, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

Nous démontrerons icy en nombres (aprés Commandinus & Clavius) les 10 premiers Theoremes, qui sont démontrez en lignes au second livre.

1. S'il y a deux nombres, l'un ou l'autre desquels soit couppé en tant de parties qu'on voudra, le nombre plan compris sous iceux deux nombres, est égal aux nombres plans contenus du nombre indivisé, & de chaque partie de celuy qui est couppé.

Soient deux nombres, AB & C, desquels AB est divisé en AD, DE, EB, & soit fait F de C en AB : Item GH de C en AD, & HI de C en DE, & IK de C en EB : Je dis que F est égal aux nombres GH, HI, IK, c'est-à-dire à tout le nombre GK composé d'iceux. Car puisque C multipliant AB, a produit F, AB mesurera F par C : c'est-à-dire que AB sera la partie d'iceluy F, dénommée par C. Par la même raison AB sera la partie de GH ; & DE de HI ; & EB de IK, dénommée par C, sçavoir est, la même que AB de F. Mais

A . . . D . . E . B C . .
F 12
G . . . . . . H . . . . I . . K

il est évident par la 5. prop. 7. que AB est la même partie de GK, que AD de GH, parquoy aussi AB sera même partie de GK, que AB de F : & partant par la 4. com. sent. F & GK seront égaux entr'eux. Ce qui étoit proposé.

2. Si un nombre est couppé en deux parties, les nombres plans comprins sous le tout, & une chacune partie, sont égaux au nombre quarré du tout.

Car le nombre AB soit divisé en AC, CB. Je dis que les nombres qui seront produits du total AB, és parties AC, CB seront ensemble égaux au quarré de AB. Car étant pris le nombre D égal à AB, par le 1. Theor. le nombre fait de D, c'est-à-dire de AB, en AB, sçavoir est le quarré

A . . . . C . . B
D . . . . . .

d'iceluy AB, sera égal aux nombres qui seront produits de D, c'est-à-dire de AB, en AC, & en CB : Ce qui étoit proposé.

Le même sera démontré, si AB est couppé en plus de deux parties, comme on peut voir par la seconde figure icy apposée. Car par

A . . . C . . D . B
E . . . . . .

la même raison, le nombre fait de E, c'est-à-dire de AB, en AB, c'est à sçavoir le quarré de AB, sera esgal aux nombres, qui seront produits de E, c'est-à-dire de AB, en chaque partie AC, CD & DB.

3. Si un nombre est couppé en deux parties; le nombre plan compris du total, & de l'une des parties, est égal à celuy-là contenu des parties, & au quarré fait d'icelle partie premierement prise.

Soit le nombre AB divisé en AC, CB. Je dis que le nombre plan produit de AB en la partie AC, est esgal à celuy fait des parties AC, CB, & au quarré d'icelle partie AC. Car estant pris le nombre D esgal à la susdite partie AC; par le 1. Theor. le nombre fait de D, c'est-à-dire de AC, en AB; ou (qui est le même) de AB en AC, sera esgal aux nombres faits de D, c'est-à-dire de AC, en CB, & de D, c'est-à-dire de AC, en AC, sçavoir est le quarré de AC. Ce qui estoit proposé.

A . . . C . . . . . B
D . . . .

4. Si un nombre est divisé en deux parties; le quarré fait du tout est égal aux deux quarrez faits des deux parties, & a deux fois le nombre plan contenu d'icelles parties.

Soit le nombre AB divisé en AC, CB. Je dis que le nombre quarré fait de AB, est esgal aux quarrez des parties AC, CB, avec deux fois le nombre plan fait de AC en CB. Car par le 2. Theor. le nombre quarré de AB, est esgal aux nombres faits de AB en AC, & en CB. Mais par le 3. Theor. le nombre fait de AB en AC, est esgal au nombre produit de AC en CB, & au quarré d'iceluy AC: Item le nombre produit de AB en CB, est par même raison esgal au nombre produit de AC en CB, & au quarré de CB. Donc le nombre quarré fait de AB, est pareillement esgal aux nombres quarrez des parties AC, CB, & a deux fois le nombre fait de AC en CB. Ce qui estoit proposé.

A . . . . . . C . . . . B

5. Si un nombre est divisé en deux parties égales, & en deux inégales; le nombre plan contenu des parties inégales, avec le quarré du nombre qui est entre les deux sections, est égal au quarré fait de la moitié du nombre total.

