Euclidis ELEMENTORVM LIBRI SEX *PRIORES.*

Quorum demonſtrationes tum alibi ſparſim, tum maximè libro quinto ad faciliorem captum accommodauit

CAROLVS MALAPERTIVS
Montenſis è Societate IESV.

Editio altera emendatior.

DVACI,
Typis BALTAZARIS BELLERI,
ſub Circino aureo. Anno 1633.

Cum Priuilegio.

IVVENTVTI MATHEMATVM STVDIOSÆ In Academia Duacensi.

HABETIS *ad manum, Iuuenes ornatissimi, Euclidis Elementa sex priora, hoc est Geometriæ, atque adeo Mathematum omnium fundamenta: in quibus explicandis si cuipiam videbor nonnulla subticendo minus accuratè*

Mathematicę demonſtratio-
nis numeros omnes explere, is
velim intelligat non Sophiſtis
reuincendis, qui de induſtria
velint in luce cæcutire, ſed
docilibus ingenijs & veritatis
amantibus ſcribere me inſti-
tuiſſe. Quibus profecto neſcio
an mediocri breuitate obſcu-
riora fiant Mathemata, an
moleſtiora nimia quorundam
accuratione, qui ſeu lectorum
ingenio, ſeu beneuolentiæ diſ-
fiſi ſatis per ſeſe obuia inculi-
cant anxie, & ne quid omiſ-
ſum videatur, tot in vnum
ratiocinationes congerunt,

quot ſimul mente complecti ſit difficillimum. Id non alibi magis quam in libro quinto licebit intueri, ſi cui fuerit oportunum alios paßim commentarios cum hoc noſtro conferre. Cum enim eius libri Theoremata in omnem Mathematicæ partem vim habere ampliſſimam cernerem, non dubitaui quin proximè cum primis natura pronuntiatis cohærerent, eaque proinde noua methodo ad prima ſtatim principia reuocaui, à quibus minimùm diſceſſiſſent. Quid enim attinebat per

Multiplicium, & probationum flexus Tyronem circumducere, si propositis clare terminorum notionibus ad ipsam quamprimum veritatem magno compendio poterat penetrare? Hoc *sane consilium meum vt vt accipiant alij, vobis tamẽ Auditoribus meis vsu ipso facile probaturum esse confido. Satis vero amplum mihi theatrum estis; neque aliud propositum fuit in hoc opere recudendo, quam vestris seruire commodis, & eam, quæ mihi obtigit, Spartam ornare pro virili; ad cæte-*

teros si quid manabit emolumenti, ponatur in lucro. Vos interim, uti spero, laborem hunc meum, animum certe vestræ utilitatis studiosissimum æqui boniq; consuletis. Valete.

Priuilegium.

Ego infra ſcriptus Societatis IESV Prouincialis in Prouincia Gallo-Belgica iuxta priuilegium à Sereniſſimis Principibus noſtris ALBERTO & ISABELLA eidem Societati noſtrę conceſſum, quo omnibus prohibetur ne libros ab eiuſdem Societatis hominibus compoſitos, abſque Superiorũ, permiſſione imprimant; facultatem do BALTAZARO BELLERO Typopographo Duacensi, vt librum cui titulus est, Cõmentarius in priores sex libros Elementorum Euclidis, & Institutiones Arithmeticæ practicę Caroli Malapertii è Societate Iesv, ad Sex annos proximos imprimere & libere distribuere possit, Datum Tornaci 9. Nouemb. 1619.

FLORENTIVS DE MONTMORENCY,

APPROBATIO.

Hic liber continens Euclidis Elementorum libros ſex priores: Item Oratio R. P. CAROLI MALAPERTII de laudibus Mathematicæ, nihil habet quod fidem concernat, eiuè aduerſetur. Datum Duaci 20. Decembris. 1619.

GEORGIVS COLVENERIVS
S. Theologiæ Doctor & Profeſſor, & Librorum in Academia Duacena Cenſor.

EV-

EVCLIDIS

Elementorum

LIBER I.

Definitiones.

1 Punctum est cuius pars nulla.

2 Linea est longitudo latitudinis expers.

3 Lineæ extrema sunt puncta.

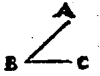
4 Linea recta est quæ ex æquo suis punctis, seu extremis interiacet: *Siue cuius extrema obumbrant omnia media. Aut, breuissima earum, quæ inter duo puncta duci possunt.*

5 Superficies est quę longitudinem & latitudinem tantum habet.

6 Superficiei extrema sunt lineæ.

7 Plana ſuperficies eſt quę ex æquo ſuis extremis interijcitur.

8 Planus angulus eſt duarum linearum in plana ſuperficie ſe tangentium, & nõ in directũ iacentium, alterius ad alteram inclinatio



Vt planus angulus eſt A B C, quẽ cõſtituũt lineæ A B, A C, quæ in eodẽ plano poſitæ nõ iacẽt in directũ, ſiue non efficiũt vnicã lineam rectã, & ad ſe mutuo inclinantur, ſeq; cõiũgunt in puncto B.

9 Rectilineus angulus eſt qui rectis lineis conſtituitur.

10 Quando recta ſuper rectã conſiſtens æquales vtrimque angulos fecerit, rectus eſt vterque angulorum æqualiũ: quæ autem alteri inſiſtit, dicitur linea perpendicularis.

Sic linea A B inſiſtens ipſi C D, eſt eidem perpendicularis, quia angulos qui ſunt deinceps, A B C, A B D, efficit æquales & vterque angulus idcirco eſt rectus.

11 Obtuſus angulus eſt, qui maior eſt recto.

12 Acutus, qui recto minor.

Vt obtuſus angulus eſt A B C maior recto E B C; acutus verò & recto minor eſt A B D.

13 Ter-

13 Terminus est quod cuiusque est extremum.

14 Figura est quę sub aliquo, aut aliquibus terminis continetur.

15 Circulus est figura vnicæ lineæ termino contenta, quã circumferentiã dicunt, à qua ad aliquod punctum intra contentum omnes lineæ sunt ęquales.

16 Punctum autem illud dicitur centrum. *In circulo A B C F, centrũ est D, ex quo lineæ D A, D B, D C, ad circumferẽtiam ductæ, & omnes aliæ sunt æquales.*

17 Diameter circuli est recta per centrum acta, & ad ambitum vtrimque terminata. *Cuiusmodi est A C.*

18 Semicirculus est figura comprehensa à diametro & parte circumferentiæ, quę diametro clauditur, *vt A B C.*

19 Segmentum circuli est, quod à recta linea & circumferentia continetur, *quale est E F G.*

20 Rectilineæ figurę sunt quę rectis lineis continentur, Trilateræ quę tribus, Quadrilaterę quæ quatuor, Multilateræ quę pluribus.

21 Trilaterarum autem figurarum Triangulum ęquilaterũ est, quod tria latera habet ęqualia. *Quale est triangulũ A B C.*

22 Isosceles seu æquicrus aut æquicrurum triangulum est quod duo tantum latera aut crura habet equalia. *Quale est triangulum D E F, in quo duo tantum latera D E, D F, sunt æqualia.*

23 Scalenum triangulum est quod omnia tria latera habet inæqualia; vt G H K.

24 Rectangulum triangulum est quod continet angulum rectum. *Tale est A B C, in quo angulus B, est rectus.*

25 Amblygonium seu obtusangulum, quod angulum habet obtusum. *Tale est D E F, in quo angulus E, est obtusus.*

26 Oxigonium seu acutangulum quod tres acutos habet angulos. *Quale est G H I.*

27 Inter Quadrilateras Quadratum est, quod æquilaterum est & æquiangulum, seu quod & latera & angulos habet æqualia. *Vt A B C D.*

28 Altera parte longius figura est æquiangula quidem, at non æquilatera: *Qualis est figura E F G H.*

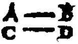
29 Rhom-

29 Rhombus est figura æquilatera non tamen æquiangula: *Qualis est I K L M.*

30 Rhomboides quæ opposita latera & angulos æquales habet, non tamen aut omnia latera aut omnes angulos habet ęquales. *Vt O P Q R.*

31 Aliæ verò figuræ quæcunque quadrilateræ vocentur Trapezia. Quæ irregulares sunt & infinitę. S T Y X, &c.

32 Parallelę lineę sunt quę in eodem plano existentes, productę in infinitum neutram in partẽ coincident. *Seu quæ pari vbique spatio inter se distant, vt lineæ A B. C D.*



Parallelogrammum verò est figura quadrilatera lineis parallelis descripta. *Vt figura E F G H, est parallelogrammum quia describitur lineis H G, F E, parallelis, & lineis H E, G F, similiter parallelis.*

Postu-

Postulata.

1 Petatur à quouis puncto ad aliud quodlibet rectam lineam ducere posse.

2 Terminatam & rectam lineam in directum & continuum protendere.

3 E quouis centro ad quoduis interuallum circulum describere.

Communes notiones seu Axiomata.

1 Quæ eidem sunt ęqualia, & inter se sunt æqualia.

2 Si ęqualibus addas æqualia, tota erunt æqualia.

3 Si ab æqualibus demas ęqualia, quæ remanent erunt æqualia.

4 Si inæqualibus adijciantur æqualia, tota erunt inæqualia.

5 Si ab inæqualibus tollantur ęqualia, quę remanent erunt inæqualia.

6 Quæ eiusdem dupla sunt, inter se sunt æqualia.

7 Quæ eiusdem sunt dimidia, sunt inter se æqualia.

8 Quæ mutuo sibi congruunt, sunt æqualia inter se.

9 Totum eſt maius ſua parte.

10 Omnes anguli recti ſunt inter ſe ę-quales.

11 Si in duas rectas recta incidens angulos interiores & ad eaſdẽ partes duobus rectis minores fecerit, coincident duæ illę lineę, protractę in illam partem, ad quam ſpectant duo anguli minores rectis. *Vt ſi in rectas A B, C D, cadens recta E F, faciat angulos internos & ad eandẽ partẽ A E F, E F C, minores duobus rectis, coincident illa lineæ protracta verſus partem A C.*

12 Duę rectæ ſpatium non comprehendunt,

13 Partes omnes ſimul ſumptæ ſuo toti ſunt æquales, & totum ęquale eſt ſuis omnibus partibus.

Propoſitionum aliæ faciẽdum aliquid proponunt, & vocantur Problemata; aliæ in ſola contemplatione ſiſtunt, quæ idcirco Theoremata inſcribuntur.

Notę ad marginem.

Poſt.		Poſtulatum.
Ax.		Axioma.
Def.	id eſt	Definitio.
Conſt.		Conſtructio.
Hyp.		Hypotheſis.

Prior

Prior numerus aliquid ex dictis, poſterior librum ſignificat. Vt def. 6. 1. hoc eſt, definitio ſexta libri primi, &c.

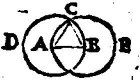
Quando numerus ſolitarius apponitur, puta 3. intelligatur propoſitio tertia, &c.

Item cum numerus libri non additur intelligatur is *liber* in quo verſamur.

PROPOSITIONES.

Propositio 1. Problema.

Super data recta linea terminata triangulum æquilaterum constituere.

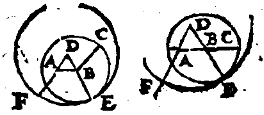


SIt data recta A B. Centro igitur A, spatio A B describatur circulus B C D, & centro B, spatio eodẽ ducatur circulus alter A C E, priorem secans in puncto C, iunganturq́; rectæ lineæ C A, C B, & factũ est quod proponitur. Rectè enim A B, A C, (quia sunt semidiametri eiusdẽ circuli B C D,) inter se sunt *a* æquales, similiterque ob eandem caussam æquales sunt rectę B A, B C Nunc vero cum recte A C, B C, vni & eidem A B, æquales sint, erunt etiam inter se æquales; & sic triangulũ A B C, est æquilaterum. Super data ergo recta A B, constituimus triangulum æquilaterum, quod erat faciendum. *Ita concludi solent problemata.* *a* 15. def. 1.

Pro-

Propos. 2. Problem.

Ad datum punctum data recta linea aequalem rectam ponere.



AD punctũ A, sit cõstituẽda recta aequalis ipsi B C. Ductâ ergo rectâ A B, (nisi ante sit ducta) fiat super ea triangulũ *a* aequilaterũ A B D, & centro B, spatio B C, ducatur circulus C E; producta deinde D B, vsq; ad ambitũ in E, centro D, spatio D E, describatur circulus E F, secãs productam D A, in F, & factũ erit quod petitur. Nã quia rectae A F, B E, additis aequalibus A D, B D, fiunt aequales, *b* inter se *c* erunt aequales, quare recta A F, ipsi etiã B C, *d* aequalis est. Ad punctũ ergo A; constituimus rectã A F, ipsi B C, aequalem, quod erat faciendum.

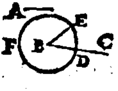
a 1.
b def. 15.
c ax. 3.
d 15. def.

Posset ita constitui punctum A, vt alia quoque sit praxis huius problematis, sed in re facili & primis initijs morosius agendum non puto cum Tyronibus; quod idem deuito seq. probl. & prop. 7.

Pro-

Propo. 3. Proble.

Datis rectis lineis inæqualibus de maiore minori parem auferre.



VT rectæ A, ex maiore; B C, æqualis auferatur; ad punctum B, ponatur B E, *a* ipsi A, æqualis. Mox centro B, spatio B E, fiat circulus D E F, eritque abscissa E D, ipsi A, æqualis; nam vtraque ipsi B E, est æqualis; A, quidem ex hypothesi, B D; autē quia est eiusdem circuli *b* semidiameter.

a 1. 2.

b def. 15.

Proble. 4. Theorema.

Duorum triangulorum si latus vnum vni, & alterum alteri sit æquale, anguliq; inter illa latera contenti sint etiam pares, erunt & bases æquales; & ipsa tota triangula: sed & reliqui anguli reliquis angulis pares erunt, quibus æqualia latera subtenduntur.

Vt si

VT si in triãgulis A B C, D E F, latus A B, lateri D E, & latus A C, lateri DF, alterum alteri sit æquale (vel phrasi Græca vtrumque vtrique) simulque etiam pares anguli A, & D, dictis lateribus contenti; Dico basim B C, basi E F, esse æqualem, & cętera consequi vt est propositum. Nam si intelligamus triangulum triangulo superponi ita vt angulus A, congruat angulo D, congruent *a* latera A B, A C, lateribus D E, D F, alterum alteri, cui nempe est æquale. Sed congruent etiam bases, ideoque erunt æquales, cum enim puncta B, & C, cadunt in E, & F, recta B C, cadet in E F, nam si supra, aut infra caderet, duę rectæ *b* spatium comprehenderent. Duorum ergo triangulorum; &c. Quod erat demonstrandum. *Ita concludi solent Theoremata.*

a 8. ax.

b ax. 11.

Propo. 5. Theore.

Trianguli Isoscelis anguli ad basim sunt pares; & si æqualia latera producantur, pares quoque erunt anguli infra basim.

In

IN triangulo isoscele A B C, latera A B, A C, producantur vt lubet, sumptaque vtcunque recta A D, æqualis illi *a* capiatur A E, iunganturque rectę, C D, B E. *a* 3.
Nunc quia triangula A C D, A B E, se habent iuxta Prop. 4. est enim A C, ipsi A B, æqualis ex suppositione, & A D, ipsi A E, ex constructione, angulusque A, lateribus illis contentus est communis. Ob hæc *b* inquam bases D C, & B E, *b* 4. 1.
sunt pares, itemque angulus D, angulo E, & angulus A C D, angulo A B E. Rursus triangula B C D, B C E, se habent iuxta Prop. 4. Sunt enim anguli D, & E, æquales & æqualibus lateribus contenti; erunt igitur anguli infra basim D B C, B C E, æquales; itemque anguli B C D, E B C: & quia totus angulus A C D, ostensus est æqualis toti A B E, ablatis paribus C B E, & D C B, qui remanent supra basim sunt *c* æquales. Trianguli *c* ax. 3.
igitur isoscelis, &c.

Pro-

Propo. 6. Theore.

Si trianguli duo anguli fuerint æquales, erunt & latera angulis subtensa æqualia.

IN triangulo A B C, si æquales sunt anguli B, & A C B, erũt etiã latera A B, A C, subtẽsa dictis angulis, inter se æqualia. Nam si negas esse æqualia, sit alterum maius, puta A B; ex quo auferatur recta B D, ipsi A C, æqualis, ducaturq; recta D C. Nunc verò cum duo triangula A B C, C B D, habeant latus B C, commune, & latera B D, *a* C A, sint æqualia, angulique contenti B, & A C B, *b* æquales erit *c* triangulum D B C, triangulo A B C, hoc est totum parti, æquale, quod fieri non potest. Si ergo trianguli, &c.

a const.
b hyp.
c 4. 1.

Conuertit hæc propositio priorem partẽ superioris: nam ibi ex æqualitate laterum A B, & A C, colligebatur æqualitas angulorum supra basim B C, hic verò vice versa ex æqualitate dictorum angulorum colligitur æqualitas laterũ. Solet autem Euclides eas tantum propositiones conuertere, cum ad proba-

tio-

tionem sequentium vtraque propositio est adhibenda, hac est tam conuertens, quàm conuersa.

Propo. 7. Theore.

Super recta linea ductis ad quoduis punctum duabus rectis non ducentur super eadem ad aliud punctum versus easdem partes duę aliæ, sic vt quæ ab eodem termino incipiũt, sint æquales.

SVper recta A B, ductis ad punctum C, duabus rectis A C, B C, ducantur si fieri potest: aliç duç A D, D B, ad aliud punctum D, ita vt C A, ipsi D A, (cum qua habet eundem terminum A,) & C D, ipsi D B, æqualis sit, ducaturque insuper recta C D: quia igitur A C, A D, sunt æquales, erunt *a* anguli A C D, A D C, inter se æquales; maior erit proinde angulus A D C, angulo B C D, & multo maior angulus C D B; nunc verò quia C B, ponitur æqualis ipsi D B, erit angulus *b* C D B, angulo B C D, æqualis, qui tamen ante erat ostensus multo maior, non *a* *b* non ergo ductæ sunt binæ æquales prioribus. Quod fuit demonstrandum.

Propositio 8. Theore.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus alterum alteri æqualia habuerint, & basim basi æqualem; habebunt etiam angulum lateribus contentum æqualem.

IN triangulis A B C, D E F, sint latera A B, A C, ipsis D E, D F, alterum alteri æqualia, itemque basis B C, basi E F. Quod si negas angulos A, & D, lateribus contentos pares esse, intelligatur triangulũ A B C, triangulo D E F, superponi, tunc verò necessario punctum A, cadet in D, & sic angulus angulo congruet vt vult propositio: nam si non caderet in D, sed in G, aut aliud punctum: tunc duæ rectæ duabus rectis æquales ducerentur ad aliud punctum, &c. quod est contra præcedentem. *Est conuertens primæ partis Propos. 4.*

Propositio 9. Proble.

Datum angulum rectilineum secare bifariam.

EX lateribus dati anguli B A C, sumatur recta A B, vt lubet, & ipsi par A C, nec non super ductam rectam B C, fiat triãgulum æquilaterum B D C, ducaturque recta A D, per quam angulus B A C, diuidetur bifariam: nam A B, A C, æquales sunt ex constructione, & A D, communis, estque insuper basis B D, basi C D, æqualis, sunt *a* ergo anguli B A D, C A D, æquales; quare angulus B A C, diuisus est bifariam. Quod erat faciendum.

a 8.

Propositio 10. Proble.

Datam rectam finitam secare bifariam.

SVper recta A B, fiat triangulũ *a* æquilaterũ A B C, cuius angulus A C B, diuidatur bifariã per rectã C D, & recta A B, in

a 1.

in puncto D, bifariam quoque secta erit: Nam triangula C A D, C B D, se habent iuxta 4. Propo. Ergo bases AD, DB, sunt æquales.

Propo. 11. Proble.

Ex dato puncto in linea recta perpendicularem excitare.

IN recta B C, detur punctum D, sumanturque vtcumque ęquales rectę D B, D C; inde super B C, structo triangulo æquilatero B C A; ex A, ducatur recta A D, & hæc erit ad angulos rectos ipsi B C; Nam latus D B, æquale est ipsi D C, ex constructione, & latus D A, commune, basis insuper B A,
a 8. basi C A, æqualis; sunt *a* ergo anguli A D B, A D C, ęquales, ac proinde re-
b 20. def. cti, & ipsa A D *b*, perpendicularis.

Propos. 12. Problem.

A dato extra rectam infinitam puncto perpendicularem ducere ad eandem rectam.

DEtur punctum A, quo centro, spatio quocunq; ducatur circulus dummodo secet rectam B C, infinitam seu quantum opus erit productam, ductisque rectis A B, A C, recta B C, diuidatur *a* bifariam in D, ducaturque recta A D; & hæc eadem erit perpendicularis quæsita. Nam quia in triangulis A B D, A D C, æquales sunt A B, *b* A C, æquales item *c* B D, D C, & A D communis anguli A D B, *d* A D C, erunt æquales ac proinde recti; ideoque recta A D, perpendicularis.

a 10.
b def. 15.
c const.
d 8.

Propositio 13. Theore.

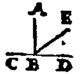
Recta super rectam consistens aut duos rectos aut duobus rectis æquales angulos facit.

Nam recta A B, consistens super C D, aut facit vtrimque æquales angulos, & *a* proinde rectos; aut inæquales,
a def.10.
b 11. & tunc ex puncto B, excitetur *b* perpendicularis B E, quia igitur in angulo A B C, continebatur vnus rectus E B C, & insuper angulus E B A, qui cum angulo A B D, facit alterum rectum, recta A B, constituebat angulos A B C, A B D,
c ax. 12. æquales *c* duobus rectis.

Propositio 14. Theore.

Si ad punctum in recta linea datum duæ rectæ non ad easdem partes ductæ angulos efficiant duobus rectis æquales, in directum sunt illæ lineæ.

Nam



NAm si ad punctum B, ducantur duæ rectæ C B, B D, facientes cum recta A B, angulos æquales duobus rectis, & negas rectas C B, B D, iacere in directum, iaceat ergo B E, in directum ipsi C B; eruntque anguli A B C, A B E, æquales duobus rectis. At hoc esse non potest; nam anguli A B C, A B D, erant pares duobus rectis: non sunt ergo pares duobus rectis anguli A B C, & A B E, alias totum & pars essent æqualia: sed neque alia duci potest ipsi C B, iacens in directum nisi B D; ergo, &c.

Propositio 15. Theore.

Si duæ rectæ se inuicem secuerint angulos ad verticem oppositos æquales facient.

REctæ A B, C D secent se in E, eritque angulus C E B, angulo A E D (qui dicitur illi esse ad verticem oppositus) æqualis: nam siue A E D, siue C E B adijciatur angulo interiecto A E C, constituet *a* æquales duobus rectis; quare anguli C E B, & A E D, *b* sunt æquales.

a 13. *b* ax. 3.

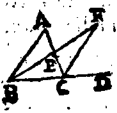
Similis demonstratio procedet in reliquis oppositis angulis ad verticem.

Propo. 16. Theore.

Omnis trianguli quouis latere producto externus angulus vtrolibet interno & opposito maior est.

VT in triangulo A B C, producto latere B C, angulus internus A C B, cũ externo A C D, valet *a* duos rectos; idem autem internus A C B, cum angulo B, non valet duos rectos; alias enim rectę B A, C A, non *b* concurrerent in A, ergo externus A C D, maior est interno & opposito B. Deinde producto latere A C, similiter monstrabitur externum B C E, maiorem esse angulo A: atqui angulus A C D, ad verticem ęqualis est *c* ipsi B C E; ergo angulus A C D, ipso etiam in A, est maior. Omnis igitur, &c.

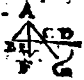
a 13.
b ax. 11.
c 15.



Aliter Triãguli A B C, latere B C, producto in D, latus A C bisecetur in E, ducaturque B F, ita vt E F, æqualis fiat ipsi

B E,

B E, iungaturque recta F C, quæ erit æqualis ipsi A B: nam a duo latera E B, E A, æqualia sunt duobus B F, E C, & anguli contenti æquales ad verticem; Triangula ergo A E B, F E C, se habent iuxta 4 Propo. & basis F C, basi A B, est æqualis, angulus item B A E, angulo E C F; sed hic est pars anguli externi E C D, ideoque minor, quare & angulus B A C, minor est externo A C D. a 4.



Quod si latus B C, bisecetur in E, producto latere A C, in G, & reliqua fiant vt prius eodem modo monstrabitur angulum B C G, & proinde angulum A C D, qui est huic ad verticem, maiorem esse angulo A B C. Omnis igitur, &c.

Propo. 17. Theore.

Omnis trianguli duo anguli quomodocumque sumpti minores sunt duobus rectis.

Nam si anguli B, & A C B, non essent minores duobus rectis rectæ B A, C A, non concurrerent in A. a a ax. 11.

Aliter: Angulus C, internus plus requirit quam angulum B, vt fiat æqualis duobus rectis;

b 13. requirit b enim angulum exter-

c 16. 1. ternũ C, maiorem interno & opposito c B; sunt ergo anguli B, & C, interni duobus rectis minores. Similiter alio latere producto de alijs quibusuis duobus angulis idem probabitur. Omnis ergo, &c.

Propositio 18. Theore.

Omnis trianguli maius latus maiorẽ angulum subtendit.

VT si trianguli A B C, maius est latus A C, quàm A B, maior erit angulus A B C, quam angulus C, subtensus à latere minore A B: Sumatur enim A D, æqualis ipsi A B. Tunc verò quia æqualia sunt latera A B, A D,

a 5. anguli A B D, A D B, supra a basim sunt pares Sed angulus A D B, est externus & oppositus angulo C; ac proin-

b 16, 1. de b maior; multo ergo maior est, totus angulus A B C, angulo C. Omnis igitur trianguli, &c.

Propositio 19. Theore.

Omnis trianguli maior angulus maiori lateri opponitur.

SI angulus B, maior sit ipso C, erit & latus A C, maius quàm A B, non enim est minus aut ęquale; nam tunc angulus B, esset minor *a* aut æqualis *b* ipsi *a* 18
C, est ergo A C, maior quam A B. *b* 5.
Quare omnis trianguli, &c.

Propositio 20. Theore.

Omnis trianguli duo latera quomodocunque sumpta, reliquo sunt maiora.

VT in triangulo A B C, dico latera A B, B C, simul sumpta esse maiora ipso A C; producatur enim A B, sic vt B D, æqualis sit ipsi B C, & proinde A D, æqualis sit ipsis A B, & B C;

Nunc vero quia B D, & B C, sunt
a 5. æqualia; erunt pares *a* anguli D,
& B C D; maior ergo vtroque
erit totus angulus A C D; sed
totum hunc angulum trianguli A D C,
b 19. subtendit latus A D, maior ergo est *b* recta A D, (quæ æqualis est duabus A B, & B C) quam latus A C. Omnis ergo trianguli, &c.

Propo. 21. Theore.

Si à terminis vnius lateris in triangulo duę rectę intra triangulum iungantur, erunt hę lateribus trianguli minores, maiorem vero angulum continebunt.

VT in triangulo A B C, dico latera B A, A C, esse maiora rectis B D, & D C, quæ intra triangulum iunguntur in D. Nam producto latere B D, in E, latera B D, D C, minora sunt ipsis B E, E C; quandoquidem C E, E D, simul
a 20. sumpta maiora *a* sint latere D C, & D B, sit commune; eandemque ob caussam latera B E, E C, minora sunt ipsis B A. A C;

A C; latera ergo B D, D C, multo minora sunt ipsis B A, A C. Secundo angulus B D C, externus *b* maior est interno & opposito D B C; & hic maior ipso A, interno & opposito; multo ergo maior est angulus B D C, ipso angulo A. Si ergo, &c. *b* 16.

Proposi. 22. Proble.

Triangulum constituere cuius latera tribus datis lineis sint aequalia, oportet autem duas quomodocunque sumptas reliqua[a] esse maiores. *a* 20.

Dentur tres rectae A, B, C, & ipsis sumantur ordine aequales D E, E F, F G: tum centro E, spatio E D, ducatur circulus D H, & centro F, interuallo F G, ducatur circulus alter G H, iunganturque rectae E H, F H, & factum est quod proponitur. Nam in triangulo E H F, recta E H, aequalis *a* est ipsi D E, hoc est ipsi A, E F, verò ipsi B, ac denique F H, ipsi F G, hoc est ipsi C. *a* 15. def. & const.

Pro-

Propositio 23. Proble.

Ad datum in recta punctum, dato angulo æqualem angulum rectilineum ponere.