Soit le nombre AB, couppé en deux parties esgales AC, CB, & en deux inesgales AD, DB. Je dis que le nombre plan compris des parties inesgales AD, DB, avec le quarré du nombre CD, est esgal au quarré du nombre BC. Car puis que par le Theor. preced. le nombre quarré de CB, est esgal aux quarrez des parties CD, DB, avec deux fois le nombre fait de CD, DB; & par le 3. Theor. le nombre plan compris de CD, DB, ensemble avec le quarré de DB, est esgal au nombre produit de CB en DB, sera fait que si ce nombre fait de CB, en DB, est pris pour le quarré de DB, avec le nombre fait de CD, en DB, aussi le nombre quarré de CB, est esgal à l'autre quarré de CD, ensemble à l'autre nombre fait de CD en DB, & au nombre produit de CB, c'est-à-dire de AC en DB: & partant par le 1. Theor. le nombre fait du total AD en DB, est esgal aux nombres produits de CD en DB, & de AC en DB. Donc le quarré de CB, sera esgal au quarré de CD, & au nombre fait de AD en DB. Ce qui estoit proposé.

A . . . . . C . . . D . . B

6. Si un nombre est divisé en deux parties égales, & à iceluy est adjoûté quelque autre nombre; le nombre qui est fait du tout avec l'adjoûté en l'adjoûté, avec le quarré de la moitié du nombre, est égal au quarré du nombre composé de la moitié & de l'adjoûté.

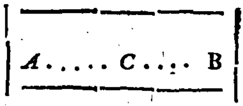
Soit le nombre AB couppé en deux parties esgales AC, CB, & à iceluy soit adjoûté le nombre BD. Je dis que le nombre fait du tout AB & de l'adjoûté BD comme un seul, sçavoir est de AD en l'adjoûté BD, avec le quarré de la moitié CB, est esgal au quarré fait de la moitié CB & adjoûté BD comme

A . . . C . . . B . . D

un ſeul, c'eſt-à-dire au quarré de CD. Car puis que par le 4. Theor. le quarré de CD eſt eſgal aux quarrez des parties CB, BD, avec deux fois le nombre plan compris de CB, BD, c'eſt-à-dire aux quarrez des parties CB, BD, & aux nombres contenus de CB, BD, & de AC, BD: Mais par le premier Theor. le nombre fait de AD en BD, eſt eſgal aux nombres contenus ſous CB, BD, & ſous AC, BD, & ſous AD, BD, c'eſt-à-dire au quarré de BD. Donc prenant le nombre fait de AD en DB, pour le quarré de la partie BD, avec les nombres faits de CB en BD, & de AC en BD, le quarré de CD ſera eſgal à l'autre quarré de CB, enſemble avec le nombre fait de AD en BD: c'eſt-à-dire que le nombre fait de AD en BD, avec le quarré de CB, eſt eſgal au quarré de CD. Ce qui eſtoit propoſé.

7. Si un nombre eſt diviſé en deux parties, le quarré du tout avec le quarré de l'une des parties, eſt égal à deux fois le nombre fait du tout en icelle partie, enſemble avec le quarré de l'autre partie.

Soit le nombre AB couppé és parties AC, CB. Je dis que le quarré de AB, avec celuy de la partie CB, eſt eſgal à deux fois le nombre fait de AB en CB, enſemble avec le quarré de l'autre partie AC. Car puiſque par le 4. Theor. le quarré de AB eſt eſgal aux quarrez des parties AC, CB, & a deux fois le nombre fait d'icelles AC, CB; ſi on adjouſte le commun quarré de CB, les quarrez de AB, CB, ſeront enſemble eſgaux aux quarrez de AC, CB, avec deux fois le nombre produit de AC en CB: mais par le 3. Theor. le nombre fait de AC en CB avec le quarré de CB, eſt eſgal au nombre produit de AB en CB; & partant le double de l'un eſt eſgal au double de l'autre. Donc ſi pour le double du nombre fait de AC en CB, & quarré de CB, on prend le double du nombre produit de AB en CB, les quarrez des nombres AB, CB ſeront enſemble eſgaux à deux fois le nombre de AB en CB, avec le quarré de l'autre partie AC. Ce qui eſtoit propoſé.



8. Si un nombre eſt diviſé en deux parties, quatre fois le nombre fait du tout en une partie, avec le quarré de

l'autre partie, est égal au quarré du nombre composé du tout & de la partie premierement prise.

Soit le nombre AB *couppé és parties* AC, CB. *Je dis que le nombre fait de* AB *en la partie* CB, *ensemble avec le quarré de l'autre partie* AC, *est esgal au quarré du nombre composé de* AB *& de la partie* CB.