DEtur angulus A, cui ad punctum B, in recta B C, æqualis sit ponendus. Sumptis vtcunque in lateribus dati anguli punctis D, & E, iungatur recta D E, constituaturque
a 22. triangulum B C F, a cuius latera sint tribus lateribus ipsius A D E, ęqualia, ita vt B C, par sit ipsi A D; B F, ipsi A E; C F, ipsi D E: Quo facto triangula se habent iuxta 8. Propo. Quare anguli A, & B, æquales, & sic factum est quod erat propositum.

Pro-

Propositio 24. Theore.

Si duo triangula duo latera æqualia alterum alteri habuerint, & vnũ triangulum habeat angulum lateribus contentum maiorem, idem quoque habebit basim, basi alterius trianguli maiorem.

VT si latera A B, A C, æqualia sint lateribus D E, D F, & angulus A, maior angulo E D F, maior quoque erit basis B C, basi E F. Nam si fiat angulus G D F, ipsi A, æqualis, & latus D G, ipsi D E, fit æquale, iunganturque rectæ G E, G F, anguli *a* D G E, D E G, pares erunt; quare totus F E G, maior erit quam D G E, & multo maior quam F G E, quare recta *b* G F, & huic æqualis B C, maior est quam E F. Si duo ergo triangula, &c.

a 5.

b 19.

Pro-

Propositio 25. Theore.

Si duo triangula duobus lateribus duo latera æqualia habuerint alterum alteri, basim vero basi maiorem, angulum etiam maiori basi oppositum maiorem habebunt.

NAm si paria sint latera A B, A C, ipsis D E, D F, & basis B C, maior basi E F, angulus A, maior erit ipso D; si enim aut æqualis esset aut minor basis etiam E F, ipsi B C, æqualis *a* esset, aut *b* minor, contra hypothesim. Si ergo, &c.

a 4.
b 24.

Propositio 26. Theore.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis pares habuerint alterum alteri, & vnum latus vni lateri æquale, siue quod adiacet angulis æqua-

qualibus, siue quod vni æqualium angulorum subtenditur, erunt & reliqua latera alterum, alteri æqualia, & reliquus angulus reliquo æqualis.

SInt in triãgulis A B C, D E F, anguli B, & A C B, ęquales angulis E, & F, sintq; primo latera B C, E F, (quæ adiacent angulis æqualibus) æqualia. iam si latus B A, non est æquale ipsi E D, sit illo maius, & ex eo sumatur B G, æqualis ipsi E D, tum vero ducta C G, duo latera triangulorum B G C, & E D F, æqualia sunt, & anguli contenti B, & E, ęquales vnde a anguli F, & a 4.
G C B, pares erunt; quod esse non potest; nam hic angulus est pars ipsius A C B, qui æqualis ponebatur ipsi F, non est ergo maior B A, quam E D; sed neque minor, alias lateri E D, eadem quæ prius applicaretur demonstratio; ergo æqualis; & tunc triangula B A C, E D F, se habent iuxta 4. Prop. & latera lateribus, anguli item angulis correspondentibus sunt æquales. Sint secundo positis, vt prius, angulis B & A C B, ipsis E, & F, ęqualibus, latera E D, B A, (subtensa angu-

gulis ęqualibus A C B, D F E) æqualia; iam si B C, non est æqualis ipsi E F, sit maior, sumaturq́; B H, æqualis ipsi E F, ductaque A H, probabitur triangula B A H, & E D F, esse iuxta 4. (sunt *b* enim latera B A, E D, item B H, E F, æqualia & anguli contenti ęquales) quare angulum B H A, parem esse ipsi F, cui eidem æqualis est A C B; quod fieri nequit: nam sic angulus A H B, æqualis esset interno & opposito A C H; non est ergo B C, maior quàm E F, sed æqualis; quare rursus triangula B A C, E D F, sunt iuxta 4. Propo. & cætera sequuntur vt prius.

b hyp.

Propositio 27. Theore.

Si in duas rectas recta incidens angulos alternos pares fecerit, parallelæ erunt illæ lineæ.

Sint duæ rectæ A B, C D, in quas cadat recta E F, faciens angulos alternos A E F, E F D, ęquales; parallelę ergo erunt rectæ A B, C D; nam si concurrerent in G, & fieret triangulum E G F, esset angulus externus A E F, maior *a* interter-

a 16.

terno & opposito E F G, cui ponebatur æqualis. Eadẽ fiet demonstratio si dicantur cõcursuræ versus A: neutram ergo in partem concurrent, sed sunt *b* parallelæ. b def.32.

Propositio 28. Theore.

Si in duas rectas recta incidens angulum externum interno & opposito ad easdem partes æqualem fecerit, aut duos internos ad easdem partes æquales duobus rectis, parallelæ sunt illæ lineæ.

IN duas rectas A B, C D, incidens E F, faciat primò angulum externum E G B, æqualem interno G H D, & opposito ad easdem partes, quia ergo angulus E G B, æqualis est *a* angulo ad verticem A G H, erũt anguli alterni A G H; G H D, æquales; cum æquales sint vni tertio E G B ergo lineæ A B, C D, *b* sunt parallelæ. Faciat secundo recta E F, angulos B G H, D H G, internos ad easdem partes, æquales duobus rectis; quia ergo angulus E G B, cum angulo B G H, valet duos *c* rectos & cum eodem B G H, angulus G H D, itidem valet duos rectos, sequitur *d* angulum ex-

a 15. *b* 27. *c* 13. *d* ax. 3.

externum E G B, æqualem esse interno G H D, quare per priorem partem huius Propo. rectæ A B, C D, sunt parallelę.

Propositio 29. Theore.

Si recta in parallelas incidat anguli interni ad easdem partes duobus rectis ęquales erunt, anguli item alterni inter se æquales; ac denique angulus externus interno & opposito erit ęqualis.

VT si in parallelas A B, C D, cadat recta E F, primo anguli interni tam versus A, quam versus B, pares erunt duobus rectis: nam si versus alterutrã partem essent minores, lineæ ex ea parte *a* productæ concurrerent, quare contra hypothesim non essent parallelæ.

a ax. 11.

Secundo quia angulus D H G, tam cum angulo H G B, quam cum angulo C H G, valet duos rectos, sequitur angulos H G B, *b* & C H G, qui sunt alterni, inter se esse æquales.

b ax. 3.

Ter-

Tertio eadem ratione quia B G H, siue cum externo E G B, siue cum interno G H D, valet duos rectos, sequitur externum E G B, parem esse interno G H D. Si ergo recta, &c.

Propositio 30. Theore.

Quæ eidem rectæ sunt parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

Sint rectæ A B, C D, parallelæ ipsi E F, in quas omnes cadat recta G H. Quia ergo A B, E F, sunt parallelæ, anguli alterni A G I, G I F, sunt *a* æquales: Sed angulus G I F, æqualis est *b* interno & opposito I H D; (cum E F, C D, ponantur etiam parallelæ) sunt ergo inter se *c* æquales anguli A G H, G H D. recta ergo G H, cadens in rectas A B, C D, facit angulos alternos æquales, ideoque rectæ illæ sunt *d* parallelæ.

a 29.
b 29.
c ax. 1.
d 27.

Propoſitio 31. Proble.

Per datum punctum lineam datæ recta parallelam ducere.

DEtur recta A B, cui per punctum C, ducenda ſit parallela. Ducatur ergo vtcumque ad rectam A B, recta D C, & angulo C D B, conſtituatur *a* æqualis E C D, eritque recta E C, *b* ipſi A B, parallela; nam anguli alterni E C D, C D B, ſunt pares.

a 23.
b 27.

Propoſitio 32. Theore.

Omnis trianguli vno latere producto externus angulus duobus internis & oppoſitis eſt æqualis, & tres interni duobus rectis ſunt æquales.

TRianguli A B C, producatur latus quodcunque puta B C in D, ducaturque *a* C E ipſi A B parallela. Quia ergo A C

a 31.

ca-

cadit in parallelas A B, E C, angulus *b* A, æqualis est alterno A C E. Rursus quia recta B C, cadit in easdem parallelas, angulus *c* E C D, externus æqualis est interno B. Totus igitur A C D, æqualis est duobus internis A, & B, & probata est prior pars propositionis. Nunc quia angulus A C B, cum externo A C D, valet *d* duos rectos, idem A C B, cum duobus A & B, valebit duos rectos, cum A, & B, ostensi sint pares ipsi externo A C D. Omnis igitur trianguli, &c.

b 29.

c 29.

d 13.

Corollarium.

Hinc manifestum est in omni quadrilatero quatuor simul angulos quatuor rectis esse æquales: nam ducta recta ex vno angulo in oppositum, quadrilaterum diuidetur in duo triangula quæ singula habent angulos pares duobus rectis, anguli ergo totius quadrilateri valent quatuor rectos. Vt apparet in figura seq. propo.

Pro-

Propositio 33. Theore.

Lineę rectę quæ æquales & parallelas ad easdem partes iungunt, sunt & ipsę æquales & parallelæ.

RECtas A B, C D, æquales & parallelas iungant ad easdem partes duæ alię A C, B D, ducaturq́; recta B C. Quia ergo recta B C, tangit parallelas A B, C D;
a 29. anguli *a* alterni A B C, B C D, pares sunt. Nunc vero quia latera A B, C D, sunt æqualia, & latus C B, est cōmune, anguliq́ue contenti A B C, B C D, sunt æquales, triangula A B C, B C D, sunt iuxta 4. Quare basis A C, basi B D, est ęqualis (quæ est prior pars propositionis) & insuper angulus C B D, angulo B C A, erit æqualis. Nunc ergo quia in duas rectas A C, B D, cadens recta B C, facit angulos C B D, B C A,
b 27. alternos æquales, parallelæ *b* sunt A C, B D.

Pro-

Propoſitio 34. Theore.

Parallelogrammorum ſpatiorum oppoſita latera & anguli ſunt æqualia; ipſaq; parallelogramma à diametro ſecantur bifariam.

NAm in parallelogrammo A D, ducta diametro B C, anguli alterni *a* A B C, B C D, ſunt pares, & turſus æquales ſunt anguli C B D, B C A; quia ergo triangula A B C, B C D, habent duos angulos pares, & latus B C, adiacens æqualibus angulis commune, reliqui *b* anguli A, & D, ſunt pares, & latera omnia, & anguli correſpondentes ſunt æquales: tota denique triangula *c* æqualia ſunt. Quare parallelogrammum A D, bifariã ſecatur à diametro B C. Igitur parallelogram. &c.

a 29.
b 26.
c 4.

Propositio 35. Theore.

Parallelogramma super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

SVper eadem basi A B, constituta sint duo parallelogramma A D, A F; sintque A B, C F lineę parallelę Considerentur deinde duo triangula C A E,
a 34. D B F, in quibus latus A C, æquale est *a* ipsi D B, & C E, alteri D F: nam C D,
b 4. E F, æqualia *b* sunt vni & eidem A B, & addito communi D E, lineæ C E, D F,
c 29. sunt pares Sed & angulus B D F, ęqualis est ipsi C, cum in rectas C A, D B, cadat C F: sunt ergo triangula C A E, D B F: iuxta 4, & vndique æqualia. Quare ablato cõmuni triangulo D E G, trapezia relicta C D G A, F E G B, sunt ęqualia; & addito communi triangulo A B G, parallelogramma A B C D, A B E F, sunt paria.

Pro-

Propoſitio 36. Theore.

Parallelogramma ſuper ęqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

SInt parallelogramma A C, E G, inter parallelas A H, B G, ſuper baſibus paribus B C, F G. iunganturque rectæ B E, G H: quæ quia iungunt æquales & parallelas B C, E H, ſunt & ipſę *a* æqua- *a* 34.
les, & parallelę: eſtque E B C H, parallelogrammum *b* æquale tam ipſi A C, cum ſit ſuper eadem baſi B C, quam al- *b* 35.
teri E G, cum ſit etiam ſuper eadem baſi E H. Sunt ergo & extrema parallelogrãma A C, E G, *c* æqualia. *c* ax. 1.

Propoſitio 37. Theore.

Triangula ſuper eadem baſi & inter parallelas eaſdem poſita, ſunt æqualia.

SInt triangula A B C, D B C, super eadem basi B C, inter parallelas B C, E F, ducanturque rectæ E B, F C, parallelę ipsis A C, D B. Quia ergo parallelogramma E B C A, D B C F, sunt super eadem basi B C, & inter easdem parallelas,
a 35. *a* erunt æqualia. At trian-
b 34. gulum A B C, est dimidium *b* parallelogrammi E C; cumq; triangulum D B C, alterius parallelogrammi B F, sit etiam
c ax. 7. dimidium erunt triangula A B C, *c* D B C, inter se æqualia, quod erat demonstrandum.

Propositio 38. Theore.

Triangula super æqualibus basibus & in eisdem parallelis sunt æqualia.

TRiangula A B C, D E F, sint constituta vt proponitur, ducanturq; rectæ C G, F H, ipsis A B, D E, parallelę eruntque parallelogramma B G, E H, iuxta 36. æqualia; vnde horum di-
a 34. midia, hoc est *a* triangula A B C, D E F, erunt æqualia.

Pro-

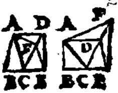
Propositio 39. Theore.

Triangula æqualia super eadem basi & ad easdem partes constituta in eisdem sunt parallelis.

NAm si triãgula A B C D B C, super eadem basi B C, constituta, sint ę-qualia, & negas tamen rectam ex A, per D, ductam ipsi B C, esse parallelam; ducatur alia quæ sit parallela, puta A E, cui recta B D, occurrat in puncto E: ductâ ergo rectâ C E, erit triangulum A B C, æquale *a* triangulo E B C, quod fieri non potest: nam triangulum D B C; æquale ponitur eidem triangulo A B C; ergo totum & pars vni & eidem essent æqualia; non ergo erit alia quam A D, parallela ipsi B C. *a* 37.

Propositio 40. Theore.

Æqualia triangula & ad easdẽ partes super ęqualibus basibus constituta sunt inter easdem parallelas.



NAm si triãgula A B C, D C E, posita sint æqualia & super æqualibus basibus B C, C E, neges tamen rectam A D, ipsi B E, esse parallelam, sit parallela A F, cui occurrat C D, in puncto F. Tunc vero ductã
a 38. F E triangulum F C E, erit *a* ęquale ipsi A B C, cui eidem æquale ponitur triangulum D C E; erunt ergo pars & totũ eidem æqualia, quod esse nequit. *Et hanc manifestum est esse conuersam propo.* 38.

Propositio 41. Theore.

Si parallelogrammum & triangulum eandem habuerint basim sintque in iysdem parallelis, erit parallelogrãmum duplum trianguli.

Sint

SInt parallelogrammũ ABCD, & triangulum EBC, super eadem basi BC, & inter parallelas AE BC; ducaturque AC. Quia ergo triangula ABC, *a* EBC, sunt æqualia, & ABC, est dimidium parallelogrammi BD, sequitur etiam triãgulum EBC, eiusdem parallelogrammi esse dimidium. *a* 37.

Propositio 42. Proble.

Dato triangulo æquale parallelogrãmum constituere in dato angulo rectilineo.

SInt data triangulũ ABC, & angulus D, basisque BC, bifariam secta in E, ducatur AE, agaturque *a* per A recta AG, ipsi BC, parallela, mox ad E punctum; facto angulo FEG, *b* ipsi D, ęquali, educatur ex C, recta CG, ipsi FE, parallelâ. Quia ergo triangula ABE, AEC, super *c* æqualibus basibus BC, EC, sunt æqualia; & trian- *a* 31. *b* 10. *c* 38.

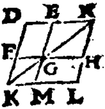
triangulum A E C, parallelogrammi super eadē basi E C, constructi *d* est dimidium, sequitur totum triangulū ABC, esse æquale parallelogrammo E G. Dato ergo triangulo æquale parallelogrammū constituimus, habens angulum F E C, dato angulo D, æqualem.

d 41.

Propositio 43. Theore.

Omnis parallelogrammi eorum quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum complementa sunt inter se æqualia.

CIrca diametrū K N, parallelogrāmi L D, consistant parallelogramma F M. E H, complemēta vero quæ dicuntur, sint parallelogramma D G, G L, per quæ diameter K N, non transit; quia igitur diameter K N, diuidit bifariā tria parallelogramma D L, F M, E H, *a* erunt triangula K F G. G E N, ęqualia triangulis K M G. G H N, sed & totū K D N, toti triangulo K L N, ęquale est: comple-

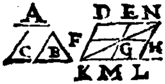


a 34.

plementa ergo D G, G L, sunt *b* etiam equalia. Omnis ergo parallelogrammi, &c. *b ax. 1.*

Propositio 44. Proble.

Ad datam rectam parallelogrammum constituere, dato triangulo æquale, in dato angulo rectilineo.



SIt data recta A, triangulum B, & angulus C: Fiat deinde parallelogrāmū D G, *a* equale triangulo B, habeatq; angulum E G F, angulo C, æqualē. Post hæc producto latere F G, in H, ita vt G H, sit equalis rectæ A, per H, agatur L N; *b* parallela ipsi E G, & occurrens lateri D E, in puncto N. Rursus producto latere D F, ducatur ex N, diameter per G, occurrens ipsi D F, in K, ductaque per K, recta K L, parallelâ ipsi F H, latus E G, producatur in M. Quo facto dico parallelogrammum G L, esse quod petitur: nam quia complementa *c* sunt æqualia, cum complementum *d* G D, sit æquale triangulo B, erit etiam G L, eidem B æquale; sed & angulus M G H, æqualis est angulo F G E, opposito *e* ad *a 42.* *b 31.* *c 34.* *d const.* *e 15.*

verticem, quare & ipsi C, erit æqualis; estque recta G H, æqualis datæ rectæ A: Igitur ad datam rectam, &c.

Propositio 45. Proble.

Dato rectilineo æquale parallelogrāmum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datus angulus E, & rectilineum A B D C, in quo ductâ rectâ A D, fiat parallelo-
a 44. grāmum F I, *a* æquale triangulo A C D, in angulo H, qui sit ipsi E, æqualis: protrahatur deinde latus H I, & ad rectam G I, in angulo G I L, (qui est æqualis
b 29. ipsi H, *b* quare & ipsi E,) fiat parallelogrammū G L, ęquale triangulo A B D, eritque tota figura F L, parallelogram-
c const. mum; recte enim F H, K L, eidem *c* G I,
d 30. ideoque etiam inter se *d* sunt parallelæ. Et quia tota H L, est vnica recta cuius
e const. partibus partes lineę F K, sunt *e* parallelæ ipsa etiam F K, erit vnica recta (quod etiam probari potest quia anguli H, &
f 34. F G I, itemque anguli L, & K G I, *f* æquales sunt; Sicut ergo anguli H, & L,

va-

valent *g* duos rectos ita etiam anguli F G I, K G I, ideoque F G K, est *b* vnica recta) ac propterea figura F K L H, est parallelogrammum æquâle dato rectilineo, vt patet. *g* 29. *b* 14.

Propositio 46. Proble.

A data recta linea quadratum describere.

SIt data recta A B, ad cuius extrema A & B *a* excitentur perpendiculares C A, D B, ipsi A B, æquales, iungaturque recta C D, & constitutum est quadratũ. Cum enim anguli A & B, sint recti, *b* erunt A C, D B, parallelæ, suntque etiã *c* ęquales, quare C D, A B, sunt quoque parallelæ & æquales; atque ita tria reliqua latera ipsi A B, sunt ęqualia, & figura est parallelogramma cumque anguli A & B, sint *d* recti *e* erunt etiam oppositi C, & D, recti: quare figura A D. est quadratum, ex definit. 27.

a 11. *b* 28. *c* const. *d* const. *e* 34.

Propositio 47. Theore.

In rectangulis triangulis quadratum quòd à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est duobus simul quæ à laterib. rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.

IN triangulo A B G, angulus B A G, rectus sit, fiantque super *a* lateribus A B, A C, quadrata B G, G H. Item fiat super latere B C, angulum rectum subtendente quadratum B K, quod dico æquale esse duobus aliorum laterum quadratis simul sumptis: ductâ enim A E, parallelâ ipsi B D, iungantur etiam rectæ A D, F C. Quo facto triangula A B D, F B C, sunt iuxta 4 nam latera B D, B A, ipsis B C, B F, æqualia sunt, & anguli contenti F B C, A B D, æquales, quandoquidem anguli F B A, C B D, recti sint & angulus A B C, communis; triangula ergo A B D, F B C, vt dixi, *b* sunt æqualia: sed trian-

a 46.

b 4.

triangulum A B D, est dimidium *e* parallelogrammi B E, cum sit super eadẽ basi B D, inter parallelas B D. A E, & eisdem ob causas triangulum F B C, est dimidium quadrati B G; quadratum ergo B G, ęquale est parallelogrammo B E, cum eorum dimidia sint paria. Quod si similiter puncta B I, A K, ductis lineis iungantur, eadem plane methodo probabitur parallelogrammum E C, quadrato C H. esse æquale. Totum igitur quadratum B K, reliquis duobus æquale est. In rectangulis igitur, &c. *e* 41.

Propositio 48. Theore.

Si quadratum ab vno trianguli latere descriptum ęquale est duobus reliquorum laterum quadratis, angulus quem reliqua latera continent est rectus.

IN triangulo A B C, sit latus A C, huiusmodi, vt eius quadratum æquale sit quadratis duorum reliquorum laterum A B; B C; dico angulum A B C, contentum, ijsdem lateribus esse rectum.

Nam

Nam si ducatur ex B, ipsi A B, perpendicularis B D, ipsi B C, æqualis, iungaturque recta A D, tunc quia angulus A B D, rectus est, erit quadratum ipsius A D, æ-
a 47. quale quadratis *a* rectarum A B, & B D, vel B C; cumque quadratum ipsius A C, quadratis earundem A B, B C, ponatur æquale, erunt lineę A C, A D, æquales inter se. Quia ergo duo triangula
b 8. A B C, A B D, habent tria latera *b* æqualia, sunt etiam anguli omnes æquales qui sibi respondent: vnde quia angulus A B D, rectus est, rectus etiam erit A B C; si ergo quadratum, &c. *Est conuersa præcedentis, vt satis patet.*

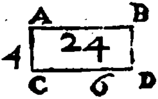
EVCLIDIS Elementorum

LIBER II.

Definitiones.

1. PArallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus lineis quæ rectum angulum comprehendunt.

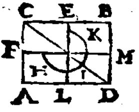
VT parallelogrã-mũ rectangulũ A B D C, cõtinetur sub rectis A B, A C, continẽtibus angulũ



rectũ A. Item sub rectis A B, B D, &c. vnde si intelligatur latus A C, duci in totũ latus A B, peragratur tota quãtitas dati rectãguli. Atq; hinc etiã manauit illa loquẽdi formula in Arithmeticis, qua dicimus vnum numerum duci in alium, seu multiplicari per alium; si enim latus A C, sit 4 pedum, & A B, sex pedum ducendo 4 in 6 inueniatur area dati rectanguli pedum quadratorum 24.

2. In

2. In omni parallelogrammo ſpatio vnum quodlibet eorum quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum cum duobus complementis Gnomon vocetur.



VT in parallelogrã-mo A B, parallelogrammum L M, tum duobus complementis E M, L F, vocatur Gnomon. Item parallelogrammum F E, cum duobus iiſdem complementis eſt Gnomon. Solet autem Gnomon deſignari linea curua quæ tranſit per complementa & parallelogrammum intermedium qualis eſt H I K.

Nomen Gnomon aſſumptum eſſe videtur ab inſtrumento fabrili quod Normam aut angulum rectum dicimus; gallicè *vne Eſquarre*, hæc enim figura, puta H I K, applicatur inſtar illius inſtrumenti parallelogrammo F E.

Propoſitiones.

Propoſitio 1. Theore.

Si fuerint duæ rectę quarum altera ſecetur in quotcunque ſegmenta,

re-

rectangulum sub duabus illis rectis contentum æquale erit omnibus simul rectangulis, quæ sub insecta & partibus lineæ sectæ continentur.

SVb rectis A B, A C, cõtineatur rectangulum A D, rectâque A B, vtcunque diuisâ in E, & F, ducatur F H, & E G, ipsi B D, parallelæ; eruntq; A G, E H, F D, rectangula; nam angulus E G H, ipsi C, *a* est æqualis, & omnes alios facile est ostendere alicui recto esse æquales. Manifestum est etiam rectangula partialia A G, E H, F D, simul sumpta toti rectangulo A D, esse æqualia, nam *b* omnes partes simul sumptæ toti sunt æquales. Et hoc tantum vult propositio. Nam A B, A C, sunt duę rectæ, quarum A B, secta est vtcunque in E, & F: ostensum est autem rectangulum A D, ipsis A B, A C, contentum, æquale esse rectangulis partialibus quæ continentur sub insecta A C, & partibus lineæ sectæ A B: rectangulum enim A G, continetur sub insecta A C, & parte A E; rectangulum vero E H, continetur sub E G, hoc est sub insecta A C, & sub parte G H, & sic de cæ-

a 29. 1.

b 13. ax.

cæteris. Si ergo fuerint, &c.

Idem videre est in numeris. Si enim dentur duo numeri 4 & 10, & alter eorum puta 10 diuidatur in quotuis partes 5, 3, 2, ex ductu seu multiplicatione ipsius 4 in omnes partes 5. 3, 2, fient 40. sicut ex multiplicatione eiusdem 4 in totum numerum 10.

Propositio 2. Theore.

Si recta secta sit vtcumque: rectangula sub tota & quolibet segmentorũ comprehensa, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato.

Rectangulum A B, sit quadratum rectę A C, rectaque A C, vtcumque diuisâ in E, ducatur E F, ipsi C B, pa-
a 1. rallela. & manifestum est, vt prius, *a* rectangula partialia A F, E B, simul sumpta, toti A B, esse ęqualia Neque aliud vult propositio. Nam recta A C, vtcunque secta est in E: rectangula autem A F, E B. contenta sub A D, E F, (hoc est sub tota A C) & sub partibus A E, E C, æqualia sunt quadrato totius A C, quod est A B. Si ergo recta, &c.

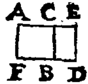
In

In numeris: si 10 diuidatur in duas partes 7 & 3, ducendo 10 in 7, & in 3, fient 70 & 30, quæ simul æqualia sunt numero quadrato ipsius 10 qui est 100: dicimus enim numerum quadratum qui fit ex ductu cuiusuis numeri in seipsum; vt decies decem sunt numerus quadratus centum.

Propositio 3. Theore.

Si recta secta sit vtcunque, rectangulũ sub tota & vno segmentorum comprehensum æquale est illi quod sub segmentis comprehenditur rectangulo vna cum quadrato, quod à prædicto segmento describitur.

REcta A E, vtcunque secetur in C, sitque A B, quadratum segmenti A C, rectangulum vero A D, contineatur sub tota A E, & sub A F, hoc est sub æquali A C; & manifestum est vt prius rectangula A B, C D, simul sumta, toti A D, esse æqualia, Neque aliud vult hæc propositio, Nam

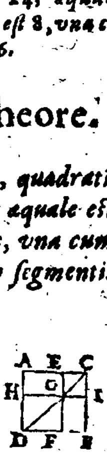


Nam recta A E vtcunque secta est in C, & rectangulum A D, sub tota A E, & A F, hoc est sub parte A C, æquale est ipsi A B quadrato partis A C, vna cum rectangulo C D, quod continetur sub C B, (hoc est sub parte A C,) & sub reliqua parte C E. Si ergo recta &c.

In numeris si 6 diuidatur in 4 & 2. productum ex 6 in 4 hoc est 24, æquale est ei quod fit ex 4 in 2, hoc est 8, vna cũ quadrato ipsius 4 quod est 16.

Propositio 4. Theore.

Si recta secta sit vtcunque, quadratũ quod à tota describitur æquale est segmentorum quadratis, vna cum rectangulo quod bis sub segmentis continetur.



Rectangulum A B, sit quadratũ ipsius A C, ductaque diametro D C, agatur E F, ipsi C B, parallela, secans diametrum vtcunque in G, per quod idem punctum agatur H I, ipsi A C, parallela: & manifefestum est vt prius quadratū A B, totius A G, esse æquale omnibus simul rectangulis intra se descriptis. Neque aliud vult propositio. Nam recta A C, secta est vtcunque in E, & eius quadratū A B, æquale est ipsis H F, E I, (quæ sunt quadrata segmentorū A E, E C,) simul cū rectangulis A G, G B, quæ sunt rectangulum bis cōprehensum sub partibus A E, E C: rectangulum enim A G, continetur sub A E, E G, hoc est sub A E, E C, & rectangulū G B, continetur sub G F, G I, hoc est sub A E, E C: rectangula enim H F; E I, sunt quadrata partium A E, E C, quod (etsi ex 33. 1. satis poterat intelligi,) sic demonstro. Quia rectæ A E, G H, D F, iungunt parallelas æquales, sunt *a* & ipsæ inter se æquales. Item si ab æqualibus A C, B C, auferantur æquales E C, I C, quæ remanent A E, B I, & quæ huic pares sunt G F, H D, omnes inter se erunt æquales, omnia igitur latera parallelogrammi H F, æqualia sunt parti A E, suntq; omnes anguli recti; nam quia H D F, rectus est & rectus etiam G F D, (cum sit æqualis ipsi B) etiam *b* oppositi reliqui erunt recti. Est ergo H F, quadratum ipsius A E. Similiterque ostendetur E I, esse quadratum partis E C. Et sic demonstrata est tota propositio.

a 33.

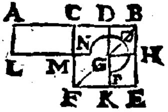
b 34. 1.

In

In numeris: Si 6 diuidatur in 4 & 2 quadratum ipsius 6 quod est 36 æquale est quadratis partium 4 & 2 hoc est 16 & 4, vna cum numero 8 bis repetito qui fit ex partibus 2 & 4 inter se multiplicatis.

Propositio 5. Theore.

Si recta secetur in æqualia & non æqualia: rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensũ, vna cum quadrato segmenti intermedij, æquale est ei, quod à dimidia describitur; quadrato.



RECta A B, bifariam in C, & non bifariam in D, diuidatur; & super dimidia C B, fiat quadratum C E, ductáque diametro F B, agatur per D, recta D K, ipsi B E, parallela, secans diametrum in G, per quod punctum agatur L H, ipsi A B parallela, & adiungatur recta A L, ipsi B H, parallela. Quo facto erit rectangulum A G, sub inæqualibus segmentis A D, D B, D B, hoc est D G, contentum, vna cum M K, quadrato medij segmenti C D, æquale quadrato dimidiæ C B, quod est C E. Nam rectangulum A M, æquale est ipsi D E, cum vtrumque ipsi C H, sit æquale; (A M, quidem ex const. D E autem per 36. 1.) cætera autem nimirum C G, & M K, sunt communia. Quare si recta, &c.

In numeris: Diuidatur numerus 10 æqualiter in 5 & 5, inæqualiter in 7 & 3, ita vt numerus medius inter sectiones sit 2; quo dimidius numerus superat partem minorem ex inæqualibus: quæ est 3, eritque numerus 21 ex 7 in 3 vna cum quadrato numeri intermedij 2 quod est 4, æqualis quadrato dimidij 5, hoc est numero 25.

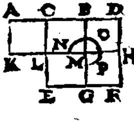
Corollarium.

Ex his manifestum est gnomonem N O P, toti rectangulo A G, esse æqualem; quandoquidem C G, sit commune, & D E, reliquo rectangulo A M, sit æquale.

Pro-

Propositio 6. Theore.

Si recta bifariam secetur eique in rectum quędam recta adijciatur, erit rectangulum sub tota cum adiecta, & sub adiecta contentum, una cum quadrato dimidiæ, æquale est, quod à dimidia cum parte adiecta fit, quadrato.



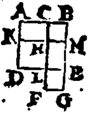
Recta A B, bifariam secetur in C, eique in rectum adijciatur vtcunque B D: inde super recta C D; fiat quadratũ
a 46. 1. a C F, & per B, agatur B G, parallela ipsi D F, sumptâque D H, æquali ipsi D B, agatur per H, recta H K, ipsi A D, parallela & æqualis, iungaturque recta A K: quo facto demonstratur propositio. Nam quia rectangula A L C M, sunt
b 36. 1. æqualia propter *b* æquales bases, & eidẽ O M, æquale est alterum complemen-
c 43. 1. tum *c* M F, erit etiam M F, æquale *d*
d ax. 1. ipsi A L, & additis communibus C M, B H,

B H, gnomon N O P, æqualis fiet toti rectangulo A H, (quod ſanè rectangulum continetur ſub tota compoſita A D, & ſub D H, hoc eſt ſub parte *e* adiecta D B) ſed gnomon N O P, adiecto L G, quadrato partis dimidiæ C B, vt ſupra in ſimili *f* oſtendimus, fit æqualis quadrato ipſius C D, quæ eſt pars dimidia cum adiecta B D. Igitur parallelogrammum A H, adiecto eodem quadrato L G, fiet *g* æquale eidem quadrato C F, quod erat probandum. *e* conſt. *f* 5. 2. *g* 13. ax.

In numeris ſi 6 diuidatur æqualiter in 3 & 3, eiq; addatur 2; numerus 16 (qui fit ex toto 6 cum adiecto, in ipſum adiectum) vna cum quadrato dimidij, quod eſt 9 æqualis eſt quadrato ipſius 5 qui quidem numerus 5 componitur ex dimidio 3 & adiecto 2.

Propoſitio 7. Theore.

Si recta vtcunque ſecetur, quadrata totius & vtriuſuis ſegmenti ſimul ſumpta, paria ſunt rectangulo bis ſumpto ſub tota & dicto ſegmento, vna cum adiuncto alterius ſegmēti quadrato.



Recta A B, secta sit vtcunque in C, & super A B, fiat quadratũ A E, sumptaque B M, æquali ipsi B C, ducantur C L, M K, ipsis B E, A B, parallelæ: producto deinde L F, æquali ipsi C B, addatur quadratum L G. Eruntigitur, vt patet, quadratum totius A B, quod est A E, simul cum quadrato segmenti C B, quod est L G, æqualia *a* rectangulis A M, M F, (quæ bis sumuntur sub tota A B, & segmento B C, cum B M, sit ipsi B C, æqualis, & in rectangulo M F, æqualia latera sint M G, G F, ipsis A B, B C) vna cum quadrato alterius segmenti A C, quod est K L, Si igitur recta, &c.

a 13. ax.

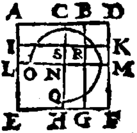
In numeris: si 6 vtcunque diuidatur in 4 & 2, quadratum totius 6 vna cum quadrato ipsius 4 æqualia sunt numero 12, qui fit ex numero 6 bis in 4, vna cũ quadrato alterius partis 2 quod est 4.

Propositio 8. Theore.

Si recta secetur vtcunque, rectangulũ quater comprehensum sub tota & vno segmentorũ, vna cum alterius

*par-

partis quadrato ęqualia sunt quadrato quod fit à tota & segmento, tanquam ab vna linea.



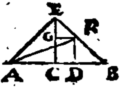
RECta A B, vtcunque secetur in C, cui adijciatur in rectum linea B D, ipsi B C, æqualis, ac super tota A B, & adiuncto segmento B D, fiat tanquam super vna linea quadratum A F, ducanturque B G, C H, I K, L M, lateribus quadrati A F, parallelę, sic vt D K, K M, ipsis B D, B C, sint æquales. Erunt ergo in gnomone O R Q, rectangula quatuor contenta sub rectis A B, & B C. Nam circa R, constituta sunt quadrata quatuor, quorũ latera omnia ipsi B C, sunt ęqualia; si igitur vnicuique ex quatuor complementis A S, & similibus, adijciatur suum quadratum, inuenietur in gnomone O R Q, quatuor vt dixi rectangula æqualia ipsi A R, quod continetur sub A B, B R, hoc est B C. Est vero gnomon O R Q, seu quatuor rectangula sub tota A B, & segmento B C, cum adiuncto E N, quadrato alterius partis A C, *a* æqualis quadrato A F, quod fit super A D, vt patet. Si igitur recta, &c. *a* 13 ax.

 In

In numeris si 6 vtcunque secetur in 4 & 2 ducendo quater numerum 6 in 4 & addendo quadratum ipsius 2, fiet numerus æqualis quadrato ipsius 10 qui numerus componitur ex toto 6 & parte 4.

Propositio 9. Theore.

Si recta secetur per æqualia & non æqualia, quadrata partium inæqualium dupla sunt quadratorum ab vno dimidio, & ab ea linea quæ sectionibus interijcitur, descriptorum.



RECta A B, secetur æqualiter in C, inæqualiter in D; super quam ad C, erigatur C E, perpendicularis, & ipsi C A, vel C B, æqualis, ducanturque A E, E B, itemque D F, ipsi C E, & F G, ipsi C D, parallela, ac denique iungatur recta A F. Iam vero quia in triangulo A C E, latera C A, C E, æqualia sunt: anguli *a* C A E, A E C, pares erunt: est autem angulus E C A, rectus: duo ergo alij sunt semirecti Similiterque in triangulo E C B, anguli

a 5.1.

guli

guli C B E, B E C, semirecti sunt: totus ergo angulus A E B, rectus est. Cumque in triangulo E G F, angulus G, rectus sit & G E F, semirectus, erit etiam angulus G F E, semirectus. Quare latera G E, G F, *b* æquales angulos subtendentia, sunt æqualia. Æqualis etiam vtrique *c* est recta C D, cum C F, sit parallelogrammum. Quare si ab æqualibus C E, C B, auferantur ęqualia G E, C D, recta C G, hoc est D F, ipsi D B, erit æqualis. *b* 6. I. *c* 34. I.

His intellectis sic breuiter colligitur propositio. Quadrata partium inæqualium A D, & D F, siue D B, *d* æquiualēt quadrato ipsius A F, & hoc quadratum ex A F, æquiualet ijs quæ fiunt ab A E, E F: Sed harum quadrata dupla sunt quadratis rectarum A C, dimidíæ, & C D, partis sectionibus interiectæ; cum enim A C, C E, sint pares, & A E, det quadratum vtriusque quadratis ęquale, efficiet duplum quadrato ipsius A C; similiterque E F, dabit duplum quadrati ipsius G F, seu C D. Quare quadratum ipsius A E, & partium inęqualium A D, & D F, hoc est ipsius D B, duplum sunt quadratorum ex A C, C D; partis scilicet dimidiæ & lineæ sectionibus interiectæ. Si igitur recta, &c. *d* 47. I.

In numeris: Numerus 10 diuidatur æqualiter in 5 & 5, inæqualiter in 7 & 3, sitq́ intermedia sectio 2, vt propositione quinta. Quadrata ergo 49 & 9 partium inæqualium 7 & 3, sunt duplum, quadratorum partis dimidiæ 5 & sectionis intermediæ 2.

Propositio 10. Theore.

Si recta secetur bifariam & in rectũ alia adijciatur, quadratum quod fit à tota cum adiecta, simul cum eo quod fit à sola adiuncta, duplum sunt quadrati quod fit à dimidia, & alterius quod à dimidia & adiuncta describitur.

Recta A B, bisariam secetur in C, adiectâ vtcunque B D, cui ad C, erigatur perpendicularis C F, dimidię A C, æqualis, perficiaturq́ue parallelogrammum F D, ductaque F B, occurrat lateri E D, producto in G, iunganturq́ue A G, A F, eritq́ue angulus *a* A F B, constans duobus semirectis, vt in simili ostensum est prop. 9. Quare & angu-

a 9.

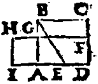
gu-

gulus F B C, semirectus est: semirectus *b* quoque D B G, oppositus ad verticem, *b 15. 1.*
quare & D G B, semirectus erit, & latera *c 6. 1.*
c B D, D G, æqualia. Æqualia item erunt latera E G, *d* F E, quia anguli F G E, *d 47. 1.*
E F G, sunt semirecti. His positis quadratum ex A F, erit duplum quadrati dimidiæ A C, & cum rectæ E G, F E ostẽsæ sint ęquales, erit quadratum ex G F, duplum quadrati ex E F, hoc est ex dimidia C B, cum adiuncta B D. Sed & ipsius A G, quadratum æquiualet quadratis duarum A F, F G; & quadratum ex tota A B, cum adiuncta B D, vna cum quadrato ex D G, seu adiuncta B D, æquiualet quadrato ex A G. Quare harũ linearum A B, B D, quadrata duplum quoque sunt quadratorum ex A C, & C D, quod erat demonstrandum.

In numeris: Diuidatur 6 æqualiter in 3 & 3, eiq́ addatur 2, vt sit numerus compositus 8; quadrata igitur ipsius 8 & adiecti 2. duplum sunt quadratorum dimidij 3, & numeri 5 qui constat ex dimidio & adiecto.

Propositio 11. Proble.

Datam rectam ita secare, vt rectangulum sub tota & altero segmentorum, ęquale sit quadrato quod sit à reliqua parte.



SIt data recta A B, ita secanda vt rectangulum sub tota & segmento altero, ęquale sit quadrato partis alterius. Fiat igitur super A B, quadratum A C, diuisoque latere A D, bifariam in E, ducatur E B, cui æqualis fiat E I, latere D A, producto: fiat insuper quadratum super A I, quod sit G I, producto latere H G, in F: eritque recta A B, diuisa vt oportuit; siquidem rectangulũ C G, sub tota C B, seu A B, & segmento B G, ęquale est quadrato G I, quod fit á segmento altero G A: quia enim D A, secta est bifariam in E, eique in rectum
a 6. addita est A I, erit rectangulum *a* sub D I, A I, hoc est ipsum D H, vna cum quadrato dimidiæ E A, æquale quadrato ipsius E I, seu E B. Est vero quadratũ
b 47. 1. ipsius E B, *b* æquale quadratis ipsarum A B,

A B. A E. Vnde rectangulum D H, cum quadrato ex A E, erit etiam æquale quadratis earundem A B, & A E. Ablato igitur communi quadrato ipsius A E, erit rectangulum D H, æquale quadrato ipsius A B, quod est A B C D: & rursus ablato ab hoc quadrato & rectangulo D H, communi rectangulo A F, rectangulum C G, relictum ex quadrato, æquale erit quadrato G I, quod reliquum est ex rectangulo. Datam igitur rectam ita secuimus vt rectangulum C G, sub tota A B, & altero segmento B G, quadrato partis alterius G A, sit æquale, quod erat faciendum.

Propositio 12. Theore.

In triangulo obtusangulo quadratum lateris angulum obtusum subtendẽtis tanto maius est quadratis laterum eundem angulum continentiũ, quantum est rectangulum bis comprehensum sub alterutro latere cõtinente (sub illo nempe in quod, cũ fuerit productum, placuerit perpendicularẽ ex opposito angulo de-

mittere & sub linea extrinsecus assumpta ad cuius extremum cadit ipsa perpendicularis.

IN triangulo A B C, angulus A C B, sit obtusus, productoque alterutro latere, puta B C, ex A, demittatur A D, perpendicularis ipsi B C, cadens in D: Dico igitur quadratum lateris A B, obtuso angulo subtensi tanto esse maius quadratis laterum continentium B C, C A, quantum est rectangulum bis comprehensum sub B C, & recta C D, extrinsecus sumpta, ad cuius extremum ex acuto angulo A cadit perpendicularis A D. Quia enim recta B D, secta est vtcunque in C, erit *a* quadratum ex B D, æquale quadratis ex B C, C D, & insuper rectangulo bis sub B C, C D, comprehenso: additoque vtrisque quadrato rectę A D, erunt quadrata ipsarum B D, D A, ęqualia quadratis trium rectarum B C, C D, D A, vna cum addito rectangulo bis sub B C, C D, contento. Sed quadratum rectę A B, *b* æquiualet quadratis rectarum A D, D B. Igitur idem quadratum rectæ A B, ęquiualet etiam tribus quadratis rectarum B C, C D, D A,

a 4.

b 47.1.

D A, & rectangulo bis ſub B C, C D, contento: Iam vero quia quadratum rectæ A C, æquale eſt quadratis ipſarum C D, D A, erit quadratum rectæ A B, æquale quadratis rectarum C B, C A, & rectangulo bis contento ſub B C, C D. In triangulo igitur obtuſangulo, &c.

Propoſitio 13. Theore.

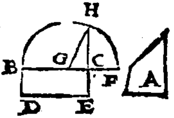
In triangulis acutangulis quadratum lateris acuto angulo ſubtenſi tanto minus eſt quadratis laterum continentium eundem angulum, quantum eſt rectangulum bis comprehenſum ſub uno laterum continentium & ſub aſſumpta interius linea prope acutum angulum ad cuius extremum cadit perpendicularis ab oppoſito angulo ducta.

IN triangulo A B C, sit angulus acutus C, & ex alio quocumque angulo, puta ex A, ducatur recta A D, perpendicularis ipsi B C. Dico igitur quadratum ipsius A B, angulum C, subtendentis, tanto minus esse quadratis ex B C, C A: quantum est rectangulum sub B C, D C, bis contentum. Quia enim recta B C, vtcunque secta est in D, quadrata ex B C, C D, paria sunt rectãgulo bis sub B C, C D, vna cum *a* qua-
a 7. drato ex B D, sed duobus quadratis re-
b 47. 1. ctarum C D, D A, par est *b* quadratum ex C A: duo igitur quadrata ex B C, C A, paria sunt etiam rectangulo bis cõprehenso sub B D, D C, & quadrato ex B D. Iam vero quia quadratis ex B D,
c 47. 1. D A, ęquale est *c* quod fit ex A B; erũt quadrata ex B C, C A, æqualia rectangulo bis contento sub B C, D C, & quadrato rectæ A B. Quare quadratum ex A B, tanto minus est quadratis ex B C, C A, quantum est rectangulum bis sub B D, D C, contentum. In triangulis igitur, &c.

Pro-

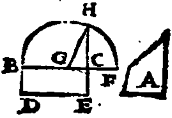
Propositio 14. Proble.

Dato rectilineo æquale quadratum describere.



SIt datum rectilineum A, cui fiat *a* æquale parallelogrãmũ B E; in quo si latera B C, C E, sunt æqualia, ipsum erit quadratum quale petebatur. Quod si latera non sunt æqualia, eorum alterutrum puta B C, producatur in F, ita vt C F, ipsi C E, æqualis sit, sectâque bifariam rectâ B F, in G, centro G, spatio G B, fiat semicirculus B H F, protracto latere E C, vsque dum secet circulum in H: eritque quadratum ipsius C H, æquale dato rectilineo A. Ductâ enim recta G H, quia recta B F, bifariam secta est in G, & non bifariam in C, erit rectangulum sub B C, C F, hoc est *b* rectangulum B E, cũ quadrato ipsius G C, æquale quadrato ex G F, vel G H, quę sunt *c* lineæ æquales. At quadrata ex G C, *d* C H,

a 45. 1.
b 5.
c def. 15. 1
d 47. 1.



C H, valent quadratū ipsius G H, eadem ergo quadrata ex G C, C H. valent rectāgulum B E, cum quadrato ipsius G C: relicto ergo communi quadrato rectæ G C, quadratum ipsius C H, valebit rectangulum B E, quod ab initio factum est æquale rectilineo A. Quadratum ergo ipsius C H, ęquale erit rectilineo A. Facto igitur quadrato super C H, constituerimus quadratum dato rectilineo æquale, quod erat faciendum.

EVCLIDIS

Elementorum

LIBER III.

Definitiones.

1 Æquales circuli sunt quorum diametri vel è centris lineę ad ambitum ductæ, sunt æquales.

2 Linea recta circulum tangere dicitur quæ cum tangat, producta longius circulum non secat. *Talis est linea A B, quæ cum tangat circulum C D E, in puncto C, producta longius eum non secat.*

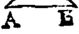
3 Circuli se tangere dicuntur qui cum se tangant, se tamen mutuo non secant. *Tales sunt circuli C D E, C F G.*

4 In

4 In circulo ęqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur cum perpendiculares à centro ad ipsas ductæ æquales sunt. *Vt linea A B, C I, æqualiter distant à centro D, quia perpendiculares D E, D F, à centro D, ad ipsas ducta, sunt æquales.*

5 Segmentum circuli est figura quæ sub recta linea & circuli circumferentia continetur. *Talis est figura contenta recta C I, & circumferentia C G I.*

6 Segmenti angulus est qui recta linea & circuli peripheria continetur. *Tales sunt anguli A & B.*



7 In segmento autem angulus est cum in segmenti circũferentia sumptum fuerit punctum quodpiam, & ab illo ad lineæ terminos rectæ fuerint adiunctæ. *Sic angulus A B C, est in segmento C B A.*

8 Cum vero comprehendentes angulum datæ lineæ assumunt peripheriam, illi ipsi assumptæ peripheriæ angulus dicitur insistere. *Vt angulus D A B, dicitur insistere circumferentia D C B.*

9 Se-

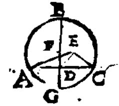
9 Sector autem circuli est cũ ad ipsum circuli centrum angulus fuerit constitutus. *Vt si ad centrum A, sit constitutus angulus B A C, figura B A C D, dicetur sector circuli.*

10 Similia circuli segmenta sunt quæ angulos capiunt æquales; aut in quibus anguli sunt æquales.

Propositiones.

Propositio 1. Problem.

Dati circuli centrum reperire.



IN circulo A B C, ducatur vtcunque recta A C, quâ bisectâ in *a* D, per idem punctum D, agatur perpendicularis B G, *b* attingens vtrimque ambitum. Diuidatur *c* deinde recta B G, bifariam in F, eritque punctum F, centrum circuli. Non enim erit aliud punctum in ipsa B G, cum centrum non possit in vlla linea esse nisi *d* vbi secatur bifariam. Sed neque extra rectam B G. Fac enim esse in E ducanturque E A, E D, E C; probabitur sanè angulum E D A, esse rectum; nam in triangulis A D E, C D E, latera A D, D C,

a 10. 1.
b 1. 1.
c 10. 1.
d def. 15. 1.

e const. D C, e æqualia sunt & D E, commune, æqualis item basis A E, basi E C; cum vtraque ducatur ex centro E, ad ambitum. Erunt f ergo an-

f 8. 1. guli E D C, E D A, æquales & proinde recti. Hoc autem esse non potest; nam angulus F D A, rectus est. Maior igitur recto est E D A. Non est igitur E centrum; sed neque aliud punctum extra rectam B G: Dati ergo circuli centrum est F.

Propositio 2. Theore.

Si in circuli ambitu duo puncta sumantur, recta ad illa puncta ducta intra circulum cadet.

a 1. SVmantur puncta A & B, & ex a centro inuento C, ducãtur rectæ C A, C B, C D. Dico punctum D, & quodlibet aliud rectæ A B, cadere intra circulum. Quia enim C A, C B, pares sunt,

b 5. 1. pares erunt anguli b A & B, eritque angulus C D B, maior opposito interno A;
c 16. 1. quare c maior etiam angulo B; latus igi-

igitur C B, ſubtendens *d* angulum maio- *d* 18. 2.
rem C D B, maius eſt latere C D, ſubtẽdente minorem angulum B. Latus tamen C B, tantum pertingit ad ambitum, quare C D, quod eſt minus, ad ambitum non pertinget. Non eſt igitur punctum D, extrà circulum; quod idem oſtendetur de quouis alio in recta A B, ſi ergo in circuli ambitu, &c,

Propoſitio 3. Theore.

Si in circulo recta per centrum ducta aliam non ductam per centrum ſecet bifariam, ſecabit quoque ad angulos rectos. Et ſi ad rectos ſecet, ſecabit bifariam.

Recta A B, per centrum E, ducta ſecet C D, bifariam in F, ducanturque ex centro rectæ E C, E D. Quia ergo C E, C F, æqualia ſunt lateribus D E, D F, & baſis communis, erunt *a* anguli *a* 8. 1.
E F D, E F C, æquales, ac proinde recti.

Quod

Quod si anguli ad F recti sint; cum latera E C, E D, trianguli E C D, paria sint, anguli C & D, *b* erunt æquales, & sic erunt in triãgulis E F C, E F D, duo anguli C & E F C, duobus D & E F D, æquales; sed & latera E C, E D, angulis equalibus adiacentia sunt æqualia: æqualis *c* ergo est basis F C, basi F D. Si igitur in circulo, &c.

b 6. 1.

c 26. 1.

Propositio 4. Proble.

Si in circulo rectæ se secent non per centrum ambę ductæ, non secabunt se mutuo bifariam.

Si enim per centrum transit vna certum est eam bifariam non secari, cum non nisi in centro possit secari bifariam, nec altera ex hypothesi per centrum transeat. Quod si neutræ per centrũ transeant vt sunt rectæ A B, C D, dicantur tamen se mutuo bifariam secare in puncto F; tunc ductâ à centro E rectâ E F, erit angulus E F C, rectus cum *a* altera per centrum ducta alteram extra centrum secans bifariam secet ad

a 3. 1.

se-rectos: sed ob eandem causam angulus E F B, rectus erit pares ergo essent anguli E F B, E F C, pars & totum, quod fieri nequit.

Propositio 5. Theore.

Si duo circuli se mutuo secent non habebunt idem centrum.

Circulorũ A B C, A D C, se mutuo in A & C, secantium sit idem centrum E si fieri potest: ducanturque E A, quidem à centro ad alterutram sectionem, E D vero secans vtcunque vtrumque circulum in punctis D & B. Quia igitur circuli A D C, centrum ponitur E, erunt E A, E D, æquales, & quia circuli A B C, idem centrum ponitur E, erunt E B, E A, æquales; ergo & inter se essent æquales E D, E B, pars & totum, quod esse nequit. Si ergo duo circuli, &c.

Propositio 6. Theore.

Si duo circuli interius se tangant, non erit eorum idem centrum.

Nam

Nam si duo circuli se interius tangant in A & putentur habere idem centrum E, ductis rectis E A, quidem ad contactum, altera verò secante vtrumque circulum, puta E B, ostendetur, vt supra, E D & E B, partem scilicet & totum, æquales esse ipsi E A: quod absurdum est. Si duo ergo circuli, &c.

Propositio 7. Theore.

In diametro circuli si aliud à centro punctum accipiatur, à quo recta plures in circumferentiam cadãt, maxima erit ea quæ per centrum ducitur; minima reliquum eiusdẽ linea: aliarum vero maior est ea quæ transeunti per centrum est propior, neque plures quam duę æquales duci possunt in circulum ad vtrinsque partes ipsius minimæ.

IN diametro A B, sumatur punctum C, aliud à centro D, ducanturq́ue, vtcunque rectæ C A, C E, C F, C G. Dico maximam earum esse C A, quæ transit per centrum D. Ductis enim restis D E, D F, D G, trianguli G D C, duo latera G D, D C, quibus æqualis est A C, maiora erunt *a* reliquo G C. Maior ergo est A C, quam G C; eodemq́; modo eadem recta C A, quibusuis alijs ex C, ductis ostendetur esse maior. *a* 20. 1.

2 Deinde quia latera E C, C D, maiora sunt reliquo E D, cui æqualis est B D, si commune auferatur C D, latus C E, maius remanebat quam B C, & pari ratione ostendetur ipsam B C, reliquis ex C, ductis esse minorem.

3 Rursum quia in triangulis G D C, F D C, duo latera G D, D C, duobus D F, D C, paria sunt, & angulus G D C, maior quam F D C, erit basis *b* G C, quæ propior est ipsi C A, maior remotiore C F. *b* 24. 1.

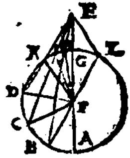
4 Denique si angulo E D B, æqualis ponatur B D H, ducaturq́ue C H, in triāgulis E D C, H D C, erũt bases C E, C H, æquales, cum anguli C D E, C D H, & latera *c* continentia sint æqualia. Neque ve- *c* 4. 1.

vero plures possunt duci ad partes minimæ B C, æquales prioribus. Si enim cadant intra puncta E H, remotiores erũt à recta C A, ac proinde minores ipsis C E, C H. Si autem ducantur extra pũcta E H: erunt propiores ipsi C A, ac proinde maiores. Si igitur in diametro, &c.

Propositio 8. Theore.

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, à quo ad circulũ ducantur rectę quadam linea, quarum vna per centrum transeat, cętera vt lubet ducantur, rectarum qua ducuntur ad cauam peripheriam maxima erit quę per centrum ducitur, & quę huic propinquior, maior est, remotiore. Extra circulum vero minima qua ab assumpto puncto ad diametrũ tendit, & qua huic propior, minor est remotiore, & dua tantum lineę aquales cadũt ab eo puncto in circulum ad partes minima vel maxima.

Extra



Extra circulũ A B-C D, sumatur pũ-ctum E, à quo ducantur quotuis rectę, quarum vna E A, per centrum F, transeat, cæteræ vero E B, &c. vt lubet cadant in circulum. Dico 1. rectarum quæ ducuntur ad concauum circuli, maximam esse E A, quæ transit per centrum F. Ductâ enim è centro recta F B, trianguli E F B, duo latera E F, F B, ęqualia ipsi E A, maiora *a* erunt latere E B, & sic de reliquis. *a* 20. 1.