Car estant adjoûté le nombre BD *esgal à* CB, *par le 4. Theor. le quarré du tout* AD *est esgal aux quarrez des nombres* AB, BD, *ensemble avec le nombre double de* AB *en* BD, *c'est-à-dire aux quarrez des nombres* AB, CB, *ensemble avec deux fois le nombre de* AB *en* CB : *Mais par le 7. Theor. les quarrez de* AB, CB, *sont esgaux à deux fois le nombre contenu de* AB, CB, *avec le quarré de* AC : *dont si pour les quarrez de* AB, CB, *on prend le nombre double de* AB *en* CB, *& le quarré de* AC ; *le quarré fait de* AD *est esgal à quatre fois le nombre fait de* AB *en* CB, *ensemble avec le quarré de l'autre partie* AC. *Ce qui estoit proposé.*

A . . . . C . . . B . . . *D*

9. Si un nombre est couppé en deux parties égales, & en deux inégales ; les quarrez faits des parties inégales, sont doubles des quarrez faits de la moitié, & de la partie du milieu.

Soit le nombre AB *divisé és parties esgales* AC, CB, *& és inesgales* AD, DB. *Je dis que les quarrez des parties inesgales* AD, DB, *sont doubles des quarrez de la moitié* AC, *& du nombre entre-moyen* CD.

Car puisque par le 4. Theor. le quarré du nombre AD *est esgal aux quarrez des nombres* AC, CD, *ensemble avec deux fois le nombre fait de* AC *en* CD ; *si on adjoûte le commun quarré de* DB, *les quarrez des parties* AD, DB, *seront esgaux aux quarrez des parties* AC, CD, BD, *ensemble avec deux fois le nombre produit de* AC *en* CD, *c'est-à-dire de* CB *en* CD. *Mais par le 7. Theor. les quarrez de* CB, *c'est-à-dire de* AC, *&* CD, *sont esgaux au quarré de* DB, *& à deux fois le nombre de* CB *en* CD. *Donc si pour le quarré de* DB, *&*

A . . . . C . . . D . . B

deux

deux fois le nombre fait de CB *en* CD, *on prend les quarrez de* AC, CD, *les quarrez de AD*, DB *seront esgaux au double des quarrez des parties* AC, CD; *& partant ces quarrez-là sont doubles de ceux-cy. Ce qui estoit proposé.*

10. Si un nombre est divisé en deux parties égales, & à iceluy on adjoûte quelque autre nombre; le quarré du nombre composé d'iceux, & le quarré de l'adjoûté, sont ensemble doubles des quarrez de la moitié, & de celuy fait du nombre composé d'icelle moitié & de l'adjoûté.

Soit le nombre AB *divisé en deux parties esgales AC*, CB, *& à iceluy soit adjoûté le nombre* BD. *Je dis que le quarré du nombre AD composé du tout A*B, *& de l'adjoûté* BD, *& le quarré d'iceluy nombre adjoûté* BD, *sont ensemble doubles des quarrez faits de la moitié AC, & de CD, composé de la moitié* CB *& de l'adjoûté* BD. *Car puisque par le* 4. *Theor. le quarré de AD est esgal aux quarrez de AC, CD, & a deux fois le nombre produit de AC, c'est-à-dire de C*B, *en CD; si on adjoûte le commun quarré du nombre* BD, *les quarrez des nombres AD*, BD, *seront esgaux aux quarrez des parties AC*, CD, BD, *ensemble avec deux fois le nombre produit de* CB *en* CD. *Mais par le* 7. *Theor. les quarrez de* CB, *ou AC, &* CD *sont esgaux au quarré de* BD, *& a deux fois le nombre fait de* CB *en* CD. *Donc si pour le quarré de* BD, *& deux fois iceluy nombre produit de* CB *en* CD, *on prend les quarrez des nombres* CB, CD, *c'est-à-dire des nombres A*C, CD: *les quarrez des nombres AD*, BD *seront esgaux à deux fois les quarrez des nombres A*C, CD: *& partant ceux-là sont doubles de ceux-cy. Ce qui estoit proposé.*

A . . . . . C . . . . . B . . . D

Or voila quant aux 10. *premieres prop. du* 2. *liv. mais la* 11^e^. *ne se peut accommoder aux nombres, c'est-à-dire qu'on ne peut-pas* diviser un nombre proposé, en telle sorte que le nombre plan fait du tout & de l'une des parties, soit égal au nombre quarré de l'autre partie.

*Car, s'il est possible, soit divisé A*B *en A*C, CB, *en sorte que le nombre plan fait du tout A*B, *& de la partie* CB, *soit esgal au quarré de l'autre partie A*C. *Donc quatre fois le nom-*

bre de AB en CB, sera quadruple du quarré de AC: & partant quatre fois le nombre plan d'iceluy AB en CB, avec le quarré de AC, sera quintuple d'iceluy quarré de AC.