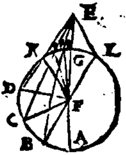
2 Maior est etiam E B, quæ propior est ipsi E A, quam E C, aut alia remotior. Nam quia trianguli E F B, latera E F, E B, æqualia sunt lateribus E F, F C, trianguli E F C, & angulus E F B, maior quam E F C, maior *b* erit basis B E, quam C E. *b* 24. 1.

3 Ductis rectis F H, F I, F K, quia trianguli E H F, maiora sunt duo *c* latera F H, H E, reliquo E F, si auferantur æqualia F G, F H, maior manebit E H, extra circulum, & reliquæ E I, E K, quã sit E G. Minima est ergo E G, quæ ad diametrum G H, ducitur. *c* 20. 1.

4 Quia intra triangulum E I F, ducũtur rectæ E H, H F, erunt hæ *d* mi- *d* 21. 1.

 no-

nores ipsis E I, I F, ablatis ergo æqualibus H F, I F, adhuc minor remanebit E H, quam E I, & ob eandem caussam minor est E I, quã E K, quare minor est semper, quæ minimæ E G, est propior.



5 Denique angulo K F G, si ęqualis fiat G F L, ducaturque L E; quia triangula E K F, E L F, latus habent commune E F, & alterum K F, alteri L F, æquale, & parem angulum contentum lateribus, erunt bases *e* E L, E K, æquales. Neque plures his duabus æquales duci possunt ex vtraque parte minimæ E G: nam aut propiores erunt aut remotiores à minima E G, quam sint E L, E K, quare his aut minores erunt aut maiores. Si ergo extra circulum, &c.

e 4. 1.

Propositio 9. Theore.

Si ab aliquo intra circulum puncto plures quam duæ rectæ æquales ad ambitum ducantur, id punctum centrum est circuli.

EX puncto A intra circulum B C D, præter rectas A B, A C, ęquales sit ijsdem æqualis A D, du-

ctis-

ctiſque rectis B C, C D, diuiſiſque bifariam in E & F, ducantur ad ambitum rectæ A E, A F. Quia ergo triangulorum A B F, A F C, latera omnia ſunt æqualia, erunt anguli *a* ad F, æquales & recti, *a* 8. 1.
ſicut etiam ad E. Quia ergo A F, rectam B C, diuidit bifariam ad rectos, in ea eſt centrum circuli, & ob eandem cauſam eſt etiam in recta E A, centrum circuli: Non poteſt ergo centrum aliud eſſe quam A, quia ſolum punctum A eſt vtrique A F, & A E, commune. Si igitur, &c.

Propoſitio 10. Theore.

Circulus circulum in pluribus quam duobus punctis non ſecat.

Secent ſe ſi fieri poteſt, circuli in tribus punctis A, B, C, centroque circuli A B C, inuento *a* quod ſit D, *a* 1.
ducantur rectæ D A, D B, D C: quæ quia æquales ſunt, & attingunt etiam ambitũ circuli A B E, ſequitur *b* punctum D, eſ- *b* 9.
ſe etiam centrum circuli A B E, quod abſurdum *c* eſt. Non ergo ſecabunt ſe *c* 5.
circuli in pluribus punctis quã duobus.

Propositio 11. Theore.

Si duo circuli se interius contingant recta coniungens eorum centra producta incidet in contactum circulorum.

Circuli A B C, A D E, interius in A, se tangãt: dico rectam quæ ducitur per centra F & G, qualis est F A, cadere in contactum A. Nam si fieri potest, recta coniungens centra sit B K, in qua centrum circuli A B C, sit I, & alterius H, iunganturque rectæ A H, A I. Quia ergo A H, H I, reliquo latere A I, a 20. 1. a sunt maiora, & proinde maiora quàm I B, quæ ex eodem centro ducitur, si auferatur communis H I, manebit A H, maior quàm B H. Est ergo H D, maior ipsâ H B, pars toto; quod absurdum est. Eadem demonstratio procedet si centrũ circuli maioris extra minorem cadet. Si duo ergo, &c,

Pro-

Propositio 12. Theore.

Si duo circuli sese exterius contingăt, linea recta centra coniungens per contactum transibit.

SI recta F G, iungens centra F & G, circulorum A B C, B D E, se tangentium exterius in B, non transit per contactum B, sed alibi secet in punctis C & D, iungens centra F & G; ducantur rectæ B F, B G, eruntque duo latera F B, B G, maiora *a* reliquo F G. Sed sunt etiam minora, nam F C, ipsi F B, æqualis est, ex eodem centro F, similiterque G D, ipsi G B, erit æqualis. Superat ergo latus F G, reliqua duo latera segmento C D, quod est absurdum. Recta igitur F G, non iungit centra, & nulla iunget, nisi quæ transibit per contactum B. *a* 20. 1.

Propositio 13. Theore.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis quam uno, siue intus tangat, siue extra.

NAm si circulum A B, C D, tangat circulus A E, C F, interius in duobus punctis A & C, erunt diuersa
a 6. *a* circulorum centra, eaque in recta A C,
b 11. transeunte per contactus *b*. Sit ergo G centrum ipsius A B C, & H ipsius A E C. Tunc autem quia in recta A C, ponitur centrum circuli A B C, esse G,
c 3. esset *c* recta A C, bifariam diuisa in G, & quia alterius circuli centrum est H, etiam in H esset diuisa bifariam; quod fieri nequit.

SEd neque exterius circuli se in pluribus punctis tangent: Si enim in punctis B & C, se tangunt, ductâ rectâ A D, per centra A & D, nec

nec non per contactum C, itemque ductis AB, B D, ad alterum contactum B, probaretur vt sup. a prop. latera A B. a 12.
B D, & maiora & æqualia esse lateri
A D.

Propositio 14. Theore.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant, & quæ distant à centro æqualiter æquales sunt inter se.

IN circulo A B C, sint pares rectæ A D, B C, & ex centro E, agantur E F, E G, ad rectos ipsis A D, B C, ideoque a secantes bifariam, iunganturque a 3.
E A, E B. Quia ergo anguli ad F & G, sunt recti, quadratum ex E A æquale est
b quadratis laterum A F, E F: & similiter b 47. 1.
quadratum ex E B, duobus quadratis ex E G, G B. Nunc quia quadrata rectarum æqualium E A, E B, sunt æqualia, erunt etiam quadrata duo rectarum E F, F A, æqualia duobus quadratis rectarum E G, G B, & ablatis quadratis rectarum

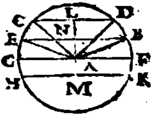
 æqua-

æqualium F A, G B, manebunt quadrata rectarum E F, E G, æqualia, quare E G, E F, sunt æquales, ac proinde A D B C,
a def. 4. æqualiter à centro e distant.

E conuerso autem si positum sit rectas A D, B C, distare æqualiter à centro E, ostendetur ex superiori demonstratione ablatis quadratis rectarum E F, E G, æqualium, quadrata reliquarum F A, G B, manere æqualia; proinde & ipsas esse æquales.

Propositio 15. Theore.

In circulo maxima est diameter, & cæterarum ea semper maior, quæ centro est propior.



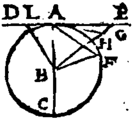
PEr centrum A ductâ diametro F G, ducatur H K, propior centro quã C D, ad quas perpẽdicularibus è centro
a 4. def. ductis A L, A M, ex A L, quæ a necessario maior erit, sumatur A N, æqualis ipsi A M, & per N agatur B E, ad rectos ipsi A L,

AL, iunganturque rectæ A B, AC, AD, A E. Nunc vero quia B E, H K, æqualiter à centro *b* distantes sunt æquales, & in triangulo A B E, duo latera A B, A E, æqualia diametro F G, maiora sunt *c* quam B E; erit eadem diameter F G, maior quam B E, vel H K, aut quæuis alia. *b* 14. *c* 20. 1.

2 Rursus quia duo latera A B, A E, duobus lateribus A C, A D, sunt paria, & angulus B A E, maior ipso C A D, erit basis B E, seu H K, maior *d* quam C D, quę est à centro remotior. In circulo igitur, &c. *d* 24. 1.

Propositio 16. Theore.

Quę ab extremitate diametri ad rectos angulos linea ducitur extra circulum cadit. Neque alia recta cadere potest in locum inter ipsam rectam & peripheriam comprehensum. Et semicirculi quidem angulus quouis acuto rectilineo maior est, reliquus autem minor.



AD punctum A extremum diametri A C, ducta D E, ipsi A C, perpendiculari. Dico rectam D E, extra circulū cadere. Si enim vis cadere intra, qualis esset D A F, ductâ ex centro rectâ B F, cum trianguli A F B, a 5. 1. duo latera B A, B F, paria sint, essent a etiam pares anguli B A F, (quem vis esse rectum) & B F A, quod absurdum est, b 17. 1. duò enim recti b in triangulo esse non possunt. Eandem ob causam A F, in circumferentiam cadere nequit; puta si dicatur quod recta A L, cum circumferentia cougruat: nam etiam tunc in triangulo B A L, essent duo recti supra basim A L. Recta ergo D A, necessario extra circulum cadit.

2 Sed neque alia recta cadet intra rectam A E, & ambitum F A. Si enim id putas de A G, ducatur ad eam è centro perpendicularis B G; & quia rectus est B G A, minor recto erit B A G: quare maior est B A, c 19. 1. c quam B G, subtendens minorem recto. At hoc absurdum est; nam B A, ipsi B H, parti totius B G, æqualis est, non ergo maior totâ B G.

3 Angulus semicirculi B A F, quolibet acuto est maior; nam quiuis acutus cum

sit

sit minor recto B A E, debebit constitui per rectam, puta G A, quę ad punctum A ducta necessario cadit intra circulum. Minorem ergo angulum faciet quam sit angulus semicirculi B A F.

4 Angulus reliquus H A E, quem cōtingentiæ dicimus, minor est quouis rectilineo; nam si minor aliquis constitui posset puta G A E, duceretur recta G A, in locum inter rectam A E, & peripheriā A H F, quod absurdum est. Quæ igitur, &c.

Corollarium.

Hinc efficitur rectam ad extremum diametri perpendicularem tangere circulum, & in unico puncto tangere; nam si plura tangeret, caderet a intra circulum.

Propositio 17. Proble.

A dato puncto rectam lineam ducere qua datum circulum tangat.

DAto puncto A, & circulo B D F, ducatur ex centro C recta C A, & eodē centro spatio C A, fiat circulus A E G; exciteturque ad D, recta D E, ad rectos ipsi C A. Inde iunctâ rectâ C E, agatur quoque rectâ A B; quam eandem dico tangere circulum B D F, in puncto B. Quia enim triangulorum A B C, E D C, duo latera A C, C B, duobus E C, C D, sunt paria, & angulus C, communis, hæc triangula se habent iuxta 4. 1. Quare cum angulus E D C, rectus sit, rectus quoque erit C B A, & proinde recta A B, circulum *a* tangit in B. A dato ergo puncto, &c.

a 16.

Pro-

Propositio 18. Theore.

Si circulum tangat recta linea, ducta altera è centro ad contactum ipsi tangenti erit perpendicularis.

VT si recta A B, circulum tangat in C, altera D C, ex centro D, ad contactum C, ducta, ipsi A B, erit perpendicularis. Si enim anguli A C D, D C B, non sunt recti, erit eorum *a* alteruter acutus, puta A C D, sed hic maior est angulo semicirculi E C D, erit ergo angulus semicirculi minor aliquo *b* acuto, quod fieri nō potest. Anguli ergo A C D, D C B, sunt recti, ac proinde recta D C, tangenti A B, est perpendicularis.

a 13. 1
b 16.

Propositio 19. Theore.

Si recta circulum tangat, & ad punctum contactus tangenti ipsi perpēdicularis excitetur, in ea erit circuli centrum.

RECta A B, tangat in C, circulum C D E, exciteturque ad tactum C, recta C E. ipsi A B, perpendicularis, in qua si negas esse centrum circuli, sit ergo alibi, puta vbi F, ducaturque

a 18. F C, quæ ipsi A B, erit a perpendicularis, quare rectus angulus A C E, recto angulo A C F erit æqualis, pars videlicet toti, quod est absurdum. Non ergo alibi erit centrum quam in recta C E.

Propositio 20. Theore.

Ex eadem peripheria portione angulus ad centrum, duplus est eius qui ad ambitum extenditur.

SVper segmento A B, ad centrum C, fiat angulus A C B, & super eodem segmento A B, ad ambitum extendatur angulus A D B. Quia ergo trianguli C B D, latera C B, C D, sunt

a 5. 1. æqualia, sunt a & anguli D, & C B D, ad basim æquales: sed his duobus internis

b 25. 1. & oppositis b externus A C B, est æqualis, idem igitur angulus externus A C B,

qui

qui est ad centrum, duplus est ipsius A D B, qui porrigitur ad ambitum. Ex eadem ergo, &c.

Eadem demonstratio adhibebitur si triangula se intersecent. Vt angulus A C B ad centrum, duplus est ipsius A D B, qui ad ambitum. Nam ductâ rectâ D C E, erunt anguli C D A, C A D, *c* æquales, & his duobus æqualis externus *d* & oppositus A C E, cuius anguli quia pars vna angulus B C E, *e* duplus est anguli B D C, reliquus A C B, duplus etiam erit reliqui A D B, quod erat probandum est enim angulus A D B, angulus ad ambitum, & A C B, ad centrũ, super eodem arcu A B.

c 5. 1.
d 32. 1.
e 32. 1.

Propositio 21. Theore.

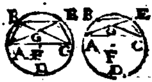
In circulo qui in eadem portione sunt anguli, æquales sunt.

Sit

SIt circulus A B E C, & in eius portione A B C, sint anguli a A B C A E C, ducaturque ad centrum angulus F. Quia ergo tam angulus b B, quam E, est dimidium eiusdem anguli F, sequitur eos inter se esse pares. In circulo ergo, &c.

a def. 7.

b 20.



QVod si anguli sint in semicirculo A B E C, aut in minori portione, tunc quia in triangulis B G A, E G C, anguli A G B, C G E, sunt c æquales, sicut & anguli B A E, E C B, qui in portione maiore E C D A, æquales iam sunt ostensi, erit etiã ãtertius A B C, tertio C E A, d æqualis, quod erat demonstrandum.

c 15. 1.

d 32. 1.

Propositio 22. Theore.

Quadrilaterorum in circulo descriptorum anguli oppositi duobus rectis sunt æquales.

De-

DEscripto quadrilatero ABCD, in circulo ABD, ducantur rectæ AD, BC. Tunc vero quia anguli CAD, CBD, in *a* eadem portione CABD, & similiter anguli DAB, DCB, in eadem portione BACD, sunt etiam pares; totus angulus CAB, duobus DCB, DBC, æqualis est: sed hi duo addito angulo CDB, fiunt *b*. æquales duobus rectis (constituent enim triangulum CDB.) Idem igitur angulus CDB, adiunctus opposito CAB, efficiet quoque angulos pares duobus rectis.

a 21. *b* 32. 1.

Propositio 23. Theore.

Super eadem recta duæ circulorum portiones similes & inæquales ad easdem partes non constituentur.

SInt enim si fieri potest super AB, segmenta similia & inæqualia ACB, ADB, ductisque rectis AD, BC, BD, erunt anguli D, & ACB, pares super eadem *a* portione AB. At externus

a 21.

b 16. 1. nus A C B. interiori & opposito b D, par esse nequit. Super eadem ergo recta, &c.

Propositio 24. Theore.

Super æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta inter se sunt æqualia.

SVper rectis æqualibus A B, C D, constituta sint similia segmenta A E B, C F D, quæ si non sunt æqualia; collocetur A B recta super ipsam C D, cui congruet, cum ponatur æqualis. Quod si non congruerent etiam segmenta, tunc vel vnum extra alterum totum caderet & sic similia & inæqualia segmenta super eadem C D constituerentur, vel vnum caderet partim extra, partim intra; & tunc circulus circulum secaret in pluribus punctis, quam duobus puta in C, F, D, si circuli perficerentur,
a 23. & 10. quod vtrumuis a est absurdum, Super æqualibus ergo rectis, &c.

Pro-

Propositio 25. Proble.

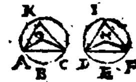
Data portione circuli describere circulum cuius est portio.

IN data portione A B C, sumantur vtcunque tria puncta A, B, C, iunganturque duabus rectis A B, B C, quibus in D & E bisectis, ad ea puncta excitentur perpendiculares D F, E F, vbi enim se secabunt puta in F, erit circuli centrum. Centrum enim erit tam in recta D F, *a* quam in altera E F. Non alibi ergo quam in F, alias duo essent vnius circuli centra. Centro ergo F, spatio F A, describetur circulus cuius portio est A B C. *a* 1.

Propositio 26. Theore.

Anguli æquales ad centra aut ad ambitum circulorum æqualium insistunt segmentis æqualibus.

Sint



SInt æquales anguli A G C, D H F, ad centra G & H, ducãturque rectæ A C, D F. Quia ergo triangulorum A G C, D H F, duo latera G A, G C, duobus H D, H F, sunt paria, & anguli G & H, ponuntur

a 41. æquales, erit a basis A C, basi D F, æ-

b 24. qualis, quare & arcus A B C, b arcui D E F, erit æqualis. Rursus si anguli K & I, sint æquales, anguli G & H, qui ad cẽ-

c 10. def. tra sunt, erunt c eorum dupli, ac proinde arcus æquales: ideoque vt prius A B C, D E F, (quibus tam anguli ad centra quam ad ambitum insistunt) æquales erunt. Anguli ergo ad centra, &c.

Propositio 27. Theore.

Anguli ad centra aut ambitum æqualium circulorum insistentes æqualibus circulorum portionibus, sunt æquales.

SI enim angulis B D C, F H G, æqualium circulorum, æqualibus arcubus B K C, F L G, insistunt, & anguli ipsi non sunt æquales, sit B D C, maior, fiatque angulus C D N ipsi

ipsi F H G, æqualis; æquales ergo erunt arcus C I, F G, quod est *a* absurdum, cum arcus B C & F G, positi sint æquales. Anguli ergo B D C, F H G, inequales esse non possunt, ac proinde *b* nec anguli A & E, qui sunt dimidij ipsorum D & H. Anguli ergo ad centra, &c. *a* 26. *b* 20.

Propositio 28. Theore.

In equalibus circulis equales rectę auferunt & relinquunt aquales peripherias.

NAm si in paribus circulis A B C, D E F, rectę B C, E F, sunt æquales, factis angulis ad centra G & H, erunt triangulorum G B C, H E F, duo latera G B, G C, duobus H E, H F, ęqualia, cumque basis B C, basi E F, sit etiam æqualis, æquales erunt anguli *a* G & H. Æquales ergo portiones sunt *b* B K C, E L F; quibus ablatis, æquales quoque relinquentur B A C, E D F. In æqualibus ergo, &c. *a* 8. 1. *b* 26.

Pro-

Propositio 29. Theore.

In æqualibus circulis æquales peripherias æquales rectę lineæ subtendunt.

NAm in figuris superioribus si BKC, E L F, sumptę sint portiones ęquales,
a 27. pares *a* erunt anguli G, & H: sed &
b 4. 1. latera continentia sunt æqualia, quare *b* bases B C, E F, quæ subtendunt æquales arcus inter se sunt æquales.

Propositio 30. Proble.

Datam circumferentiam secare bifariam.

DAtæ peripheriæ A B C, subtendatur recta A C, diuisa in D, bifariam, ad quod punctum excitetur D B ipsi A C perpendicularis, eritque peripheria A B C bifariam in B, diuisa. Nam ductis rectis A B, B C, quia triangulorũ D A B, D B C, latus D A ipsi D C, est æquale, & D B,

& DB commune, anguliq́ue ad D recti sunt, erunt *a* bases AB, BC æquales, ac proinde æquales *b* etiam peripheriæ AB, BC. Secta est igitur ABC bifariã in B; quod erat faciendum.

a 4. 1.
b 28.

Propositio 31. Theore.

In circulo angulus qui in semicirculo rectus est: qui in portione maiore, minor recto; & qui in minore, maior: insuper maioris portionis angulus est maior recto; minoris, minor.

IN semicirculo ADC, fiat vtcunque angulus CDA, quẽ dico esse rectum. Nã ex E centro ductâ rectâ ED, & latere CD producto in F, quia trianguli ECD duo latera EC, ED sunt paria, pares quoq; erunt anguli *a* ECD, EDC, & in triangulo EAD, pares erunt ob eandem causam anguli EDA, EAD; totus ergo angulus ADC, vna sui parte angulo C, & altera angulo EAD æqualis est, sed ijsdem angulis C & EAD, oppositis & internis æqua-

a 5. 1.

b 32. 1. æqualis est *b* externus F D A. Sunt ergo æquales quoque inter se anguli A D C, A D F; ac proinde rectus vterque.

Et quia in triangulo A C D, angulus
c 17. 1. A D C, ostensus est rectus, minor *c* recto erit angulus D C A, qui est in portione D G B A, maiore quam sit semicirculus.

Nunc vero sumpto vtcunque puncto G, in arcu D A, ductisque rectis D G, G A, quia quadrilaterum est C G, anguli
d 22. oppositi *d* D C A, A G D, valent duos rectos; sed angulus D C E, minor recto est, recto ergo maior est angulus D G A, qui est in portione D G A, minore quam semicirculus.

Sed & angulus maioris portionis qui continetur recta A D, & circumferentia D A B C, maior est recto A D C, totum videlicet sua parte. Angulus denique minoris portionis qui continetur recta A D, & arcu D G A, minor est quam rectus A D F, pars videlicet quam totum. In circulo igitur, &c.

Pro-

Propositio 32. Theore.

Si circulum recta tetigerit, & à tactu ducatur recta altera secans circulum, anguli quos ad tangentem facit, æquales erunt ijs qui sunt in alternis circuli portionibus.

CIrculum A B C D, tangat recta E F, in puncto D, ex quo ducatur D B, vtcunque circulum secans in B, deinde excitata D A, ipsi E F, perpendiculari (quæ erit *a* diameter) ducatur A B, sumptoq́, quouis puncto in arcu B D, puta C, ducantur etiam rectæ B C, C D. Quo facto dico angulos quos facit B D, cum tangente E F, æquales esse angulis, qui sunt in alternis circuli portionibus. Hoc est angulum B D E, parē esse ipsi B A D, qui est in portione A B D; & angulum B D F, parem esse ipsi B C D, qui est in portiune D C B. Nā quia angulus A B D, in semicirculo *b* rectus est, reliqui duo B A D, B D A, vni recto *c* sunt pares; sed rectus est angulus A D E, valet ergo duos

a 18. *b* 31. *c* 32. 1.

duos angulos B A D, B D A; ablato ergo communi B D A, reliqui B D E, & B A D, manent æquales. Amplius quia

A C, quadrilaterum eſt, anguli A, & C,
d 22. ſunt *d* pares duobus rectis, ſicut & anguli B D F, B D E: cum igitur angulus B D E, ipſi A, ſit oſtenſus æqualis, reliqui B D E, B C D, inter ſe relinquuntur æquales; Si igitur circulum, &c.

Propoſitio 33. Proble.

Super data recta portionem circuli deſcribere quæ capiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

SI angulus datus ſit rectus vt D, & data recta ſit A B, eâ diuiſâ bifariam in F, centro F, ſpatio F B, ducetur ſemicirculus A E B, capiens

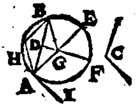
a 31. *a* angulum rectum.

SI vero angulus datus ſit acutus, vt C, & data recta A B;

a 23. 1. applicetur ad eius *a* extremum A, angulus

D A B,

D A B ipſi C æqualis ; deinde rectâ A B, diuisâ bifariã in E, excitetur E F, ad rectos ipſi A B, & ad A, recta A H, ad rectos ipſi A D, iungaturq́; G B, eruntque triangulorum E A G, E B G, latera E A, E B, æqualia, & E G, commune, angulique contenti, æquales, æqualis ergo erit *b* baſis G A, baſi G B, quare ſi centro G, *b* 4. 1.
ſpatio G A, ducatur circulus, tranſibit per extremum B; nunc vero ductâ rectâ H B, quia diametro A H, ad extremum A, ducta eſt ad rectos linea D A, tanget *c* *c* 16.
hęc linea circulum ; & quia à contactu dictâ rectâ A B, circulum ſecat, erit angulus D A B, ſeu angulus datus C, æqualis *d* angulo A H B, qui eſt in alterna ſectione A F B, hæc ipſa igitur ſectio *d* 21.
H F B, ſuper data A B, capit angulum dato angulo æqualem.



Similis erit ſtructura ſi detur angulus obtuſus C, & ſimilis item demonſtratio, capiet enim arcus A H B, angulum obtuſum B H A, ipſi G A I, hoc eſt dato angulo C, æqualem. Super data ergo, &c.

Propoſitio 34. Proble.

A dato circulo portionem auferre quæ angulum capiat parem angulo dato.

SIt datus angulus F, & circulus A B C, cui ad quoduis punctum, puta C,

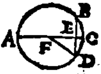
a 16. applicetur *a* tangens D E, fiatque angulus B C E, ipſi F, æqualis eritque angulus quiuis in portione C A B,

b 32. puta B A C, *b* æqualis ipſi B C E, ſeu dato angulo F, cum angulus C A B, ſit in alterna circuli ſectione.

Propoſitio 35. Theore.

Si in circulo duæ rectæ ſe interſecent, rectangulum ſub ſegmentis vnius æquale erit rectangulo ſub ſegmentis alterius contento.

In cir-



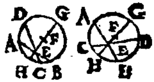
IN circulo A B C D, rectæ A C, B D, se intersecent in E; quę sectio si sit in centro, tunc cum omnia segmẽta sint æqualia, erit rectangulum sub segmentis vnius. æquale rectangulo sub segmentis alterius. Quod si in alterutra tantum puta A C, sit centrum circuli, secetque *a* alteram B D, æqualiter & ad rectos in E, tunc ductâ rectâ F D, ex centro F, quia recta A C, bifariam in F, & non bifariam in E, diuisa est, erit rectangulum *b* sub A E, E C, simul cum quadrato ipsius E F, æquale quadrato ipsius F C, vel F D, seu duobus ex *c* F E, E D; sed quadratum ipsius E D est rectangulũ sub partibus rectę B D, sectæ æqualiter in E; Igitur rectangulum sub partibus E D, E B, addito quadrato ex E F, æquale est quadrato ipsius F D, sicut & rectãgulum sub partibus inæqualibus ipsius A C, adiuncto eodem quadrato ex E F, fiebat ęquale quadrato ipsius F D; Ablato ergo communi quadrato ex E F, rectangula sub A E, E C, & sub B E, E D, remanent æqualia.

a 3.
b 5. 2.
c 47. 1.

SI vero in alterutra recta puta A C, sit cẽtrum circuli F, & vtraque linea inæqualiter in E diuidatur, ductis

 F D,

F D, & perpendiculari F G, rectangulum sub partibus A E, E C, cum quadrato ip-
d 5. 2. sius E F, par erit quadrato *d* ex F C, vel F D; Similiter rectangulum sub B E, E D, cum quadrato ipsius E G, æqualia sunt quadrato ex G D, & hoc cũ quadrato ipsius G F, æquale est quadrato ipsius D F, quare additis ad rectangulũ sub D E, E B, quadratis ipsarum E G,
e 47. 1. G F, seu quadrato *e* ipsius E F, fiet rectangulum sub D E, E B, æquale qua-
f 5. 2. drato ex D F, cui etiam æquale erat *f* rectangulum sub partibus ipsius A C, adiuncto quadrato ex E F, hoc ergo quadrato ex E F, communi ablato, rectangula sub A E, E C, & B E, E D, manent æqualia.



DEnique si neutra per centrum trãseat, & vna ex illis bifariam secetur, aut neutra: ducatur per centrum F, & sectionem E recta G H, tunc vero quia ostensum est rectangulum sub A E, E B, æquale esse rectangulo sub G E, E H (siue A B, diuisa sit bifariam, siue non) item rectangulum sub C E, E D, æquale esse eidem sub G E E H, (siue C D, bifariam secta sit siue non) erit rectangulum sub A E, E B, æqua-

æquale rectangulo sub C E, E D. Quod erat demonstrandum. Si ergo in circulo, &c.

Propositio 36. Theore.

Si à puncto extra circulum ducantur duæ rectæ, secans vna, altera tangens circulum; rectangulum sub tota secante & parte quæ eidem adiecta est vsque ad punctum, æquale erit quadrato tangentis.

EX puncto A ducatur A B, circulum secans, quę primo transeat per centrum C, agaturque *a* insuper recta A D, circulum tangens in D, adiunctâ rectâ C D, quę erit *b* ad rectos ipsi A D. Quia ergo recta B E, bifariam secta est in C, & ei adiunctâ est E A, erit rectangulum *c* sub A E, A B, cum quadrato ipsius E C, vel C D; æquale quadrato ex A C: sed hoc idem quadratum ex A C, valet duo simul *d* quadrata ex A D, C D; si igitur auferas quadratum commune ex D C, rectan-

a 17.
b 18.
c 6. 2.
d 47. 1.

ctangulum sub A E, A B, sit æquale quadrato tangentis A D.

QVod si linea A B, non transeat per C centrum, ducatur ad eam C F, perpendicularis, item aliæ rectæ C D, C E, C A. Cum igitur rectangulum sub A E, A B, addito quadrato ipsius E F, par sit *e* quadrato ex A F, addito communi quadrato ex F C, quadrata ex A F, F C, seu *f* quadratum ex A C, æquale erit rectangulo sub A E, A B, vnà cum quadratis ex E F, F C, vel cum quadrato ipsius E C. Quia ergo rectangulum sub A E, A B, cum quadrato ipsius C E, vel C D, æquiualet quadrato ipsius A C, vel duarum *g* A D, D C; si auferatur commune ex D C, vel C E, rectangulum sub A E, A B, manebit æquale quadrato ipsius A D. Quod erat demonstrandum. Si ergo à puncto, &c.

e 6. 2.
f 47. 1.
g 47. 1.

Propositio 37. Theore.

Si à puncto extra circulum ducantur rectæ duæ, quarum altera secet, altera in circulum incidat, sitque rectangulum subsecante, & adiecta parte

parte vsque ad punctum, æquale incidentis quadrato; recta illa incidẽs circulum tangit.

EX puncto D extra circulum A B F, ducatur recta D A, secans circulum in C, sitque rectangulũ sub D A, D C, æquale quadrato rectæ D B. Dico rectam D B tangere circulũ.
Nam ductâ rectâ D F, tangente *a* circulum in F iungantur è centro E rectæ *a* 17.
E B, E F, & si recta D A, non transit per centrum E, addatur etiam D E. Nunc vero quia rectangulo sub D A, D C, ęquale est *b* quadratum tangentis D F, ei *b* 36.
demque rectangulo sub D A, D C, ponitur æquale quadratum ipsius D B, erunt quadrata rectarum D F, D B, æqualia; ideoque & ipsæ ęquales. Quia ergo triãgulorum D F E, D B E, duo latera D F, F E, duobus D B, B E, sunt æqualia & basis D E, communis; erunt *c* anguli *c* 8. 1.
D F E, D B E, æquales; est autem *d* angulus D F E, rectus, rectus ergo etiam est *d* 18.
D B E, ideoque *e* recta D B, circulum *e* 16.
tangit. Si ergo extra circulum, &c.

EVCLIDIS

Elementorum

LIBER IIII.

Definitiones.

1 Figura rectilinea in altera rectilinea dicitur inscribi, cum singuli eius quæ inscribitur anguli singula latera attingunt eius in qua dicitur inscribi.

Ut triangulũ A B C, inscriptum est in triangulo D E F: at triãgulum G H K, non inscribitur in triangulo L M N, quia angulus H, non attingit latus M L.

2 Fi-

2 Figura circum figuram deſcribi dicitur cum ſingula eius quę circumſcribitur latera ſingulos angulos tetigerint figuræ, quæ intus eſt deſcripta.

Vt in ſuperioribus exemplis triangulum D E F, eſt deſcriptum circa triangulum A B C, at triangulum L M N, non eſt deſcriptum circa G H K.

3 FIgura rectilinea in circulo inſcribi dicitur cum ſinguli eius anguli circulum tetigerint. *Vt in figura definitionis ſexta triangulum A B C, circulo A D B, eſt inſcriptum, non autem triangulum D E F.*

4 FIgura vero rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, cum ſingula eius latera ambitum circuli tangunt. *Vt triangulum A B C, deſcriptum eſt circa circulum D E F.*

5 SImiliter & circulus in figura rectilinea inscriptus est, cum eius ambitus tangit singula latera figuræ in qua circulus describi dicitur. *Vt circulus D E F, inscriptus est in triangulo A B C.*

6 CIrculus autem circa figuram describi dicitur, cum circuli ambitus tangit angulos omnes eius figuræ quã circumscribit. *Vt circulus A B C D, descriptus est circa triangulum A B C, non autem circa D E F.*

7 REcta linea in circulo accommodari vel aptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint. *Vt linea A B, aptata est in circulo A B C, non autem C D.*

Propositiones.

Propositio 1. Proble.

In dato circulo rectam accommodare æqualem datæ rectæ lineę, quę circuli diametro maior non sit.

In cir-

IN circulo A B C, aptã da sit linea æqualis ipsi E, quę diametro A C, maior non sit, nam maior diametro *a* nulla aptari potest. Quod si diametro A C, esset æqualis linea E, ipsa diameter A C, esset accommodata vt petitur. Si ergo linea E minor sit diametro A C, abscindatur æqualis A D, ac centro A spatio A D, ducatur circulus B D, iuncta enim recta A B, aptata erit in circulo A B C, & erit æqualis ipsi E, cum F, sit æqualis ipsi A D, cui æqualis etiam est A B. *a* 15. 3.

Propositio 2. Proble.

In dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

SIt datus circulus A B C, & triangulum D E F, Ducta *a* tangente G H, ad punctum B, fiat angulus *b* H B C, æqualis ipsi D, & G B A ipsi E ponatur æqualis, ducaturque recta A C, & erit triangulum A B C quod petitur: nam quia angulus H B C æqualis est ipsi A in alterna *c* sectione, & eadem *a* 16. 3. *b* 23. 1. *c* 32. 3.

eadem de causa G B A, ipsi C; erit quoque angulus D ipsi A, & angulus E ipsi C æqualis;

d 32. 1. quare & tertius F, ipsi *d* angulo B æqualis erit. In dato ergo circulo, &c.

Propositio 3. Proble.

Circa datũ circulũ triangulũ describere dato triangulo æquiangulum.

Sit datus circulus A B C, & triangulum D E F, productóque latere E F, in G,

a 23. 1. & H, angulo D E G, æqualis fiat *a* ad cẽtrum angulus A I C, & angulus B I C, angulo D F H; necnon ad singula puncta A, B, C, ducantur *b* tangentes K L,

b 16. 3. L M, M K: eritque triangulum K L M, triangulo D E F, æquiangulum. Nam quia in quadrilatero A I C L, anguli ad

c 18. 3. A & C *c* sunt recti, reliqui L & A I C duobus rectis sunt pares: si enim ducatur L I, duo triangula A L I, C L I habent angulos pares *d* quatuor rectis; cum

d 32. 1. igitur duo recti sint ad A & C, reliqui continebunt rectos alios duos. Si ergo anguli A L C, A I C, valent duos rectos cum angulus A I C sit æqualis ipsi

D E G

D E G alter angulus A L C par erit angulo D E F, quandoquidem anguli circa latus D E sint *e* duobus rectis æquales. *e* 15. 1.
Eodem modo in quadrilatero B I C M ostendetur angulum M esse ipsi D F E ęqualem. Quare & tertius D, tertio angulo K erit æqualis. Circa datum ergo, &c.

Propositio 4. Proble.

In dato triangulo circulum describere.

DAti trianguli A B C duo quiuis anguli C B A, A C B bisecētur *a* per rectas D B, D C, occurrētes in D, à quo puncto ducantur *b* D E, D F, D G, singulæ singulis lateribus triāguli dati perpendiculares. Nunc verò quia triangula D B F, D B E, habent singula ad E, & F, vnum angulum rectū, & alterum D B F, *c* alteri D B E æqualē, latus insuper D B cōmune; erunt *d* etiā latera D F, D E ęqualia; similiterq. ostendetur rectā D G, rectę D F æqualem esse. Si igitur centro D, spatio D F, ducatur circulus F E G, transibit per puncta E & G, tangetq. latera omnia trianguli dati A B C. In dato ergo triangulo, &c.

a 9. 1.
b 12. 1.
c constr.
d 26. 1.

Prop.

Propoſitio 5. Proble.

Circa datum triangulum circulum deſcribere.

TRianguli dati A B C duo latera A B, A C, diuidantur bifariam in D & E; ad quæ puncta excitatis perpendicularibus coibunt illæ in puncto F, vel intra triangulum, vel in latere ipſo, vel extra, vt in figuris ordine apparet. Ducantur inſuper rectæ A F, B F, C F, ſi omnes, aut aliquæ earum ante non ſunt ductæ. Quia ergo triangulorũ A D F, B D F, latera D A, D B, ſunt æqualia, & D F commune angulique recti ad D; erit *a* baſis A F, ipſi F B æqualis, pariterque oſtendetur F C ipſi F A, eſſe æqualem. Centro ergo F, ſpatio F A, ducetur circulus A C B, qui tranſibit per puncta C & B. Circa datum ergo triangulum.

a 4. 1.

Pro-

Propositio 6. Proble.

In dato circulo quadratum describere.

IN dato circulo A B C D, secent se ad rectos in centro E diametri A C, B D, ducanturque rectæ A D, A B, C B, C D: ostendetur ergo omnes has lineas esse æquales bases triangulorum suorum per 4. 1. & sunt anguli supra illas bases, puta super A B, a æquales, quia æqualia sunt latera E A, E B: cum ergo omnes anguli ad E sint recti, omnes qui sunt supra bases erunt semirecti, totus ergo angulus A B D, & similes, sunt recti: figura ergo rectilinea A B C D, quadratum est, descriptum in circulo; quod erat faciendum. a 5. 1.

Propositio 7. Proble.

Circa datum circulum quadratum describere.

Ductis

DVctis diametris se secantibus ad rectos in E centro, per earum extrema A, B, C, D, ducantur *a* tangentes F G & similes; eritque figura rectilinea F G K H quadrata; in qua rectilineum A K est parallelogrammum, sunt enim *b* anguli ad A & C, recti; ergo latera *c* A G, C K parallela, similiterque parallelæ sunt A C, G K propter angulos ad B & E rectos. Cum ergo angulus A C K rectus sit, erit etiam *d* oppositus A G K rectus: similiterque ostendetur angulos ad F, H, K, rectos esse Item G K æquale est opposito A C, *e* diametro circuli, & omnia alia latera figuræ F K ostendentur diametro circuli æqualia. Sunt ergo omnes anguli recti & latera æqualia in figura F K, & per consequens est quadratum. Circa datum ergo circulum, &c.

a 16. 3.
b 18. 3.
c 28. 1.
d 34. 1.
e 33. 1.

Propositio 8. Proble.

In dato quadrato circulum describere.

DAti quadrati A D, lateribus A B, A C, bifariam sectis in E & F, per E recta E G, parallela ipsi A B,

& per

& per F ducatur F H ipſi A C ſimiliter
parallela; eruntque *a* lateribus quadrati *a* 33. 1.
& inter ſe æquales. Et quia A K parallelogrammum eſt, erunt latera oppoſita
F K, A E, dimidium lateris *b* quadrati, æ- *b* 34. 1.
qualia. Similiterque oſtendetur omnes rectas K E, K F, K G, K H, æquales eſſe dimidio lateris quadrati, & inter ſe. Centro ergo K, ſpatio K E ducetur circulus E F G H tangens omnia latera quadrati. In dato ergo quadrato, &c.

Propoſitio 9. Proble.

Circa datum quadratum circulum deſcribere.

In dato quadrato A B C D, ductis diametris ſe ſecantibus in E, quia trianguli A B D latera A B, A D ſunt
æqualia, erunt *a* anguli A D B, A B D *a* 5. 1.
æquales & ſemirecti, cum angulus D A B rectus ſit: ſimiliterque oſtendetur omnes angulos geminos ad A, B, C, D, eſſe
æquales; quare latera *b* E A, E B, &c. inter *b* 6. 1.
ſe eſſe æqualia. Centro ergo E, ſpatio E A, ducetur circulus A B C D, tranſiens per

omnia

omnia, puncta extrema quadrati. Circa datum igitur quadratum, &c.

Propositio 10. Proble.

Triangulum Isosceles constituere in quo vterque angulus ad basim sit duplus reliqui.

RECta A B, secetur in C, iuxta 11. 2. ita vt rectangulum sub A B, B C, sit æquale quadrato rectæ C A. Deinde facto centro A, spatio A B, du-
a 1. catur circulus B D E, in quo aptetur *a* recta B D, ipsi A C, æqualis, iunctis insuper rectis A D, C D; eritque triangu-
b 6. 1. lum A B D, æquicrurum. Quare *b* & anguli supra basim B D sunt æquales. Nũc vero hosce angulos singulos esse duplum tertij anguli A, sic ostendo. Circa trian-
c 5. gulum A C D, ducto *c* circulo D C A, quia rectangulum sub A B, B C, æquale
d 11. 2. est *d* quadrato ex C A, seu B D, per constructionem, & A C, circulum secat ipsa
e 37. 3. B D, tangit *e* circulũ D C A, quare angu-
f 32. 1. lus C D B, æqualis est *f* ipsi A in alterno

seg.

ſegmento; & communi C D A addito, duo anguli A & C D A ęquales ſunt duobus B D C & C D A, hoc eſt toti A D B, vel A B D. Et quia angulus externus B C D, duobus *g* internis A & A D C, ęqualis eſt, erit idem B C D, par ipſi C B D, vel A D B; & proinde *h* rectæ D C, D B æquales, cum pares angulos ſubtendant. Et quia B D, poſita eſt ipſi C A æqualis, pares erunt rectæ C D, C A. Quare *i* anguli A & C D A æquales. Duplus ergo eſt angulus externus B C D, ipſius A, & eiuſdem dupli quoque anguli ſunt C B D, A D B, qui ipſi externo B C D pares oſtenſi ſunt. Triangulũ ergo Iſoſceles, &c.

g 32. 1.

h 6. 1.

i 5. 1.

Propoſitio 11. Proble.

In dato circulo pentagonum ęquilaterum & aquiangulum deſcribere.

ASſumpto triãgulo *a* Iſoſcele E G H, cuius anguli G & H, dupli ſint ipſius E, in circulo A B C D, *b* fiat illi æquiangulum A C D, bifariamque

a 10.

b 2.

que dividatur anguli c A C D, A D G. Iunctis deinde rectis A B, B C, D F, F A, factum erit quod

c 9. 1.

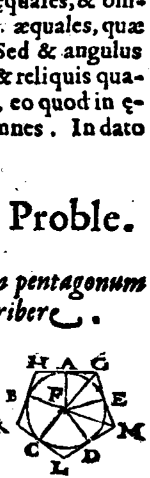
proponitur. Nam quia anguli A D B,
d 26, 3. B D C sunt pares, pares etiam erunt d arcus A B, & B C, & eandem ob causam omnes reliqui arcus sunt ęquales, & om-
e 29. 3. nes e rectæ A B, B C, &c. æquales, quæ pares arcus subtendunt. Sed & angulus
f 27. 3. A B C, f angulo B C D & reliquis quatuor similibus est ęqualis, eo quod in ęqualibus segmentis sint omnes. In dato ergo circulo, &c.

Propositio 12. Proble.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum describere.

IN dato circulo A B C, notetur quinque puncta A, B, C, D, E, signantia quinque angulos pentagoni æquilateri in circulo a descripti, ad quæ puncta ex centro

a 11.



tro F ducãtur totidẽ rectæ F A, F B,&c. rursúsque ad earum extrema ducantur tangentes quæ concurrent *b* in angulis G, H, K, &c. factumque erit quod petitur. Nam quia in quadrilatero B F C K, quatuor anguli quatuor *c* rectis æquiualent, similiterq; in quadrilatero C F D L, & anguli ad B & C recti sunt, sequitur angulos B K C, B F C duobus rectis ęquiualere: similiterque angulos C L D, C F D. cumque B F C & C F D sint anguli æquales *d* ob pares arcus B C, C D, reliqui B K C & C L D erunt æquales; parique methodo ostendetur angulos reliquos pentagoni inter se esse æquales. Nunc vero esse æquilaterum sic ostendo. Ductis rectis F G, F M, erit quadratum ex F G, *e* æquale quadratis tam ipsarum A F, A G, quam ipsarum E F, E G. Quare ablatis quadratis ęqualium A F, E F, quadrata reliquarum A G, G E, manent æqualia, ac proinde rectæ A G, G E sunt ęquales. Cumque anguli F A G, F E G & continentia latera sint æqualia, erunt triangula A F G, G F E iuxta 4. 1. & idcirco anguli A F G, G F E æquales. Eadem methodo ostendetur triangula F E M, M F D esse iuxta 4. 1. ac proinde angulos E F M, M F D esse æquales. Quare anguli,

b 18. 3.
c 32. 1.
d 27. 3.
e 47. 1.

guli, E F G, cum sint dimidij æqualium E F M, erunt inter se pares. Quia ergo in triangulis G F E, E F M, duo anguli

circa rectam E F, sunt pares, & latus adiacens E F, commune est, reliqua latera

f 26. 1. *f* & anguli erunt æqualia. Æquales sunt ergo rectæ G E, & E M, dimidiæ ipsius G M. Eodem modo ostendetur A G esse dimidiam ipsius G H. Cumque dimidiæ G A, G E, ostensæ sint æquales erunt & tota latera pentagoni G H, G M æqualia, similiterque de cæteris procedet demonstratio. Ergo, &c.

Propositio 13. Proble.

In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.

DAti pentagoni A B C D E, anguli duo proximi E A B, A B C, bisecentur *a* per rectas A F, B F, & à puncto F, in

quo concurrunt, ducantur etiam rectæ

F C

F C & ceteræ ad reliquos angulos. Quia ergo triangulorum A B F, F B C duo latera B A, B C æqualia sunt, & B F cōmune, anguliqúe contenti ad B sunt pares; erit *b* totum toti æquale triangulum; anguliq́ue & latera correspondentia æqualia: pares ergo sunt anguli B A F, B C F, Cumque anguli B A E, B C D ponantur æquales, sicut B A F est dimidium totius anguli B A E, ita B C F dimidium erit totius B C D. Hic ergo angulus & reliqui in orbem, secti sunt bifariam. Ducantur deinde F G, F H, &c. singulæ singulis lateribus perpendiculares. Et quia triangulorum G F B, B F H duo anguli F G B, G B F duobus F H B, F B H sunt pares, & latus F B commune, æqualia *c* etiam erunt latera F G, F H, & his pari modo æquales erunt F K, F L, F M. Quare centro F spatio F G ductus circulus transibit per puncta H, K, L, M, & sic in pentagono circulus erit descriptus.

b 4. 1.

c 26. 1.

Propositio 14. Proble.

Circa datum pentagonum æquilaterũ & æquiangulum circulum describere.

DAri pentagoni A B C D E, angulis A B C B C D sectis bifariam per rectas F B, F C, in F conuenientes, ductisque rectis F A, F E, F D triangulorum A B F, B F C duo latera B A, B F duobus B C, B F æqualia erunt; & anguli ad B contenti
à 4. 1. æquales. Basis *a* ergo A F basi F C æqualis est; ostendeturque vt in sup. prop. reliquas F A, F D, F E diuidere bifariam angulos reliquos, & omnes esse lineas inter se æquales. Centro ergo F spatio F B ductus circulus transibit per reliqua puncta C, D, E, A. Circa datum ergo, &c.

Propositio 15. Proble.

In dato circulo hexagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.

In

IN dato circulo A B C D, cuius centrum G, ducta diametro A D centro D, spatio D G ducatur circulus E G C, secans priorem in punctis E & C, ductisque per centrum G ad ambitum rectis C F, E B, iungantur rectæ D E, D C, &c. eritque triangulũ E G D æquilaterum (quare eius omnes anguli *a* erunt inter se pares, & quilibet erit pars tertia *b* duorum rectorum) cui per omnia æquale est triãgulum D G C. Iam vero quia recta E G cadens *c* in rectam F C facit ęquales duobus rectis, cũ anguli E G D, D G C, sint duæ tertiæ, duorum rectorum sequitur angulum E G F esse partem tertiam duorum rectorum, & æqualem duobus prioribus angulis; sunt ergo tria *d* triangula E F G, E G D, D G C vndique æqualia; & quia anguli F G A, A G B, B G C sunt ad verticem angulis prioribus, omnes sex anguli ad G sunt ęquales: quare omnes circumferentiæ *e* A B, &c. omnesque *f* rectæ illis subtensæ sunt æquales. Est ergo hexagonum A B C D E F æquilaterum; quod idem est æquiangulum, nam omnes anguli F E D, & alij, constant duabus tertijs duorum rectorum, vt ostensum est. In dato ergo, &c.

a 5. 1.
b 32. 1.
c 13. 1.
d 4. 1.
e 26. 3.
f 29. 3.

Corollarium.

Hinc manifeſtum eſt latus hexagoni æquale eſſe ſemidiametro circuli; nam latus D E ęquale eſt ſemidiametro D G.

Propoſitio 16. Proble.

In dato circulo quindecagonum ęquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

IN dato circulo A D C deſcribatur *a* triangulũ æquilaterum A E C, & pentagonum æquilaterum A D B F G, cuius angulus vnus conſtituatur ad aliquem angulum trianguli puta ad A. Quia ergo A C ſubtendit tertiam partem circuli, ſi totus circulus in quindecim partes æquales diuiſus intelligatur, in arcu A G C erunt ex ijs quinque; & cum A G ſit quinta pars, in eo arcu erunt partes tres; duę ergo erunt

a 2.

in

in arcu G C: quo diuiso bifariam in
H erit G H pars decima quinta circuli
totius. Quare ductâ subtensâ G H, si ap-
tentur *b* in circulo quatuordecim aliæ *b* 1.
æquales, incipiendo à puncto G vel H,
descriptum erit in circulo quindecago-
num æquilaterum: quod etiam erit *c* æ- *c* 27. 3.
quiangulum, cum eius anguli omnes
subtendant arcus æquales tredecim late-
rum quindecagoni: nam angulus H ab
arcu G H & eius subtensa comprehen-
sus subtendit arcum G A D H & sic de
cæteris angulisque plura latera quinde-
cagoni ducta essent. In dato ergo circu-
lo, &c.

EVCLIDIS

Elementorum

LIBER V.

Definitiones.

1 PArs est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cũ minor metitur maiorem. *Vt linea duorum pedum, pars est linea sex pedum, quia minor ter repetita metitur, & adæquat maiorem. Strictiore hoc significatu accepit Euclides nomen Partis, pro ea sola quæ totum metitur, & dici solet.* Pars aliquota. *Vniuersalius*; Pars est quæ aliquoties repetita metitur denique vel superat *maiorem: & sic comprehenditur etiam* Pars aliquanta, *quæ totum suum non metitur, qualis pars est 2. respectu ipsius*

ipsius 5. *Sub his porro numerorum exemplis magnitudines intelligantur; puta linea pedum duorum, & pedum quinque.*

2. Multiplex est magnitudo magnitudinis maior minoris, cum minor metitur maiorem. *Vt 6 est multiplex ipsius* 2; *Minor vero respectu maioris dicitur* Submultiplex. *Vniuersalius*; Multiplex est magnitudo magnitudinis maior minoris, cum minor repetita metitur, vel excedit maiorem: *atque ita Totum non tātum respectu partis Aliquota; sed etiam respectu Aliquanta dicetur multiplex, puta* 5. *respectu ipsius* 2.

3. Ratio est duarum eiusdem generis magnitudinum mutua quædam secundū quantitatē habitudo. *Quod Graci λόγος dicunt, Latini reddunt, Ratio, qua aliud non est quam duarum eiusdem generis magnitudinum (nam qua generis sunt diuersi, inter se conferri non possunt puta linea cum superficie) comparatio secundum excessum & defectū, siue in ratione totius & partis, aut etiam secundum aqualitatē, qua dicitur Ratio aqualitatis. Sunt ergo in omni ratione duo* Termini; *è quibus prior, qui in casu nominandi solet efferri, dicitur* Antecedens; *posterior vero qui in alio casu subiūgitur, dicitur* Consequens. *Vt cum dico, linea 4 pedum*

est dupla linea 2. pedum; antecedens huius rationis est linea 4 pedum, consequēs vero est linea 2. Excessus autem antecedentis (nam antecedentis loco ponere solemus id quod maius est) supra consequens, dicatur Differentia terminorum,

Rationū vero alia est Rationalis, *quæ est inter magnitudines commēsurabiles, & numeris exprimi potest, vt ratio dupla, tripla, & aliæ à numeris denominatæ,* Irrationalis *autem est, quæ est inter magnitudines incommensurabiles, & numeris exprimi nequit: qualis est inter latus & diametrū eiusdē Quadrati; quāuis enim diameter sit latere maior, definiri tamē nō potest; quāto sit maior: neque enim dimidio, neque parte tertia, neque vlla alia numeris designabili, maior est diameter quā latus Quadrati. Dicūtur vero magnitudines illæ incōmensurabiles, quibus nulla cōmunis mensura potest adhiberi: nulla enim quantumuis exigua pars sumi potest, quæ latus simul & diametrū quadrati metiatur; nam si metiatur diametrū, non metietur latus; aut è cōuerso.*

4. Rationem dicuntur habere inter se magnitudines, quæ multiplicatę superare se mutuo possunt. *Nulla ergo est ratio finiti ad infinitum, lineæ ad superficiem; cum neque magnitudo finita infinitam, ne-*

neque linea superficiem, quacunque multiplicatione facta, possit superare.

5. In eadem ratione esse dicuntur magnitudines, prima ad secundam, & tertia ad quartam, quando auctis quacunque multiplicatione antecedentibus (quæ sũt prima & tertia) auctis etiam eadem vel alia quacunque multiplicatione consequentibus (quæ sunt secunda & quarta) semper euenit vt cum multiplex primæ aut maior est aut æqualis, aut minor quã multiplex secundæ, talis quoque sit multiplex tertiæ ad multiplicem quartæ. *Quatuor magnitudines esse in eadem ratione non est aliud quam primam ita esse maiorem secunda, sicut tertia maior est quarta, siue secundam esse talem partem primæ, qualis pars tertiæ est magnitudo quarta, iuxta def. 3. An vero quatuor datæ magnitudines sint huiusmodi, hoc, quod attulimus, iudicio deprehendetur. Nam in magnitudinibus A B C D, si sumatur duplum*

G	8.	16.	12.	24.
F	12.	12.	18.	18.
E	8.	6.	12.	9.
	4.	2.	6.	3.
	A	B	C	D

antecedentiũ, & triplũ consequentiũ, vt *factũ est in ordine E, tũc sicut multiplex prima superat multiplicem secunda, ita multiplex tertia multiplicẽ quarta: at in ordine F, cũ sumitur triplũ antecedentiũ, & sextuplũ consequentiũ, multipla prima & secũda, ītẽ tertia & quarta, pariter sunt æqualia; in ordine autẽ G cũ sumitur duplũ antecedentiũ, & octuplum consequentiũ, tũc multipla prima & tertia pariter minora sunt multiplis secũdæ & quartæ; neque aliud vnquã eueniet in quibuscumque alijs multiplicationibus; vnde colligimus magnitudines A, B, C, D esse in eadẽ ratione. Quãuis autẽ hoc exẽplum in magnitudinibus cõmensurabilibus, & numeris propositũ sit, idẽ tamen eueniet in ratione etiã irrationali, quod intelligatur in sequentibus etiã exẽplis.*

Ab hoc indicio iubet Euclides inuestigari an magnitudines in eadem ratione sint; quod quomodo cum natura intima proportionaliũ cohæreat sic ostẽdo. Quia ratio est magnitudinum secundum quãtitatem cõparatio; non est aliud magnitudines in eadem ratione esse, quam esse in eadem comparatione seu habitudine maioris & minoris, totius & partis; si nomen partis latius sumatur, vt cõprehendamus etiã proportionẽ irrationalẽ. Non potest autem è quatuor magnitudinibus

nibus prima eandem habere comparationem maioris ad secundam minorem, quã habet tertia ad quartam; nisi secunda & quarta pari numero multiplicata similiter se habeant ad maiores, quo ad excessum & defectum. Si enim exẽpli gratia cum secunda B ter repetita non excedat primam A, quarta tamen D ter accepta superet tertiã C, manifestũ erit D non esse ita minus ipso C, sicut B ipso A; aut quod idẽ est, C nõ esse ita maius ipso D, sicut est A ipso B, atq. adeo quatuor illas magnitudines, non esse in eadẽ ratione. Iã vero perinde est cõferre minores magnitudines B & D, ad maiores singulas A & C, atq. ad easdẽ A & C pari numero multiplicatas. Nã necesse est quoq. similes partes eodẽ modo se habere quo ad excessũ & defectũ ad sua tota æqualiter multiplicata. Si enim cũ B sexies sũptũ, nõ excedat A bis repetitũ, D tamẽ sexies deceptũ, superet C bis repetitũ; manifestũ etiã inde erit B nõ esse talẽ partẽ ipsi' A, qualis est D ipsi' C, seu quod idẽ est, C nõ ita esse maius ipso D sicut est A ipso B. Idipsũ vero est, quod Euclides docet; iubet enĩ maiores magnitudines A & C æqualiter multiplicari, seu prima & tertia sumi equemultiplices, multiplicari etiã

12	3	5	2
A	B	C	D

æqualiter minores, seu partes B & D, & si sẽper eodẽ modo se habeãt in excessu & defectu ad tota A & C æqualiter multiplicata, rectè colligit A, esse in ea ratione ad B, in qua est C ad D. Atq; hæc Euclidis definitio quibuscunq; magnitudinibus in eadẽ ratione positis cõpetit, seu per se & solitarie accipiãtur, seu figuris illigata. Quæ vero magnitudines ex ipsa cui illigata sunt, cõfiguratione eandẽ proportionẽ sortiũtur breuiꝰ & planiꝰ, sic definiẽtur.