A ---------- C ------- B

Mais quatre fois le nombre plan de AB en CB, avec le quarré de AC, est quarré, vû que par le 8. Theor. il est esgal au nombre quarré, qui est fait du nombre composé de AB & de CB. Donc deux nombres quarrez (sçavoir celuy qui est fait de AB en CB quatre fois avec le quarré de AC; & le quarré de AC) ont méme raison, que 5 à 1, ou 25 à 5. Ce qui est absurde, ainsi qu'il appert du corol. de la 24. prop. 8. Le nombre AB ne peut donc pas être divisé, en sorte que le nombre plan fait du tout en une des parties soit esgal ou quarré de l'autre partie. Ce qui estoit proposé.

THEOR. 15. PROP. XV.

Si trois nombres sont continuellement proportionnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont même raison avec iceux: le composé de deux tels que l'on voudra d'iceux, sera premier à l'autre.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C, les plus petits de tous ceux qui ont la même raison. Je dis que le composé de deux quels on voudra d'iceux, comme de A & B, est premier à l'autre C; & le composé de B, C, premier à A; & de A, C, premier à B.

A 9. B 12. C 16.
D 3. E 4.

Car si on prend D & E les plus petits qui soient en la même raison par le Scholie de la 35. prop. 7. il est évident par ce qui a été démontré à la 2. prop. 8. que A & C sont les quarrez de D & E, & que B est le produit de D multiplié par E: & par le 3. Theor. du Scholie precedent le composé de D, E, multiplié par D, produira un nombre égal au composé de A & B. Mais D & E étans premiers entr'eux par la 24. prop. 7. aussi leur composé sera premier à E, par la 30. prop. 7. & partant aussi a son quarré C, par la 27. prop. 7. Et par même raison D sera premier à C, & par la 26. prop. 7. le produit du composé de D & E multiplié par D, sera aussi premier à C. Mais nous avons montré que ce produit est égal au nombre composé de A & B : Donc aussi le composé de A & B sera premier à C.

En aprés, puisque comme dessus le composé des deux nombres D, E est premier à chacun d'iceux ; par la 26. prop. 7. le produit du composé de D, E, multiplié par E sera premier à D. Mais par le susdit Theor. iceluy produit est égal à C fait de E en soy, & au nombre B fait de D en E. Donc le nombre composé de ces deux B & C sera aussi premier à D ; & partant aussi à A par la 27. proposition 7.

Finablement D & E étans premiers entr'eux par la 24. prop. 7. & premiers au composé de deux par la 30. prop. 7. leur produit B sera premier au composé des deux par la 26. prop. 7. & par la 27. prop. 7. le produit de D, E comme un seul nombre, multiplié par soy, sera premier à B. Mais par le 4. Theor. du Scholie precedent, iceluy produit de D E comme un seul nombre multiplié en soy, est égal à A & C & deux fois B ensemble : donc A & C avec deux fois B, sont premiers à B. Or en ostant les deux fois B, il est manifeste que le reste composé de A & C, sera premier à B. Car autrement ils seroient composez, & leur commune mesure mesureroit aussi deux fois B ; & par consequent aussi le composé de A & C & deux fois B, qui ne seroit en ce faisant premier à B, contre ce qui a été démontré cy-dessus. Donc le composé de A & C est premier à B. Parquoy si trois nombres sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qui étoit à prouver.

THEOR. 16. PROP. XVI.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, il ne sera pas comme le premier au second, ainsi le second à quelque autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux, A & B. Je dis que comme A est à B, ainsi B n'est pas à quelque autre, c'est-à-dire qu'à A & B, on ne peut trouver un troisiéme proportionnel.

Autrement, s'il est possible, soit que comme A est à B, ainsi B soit à un autre, sçavoir C. Par la 23. prop. 7. A & B étans premiers, ils seront les plus petits qui soient en la même raison; & par la 21. prop. 7. A mesurera B, & B mesurera C. Mais aussi A mesure soy-même; donc A mesure iceux A & B. Ainsi A & B ne seroient premiers, contre l'hypothese. Donc il n'est pas comme A à B, ainsi B à C. Par même raison, il ne sera pas comme B à A, ainsi A à quelque autre. Si donc deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A 3. B 5. C--

SCHOLIE.

Ce qui est dit & démontré tant en cette 16. prop. qu'aux trois suivantes, se doit entendre des nombres entiers: car si on les vouloit étendre aux fractions, il est certain & manifeste qu'à deux nombres quels qu'ils soient, on en peut trouver un troisiéme proportionnel; puis que le quarré du second nombre étant divisé par le premier, en est produit un troisiéme proportionnel. Comme aux deux nombres premiers trois & cinq, si le quarré du second nombre 5, sçavoir 25 est divisé par le premier 3, proviendra 8 $\frac{1}{3}$ *pour le troisiéme proportionnel, &c.*

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, desquels les extrémes soient premiers entr'eux, il ne sera pas comme le premier au second, ainsi le dernier à quelque autre.