In eadẽ ratione sunt magnitudines prima ad secundã, & tertia ad quartã, quando qua multiplicatione augetur prima supra secundã, eâdem quoq; augetur tertia supra quartã. *Exempli caussa triangula inter easdem parallelas posita, puta A & B, & eorum bases C & D, sunt in eadẽ ratione; quia si prima magnitudo A duplo aut triplo maior, sit aut fiat quam secunda B, tertia etiam C, duplo aut triplo maior erit, quã quarta D, vt constat ex prop. 28. 1. Est ergo vt A ad B, ita C ad D.*

6. Magnitudines quæ in eadẽ ratione sunt proportionales vocẽtur. *Puta si fuerit vt prima ad secundam ita tertia ad quartã quatuor illæ magnitudines dicẽtur proportionales. Et quidẽ si fuerit vt prima ad secundã, ita secũda ad tertiã &*

ter-

tertia ad quartã, magnitudines illæ erũt. Cõtinuè proportionales, *quia proportio nullibi interrumpitur, vt videre est in magnitudinibus* 16. 8, 4, 2, *nam vt* 16, *ad* 8, *ita* 8, *ad* 4, *&* 4, *ad* 2. *Quod si nõ sit vt prima ad secundã ita secunda ad tertiã; sed tantũ vt prima ad secundam, ita tertia ad quartã, vt fit in magnitudinibus* 4.2.6.3. *magnitudines illæ proportionales quidem, non tamen continuè proportionales erunt, quia proportionis cursus interrumpitur inter secundam & tertiã.*

7. Quando vero facta antecedentiũ & consequentiũ multiplicatione, multiplex primæ excesserit multiplicẽ secũdę, multiplex autem tertiæ non excesserit multiplicẽ quartę, tũc prima ad secundam maiorẽ habet rationẽ, quã tertia ad quartã. *Vt quia in magnitudinibus A, B, C, D, sumpto duplo antecedẽtium, & quadruplo consequentiũ, multiplex ipsius A superat multiplicem secundæ B, cum tamẽ*

12.	8.	14.	16.
6.	2.	7.	4.
A.	B.	C.	D.

multiplex tertiæ C, nõ superet multiplicẽ quartæ D; ideo inquã, maiorẽ rationem habet A ad B, quã C ad D. Breuiter, ibi maior est ratio vbi maior est inæqualitas: ibi autẽ maior est inæqualitas vbi dif-

fe-

ferentia terminorum aut pluries cõtinet cõsequentem, aut est eius pars maior. Vt differentia terminorum A & B est 4, duplum scilicet cõsequentis 2; differẽtia vero inter C & D, est 3. minor cõsequente D; maior ergo inæqualitas est, maiorq́ ratio ipsius A ad B, quam ipsius C ad D.

8. Analogia seu Proportio est Rationũ similitudo. *Puta similitudo quæ est inter duas rationes triplas, aut quadruplas dicitur Proportio, & Analogia Sæpe tamẽ apud auctores Proportio aliud non est quam simplex ratio, iuxta def. 3.*

9. Proportio in tribus minimũ terminis cõsistit: *Cũ enim sit similitudo duarũ rationum & vnaquæque sit inter duos terminos, quatuor terminos requiret Proportio; nisi terminus vnus bis repetatur: vt cũ dico sicut 8 ad 4 ita 4 ad 2. Et tũc tres termini ad proportionem sufficient.*

10. Cum tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur eius, quã habet ad secundam. *Vt quia proportionales sunt 8, 4, 2, prima 8 ad tertiam 2 dicitur duplicatam habere rationem eius quam habet ad secundam 4.*

11. Quando vero quatuor fuerint proportionales magnitudines, prima ad quartã triplicatam habet rationem & ita

dein-

deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

12. Homologæ dicuntur magnitudines antecedẽtes antecedẽtibus, & consequentes consequẽtibus. *Vt in quatuor proportionalibus cum dico. Vt 6, ad 3, ita 4, ad 2, prima & tertia, quia ambæ sunt antecedentes, dicuntur inter se homologæ; sicut & secunda homologa est cum quarta; quia ambæ sunt consequentes.*

13. Alterna seu permutata ratio est quando ex quatuor proportionalibus antecedens cum antecedente seu prima cum tertia, & consequens cum consequente, hoc est secunda cum quarta cõparatur.

Quia enim est		9	3	6	2
	Vt	A ad	B ita	C ad	D
Erit permutando		9	6	3	2
	Vt	A ad	C ita	B ad	D.

Quod intellige si inter primam & tertiam, & inter secundam & quartam, potest esse proportio, Vnde etiamsi sit vt triangulum A ad triangulum B, ita basis C ad basim D; non tamen licet permutare vt A ad C, &c. quia inter triangulum & lineam non potest esse proportio. De permutata ratione agitur infra prop. 16.

14. Conuersa ratio est cum consequẽs instar antecedentis sumitur, & ad antecedens velut ad consequens comparatur. *De qua vide prop. 4. in corollario.*

Quia enim est. Vt A ad B ita C ad D (9, 3, 6, 2)

Erit conuertendo. Vt B ad A ita D ad C. (3, 9, 2, 6)

15. Compositio rationis est cum antecedens simul cum consequente instar vnius sumitur, & ad consequens comparatur. *De qua vide prop. 18.*

Nam quia est. Vt A ad B ita C ad D (9, 3, 6, 2)

Erit cõponendo. Vt AB ad B ita CD ad D. (12, 3, 8, 2)

16. Diuisio rationis est cum differentia terminorum loco antecedentis sumitur, & ad consequens comparatur. *De qua vide prop. 17.*

Vt in exemplo sæpius proposito inter priores terminos, qui sunt 9. & 3, differentia est E 6. inter posteriores autem, qui sunt 6 & 2, differentia est F 4.

Quia ergo est. Vt A ad B ita C ad D (9, 3, 6, 2)

Erit diuidendo. Vt E ad B ita F ad D. (6, 3, 4, 2)

17. Con-

17. Conuersio rationis est cum antecedens ad differentiam terminorum, velut ad consequens comparatur. *De qua vide prop.* 18.

Nam quia est.		9	3	6	2
	Vt	A	B ita	C	D
Erit conuersione rationis.		9	6 :	6	4
	Vt	A ad	E ita	C ad	F.

18. Proportio ex æquo est cum fuerint plures magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales quæ binę & binæ in eadem ratione sumantur, fueritque vt in prioribus prima ad vltimam: ita etiam in posterioribus. Vel est sumptio extremarum per subtractionem mediarum. *Vt si sint plures magnitudines A, B, C, & aliæ totidem D, E, F, bina & bina in eadem ratione, hoc est vt A ad B ita D ad E, & vt B ad C, ita E ad F, erit ex æquo, vt in prioribus A ad vltimam C, ita etiam in posterioribus prima D, ad F.*

12	6	3	8	4	2
A	B	C	D	E	F

Ergo ex æquo. Vt 12 ad 3 ita 8 ad 2.

19 Ordinata proportio est cum fuerit vt antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem, fuerit etiam vt consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

Du-

Dupliciter institui potest proportio ex æquo: vno modo quando tam in prioribus quam in posterioribus comparãtur prima cum secunda, & secunda cum tertia; & hæc est ordinata proportio, quæ hic definitur, & de qua agitur prop. 20. & 22. eiusq́; exemplum positum est def. 18. Altero modo fit proportio ex æquo, cum ordo perturbatur in posterioribus, vt apparebit definitione sequenti.

20. Perturbata proportio est, cum tribus existentibus magnitudinibus & totidem alijs, fuerit vt in prioribus antecedẽs ad consequentem, ita etiam in posterioribus: vt autem in prioribus consequens ad aliam quampiam, ita in posterioribus alia quæpiam ad antecedentem.

Vt si sit quemadmodum in prioribus A ad B, ita in posterioribus E ad F, vt vero in prioribus B consequens ad aliam quampiam C, ita in posterioribus alia quæpiam D ad antecedentem E, erit hæc perturbata proportio. de qua agitur propo. 21. & 23.

18	12	4	27	9	6
A	B	C	D	E	F

Ergo ex æquo. Vt 18 ad 4 ita 27 ad 6

Lubet ad extremum breui schemate ponere sub oculos omnes hasce proportionum formas quas animo firmiter com-

comprehendisse plurimum tyronibus proderit.

Quia est Vt	9	ad 3	ita 6	ad 2
Erit Permutando	9	6	3	2
Conuertendo	3	9	2	6
Componendo	12	3	8	2
Diuidendo	6	3	4	2
Cōuersione rationis	9	6	6	4

Ex æquo ordin.		*Ex æquo perturb.*	
12. 6. 3.	8. 4. 2.	18.12.4.	27.9.6
A B C	D E F	A B C	D E F
12 ad 3	8 ad 2	18 ad 4	27 ad 6

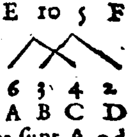
Neque vere difficile est aduertere ex ipsis numeris in omnibus hisce ordinibus quatuor magnitudines esse proportionales, seu minores quantitates esse similes maiorum partes: Nam in permutata sicut 6 est pars subsequi altera ipsius 9, ita 2 ipsius 3. Seu quod idem est, sicut 6 semel continetur in 9 & supersunt 3 pars dimidia ipsius 6; ita 2 semel centinctur in 3. & superest 1. pars dimidia ipsius 2. Idem in reliquis ordinibus deprehendes.

Pro-

Propositiones.

Propositio 1. Theore.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum numero æqualium ęquemultiplices singulæ singularum; quam multiplex est vna vnius, tam multiplices erunt omens omnium.



HOc est, Æquemultiplicium magnitudinum quã multiplices sunt singulæ singularium, tam multiplices sunt omnes omnium. Vt quia æquemultiplices sunt A ad B, C ad D; si A & C colligantur in E, similiterque B & D colligantur in F, quam multiplex erat A ipsius B, tam multiplex erit E ipsius F.

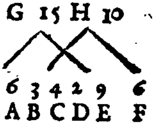
Non enim maiora aut minora sunt tota quam suę omnes partes: non potest proinde totum E pluries vel pauciore numero continere totum F, quam A & C par-

partes omnes totius E continerent B & D partes omnes totius F.

Propositio 2. Theore.

Si prima secundæ fuerit ita multiplex ut tertia quartæ, fuerit autem & quinta multiplex secundæ ut sexta quartæ; erit composita ex prima & quinta secundæ, ita multiplex, ut tertia & sexta primę.

SIt prima A ita multiplex secundæ B, sicut tertia C quartæ D: quinta vero E ita multiplex secundæ B, ut sexta F quartæ D.



Dico compositam ex prima A & quinta E hoc est G, ita multiplicem fore secundę B, sicut composita ex tertia & sexta hoc est H, multiplex est quartæ D.

Nam quia B & D secunda & quarta, continentur pari numero in singulis suis multiplicibus, continebuntur quoque *a* pari numero in multiplicibus collectis, hoc est in G, & H. a 1.

Pro-

Propositio 3. Theore.

Si prima secundæ ita est multiplex ut tertia quartę, & prima ac tertiæ sumantur ęquemultiplices; erit multiplex primæ tam multiplex secundæ, quam multiplex est multiplex tertiæ ad quartam.

VT quia A continet B, sicut C ipsam D; si sumantur E & F æquemultiplices ipsarum A & C, B continebitur toties in E, quoties D in F.

Nam sumere multipla ipsarum A & C non est aliud quam sumere plures A & C; Sicut ergo B & D

E 8		F 12	
4	2	6	3
A	B	C	D

ęqualiter continebantur in singulis A &
a 1. C, continebuntur etiam *a* ęqualiter in iisdem pari numero multiplicatis in E & F.

Pro-

Propositio 4. Theore.

Si prima ad secundã eam proportionẽ habuerit quã tertia ad quartã; habebunt quoque eandem rationem æquemultiplices primæ & tertiæ ad æquemultiplices secũdæ & quartæ iuxta quamuis multiplicationem, si sumantur vt inter se respondent.

E	F	G	H
8	6	12	9
4	2	6	3
A	B	C	D

VT si A habuerit eam rationem ad secundã B, quam habet tertia C ad quartã D; sumptis E & G æquemultiplicibus ipsarũ A & C, itemque F & H iisdem vel aliis æquemultiplicibus ipsarum B & D: erit E multiplex ipsius A, ad F multiplicem ipsius B, sicut G multiplex tertiæ C, ad H multiplicem quartæ D. Nam, vt explicuimus ad def. 5. in ratione maioris & minoris, siue in proportione, perinde est conferre singulas B & D, ad singulas A & C, atque B & D æqualiter multiplicatas, ad A & C pari inter se numero multiplicatas. Si ergo singulæ A & C, ad singulas B & D eadem ratio-

ne

ne ſe habent, eædem A & C æqualiter multiplicatæ in E & G, erunt etiam in eadem ratione ad B & D æqualiter multiplicatas in F & H.

Longiore circuitu idem ſic concluditur: Sit prima A ad ſecundam B ſicut tertia C ad quartam D. Sumptis deinde E & F. ipſarum A & C æquemultiplicibus & G & H æquemultiplicibus ipſarum B & D. Dico fore etiam E multiplicem primæ A, ad G multiplicem ſecundæ B, vt eſt F multiplex tertiç C, ad H multiplicem quartæ D, Accipiantur enim K, L ipſarum F F, & M, N ipſarum G, H æquemultiplices. Tũc quia æquemultiplex eſt E ipſius A, vt F ipſius C; acceptæque ſunt ipſarum E F æquemultiplices K L, ita ergo multiplex eſt K ipſius A
a 1. ſicut a L ipſius C. Eadem de cauſa ita multiplex eſt M ipſius B, vt N ipſius D. Et quia eſt vt A ad B ita C ad D, acceptæque ſunt ipſarum A C, æquemultiplices K, L, ip-

ſa.

ſarum vero B, D aliæ quæcunque M, N: ergo ſi K *b* ſuperat M, ſuperabit & L ipſam N & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor ſuntque K, L ipſarum E, F ęquemultiplices, M vero & N ipſarum G, H. Eſt ergo vt E ad G ita F ad H. Si ergo prima ad ſecundam, &c. *b* 6. def. 5 *c* def. 5.

Hac inquam forma demonſtrandi per aſſumptas æquemultiplices in ſequẽtibus quoque propoſitionibus poteſt adhiberi, in quibus ego vtar compendio. Nã definitione quinta rite percepta, facile aſſequemur earum propoſitionum veritatem abſque longo illo ambitu æquemultiplicium. Quod ſemel monuiſſe ſit ſatis.

Corollarium.

Demonſtrarem igitur hoc loco per æquemultiplices, Proportionem conuerſam recte procedere, niſi ex terminis nimis quam eſſet manifeſta. Nam ſi A eſt ita maius ipſo B ſicut C ipſo D, nimium eſt euidens B ita minus fore ipſo A, ſicut D minus eſt ipſo C. Neque aliud dicit ratio conuerſa, de qua def. 14. Quod ſi A & C ſumpta eſſent æqualia aut minora ipſis B & D; eſſet nihilominus æque euidẽs *proportio Conuersa, quod idem etiam prosequentium propositione exemplis intelligatur, in quibus loco antecedentis solemus ponere id quod maius est, & iuxta illud exemplum propositionem declarare.*

Propositio 5. Theore.

Si magnitudo magnitudinis ita multiplex fuerit vt ablata ablata; reliqua reliqua ita multiplex erit, vt tota totius.

E	4	F	2
C	8	D	4
A	12	B	6

VT quia A ita multiplex est ipsius B, sicut ablata C, ablatę D; erit residua E, residuæ F ita multiplex, vt tota A totius B, si enim cum A sit duplum ipsius B, & pars ablata C, dupla similiter partis ablatæ D, non esset residua E duplex residuę F, non continerentur, omnes partes totius B, in omnibus partibus totius A, sicut totum in toto; quod patet esse impossibile. Erit ergo residua residuæ ita multiplex, vt tota totius.

Pro-

Propositio 6. Theore.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æquemultiplices fuerint, & ablatę quædam earundem æquemultiplices, erunt reliquę iisdẽ vel ęquales vel æquemultiplices.

VT quia duç magnitudines A, B, duarum C, D, sũt æque-	G 2 H 3 E 10 F 15 A 12 B 18 C 2 D 3	G 8 H 12 E 4 F 6 A 12 B 18 C 2 D 3

multiplices, si auferantur ex A, B quæuis æquemultiplices earundem C, D, puta E & F; residuæ G & H erunt iisdem C & D aut æquales, aut æquemultiplices. Cũ enim C & D in totis A & B, & in eorum aliquibus partibus E & F æqualiter cõtineantur; æqualiter quoque *a* continebuntur in reliquis G & H. Quare reliquæ G & H aut iisdem C, D, sunt æquales, aut æquemultiplices. *a 5.*

Propositio 7. Theore.

Æquales ad eandem magnitudinem, & eadem ad æquales eandem habent rationem.

4	4	2
A	B	C

VT si A & B sint æquales magnitudines, quę erit ratio vnius, puta ipsius A, ad C; eadem erit alterius B ad eandem C. Item quam rationem habet C, ad A; eandem habet ad B æqualem ipsi A; quod manifestum est ex terminis, & ex ratione conuersa.

Propositio 8. Theore.

Inæqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorem habet rationē quam minor. Et eadem ad minorem, maiorem habet rationem quam ad maiorem magnitudinem.

Vt

6	4	2
A	B	C

Vt duarum magnitudinũ A & B, A maior rationẽ habet maiorem ad C, quam habeat B minor ad eandem C. Insuper maiorem rationem habet A ad minorem magnitudinem C, quam ad maiorem B. Vtraque pars patet ex terminis, & ex def. 7. & 5.

Propositio 9. Theore.

Quæ ad eandem habent rationem, æquales sunt magnitudines. Item ad quas vna aliqua eandem habet rationem, illæ sunt æquales.

4	4	2
A	B	C

Vt quia A & B eandem habent rationem ad C, sunt inter se æquales. Item quia magnitudo C eandem habet rationem ad A & B, necesse est ipsas A & B inter se æquales esse *est conuertens prop. 7. & per se euidens.*

Propoſitio 10. Theore.

Magnitudinum habentium rationẽ ad eandem, quæ maiorem habet, ea maior eſt. Cum vero eadem ad duas habet rationem, ea ad quam maior eſt ratio, eſt minor.

6	4	2	6	2	4
A	B	C	D	E	F

VT ſi A maiorem habet rationem ad C, quam B ad eandem C, A maior erit quam B. Item ſi D habet maiorem rationem ad E quam ad F, E minor eſt quam F. *Eſt conuertens prop. 8. & per ſe manifeſta.*

Propoſitio 11. Theore.

Quę eidem eadem ſunt rationes, & inter ſe ſunt eædem.

4	2	4	2	4	2
A	B	E	F	C	D

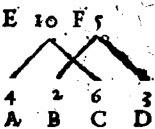
VT ſi rationes ipſarum A, B, & ipſarum C, D ſint eædem vni tertiæ, ipſarum E F, erunt etiam eædem inter ſe.

Pro-

Propositio 12. Theore.

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint, erit vt vna antecedentium ad vnam consequentiũ, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

VT si est A ad B sicut C ad D, erit E, hoc est omnes simul antecedentes, ad F omnes simul consequentes, sicut A ad B vel C ad D. Cum enim tota E & F sint diuisa in totidem partes. E scilicet in A & C, F vero in B & D, quæ singulæ ad singulas eandem habent rationem; non potest illa ratio esse alia quam quæ totorum inter se; alias omnes partes, omnibus partibus aliter essent maiores & minores, quam tota ipsa: quod fieri non potest, cum tota aliud non sint quam omnes suę partes.



Propositio 13. Theore.

Si prima ad secundam eam habuerit rationem, quam tertia ad quartā; tertia vero ad quartam maiorem habeat, quam quinta ad sextam; maior quoque erit ratio primæ ad secundam, quam quinta ad sextam.

9	3	6	2	8	4
A	B	C	D	E	F

Hoc est. Earundē duarum proportionū si vna maior est quam aliqua tertia, etiam altera maior erit: vt si sunt duę rationes eædem inter A B & C D, sit autem maior ratio inter C, D, quam inter E, F; erit quoque maior ratio inter A, B, quam inter E F; quod ex terminis notum est.

Pro-

Propositio 14. Theore.

Si prima ad secundam eam habuerit rationem quam tertia ad quartã, sit autem prima magnitudo maior quam tertia, secunda quoque maior erit quam quarta; si minor, minor; si æqualis, æqualis.

6	3	4	2
A	B	C	D

VT si fuerit A ad B sicut C ad D, & A maior sit quam C, maior quoque erit B quam D. Cum enim B & D totorum A & C ponantur esse partes similes, si B sit pars maioris A, D vero minoris C, necessario B maior erit quam D. Quod si totum A toti C, aut æquale esset aut minus, talis etiam foret pars B, respectu partis D, vt satis constat.

Propositio 15. Theore.

Partes cum pariter multiplicibus eandem rationem habent, si sumātur vt sibi respondent.

12	4	6	2
A	B	C	D

HOc eſt. Partes pari numero contentę in ſuis totis, eandem ſeruant inter ſe rationem ac tota ipſa. Vt magnitudines B & D quæ ſunt eodem numero in totis A & C, eandem inter ſe habent rationem quam tota A & C. Nam ſi tota reſoluantur in omnes partes ſimiles ipſis B & D, tunc quæ erit ratio cuiuſlibet ad quamlibet, eadem erit ratio omnium ad omnes, ſeu totius ad totum; vt per ſe notũ eſt, & ex prop 4.

Propositio 16. Theore.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, etiam permutata proportionales erunt.

Vt

VT si est A ad B, sicut C ad D, erit etiam permutando vt A ad C, ita B ad D, quæ est alterna seu permutata ratio de qua def. 13.

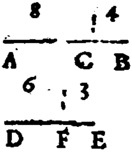
E	F	G	H
18	9	8	4
6	3	4	2
A	B	C	D

Nam cum magnitudines B & D sint similes partes, & pari modo ac numero contentæ in totis A & C (hoc enim est esse in eadem *a* ratione) necesse *a* def. 5.
est vt tota inter se ita se habeant sicut illę partes inter se; cum totorum magnitudo & proportio, ex partium magnitudine & proportione consurgat.

Aliter: Sumptis E, F, ipsarum A, B, & G, H, ipsarum C, D, quibuscunque æquemultiplicibus, erunt multiplices E, F, G, H, in eadem ratione cum submultiplicibus *a* A, B, C, D. Quare E, F, G, H erunt *a* 15.
proportionales, ac proinde si E maior, *b* *b* def. 5.
minor, aut par sit ipsi G, talis quoque erit F ad H. Sed E, F, ipsarum A, B, & G, H, ipsarum C, D, sunt vtcunque æquemultiplices. Est ergo vt A *c* ad C, ita B ad D. *c* def. 5.

Propoſitio 17. Theore.

Si compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, & diuiſa proportionales erunt.



SInt compoſitæ magnitudines A B, C B, D E, F E, proportionales, hoc eſt, vt A B ad C B, ita D E, ad F E; Dico fore etiam diuidendo, vt A C ad C B, ita D F ad F E. Quia enim tota A B, D E, ſimiliter continent partes C B, F E, ſi eędem illæ partes è ſuis ſingulæ totis auferantur, ſimiliter rurſus in reſiduis A C, D F, continebuntur. *Atque ita probata eſt.* Proportio per diuiſionem *de qua def.* 16.

Propoſitio 18. Theore.

Si diuiſa magnitudines proportionales fuerint, & compoſita proportionales erunt.

Nam

NAm in præcedente exemplo, quia partes A C, D F similiter continent ipsas C B, F E; si hæ illis adiungãtur, tota A B, D E rursus similiter continebunt suas partes C B, F E. *Atque ita probata est* proportio per compositionem, *de qua def.* 15.

Corollarium.

Ex his iam demonstrari potest proportio ex conuersione rationis: *Nam in eodem exemplo, est*

Vt AB ad CB ita DE ad FE.
Et diuid. Vt AC ad CB ita DF ad F E.
Et conue. Vt CB ad A C ita F E ad DF.
Ergo cõp. Vt AB ad AC ita DE ad DF.
Quæ postrema est conuersio rationis iuxta definitionem 16.

Hæc tamen proportio etiam per se probari potest. Nam

		12		4		9		3
Quia est,	Vt	A	ad	B	ita	C	ad	D.
Erit conuersio-		12		8		9		6,
ne rationis,	Vt	A	ad	E	ita	C	ad	F.

Cum enim in hac proportione iuxta def. 16. antecedens ad differentiam terminorum comparetur, si differentia terminorum addantur consequentibus, antece-

tecedentia cum consequentibus exæquabuntur; deinde vero si à consequentibus ita exæquatis auferantur similes partes B & D, necesse est vt residua, seu differentiæ terminorum, quæ sunt E & F, similiter contineantur in totis A & C; quod dicit proportio ex conuersione rationis.

Propositio 19. Theore.

Si fuerit vt tota ad totam, ita ablata ad ablatam, & reliqua ad reliquã erit vt tota ad totam.

E	4	F	2
C	8	D	4
A	12	B	6

VT si ablatæ C & D sint inter se in ea ratione, qua totæ A & B, erũt etiam residuę E & F, vt totæ A & B. Cum enim ablata C ita maior sit ablatâ D, vt tota A, totâ B; si E residua non esset eodem modo maior residuâ F, aliter essent maiores omnes partes omnibus partibus, quam totum toto: quod fieri non potest.

Propositio 20. Theore.

Si fuerint tres magnitudines, & aliæ totidem, bina & bina in eadem ratione, ex æquo autem prima maior fuerit quam tertia; erit & quarta maior quam sexta, & si æqualis, æqualis; si minor, minor.

HÆc propositio facillime intelligetur ex ijs quæ dicemus ad prop. 22. quæ huic valde est affinis; ex præcedentibus tamen propositionibus sic etiam demonstrabitur.

12	9	6	8	6	4
A	B	C	D	E	F

Sint tres magnitudines A, B, C, & totidem aliæ D, E, F, binæ & binæ in eadem ratione, hoc est vt A ad B, ita D ad E & vt B ad C ita E ad F. Dico si A maior, minor, aut par sit ipsi C, talem etiam fore D respectu ipsius F. Sit primum A maior quam C: Quia ergo A maior est quam C, & datur alia quædam B, habebit A ad B, maiorem *a* rationem quam C, ad eãdem B. *a* 8.

Est

12	9	6	8	6	4
A	B	C	D	E	F

Est autem ex positis vt A ad B, sic D ad E & vt B ad C ita E ad F: ergo conuertendo, est vt C ad B ita F ad E; quare D ad E maiorem *b* habet rationem quam F ad E; maior ergo est *c* D quam F. Similiter procedet demonstratio si A ipsi C aut æqualis ponatur, aut minor. Si ergo fuerint tres magnitudines, &c.

b 13.
c 11.

12	9	6	3	8	6	4	2
A	B	C	G	D	E	F	H

Neque tantum vera est propositio si ternæ magnitudines sumantur, sed etiamsi quaternæ & quouis alio numero; semper enim si prima in prioribus minor, maior, aut æqualis est vltima, ita etiam erit in posterioribus. Vt si ternis magnitudinibus A, B, C, & D, E, F, addantur G & H, sitque C ad G, sicut F ad H tunc omissis B & E erunt A C G, & D, F, H, ternæ & ternæ magnitudines & de his procedet demonstratio prius facta.

Pro-

Propositio 21. Theore.