Soient A, B, C, continuellement proportionnaux, desquels les extrémes A & C soient premiers entr'eux. Je dis qu'il ne se peut faire que comme A est à B, ainsi C soit à quelque autre.

A 4.	B 6.	C 9.	D---

Car, s'il est possible, comme A est à B, ainsi soit C à D. En permutant comme A sera à C, ainsi B à D : & par la 23. prop. 7. A & C étans premiers, ils seront les plus petits en leur raison : & par la 21. prop. 7. ils mesureront également B & D ; sçavoir est. A iceluy B ; & C iceluy D. Et pource que comme A à B, ainsi B à C ; & A mesure B, aussi B mesurera C : & par la 11. com. sent. A mesurera aussi C ; & iceux A mesurant soy-même, il mesurera iceux A & C premiers entr'eux : ce qui est absurde. A n'est donc pas à B, comme C à D. Par mêmes raisons, il ne sera pas comme C à B, ainsi A à quelque autre. Parquoy si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBL. I. PROP. XVIII.

Deux nombres estans donnez, considerer si on pourra trouver un troisiéme proportionnel à iceux.

Soient donnez les deux nombres A & B : Il faut considerer si à iceux on peut trouver un troisiéme nombre proportionnel.

La solution de cette proposition est aisée: Car il n'y a qu'à considerer si C, produit du second nombre B multiplié par soy-même, peut être mesuré, c'est-à-dire divisé par le premier A : car s'il peut être mesuré ou divisé, comme en la premiere formule, il est évident par la 20. prop. 7. que le quotient D sera troisiéme nombre proportionnel ; sinon,

A 4.	B 6.	D 9.	C 36.
A 6.	B 7.	D---	C 49.

on n'en trouvera point, puis que par la susdite 20. prop. 7. trois nombres étans prop. le produit des extrémes doit être égal au produit du milieu.

PROBL. 2. PROP. XIX.

Estans donnez trois nombres, considerer si on pourra trouver un quatriéme proportionnel à iceux.

Soient donnez trois nombres A; B, C; & il faut considerer si a iceux on peut trouver un quatriéme proportionnel.

La solution de cette prop. est aussi aisée. Car il faut seulement considerer si D, qui est le produit des second & troisiéme nombres B & C, peut être mesuré par le premier A : s'il peut être mesuré ou divisé, il est évident par la 19. prop. 7. que le quotient E sera quatriéme proport. sinon, on n'en trouvera point, puis que par la susdite 19. prop. 7. quatre nombres étans proport. le produit du second & troisiéme doit être égal au produit du premier & quatriéme.

A 3. B 6. C 5. E 10. D 30.

THEOR. 18. PROP. XX.

Quelque multitude de nombres premiers qu'on propose, il s'en trouvera encores d'autres.

Soit quelconque multitude de nombres premiers, A, B, C. Je dis qu'il s'en trouvera encores d'autres.

Car si on trouve le nombre DE, le plus petit de tous ceux qui peuvent être mesurez par les trois nombres A, B, C, par la 37. prop. 7. & à iceluy DE on adjoûte l'unité EF, le tout DF sera premier ou

A ..2 B ...3 C 5
D------------------30E. F
G----

non : S'il eſt premier, on a un nombre premier autre que pas un des propoſez : Mais ſi DF n'eſt premier, il ſera meſuré par quelque nombre premier, par la 34. prop. 7. Soit donc meſuré par G ; il eſt évident que G ne peut pas être un des trois A ; B, C : car s'il étoit quelqu'un d'iceux, il meſureroit comme eux DE. Donc G meſurant le tout DF, & le retranché DE, par la 12. com. ſent. il meſureroit auſſi le reſte DF, ſçavoir un nombre l'unité : Ce qui eſt abſurde. Donc G eſt autre nombre premier que pas un des propoſez. Et en cette façon on en peut trouver infiny autres. Parquoy quelque multitude de nombres premiers qu'on propoſe, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si tant de nombres pairs que l'on voudra ſont adjoûtez ; le tout ſera pair.

Soient adjoûtez tant de nombres pairs que l'on voudra AB, BC, CD : Je dis que tout le compoſé AD, eſt pair.

Car d'autant que par la 6. def. 7. tout nombre pair a moitié, iceux AB, BC, CD, auront chacun moitié : Soit donc EF moitié de AB ; & FG de BC ; & GH de CD. D'autant que comme AB à EF, ainſi BC à FG, & CD à GH (la raiſon étant toûjours double) auſſi par la 12. prop. 7. comme AB ſera à EF, ainſi AD à EH. Mais AB eſt double d'iceluy EF : Donc auſſi AD ſera double de EH ; & partant iceluy nombre AD ayant moitié eſt pair par la ſuſd. 6. def. Parquoy ſi tant de nombres pairs, &c. Ce qu'il falloit prouver.

A . . . . . . 6 B . . . . 4 C . . . . 8 D
E . . . 3 F . . 2 G . . . . 4 H

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra ſont

adjoûtez, & que la multitude d'iceux ſoit pair; le tout ſera pair.

Soient adjoûtez tant de nombres impairs que l'on voudra, deſquels la multitude AB, BC, CD, DE, ſoit pair : Je dis que le tout AE eſt pair.

Car d'autant que AB, BC, CD, DE, ſont impairs, par

A . . . 3 B . . . . . 5 C . . . . 7 D . . . . 9 E

la 7. def. 7. chacun ſera different du nombre pair de l'unité : & partant ſi de chacun d'iceux l'on retranche l'unité on les rendra tous pairs, & par la 21. prop. 9. le compoſé d'iceux ſera pair : Et d'autant que leur multitude eſt en nombre pair, les unitez retranchées feront auſſi un nombre pair, lequel adjoûté avec tout le reſte, qui eſt déja nombre pair, le tout AE ſera pareillement pair par la ſuſdite 21. prop. 9. Parquoy ſi tant de nombres impairs, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra ſont ajoûtez, & que la multitude d'iceux ſoit impair, le tout ſera impair.

Soient adjoûtez tant de nombres impairs que l'on voudra, la multitude deſquels comme AB, BC, CD ſoit impair : Je dis que le tout AD eſt impair.

A . . . B . . . . . C . . . . . . E . D

Car puis que par la def. du nombre impair, il differe du nombre pair de l'unité, ayant retranché l'unité ED du nombre impair CD, le reſte CE ſera pair. Mais par la prec. prop. AC compoſé des impairs AB, BC, pairs en multitude, eſt pair : Donc auſſi AE compoſé des pairs AC, CE, ſera pair : Et partant ſi à iceluy AE, l'on adjoûte l'unité ED, le tout AD sera impair, puis que par la susd. def. le nombre impair differe du pair de l'unité. Parquoy si tant de nombres impairs, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Si d'un nombre pair, on oste un nombre pair, le reste sera pair.

Soit un nombre pair AB, duquel soit retranché un nombre pair CB: Je dis que le reste AC est aussi pair.

A . D . . . . . C . . . . B

Ce qui est évident: Car s'il n'étoit pair, en ostant l'unité AD on le rendroit pair: Et le retranché avec iceluy, sçavoir DB, seroit aussi un nombre pair par la 21. prop. 9. & partant luy adjoûtant l'unité ostée AD, le tout AB seroit impair; ce qui est absurde, puis qu'il a été posé pair. Si donc d'un nombre pair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si d'un nombre pair, on oste un nombre impair, le reste sera impair.

Du nombre pair AB, soit retranché le nombre impair CB: Je dis que le reste AC est impair.

A . . . . C . D . . . . B

Car ayant retranché l'unité CD du nombre impair CB, le reste DB sera pair. Et d'autant que le tout AB est posé pair, par la preced. le reste AD sera aussi pair. Et partant si on en oste l'unité CD, le reste AC sera impair. Si donc d'un nombre pair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si d'un nombre impair on oste un nombre impair, le reste sera pair.

Soit un nombre impair AB, duquel soit retranché un nombre impair CB : Je dis que le reste AC est pair.

Car, ayant retranché des nombres impairs AB, CB, l'unité DB, les nombres restans AD, CD, seront pairs. Et d'autant que du nombre pair AD, est retranché le nombre pair CD; par la 24. prop. 9. le reste AC sera pair. Parquoy si d'un nombre impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A . . . . C . . . . . . D . B

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si d'un nombre impair on oste un nombre pair, le reste sera impair.

Du nombre impair AB, soit retranché un nombre pair CB : Je dis que le reste AC est impair.

Car ayant retranché de l'impair AB, l'unité AD, le reste DB sera pair; duquel étant retranché le pair CB, par la 24. prop. 9. le reste DC sera aussi pair : & partant l'unité AD y étant adjoûtée, AC sera impair. Parquoy si d'un nombre impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

A, D . . . . C . . . . . . B

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si un nombre impair multiplie un nombre pair, le produit sera pair.

Soit un nombre impair A, lequel multipliant le nombre pair B, fasse C : Je dis qu'iceluy produit C est pair.