Si fuerint tres magnitudines, & alia totidem, bina & bina in eadem sed perturbata ratione, ex æquo autem prima maior fuerit quam tertia, erit etiam quarta maior quam sexta: si minor, minor; si æqualis, æqualis.

HÆc propositio planius intelligetur ex 23. à qua parum differt.

18	12	4	27	9	6
A	B	C	D	E	F

Aliter: Sint tres magnitudines A, B, C, & totidem aliæ D, E, F, binę & binæ in eadem, sed perturbata ratione; hoc est vt A ad B, sic E ad F & vt B ad C, sic D ad E. Dico, si A maior sit, minor, aut æqualis ipsi C, talem quoque fore D respectu ipsius F. Sit prima A maior, ipsa C. Cum igitur A sit maior quam C, & detur alia quædam B, habebit a A ad B maiorem rationem quam C ad eandem B; sed ex positis vt A ad B, ita est E ad F, & vt B ad C ita D ad E, ergo conuertendo a 8.

do vt C ad B, ita E ad D: quare E ad F maiorem habet rationem, quam b E ad D. Minor est c ergo F quam D. Similiter ostendetur si A minor sit, aut æqualis ipsi C, talem quoque fore D respectu ipsius F. Si ergo fuerint tres magnitudines, &c.

18	12	4	27	9	6
A	B	C	D	E	F

b 13.
c 10.

Propositio 22. Theore.

Si fuerint quotcunque magnitudines, & aliæ totidem bina & bina in eadem ratione sumantur, erunt quoque ex æquo in eadem ratione.

Sint quotcunque magnitudines A, B, C, & aliæ totidem D, E, F in eadem ratione, hoc est vt A ad B, ita D ad E, & vt B ad C, ita E ad F. Dico ex æquali fore illas in eadem ratione: hoc est, fore A ad C, sicut D ad F. Nam quia tota A & D similiter continent magnitudines B & E, & partes C & F similiter continentur in ipsis B & E, necesse est vt eædem partes C & F similiter contineātur in totis A & D. Atque

12	9	6	8	6	4
A	B	C	D	E	F

ita

ita probata manet. Proportio ex æquo ordinata *de qua def. 19. Manifesta item hinc fit veritas prop. 20. vt ibi polliciti sumus:*

Aliter: Quia ostensum *a* est si A superat C, D quoque superare F, & si minus, minus, &c. ita quoque *b* erit in æquemultiplicibus: hoc autem est quatuor magnitudines A,C,D,F, esse proportionales. *a* 20. *b* def. 5.

Propositio 23. Theore.

Si fuerint tres magnitudines, & aliæ totidem binę & binæ in eadem sed perturbata ratione, erunt etiam ex æquo in eadem ratione.

18	12	4	27	9	6
A	B	C	D	E	F

VT si fuerit iuxta def. 20. & prop. 21. sicut A ad B, ita E ad F, & sicut B ad C, ita D ad E; erit ex æquo vt A ad C, ita D ad F. Qua enim proportione C minuitur infra B & per consequens infra A, eadem proportione D augetur supra E, & per consequens supra F; quare A ita maius erit ipso C sicut D ipso F.

Ali-

Aliter: cum probatum sit; si A superat C, D quoque superare F, aut minus esse, &c. ita quoque erit in æquemultiplicibus. Quare est ex æquo vt A ad C, ita D ad F. *Atque hac est* Proportio ex æquo perturbata, *de qua def. 20.*

18	12	4	27	9	6
A	B	C	D	E	F

Propositio 24. Theore.

Si prima ad secundam fuerit vt tertia ad quartam, quinta autem ad secundam eam habeat rationem quã sexta ad quartam, habebit composita ex prima & quinta eam rationem ad secundam, quàm tertia & sexta simul ad quartam.

QVia enim secunda B est talis pars singularum A & E primæ & quintæ, qualis est quarta D singularum C & F, erit quoque B talis pars collectarum A & E, qualis est ipsarum C & F pari numero & modo collectarum.

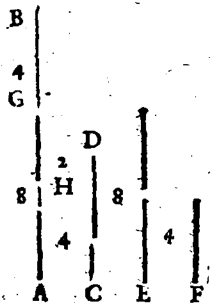
10	4	2	6	3	15
E	A	B	C	D	F

Pro-

Propositio 25. Theore.

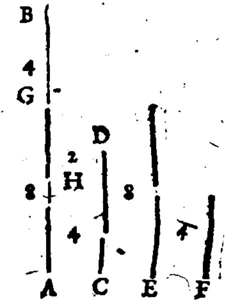
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima cum minima duabus reliquis erunt maiores.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B, C D, E, & F. Dico A B maximam, cum minima F, maiores esse duabus simul reliquis C D & E. Sumatur enim A G æqualis ipsi E, & C H ipsi F.



Quia ergo est vt A B ad C D ita E ad F, estque A G, ipsi E, & C H ipsi F æqualis, erit vt A B ad C D, ita A G ad C H; hoc est vt tota A B ad totam C D, ita ablata A G ad ablatam C H reliqua igitur G B *a* erit ad reliquam D H vt tota ad totam: Est autem *a* 19.

A B



AB maior quam CD, ergo maior quoque B G quã D H. Cumque A G ipsi E, & C H ipsi F æqualis sit; pares erunt A G & F, ipsis C H & E. Iam vero quia ipsis A G & F additur G B, ipsis vero C H & E additur D H minus quam G B, erunt post additionem A B & F maiores, quam C D & E. Si igitur quatuor magnitudines, &c.

Quæ sequuntur propositiones non sunt Euclidis, sed ex Pappo Alexandrino, & alijs adiecta; quarum certe nõ est magna necessitas si antecedẽtes rite sint percepta.

Propositio 26. Theore.

Si prima ad secundam maiorem habuerit rationem quam tertia ad quartam, habebit conuertendo secunda ad primam minorem rationem, quam quarta ad tertiam.

Hoc

8	4		5	3
A	B		C	D

Hoc est si A est totum maius respectu ipsius B, quam C respectu quartæ D: erit B minor pars respectu ipsius A, quam D respectu ipsius C, quod per se est euidens, *& continetur in prop. 4.*

Propositio 27. Theore.

Si prima ad secundam maiorem rationem habuerit, quam tertia ad quartam; habebit permutando prima ad tertiam maiorem rationẽ, quàm secunda ad quartam.

8	4		5	3
A	B		C	D

Quia enim D ponitur pars maior totius C, quam B totius A; non potest pars B supra partem D tantum excessum habere, quantum habet totum A supra totum C.

Hanc quoq; palam est prop. 16. cõtineri.

Propositio 28. Theore.

Si prima ad secundam maiorẽ habuerit rationẽ, quam tertia ad quartam, habebit prima cum secunda maiorem rationem ad secundam, quam tertia & quarta ad quartã.

Nam

NAm quia B eſt minor pars ipſius A, quam D ipſius C; ſi vtraq; ſemel addatur, tam B ipſi A, quam D ipſi C, adhuc B minor pars erit totius E, quam D totius F.

$$\overbrace{\begin{array}{cc} 8 & 4 \\ A & B \end{array}}^{E\ 12} \qquad \overbrace{\begin{array}{cc} 5 & 3 \\ C & D \end{array}}^{F\ 8}$$

Continetur prop. 18.

Propoſitio 29. Theore.

Si prima & ſecunda ad ſecundam maiorem habeant rationem, quam tertia & quarta ad quartam; habebit etiam diuidendo prima ad ſecundam maiorem rationem, quã tertia ad quartam.

NAm in exemplo ſuperiore. Quia E eſt maius totum reſpectu partis B; quam F reſpectu ipſius D, ſi vtraque pars ex ſuo toto tollatur, A reſiduum ex E, maius erit reſpectu ipſius B, quam C reſiduum ex F, reſpectu ipſius D.

Continetur prop. 17.

Propositio 30. Theore.

Si prima & secunda ad secundam maiorem rationem habeant, quam tertia & quarta ad quartam, habebunt per conuersionem rationis prima & secunda ad primam minorem rationem, quam tertia & quarta ad tertiam.

NAm si totum E maius est respectu ipsius B, quam F respectu ipsius D: B minor erit pars ipsius E, quam D totius F, quare residuum A maior erit pars totius E, quam residuum C totius F. Hoc autem idem est ac si dicas totum E minorem habere rationem ad primam A, quam totum F ad tertiam C.

Continetur prop. 19.

Propositio 31. Theore.

Si sint tres magnitudines, & totidem alia, habeatq́; prima priorum maiorem rationem ad secundam, quã prima posteriorum ad secundam, secunda item priorum maiorem habeat ad tertiam, quam in posterioribus secunda ad tertiam, etiam ex æquo habebit prima priorum maiorem rationem ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiam.

Nam si magnitudines illæ sint A B C, D E F,

16	8	4	9	5	3
A	B	C	D	E	F

permutando eas proportiones quæ in propositione ponuntur,

Erit maior A ad D quã B ad E.
Et eadẽ ratiõe maior B ad E quã C ad F.
Quare multo maior A ad D quã C ad F.
Ergo permut. maior A ad C quã D ad F.

Continetur prop. 20. & 22.

Pro-

Propositio 32. Theore.

Si sint tres magnitudines, & totidem alia, sitq; maior ratio prima priorum ad secundam, quam secunda posteriorum ad tertiam: Item secundę priorum ad tertiam, maior quam prima posteriorum ad secũdam: erit etiam ex ęquo maior ratio prima priorum ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiam.

16	8	4	9	6	4	6	9
A	B	C	D	E	F	G	H

Sint illæ magnitudines A, B C D, E, F, sitque præterea vt D ad E, ita G ad C, & vt E ad F, ita H ad G, collocabunturque ternæ & ternæ magnitudines D, E, F; H, G, C in eadem sed perturbata ratione; eritque *a* ex æquo vt D ad F ita H ad C. *a* 23.

Nunc vero quia est vt D ad E, ita G ad C, maior erit *b* ratio ipsius B ad C, quam G ad C, ideoque B maior est quã *b* hyp.

16	8	4	9	6	4	6	9
A	B	C	D	E	F	G	H

G, & per consequens maior ratio est ipsius A ad G quam ad B: est autem A ad B, maior quam E ad F, multo ergo maior est A ad G quam E ad F, Rursus quia est H ad G, vt E ad F, maior erit A ad G, quam H ad G; quare A maior est quam H, & per consequens maior est A ad C, quam H ad eandem C. Sed ostensum fuit esse vt H ad C, ita D ad F, maior est ergo ratio ipsius A ad C, quam ipsius D ad F: quod est propositum.

Continetur prop. 21. & 23.

Propositio 33. Theore.

Si tota ad totam maiorem rationem habuerit, quam ablata ad ablatā, habebit & reliqua ad reliquam maiorem rationem quam tota ad totam.

E 8	F 3
C 4	D 3
A 12	B 6

VT si totum A ad totum B maiorem habeat rationem, quam ablatum C, ad ablatum D;

ma-

maiorem habebit residuum E ad residuũ F, quam totum A, ad totum B. Nam sicut totum A est maius toto B, ita omnes simul partes, omnibus partibus. Quia ergo pars C minus superat partem D, quam totum A totum B residua pars E debet magis superare residuam F, quam totum A totum B, vt excessu maiore ipsius E compensante defectum ipsius C, partes C & E ita sint maiores partibus D & F, sicut totum A maius est toto B.

Continetur prop. 18.

Propositio 34. Theore.

Si sint quotcunque magnitudines, & alia totidem, sitque maior ratio prima priorum ad primam posteriorum, quam secunda ad secundã, & hac maior quam tertia ad tertiam, & sic deinceps: habebunt omnes simul priores, ad omnes simul posteriores, maiorem rationẽ, quam omnes priores relicta prima ad posteriores omnes prima similiter relicta; minorem autem quam *prima priorum ad primam posteriorum; maiorem tamen quam vltima priorum ad vltimam posteriorum.*

12	8	4	6	5	3
A	B	C	D	E	F

Sint quotcunque magnitudines A B C, & aliæ totidem D E F, ita se habentes vt proponitur.

Quia ergo maior est A ad D quã B ad E.
Erit permuta. maior A ad B quã D ad E.
Et cõponen maior AB ad B quã DE ad E.
Et permut. maior AB ad DE quã B ad E.

Quia ergo maior est tota A B ad totam D E, quam ablata B ad ablatam E,
a 32. maior erit *a* reliqua A ad reliquam D, quam tota A B ad totam D E.

Eadẽ ratione maior erit B ad E quã tota B C ad totam E F.
Multo ergo maior est A ad D quã B C ad EF.
Et permuta. maior A ad BC quam D ad EF.
Et cõpo. maior ABC ad BC quã DEF ad EF.
Et permu. maior ABC ad DEF quã BC ad EF.

quod erat primo loco propositum. Nunc vero quia maior est tota A B C, ad totã D E F, quam ablata B C ad ablatam E F, erit & maior reliqua A ad reliquam D,
b 32. quam tota A B C *b* ad totam D E F; quod erat secundum,

De-

Deniq; quia maior eſt B ad F. quã C ad F.
Erit permuta. maior B ad C quã E ad F.
Et compo. maior BC ad C quã E F ad F.
Et permut. maior BC ad E F quã C ad F.
Oſtenſa eſt autem maior A B C ad D E F
quam B C ad E F.
Multo ergo maior eſt A B C ad D E F
quam C ad F.
Quod erat tertio loco propoſitum.

Eadem methodo procedetur ſi quaternæ proponantur magnitudines, aut aliæ plures quocunque numero.

EVCLIDIS
Elementorum
LIBER VI.
Definitiones.

1 SImiles figuræ rectilineæ sunt, quæ singulos angulos singulis æquales habent, & latera circa æquales angulos proportionalia.

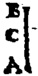
VT triangula A B C, D E F, erunt similia, si singulos angulos singulis habeant pares, hoc est si angulus A, angulo D, anguli vero B & C, angulis E, & F sint æquales; item si latera circa æquales angulos sint proportionalia, hoc est si sit vt A B ad A C, ita D E ad D F hæc enim latera sunt circa æqua-

aquales angulos A & D, & vt A B ad B C; ita D E, ad E F; ac denique vt A C ad C B, ita D F ad F E.

2 Reciprocæ figuræ ſunt cum in vtraque figura antecedentes & conſequentes termini rationum fuerint.

HOc eſt figuræ reciprocæ ſunt cum in vna figura reperitur antecedẽs vnius proportionis, cuius conſequens eſt in ſecunda; & cum è contra antecedens alterius ſimilis proportionis eſt in ſecunda figura, cuius conſequẽs eſt in prima; vt triangula A B C D E F; erunt reciproca, ſi fuerit vt A B ad D F; ita D E, ad A C, tunc enim antecedens primæ proportionis reperitur in triangulo primo A B C & in altero eſt conſequens, at ſecundæ proportionis antecedens eſt in ſecundo triangulo, conſequens in primo.

3 Extrema ac media ratione recta linea ſecta eſſe dicetur, cum eſt vt tota ad maius ſegmentum, ita maius ſegmentum ad minus.



SIc recta A B, erit ſecta in C, extrema ac media ratione, ſi fuerit vt tota A B ad maius ſegmentum A C, ita A C maius, ad C B minus ſegmentum.

4 Altitudo cuiusque figurę est linea perpendicularis à vertice ad basim deducta.

VT trianguli A B C altitudo est A D, ducta perpendiculariter à vertice ad basim B C. Itē trianguli E F G, altitudo est E H, extra triangulum cadens in basim F G, productam in H.

5 Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam rationem effecerint.

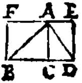
Quantitates rationum non sunt alia quam numeri à quibus denominatur proportio: sit 3. est quantitas proportionis triple 2. duple, &c. Ratio ergo ex rationibus componitur, cum denominatores proportionum inter se multiplicati aliquam proportionem efficiunt; vt ex ratione dupla & tripla componitur sextupla; nam denominator dupla qui est 2. & denominator tripla qui est 3. inter se multiplicati faciunt 6. denominatorem proportionis sextupla composita.

Pro-

Propositiones.

Propositio 1. Theore.

Triangula & parallelogramma, quorum eadem sit altitudo, habent se vt bases.



Sint triangula A B C, A C D, habentia eandẽ altitudinem *a* A C, item parallelogramma F C C E, habentia eandem altitudinem A C. Dico illa inter se habere proportionem quam habent bases B C, & C D. Cum enim triangula sint constructa intra parallelas B D, E F, (sicut possunt constitui inter parallelas quæcunque alia triangula eiusdem altitudinis (si bases C B, & C D, sint ęquales, erunt & triangula *b* super illis basibus æqualia Quod si basis C B, maior esset, aut minor basi C D, esset quoque triangulum A B C; maius aut minus triangulo A C D; & sic quoque erit sumptis æquemultiplicibus tam basium quam triangulorum; nam

a def. 4.

b 38. 1.

nam perinde eſt conferre ſingula ad ſingula, atque pariter multiplicata ad pariter multiplicata, quemadmodum definit. 5. lib. 5. explicatum eſt. Sunt ergo triangula A B C, A C D, inter ſe vt baſes C B, & C D.

Iam vero ſi triangula ſint vt baſes, etiã
b 34. 1. parallelogramma: *b* nam hæc ſunt dupla triangulorum, partes autem æquemulti-
c 15. 5. plicium *c* in eadem ſunt ratione atque ipſa æquemultiplicia.

Propoſitio 2. Theore.

Si in triangulo ducatur recta lateri parallela; ſecabit proportionaliter reliqua eiuſdem trianguli latera. Et ſi trianguli latera ſecta ſint proportionaliter recta per ſectiones ducta tertio lateri erit parallela.

IN triangulo A B C, ducatur D E, ipſi B C, parallela; quo facto dico latera A B, A C ſecta eſſe proportionaliter; hoc eſt, eſſe vt A D, ad D B; ita A E, ad E C. Du-
a 37. 1. ctis enim rectis B E, C D, *a* erunt triangula B E D, D C E, in eiſdem parallelis æqua-

æqualis, *b* & habebunt proinde eandem rationem ad triangulum A D E. *c* Sed quam proportionem habet triangulum A D E ad D E B, eandem habet basis A D, ad D B (cum triangula sint in eadem altitudine, quam ostenderet perpendicularis quæ ex E duci potest ad A B,) & quam proportionem habet idem triangulum A D E, ad ipsum C D E, eandem habet basis A E, ad basim E C; Cum ergo ostensum sit ambo triangula D B E, D E C, eandem habere rationem ad ipsũ A D E; bases quoque B D, E C, eandem habebunt proportionem ad latera D A & E A. *b* 7. 5. *c* 1.

Iam vero si latera A B, A C, proportionaliter secta sint, cum sit ob eandem altitudinem vt A D ad D B, ita triangulum A D E *d* ad ipsum D E B; & vt A E ad E C ita A D E ad ipsum E D C; sicut in eadem ratione ponitur esse latera A D, D B, & A E, E C; erunt etiam triangula D B E, D E C in eadem ratione ad triangulum A D E; Erunt ergo *e* triangula D B E, D E C inter se æqualia: cumque habeant eandem basim D E, erunt *f* constituta inter parallelas: parallelæ ergo sunt B C & D E. Si ergo in triangulo, &c. *d* 1. *e* 9. 5. *f* 39. 1.

Pro-

Propoſitio 3. Theore.

Si trianguli angulus ſecetur bifariã, & recta angulum ſecans ſecet & baſim, habebunt baſis partes eandẽ rationem quam reliqua trianguli latera. Et ſi partes baſeos eandem habeant rationem quam reliqua inter ſe latera, recta à vertice ad ſectionem baſeos ducta trianguli angulum ſecabit bifariam.

TRianguli A B C angulus B A C, biſecetur per rectam A D; dico eſſe vt B D ad D C, ita B A, ad A C: per C, enim ducatur C E ipſi A D parallela, cui B A producta occurrat in E. Quia ergo in triangulo B E C, recta D A ipſi C E, eſt parallela, erit ſicut B D, *a* ad D C, ita B A, ad A E, ſeu ad A C, quæ ipſi A E æqualis eſt; Si ergo trianguli angulus, &c. eſſe autem rectam A C æqualem ipſi A E, ſic oſtendo. Quia recta

a 2.

A C

A C tangit parallelas A D, E C, anguli *b* b 29. 1.
alterni C A D, A C E sunt æquales, *c* & c 29. 1.
quia recta A E, tangit easdem parallelas,
angulus externus B A D interno & opposito A E C, est æqualis: sunt ergo anguli A E C, A C E, æquales; cum ostensi sint æquales angulis æqualibus B A D,
& D A C; quare latera A C, A E, *d* d 6. 1.
sunt ęqualia.

Iam vero si est vt B D ad D C, ita
B A, ad A C, *e* ductâ vt prius C E, paral- e 2. 6.
lelâ ipsi A D, erit vt B D, ad D C, ita
B A ad A E; *f* æquales ergo sunt A E & f 9. 5.
A C, *g* quare anguli quos subtendunt ni- g 5. 1.
mirum A E C, A C E sunt æquales: sed hos ostendemus vt prius esse æquales angulis B A D, D A C; sunt ergo anguli B A D, D A C, pares inter se; ac proinde angulus B A C sectus est bifariam. Si ergo trianguli angulus, &c.

Propositio 4. Theore.

Æquiangulorum triangulorum latera circa ęquales angulos sunt proportionalia, & latera æqualibus angulis subtensa sunt homologa.

Trian-

TRiangula A B C, D E F ſint æquiangula, ita vt anguli A & D, B & E, C & F, ſinguli ſingulis ęquales ſint. Si igitur lateribus D E, D F circa angulum D, ſumantur circa æqualem angulum A æqualia latera A G, A H, ducaturque H G, triangula A G H, D E F erunt iuxta 4. 1. & rectæ
a 28. 1. H G, B C, *a* parallelæ, cum angulus internus C, ęqualis ſit ipſi F hoc eſt angu-
b 2. lo externo H G A. Erit ergo *b* vt A B ad AH ſeu ad D E ita *A* C ad *A* G ſeu ad D F. Erit, inquã, Vt A B ad D E ita A C ad D F.
c 16. 5. Et *c* permut Vt A B ad A C ita D E ad D F.

Quod eſt latera circa æquales angulos eſſe proportionalia. Eodem modo ſi ſumantur B K, B L ipſis E D, E F æqualia erunt triangula B K L, D E F, iuxta 4. 1. & K L, A C, parallelæ, & eadem methodo oſtendetur latera circa æquales angulos B & E *proportionalia; ſicut etiã* circa ęquales angulos C & F, ſi ad angulum C fieret ſimiliter triangulum æquale ipſi E F D. Sunt autem in his proportionibus latera homologa quæ ęqualibus angulis ſubtenduntur, nam A E & D E, quæ ſunt ſub æqualibus angulis C & F, ambo ſunt antecedentia; & alia ſimiliter. Æquiangulorum igitur, &c.

Pro-

Propositio 5. Theore.

Si duo triangula latera proportionalia habuerint, erunt æquiangula; eosq́ue angulos habebunt æquales, quibus homologa latera subtenduntur.

Est conuertens præcedentis. Vt si triangula A B C, D E F, habent latera proportionalia hoc est, si sit vt A B ad A C, ita D E ad D F, &c. erit etiam angulus A angulo D, æqualis, &c. vt vult propositio. Constituantur enim ad rectam B C anguli G B C, G C B, ipsis E, & F, æquales; *a* vt proinde etiam angulus G, angulo D, sit æqualis, vnde sequetur triangula B G C, D E F esse æquiangula, *b* & eorum latera proportionalia. Tunc vero quia D E & D F habent eandem proportionem ad A B & A C, quam ad G B & G C, *c* necesse est A B ipsi G B, & A C, ipsi G C æqualẽ esse, cumq. B C sit cõmunis, tota trian-

a 38. 1.
b 4.
c 9. 5.

d 8. 1. triangula *d* A B C, B G C sunt æqualia, & æquales anguli omnes. Cum ergo A B C, & D E F eidem tertio B G C, sint æquiangula, inter se quoque erunt æquiangula; sunt vero illi æquales anguli, quibus homologa latera subtenduntur: nam anguli A & G æquales sunt, quibus commune B C subtensum est, &c. Si ergo duo triangula, &c.

Propositio 6. Theore.

Si duo triangula vnum habeant æqualem angulum, & latera circa eum proportionalia, erunt æquiangula, angulosq́ habebunt æquales quibus æqualia latera subtenduntur.

IN triangulis A B C, D E F, si æquales sint anguli A & D, sitq́ue vt A B ad A C, ita D E ad D F, erunt & reliqui anguli æquales, &c. constituantur enim ad rectam E F, anguli E F G, G E F, æquales ipsis B, & C, vt propositione superiori. Quia ergo æquiangula sunt

A B C,

A B C, G E F, *a* erunt A B, A C, & G F, G E, proportionalia: sed sunt etiam proportionalia A B, A C, & D E, D F, *b* sunt ergo latera D E, D F, ipsis G F, G E æqualia. Cumque *c* basis E F sit communis, tota triangula D E F, E F G æqualia & æquiangula sunt. Quia ergo triangula A B C, D E F, vni tertio E F G sunt æquiangula, inter se quoque erunt æquiangula, &c.

a 4.
b 11. 5.
c 8. 1.

Propositio 7. Theore.

Si duo triangula vnum angulum æqualem, & latera circa alteros angulos habeant proportionalia, vtrumque vero angulorum reliquorum aut minorem recto; aut non minorem; æquiangula erunt triangula, & angulos circa quos latera sunt proportionalia, habebunt æquales.

Hoc est; si duo triangula A B C, D E F habeant vnum angulum, puta, A ipsi D æqualem, circa alteros vero puta B, & E, latera sint proportionalia, ac denique si tertij anguli C & F, sint vterque minor, aut

aut vterque non minor recto erunt; hęc triangula æquiangula. Sint primum tertij anguli C & F vterque minor recto: quod si tunc negas angulos A B C, D E F, circa quos latera sunt proportionalia, esse æquales, sit maior A B C in quo constituatur A B G, ipsi D E F æqualis, cumque in triangulis A B G, D E F, duo anguli D & E, duobus A, &
a 32. 1. A G B, sint æquales, a tertius F, tertio A B G erit æqualis, ac proinde tota triãgula æquiangula. b Est ergo vt D E, ad
b 4. D F, vel vt A B, ad B C, (nam ex hypothesi eadem est inter vtraque ratio)
c 11. 5. ita A B ad B G; esset c ergo sicut A B,
d 9. 5. ad B C, ita A B, ad B G, d quare rectæ
e 5. 1. B C, B G, essent æquales e & cõsequenter pares erunt anguli B C G, B G C; & cum B C G positus sit minor recto, etiã B G C maior erit recto: si ergo B G C, est minor recto, angulus B G A maior
f 13. 1. f erit recto, quem tamen ostendimus ęqualem esse angulo F, hoc est, minorem recto, cum angulus F positus sit recto minor: idem ergo angulus B G A esset maior & minor recto, quod est absurdũ. Non possunt ergo anguli A B C, B E F, esse inæquales, quare & tertius F, tertio

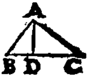
A C B

A C B æqualis erit, & triangula A B C, D E F, æquiangula.

Quod si tertij anguli C & F, ponantur vterque non minor recto, negetur tamen angulos E & A B C, esse æquales rursus probabitur rectas B C, B G, & angulos B G C, B C G, esse æquales; & cum positum sit hunc non esse minorem recto, nec ille esset minor recto *g* quod est absurdum nam in triangulo B G C, essent duo anguli recti, aut rectis maiores. Si duo ergo triangula, &c. *g* 17. 1.

Propositio 8. Theore.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto in basim ducta sit perpendicularis, quæ ad perpendicularem sunt triangula, tum toti triangulo, tum inter se sunt similia.



IN triangulo A B C sit angulus B A C rectus, & ex A ad basim B C ducatur perpendicularis A D. Quia ergo in triangulis A B C, A D C, anguli B A C, A D C recti sunt, & angulus C communis, *a* tertius A B C tertio *a* 32. 1.

tio D A C erit æqualis; ac proinde triangula A B C, ADC sunt æquiangula, *b* & latera circa æquales angulos habent proportionalia, ideoque sunt *c* similia. Non aliter ostendetur triãgulum A D B esse etiam simile toti triangulo A B C, ac proinde sunt etiam similia inter se triangula A B D, A D C.

b 4.

c def. 1.

Corollarium.

Ex hoc manifestum est perpendicula. ab angulo recto ad basim ductam, esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta: nam per 4. ostendetur esse ut C D, ad D A, ita D A ad D B, quod est rectam D A esse mediam proportionalẽ inter partes basis C D, D B.

Propositio 9. Proble.

A data recta linea imperatam partem auferre.