Car d'autant que C est produit de A en B; iceluy produit C sera composé d'autant de nombres égaux à B, qu'il y a d'unitez en A. Mais B est pair; & partant C sera composé

A . . . 3 B 4
C 12

d'autant de nombres pairs égaux à B qu'il y a d'unitez en A : & par la 21. prop. 9. C sera pair. Parquoy si un nombre impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

A . . 2   B 4
C 8

On demontrera en la même maniere, que si un nombre pair multiplie un nombre pair, le produit sera aussi pair. Car derechef C sera composé d'autant de nombres pairs égaux à B qu'il y a d'unitez en A, &c.

COROLLAIRE.

De ce que dessus, il s'ensuit qu'un nombre pair multiplié par soy-même produira un nombre pair; comme il est manifeste, en posant les nombres pairs A & B égaux.

THEOR. 27. PROP. XXIX.

Si un nombre impair multiplie un nombre impair; le produit sera impair.

Que le nombre impair A, multipliant le nombre impair B, fasse C : Je dis qu'iceluy produit C est impair.

A . . . 3   B 5
C 15

Car puis que C est le produit de A en B, il sera composé d'autant de nombres égaux à B qu'il y a d'unitez en A : Et partant puis que tant A que B est nombre impair, leurdit produit C sera composé d'autant de nombres impairs égaux à B, qu'il y a d'unitez au nombre impair A; parquoy la multitude d'iceux sera impair, & par la 23. prop. 9. ledit produit C sera nombre impair. Si donc un nombre impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste qu'un nombre impair multiplié par soy-même produit un nombre impair.

SCHOLIE.

Clavius demontre en cet endroit (aprés Campanus) les deux Theoremes suivans.

1. Un nombre impair mesurant un nombre pair, il le mesure par un nombre pair.

Soit le nombre impair A, lequel mesure le nombre pair B par C. Je dis que C est pair. Car s'il est impair, B produit de A impair multiplié par C impair, sera impair, par la 29. prop. 9. ce qui est absurde : car il a esté posé pair. Donc C est pair.

A...3	C..2
B......6	

2. Un nombre impair mesurant un nombre impair, il le mesure par un nombre impair.

Soit le nombre impair A, qui mesure le nombre impair B par C. Je dis que C est impair : Car s'il est pair ; B fait de A impair par C pair, sera pair par la 28. prop. 9. ce qui est contre l'hypothese ; donc C est impair.

A...3	C.....5
B.................15	

A ces deux Theor. nous adjoûterons le suivant.

Tout nombre qui mesure un nombre impair, est aussi impair.

Soit le nombre impair A, lequel B mesure par C. Je dis que B est impair. Car C estant multiplié par B produira A par la 9. com. sent. & si B n'est impair, mais pair, le produit A sera pair par la 28. prop. 9. ce qui est absurde, puis qu'il a esté posé impair. Donc B qui mesure A impair, n'est pas nombre pair, mais impair.

A................15	
B.....5	C...3

THEOR. 28. PROP. XXX.

Si un nombre impair mesure un nombre pair, il mesurera aussi sa moitié.

Soit le nombre impair A, qui mesure le nombre pair B. Je dis qu'il mesurera aussi sa moitié C.

A . . . 3	D 4	E . . 2
B 12		
C 6		

Car puis que A mesure B, soit par le nombre D : iceluy D sera pair, comme nous avons démontré au Scholie du precedent Theor. 1. & partant il se pourra diviser en deux également par la 6. def. du 7. E soit donc la moitié de D. Parquoy comme D sera à sa moitié E, ainsi B sera à sa moitié C : & en permutant, comme D sera à B ; ainsi E sera à C. Mais A mesurant B par D, aussi D mesurera B par A par la 8. com. sent. & partant D sera la partie de B dénommée par A : donc aussi E sera la partie de C dénommée par le même A : & partant A mesurera C, par la 40. prop. 7. Si donc un nombre impair mesure un nombre pair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Si un nombre impair est premier à quelque nombre, il sera aussi premier à son double.

Soit le nombre impair A, premier à quelque nombre B, duquel le double soit C. Je dis que A est aussi premier à C.

A . . . 3	B 4
C 8	D--

Car si A & C ne sont premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera, & soit D, lequel sera impair, comme nous avons démontré au Scholie de la 29. prop. 9. Et puis qu'il mesure le nombre pair C (car C est pair puis qu'il a moitié B) il mesurera aussi sa moitié B par la prop. prec. Mais il mesure aussi A. Donc D mesure iceux A & B premiers entr'eux : ce qui est absurde. Il n'y aura donc point de nombre qui mesure A & C ; & partant ils seront premiers entr'eux. Si donc un nombre impair est premier à quelque nombre, &c. Ce qu'il falloit prouver.