Ex recta A B auferenda sit pars tertia. Ducatur ergo ex A recta A C, faciens angulũ cum A B vtcunque;

cum

tum ex A C sumatur quæuis pars puta A D, ac duæ aliæ addantur æquales D E, E C, iungaturque C B; cui parallela fiat D F. Eritque ablata A F, pars tertia ipsius A B. Nam quia in triangulo A B C ducta est D F, ipsi B C parallela, a erit sicut A D ad D C, ita A F ad F B, b & componendo sicut A C ad A D ita A B ad A F; est autem A D pars tertia ipsius A C, ergo A E est etiam pars tertia ipsius A B. A data ergo recta, &c.

a 2.
b 15. 5.

Propositio 10. Proble.

Datam rectam in sectam similiter secare, vt secta fuerit data altera recta.

Data recta A B secta sit in C & D oporteatque rectam A E (quæ applicetur ad A vt cũ recta A B angulum vtcunque constituat) in similes partes secare. Iunctâ rectâ B E ducâtur C F, D G, ipsi B E parallelæ & factum est quod petitur. Nã quia in trianngulo A B E ductæ sunt C F, D G, lateri B E parallelæ, a sectiones laterũ A B, A E sunt proportionales. Cõponendo ergo ad diuidendo vt supra, ostendetur omnẽ eam proportionem,

a 2.

nem, quæ est inter partes ipsius A B, eandem quoque esse inter partes lineæ A E. Datam ergo rectam, &c.

Propositio 11. Proble.

Datis duabus rectis tertiam proportionalem inuenire.

DAtæ rectæ A B, A C angulum quemuis constituant, puta B A C, iungaturque recta C B. Mox productis lateribus A B, A C, sumatur ipsi A C æqualis B D, ducaturque D E ipsi B C parallela; eritque recta C E tertia proportionalis quæsita. Nam quia B C ipsi
a 2. D E est parallela, *a* erit vt A B ad B D, ita A C ad C E; est autem B D ipsi
b 7. 5. A C æqualis; *b* Est ergo vt A B ad A C, ita A C ad C E; quod est rectam C E esse tertiam proportionalem.

Propositio 12. Proble.

Tribus datis rectis quartam proportionalem inuenire.

Duæ

DVę quælibet ex datis, puta A B & B C, in directum collocentur, tertia vero A D, cum ipsa A C angulum vtcunque constituat, iunctâque rectâ B D, agatur ipsi parallela C E; eritque recta D E quarta proportionalis quæsita. Nam quia ipsi C E parallela est D B, *a* erit vt A B ad B C, ita A D, ad D E. Tribus ergo datis A B, B C, A D, inuenta est quarta proportionalis D B.

Propositio 13. Proble.

Datis duabus rectis mediam proportionalem inuenire.

DAtæ rectæ A B, B C in directum collocentur, & super A C constituatur semicirculus A D C: nam ad punctum B excitata perpendicularis vsque ad sectionem semicirculi in D; erit media proportionalis quæsita. Ductis enim rectis A D, D C, *a* erit angulus A D C, rectus, & à vertice D ad basim A C ducta perpendicularis D B. *b* Quare inter partes baseos A C, media proportionalis est D B.

a 31. 3.
b 8.

Propoſitio 14. Theore.

Æqualium & vnum vni angulum æqualem habentium parallelogrãmorum reciproca ſunt latera circa æquales angulos: Et quorum latera circa vnum angulum æqualem ſunt reciproca, ea parallelogramma ſunt æqualia.

Sint A E, E C, parallelogramma æqualia, habentia angulos ad E æquales, atque ita collocentur, vt latus B E, lateri D E iaceat in directum, ac proinde etiam G E, ipſi E F: nam quia angulus F E B cum ipſo F E D va-
a 13. 1. let *a* duos rectos; & anguli B E D, B E G æquales ponuntur, angulus F E B, cum B E G valent duos rectos ideoque G E F eſt vnica recta. Dico igitur eſſe vt D E ad B E, ita G E, ad E F. Perfecto enim parallelogrammo B F, cum parallelo-
b 7. 5. gramma A E, E C, ſint æqualia, ſicut *b* vnum eorum, puta A E ſe habet ad B F, ita alterum E C ad idem B F; ſed vt A E ad

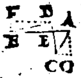
ad F B, ita eſt latus D E, ad B E, & vt E C, ad F B, ita latus G E ad E F, ergo eſt vt D E ad B E, ita *c* G E ad E F. *c* 11. 5.
Quod erat demonſtrandum.

E conuerſo autem ſi ponantur latera circa æquales angulos ad E eſſe reciproca, oſtendetur parallelogramma eſſe æqualia, nam ſi eſt vt D E ad B E *d* ita *d* 1.
G E ad E F; erit etiam vt D E ad B E, ita A E ad F B; item vt G E ad E F, ita E C ad F B, *e* quare eſt etiam vt A E ad *e* 9. 5.
F B, ita E C ad idem F B. Parallelogrāma igitur A E, E C, ſunt æqualia.

Propoſitio 15. Theore.

Æqualium & vnum vni angulum æqualem habentium triangulorum reciproca ſunt latera. Et quorum latera circa æquales angulos ſunt reciproca, ea triāgula ſunt æqualia.

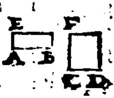
PAtet propoſitio ex præcedente; nam triangula ſunt dimidium parallelogrammorum, quæ ſub duobus lateribus triangulorum æquales angulos continentibus describi possunt; quæ ergo est ratio parallelogrãmorum & laterum, eadem est triangulorum; vt si sint triangula æqualia A B C; B D E, quibus ęquales sint anguli ad B; ponatur B E ipsi A B, in directum, & ex consequenti D B ipsi B C, perficianturque parallelogramma B G, B F. Tunc vero per preced. erunt latera circa angulos ad B, reciproca, quæ eadẽ sunt latera triangulorum. Eadem methodo demonstrabitur posterior pars propositionis.



Propositio 16. Theore.

Si quatuor lineæ proportionales fuerint, erit quod sub extremis continetur rectangulum, æquale ei quod sub medijs. Et si rectangulum sub extremis ęquale est ei quod sub medijs, quatuor illæ lineæ sunt proportionales.

Sint quatuor lineę A B, C D C F, A E, proportionales: quæ ita collocentur vt A E, A B, & C F, C D,

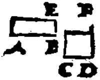


C D, rectos angulos A & C, contineant, compleanturque parallelogramma B E & D F; quæ dico esse æqualia: nam latera circa æquales angulos A & C, reciprocantur ex hypothesi: Sunt *a* ergo parallelogramma æqualia; quorum B E sub extremis lineis, D F sub medijs continetur.

E conuerso si sub iisdem lineis constituantur parallelogramma angulis A & C existentibus rectis, easque parallelogramma sint æqualia; *a* erunt latera circa angulos A & C, reciproca, hoc est erit vt A B ad C D, ita C F, ad A E; si ergo quatuor lineæ, &c. *a* 14.

Propositio 17. Theore.

Si tres rectæ proportionales fuerint, quod sub extremis continetur rectangulum, æquale est quadrato quod à media describitur. Et si quadratum à media descriptum, rectangulo sub extremis est æquale, proportionales sunt tres illæ lineæ.



Sint tres lineę A B C D, B E proportionales; id est, vt A B ad C D, ita C D ad B E, fiatque sub extremis A B, B E rectangulum A E. & à media D C quadratum C F. Quia ergo est vt A B ad C D, ita C D, vel illi æqualis D F, ad B E; erunt quatuor rectæ
a 16. A B, C D, D F, B E proportionales; *a* rectangulum ergo C F quod sub medijs C D, D F, continetur (hoc est quadratum C F) æquale est ipsi A E, quod continetur sub extremis A B, B E.

E conuerso si quadratum mediæ C D rectangulo sub extremis æquale ponatur, ostendetur tres illas lineas esse proportionales, vt in prop. pręce. Si ergo tres rectæ, &c.

Propositio 18. Proble.

Super data recta, dato rectilineo simile, similiterq́; positum describere.

Sit

Sit data recta A B, datum rectilineum C D, in quo ducatur recta E F. Deinde ad puncta A & B rectæ A B constituantur anguli A & A B H æquales ipsis C & C F E; a erit proinde reliquus A H B, reliquo C E F æqualis, & triangula tota A H B, C E F æquiangula, b & latera proportionalia. Amplius ad puncta H & B rectæ H B constituantur H B G, B H G, ipsis E F D, E E D æquales, & proinde reliquus G reliquo D erit æqualis, & triangula, vt prius, æquiangula, lateraque proportionalia. Et factum est quod petitur. Nam cum triangula partialia rectilineorum A G, & C D ostensa sint omnibus angulis æqualia, & omnibus lateribus proportionalia, sunt eæ figuræ similes, & similiter positæ. Quod si rectilineum datum plures angulos quam quatuor contineret, pluries esset repetenda æqualium angulorum constructio, pluribus quam duobus triangulis constitutis, & demonstratio procedet vt prius. Super data ergo recta, &c.

a 23. 1.
b 4.

Propositio 19. Theore.

Similia triangula sunt in duplicata ratione suorum laterum homologorum,

SInt A B C, D E F triangula similia; habentia tres angulos, singulos singulis æquales & latera circa eos proportionalia: ita vt anguli B E & alij alijs sint æquales. Dico triangulum A B C ad D E F, duplicatam *a* habere eam rationem, quæ est inter quæuis latera homologa puta B C, E F. Sumatur enim ipsarum B C, E F, *b* tertia proportionalis B G vt sit sicut B C ad E F, ita E F ad B G; ducaturque A G. Sunt ergo ex positis.

a def. 10. 5.

b 11.

Vt A B ad B C, ita D E ad E F.
Permut. Vt A B ad D E, ita B C ad E F.
Sed Vt B C ad E F, ita E F *c* ad B G;

c conſt.

Triangulorum igitur A B G, D E F latera circa æquales angulos B & E sunt reciproca, *d* ac proinde triangula illa sunt æqualia. Et quia est vt B C ad E F, ita E F ad B G, habet B C ad B G dupli-

d 15.

caeatam eam rationem quam habet ad E F. Vt vero B C ad B G; ita est triangulum A B C ad triangulum e A B G hoc est e 1. ad D E F: quare A B C tam ad triangulum D E F, quam ad A B G duplicatam habet eam proportionem quę est inter latera homologa, B C & E F. Similia ergo triangula, &c.

Corollarium.

Et his patet si tres lineæ proportionales fuerint, esse vt primam ad tertiam ita triangulum super prima descriptum ad simile similiterq; positum super secunda. Nam ostensum est esse vt B C ad B G, ita triangulum A B C super prima B C, ad triangulum D E F simile similiterq; positum super secunda E F.

Propositio 20. Theore.

Similia polygona in similia triangula diuiduntur, numero ęqualia & totis homologa. Et polygona duplicatam inter se eam habent rationem, quæ est inter latera homologa.

 Sint

Sint polygona Similia A B C D E, F G H K L, sintque anguli E A B, L F G æquales angulus vero G angulo B & sic ordine deinceps: singuli singulis sint æquales, sint denique latera circa æquales angulos proportionalia, vt E A ad A B ita L F ad F G, &c. ideoque latera A B, F G, &c. erunt homologa.

Dico primo, hęc polygona ductis rectis A D, A C, F K, F H, diuidi in triangula similia. Nam quia angulus B æqualis est angulo G, & latera circa hos angulos proportionalia, *a* ęquiangula erunt
a 6. triangula A B C, F G H & similia: eadem ratione ostēdetur triangula D A E, K F L esse similia ob ęquales angulos E & L, & latera circa eos proportionalia. Nūc vero
b 4. 6. *b* quia est vt A C ad C B, ita F H ad H G (ob similia triangula A C B, F H G) & vt C B ad C D, ita H G ad H K ob similia polygona; collocabuntur ternæ & ternæ magnitudines in eadem ratione.

A C, C B, C D. | F H, G H, H K.

c 22. 5. Ergo ex *c* æquo vt A C ad C D ita F H ad H K Et quoniam angulus B C D, ipsi G H K est æqualis, & ablatus A C B, ablato F H G, erunt reliqui A C D, F H K etiā
d 6. æquales. *d* Quare triāgula A D C, F K H erunt

erunt æquiangula & similia, cum circa æquales angulos A C D, F H K habeant latera proportionalia. Omnia ergo triangula ostensa sunt inter se singula singulis similia.

Dico secundo esse totis homologa, hoc est sicut vnum triangulum ad triangulum sibi respondens alterius polygoni, ita esse polygona tota inter se. Quia enim similia sunt triangula A B C, F G H, e erunt in duplicata ratione laterum homologorum A C, F H; & ob eandem caussam triangula A C D, F H K, sunt in duplicata ratione eorundem laterum A C, F H. Quare vt triangulum A B C ad F G H, ita A C D ad F H K, similiterque ostendetur triangula A E D, F L K esse in eadem duplicata ratione laterum eorundem A C, F H: sunt ergo triangula polygonorum proportionalia. Cum vero quotcunque magnitudines f quotcunque magnitudinum sunt proportionales, sicut est vna ad vnam ita omnes ad omnes. Est ergo polygonum ad polygonum sicut triangulum ad triangulum.

e 19.

f 12. 5.

Dico tertio, polygona esse in duplicata ratione laterum homologorum A B, F G. Nam quia triangula sunt g in duplicata ratione laterum, & polygona

g 9. 5.

 sunt

ſunt vt triangula erunt etiam polygona in duplicata laterum ratione. Similia ergo polygona, &c.

Corollarium.

Eadem methodo probabitur omnes figuras rectilineas eſſe in duplicata ratione laterum homologorum.

Propoſitio 21. Theore.

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia.

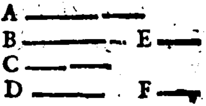
SI enim figuræ A B C, G H K eidem D E F ſint ſimiles; quia anguli A & G ſunt vni D æquales, erunt & inter ſe ęquales; & ita probabitur omnes angulos, omnibus angulis eſſe æquales; & latera *a* circa eos eſſe proportionalia, ſi lateribus eiuſdem tertij ſint proportionalia, ac propterea A B C, G H K eſſe figuras ſimiles.

a 11. 5.

Pro-

Propositio 22. Theore.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint; rectilinea similia & similiter ab ijs descripta erunt proportionalia. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea proportionalia fuerint, ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



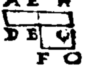
Sint quatuor rectæ A, B, C, D proportionales; dico descriptis similibus rectilineis puta triangulis super A & B, & similibus seu triãgulis seu alijs rectilineis super C & D, hæc rectilinea fore proportionalia. Sumatur enim ipsarum A & B tertia *a* proportionalis E, & *a* 11.
ipsarum C & D, tertia proportionalis F; eritque ex æquo vt A *b* ad E, ita C ad *b* 12. 5.
F. Vt autem A ad E, ita est rectilineum *c* super A ad rectilineum super B; *c* 20.
& vt C ad F; ita etiam rectilineum super C ad

C ad rectilineum ſuper D. Ergo vt rectilineum ſuper A ad rectilineum ſuper B, ita rectilineum ſuper C ad rectilineum ſuper D. Et ſic probatum eſt rectilinea eſſe proportionalia.

E conuerſo autem ſi rectilinea ſint proportionalia, & ſimilia ſimiliterque poſita, etiam latera erunt proportionalia;
d 20. nam rectilinea duplicatam *d* habent rationem, illam eandem, quæ eſt inter latera.

Propoſitio 23. Theore.

Æquiangula parallelogramma inter ſe rationem habent ex laterum rationibus compoſitam.



Sint parallelogrãma A B, B C, habentia angulos ad B æquales; & ita diſpoſita vt D B ipſi B G, (& ideo
a 14. F B *a* ipſi B E vt alibi diximus) iaceat in directum, compleaturque parallelogrammum B H. Cum ergo ſit vt paral-
b 1. lelogrammum A B *b* ad B H ita baſis D B ad B G, & vt B H ad B C ita E B ad B F, erit ratio ipſius A B ad B C compo-
c 5. def. ſita *c* ex rationibus inter A B, B H, & inter

ter B H, B C; cumque hæ rationes eædẽ sint *d* cum ijs quæ sunt inter latera D B, B G, & inter latera E B, B F; erit quoque ratio ipsius A B ad B C composita ex rationibus laterum eorundem, quod erat demonstrandum. *d* 20.

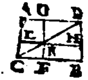
Propositio 24. Theore.

In omni parallelogrammo, quę circa diametrum sunt parallelogramma, & toti, & inter se sunt similia.

IN parallelogrammo A B circa diametrum C D sint parallelogramma E F & G H, quæ dico esse & toti, & inter se similia. Nam quia parallelogrammum G H habet angulum ad D communem cum toto, & angulus D H K æqualis est *a* interno & opposito B; erunt etiam anguli H K G, K G D æquales reliquis A & A C B totius parallelogrammi; & eodem modo ostendetur angulos omnes parallelogrammi E F, angulis totius A B esse æquales. Iam vero quia triangula D K G. D K H *a* 29. 1.

b 29. 1. D K H b æquiangula sunt, & similiter triangula D A C,

c 4. D B C; erit vt D A c ad A C, ita D G ad G K; latera ergo circa æquales angulos A & G sunt proportionalia. Rursus vt A C ad C D, ita G K ad K D, & vt C D ad C B ita K D ad K H: Ergo.



| AC, CD, CB | GK, KD, KH

ex æquo vt A C, ad C B ita G K ad K H & sic latera circa æquales angulos GKH, A C B sunt proportionalia. Neque aliter monstrabitur latera circa alios angulos æquales esse proportionalia. Sunt ergo parallelogramma E F, G H similia toti

d 22. 5. A B, ac proinde etiam d inter se.

Propositio 25. Proble.

Dato rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale constituere.

Sit constituendum rectilineum simile ipsi A, & æquale alteri B. Fiat

a 44. 1. ergo a super C D parallelogrammum C F, æquale ipsi A, & super

D F,

D F, in angulo F D H æquali ipsi E G D, fiat parallelogrammum D G, ipsi B æquale. Amplius rectarum C D, D H inueniatur *b* media proportionalis K L, *b* 13.
super qua fiat rectilineum M, simile *c* ipsi *c* 18.
A, eritque rectilineum M factum vt proponitur. Est enim simile ipsi A ex hypothesi; esse autem æquale ipsi B sic ostendo. Quia rectæ C D, K L, D H sunt proportionales, erit vt prima *d* C D ad *d* 20.
tertiam D H, ita rectilineum super primam, id est A, ad rectilineum super secundam id est ad M: sed vt C D ad D H, ita *e* parallelogrammum C F id *e* 1.
est A, ad D H, hoc est ad B. Quare erit vt A ad B, ita A ad M, ideoque rectilinea B & M erunt æqualia. Dato ergo rectilineo, &c.

Propositio 26. Theore.

Si à parallelogrammo auferatur parallelogrammum simile toti, & communem vnum angulum cum eo habens, hoc circa eandem diametrum cum toto consistit.

Ex

EX parallelogrãmo A B auferatur simile C D, habens cum eo angulum eundem E, ducanturque rectæ E H H G, quæ si non sunt diameter totius A B, sit ergo alia diameter, puta E F G ducaturque F K ipsi H D parallela; eruntque C K & A B *a* parallelogramma similia: est ergo vt A E ad E B, ita C E ad E K; sed quia similia etiam ponuntur C D & A B est vt A E ad E B, ita C E ad C D; habet igitur C E eandem rationem ad E K & E D; quare E K & E D sunt æqualia, pars & totum, quod fieri nequit. Non est ergo diameter E F G, neque alia erit quam E H G; quod erat probandum.

a 24.

Propositio 27. Theore.

Omnium parallelogrammorũm secũdum eandem rectam applicatorũ & deficientium figuris parallelogrammis similibus ei quod à media describitur, maximum id est quod ad mediam applicatur, simile existens defectui.

Recta

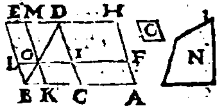
REcta A B Bisecetur in G & super dimidia C B fiat ytcunque parallelogrammum C E. cuius diameter B D. Completo ergo parallelogrammo B H, parallelogrammũ A D erit super dimidium A C, deficietque à toto B H parallelogrammo C E; estque A D simile defectui C E. Hoc igitur parallelogrammum A D dico esse maximum eorum quæ super A B posita deficiunt parallelogrammis similibus & similiter positis ipsi defectui C E. Sumatur enim in recta D B quodcunque punctum, puta G, ducanturque K M & F L ipsis A B, B E parallelæ; eritque parallelogrammum A G positum super A B, & deficiens ipso K L quod simile est, & similiter *a* positum ipsi C E. Di- *a* 24.
co ergo parallelogrammum A G minus esse ipso A D. Quia enim æqualia sunt F D, & D L ob bases *b* æquales H D, *b* 36. 1.
D E, & D L maius est quam G E hoc est quam C G (sunt enim C G & G E complementa ipsius C E, ideoque *c* æ- *c* 43. 1.
qualia) erit etiam F D maius quam C G, eodem excessu I M. Si igitur ipsis F D, C G commune addatur A I erit A D maius quam A G. Omnium ergo parallelogrammorum, &c.

Pro-

Propositio 28. Proble.

Ad datam lineam rectam dato rectilineo ęquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quę sit similis alteri datę. Oportet autem datum rectilineum non esse maius parallelogrammo, a quod ad dimidium datę rectę potest applicari.

a 27.



Repetatur exēplum superioris propositionis, in quo ad rectam A B sit applicandum parallelogrammum æquale rectilineo N & deficiens parallelogrammo quod sit simile ipsi O. Super dimidia ergo ipsius A B fiat parallelogrammum a G E, simile & similiter positum ipsi O compleaturq́ue parallelogrammum B H. Quod si contingeret C E vel A D ipsi N esse æquale, factum esset quod petitur. Si autem A D maius est

a 18.

est quam N (nam minus esse non debet; cum enim A D sit omnium maximum quæ applicari possunt iuxta tenorem prop. præcedentis, si esset A D minus ipso N nullum aliud applicari posset ad A B æquale ipsi N) constituatur æquale excessui parallelogrammum I M, simile *b* similiterque positum ipsis O & C E, quodque propterea poni poterit circa *c* eandem diametrum D B. Iam vero productis rectis I G & M G, erit parallelogrammum A G applicatum rectæ A B deficiens parallelogrãmo K L, simili ipsius I M, hoc est ipsius O. Idéque æquale est ipsi N. Nam quia ostensum est A G deficere ab A D, parallelogrammo I M, & rectilineum N ab eodem A D seu C E deficit eodem parallelogrammo I M, sequitur rectilineũ N, & parallelogrammum A G esse æqualia. Ad datam ergo rectam.

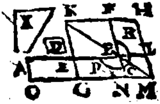
b 25.

c 26.

Pro-

Propositio 29. Proble.

Ad datam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens datam rectam figura parallelogramma, quæ similis sit dato alteri parallelogrammo.



AD datam rectam A B sit applicãdum parallelogrammũ æquale rectilineo I, & excedens rectam A B parallelogrammo simili ipsius D. Super, recta ergo E B dimidia ipsius A B fiat parallelogrammum cuiusuis magnitudi-
a 18. nis, dummodo *a* simile sit ipsi D similiterq; positum; fiatq; rursus parallelogrã-
b 25. mum G H simile eidem D, æquale *b* vero ipsis E F & I simul sumptis; habeatque angulum E K F communem cum parallelogrammo E F. Completis igitur parallelogrammis O E, G B, N L, cum G H sit positum æquale ipsis E F & I simul sumptis, ablato communi E F, gnomon P C R ipsi I erit æqualis. Et

quia

quia ob bases æquales *c* æqualia sunt O E & G B, æqualia item *d* complementa G B & B H, si loco ipsius B H substituatur æquale O E, erit parallelogrãmum A M ęquale gnomoni P C R; ideoque etiam rectilineo I. Quare ad rectam A B applicatum est parallelogrammum A M, æquale dato rectilineo I, excedens rectam A B figura parallelogramma N L, quæ similis est dato parallelogrammo D, cum sit circa eandem diametrum cum ipso E F, quod positum est simile ipsi D. Ad datam ergo rectam, &c. *c* 36. 1. *d* 43. 1.

Propositio 30. Proble.

Datam lineam rectam extrema ac media ratione secare.

REcta A B ita secetur in C, vt rectangulum sub *a* tota A B & segmento B C, sit æquale quadrato alterius segmenti A C; eritque recta A B secta extrema & media ratione: nam erit *b* sicut A B, ad A C, ita A C ad C B. *a* 11. 2. *b* 17.

Pro-

Propositio 31. Theore.

In rectangulis triangulis figura quævis super latere rectum angulum subtendente, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ super lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

IN triangulo A B C latus B C subtendat angulum rectum B A C, & super B C descripta sit
a 18. figura *a* quævis puta C D; cui similes & similiter positæ sint A E A F, super lateribus angulum rectum cõtinentibus. Quia ergo tres omnes figuræ sunt similes, erunt in duplicata ratione
b 20. laterum *b* homologorum; in qua etiam ratione essent quadrata eorundem laterum; sed quadrata super A B, A C essent
c 47. 1. æqualia *c* quadrato ipsius B C, ergo etiã figuræ similes super iisdem A B, A C, sunt æquales ipsi C D. In rectangulis ergo triangulis, &c.

Pro-

Propositio 32. Theore.

Si duo triangula habentia duo latera duobus lateribus proportionalia ad vnum angulum componantur, ita vt latera homologa sint parallela, reliqua latera in directum erunt constituta.

DVo triangula A B C, D G E habentia latera proportionalia, hoc est vt A B ad A C, ita D C ad D E, componantur ad constituendum angulum A C D; sintq̃ue tam antecedentia A B, D C, quam consequentia A C, D E parallela. Dico reliqua latera B C, C E iacere in directum. Quia enim recta C D cadit in parallelas C A, E D; erunt *a* anguli alterni D & D C A æquales; ęquales item B A C, & A C D cum etiam recta A C cadat in parallelas A B & D C; æquales ergo sunt anguli A & D, cum eidem tertio A C D ostensi sint æquales; & cum circa eos latera sint pro- *a* 29. 1.

L pore

b 6. portionalia, æquiangula sunt *b* triangula A B C, D C E; anguli ergo B & D C E sunt æquales; additis ergo æqualibus A & A C D, pares erunt duo anguli B & A, duobus D C E, A C D, siue toti A C E: rursusque addito communi A C B, erũt duo anguli A C B, A C E pares tribus A, B, & A C B; sed hi tres æquales sunt duobus rectis, ergo & illi duo, ideoque
c 32. 1. rectæ *c* B C & C E *d* iacent in directum.
d 14. 1. Si ergo duo triangula.

Propositio 33. Theore.

In æqualibus circulis anguli eandem habent rationem cum peripherijs quibus insistunt, siue ad centra siue ad peripherias constituti insistant. Eandem insuper rationem habent sectores, quippe qui ad centra consistunt.

Sint æquales circuli A B C, D E F, quorum centra G & H; & arcubus B C, E F insistant ad centra anguli B G C, E H F.

E H F. Dico hos angulos esse inter se vt arcus B C & E F. Nam si arcus B C, E F, sunt æquales, *a* æquales sunt anguli B G C, E H F. Quod si alter arcus esset maior, puta B C, aut minor; maior quoq; aut minor esset angulus B G C quam E H F, & sic quoque erit in *b* æquemultiplicibus; sunt ergo anguli B G C, E H F, sicut arcus B C, E F.

a 27. 3.
b def. 5. 5.

Eodem modo probabitur angulos A & D qui insistunt ad ambitum, esse vt sunt ijdem arcus.

Denique sector rectis B G, G C & arcu B C comprehensus, est ad sectorem E H F, sicut arcus B C ad arcum E F. Nam si arcus sunt æquales, æquales etiã erunt *c* ductæ rectę B C, E F; & anguli ad centra *d* G & H, & tota triangula *e* B G C, E H F æqualia, æquales item portiones circulorum quas auferunt *f* rectæ B C, E F, quare & sector B G C par erit ipsi E H F; quod si arcus B C maior esset ipso E F, cætera omnia essent maiora in circulo A B C, si minor, minora; & sic quoque erit *g* in æquemultiplicibus: est ergo sector B G C, ad sectorem E H F, sicut arcus B C ad arcum E F. In æqualibus ergo &c.

c 29. 3.
d 27. 3.
e 4. 1.
f 28. 3.
g def. 5. 5

Corollarium.

Hinc manifestum quoque est sic esse sectorem ad sectorem, sicut est angulus ad angulum; cum vtraque ratio eadem sit rationi arcus ad arcum; quare & inter se eadem sunt.

FINIS.

Ad Maiorem Dei gloriam.