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Tous les nombres qui suivent le binaire en progression double, sont seulement pairement pairs.

Soient depuis le binaire A tant de nombres qu'on voudra B, C, D, E, continuellement proportionnaux en raison double. Je dis que B, C, D, E sont tant seulement pairement pairs.

Vnité.	A2.	B4.	C8.	D16.	E32.

Qu'il ne soit ainsi. Soit prise l'unité, & puisque depuis l'unité, A, B, C, D, E, sont continuellement prop. le plus petit mesurera le plus grand selon quelqu'un de ceux qui sont entre les proportionnaux par la 11. prop. 9. lesquels étans tous pairs, il est évident par les def. du 7. que B, C, D, E, seront pairement pairs, & tous les autres qui pourroient suivre en la même progression. Mais d'autant que A prochain de l'unité est nombre premier, à sçavoir binaire, par la 13. prop. 9. aucun autre nombre ne mesurera aucun de tous ceux qui sont en la progression, sinon ceux de la même progression, lesquels étans tous pairs, un nombre pair mesurera chacun d'iceux par un nombre pair; & partant iceux nombres seront seulement pairement pairs. Parquoy tous les nombres qui suivent le binaire, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Si la moitié d'un nombre est impair, iceluy nombre sera seulement pairement impair.

Soit le nombre A, duquel la moitié B est impair: Je dis que A est seulement pairement impair.

Car puisque B impair est moitié de A, il le mesurera par le nombre binaire C, & par la 9. def. 7. A sera pairement impair. Mais qu'il soit seulement pairement impair, On le prouvera ainſi. S'il étoit pairement pair, un nombre pair, comme D, le meſureroit par quelque nombre pair, comme E. Et par la 9. com. ſent. A eſt fait de D en E : mais le même A eſt auſſi fait de la moitié B par le binaire C. Parquoy par la 19. prop. 7. le produit de C par B, étant égal au produit de E en D, comme C ſera à E, ainſi D à B. Mais C nombre binaire meſure E : Il faudroit donc auſſi que D pair meſuraſt B impair : ce qui eſt impoſſible. Donc A n'eſt pairement pair : & partant il eſt ſeulement pairement impair. Parquoy ſi la moitié d'un nombre eſt impair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

	A 30.	
B 15.		C 2.
D--		E--

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Si un nombre pair n'eſt de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, & que ſa moitié ne ſoit nombre impair, il ſera pairement pair, & pairement impair.

Le nombre pair A, ne ſoit de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, & que ſa moitié ſoit pair : Je dis que A eſt pairement pair & pairement impair.

Qu'il ſoit pairement pair, il eſt évident. Car d'autant que ſa moitié eſt pair, le binaire, qui eſt pair, le meſurera par icelle moitié : & par la 9. def. 7. il ſera pairement pair.

A 20

Or il eſt auſſi pairement impair : car puis que iceluy nombre A n'eſt de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, ſi on le diviſe toûjours en deux également on viendra enfin à un nombre impair auparavant que parvenir juſques au binaire, lequel nombre impair meſurera A par un nombre pair : Car ſi c'eſtoit par un impair, attendu que par la 29. prop. 9. un nombre impair multipliant un nombre impair, produit un nombre impair, A ſeroit impair : ce qui est absurde, étant posé pair. Vû donc qu'un nombre impair mesure A par un nombre pair, & qu'un nombre pair le mesure aussi par un nombre pair; iceluy nombre A sera pairement pair, & pairement impair. Parquoy si un nombre pair, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOR. 33. PROP. XXXV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que l'on retranche du second & du dernier, un nombre égal au premier; comme le reste du second sera au premier, ainsi le reste du dernier sera à tous les precedens.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux A, B, C, D, & que du second B l'on retranche FG égal au premier A : Et du dernier D l'on retranche KL aussi égal à A : Je dis que comme le reste BF sera à A, ainsi l'autre reste DK sera à tous les trois precedens A, B, C, ensemble.

A 8
B . . . . 4 F . . . . 8 G
C 18
D 9 H 6 I 4 K 8 L

Car si de DL on retranche LI égal à BG, il est évident que KI sera égal à BF, (étant KL égal à FG) & si on retranche LH égal à C; comme les quatre nombres D, C, B, A, sont continuellement proportionnaux, aussi seront leurs égaux DL, HL, IL, KL : & en divisant, DH sera à HL, comme HI à IL, ou IK à KL; & partant par la 12. prop. 7. tous les antecedans DH, HI, IK, (c'est-à-dire DK) seront à tous les consequens HL, IL, KL, (c'est-à-dire A, B, C,) comme l'un des antecedans IK, est à l'un des consequens KL, ou leurs égaux BF à A. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouver.