Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBRI XV.

Accessit liber XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMONSTRAtionibus, accuratisque scholiis illustrati: nunc quartò editi, ac multarum rerum accessione post primam editionem locupletati.

Auctore

CHRISTOPHORO CLAVIO
Bambergensi è Societate IESV.



FRANCOFVRTI,
Ex Officina Typographica Nicolai Hoffmanni.
Sumptibus Jonæ Rhodii.

M. DC. VII.


Bayerische
Staatsbibliothek
München

CLARISSIMO AC EXCELLENTISSIMO VIRO, DN. IOHANNI HARTMANNO BEYERO,

Philosophiæ ac Medicinæ Doctori, Reipublicæ Francofordianæ ad Mœnum Physico primario,

Dn. Fautori ac Compatri suo plurimùm colendo,

JONAS RHODIVS Bibliopola Salutem.

SI quæ sunt, Clarissime ac Excellentissime Domine Doctor, compater plurimùm colende, quæ artem aliquam nobilitare, laudibúsque euehere possunt, Geometria me hercle eorum in promptu permulta habet. Præter enim anti-

Ioseph. lib. 1. quissimam originem, quam ab Abrahamo pertraxisse, ab eóque ad Hero. dot. libro 2. Ægyptios deueniisse creditur, eiúsque eximios & præstantes cultores, Diodor. lib. 1. inter quos primarii fuére Mœris, Py- Strabo lib. 17. thagoras Samius, Ptolomæus, Thales Milesius, Archytas Tarentinus, Eudoxus, Democritus Abderites, Heraclides Ponticus, Xenocrates Chalcedonius, Theophrastus Eressius, Epicurus Athenienſis, Apollonius Pergæus Geometra Magnus appellatus, Didymus Alexandrinus præsul Cæsarienſis, Paulus Florentinus, & alii permulti: tanta & tam innumerabilia etiam extant grauissimorum autorum testimonia, quæ vtilitatem & necessitatem illius prægrandem conteſtantur, vt impossibile sit, ea omnia recensere. Plato enim diuinus ille Philosophus, non modò Græcis oraculum apud Ægyptios

acce-

acceptum nõ intelligentibus, Deum iiſdem imperitiam exprobraſſe, eoſque, vt Geometriæ operam darent, admonere, reſpondit, verùm etiam adeò neminẽ, niſi huius artis peritũ, auditorio ſuo admiſit, vt talia etiam, ἰδιῶτις, ſcilicet, ἀγεωμέτρητον εἶναι, eidem non veritus fuerit affigere. Vnde de Sacerdotibus Ægyptiorum hoc inprimis commendatur, quòd liberos ſuos liberalibus artibus erudiendos tradẽtes voluerint præcipuè, vt Geometriæ præceptis erudirentur.

Plutarchus in commẽtario de dæmonio Socratis.

Theſſalo quin etiam filio ſuo præcepit Hippocrates, vt Arithmeticam & Geometriam nõ ſolùm ad ſplendorem vitæ, ſed ad Medicinæ etiam vſum ſtudiosè perdiſceret: Arithmeticam quidem, ad morborum periodos ac criſes: Geometriam verò, ad membrorum ſitum luxationemq; cognoſcendam.

Cicero. Ita etiam Diodorus Stoicus poſt viſum amiſſum, licèt multò magis aſſiduè, quàm antea in Philoſophia verſaretur, fidibúſque Pythagoreorum more vteretur, præ cæteris tamen exercitiis omnibus (quod fieri tamen poſſe vix creditur) Geometriæ munus tuebatur, eóque quamplurimùm oblectabatur.

Eraſm. in adagiis. Philo autem Geometriam ἀρχὴν τῆς μαθήσεως appellabat omnium diſciplinarum, quòd ſcilicet rerum omnium intelligibilium imagines veríque veſtigia tanquam in politiſſimo ſpeculo demonſtret, mentémque purgatam paulatim abducat à ſenſu.

Vitruuius in proœmio libri ſeptimi. Ariſtippus Socraticus cùm naufragio facto eiectus ad Rhodienſium litus animaduertiſſet Geometrica ſchemata deſcripta, exclamauiſſe ad comites ita dicitur: *Bene ſperemus, hominum enim veſtigia video.* Archimedem

dem Syracusanum Mathematicum insignem tantùm huic arti deditum fuisse aiunt, vt cibi potúsque obliuiscereturcorporísque curam penitus negligeret; cúmque raperetur subinde inuitus ad vngendum corpus & ad balneum, in foco figuras Arithmeticas exarabat, dúmque vngeretur, digito lineas ducebat, tanta nimirum dulcedine artis non modò captus, verùm etiam omninò inflammatus. Cùm autem multa & præclara inuenisset, dicitur ab amicis & cognatis petiisse, vt vita defuncti cylindrum sphærã complectentem sepulchro imponerent, inscriberéntq; proportionem, quatenus solidum continens excedat contentũ. Plutarchus in Marcello.

Et quis dubitat, Principem seu Ducem Israëlitarum Iosuam in diuisione terræ promissæ, Carolum Metellum in distributione regnorum

interfilios, Carolum Magnum, quin etiam Ludouicum Pium & Lotharium Imperatores, Valdemarum, Seſoſtrim Ægyptiorum Regem, Peloponnenſes & Iones, Lycurgũ, Caium Marium, Auguſtum Cæſarem, Ferguſium I. Scotorum Regem, & multos alios in huiuſmodi negotio hac præclariſſima arte ſuiſſe vſos, cùm ipſius ſolius ope & auxilio maximas ſępe lites & diſſidia ſuſtulerint. Et, vt breuibus, quod res eſt, comprehendam, ſi nihil aliud, hoc ſanè noſtrum illud ſtudiũ artemq; abundantiſſimè commendabit, laudibúſque accumulabit multifariis, quod Plato dicit, Deũ ſemper γεωμετρεῖν, hoc eſt, certiſſimo motu omnia metientem gubernare hæc inferiora.

Cùm itaque huius ſummi artificis lineas non conſiderare, hacq; pulcherrima Geometria, quæ diuinitatem

tem nobis ostendit, Deumq; monstrat, non delectari, nec illius tam luculenta vestigia aspicere aut inquirere, summa & manifesta sit impietas, nemo me hercle, nisi omnino depraua ti sit iudicij, vel tibi, clarissime Domine Compater, quòd huiusmodi artibus tantã hactenus nauasti operam, vitio vnquam vertet, aut me etiam, qui præsens Euclidis exemplar à Christophoro Clauio Bambergense illustratum typis etiam nostris imprimere nõ dubitauerim, atro, quod aiunt, carbone notabit. Vt itaq; ego laborem & impensas in multorum commodũ lubens suscepi, ita tuum erit, percolende Domine Compater, illud idem, quod ad testandũ meum erga te amorem & obseruantiam tibi dedico, non renuere. Dabatur

Francofurti 10. Cal. April.

Anno 1607.

CHRISTOPHORVS CLAVIVS E SOCIETATE IESV AD LECTOREM.

SCRIPSERAM *superioribus annis in elementa Geometrica Euclidis, id est, in initia disciplinarum Mathematicarum, commentarios: quorum omnibus iam distractis exemplaribus, cum alia essent recudenda, volui etiam dare operam, vt locupletiores multo, atque vberiores ederentur. quod Dei beneficio successit. Sic enim se res habet, quemadmodum nihil est simul inuentum, & perfectum, sic nemo est, qui à principio in qualibet re scribenda, aut exponenda possit omnia peruidere: multa apparent iterum*

rum ac ſæpius cogitanti, quæ aciem quamlibet acutam ante fugiebant. Recte hoc quoque Euripides, vt pleraque omnia, ſapientiores ſolent eſſe poſteriores cogitationes. cum quo congruit, & coharet vulgatum illud prouerbium, quod Publio tribuitur, Diſcipulus eſt prioris poſterior dies. Itaque, cum priorem editionem ſumerem poſtea in manus, multa eſſe animaduerti, quæ ſi adderentur, non pauca ex Archimedis, Apollonii, Ptolemæi, aliorumq; inuentis videbantur melius explicari poſſe: ſi videlicet è pronunciatis, ac theorematis Euclideis alia quoque nectérentur. Quod ipſum etſi tunc etiam præſtiti, multo tamen nunc feci copioſius: interiiciens ea ſcilicet, quæ vel vtilia, vel neceſſaria fore cenſui ad aliorum, vt dixi, auctorum cognitionem. Addidi inter cætera, vt ſpecimen dem aliquod rerũ, quæ hoc volumine acceſſerunt, demonſtra-

ſtrationem Geometricam, eamq; apertiſsimam axiomatis vndecimi, quod proponitur ab Euclide: cum ea, quam allatam ſcimus à Proclo, mutila eſſe atque imperfecta videatur. Deſcriptionem item omnium figurarum, quæ rectilineæ æqualium laterum & angulorum appellantur, in circulo. Rationem præterea & breuem, nec obſcuram circuli quadrandi: rem, vt ſcis, tum à veteribus, tum à recentioribus ſic expetitam, vt multorum in ea conatus magis apparuerit, quam effectus. Effeci autem hoc (niſi fallor) ita accurate, ac ſubtiliter, vt tam perfecte approbetur quadratum æquale circulo, quam exquiſite rectilinea figura qualibet ad quadratum æquale ab Euclide dirigitur: imò (vt loquar aliquid audacius) aliquanto perfectius: cum ad quadrandum circulum paucioribus linearum ductibus ſit opus, quam ad figuram rectili-

rectilineam plurimorum angulorũ, via, & ratione quadrandam, vt aperte docebitur libro sexto. Ad nonum denique librum adieci numerorum fractorum demonstrationes clarissimas, aliaque nonnulla, quæ nunc quidem non numero, quod ea mihi volo ad ipsamet loca, quibus explicabuntur, plena atque integra reseruari. Laborem igitur hunc meum, qualiscumque sit, lector benigne suscipe eoque in commodum tuum diu feliciterque vtere.

Vale.

QVÆ

QVÆ PRÆCIPVE *primæ editioni addita ſint.*

I.

DEMONSTRATIO Geometrica Axiomatis vndecimi Euclidis, [Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad eaſdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuo incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores] multo euidentior, quam ea, quam Proclus affert. *Ad propoſ. 28. lib. 1.*

II.

DIVISIO lineæ rectæ in quotuis æquales partes, per ſolas priores 40. propoſ lib. 1. abſque ope proportionum ſexti lib. *Ad propoſ. 40. lib. 1.*

III.

QVO pacto conſtruenda ſint triangula amblygonia, & oxygonia, vt in numeris apparere poſſint, quæ ab Euclide demonſtrata ſunt propoſ. 12. & 13. lib. 2. *Ad propoſ. 12. & 13. lib. 2.*

IV.

RESPONSIO ad Apologiam Iacobi Peletarij, de angulo contactus. *Ad propoſ. 16. lib. 3.*

V.

CONSIDERATIO pulcherrima de figuris planis æquilateris, atque æquiangulis intra circulum, & extra circulum deſcriptis: Num ſcili-

scilicet, omnis æquilatera sit æquiangula etiam, & omnis æquiangula sit quoque æquilatera. *Ad finem lib. 4.*

VI.

TRACTATIO copiosissima de proportionibus, & tribus præcipuis proportionalitatibus, Arithmetica, Geometrica, atque Harmonica. *Ad defin. 4. lib. 5.*

VII.

PVLCHRA contemplatio, cur Euclides in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æquè multiplicia definierit. *Ad defin. 8. lib. 5.*

VIII.

DESCRIPTIO inflexæ cuiusdam lineæ facillima, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualiũ describitur: circulus quadratur: angulus rectilineus in quotuis partes æquales distribuitur: Cuilibet arcui circuli recta æqualis exhibetur, & contrà; Et denique alia scitu iucundissima perficiuntur. *Ad finem lib. 6.*

IX.

QVO pacto pleraque theoremata libri 7. demonstrentur quoque de numeris fractis, siue ipsis adhæreant numeri integri, siue non. *Ad propositiones lib. 7.*

X.

MINVTIARVM, siue numerorum fractorum demonstrationes clarissimæ. *Ad finem lib. 7.*

XI.

DE Proportionum compositione; quo videlicet

licet modo Additio, Subtractio, Multiplicatio ac Diuisio fieri debeat: aduersus quosdam Recentiores. *Ad finem lib. 9.*

XII.

DESCRIPTIO quinque corporum Regularium in data sphæra, ex Pappo Alexandrino, & quidem facilior, quàm ea, quam nobis tradidit Euclides. *Ad finem lib. 16.*

XIII.

COMPARATIO Soliditatum, & superficierum conuexarum, eorundem quinq; corporum Regularium inter se. *Ad finem lib. 16.*

Cætera, quæ passim hisce commentariis adiecta sunt non pauca, quæ in aliis editionibus desunt, cuiusmodi est præsertim accuratior inuentio vltimorum punctorum Quadratricis per lineas perpendiculares, non autem per obliquas linearum intersectiones, &c. diligens Lector nullo negotio notabit.

PROPOSITIONES OMNIVM XVI. LIBRORVM, QVARVM EAS, QVÆ IN lib. 5. 14. 15. & 16. Euclidis non sunt, quamuis in numerum propositionum relatæ sint, alio charactere expressimus.

PRIMI LIBRI.

SVPER data recta linea terminata triangulum æquilaterum constituere.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

3 DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.

4 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumq; vtriq;, habeant verò & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt; eritque triangulum triangulo æquale, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

5 ISOSCELIVM triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se æquales erunt.

6 SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: Et sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

7 SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

8 SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumq; vtrique, æqualia; habuerint verò & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

9 DATVM angulum rectilineum bifariam secare.

10 DATAM rectam lineam finitam bifariam secare.

11 DATA recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

12 SVPER datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

13 CVM recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam angulos facit: Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

14 SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ductæ eos, qui ſunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint: in directum erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

15 SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecuerint, angulos ad verticem æquales inter ſe efficient.

16 CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & oppoſito maior eſt.

17 CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis ſunt minores, omnifariam ſumpti.

18 OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit.

19 OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur.

20 OMNIS trianguli duo latera reliquo ſunt maiora, quomodocunque aſſumpta.

21 SI ſuper trianguli vno latere, & ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius conſtitutæ fuerint: hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt.

22 EX tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum conſtituere. Oportet autem duas reliqua eſſe maiores omnifariam ſumptas: quoniam vniuſcuiuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta reliquo ſunt maiora.

23 AD datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere.

24 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumq; vtriq;, angulum verò angulo maiorem ſub æqualibus rectis lineis contentum: Et baſin baſi maiorem habebūt.

25 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, baſin verò baſi maiorem: Et angulum ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

26 SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſeu quod vni æqualium angulorum ſubtenditur: Et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

27 SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter ſe fecerit: Parallelæ erunt inter ſe illæ rectæ lineæ.

28 SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem fecerit, aut

fit, sint internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales. Parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

29 IN parallelas rectas lineas recta incidens linea: Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

30 QVÆ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

31 A dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

32 CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis: Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

33 RECTÆ lineæ quæ æquales, & parallelas lineas ad partes easdem coniungunt: Et ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

34 PARALLELOGRAMMORVM spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso & latera, & anguli: Atque illa bifariam secat diameter.

35 PARALLELOGRAMMA super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

36 PARALLELOGRAMMA super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

37 TRIANGVLA super eadem basi constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

38 TRIANGVLA super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

39 TRIANGVLA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta: Et in eisdem sunt parallelis.

40 TRIANGVLA æqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta: Et in eisdem sunt parallelis.

41 SI parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemque fuerit parallelis: Duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

42 DATO triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

43 IN omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.

44 AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

45 AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

46 A data recta linea quadratum describere.

47 IN triangulis rectangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.

48 SI quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

SECVNDI LIBRI.

1 SI fuerint duæ rectæ lineæ, secetur q; ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

2 SI recta linea secta sit vtcunque; Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato.

3 SI recta linea secta sit vtcunque: Rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur, quadrato.

4 SI recta linea secta sit vtcunque; Quadratum, quod à tota describitur, æquale est & illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

5 SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vna cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod à dimidia describitur, quadrato.

6 SI recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur: Rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, vna cum quadrato à dimidia, æquale est quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.

7 SI recta linea secetur vtcunque; Quod à tota, quodque ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

8 SI recta linea secetur vtcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.

9 SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & eius, quod à dimidia, & eius quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

10 SI recta linea secetur bifariam, adiiciatur autem ei in rectum adiuncta

adiuncta quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraq; simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod à dimidia, & eius, quod à composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, descriptum sit, quadrati.

11 DATAM rectam lineam secare, vt comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

12 IN amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

13 IN oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente, minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

14 DATO rectilineo æquale quadratum constituere.

TERTII LIBRI.

1 DATI circuli centrum reperire.

2 SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint: Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

3 SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet: Et ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

4 SI in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent non per centrum extensæ: Sese mutuo bifariam non secabunt.

5 SI duo circuli sese mutuo secent, nõ erit illorum idem centrũ.

6 SI duo circuli sese mutuo interius tangant eorum non erit idem centrum.

7 SI in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima verò reliqua; aliarum verò propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore semper maior est: Duæ autem solum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ.

8 SI extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ verò vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt: In conuexam verò peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt: Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ.

9 SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales: Acceptum punctum centrum eſt ipſius circuli.

10 CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus, punctis non ſecat.

11 SI duo circuli ſeſe intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra: Ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

12 SI duo circuli ſeſe exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum tranſibit.

13 CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, ſiue intus, ſiue extra tangat.

14 IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro: Et quæ æqualiter diſtant à centro, æquales ſunt inter ſe.

15 IN circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore ſemper maior.

16 QVÆ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locum inter ipſam rectam lineam, & peripheriam comprehenſum, altera recta linea non cadet: Et ſemicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior eſt; reliquus autem minor.

17 A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum tanget circulum.

18 SI circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipſam contingentem perpendicularis erit.

19 SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipſi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

20 IN circulo, angulus ad centrum duplex eſt anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria baſis angulorum.

21 IN

21 IN circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli sunt inter se æquales.

22 QVADRILATERORVM in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

23 SVPER eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.

24 SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

25 CIRCVLI segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

26 IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripheriis insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

27 IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

28 IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

29 IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.

30 DATAM peripheriam bifariam secare.

31 IN circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui verò in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est: minoris autem segmenti angulus, minor est recto.

32 SI circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

33 SVPER data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

34 A dato circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

35 SI in circulo duæ rectæ lineæ seseè mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis vnius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

36 SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera verò tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.

37 SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat, ſit autem, quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur quadrato; Incidens ipſa circulum tanget.

QVARTI LIBRI.

1 IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior.
2 IN dato circulo triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.
3 CIRCA datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.
4 IN dato triangulo circulum inſcribere.
5 CIRCA datum triangulum circulum deſcribere.
6 IN dato circulo quadratum deſcribere.
7 CIRCA datum circulum quadratum deſcribere.
8 IN dato quadrato circulum deſcribere.
9 CIRCA datum quadratum circulum deſcribere.
10 ISOSCELES triangulum cõſtituere, quod habeat vtrumque eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum, duplum reliqui.
11 IN dato circulo Pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.
12 CIRCA datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.
13 IN dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribere.
14 CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum deſcribere.
15 IN dato circulo hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.
16 IN dato circulo quintidecagonum, & æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

QVINTI LIBRI.

1 SI ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum, æque multiplices: quam multiplex eſt vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

2 SI pri-

2 SI prima secundæ æquè fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ: Erit & composita prima cum quinta, secundæ atque multiplex, atq; tertia cum sexta, quartæ.

3 SI sit prima secundæ æquè multiplex, atque tertia quartæ; sumantur autem æquè multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo sumptarum vtraque vtriusque æquè multiplex; altera quidem secundæ, altera autem quartæ.

4 SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æquè multiplices primæ & tertiæ, ad æquè multiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

5 SI magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

6 SI duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æquè multiplices, & detractæ quædam sint earundem æquè multiplices: Et reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æquè ipsarum multiplices.

7 ÆQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

8 INÆQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem.

9 QVÆ ad eandem, eadem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.

10 AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est; Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

11 QVÆ eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem.

12 SI sint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

13 SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia verò ad quartam, maiorem rationem habuerit, quàm quinta ad sextam. Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quàm quinta ad sextam.

14 SI prima ad secundam eandem habuerit rationem quàm tertia ad quartam; prima verò, quàm tertia, maior fuerit; Erit & secunda maior, quàm quarta. Quòd si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: Si verò minor, & minor erit.

15 PARTES cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuò reſpondent, ita ſumantur.

16 SI quatuor magnitudines proportionales fuerint; Et viciſſim proportionales erunt.

17 SI compoſitæ magnitudines proportionales fuerint: hæ quoque diuiſæ proportionales erunt.

18 SI diuiſæ magnitudines ſint proportionales; hæ quoq; compoſitæ proportionales erunt.

19 SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerit ad ablatum: Et reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, ſe habebit.

20 SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur; ex æquo autem prima quàm tertia, maior fuerit; Erit & quarta quàm ſexta, maior. Quod ſi prima quàm tertia fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ; Sin illa minor, hæc quoq; minor erit.

21 SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur; fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima, quàm tertia, minor fuerit; Erit & quarta, quàm ſexta, maior Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ: ſin illa minor, hæc quoque minor erit.

22 SI ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

23 SI ſint tres magnitudines, aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

24 SI prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad ſecundam, eandem rationem, quam ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta, ad ſecundam, eandem habebit rationem, quam tertia cum ſexta, ad quartam.

25 SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: Maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

26 *Si prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecunda ad primam minorem proportionem, quàm quarta ad tertiam.*

27 *SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam: Habebit quoque viciſſim prima ad tertiam maiorem proportionem, quàm ſecunda ad quartam.*

28 *SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam: Habebit quoque compoſita prima cum ſecunda, ad*

da, ad secundam maiorem proportionem, quàm compositum tertia cum quarta ad quartam.

29 *SI compositum prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quàm compositum tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoq; dividendo prima ad secundam, maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.*

30 *SI compositum prima cum secunda ad secundam habuerit maiorem proportionem, quàm compositum tertia cum quarta ad quartam: Habebit per conversionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quàm tertia cum quarta ad tertiam.*

31 *SI sint tres magnitudines, & alia ipsis aequales numero, sitq; maior proportio prima priorum ad secundam, quàm prima posteriorum ad secundam: Item secunda priorum ad tertiam maior, quàm secunda posteriorum ad tertiam: Erit quoq; ex aequalitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quàm prima posteriorum ad tertiam.*

32 *SI sint tres magnitudines, & alia ipsis aequales numero, sitq; maior proportio prima priorum ad secundam, quàm secunda posteriorum ad tertiam; Item secunda priorum ad tertiam maior, quàm prima posteriorum ad secundam: Erit quoq; ex aequalitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiam.*

33 *SI fuerit maior proportio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quàm totius ad totum.*

34 *SI sint quotcunq; magnitudines, & alia ipsis aequales numero, sitq; maior proportio prima priorum ad primam posteriorum, quàm secunda ad secundam; & hac maior, quàm tertia ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quàm omnes priores, relicta prima ad omnes posteriores, relicta quoq; prima; minorem autem, quàm prima priorum ad primam posteriorum, maiorem denique etiam quàm ultima priorum ad ultimam posteriorum.*

SEXTI LIBRI.

1 TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.

2 SI ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea: hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint: quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

3 SI trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum

gulum recta linea secuerit & basin: Basis segmenta eandem habebunt rationem, quàm reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera: Recta linea, quæ à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.

4 ÆQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

5 SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

6 SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

7 SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant, reliquorum verò simul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

8 SI in triangulo rectangulo ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: Quæ ad perpendicularem triangula tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

9 A data recta linea imperatam partem auferre.

10 DATAM rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.

11 DVABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.

12 TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

13 DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

14 ÆQVALIVM, & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

15 ÆQVALIVM, & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

16 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod

sub

ſub mediis comprehenditur, rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub mediis continetur rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

17 SI tres rectæ lineæ ſint proportionales: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod à media deſcribitur, quadrato. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale ſit ei, quod à media deſcribitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

18 A data recta linea dato rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere.

19 SIMILIA triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

20 SIMILIA polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis. Et polygona duplicatam habent eam inter ſe rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

21 QVÆ eidem rectilineo ſunt ſimilia; & inter ſe ſunt ſimilia.

22 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterq; deſcripta, proportionalia erũt. Et ſi à rectis lineis ſimilia ſimiliterq; deſcripta rectilinea, proportionalia fuerint; ipſæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

23 ÆQVIANGVLA parallelogramma inter ſe rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

24 IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, parallelogramma & toti, & inter ſe ſunt ſimilia.

25 DATO rectilineo ſimile ſimiliterq; poſitum, & alteri dato æquale idem conſtituere.

26 SI à parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit & ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem cum eo habens angulum: hoc circum eandem cum toto diametrum conſiſtit.

27 OMNIVM parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrammis ſimilibus ſimiliterq; poſitis ei, quod à dimidia deſcribitur: maximum id eſt, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum ſimile exiſtens defectui.

28 AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non maius eſſe eo, quod ad dimidiam applicatur, cùm ſimiles fuerint defectus & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui ſimile deeſſe debet.

29 AD datam rectam lineam, dato rectilineo æqualè parallelogrammum applicare excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

30 PROPOSITAM rectam lineam terminatam extremaac media ratione secare.

31 IN rectangulis triangulis, figura quævis à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

32 SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum vnum angulum composita fuerint, ita vt homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

33 IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper verò & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SEPTIMI LIBRI.

1 SI duobus numeris inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, neq; reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad assumpta sit vnitas: qui principio propositi sunt numeri, primi inter se erunt.

2 DVOBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

3 TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

4 OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

5 SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterque vtriusque simul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

6 SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterque vtriusque simul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

7 SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

8 SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

9 SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti.

9 SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſſim, quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

10 SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

11 SI ſint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

12 SI quatuor numeri proportionales ſint; Et viciſſim proportionales erunt.

13 SI ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini ſumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

14 SI vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et viciſſim æquè vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

15 SI duo numeri mutuò ſeſe multiplicantes fecerint aliquos: Geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt.

16 SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

17 SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

18 SI quatuor numeri proportionales fuerint: qui ex primo, & quarto fit numerus, æqualis erit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero. Et ſi qui ex primo, & quarto fit, numerus æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero: ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

19 SI tres numeri proportionales fuerint; qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, qui à medio efficitur. Et ſi qui ſub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio deſcribitur: ipſi tres numeri proportionales erunt.

20 MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor verò minorem.

21 SI fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

22 PRIMI inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

23 MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt.

25 SI duo numeri primi inter ſe fuerint: qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.
26 SI duo numeri ad quempiam primi fuerint: etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.
27 SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit.
28 SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint: Et qui ex eis gignentur, primi inter ſe erunt.
29 SI duo numeri primi inter ſe fuerint, & multiplicans vterque ſeipſum fecerit aliquem: Et geniti ex ipſis primi inter ſe erunt. Et ſi, qui in principio, genitos ipſos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter ſe erunt; Et ſemper circa extremos hoc eueniet.
30 SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Etiam vterque ſimul ad quemlibet illorum primus erit. Et ſi vterque ſimul ad vnum aliquem illiorum primus fuerit; Etiam qui in principio, numeri primi inter ſe erunt.
31 OMNIS primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt.
32 SI duo numeri ſeſe mutuò multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus: Is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.
33 OMNEM compoſitum numerum aliquis primus numerus metitur.
34 OMNIS numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur.
35 NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipſis.
36 DVOBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur numerum.
37 SI duo numeri numerum quempiam metiantur. Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.
38 TRIBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.
39 SI numerum quiſpiam numerus metiatur: Ille quem metitur, partem habebit à metiente denominatam.
40 SI numerus partem habuerit quamlibet: metietur illum numerus à parte denominatus.
41 NVMERVM reperire, qui minimus cùm ſit, habeat datas partes.

OCTAVI LIBRI.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi

trémi verò ipſorum primi inter ſe fuerint: Ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

2 NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iuſſeris quiſpiam, in data ratione.

3 SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium: Illorum extremi ſunt inter ſe primi.

4 RATIONIBVS datis quotcunq; in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

5 PLANI numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam.

6 SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur; neq; alius quiſpiam vllum metietur.

7 SI ſint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur: is etiam metietur ſecundum.

8 SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri: quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medii continua proportione cadent.

9 SI duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri: quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumq; eorum, ac vnitatem medij continua proportione cadent.

10 SI inter duos numeros, & vnitatem, continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum & vnitatem deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent.

11 DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus. Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

12 DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri. Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

13 SI ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſq; ſeipſum faciat aliquos: qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primum poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipſi quoque proportionales erunt; & ſemper circa extremos hoc eueniet.

14 SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

15 SI cubus numerus cubum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur: & cubus cubum metietur.

16 SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et si latus vnius quadrati non metiatur latus alterius: neque quadratus quadratum metietur.

17 SI cubus numerus cubum numerum non metiatur; neque latus vnius latus alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

18 DVORVM similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus. Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

19 DVORVM similium solidorum numerorum duo medij proportionales sunt numeri. Et solidus ad solidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

20 SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus. Similes plani erunt illi numeri.

21 SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri: Similes solidi sunt illi numeri.

22 SI tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus: Et tertius quadratus erit.

23 SI quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus: Et quartus cubus erit.

24 SI duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus; & secundus quadratus erit.

25 SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus; & secundus cubus erit.

26 SIMILES plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

27 SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

NONI LIBRI.

1 SI duo similes plani numeri multiplicantes se mutuò faciant quendam: Productus quadratus erit.

2 SI duo numeri se mutuò multiplicantes faciant quadratum: similes plani erunt.

3 SI cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem. Productus cubus erit.

4 SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

5 SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum: Et multiplicans cubus erit.

6 SI numerus seipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

7 SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans quempiam faciat: Factus solidus erit.

8 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus verò cubus simul & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

9 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post vnitatem, sit quadratus: Et reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus: Et reliqui omnes cubi erunt.

10 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post vnitatem, non sit quadratus; neque alius vllus quadratus erit; præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem non sit cubus; neq; alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

11 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

12 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiuntur, iidem & eum, qui vnitati proximus est, metientur.

13 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post vnitatem, primus sit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

14 SI minimum numerum primi numeri metiantur; Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.

15 SI tres numeri deinceps proportionales fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

16 SI duo numeri, primi inter se fuerint: Non erit, vt primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

17 SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint; Non erit, vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam.

18 DVOBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.
19 TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.
20 PRIMI numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum.
21 SI pares numeri quotcunque componantur; Totus par erit.
22 SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.
23 SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: Et totus impar erit.
24 SI à pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.
25 SI à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.
26 SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.
27 SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.
28 SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.
29 SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem: Factus impar erit.
30 SI impar numerus parem numerum metiatur: Et illius dimidium metietur.
31 SI impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.
32 NVMERORVM à binario duplorum, vnusquisque pariter par est tantùm.
33 SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantùm.
34 SI par numerus neque à binario duplus sit, neq; dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.
35 SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo, & vltimo æquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.
6 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit Perfectus.

DECIMI LIBRI.

DVABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiore

fore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc ſemper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine.

2 SI duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minimè præcedentem metiatur: Incommenſurabiles erunt ipſæ magnitudines.

3 DVABVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.

4 TRIBVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum menſuram communem inuenire.

5 COMMENSVRABILES magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.

6 SI duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerũ: Commenſurabiles erunt magnitudines.

7 INCOMMENSVRABILES magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

8 SI duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommenſurabiles erunt magnitudines.

9 QVÆ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata: inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & latera habebunt longitudine commenſurabilia. Quæ verò à rectis lineis longitudine incommenſurabilibus fiunt quadrata: inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

10 SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima verò ſecundæ fuerit commenſurabilis: Et tertia quartæ commenſurabilis erit: Et ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis: Et tertia quartæ incommenſurabilis erit.

11 PROPOSITÆ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentia.

12 QVÆ eidem magnitudini ſunt commenſurabiles: & inter ſe ſunt commenſurabiles.

13 SI ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidem ſit commenſurabilis, altera verò incommenſurabilis; Incommenſurabiles erunt magnitudines.

14 SI sint duæ magnitudines commensurabiles, alteræ autem ipsarum magnitudini cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.

15 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima verò tantò plus possit, quàm secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; Et tertia tantò plus poterit, quàm quarta, quantum est quadratum rectæ lineę sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tantò plus possit, quàm secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus potetit, quàm quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

16 SI duæ magnitudines commensurabiles componantur: Et tota magnitudo vtrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum commensurabilis fuerit: Et quæ à principio magnitudines, commensurabiles erunt.

17 SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur: Et tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit: Et quæ à principio magnitudines, incommensurabiles erunt.

18 SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat: Maior tantò plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tantò plus possit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: In partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

19 SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat: Maior tantò plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tantò plus possit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata: In partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.

20 QVOD ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis ſecundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum, Rationale eſt.

21 SI rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine commenſurabilem.

22 Quod ſub Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Irrationale eſt: Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.

23 QVOD à Media fit, ad Rationalem applicatum; latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.

24 MEDIÆ commenſurabilis, Media eſt.

25 QVOD ſub Mediis longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium eſt.

26 QVOD ſub Mediis potentia tantùm commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale eſt, vel Medium.

27 MEDIVM non ſuperat Medium Rationali.

28 MEDIAS inuenire potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant.

29 MEDIAS inuenire potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineant.

30 INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commenſurabiles, ita vt maior quàm minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi commenſurabilis.

31 INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commenſurabiles, ita vt maior quàm minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

32 INVENIRE duas Medias potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus poſſit quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

33 INVENIRE duas Medias potentia ſolùm commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus poſſit, quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

34 INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale: Rectangulum verò ſub ipſis contentum, Medium.

35 INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ipſarum qua-

dratis, Medium: Rectangulum verò ſub ipſis contentum, Rationale.

36 INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quę faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis.

37 SI duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

38 SI duæ mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima.

39 SI duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Medium contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda.

40 SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod autem ſub ipſis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

41 SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationalę ac Medium potens.

42 SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

43 QVÆ ex binis nominibus, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

44 QVÆ ex binis Mediis prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

45 QVÆ ex binis Mediis ſecunda, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

46 MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

47 RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

48 BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

49 INVENIRE ex binis nominibus primam.

50 INVENIRE ex binis nominibus ſecundam.

51 INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

52 INVENIRE ex binis nominibus quartam.

53 INVENIRE ex binis nominibus quintam.

54 INVENIRE ex binis nominibus sextam.

55 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

56 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis prima appellatur.

57 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur.

58 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

59 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

60 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

61 QVADRATVM eius, quæ est ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

62 QVADRATVM eius, quæ est ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

63 QVADRATVM eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatū, latitudinē facit ex binis nominibus tertiam.

64 QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

65 QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

66 QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

67 EI, quæ est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

68 EI, quæ est ex binis Mediis, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atque ordine eadem.

69 MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

70 RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Medium potens est.

71 BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

72 SI Rationale & Medium componantur: quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

73 SI duo Media inter se incommensurabilia componantur: duæ reliquæ Irrationales fiunt; vel ex binis Mediis secunda, vel bina Media potens.

74 SI à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

75 SI à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

76 SI à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

77 SI à recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

78 SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

79 SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

80 APOTOMÆ vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti.

81 MEDIÆ Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

82 MEDIÆ Apotomæ secundæ vna tantum congruit recta linea Media potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

83 MINORI vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium.

84 EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti,

& cum

& cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale.

85 EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.

86 INVENIRE primam Apotomen.

87 INVENIRE ſecundam Apotomen.

88 INVENIRE tertiam Apotomen.

89 INVENIRE quartam Apotomen.

90 INVENIRE quintam Apotomen.

91 INVENIRE ſextam Apotomen.

92 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima: Recta linea ſpatium potens Apotome eſt.

93 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda: Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome prima.

94 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia: Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome ſecunda.

95 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quarta: Recta linea ſpatium potens, Minor eſt.

96 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta: Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

97 SI ſpatiũ contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta: Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Medio Medium totũ efficit.

98 QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

99 QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſecundam.

100 QVADRATVM Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

101 QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

102 QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

103 QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſextam.

104 RECTA linea Apotomæ longitudine commenſurabilis, & ipſa Apotome eſt, atque ordine eadem.

105 RECTA linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis, & ipſa Mediæ Apotome eſt, atque ordine eadem.

106 RE-

106 RECTA linea Minori commensurabilis, & ipsa Minor est.

107 RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum rationali Medium totum efficiens est.

108 RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum medio Medium totum efficit, & ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.

109 MEDIO à Rationali detracto: Recta linea, quæ rel quum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

110 RATIONALI à Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

111 MEDIO à Medio detracto, quod sit incommensurabile toti: reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

112 APOTOME non est eadem, quæ ex binis nominibus.

113 QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione: & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.

114 QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotome nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.

115 SI spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotome, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens est Rationalis.

116 A Media infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

117 PROPOSITVM sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

VNDECIMI LIBRI.

1 RECTÆ lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam verò in sublimi.

2 SI duæ rectæ lineæ se mutuò secent, in vno sunt plano. Atq; Triangulum omne in vno est plano.

3 SI duo plana se mutuò secent; communis eorum sectio est linea recta.

4 SI recta linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat; illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.

5 SI recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat; Illæ tres rectæ in vno sunt plano.

6 SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

7 SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta; Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

8 SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

9 QVÆ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelæ.

10 SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

11 A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

12 DATO plano à puncto, quod in illo datum est, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

13 DATO plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.

14 AD quæ plana, eadem recta linea recta est: Illa sunt parallela.

15 *SI* duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano; Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana.

16 *SI* duo plana parallela plano quopiam secentur; communes illorum sectiones sunt parallelæ.

17 *SI* duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; in easdem rationes secabuntur.

18 *SI* recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

19 *SI* duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos; communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

20 *SI* solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vt vt assumpti tertio sunt maiores.

21 OMNIS solidus angulus sub minoribus, quàm quatuor rectis angulis planis continetur.

22 SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet assumpti reliquo sint maiores, comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales:

æquales: fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum conſtituatur.

23 EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque aſſumpti reliquo ſunt maiores, ſolidum angulum conſtituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores eſſe.

24 SI ſolidum parallelis planis contineatur: aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt ſimilia, & æqualia.

25 SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum.

26 AD datam rectam lineam, eiuſque punctum, angulum ſolidum conſtituere ſolido angulo dato æqualem.

27 A data recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile, & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

28 SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonios aduerſorum planorũ: Bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano.

29 SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in iiſdem collocantur rectis lineis: ſunt inter ſe æqualia.

30 SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in iiſdem collocantur rectis lineis: inter ſe ſunt æqualia.

31 SOLIDA parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine: æqualia ſunt inter ſe.

32 SOLIDA parallelepipeda ſub eadem altitudine: inter ſe ſunt, vt baſes.

33 SIMILIA ſolida parallelepipeda inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.

34 ÆQVALIVM ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur. Et quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur: Illa ſunt æqualia.

35 SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique, in ſublimibus autem lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primum poſiti, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis verò, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum poſitos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos comprehendent.

36 SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto à media linea ſolido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum verò prædicto.

37 SI

37 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint. Et solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

38 SI planum ad planum rectum fuerit, & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt planorum, ad alterum perpendicularis ducta fuerit. In communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

39 SI solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint, per sectiones autem plana sint extensa: Communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuo secabunt.

40 SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin parallelogrammum, illud verò triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata.

DVODECIMI LIBRI.

1 QVÆ in circulis polygona similia; inter se sunt, vt à diametris quadrata.

2 CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata.

3 OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; & in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

4 SI fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum vtraque diuisa & in duas pyramides æquales inter se & similes toti; & in duo prismata æqualia: Ac eodem modo diuisa sit vtraque pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat: Erit vt vnius pyramidis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

5 SVB eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases: inter se sunt, vt bases.

6 SVB eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases; inter se sunt, vt bases.

7 OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se triangulares bases habentes.

8 SIMI-

8 SIMILES pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorum laterum ratione.

9 ÆQVALIVM pyramidum, & triangulares baſes habentium, reciprocantur baſes, & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes habentium reciprocantur baſes, & altitudines: illæ ſunt æquales.

10 OMNIS conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem.

11 SVB eadem altitudine exiſtentes coni, & cylindri, inter ſe ſunt, vt baſes.

12 SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.

13 SI cylindrus plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

14 SVPER æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines.

15 ÆQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes, & altitudines. Et quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes, & altitudines: illi ſunt æquales.

16 DVOBVS circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribere, quod non tangat minorem circulum.

17 DVABVS ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidum polyedrum inſcribere, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem.

18 SPHÆRÆ inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum.

TERTIIDECIMI LIBRI.

1 SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur: maius ſegmentum aſſumens dimidiam totius, quintuplum poteſt eius quod à dimidia totius deſcribitur, quadrati.

2 SI recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplum poſſit: Duplæ prædicti ſegmenti extrema ac media ratione ſectæ, maius ſegmentum reliqua pars eſt eius, quæ a principio, rectæ.

3 SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur: minus ſegmentũ aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati.

4 SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur: Quod à tota, quodque à minore ſegmento, ſimul vtraque quadrata; tripla ſunt eius, quod à maiore ſegmento deſcribitur, quadrati.

5 SI recta

5 SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; apponaturque ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ à principio, recta linea.

6 SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumque segmentum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

7 SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint: Æquiangulum erit ipsum pentagonum.

8 SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione se mutuo secant, & maiora ipsarum segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

9 SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

10 SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

11 SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

12 SI in circulo triangulum æquilaterum describatur: Trianguli latus potentia triplum est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

13 PYRAMIDEM constituere, & data sphæra complecti, & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

14 OCTAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem, & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit dupla lateris ipsius octaedri.

15 CVBVM constituere, & sphæra complecti, qua & priores figuras, & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

16 ICOSAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras, & demonstrare, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

17 DODECAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & prædictas figuras, & demonstrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

18 LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

QVARTIDECIMI LIBRI.

1 QVÆ ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

2 SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur; ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones.

3 SI in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur: quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati.

4 *SI latus hexagoni alicuius circuli ſecetur extrema ac media ratione: maius illius ſegmentum erit latus decagoni eiuſdem circuli.*

5 IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum, eidem ſphæræ inſcriptorum.

6 SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni: Erit quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Dodecaedri ſuperficiei æquale.

7 SI ex centro circuli triangulum Icoſaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli: Erit quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Icoſaedri ſuperficiei æquale.

8 RECTANGVLVM contentum ſub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque ſextis partibus lineæ ſubtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti, æquale eſt dicto pentagono.

9 SVPERFICIES Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri.

10 SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione: Erit vt recta potens id, quod à tota, & id, quod à maiori ſegmento ad rectam potentem id, quod à tota, & id, quod à minori ſegmento, ita latus cubi ad latus Icoſaedri eidem ſphæræ cum cubo inſcripti.

11 DODECAEDRVM ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt vt cubi latus ad latus Icoſaedri, in vna eademque ſphæra.

12 *LATVS trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppoſitum deductæ.*

13 *SI ſphæra diameter fuerit Rationalis: Erit tam ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media.*

14 *SI*

14 *SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæra inscribanturi Erit basis Tetraedri sesquitertia basis Octaedri; superficies autem Octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri.*

15 *RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in sphæra descripti per centrum sphæræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, estque perpendicularis ad dictam basim.*

16 *OCTAEDRVM in sphæra descriptum diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis verò vtriusque est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ.*

17 *TETRAEDRVM sphæra impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea potente Gigintiseptem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris comprehensum, ad quadratum diametri sphæræ.*

Vel vt Campanus habet.

TETRAEDRVM sphæra impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquitertia trium quartarum partium lateris Tetraedri, & sub linea superquintupartiente vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris Tetraedri contentum, ad quadratum diametri sphæræ.

18 *LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basim oppositam demissa, tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem basim deducitur.*

19 *SI Octaedrum sphæræ inscribatur: Erit semidiameter sphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphæræ in basin quamcunque Octaedri ducitur.*

20 *DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, æquale est superficiei cubi in illa sphæra collocati; Perpendicularis autem à centro sphæræ in aliquam basin cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi.*

21 *IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & Octaedri triangulum, eiusdem sphæræ.*

22 *SI Octaedrum, atque Tetraedrum eidem sphæræ inscribantur: Erit Octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri.*

23 *SI recta linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris linea latus Icosaedri, minus autem segmentum posterioris linea latus Dodecaedri eius sphæræ, cuius recta linea proposita diameter existit.*

24 *SI latus Octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ li-*

nea extrema ac media ratione secta: Poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.

25 *SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus Octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.*

26 *SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ: Latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.*

27 *CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt superficies cubi ad Octaedri superficiem: Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ.*

28 *SI sint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt sit eadem antecedens omnium: Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.*

29 *QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.*

30 *SI Cubus, & Tetraedrum in eadem sphæra describantur: Erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.*

31 *LATVS Tetraedri potentia sesquialterum est axis, seu altitudinis ipsius; Axis verò, siue altitudo Tetraedri potentia sesquitertia est lateris cubi in eadem sphæra descripti.*

32 *CVBVS triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti.*

QVINTI DECIMI LIBRI.

1 IN dato cubo pyramidem describere.

2 IN data pyramide Octaedrum describere.

3 IN dato cubo Octaedrum describere.

4 IN dato Octaedro cubum inscribere.

5 IN dato Icosaedro Dodecaedrum inscribere.

6 *IN dato Octaedro pyramidem describere.*

7 *IN dato Dodecaedro Icosaedrum describere.*

8 *IN dato Dodecaedro cubum describere.*

9 *IN dato Dodecaedro Octaedrum describere.*

10 *IN dato Dodecaedro pyramidem describere.*
11 *IN dato Icosaedro cubum describere.*
12 *IN dato Icosaedro Pyramidem describere.*
13 *IN dato cubo Dodecaedrum describere.*
14 *IN dato cubo Icosaedrum describere.*
15 *IN dato Icosaedro Octaedrum describere.*
16 *IN dato Octaedro Icosaedrum describere.*
17 *IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.*
18 *IN data pyramide Cubum describere.*
19 *IN data pyramide Icosaedrum describere.*
20 *IN data pyramide Dodecaedrum describere.*
21 *IN dato solido regulari sphæram describere.*

SEXTIDECIMI LIBRI.

1 *SI in Dodecaedro cubus describatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: Erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione, triplicata.*

2 *LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppositum demissa, secatur à recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione.*

3 *SI ab angulis trianguli pyramidis ducantur rectæ opposita latera secantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum sit maius segmentum vnius lateris, & minus alterius; Hæ sectionibus suis in medio producent basin Icosaedri in dicta pyramide descripti, inscriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basis Icosaedri.*

4 *MINVS segmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione secti duplum est potentia lateris Icosaedri in ea Pyramide descripti.*

5 *LATVS cubi potentia dimidium est lateris pyramidis in eo descripta: Latus verò pyramidis duplum est longitudine lateris Octaedri sibi inscripti: Latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti Octaedri.*

6 *LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris pyramidis sibi inscriptæ.*

7 *SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.*

8 *LATVS pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.*

9 *LATVS pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.*

10 *SI in Octaedro Icosaedrum describatur: Erit latus Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris Octaedri extrema ac media ratione diuisi.*

11 *LATVS Octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in seipso descripti.*

12 *LATVS Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, qua potentia dupla est lateris Octaedri in Icosaedro descripti.*

13 *LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione: Latus verò Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ.*

14 *LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscripti pyramidis.*

15 *SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.*

16 *LATVS Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione diuisæ, qua duplum potest latus Octaedri in eo descripti.*

17 *DIAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.*

18 *LATVS Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus se habet, vt minus segmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, atque extrema ac media ratione diuisæ, ad partem eiusdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiusdem posita.*

19 *SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque eius segmentum à toto latere Icosaedri sublatum; à reliqua quoque recta pars rursum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.*

20 *CVBVS sibi inscripta pyramidis triplus est.*

21 *PYRAMIS sibi inscripti Octaedri dupla est.*

22 *CVBVS sibi inscripti Octaedri sextuplus est.*

23 *OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.*

24 *OCTAEDRVM sibi inscripta pyramidis tredecuplum sesquialterum est.*

25 *PYRAMIS sibi inscripti cubi nonecupla est.*

26 *OCTAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem ha-*

nem habet, quam dua baſes Octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.

27 ICOSAEDRVM ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum Icoſaedro ſphæra deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem.

28 DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis à quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, at verò altitudo ab altitudine ſiue latere cubi, minore ſegmento eius linea, qua dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.

29 DODECAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra baſium Dodecaedri oppoſitarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti.

30 DODECAEDRVM Pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, latitudo verò tertiæ parti minoris ſegmenti lateris eiuſdem cubi, altitudo denique à latere eiuſdem cubi deficit minore ſegmento eius linea, qua dimidiati lateris cubi eiuſdem minus ſegmentum exiſtit: Alterius autem & longitudo, & latitudo lateris cubi prædicti eſt æqualis, altitudo verò minus ſegmentum eius linea, qua dimidiati lateris cubi eiuſdem ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri eiuſdem cubi ſint æquales.

31 OCTAEDRVM excedit ſibi deſcriptum Icoſaedrum Parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, altitudo verò maius ſegmentum ſemidiametri Octaedri extrema ac media ratione ſecta.

INDEX PROBLEMATVM AC THEOREMATVM, QVÆ PRÆTER PROpositiones in sexdecim libris Euclidis contentas in hisce commentariis demonstrantur.

IN PRIMO LIBRO.

1 *REGVLAM pro linea recta ducendi examinare, num recta sit, nec ne.* Ad defin. 4.

2 *ANGVLVM rectilineum examinare, num rectus sit, an obtusus, vel acutus.* Ad defin. 12.

3 *NORMAM pro angulis rectis constituendis examinare, num accurate fabricata sit.* Ad def. 12.

4 *CIRCVLVS bifariam à diametro secatur.* Ad def. 18.

5 *CIRCVLVS à linea per centrum non transeunte secatur in partes inæquales, maiorque est ea, in qua centrum.* Ad defin. 18.

6 *DVÆ rectæ lineæ non habent vnum & idem segmentum commune.* Ad Axioma 10.

7 *DVÆ rectæ in vno puncto concurrentes, si producantur amba. necessario se mutuo in eo puncto intersecabunt.* Ad Axioma 11.

8 *OMNES anguli recti sunt inter se æquales.* Ad Axioma 12.

9 *DVÆ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.* Ad Axioma 14.

10 *SVPER data recta linea terminata triangulum Isosceles, & Scalenum constituere.* Ad propos. 1.

11 *OMNE triangulum æquilaterum est etiam æquiangulum.* Coroll. propos. 5.

12 *OMNE triangulum æquiangulum est etiam æquilaterum.* Coroll. propos. 6.

13 *SI trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basin fiant æquales: Et duo latera illa æqualia inter se erunt.* Ad propos. 6.

14 *SI duo triangula bases habuerint æquales, & angulos super bases constitutos æquales, vtrumque vtrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, vtrumque vtrique, quæ videlicet æqualibus angulis subtenduntur, angulosque reliquos hisce lateribus inclusos, æquales.* Ad propos. 8.

15 *SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus vtrumque vtrique æqualia, habuerint verò & basim basi æqualem: æquiangula inter se erunt, & æqualia.* Coroll. propos. 8.

16 *DVÆ lineæ rectæ se mutuo secantes efficiunt ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis æquales.* Coroll. 1. propos. 15.

17 *QVOTLIBET anguli circa vnum & idem punctum constituti, quatuor rectis sunt æquales.* Coroll. 2. propos. 15.

18 *SI ad aliquam rectam lineam, ad eiusque signum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint: ipsa recta linea in directum sibi inuicem erunt.* Ad propos. 15.

19 *SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint; Erunt qualibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi, & continuum coniunctæ.* Ad propos. 15.

20 *AB vno puncto ad eandem lineam rectam non possunt duci plures lineæ rectæ, quàm duæ inter se æquales.* Ad propos. 16.

21 *AB vno puncto ad eandem lineam rectam non possunt duci plures lineæ perpendiculares, quàm vna.* Ad propos. 17.

22 *IN omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, aut obtusus, reliqui sunt acuti.* Coroll. 1. propos. 17.

23 *SI linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum obtusum, & acutum alterum: Lineæ perpendicularis ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demissa cadit ad partes anguli acuti.* Coroll. 2. propos. 17.

24 *OMNES tres anguli in triangulo æquilatero, & duo supra basin in Isoscele, sunt acuti.* Coroll. 3. propos. 17.

25 *OMNES tres anguli in triangulo Scaleno sunt inæquales.* Coroll. propos. 18.

26 *OMNIVM rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcunque ductarum, ea qua perpendicularis est, minima existit.* Coroll. propos. 19.

27 *SI trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansq; angulum recta linea ad basin ducta in partes inæquales ipsam diuidat: Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento coincidit, minus verò, quod cum minori.* Ad propos. 19.

28 *SI trianguli duo latera inæqualia fuerint; Linea recta bifariam diuidens angulum ipsis contentum, secabit basin in partes inæquales, maiusque segmentum erit propè maius latus.* Ad propos. 19.

29 *SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoque secet: Erunt duo latera angulum continentia æqualia. Quod si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.* Ad propos. 19.

30 *IN triangulo aliquo duci possunt duæ rectæ, vna quidem ab extremo lateris, altera verò a puncto prope alterum extremum eiusdem lateris, intra triangulum concurrentes, quæ maiores sint duobus lateribus trianguli,* Ad propos. 21.

31 *SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, utrumque utrique: unumque latus uni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod uni æqualium angulorum subtenditur: ipsa æqualia inter se erunt.* Coroll. propos. 26.

32 *IN triangulo æquilatero, siue Isoscele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenso ducta, diuidens uel angulum uel basim bifariam, perpendicularis est ad basim; Et si quidem angulum bifariam diuidat; secabit quoq; basim bifariam; si uerò basim secet bifariam, diuidet quoq; angulum bifariam. Et contrà, Linea perpendicularis ad basim ducta diuidit & basim, & angulum bifariam.* Ad propos. 26.

33 *TRIANGVLVM, in quo linea recta ab uno angulorum ducta ad basim perpendicularis diuidit uel basim, uel angulum bifariam, habet duo latera dictum angulum comprehendentia æqualia. Et si quidem basis diuidatur bifariam, angulus quoq; bifariam secabitur, si uerò angulus bifariam secetur, basis quoq; diuidetur bifariam.* Ad propos. 26.

34 *SI ab uno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinitè producantur, semper magis ac magis inter se distabunt, omnem; finitam magnitudinem ipsarum distantia excedet.* Ad propos. 28.

35 *SI duarum parallelarum rectarum linearum alteram secet quædam recta linea, reliquam quoq; productã secabit.* Ad propos. 28.

36 *SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales; quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur: Erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demissa, utrilibet priorum perpendicularium æqualis.* Ad propos. 28.

37 *SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur: Efficiet hæc recta cum utraq; perpendiculari angulum rectum.* Ad propos. 28.

38 *SI in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum una earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum: duæ illæ rectæ minus semper inter se distabunt ad eas partes, ubi est angulus acutus, ex altera uerò parte semper inter se magis distabunt.* Ad propos. 28.

39 *SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat: Duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.* Ad propos 28. Estq; axioma 13. Hæ porrò quatuor vltimæ propositiones demonstrantur ex solis 28. propositionibus Euclidis, nulla adhibita proprietate parallelarum.

40 *PARALLELOGRAMMVM constituere, cuius unus angu-*

angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraq; angulum illum comprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia. Ad propos. 31.

41 *A dato puncto extra datum rectam lineam, rectam lineam ducere, quæ cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem.* Ad propos. 31.

42 *A dato puncto in extremo linea recta, ad ipsam, licet non producatur, aut produci non possit, perpendicularem lineam excitare.* Ad propos. 31.

43 *A dato puncto in extremo fere plani, & extra lineam rectam, ad ipsam rectam lineam perpendicularem demittere.* Ad propos. 31.

44 *SI ab vno angulo trianguli linea recta extra triangulum ducatur faciens externum angulum æqualem duobus internis, & oppositis: illa linea erit in directum ipsi lateri constitutum.* Ad propos. 32.

45 *OMNES anguli figuræ cuiuslibet rectilineæ, sunt æquales bis tot rectis, quotus ipsa est inter figuras rectilineas.* Ad propos. 32.

46 *OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiuslibet æquales sunt bis tot rectis, demptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.* Ad propos. 32.

47 *SI singula latera figuræ cuiuslibet rectilineæ producantur versus eandem partem; omnes anguli externi æquales sunt quatuor tantùm rectis.* Ad propos. 32.

48 *SI pentagoni singula latera producantur in vtramque partem, ita vt qualibet duo extra pentagonum coeant: efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus solùm rectis.* Ad propos. 32.

49 *TRES anguli cuiuslibet trianguli simul sumpti æquales sunt tribus angulis cuiuslibet alterius trianguli simul sumptis.* Coroll. 1. propos. 32.

50 *IN triangulo Isoscele, si angulus à lateribus æqualibus comprehensus fuerit rectus, erit vterque æqualium angulorum supra basim semirectus; si verò obtusus, minor semirecto, si denique acutus, maior semirecto.* Coroll. 2. propos. 32.

51 *QVILIBET angulus trianguli æquilateri continet duas tertias partes vnius recti, vel vnam tertiam partem duorum rectorum.* Coroll 3. propos. 32.

52 *SI ab vno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constituentur duo triangula scalena, quorum vnumquodque habet vnum angulum rectum prope perpendicularem, alium verò perpendiculari oppositum æqualem duabus tertijs partibus vnius recti, reliquum denique æqualem tertiæ parti vnius recti* Coroll 4. propos 32.

53 *ANGVLVM rectum in tres angulos æquales dividere.* Ad propos 32.

54 *OMNE*

54 *OMNE quadrilaterum habens latera oppoſita æqualia, eſt parallelogrammum.* Ad propoſ. 34.

55 *OMNE quadrilaterum habens angulos oppoſitos æquales, eſt parallelogrammum.* Ad propoſ. 34.

56. *OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum.* Ad propoſ. 34.

57 *IN quadrato & Rhombo anguli oppoſiti bifariam ſecantur à diametro* Ad propoſ. 34.

58 *IN altera parte longiori, & Rhomboide, anguli oppoſiti non bifariam ſecantur à diametro.* Ad propoſ. 34.

59 *IN quadrato, & altera parte longiori, duæ diametri ſunt inter ſe æquales.* Ad propoſ. 34.

60 *IN Rhombo, & Rhomboide, duæ diametri non ſunt inter ſe æquales* Ad propoſ. 34.

61 *IN omni parallelogrammo diametri ſe mutuò bifariam diuidunt.* Ad propoſ. 34.

62 *OMNE quadrilaterum, in quo diametri ſe mutuò bifariam diuidunt, parallelogrammum eſt.* Ad propoſ. 34.

63 *RECTA linea ſecans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum quoq; bifariam. Et recta linea diuidens parallelogrammum bifariam quouis modo, ſecat quoque diametrum bifariam.* Ad propoſ. 34.

64 *A quouis dato puncto lineam rectam ducere, quæ parallelogrammum datum ſecet bifariam.* Ad propoſ. 34.

65 *INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam data linea æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum, & eum, qui lineis datis continetur, minores eſſe duobus rectis.* Ad propoſ. 34.

66 *IN aliquo triangulo conſtitui poſſunt intra ipſum duæ rectæ à duobus punctis baſis, æquales duobus lateribus.* Ad propoſ. 34.

67 *IN omni figura rectilinea latera habente numero paria, ſi quidem fuerit æquilatera & æquiangula, duo qualibet latera oppoſita parallela inter ſe ſunt.* Ad propoſ. 34.

68 *PARALLELOGRAMMA æqualia ſuper eandem baſin, ad eaſdemq; partes conſtituta, inter eaſdem ſunt parallelas.* Ad propoſ. 35.

69 *PARALLELOGRAMMA æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdem partes conſtituta, inter eaſdem ſunt parallelas. Et parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta.* Ad propoſ. 35.

70 *SI duo parallelogramma inter eaſdem parallelas habeant baſes inæquales, illud, cuius baſis maior eſt, maius erit. Et contrà, ſi duo paral-*

parallelogramma ſunt inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis maioris maior erit. Ad propoſ. 36.

71 *TRIANGVLA, quorum duo latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus vnius illis lateribus contentus maior angulo alterius, ſi quidem ambo ſimul duobus ſint rectis æquales, æqualia ſunt: Si verò duobus ſint rectis minores, minus illud eſt, quod maiorem habet angulum; ſi denique ſint minores duobus rectis, maius illud erit, quod maiorem angulum habet.* Ad propoſ 37.

72 *SI à quouis angulo trianguli linea recta ducatur diuidens latus oppoſitum bifariam, triangulum quoque bifariam ſecabit.* Ad propoſ. 38.

73 *A puncto quouis dato in vno latere trianguli propoſiti lineam rectam ducere, quæ bifariam ſecet triangulum datum.* Ad propoſ. 38.

74 *LINEA recta ſecans duo trianguli latera bifariam; reliquo lateri eſt parallela.* Ad propoſ. 39.

75 *OMNE quadrilaterum, quod ab vtraque diametro bifariam diuiditur, parallelogrammum eſt.* Ad propoſ. 39.

76 *TRIANGVLA æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſim, ſuper æquales baſes erunt conſtituta.* Ad propoſ. 40.

77 *SI duo triangula inter eaſdem parallelas habeant baſes inæquales, illud, cuius baſis maior eſt, maius erit. Et contrà, ſi duo triangula ſint inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis maioris maior erit.* Ad propoſ. 40.

78 *TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſita baſes æquales ſint, ſunt inter ſe æqualia. Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas æquales.* Ad propoſ. 40.

79 *TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſita baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiuſque eſt illud, cuius baſis maior eſt. Et trapezia inæqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas inæquales, maior quæ eſt illa, cuius trapezium maius eſt.* Ad propoſ. 40.

80 *TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſita baſes ſint æquales, æqualia ſunt Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent baſes oppoſitas æquales.* Ad propoſ. 40.

81 *TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſita baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiuſque eſt illud, cuius baſis maior eſt. Et trapezia inæqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent oppoſitas baſes inæquales, maior quæ eſt illa, cuius trapezium maius eſt.* Ad propoſ. 40.

82 *SI in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo opposito ducta diuidensq; alterutram parallelarum bifariam, diuidit quoq; alteram bifariam.* Ad propos. 40.

83 *DATAM rectam lineam finitam in quotlibet partes aequales secare.* Ad propos. 40.

84 *SI triangulum duplam habuerit basim, fuerintq; in eisdem parallelis cum parallelogrammo: triangulum parallelogrammo aquale est.* Ad propos. 41.

85 *SI parallelogrammum & triangulum aequales habuerint bases, in eisdemq; fuerint parallelis: duplum erit parallelogrammum trianguli.* Ad propos. 41.

86 *SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; habuerint basim, vel aequales, & ad easdem partes constituta: Erunt ipsa in eisdem parallelis. Et si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eisdemq; parallelis: Eruntbases aequales, si non sit eadem.* Ad propos. 41.

87 *SI triangulum & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij sit basis trianguli: Erit trapezium minus duplo trianguli: Si verò minor linea trapezij basis sit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.* Ad propos. 41.

88 *TRAPEZIVM habens duo latera opposita parallela, duplum est trianguli, quod basim habet vnum latus trapezij contingens duas parallelas; verticem verò in medio puncto lateris oppositi.* Ad propos. 41.

89 *DATO parallelogrammo aequale triangulum constituere, in dato angulo rectilineo.* Ad propos. 42.

90 *SI parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita vt ex illis duo aduersa sint aequalia: consistent reliqua duo circa diametrum.* Ad propos. 43.

91 *AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo constituere aequale triangulum, in dato angulo rectilineo.* Ad propos. 44.

92 *DATIS duobus rectilineis inaequalibus, excessum maioris supra minus inquirere.* Ad propos. 45.

93 *LINEARVM aequalium aequalia sunt quadrata. Et quadratorum aequalium aequales sunt lineae.* Ad propos. 46.

94 *TRES numeros inuenire, ita vt quadrati numeri ductum quadrato numero reliqui sint aequales.* Ad propos. 47.

95 *SI in quadrato quorum diameter ducatur, quadratum à diametro descriptum, duplum erit praedicti quadrati.* Ad propos. 47.

96 *QVADRATVM diametri figura altera parte longioris aequale est duobus quadratis laterum inaequalium.* Ad propos. 47.

97 *SI fuerint duo triangula rectangula, quorum latera recto angulis opposita sint aequalia: Erunt duo quadrata reliquorum duorum*

rum laterum ℞nius trianguli aqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius. Ad propoſ. 47.

98 *DVOBVS quadratis inaqualibus propoſitis, inuenire alia duo quadrata, qua & aqualia ſint inter ſe, & ſimul ſumpta aqualia duobus inaqualibus propoſitis ſimul ſumptis.* Ad propoſ. 47.

99 *PROPOSITIS duabus lineis inaqualibus, inuenire id, quod plus poteſt maior, quàm minor.* Ad propoſ. 47.

100 *PROPOSITIS quotcunque quadratis, ſiue aqualibus, ſiue inaqualibus, inuenire quadratum omnibus illis aquale.* Ad propoſ. 47.

101 *PROPOSITIS duobus quadratis quibuſcunq;, alteri illorum adiungere figuram, qua reliquo quadrato ſit aqualis, ita ut tota figura compoſita ſit etiam quadrata.* Ad propoſ. 47.

102 *COGNITIS duobus lateribus quibuſcunq; trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.* Ad propoſ. 47.

103 *SI ex angulo à duobus lateribus inaqualibus trianguli comprehenſo ad baſin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum: Secabitur baſis in partes inaquales, maior q; pars iuxta maius latus erit. Et contrà, ſi baſis à perpendiculari ſecetur non bifariam: Erunt duo latera inaqualia, maius q; illud erit, quod maiori baſis ſegmento adiacet.* Ad propoſ. 47.

104 *IN omni triangulo, parallelogramma quacunq; ſuper duobus lateribus deſcripta, aqualia ſunt parallelogrammo ſuper reliquo latere conſtituto, cuius alterum latus aquale ſit, & parallelum recta ducta ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli oppoſita, ſi ad partes anguli illius producantur.* Ad propoſ. 47.

105 *TRIANGVLORVM comparationes in primo libro demonſtratas explicare.* Ad finem lib. 1.

106 *QVANDO duo latera ℞nius trianguli duobus lateribus alterius trianguli aqualia ſunt, ℞trumq; ℞triq;, & ℞nus angulus ℞ni angulo, qui ℞ni aqualium laterum opponitur; baſes aquales eſſe nequeunt, niſi quando angulus in ℞troq; triangulo alteri lateri aquali oppoſitus vel eſt minor recto, vel non minor recto.* Ad finem lib. 1.

107 *QVANDO duo latera ℞nius trianguli duobus lateribus alterius trianguli aqualia ſunt, ℞trumq; ℞triq;, & ℞nus angulus ℞ni angulo, ita ut ℞nus ℞ni aqualium laterum, & alter alteri opponatur: nihil colligi poteſt.* Ad finem lib. 1.

108 *QVANDO duo latera ℞nius trianguli duobus lateribus alterius trianguli aqualia ſunt, ℞trumq; ℞triq;, & angulus in ℞no triangulo illis lateribus comprehenſus, aqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur ℞ni illorum laterum: nihil poteſt inferri.* Ad finem lib. 1.

IN

IN SECVNDO LIBRO.

1 *IN omni parallelogrammo, ſi ℞num angulum duntaxat detur rectum, reliqui etiam tres recti erunt.* Ad defin. 1.

2 *SI fuerint duæ rectæ lineæ, ſecenturq; amba in quotcunq; ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis ℞nius, & quolibet ſegmentorum alterius continentur, rectangulis.* Ad propoſ. 1.

3 *SI ſint duæ rectæ lineæ, ſecenturq; amba ℞cunque: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, ℞na cum rectangulo ſub ℞na parte ℞nius, & ℞na parte alterius comprehenſo, æquale eſt eis, quæ ſub totis lineis, & dictis partibus mutuò continentur, rectangulis, ℞na cum rectangulo ſub reliquis partibus comprehenſo.* Ad propoſ. 2.

4 *SI linea recta ſecetur in quotcunque ſegmenta: Quadratum, quod à toto fit, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis, & quolibet ſegmento comprehenduntur, rectangulis.* Ad propoſ. 2.

5 *PARALLELOGRAMMA circa diametrum quadrati ſunt quadrata.* Ad propoſ. 4.

6 *DIAMETER cuiuſuis quadrati diuidit eius angulos biſariam.* Ad propoſ. 4.

7 *SI linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa deſcriptum, quadruplum eſt quadrati ex hac deſcripti. Et ſi quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum eſt lateris huius.* Ad propoſ. 4.

8 *NVMERVM quadratum inuenire, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum conſtituat. Et viciſſim quadratum numerum reperire, à quo datus quiuis numerus ſubtractus relinquat numerum quoque quadratum.* Ad propoſ. 4. 5. 6. & 8.

9 *SI tres linea habeant proportionalitatem Arithmeticam; Rectangulum ſub extremis contentum, ℞na cum quadrato exceſſus, æquale eſt quadrato mediæ.* Ad propoſ. 6.

10 *SI recta linea in partes inæquales ſecetur: Earum partium quadrata æqualia ſunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, ℞na cum quadrato eius lineæ, quæ maior pars ſuperat minorem.* Ad propoſ. 7.

11 *IN omni triangulo obtuſangulo, linea perpendicularis ducta ex quouis acutorum angulorum ad latus oppoſitum, cadit in ipſum latus ad partes anguli obtuſi protractum.* Ad propoſ. 12.

12 *SI in triangulo quadratum ℞nius lateris maius ſit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illis lateri oppoſitus, obtuſus eſt.* Ad propoſ. 12.

13 *SI in triangulo quadratum ℞nius lateris maius ſit quadratis* tele-

reliquorum duorum laterũ, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab oppoſito angulo demiſſa abſcindit: Demiſſa hac linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, obtuſus. Ad propoſ. 12.

14 *AMBLYGONIA triangula conſtituere laterum commenſurabilium, in quibus ſegmentum inter angulum obtuſum, & perpendicularem commenſurabile etiam ſit latus.* Ad propoſ. 12.

15 *SI in triangulo quadratum ſimus lateris minus ſit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppoſitus, acutus erit.* Ad propoſ. 13.

16 *SI in triangulo quadratum ſimus lateris minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub recta linea inter angulum priori lateri oppoſitum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri oppoſito demiſſam: Linea hac demiſſa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, acutus.* Ad propoſ. 13.

17 *TRIANGVLA commenſurabilium laterum conſtituere, in quibus ſegmenta inter perpendicularem, quæ in baſim cadit, eiſdem lateribus commenſurabilia quoq; ſunt.* Ad propoſ. 13.

18 *SI in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur, dividens latus oppoſitum bifariam: erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium ſimul dupla duorum quadratorum ſimul ſumptorum, quorum ſimum ex linea ducta, alterum verò ex dimidiato latere deſcribitur.* Ad propoſ. 13.

19 *AREAM cuiuſque trianguli latera habentis nota invenire.* Ad propoſ. 13.

20 *DATO exceſſu diametri alicuius quadrati ſupra latus eiuſdem: Invenire latus ipſius quadrati.* Ad propoſ. 14.

21 *DATIS duobus exceſſibus diametri alicuius parallelogrammi rectanguli ſupra ſingulum latus: Invenire latera ipſius rectanguli.* Ad propoſ. 14.

IN TERTIO LIBRO.

1 *SI in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos ſecet: in ſecante eſt centrum circuli.* Coroll. propoſ. 1.

2 *LINEA recta, quæ circulum tangit, intra eum non ſecet; in uno tantùm puncto ipſum tangit.* Coroll. propoſ. 2.

3 *IN triangulo æquilatero, vel iſoſcele, recta ſecans baſim bifa-*

riam, ad baſim perpendicularis eſt. Et perpendicularis ad baſim, ſecat baſim biſariam. Coroll. propoſ. 3.

4 *DVOBVS circulis ex eodem centro deſcriptis, ſi ab aliquo puncto circumferentia exterioris recta ducatur interioris circumferentiam ſecans: Erunt eius ſegmenta inter vtramq; circumferentiam poſita, inter ſe aqualia.* Ad propoſ. 3.

5 *SI intra circulum punctum ſumatur, ab eoq; puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima ſit, vna verò minima; & reliquarum alia ſint inaquales, alia aquales: Maxima quidem per centrum tranſibit, minima verò erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt maxima propinquiores; aquales autem ab eadem maxima, vel minima aqualiter diſtabunt.* Ad propoſ. 7.

6 *SI in ſemidiametro circuli producta punctum vltra centrum ſumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum ſemidiametri punctum deſcriptus, tanget priorem circulum in dicto puncto extremo ſemidiametri, totuſque extra eundem cadet.* Ad propoſ. 13.

7 *RECTA linea à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducta ipſum circulum tangit. Hinc facilè per datum punctum in circumferentiam duci poterit linea circulum tangens.* Coroll. propoſ. 16.

8 *DIGRESSIO de angulo contactus aduerſus Iacobum Peletarium.* Ad propoſ. 16.

9 *QVOTLIBET anguli contactus aquales ſimul ſumpti, minores ſunt quouis angulo acuto rectilineo.* Ad propoſ. 16.

10 *ALIQVA quantitas poteſt continuè, & infinitè augeri, altera verò infinitè minui: & tamen augmentum illius, quantumcunq; ſit, minus ſemper erit decremento huius.* Ad propoſ. 16.

11 *TRANSITVR à minori ad maius, vel contrà, & per omnia media: & tamen non per aquale. Item reperitur maius hoc, & minus eodem: & tamen non aquale.* Ad propoſ. 16. & 31.

12 *PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterum includat, rectam lineam ducere, qua vtrumq; tangat circulum.* Ad propoſ. 17.

13 *PER datum punctum deſcribere circulum, qui alium tangat ſine interius, ſiue exterius.* Ad propoſ. 17.

14 *CIRCVLVM, qui duos alios circulos, quorum vnus non ſit totus intra alium, tangat, deſcribere.* Ad propoſ. 17.

15 *LINEÆ recta, qua circulum ſecet, lineam parallelam ducere, qua eundem circulum tangat.* Ad propoſ. 17.

16 *DVOBVS circulis ex eodem centro deſcriptis: erunt omnes recta linea interiorem circulum tangentes, & vſque ad circumferentiam*

rentiam exterioris circuli extenſa, inter ſe æquales, bifariamq; in punctis contactuum ſecabuntur. Ad propoſ. 18.

17 *IN circulo ſpatiũ ad centrum duplex eſt anguli ad peripheriã, cùm fuerit eadem peripheria baſis ſpatij & anguli.* Ad propoſ. 20.

18 *SI à duobus punctis quatuor recta linea ducantur, ex ſingulis bina, quæ ad eaſdem partes contineant angulos duos æquales: Circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum deſcriptus, per alterum quoq; angulum tranſibit.* Ad propoſ. 21.

19 *SI in quadrilatero anguli qui ex aduerſo duobus rectis ſint æquales: circulus, qui per tres quoſcunq; eius angulos deſcribitur, tranſibit etiam per reliquum quartum angulum; atq; adeò circa ipſum quadrilaterum circulus deſcribi poteſt.* Ad propoſ. 22.

20 *SI ex ſemicirculis, aut circulis, ſegmenta ſimilia detrahantur, reliqua quoq; ſegmenta ſimilia erunt.* Ad propoſ. 22.

21 *ANGVLI inſiſtentes arcubus circulorum ſimilibus ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias, ſunt inter ſe æquales. Et contra arcus, quibus anguli æquales ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias inſiſtunt, ſimiles ſunt.* Ad propoſ. 22.

22 *SI duo aut plures circuli ex eodem centro deſcribantur atque ex centro duæ, aut plures rectæ lineæ ducantur: erunt arcus inter quaſcunque duas lineas intercepti, ſimiles.* Ad propoſ. 22.

23 *SI duo aut plures circuli ſe mutuò tangant interius in vno puncto, à quo duæ aut plures rectæ educantur: erunt & arcus inter quaſcunq; duas lineas intercepti, & arcus inter quamcunq; lineam, & punctum contactus intercepti, ſimiles.* Ad propoſ. 22.

24 *SI vnum latus quadrilateri in circulo deſcripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.* Ad propoſ. 22.

25 *SEGMENTA circulorum æqualia ſuper æquales lineas, vel ſuper eandem conſtituta, ſunt ſimilia.* Ad propoſ. 24.

26 *IN æqualibus circulis inæquales anguli inæqualibus peripherijs inſiſtunt, maior maiori, & minor minori, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.* Ad propoſ. 26.

27 *IN æqualibus circulis anguli, qui inæqualibus peripherijs inſiſtunt, ſunt inter ſe inæquales, maior, qui maiori, & minor, qui minori, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.* Ad propoſ. 27.

28 *DVÆ rectæ lineæ, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, ſe mutuò non ſecantes, ſunt parallelæ. Et contra, duæ lineæ parallelæ in eodẽ circulo arcus æquales intercipiunt.* Ad propoſ. 27.

29 *LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela eſt rectæ lineæ, quæ peripheriam illam ſubtendit.* Ad propoſ. 27.

30 *ANGVLVS rectus in centro inſiſtit quadranti: acutus verò*

arcui quadrante minori: & obtusum arcui quadrante maiori. Et contrà, angulus in centro quadranti insistens rectus est: insistens verò arcui quadrante minori, acutus: & arcui quadrante maiori, obtusus. Ad propos. 27.

31 *RECTA linea è centro circuli ducta, secans quæ aliam rectam non per centrum ductam bifariam, secabit & arcum, cui hæc recta subtenditur, bifariam. Et contrà, si secet & arcum bifariam, secabit & rectam ei subtensam bifariam.* Ad propos. 27.

32 *SI in circulo, ductis duabus diametris sese ad angulos rectos secantibus, altera earum producatur, ejusque ex una parte quotquot parallelæ agantur dividentes utrumque quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctum proximæ parallelæ recta ducatur conveniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum concursus, & concavam peripheriam circuli, omnibus parallelis una cum diametro, quæ producta est, simul sumptis, æqualis.* Ad propos. 27.

33 *IN æqualibus circulis inæquales rectæ lineæ inæquales peripherias auferunt, major quidem majorem, & minor minorem, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo: At verò si de segmentis circuli majoribus sermo habeatur, major minorem, & minor majorem.* Ad propos. 28.

34 *IN æqualibus circulis, inæquales peripheriæ inæquales rectas lineas subtendunt, majorem quidem major, & minorem minor, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo: At verò si de segmentis semicirculo majoribus loquamur, minorem major, & majorem minor.* Ad propos. 29.

35 *CIRCULI, è quibus æquales rectas lineas auferunt similes circumferentias, æquales sunt.* Ad propos. 29.

36 *EX circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circumferentias dissimiles auferunt.* Ad propos. 29.

37 *EX circulis inæqualibus linea recta, quæ circumferentias similes auferunt, inæquales sunt.* Ad propos. 29.

38 *RECTÆ linea, quæ ex quibuscunque circulis circumferentias similes inæquales auferunt, inæquales sunt.* Ad propos. 29.

39 *SI in diametro circuli præter centrum punctum sumatur, ab eoque in peripheriam duæ rectæ non in eadem partes cadentes efficiant ad diametrum angulos æquales: Rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abscindent æquales. Et si lineæ sint æquales, constituent ad diametrum angulos æquales, abscindentque æquales arcus. Si denique arcus æquales abscindant, erunt rectæ illæ æquales, constituentque ad diametrum angulos æquales.* Ad propos. 29.

40 *SI in diametro circuli præter centrum sumatur punctum quodpiam, in quo ad eadem partes duo anguli æquales constituantur, insistent*

insistent hi anguli arcubus inaqualibus, maior is cuius ille, qui à minori portione diametri remotior est. Ad propos. 29.

41 *ANGVLVS trianguli, qui reliquis duobus aqualis existit, rectus est.* Coroll. propos. 31.

42 *SEGMENTVM circuli, in quo angulus constitutus est rectus, est semicirculus: in quo verò angulus est acutus, est segmentum maius: & in quo angulus est obtusus, est segmentum minus: Et segmentum, cuius angulus recto est maior, est semicirculo maius, cuius verò angulus est recto minor, est vel semicirculus, vel semicirculo minus.* Ad propos. 31.

43 *SI angulo recto linea recta subtensa, hoc est, si in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, bifariam secetur, & ex puncto diuisionis circa illam rectam, vel latus illud circulus describatur: transibit necessariò circulus ille per angulum rectum.* Ad propos. 31.

44 *A dato puncto extra circulum, rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.* Ad propos. 31.

45 *SI per centrum circuli alius circulus describatur, & per vtriusque circuli centrum recta ejciatur, à puncto verò, vbi hæc recta à posteriori circulo secatur, ducatur recta vtcunque, secabitur eius portio intra priorem circulum à circumferentia posterioris bifariam.* Ad propos. 31.

46 *QVADRILATERVM in circulo descriptum, cuius duo latera opposita sunt parallela, & æqualia, parallelogrammum est rectangulum, hoc est, vel quadratum, vel altera parte longius.* Ad propos. 31.

47 *SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis: Linea ducta circulum tanget.* Ad propos. 32.

48 *SI dua recta ita se secent, vt rectangulum sub vnius segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo: describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc est, circulus per qualibet tria puncta earum extrema describetur, per quartum quoque punctum transibit.* Ad propos. 35.

49 *SI à puncto quouis extra circulum assumpto plurima linea rectæ circulum secantes ducantur: Rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus inter se sunt æqualia.* Coroll. 1. propos. 36.

50 *DVÆ rectæ lineæ ab eodem puncto ductæ, quæ circulum tangant, inter se sunt æquales.* Coroll. 2. propos. 36.

51 *AB eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantum possunt duæ lineæ, quæ circulum tangant.* Coroll. 3. propos. 36

51 *SI dua rectæ æquales ex puncto quopiam in conuexam periphe-*

riam incidant, & earum vna circulum tangat, altera quoq; circulum tanget. Coroll. 4. propos. 36.

52 *SI à puncto aliquo bina linea recta finita egrediantur, quarum secentur in binas partes, & rectangula sub totis, & segmentis prope punctum comprehensa sint aqualia; describi poterit per extrema puncta aliorum segmentorum circulus, hoc est, circulus per tria puncta extrema aliorum segmentorum descriptus, per quartum etiam punctum extremum transibit.* Ad propos. 36.

53 *DATIS duabus rectis siue aqualibus, siue inaqualibus, alteri earum rectam adiungere, vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta comprehensum, quadrato alterius sit aquale.* Ad prop. 36.

54 *SI à puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum tangentes ducantur, aut duæ linea vsque ad conuexam peripheriam inter se æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circuli ejecta angulum ab eis comprehensum diuidit bifariam. Et contrà, Linea recta angulum ab eis comprehensum dimidens bifariam, per centrum circuli transibit.* Ad propos. 37.

IN QVARTO LIBRO.

1 *IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ linea, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.* Ad propos. 1.

2 *IN omni triangulo, si circulus inscribatur, duo qualibet latera superant reliquum rectâ linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ab angulo illis lateribus comprehenso in cauam peripheriam ducta, & sub eius segmento exteriore. Quod si angulus comprehensus sit rectus, superabunt illa duo latera latus recto angulo oppositum diametro circuli triangulo inscripti.* Ad propos. 4.

3 *SI circulo circa triangulum descripto, centrum intra triangulum cadat, triangulum est acutangulum: Si verò in vnum latus trianguli, rectangulum: Si denique extra triangulum obtusangulum.* Coroll. propos. 5.

4 *CENTRVM circuli circa triangulum acutangulum descripti intra triangulum cadit: circa rectangulum verò, in latus recto angulo oppositum: circa obtusangulum denique, extra triangulum.* Coroll. propos. 5.

5 *PER data tria puncta non in vna recta linea existentia circulum describere.* Ad propos. 5.

6 *SI circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo quadratum inscribatur. Erit quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum.* Ad propos. 9.

7 *IN triangulo Isoscele, cuius vterq; angulorum aqualium reliqui duplus est: Angulus aqualibus lateribus comprehensus, quin-*

ea pars est duorum rectorũ, vterlibet autem æqualium, duæ quintæ partes. Item ille duæ quintas partes vnius rectæ continet, vterlibet autem horum quatuor quintas partes. Coroll. propos. 10.

8 *SI recta linea secetur, vt propos.* 11. *lib.* 2. *traditum est: Isosceles triangulum, cuius basis maiori segmento æqualis est, vtrumuis verò laterum æqualium ipsi datæ lineæ æquale, habet vtrumlibet angulorum æqualium duplum reliqui.* Ad propos. 11.

9 *ANGVLVS pentagoni æquilateri, & æquianguli complectitur tres quintas partes duorum rectorum, vel sex quintas vnius recti.* Coroll. propos. 11.

10 *SVPER datam rectam lineam terminatam Pentagonum æquilaterum, & æquiangulum constituere.* Ad propos. 11.

11 *SI in circulo quæcunq; figura æquilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: Hæ perpendiculares constituent aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualiũ circulo circumscriptam.* Coroll. propos. 12.

12 *IN figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est: Recta linea ex quouis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, diuidit quoq; angulum bifariam: Et contrà, recta linea diuidens angulum bifariam secat quoq; latus oppositum bifariam. Si verò numerus angulorum est par, Recta linea ex quouis angulo ad oppositum angulum ducta, secat vtrumque angulum bifariam: Et contrà, Recta linea secans quemuis angulum bifariam cadit in oppositum angulum, eumque bifariam quoque diuidit.* Ad propos. 12.

13 *LATVS hexagoni æquale est semidiametro circuli, in quo describitur.* Coroll. propos. 15.

14 *ISOSCELES triangulum oxygonium constituere, cuius vtrumq; laterum vtrouis æqualium maius sit.* Ad propos. 15.

15 *SI in circulo ab eodem puncto inscribantur duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum: Continebit arcus inter illa latera inclusus tot latera alterius figuræ inscribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter se differunt denominatores eorundem laterum. Continebit autem figura inscribenda tot latera, angulosq; æquales, quot vnitates sunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.* Ad propos. 16.

16 *OMNIS figura æquilatera circulo inscripta, æquiangula quoque est: at non omnis figura æquilatera circulo circumscripta necessariò æquiangula quoque est, nisi quando numerus angulorum ipsius est impar, vel si par est, quando duo anguli proximi æquales sunt, vel duo non proximi, dummodo vno eorum primo posito, alter occupet locum parem quemcunq;, vt quartum ab eo, vel sextum, est unum, decimum, &c.* Ad propos. 16.

17 *OMNIS figura æquiangula circulo circumscripta, est etiam*

aquilatera: at non omnis figura aquiangula circulo inscripta, necessario aquilatera quoque est, nisi quando numerus laterum ipsius est impar; vel si par est, quando duo latera proxima aqualia sunt, vel duo non proxima, dummodo vno eorum posito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, vt quartum ab eo, vel sextum, octauum, decimum, duodecimum, &c. Ad propos. 16.

18 *IMPARIVM laterum figura inscribuntur in circulo beneficio Isoscelium triangulorum, quorum anguli æquales ad basim multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Parium verò laterum figura inscribuntur beneficio triangulorum Isoscelium, quorum anguli ad basim æquales, multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt angulorum.* Ad propos. 16.

19 *FIGVRAM quamcunque aquilateram, & aquiangulam in circulo practicè describere, sine ope triangulorum Isoscelium prædictorum.* Ad propos. 16.

20 *FIGVRAM quamcunque aquilateram, & aquiangulam supra datum rectam practicè describere.* Ad propos. 16.

21 *LATERA pentagoni, & decagoni in circulo describendorum, vna eademq; opera inuenire.* Ad propos. 16.

22 *SI bifaria sectiones laterum figuræ aquilateræ, & aquiangulæ rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura aquilatera quoq;, & aquiangula totidem laterum in illa figura, idem centrum habens.* Ad propos. 16.

23 *INTER omnes figuras aquilateras, & aquiangulas, solum triangulum, quadratum, & hexagonum, locum replere possunt.* Ad propos. 16.

IN QVINTO LIBRO.

1 *TRACTATVS de proportionibus, & proportionalitatibus copiosissimus.* Ad defin. 4.

2 *ANGVLVM curuilineum angulo rectilineo exhibere æqualem.* Ad defin. 5.

3 *CVR Euclides in defin. 6. & 8. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales, per earum æquè multiplicia definierit.* Ad defin. 8.

4 *NVMERVS integer cum fractione in se multiplicatus producit necessario numerum integrum cum fractione.* Ad defin. 8.

5 *SI quatuor magnitudines fuerint proportionales, & conuertendo proportionales erunt.* Coroll propos. 4.

6 *ÆQVALES magnitudines ad æquales eandem habent rationem.* Ad propos. 7.

7 *QVÆ eidem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem.* Ad propos. 11.

8 *SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia verò ad quartam, minorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam, minorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.* Ad propos. 13.

9 *SI prima ad secundam maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam maiorem habuerit quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam multo magis maiorem rationem habebit quam quinta ad sextam.* Ad propos. 13.

10 *SI prima ad secundam minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam minorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoq; ad secundam multo magis minorem rationem habebit, quá quinta ad sextam.* Ad propos. 13.

11 *SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, ha quoque per Diuisionem rationis conuersam proportionales erunt.* Ad propos. 17.

12 *SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, ha quoque per Diuisionem rationis contrariam proportionales erunt.* Ad propos. 17.

13 *SI diuisæ magnitudines proportionales fuerint, ha quoque per compositionem rationis conuersam proportionales erunt.* Ad propos. 18.

14 *SI diuisæ magnitudines proportionales fuerint, ha quoque per compositionem rationis contrariam proportionales erunt.* Ad propos. 18.

15 *SI quatuor magnitudines fuerint proportionales: Et quoque per conuersionem rationis proportionales erunt.* Coroll. propos. 19.

16 *SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: Habebunt etiam æquè multiplices prima ac tertia ad secundam, & quartam, eandem rationem: Item æquè multiplices secunda & quarta ad primam, & tertiam, eandem rationem habebunt. Et contra, eandem rationem habebunt secunda & quarta ad æquè multiplices prima & tertia: Item prima ac tertia ad æquè multiplices secunda & quarta, rationem habebunt eandem.* Ad propos. 22.

17 *SI duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detracta quadam habeant ad easdem eandem proportionem: Et reliquæ ad easdem eandem proportionem habebunt.* Ad propos. 24.

18 *SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt, quam duplæ reliquæ.* Ad propos. 25.

19 *SI prima ad secundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam, habebit conuertendo secundam ad primam maiorem proportionem, quam quarta ad tertiam.* Ad propos. 26.

20 *SI prima ad secundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit quoq; vicissim prima ad tertiam, minorem proportionem, quam secunda ad quartam.* Ad propos. 27.

21 *SI prima ad secundam habuerit minorem proportionem quam tertia ad quartam: habebit quoque composita prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam.* Ad propos. 28.

22 *SI composita prima cum secunda ad secundam habuerit minorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam, habebit quoque dividendo prima ad secundam minorem proportionem, quam tertia ad quartam.* Ad propos. 29.

23 *SI composita prima cum secunda ad secundam habuerit minorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: habebit per conversionem rationis prima cum secunda ad primam, maiorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.* Ad propos. 30.

24 *SI sint tres magnitudines, & alia ipsis aquales numero, sitque minor proportio prima priorum ad secundam, quam prima posteriorum ad secundam: item secunda priorum ad tertiam minor, quam secunda posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex aqualitate, minor proportio prima priorum ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiam.* Ad propos. 31.

25 *SI sint tres magnitudines, & alia ipsis aquales numero, sitque minor proportio prima priorum ad secundam, quam secunda posteriorum ad tertiam; Item secunda priorum ad tertiam minor, quam prima posteriorum ad secundam: Erit quoque ex aqualitate, minor proportio prima priorum ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiam.* Ad propos. 32.

26 *SI fuerit minor proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum minor proportio quam totius ad totum.* Ad propos. 33.

IN SEXTO LIBRO.

1 *PROPOSITIS quotcunque quantitatibus, proportio prima ad ultimam componitur ex proportionibus omnibus intermediis.* Ad defin. 5.

2 *TRIANGVLA, & parallelogramma, qua itm se habent inter se, vt bases, aquales habent altitudines, vel eandem.* Ad propos. 1.

3 *TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum aquales sunt bases, vel eadem, inter se habent inter se, vt altitudines.* Ad propos. 1.

4 *TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt altitudines: æquales habent baſes, ſi vnam & eandem non habeant.* Ad propoſ. 1.

5 *LINEA recta, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, aufert triangulum toti triangulo ſimile.* Coroll. propoſ. 4.

6 *SI ex duobus punctis cuiuſuis rectæ, quorum alterum ſit extremum, alterum verò intra lineam, duæ parallelæ inter ſe ad eaſdem partes educantur, ita vt proportionem habeant eandem, quam recta inter ipſas, & alterum extremum punctum inclusa: Recta coniungens extremum vnius earum cum extremo prioris lineæ, tranſibit per extremum alterius lineæ.* Ad propoſ. 4.

7 *SI ex duobus punctis cuiuſuis rectæ duæ parallelæ educantur in diuerſas partes, habentes eandem proportionem, quam ſegmenta rectæ inter parallelas contermina, & aliquod idem punctum intra datam rectam: Recta coniungens extrema puncta parallelarum tranſibit per dictum punctum intra rectam.* Ad propoſ. 4.

8 *SI in triangulo quouis vni lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppoſitum recta educatur linea: diuidentur lineæ parallelæ, & latus illud in eaſdem rationes.* Ad propoſ. 4.

9 *RECTA perpendicularis, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in baſim demittitur, eſt media proportionalis inter duo baſis ſegmenta: Item latus vtrumlibet angulum rectum ambiens, medium proportionale eſt inter totam baſim, & illud ſegmentum baſis, quod dicto lateri adiacet.* Coroll. propoſ. 8.

10 *DATAM rectam lineam in partes quotcunque æquales diuidere.* Ad propoſ. 10.

11 *DATAM rectam ſecare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunque datam.* Ad propoſ. 10.

12 *SI duæ rectæ lineæ ſecentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ ſectiones in eadem proportione cum quibuslibet ſegmentis duobus.* Ad propoſ. 10.

13 *SI lineæ rectæ ſit ſecta in quotcunque partes Arithmetice proportionales, & alia recta ſecetur in totidem partes, quæ eaſdem inter ſe, quas illa, proportiones habeant: Erunt quoque partes huius lineæ Arithmetice proportionales.* Ad propoſ. 10.

14 *SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem: Erit quoque exceſſus priorum ad exceſſum poſteriorum, vt priorum linearum vna ad vnam poſteriorum.* Ad propoſ. 10.

15 *LINEAM rectam datam, vel numerum, in quotuis partes Arithmetice proportionales ſecare.* Ad propoſ. 10.

16 *QVOTLIBET lineas continuè proportionales in data ratione inuenire.* Ad propoſ. 11.

17 *IN-*

17 *INTER duas rectas, duas medias proportionales practice inuenire.* Ad propos. 11.

18 *DATIS duabus rectis lineis, duas alias in eadem cum illis proportione inuenire.* Ad propos. 12.

19 *TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, & prima ad secundam.* Ad propos. 12.

20 *RECTA linea, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam vsque, media est proportionalis inter duo diametri segmenta, quæ à perpendiculari facta sunt.* Ad propos. 13.

21 *DATA recta linea, aliam rectam (quæ minor non sit, quam dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.* Ad propos. 13.

22 *RECTA linea qualibet est media proportionalis inter quæuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale.* Ad propos. 17.

23 *SECTA linea recta in duas partes vtcunque, alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continuè proportionales.* Ad propos. 17.

24 *DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Arithmetica proportionalitate inuenire.* Ad propos. 17.

25 *DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire.* Ad propos. 17.

26 *DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire.* Ad propos. 17.

27 *DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire, aliter, quam propos. 13. factum est.* Ad propos. 17.

28 *DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire, aliter, quam propos. 11. factum est.* Ad propos. 17.

29 *DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire, aliter, quam propos. 11. factum est.* Ad propos. 17.

30 *DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.* Ad propos. 17.

31 *DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Harmonica Medietate inuenire.* Ad propos. 17.

32 *DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire.* Ad propos. 17.

33 *QVANDO duo numeri proportionem habent duplam maiorem, non potest illis adiungi tertius maior in proportionalitate Harmonica.* Ad propos. 17.

34 *EX datis quibuslibet duobus numeris, tres numeros Harmonice propor-*

proportionales, quorum extremi eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri, reperire. Ad propoſ. 17.

35 *TRES numeros Harmonice proportionales inuenire, quorum extremi proportionem habeant datam, & medium ſit dato numero aqualis.* Ad propoſ. 17.

36 *DATIS duobus numeris, medium Harmonice proportionalem inuenire.* Ad propoſ. 17.

37 *DATIS duobus numeris, minorem extremum in proportionalitate Harmonica inuenire.* Ad propoſ. 17.

38 *DATIS duobus numeris, maiorem extremum in Harmonica proportionalitate inuenire.* Ad propoſ. 17.

39 *PROPOSITIS tribus terminis Geometrice proportionalibus ſiue aqualibus, ſiue inaqualibus: Summa ex primo ſemel, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta; ac ſumma conflata ex ſecundo & tertio ſemel; ac tertius ſemel, ſunt Geometrice proportionales.* Ad propoſ. 17.

40 *PROPOSITIS tribus terminis ſiue aqualibus, ſiue inaqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa ex primo bis, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta; ac ſumma ex primo, ſecundo, & tertio ſemel conflata; ac denique tertius ſemel, ſunt Arithmetice proportionales.* Ad propoſ. 17.

41 *PROPOSITIS tribus terminis ſiue aqualibus, ſiue inaqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa collecta ex primo bis, ex ſecundo ter, & tertio ſemel; ac ſumma conflata ex ſecundo bis, & tertio ſemel; & denique ſumma ex ſecundo ſemel, & tertio ſemel concreata, Harmonice proportionales ſunt.* Ad propoſ. 17.

42 *A data recta linea dato rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere, expeditius, quam ab Euclide factum eſt.* Ad propoſ. 18.

43 *SI tres recta linea proportionales fuerint: erit vt prima ad tertiam, ita triangulum ſuper primam deſcriptum ad triangulum ſuper ſecundam ſimile, ſimiliterque deſcriptum: Item ita triangulum ſuper ſecundam ad triangulum ſuper tertiam ſimile, ſimiliterque deſcriptum.* Coroll. propoſ. 19.

44 *SI fuerint tres recta linea proportionales: erit vt prima ad tertiam, ita polygonum ſuper primam deſcriptum ad polygonum ſuper ſecundam ſimiliterque deſcriptum: Item ita polygonum ſuper ſecundam ad polygonum ſuper tertiam ſimile, ſimiliterque deſcriptum.* Coroll. propoſ. 20.

45 *POLYGONA ſimilia, equilatera & aquiangula diuiduntur in ſimilia triangula, & numero aqualia, ductis à centris circulorum ipſa circumſcribentium ad omnes angulos rectis lineis.* Ad propoſ. 20.

46 *SI linea recta dupla fuerit linea recta, quadratum illius quadruplum erit*

plum erit quadrati huius. Et contra, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius. Ad propoſ. 20.

47 *ÆQVALIA rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta, conſtituta ſunt ſuper æquales rectas lineas.* Ad propoſ. 22.

48 *SI fuerint tres rectæ lineæ proportionales: erunt & rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta ab eis, proportionalia. Et ſi à tribus rectis lineis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea proportionalia fuerint: ipſæ etiam rectæ proportionales erunt.* Ad propoſ. 22.

49 *TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent: proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compoſitam.* Ad propoſ. 23.

50 *PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, vel pluribus componere.* Ad propoſ. 23.

51 *PROPORTIONEM minorem ex minore auferre.* Ad propoſ. 23.

52 *TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ ſub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.* Ad propoſ. 23.

53 *PARALLELOGRAMMA inter ſe æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula ſub lateribus ipſorum æqualem angulum continentibus comprehenſa.* Ad propoſ. 23.

54 *TRIANGVLA & parallelogramma in ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum.* Ad propoſ. 23.

55 *DATIS duobus parallelogrammis æquiangulis, ſed non ſimilibus: ex quorum illorum alteri ſimile reſecare.* Ad propoſ. 24.

56 *DATO parallelogrammo, deſcribere aliud maius, aut minus ſimile illi, ſimiliterque deſcriptum.* Ad propoſ. 24.

57 *SI ad rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato: ipſum applicatum æquale eſt rectangulo quod ſub ſegmentis lineæ per applicationem factis continetur.* Ad propoſ. 28.

58 *SI figura, quæ ab vno laterum trianguli deſcribitur, æqualis ſit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, figuris ſimilibus, ſimiliterque poſitis: Angulus comprehenſus ſub reliquis duobus triangulis lateribus, rectus eſt.* Ad propoſ. 31.

59 *SECTOR ad ſectorem eſt, vt angulus ad angulum.* Coroll. 1. propoſ. 33.

60 *ANGVLVS in centro circuli ita eſt ad quatuor rectos, vt arcus illi ſubtenſus ad totam circumferentiam. Et contra. Ita ſe habent quatuor recti ad angulum in centro, vt tota circumferentia ad arcum illi angulo ſubtenſum.* Coroll. 2. propoſ. 33.

61 *SIMILIA circulorum ſegmenta, hoc eſt, in quibus anguli ſunt æquales.*

æquales, eandem proportionem habent ad integras circumferentias circulorum. Ad propoſ. 33.

62 *SI duo aut plures circuli ex eodem centro deſcribantur, atque ex centro dua, aut plures recta linea ducantur: erunt arcus inter quaſcunque duas lineas intercepti, ſimiles.* Ad propoſ. 33.

63 *ÆQVALES recta linea ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maiorq; eſt arcus minoris circuli, & etiam maior, quam ſit ſimilis ſit arcus circuli maioris.* Ad propoſ. 33.

64 *A dato rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, ut & ablatum, & id, quod relinquitur, ſimile ſit cuiuis rectilineo dato, ſimiliterque poſitum.* Ad propoſ. 33.

65 *DVOBVS datis rectilineis, tertium proportionale inuenire.* Ad propoſ. 33.

66 *TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire.* Ad propoſ. 33.

67 *DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire.* Ad propoſ. 33.

68 *DATO rectilineo duo rectilinea æqualia conſtituere, quæ ſimilia ſint, ſimiliterque deſcripta cuicunque rectilineo, habeantque inter ſe proportionem propoſitam quamcunque.* Ad propoſ. 33.

69 *DATO rectilineo duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo ſimilia ſint, ſimiliterque deſcripta, lateraque eorum homologa habeant inter ſe proportionem datam.* Ad propoſ. 33.

70 *DVOBVS datis rectilineis æquale rectilineum conſtituere, quod ſimile ſit, ſimiliterque poſitum cuiuis rectilineo dato.* Ad propoſ. 33.

71 *SI in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint: Erunt ſegmenta vnius ſegmentis alterius reciproca.* Ad propoſ. 33.

72 *SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum ſecantes: Erunt totæ, & ſegmenta extra circulum reciproca. Quod ſi ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat: Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum ſecet, & eius ſegmentum extrorſum.* Ad propoſ. 33.

73 *SI duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecuerint, & à duobus earum terminis perpendiculares ſibi mutuò demittantur: Erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum & ſectionem, altera verò inter ſectionem, & prioris lineæ aſſumptæ perpendicularem intercipitur, aliis duabus eodem modo inclusis reciproca.* Ad propoſ. 33.

74 *IN parallelogrammo duæ rectæ lateribus parallelæ ſe mutuò ſecantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.* Ad propoſ. 33.

75 *OMNE quadrilaterum à duabus diametris ſe mutuò ſecantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.* Ad propoſ. 33.

76 *IN*

76 *IN triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat basem extrema ac media ratione, tria latera sunt continuè proportionalia. Et si tria latera trianguli rectanguli sunt continuè proportionalia, perpendicularis ad basem ex angulo recto demissa secat basem extrema ac media ratione.* Ad propos. 33.

77 *A dato puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, quæ triangulum dimidiat in duo segmenta secundum proportionem datam.* Ad propos. 33.

78 *IMPERATAM partem ex triangulo auferre per lineam rectam, quæ à quouis dato puncto lateris ducitur.* Ad propos. 33.

79 *DATO rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere, maius vel minus, secundum proportionem datam.* Ad propos. 33.

80 *IN dato triangulo quocunque quadratum describere.* Ad propos. 33.

81 *INTRA datum quadratum, aliud quadratum describere in data proportione. Oportet autem datam proportionem dupla non esse maiorem.* Ad propos. 33.

82 *SI ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eisdem extremis per vnum idemque punctum circumferentiæ, duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus: Erit rectangulum comprehensum sub vtralibet secantium, & eius segmento interiore, quadrato diametri æquale.* Ad propos. 33.

83 *SI in circulo duæ diametri sese ad rectos angulos secent, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque secans circumferentiam, & alteram diametrum siue productam, siue non productam: Erit rectangulum comprehensum sub duobus segmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum punctum prioris diametri, & secundam diametrum, alterum verò inter idem punctum extremum, & circumferentiam interiicitur, æquale quadrato intra circulum descripto.*

VEL VNIVERSALIVS.

SI in circulo à quouis puncto diametri ad diametrum perpendicularis excitetur, ad quam ex alterutro terminorum diametri duæ rectæ ducantur, vna ad eius intersectionem in circumferentia, altera verò vt libet, secans circumferentiam in alio puncto: Erit rectangulum sub segmentis huius posterioris lineæ, quorum vnum sit inter prædictum terminum, & perpendicularem, alterum verò inter eundem terminum, & circumferentiam, æquale quadrato prioris rectæ inter eundem terminum, & circumferentiam, seu perpendicularem intercepta. Ad propos. 33.

84 *DATO circulo, & duobus punctis siue extra circulum, siue intra, dum-*

ora, dummodo heutrum sit in circumferentia: per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod unum punctum circumferentia, ita vt rectæ coniungentes duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam secant, parallela sit rectæ datæ duo puncta connectenti. Ad propos. 33.

85 *QVADRATRICEM lineam describere.* Ad finem lib. 6.

86 *SI ex centro per quauis puncta linea Quadratricis rectæ ducantur vsque ad circumferentiam Quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basim demittuntur perpendiculares, & alia rectæ eidem basi parallela: Erunt arcus Quadrantis inter semidiametros interiectæ, perpendicularibus, vel segmentis semidiametri inter parallelas positis, proportionales.* Ad finem lib. 6.

87 *DATVM arcum circuli in datam proportionem diuidere.* Ad finem lib. 6.

88 *ANGVLVM quemuis rectilineum in duos angulos datam habentes proportionem partiri: atque adeo & quemlibet arcum, & angulum in quotuis partes æquales distribuere.* Ad finem lib. 6.

89 *ISOSCELES triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam.* Ad finem lib. 6.

90 *OMNES figuras æquilateras in circulo describere.* Ad finem lib. 6.

91 *SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit: erunt arcus Quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis, continuè proportionales.* Ad finem lib. 6.

92 *RECTAM cuilibet arcui circuli, ex quo Quadratrix descripta est, æqualem reperire.* Ad finem lib. 6.

93 *SI basis Quadratricis statuatur semidiameter alicuius circuli: Erit eius latus Quadranti eiusdem circuli æquale.* Ad finem lib. 6.

94 *SI dua recta eandem proportionem habeant, quam basis Quadratricis ad eius latus, minor autem fiat semidiameter alicuius circuli; erit maior æqualis Quadranti eiusdem circuli.* Ad finem lib. 6.

95 *DATO circulo quadratum æquale constituere.* Ad finem lib. 6.

96 *DATO quadrato circulum æqualem describere.* Ad finem lib. 6.

97 *RECTILINEO cuicunque circulum æqualem: Et circulo figuram rectilineam æqualem constituere, quæ dato rectilineo cuicunque simili sit, & similiter descripta.* Ad finem lib. 6.

98 *DATÆ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.* Ad finem lib. 6.

99 *DATIS duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in vno eorum:*

rum: ex altero arcum aqualem abscindere. Oportet autem arcum in maiore circulo datum non esse maiorem circumferentia minoris circuli. Ad finem lib. 6.

IN SEPTIMO LIBRO.

1 *SI duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad assumpta sit Vnitas.* Ad propos. 1.

2 *SI propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Detractio ad Vnitatem Vsque non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.* Ad propos. 1.

3 *NVMERVS duos numeros metiens, metitur quoq; maximam eorum mensuram communem.* Coroll. propos. 2.

4 *PROPOSITIS duobus, aut pluribus numeris, explorare, an sint inter se primi, nec ne.* Ad propos. 2.

5 *NVMERVS tres numeros, Vel plures metiens, metitur quoque maximam eorum mensuram communem.* Ad propos. 3.

6 *SI Vnitas numeri pars fuerit, & altera Vnitas, Vel numerus alterius numeri eadem pars: Et simul Vtraque Vnitas, Vel Vnitas, & numerus simul, Vtriusque numeri simul eadem pars erit, qua Vnitas numeri.* Ad propos. 5.

7 *SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum aqualium numero, singuli singulorum eadem pars: Et omnes omnium simul eadem pars erunt, qua Vnus Vnius.* Ad propos. 5.

8 *SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum aqualium numero, singuli singulorum aquè multiplices: quàm multiplex est Vnius Vnus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.* Ad propos. 5.

9 *SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eadem partes: Et omnes omnium simul eadem partes erunt, qua Vnus Vnius.* Ad propos. 6.

10 *SI numerus numeri aquè fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.* Ad propos. 7.

11 *SI primus secundum aqualiter contineat, atq; tertius quartum, eandemque insuper partem, Vel partes: Erit è contrario secundus primi eadem partes, qua quartus tertij. Et si fuerit primus secundi eadem partes qua tertius quarti: Continebit è contrario secundus primum aqualiter, atque quartus tertium, eandemque insuper partem Vel partes.* Ad propos. 11.

12 *QVÆ proportiones numerorum eidem proportioni eadem sunt, inter se quoque sunt eadem.* Ad propos. 14.

13 *SI numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent: Habebunt producti numeri easdem rationes, quas numeri multiplicati, vel multiplicantes.* Ad propos. 18.

14 *SI maior fuerit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum: qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero. Et si, qui ex primo & quarto fit numerus, maior fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: maior erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum.* Ad propos. 19.

15 *SI maior fuerit proportio primi ad secundum, quàm secundi ad tertium: maior fiet numerus ex primo in tertium, quam ex secundo in se. Et si maior numerus fiat ex primo in tertium, quam ex secundo in se: maior erit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium.* Ad propos. 20.

16 *QVOTLIBET numeri minimi in continuatione suarum proportionum, sive eadem sint, sive diuersæ proportiones, metiuntur æquè totidem alios numeros, qui easdem cum eis proportiones habent, primus primum, secundus secundum, tertius tertium, &c.* Ad propos. 21.

17 *SI quatuor numeri proportionales sint: Et conuertendo proportionales erunt.* Ad propos. 22.

18 *SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt.* Ad propos. 22.

19 *SI diuisi numeri proportionales sint: Hi quoque compositi proportionales erunt.* Ad propos. 22.

20 *SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt.* Ad propos. 22.

21 *SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.* Ad propos. 22.

22 *SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habent.* Ad propos. 22.

23 *SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum, habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto,* Ad propos. 22.

24 *SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas*

alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem: Habebunt quoque illi omnes simul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales: Habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes simul. Ad propos. 22.

25 *QVOTCVNQVE numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi.* Ad propos. 24.

26 *NVMERVS, qui ex duobus compositus ad vnum illorum primus est, ad reliquum quoque est primus.* Ad propos. 30.

27 *SI duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem, genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certè ad ipsum sit compositus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compositus erit.* Ad propos. 32.

28 *MAXIMA mensura quotlibet numerorum metitur ipsos per numeros, qui minimi sunt eandem proportionem cum ipsis habentium.* Coroll. propos. 35.

29 *DVOS minimos numeros inuenire, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunque numeri dati continuè proportionales.* Ad propos. 35.

30 *SI duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, vel minor maiorem, producitur minimus numerus, quem illi metiantur.* Coroll. propos. 36.

31 *SI tres, vel plures numeri numerum quempiam metiantur: metietur quoque eundem minimus numerus, quem illi metiuntur.* Coroll. propos. 38.

32 *MINIMVS numerus, quem quotlibet numeri metiuntur, minimus est, habens partes à numeris metientibus denominatas.* Ad propos. 41.

33 *NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes, hac lege, vt qualibet pars subsequentem partem contineat.* Ad propos. 41.

IN OCTAVO LIBRO.

1 *SI tres numeri minimi sint continuè proportionales: erunt extremi eorum quadrati: Si autem fuerint quatuor, erunt cubi, &c.* Coroll. 1. propos. 2.

2 *EXTREMI numeri proportionalium quotcunque secundum doctrinam propos. 2. inuentorum, in data ratione minimorum, inter se primi sunt.* Coroll. 2. propos. 2.

3 *DVO numeri minimi in data ratione, metiuntur omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione.* Coroll. 3. propos. 21.

4 *SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex: neque alius quisquam vllius multiplex erit.* Ad propos. 6.

5 *SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus verò secundum metiatur: & quicunque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex: & quicunque alius cuiuslibet sequentium multiplex erit.* Ad propos. 6.

6 *SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam nullum à secundo metiatur: neque primus secundum metietur. Et si primus, vel alius quisquam nullius à secundo sit multiplex: neque primus secundi multiplex erit.* Ad propos. 6.

7 *SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet à secundo metiatur: metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quisquam cuiuslibet à secundo sit multiplex: primus quoque secundi multiplex erit.* Ad propos. 7.

8 *INTER numeros dupla proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis, non potest cadere numerus medius proportionalis.* Ad propos. 8.

9 *MVSICVM interuallum, quod Diapason appellatur, bifariam secari non potest in duas proportiones aquales. quod etiam de Tono dicendum est.* Ad propos. 8.

10 *DIAMETER quadrati cuiusuis lateri eiusdem est incommensurabilis.* Ad propos. 8.

11 *SI numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit, & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: erunt omnes producti continuè proportionales ab vnitate.* Ad propos. 9.

12 *SI quotquot numeri fuerint ab vnitate continuè proportionales: secundus ab vnitate in se multiplicatus producit tertium, & ex eodem in hunc fit quartus, & ex eodem in hunc quintus, & sic de cæteris.* Ad propos. 10.

13 *SI sint ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium: habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab vnitate; quarti verò eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.* Ad propos. 10.

14 *SI sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti verò eiusdem triplicatam, &c.* Ad propos. 10.

15 *SI inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum,*

continuè proportionales ceciderint numeri: quot inter vtrumque ipſorum, & aſſumptum, deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. Ad propoſ. 10.

16 *INTER duos quadratos, numeros cadit numerus medius proportionalis in continua proportione lateris ad latus.* Ad propoſ. 11.

17 *NVMERVS medius proportionalis inter duos quadratos, & vterus ipſorum quadratorum, compoſitis inter ſe ſunt.* Ad propoſ. 11.

18 *INTER duos cubos cadunt duo numeri medij proportionales in continua proportione lateris ad latus.* Ad propoſ. 12.

19 *DVO numeri medij proportionales inter duos cubos, & vterus ipſorum cuborum, inter ſe compoſitis ſunt.* Ad propoſ. 12.

20 *SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi ſit multiplex: & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et ſi vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex: & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non ſit multiplex: neque latus lateris erit multiplex. Et ſi latus lateris non ſit multiplex: neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.* Ad propoſ. 17.

21 *INTER duos ſimiles planos cadit medius proportionalis in ratione laterum homologorum, per quæ medius proportionalis inquiritur.* Ad propoſ. 18.

22 *NVMERVS medius proportionalis inter duos planos ſimiles, & vterus ipſorum planorum, ſunt inter ſe compoſiti.* Ad propoſ. 18.

23 *INTER duos ſimiles ſolidos cadunt duo medij proportionales in proportione laterum homologorum, per quæ medij proportionales inquiruntur.* Ad propoſ. 19.

24 *DVO numeri medij proportionales inter duos ſolidos ſimiles, & vterus ipſorum ſolidorum, inter ſe ſunt compoſiti.* Ad propoſ. 19.

25 *DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem ſemper numerus, quomodocunque ordinem inter ſe permutent.* Ad propoſ. 19.

26 *PROPORTIO cuiuſuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum, exhiberi nullo modo poteſt in duobus numeris quadratis.* Coroll. propoſ. 24.

27 *NVMERI in dupla proportione vel quintupla proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum.* Coroll. propoſ. 24.

28 *PROPORTIO cuiuſuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum reperiri non poteſt in duobus numeris cubis.* Coroll. propoſ. 25.

29 *NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſimiles plani ſunt.* Ad propoſ. 26.

30 *PLANI*

30 *PLANI numeri non ſimiles, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum.* Ad propoſ. 26.

31 *NVMERI, qui proportionem habent quam cubus numerus ad cubum numerum, ſunt ſolidi ſimiles.* Ad propoſ. 27.

32 *NVLLI numeri habentes duplam proportionem, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartientem, ſunt ſimiles plani, vel ſolidi.* Ad propoſ. 27.

33 *DVO quivis numeri primi, non ſunt ſimiles plani, vel ſolidi.* Ad propoſ. 27.

34 *DVO quicunque numeri inter ſe primi, qui quadrati non ſint, vel cubi (quamvis neuter eorum primus ſit) plani ſimiles non ſunt, vel ſolidi.* Ad propoſ. 27.

35 *DVO numeri plani, vel ſolidi ſimiles, quorum minor ſit Primus, minor maiorem numerat.* Ad propoſ. 27.

36 *DVO numeri inter ſe primi, quorum minor Primus ſit, non poſſunt eſſe plani, vel ſolidi ſimiles.* Ad propoſ. 27.

37 *DVOS numeros planos, vel ſolidos, non ſimiles invenire.* Ad propoſ. 27.

IN NONO LIBRO.

1 *SI duo numeri quadrati ſe mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.* Ad propoſ. 2.

2 *SI duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum, alter autem ſit quadratus: Et reliquus quadratus erit.* Ad propoſ. 2.

3 *SI duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem ſit quadratus: Reliquus non quadratus erit.* Ad propoſ. 2.

4 *SI duo numeri, quadratus & non quadratus, ſe mutuo multiplicantes faciant aliquem, Productus non quadratus erit.* Ad propoſ. 2.

5 *SI cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem, Factus non cubus erit.* Ad propoſ. 5.

6 *SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum: Et multiplicatus non cubus erit.* Ad propoſ. 5.

7 *SI ab Vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: quilibet major numerus acceptus tantum diſtabit ab aſſumpto quovis minore, quantum ab Vnitate abeſt is numerus, per quem minor maiorem metitur.* Ad propoſ. 11.

8 *SI ab Vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: quilibet illorum ſeipſum multiplicans produxit numerum, qui tantum ab eo diſtat in numeris proportionalibus, quantum ipſe ab Vnitate. Minor verò quivis maiorem quempiam multipli-*

eans producit numerum, qui tantum à maiore distat, quantum minor ab Vnitate. Ad propos. 11.

9 *NVLLVS numerus primus, qui maior sit eo, qui proximus est Vnitati, aut minor proximum Vnitati non metiens, metiri potest vllum, vel quemuis maiorem in proportionalibus numeris.* Coroll. propos. 12.

10 *SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi, vel certè ad alterum erit compositus.* Ad propos. 14.

12 *PRIORA* 10. *theorematis secundi libri in numeris demonstrare.* Ad propos. 15.

13 *NVLLVS numerus secari potest in duas partes ita, vt qui fit ex toto in minorem partem, quadrato maioris partis æqualis sit.* Ad propos. 14. & 29.

14 *SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes simul compositi, erunt primi.* Ad propos. 15.

15 *PROPOSITIS quotcunque numeris continuè proportionalibus, an ipsis possit alius proportionalis adiungi, considerare.* Ad propos. 19.

16 *SI sint quatuor numeri proportionales, sed non deinceps, quorum primus & tertius primi inter se sint, fieri non potest, vt detur alius, ad quem ita se habeat quartus, sicut secundus ad tertium.* Ad propos. 19.

17 *PRIMIS numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.* Ad propos. 20.

18 *IMPAR numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus, facit imparem.* Ad propos. 23.

19 *SI par numerus parem, aut seipsum multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.* Ad propos. 28.

20 *IMPAR numerus in se multiplicatus, imparem gignit.* Coroll. propos. 29.

21 *IMPAR numerus numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.* Ad propos. 29.

22 *IMPAR numerus numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.* Ad propos. 29.

23 *NVMERVS impar, qui ad aliquem numerum primus est; Primus quoque est ad eius duplum, quadruplum, octuplum, & sic deinceps per proportionem duplam progredsendo.* Coroll. propos. 31.

24 *NVMEROS omnes pariter tantum pares inuenire.* Ad propos. 32.

25 *NVME-*

25 *NVMEROS omnes pariter tantùm impares inuenire.* Ad propoſ. 33.

26 *NVMEROS omnes, qui & pariter pares ſint & pariter impares inuenire.* Ad propoſ. 34.

27 *QVOTCVNQVE numerorum continuè proportionalium, quorum primus, ſecundus, & vltimus noti ſunt, ſummam inuenire.* Ad propoſ. 35.

28 *NVMEROS omnes perfectos, & eorum partes aliquotas inuenire.* Ad propoſ. 36.

29 *QVOLIBET numero per duos quoſuis numeros diuiſo; Erunt duo hi numeri Quotientibus conuerſo ordine proportionales.* Ad propoſ. 36.

30 *QVOLIBET numero per quotuis numeros diuiſo: Erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus reſpondentibus conuerſo ordine proportionales.* Ad propoſ. 36.

31 *QVOLIBET numero per quotuis numeros continuè proportionales diuiſo; Erunt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continuè proportionales.* Ad propoſ. 36.

32 *SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus: Erit vt ſumma priorum ad quemlibet eorum, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illis in poſterioribus reſpondet:* Ad propoſ. 36.

33 *SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus: Summa priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diuiſa facit.* Ad propoſ. 36.

34 *SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur, & Quotientum ſumma per ipſos Quotientes: & horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes, & ſic deinceps in infinitum: Procreabuntur alternis ſemper ijdem primi Quotientes ordine conuerſo.* Ad propoſ. 36.

35 *SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur: Erit ſumma omnium Quotientum aqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis aqualiter diſtantium, vel denique (ſi Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe.* Ad propoſ. 36.

36 *SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium, quorum numerus ſit impar, per eos ſigillatim diuidatur: Erit ſumma omnium Quotientum numerus quadratus, cuius latus, ſiue radix eſt medius terminus.* Ad propoſ. 36.

37 *NVMEROS quotcunque in data ratione continuè proportio-*

nales reperire, quorum omnium summa aqualis sit numero, quis ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibusuis duobus, quis ab extremis aqualiter distant. Ad propos. 36.

38 *DVOS numeros in data proportione reperire, quorum summa aqualis sit numero producto ex vno in alterum.* Ad propos. 36.

39 *MINVTIARVM, sive numerorum fractorum proprietates, operationesq; varias demonstrare.* Ad finem lib. 9.

40 *PROPORTIONVM compositionem, contra quosdam Recentiores, explicare.* Ad finem lib. 9.

IN DECIMO LIBRO.

1 *SI duabus magnitudinibus incommensurabilibus proposititis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua praecedentem metietur.* Ad propos. 2.

2 *SI duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quadam reliqua praecedentem.* Ad propos. 2.

3 *MAGNITVDO metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.* Coroll. propos. 3.

4 *AN quotlibet magnitudines propositae sint commensurabiles, necne, considerare.* Ad propos. 3.

5 *MAGNITVDO metiens quotlibet magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.* Coroll. propos. 4.

6 *SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua bina magnitudines: Et ex aqualitate in eadem ratione erunt magnitudines, & numeri.* Ad propos. 4.

7 *MAGNITVDINES commensurabiles proportionem habent eandem, quam numeri, per quos earum communis mensura maxima ipsas metitur.* Ad propos 5.

8 *LINEAM rectam invenire, ad quam ita se habeat quavis alia data recta linea, vt numerus ad numerum: Item rectam, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datae rectae, vt numerus ad numerum.* Coroll. propos. 6.

9 *SI sint quotuis quantitates continuè proportionales, & alia totidem continuè quoq; proportionales, sitq; vt prima illarum ad vltimam, ita prima harum ad vltimam: Erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.* Ad propos. 8.

10 *RECTÆ linea, qua longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt: Qua verò potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et qua longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles:*

Quæ verò potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt. Coroll. propos. 9.

11 *DIAMETER quadrati cuiusuis lateri eiusdem incommensurabilis est.* Ad propos. 9.

12 *DVOS numeros planos inuenire, qui proportionẽ non habeant, quam quadratus numerus ad numerum quadratum.* Ad prop. 10.

13 *QVOTLIBET numeros inuenire, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.* Ad propos. 10.

14 *RECTA media proportionalis inter duas rectas potentia tantùm commensurabiles, vtrilibet illarum incommensurabilis est longitudine & potentia.* Ad propos. 11.

15 *SI sint duæ magnitudines incommensurabiles, altera verò sit vni cuipiam commensurabilis: erit & reliqua eidem commensurabilis.* Ad propos. 12.

16 *QVÆ incommensurabilibus sunt commensurabiles: & inter se incommensurabiles erunt.* Ad propos. 14.

17 *DVABVS datis rectis lineis inaqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, quàm minor. Item datis duabus rectis siue aqualibus, siue inaqualibus, inuenire rectam, qua illas potest.* Ad propos. 14.

18 *SI totæ magnitudo ex duabus compositæ commensurabilis sit alteri ipsarum: eadem & reliqua commensurabilis est.* Coroll. propos. 16.

19 *SI totæ magnitudo ex duabus compositæ, incommensurabilis sit alteri ipsarum: eadem & reliqua incommensurabilis est.* Coroll. propos. 17.

20 *DVABVS datis rectis lineis inaqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadratæ.* Ad propos. 17.

21 *DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub partibus contentum, aquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quàm quadratum à dimidia linea descriptum.* Ad propos. 17.

22 *SI sint duæ rectæ inaquales, & ad maiorem applicetur quartæ pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadratæ: Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, aqualia.* Ad propos. 17.

23 *QVOTCVNQVE lineæ Rationales longitudine inter se commensurabiles inuenire.* Ad propos. 19.

24 *RATIONALES linea non solum expositæ Rationali, sed etiam inter se sunt commensurabiles.* Ad propos. 19.

25 *SI sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratũ quod fit à prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.* Ad propos. 19.

26 *SPATIVM Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt.* Ad propoſ.19.

27 *RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt* Ad propoſ.21.

28 *DVAS aut plures quotcunque lineas Rationales potentia tantùm inter ſe commenſurabiles inuenire.* Ad propoſ.21.

29 *PROPOSITIS quotcunque Rationalibus lineis potentia ſolùm commenſurabilibus, inuenire adhuc aliam, quæ omnibus illis commenſurabilis ſit potentia tantùm.* Ad propoſ.21.

30 *LINEA media proportionalis inter duas Rationales potentia tantùm inter ſe commenſurabiles, Irrationalis eſt, quæ vocatur Media.* Ad propoſ.22.

31 *OMNE ſpatium Medium æquale eſt cuidam alteri rectangulo contento ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, ſi ipſum ſub talibus iam non contineatur.* Ad propoſ. 22. & 23.

32 *SPATIVM Medio ſpatio commenſurabile, Medium eſt.* Ad propoſ.24.

33 *DVAS rectas Medias longitudine commenſurabiles: Item duas potentia tantùm commenſurabiles inuenire.* Ad propoſ.24.

34 *RECTANGVLVM ſub duabus Mediis longitudine & potentia incommenſurabilibus contentum, neque Rationale eſt, neque Medium, ſed æquale alteri cuipiam rectangulo, quod continetur ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.* Ad propoſ. 26.

35 *RATIONALE ſuperat Rationale Rationali.* Ad propoſ.27.

36 *DVOS numeros planos ſimiles inuenire.* Ad propoſ.29.

37 *DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit.* Ad propoſ.29.

38 *DVOS numeros quadratos inuenire, quorum exceſſus ſit numerus quadratus.* Ad propoſ.29.

39 *DVOS numeros quadratos inuenire, quorum exceſſus non ſit numerus quadratus.* Ad propoſ.29.

40 *DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus.* Ad propoſ.29.

41 *DVOS numeros inuenire, ita vt ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum.* Ad propoſ.29.

42 *SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum minoris. Et vt minor ad maiorem, ita rectangulum ſub ipſis ad quadratum maioris.* Ad propoſ. 31.

43 *SI ſint tres lineæ rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum ſub*

ſub prima & ſecunda contentum, ad id, quod ſub ſecunda & tertia continetur. Ad propoſ. 32.

44 *SI recta linea ſecetur in duas partes inæquales: erit vt vna pars ad alteram, ita rectangulum ſub totâ & illa parte, ad rectangulum ſub totâ & hac altera parte contentum.* Ad propoſ. 33.

45 *SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, vna autem ſecetur bifariam: erit rectangulum ſub ipſis contentum, duplum rectanguli, quod ſub inſectâ linea, & dimidiâ parte lineæ ſectæ continetur.* Ad propoſ. 33.

46 *FIERI poteſt, vt duo ſpatia Irrationalia componant ſpatium Rationale.* Ad propoſ. 34.

47 *DVO ſpatia Rationalia Rationale ſpatium componunt.* Ad propoſ. 34.

48 *INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommenſurabiles.* Ad propoſ. 36.

49 *QVOD ſub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale eſt.* Ad propoſ. 38.

50 *SI recta linea non bifariam ſecetur, erit compoſitum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum ſub partibus bis comprehenſum, quadrato eius lineæ, quæ maior pars minorem ſuperat.* Ad propoſ. 39.

51 *SI recta linea in partes inæquales ſecetur, & rurſus in alias partes inæquales: erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul maiora quadratis partium minus inæqualium ſimul.* Ad propoſ. 42.

52 *SI recta linea ſecta ſit vtcunque: erit rectangulum ſub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum contentum ſub totâ, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.* Ad propoſ. 54.

53 *EI, quæ eſt ex binis nominibus, potentia tantùm commenſurabilis, & ipſa ex binis nominibus eſt, ſed non ſemper ordine eadem.* Ad propoſ. 67.

54 *EI, quæ eſt ex binis Mediis, potentia tantùm commenſurabilis, & ipſa ex binis Mediis eſt, atq; ordine eadem.* Ad propoſ. 68.

55 *RECTA linea, quæ ex binis nominibus, & reliquæ Irrationales per compoſitionem factæ ipſum ſubſequentes, neque ipſi Mediæ, neque inter ſe eadem ſunt.* Ad propoſ. 73.

56 *RECTA linea media proportionalis ſecundum Analogiam Arithmeticam inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, quæ per compoſitionem fit, eſt quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media exiſtit.* Ad propoſ. 73.

57 *SI à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.* Ad propoſ. 74.

58 *SI à maiori nomine eius, qua ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Media Apotome prima.* Ad propos. 75.

59 *SI à maiori nomine eius, qua ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Media Apotome secunda.* Ad propos. 76.

60 *SI à maiori nomine linea Maioris minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.* Ad propos. 77.

61 *SI à maiori nomine eius, qua Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.* Ad propos. 78.

62 *SI à maiori nomine eius, qua bina Media potest, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.* Ad propos. 79.

63 *SI idem excessus sit inter primam magnitudinem & secundam, qui inter tertiam magnitudinem & quartam, erit vicissim idem excessus inter primam magnitudinem & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam: Ac proinde Quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habent quoque vicissim Arithmeticam Analogiam.* Ad propos. 79.

64 *RECTA linea Apotome potentia tantùm commensurabilis, & ipsa Apotome est, sed non semper ordine eadem.* Ad propos. 104.

65 *APOTOME, & cetera ipsam consequentes Irrationales lineæ per detractionem facta, neq; ipsi Media, neq; inter se sunt eadem.* Coroll. propos. 111.

66 *FIERI potest, vt spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus.* Coroll. propos. 115.

67 *NON solùm linea, sed magnitudines etiam plana, ac solida incommensurabiles esse possunt.* Ad propos. 117.

IN VNDECIMO LIBRO.

1 *A puncto in sublimi ad subiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur.* Ad propos. 13.

2 *SI fuerint duo plana parallela: Recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoq; recta erit.* Ad propos. 14.

3 *DATO plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.* Ad propos. 15.

4 *QVÆ eidem plano parallelæ, & inter se sunt parallelæ: Vel si concurrunt, vnum planum efficiunt.* Ad propos. 16.

5 *SI in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea vna vnius anguli, linea vni alterius anguli parallela: Erit quoq; altera linea alteri lineæ parallela, si modo ductæ sint ex eadem parte plani per priores parallelas ductæ.* Ad prop. 16.

6 *SI duæ, aut plures lineæ rectæ in uno plano existentes secẽtur quotuis lineis parallelis: Segmenta illarum linearum inter parallelas proportionalia erunt.* Ad propoſ.17.

7 *DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas: parallela sunt. Et duorum planorum parallelorum, si unum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum.* Ad propoſ.18.

8 *PER rectam in plano quouis datum, planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum.* Ad propoſ.18.

9 *SI Prisma quodcunq; secetur plano aduersis planis parallelo; erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.* Ad propoſ.25.

10 *SI Prisma quodcunq; secetur plano aduersis planis parallelo: sectio est figura aqualis, & similis planis oppositis.* Coroll. propoſ.25.

11 *SOLIDA parallelepipeda aqualia super eandem basim, sine insistentes linea in eisdem collocentur rectis, sine non: in eadem sunt altitudine.* Ad propoſ. 30.

12 *SOLIDA parallelepipeda aqualia super aquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda aqualia in eadem altitudine, super aquales sunt bases, si non habuerint basim eandem.* Ad propoſ. 31.

13 *SI solida parallelepipeda inter se sunt, ut bases: ipsa erunt sub eadem altitudine.* Ad propoſ.32.

14 *SI fuerint quatuor linea rectæ proportionales continuè: ut est prima ad quartam, ita erit parallelepipedum super primam descriptum, ad parallelepipedum simile, similiterq; descriptum super secundam.* Coroll. propoſ. 33.

15 *PRISMATA, quorum bases sunt triangula super eandem basim, vel aquales, & in eadem altitudine, sunt inter se aqualia.* Ad propoſ.34.

16 *PRISMATA, quorum bases sunt triangula, sub eadem altitudine; inter se sunt, ut bases.* Ad propoſ.34.

17 *PRISMATA similia, quorum bases sunt triangula, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.* Ad propoſ.34.

18 *PRISMATVM aqualium, quorum bases sunt triangula, bases & altitudines reciprocantur. Et quorum prismatum triangulares bases habentium bases & altitudines reciprocantur, illa sunt aqualia.* Ad propoſ.34.

19 *SI fuerint duo anguli plani aquales, quorum verticibus sublimes recta linea aquales insistant, qua cum lineis primò positis angulos contineant aquales, utrumque utrique: Erunt à punctis extremis linearum sublimium ad plana angulorum primò positorum demissa perpendiculares inter se aquales.* Coroll. propoſ.35.

20 *SI*

20 *SI parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo à media linea descripto: Erunt tres rectæ lineæ continuè proportionales.* Ad propos. 36.

21 *SI fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia, similiterq; descripta ex eis, proportionalia. Et si tria solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: & ipsæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.* Ad propos. 37.

22 *SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et prismata triangulares bases habentia, quæ ab ipsis similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si prismata triangulas bases habentia, quæ & similia, similiterq; describuntur, fuerint proportionalia. Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.* Ad propos. 37.

23 *SI fuerint tres rectæ proportionales, erunt & prismata triangulares bases habentia, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia. Et si tria prismata triangulares bases habentia, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.* Ad propos. 37.

24 *IN omni parallelepipedo diametri se mutuò bifariam secant in uno puncto.* Coroll. propos. 39.

25 *SI solidum parallelepipedum plano secetur per centrum: bifariã secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum.* Ad propos. 39.

IN DVODECIMO LIBRO.

1 *CIRCVLVS ad circulum est, ut polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum.* Coroll. propos. 2.

2 *SI pyramides triangulares inter se sint, ut bases: ipsæ erunt sub eadem altitudine.* Ad propos. 5.

3 *PYRAMIDES triangulares eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constitutæ: sunt inter se æquales. Et pyramides triangulares æquales super eandem, vel æquales bases: eandem habent altitudinem. Item pyramides triangulares æquales, eandemq; habentes altitudinem: bases habent æquales, si non habuerint eandem.* Coroll. propos. 5.

4 *PYRAMIDES quarumlibet basium, quæ inter se sunt, ut bases: eandem habent altitudinem.* Ad propos. 6

5 *PYRAMIDES eiusdem altitudinis super æquales bases quaslibet, vel super eandem constitutæ: sunt inter se æquales. Et pyramides æquales super æquales bases quaslibet, vel super eandem constructæ: eandem habent altitudinem. Item pyramides quarumli-*

rumlibet baſium æquales, eandemq; habentes altitudinem: æquales habent baſes, ſi non habuerint eandem. Coroll. propoſ. 6.

6 *PYRAMIS qualibet tertia pars eſt priſmatis, quod eandem habet & baſim, & altitudinem; Siue, Priſma quodlibet triplum eſt pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & baſim, & altitudinem.* Coroll. 1 propoſ. 7.

7 *PYRAMIS qualibet tertia pars eſt Priſmatis, quod æqualem habet & baſim, & altitudinem, licet baſis vnius plura vel pauciora latera contineat, quam baſis alterius.* Ad propoſ. 7.

8 *PRISMATA ſub eadem altitudine, quæſcunque habeant baſes: inter ſe ſunt, vt baſes Et priſmata quorumcunq; baſium, ſi inter ſe ſint, vt baſes: ſub eadem ſunt altitudine* Ad propoſ. 7.

9 *PRISMATA eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes quæſcunque: inter ſe ſunt æqualia. Et Priſmata æqualia ſuper æquales baſes quæſcunque, vel ſuper eandem: in eadem ſunt altitudine.* Coroll. 2. propoſ. 7.

10 *PYRAMIDES ſimiles, quarum baſes plura latera, quàm tria, continent: proportionem habent homologorum laterum triplicatam.* Coroll. propoſ. 8.

11 *PRISMATA ſimilia quorumcunq; baſium: proportionem habent laterum homologorum triplicatam.* Ad propoſ. 8.

12 *PYRAMIDES multangulæ ſimiles diuiduntur in pyramides triangulares ſimiles, & numero æquales, & homologas totis.* Ad propoſ. 8.

13 *PRISMATA multangula ſimilia diuiduntur in priſmata ſimilia triangulares baſes habentia, & numero æqualia, & homologa totis.* Ad propoſ. 8.

14 *PYRAMIDVM æqualium quæſcunque baſes habentium, reciprocantur baſes, atq; altitudines. Et quarum pyramidũ quæſcunq; baſes habentium, reciprocantur baſes, atq; altitudines: illæ ſunt æquales.* Ad propoſ. 9.

15 *PRISMATVM quorumlibet æqualium reciprocantur baſes, & altitudines. Et quorum priſmatum baſes, atq; altitudines reciprocantur, illa inter ſe ſunt æqualia.* Ad propoſ. 9.

16 *OMNIS conus ſiue rectus, ſiue ſcalenus; tertia pars eſt cuiuslibet cylindri, ſiue recti, ſiue ſcaleni, eandem cum ipſo & baſim, & altitudinem habentis, licet non ſit idem axis coni, & cylindri.* Ad propoſ. 10.

17 *CONI, & cylindri ſub eadem altitudine, ſiue ambo ſint recti, ſiue ſcaleni; ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus: inter ſe proportionem habent, quam baſes.* Ad propoſ. 11.

18 *SI coni, & cylindri inter ſe ſint, vt baſes: ipſi ſub eadem altitudine erunt.* Ad propoſ. 11.

19 *CONI, & cylindri eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æqua-*

les baſes conſtituti, ſiue ambo ſint recti, ſiue ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus: inter ſe ſunt æquales. Coroll. propoſ. 11.

10 *CONI, & cylindri æquales ſuper eandem, vel æquales baſes in eadem ſunt altitudine. Et coni, ac cylindri æquales in eadem altitudine ſuper æquales baſes ſunt, ſi non habuerint eandem.* Coroll. propoſ. 11.

11 *CONI, & cylindri ſcaleni ſimiles, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.* Ad propoſ. 12.

12 *CONI, & cylindri ſcaleni ſuper æqualibus baſibus, vel etiam ſi vnus ſit rectus, & alter ſcalenus: inter ſe ſunt, vt altitudines.* Ad propoſ. 14.

13 *SVPER æqualibus baſibus priſmata, parallelepipeda, & pyramides; inter ſe ſunt, vt altitudines.* Ad propoſ. 14.

14 *CONI, & cylindri tam recti, quàm ſcaleni: Item priſmata, parallelepipeda & pyramides, ſi ſint, vt altitudines, baſes habent æquales.* Ad propoſ. 14.

15 *CONORVM, & cylindrorum æqualium, ſiue ambo ſcaleni ſint, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus: baſes & altitudines reciprocantur. Et quorum conorum, & cylindrorum ſiue ambo ſint ſcaleni, ſiue vnus rectus & alter ſcalenus, baſes & altitudines reciprocantur: illi ſunt æquales.* Ad propoſ 15.

16 *SI duobus circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribatur minorem circulum non tangens, & ab extremitate vnius lateris polygoni inſcripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum perpendicularis ducatur: hæc nullo modo circulum minorem tanget, ſed extra ipſum cadit.* Coroll. propoſ. 16.

17 *DVO polyedra ſimilia in duabus ſphæris deſcripta, proportionem habent triplicatam eius, quam habent ſphærarum diametri.* Coroll. propoſ. 17.

18 *SPHÆRA ad ſphæram eſt, vt polyedrum in illa deſcriptum, ad polyedrum in hac deſcriptum.* Coroll. propoſ. 18.

IN TERTIODECIMO LIBRO.

1 *SI recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentum aſſumens dimidium maioris ſegmenti quintuplum poſſit eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati: Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione.* Ad propoſ. 3.

2 *SI recta linea inæqualiter ſecetur, ſitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex maiore ſegmento deſcripti: Recta illa linea extrema ac media ratione ſecabitur.* Ad propoſ. 4.

3 *SI recta linea extrema ac media ratione ſecetur: totæ lineæ aſſumens*

assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati. Et si recta linea inaequaliter secetur, totaque assumens minus segmentum possit quintuplum eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati. Recta illa linea extrema & media ratione secta est. Ad propos. 4.

4 *SI recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahatur q3 ex maiori segmento segmentum minus: erit maius segmentum sectum extrema ac media ratione, & minus segmentum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat.* Ad propos. 5.

5 *SI linea secetur extrema ac media ratione, atq3 ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: Erit quoq3 dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.* Ad propos. 5.

6 *SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitq3 maius segmentum linea Rationalis: Erit minus segmentum Apotome.* Ad propos. 6.

7 *RECTA, quæ angulum Pentagoni aquilateri, & aquianguli subtendit, parallela est opposito lateri.* Ad propos. 8.

8 *SI latus hexagoni in quopiam circulo descripti secetur extrema & media ratione: maius illius segmentum est latus decagoni in eodem circulo descripti.* Ad propos. 9.

9 *SI linea diuisa extrema ac media ratione, maius segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli: Erit minus segmentum latus decagoni eiusdem circuli: Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli, erit maius segmentum latus hexagoni eiusdem circuli.* Ad propos. 9.

10 *LINEA recta, quæ ex centro circuli ducta diuidit arcũ quempiam bifariam, diuidit quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos.* Coroll. 1. propos. 10.

11 *DIAMETER circuli ex angulo quouis pentagoni in eo descripti ducta, & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos.* Coroll. propos. 10.

12 *IN dato circulo latera pentagoni, & decagoni vna eademq3 opera inuenire.* Ad propos. 10.

13 *DIAMETER circuli potentia est sesquitertia lateris trianguli aquilateri in eo circulo descripti.* Coroll. 1. propos. 12.

14 *SI in circulo triangulum æquilaterum describatur: Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos: Semidiameter quoq3 vicissim bifariam, & ad angulos rectos secabitur à latere opposito.* Ad propos. 12.

15 *SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, qua sit media proportionalis inter segmenta linea: Semicirculus circa illam lineam re-*

dam descriptum, transibit per extremum punctum lineæ perpendicularis. Ad propos. 13.

14 *DIAMETER sphæra potentia est quadrupla sesquialteræ semidiametri circuli circa basim pyramidis in ea sphæra constructæ descripti.* Coroll. 1. propos 13.

15 *LINEA perpendicularis ex centro sphæræ ad planum basis pyramidis in ea sphæra constructa demissa, sextæ pars est diametri sphæræ, & tertia pars semidiametri.* Coroll. 2. propos 13.

16 *ALTITVDO pyramidis in sphæra descriptæ, duas tertias partes diametri sphæræ continet.* Coroll. 2. propos 13.

17 *IN Octaedro tres diametri se mutuò ad angulos rectos secant in centro sphæræ: nec non & tres quadratæ ex lateribus Octaedri compositæ se mutuò ad angulos rectos secant.* Coroll. 1. propos. 14.

18 *OCTAEDRVM dividitur in duas pyramides similes, & æquales, quarum basis communis est quadratum ex Octaedri lateribus compositum.* Coroll. 2 propos 14.

19 *SI Tetraedrum, & Octaedrum in eadem sphæra describantur; erit Tetraedri latus potentia sesquitertium lateris Octaedri.* Coroll. 3. propos 14.

20 *BASES Octaedri oppositæ, sunt parallelæ.* Coroll. 4. propos. 14.

21 *OMNES diametri cubi sunt inter se æquales, sesq$_3$ mutuò bifariam secant in centro sphæræ: nec non & rectæ lineæ, quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt, bifariam in eodem centro dividuntur.* Coroll. 1. propos. 15.

22 *POTENTIA diametri sphæræ æqualis est potentijs laterum Tetraedri, & cubi simul sumptis.* Coroll. 2. propos. 15.

23 *DIAMETER sphæræ potentia est quintupla semidiametri circuli quinq$_3$ latera Icosaedri pentagonum constituentis ambientis.* Coroll. 1 propos. 16.

24 *DIAMETER sphæræ composita est ex latere hexagoni, hoc est, ex Semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli, qui circa quinq$_3$ Icosaedri latera describitur.* Coroll. 2. prop. 16.

25 *ICOSAEDRI latera opposita, sunt parallela.* Coroll. 3. propos. 16.

26 *SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum est latus Dodecaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.* Coroll. 1. propos. 17.

27 *LATVS cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadē sphæra comprehensi.* Coroll 2. propos. 17.

28 *SI recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum est latus Dodecaedri, maius segmentum est latus cubi eiusdem sphæræ.* Coroll. 2. propos 17.

29 *IN Dodecaedro sunt sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos, à tribus lineis*

neis rectis aqualibus ſeſe in centro Dodecaedri biſariam quoque, & ad angulos rectos ſecantibus. Coroll.3. propoſ.17.

30 *SI recta diuidens oppoſitum latera Dodecaedri biſariam & ad angulos rectos, ſecetur extrema ac media ratione: maius ſegmentum eſt latus cubi, minus verò latus Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi.* Coroll.4. propoſ.17.

31 *PRÆTER quinq; corpora regularia, qua Euclides hoc lib.13. conſtruxit, nullum aliud dari poteſt.* Ad propoſ.18.

32 *QVOTNAM latera, & angulos quoduis Regularium ſolidorum contineat.* Ad propoſ.18.

33 *CVBVS, & Octaedrum: Item Icoſaedrum, & Dodecaedrum, reciproca ſunt, quod ad numerum baſium, & angulorum ſolidorum attinet: Solum Tetraedrum cum nullo reciprocatur, ſed tot baſes habet, quot angulos ſolidos.* Ad propoſ.18.

IN QVARTODECIMO LIBRO.

1 *LINEA perpendicularis ducta ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, ſecat arcum, quem dicta hæc linea ſubtendit, biſariam.* Coroll.1. propoſ.1.

2 *LINEA perpendicularis ex centro ad latus pentagoni ducta, æqualis eſt vtriq; linea ſimul, & ei, qua ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inſcripti ducitur, perpendiculari, & dimidio lateris decagoni.* Coroll.2. propoſ.1.

3 *LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum eandem proportionem habet, quam recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli ad latus ipſius pentagoni.* Ad propoſ.2.

4 *SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo deſcripti ducta ſecetur extrema ac media ratione: maius ſegmentum æquale eſt perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ducta: minus verò æquale eſt dimidio lateris decagoni in eodem circulo deſcriptorum.* Ad propoſ.2.

5 *SI in ſphæra eadem cubus, & Dodecaedrum inſcribantur: quadratum lateris cubi, & quadratum lateris Dodecaedri, vtraq; ſimul, quintupla ſunt quadrati ſemidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis.* Coroll. propoſ.3.

6 *SVPERFICIES cuiuslibet Dodecaedri ad ſuperficiem cuiuſcunque Icoſaedri, etſiamſi non deſcribantur amba figura in eadem ſphæra, eſt ſicut rectangulum contentum ſub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum ſub latere Icoſaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icoſaedri in dictum latus.* Coroll propoſ.7.

7 *SI ex centro circul. triangulum Tetraedri, vel Octaedri, sive quadratum cubi circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus. Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficies Tetraedri; In Octaedro verò, & cubo, duodecies sumptum, superficiei Octaedri, & cubi aequale.* Ad propos. 7.

8 *RECTANGVLVM comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad vnum eius latus ducta, & sub quinque sextu partibus lateris cubi eidem sphaerae, in qua Icosaedrum, inscripti, aequale est pentagono Dodecaedri in eadem sphaera constituti.* Coroll. propos. 8.

9 *QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphaerae, eandem habent latera cubi, & Icosaedri in quamvis alia sphaera descriptorum.* Ad propos. 10.

10 *SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solùm habet eandem proportionem, quam latus Icosaedri in eadem sphaera cum ipsis, de quo fuit propos. 6. huius lib. sed etiam, quam abtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphaera,* Ad propos. 10.

11 *SI sphaera plano quopiam secatur, communis sectio circulus erit.* Ad propos. 10.

12 *SI planum sphaeram secans transierit per centrum, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphaera: Si verò planum secans per sphaerae centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum quàm sphaera, illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphaerae ad planum secans ducta.* Coroll. propos. 10.

13 *CIRCVLI in sphaera aequales aequaliter distant à centro sphaerae. Et circuli aequaliter distantes à centro sphaerae, aequales sunt.* Ad propos. 10.

14 *EADEM proportio est lateris cubi ad latus Icosaedri, quae superficiei Dodecaedri ad superficiem Icosaedri: Et linea potentis totum quamcunq; sectam extrema ac media ratione, & eius segmentum maius, ad lineam potentem totum eandem, & minus segmentum illius. Et Dodecaedri ad Icosaedrum eiusdem sphaerae.* Coroll. propos. 11.

15 *LINEA perpendicularis ex vno angulo trianguli aequilateri ad latus oppositum demissa secat & angulum, & latus bifariam.* Coroll. propos. 12.

16 *OMNE triangulum aequilaterum, cuius latus sit Rationale, est superficies Media.* Coroll. propos. 13.

17 *LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli aequilateri ad basim oppositam ducta sesquialtera est eius, quae inter centrum trianguli, & dictum angulum interijcitur. Haec autem inter*

ter centrum trianguli, & dictum angulum interiecta dupla est eius perpendicularis, qua ex centro trianguli, ad basim eiusdem ducitur. Coroll. propos. 18.

18 *SOLIDVM, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri, sphæra dictum cubum comprehendentis, æquale est cubo. Vel solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partē quadrati diametri sphæræ, æquale est cubo.* Coroll. prop. 20.

19 *SOLIDVM, quod fit ex perpendiculari à centro cuiuscunque corporis regularis ad aliquam eius basim ducta, in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est proposito corpori regulari.* Ad propos. 20.

20 *LINEÆ perpendiculares coniungentes centra circulorum, qui bases oppositas tam cubi, quam Octaedri in eadem sphæra circumscribunt, inter se æquales sunt.* Coroll. propos. 21.

21 *ALTITVDO Octaedri ad altitudinem Tetraedri eiusdem sphæræ est, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri.* Coroll. propos. 22.

22 *DIAMETER sphæræ ad latus Tetraedri est, vt latus Octaedri ad latus cubi eiusdem sphæræ.* Coroll. propos. 22.

23 *SI linea quæuis recta secetur extrema ac media ratione, & alia linea potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri: maius segmentum erit latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in qua Octaedrum describitur.* Coroll. propos. 25.

24 *SI in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppositum: quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale est ipsi triangulo.* Coroll. propos. 29.

25 *DIAMETER sphæræ potentia est dupla sesquiquartæ axis Tetraedri, seu altitudinis ipsius; atq; adeo diameter longitudine est sesquialtera axis, vel altitudinis Tetraedri.* Coroll. 1 prop. 31.

26 *AXIS, seu altitudo Tetraedri ad latus cubi eidem sphæræ inscripti est, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam.* Coroll. 2. propos. 31.

27 *PRISMA eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto.* Coroll. propos. 32.

IN QVINTODECIMO LIBRO.

1 *SI in Tetraedro Octaedrum inscribatur, diuidetur Tetraedrum bifariam tribus quadratis æqualibus, qua Octaedrum bifariam quoq; & sese ad angulos rectos intersecant.* Coroll. propos. 2.

2 *RECTÆ lineæ centra basium cubi oppositarum connectentes se mutuò & bifariam, & ad angulos rectos secant.* Coroll. propos. 3.

3 *IDEM est centrum Icosaedri, ac sibi inscripti Dodecaedri.* Coroll. propos. 5.

4 *SI Tetraedrum Octaedro inscribatur, erunt quatuor bases Tetraedri octo basibus Octaedri parallela, singula videlicet binis oppositus.* Coroll. 1. propos. 6.

5 *SI in Octaedro Tetraedrum inscribatur; recta, quæ centra basium Octaedri oppositarum coniungit, sesquialtera est axis Tetraedri, hoc est, perpendicularis ab angulo Tetraedri ad basim oppositam deducta.* Coroll. 2. propos. 6.

6 *RECTA subtendens vnum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallela est opposito lateri.* Coroll. propos. 8.

7 *DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum inscribitur.* Ad prop. 13.

8 *SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est Dodecaedri in cubo descripti: Maius verò segmentum latus cubi in hoc Dodecaedro descripti.* Ad propos. 13.

9 *LATVS cubi æquale est duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.* Ad propos. 13.

10 *RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens, æqualis est lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.* Ad propos. 13.

11 *DIAMETER Icosaedri potest & latus icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.* Ad propos. 14.

12 *BIFARIÆ sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.* Ad propos. 14.

13 *SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.* Ad propos. 14.

14 *ICOSAEDRI tam latera, quàm triangula opposita sunt inter se parallela.* Ad propos. 14.

15 *IDEM est centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti.* Coroll propos. 15.

16 *SI duo latera trianguli æquilateri secentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius segmentum, alterius verò minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum: Recta connectens dictas sectiones duplum potest minoris segmenti.* Coroll. 1. propos. 16.

17 *SI in Octaedro Icosaedrum describatur, collocabuntur octo bases Icosaedri in octo basibus Octaedri, idemq; erit centrum basis Octaedri, & basis Icosaedri.* Coroll. 2. propos. 16.

18 *IDEM centrum est Octaedri, atq; sibi inscripti Icosaedri.* Coroll. 3. propos. 16.

19 *IDEM est centrum pyramidis, & cubi in ea descripti.* Coroll. 1. propos. 18.

20 *RECTA coniungens bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transit per centrum pyramidis, triplaque est lateris cubi in pyramide descripti.* Coroll. 2. propos. 18.

21 *IDEM est centrum pyramidis, & Octaedri in ea descripti.* Ad propos. 18.

IN SEXTODECIMO LIBRO.

1 *LATVS Icosaedri Octaedro inscripti, maius est segmentum rectæ diuisæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo basis Octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione.* Coroll propos. 3.

2 *LATVS Icosaedri in pyramide descripti, est Apotome.* Coroll. propos. 4.

3 *LATVS Octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti, vel eius rectæ extrema, ac media ratione diuisæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri Octaedro inscripti.* Coroll. propos. 11.

4 *DIAMETER Icosaedri binas rectas potest, diametrum scilicet cubi in ipso descripti, & diametrum circuli triangulum Icosaedri ambientis.* Coroll. propos. 15.

5 *IDEM centrum est Octaedri, atque cubi sibi inscripti.* Coroll. 1. propos. 23.

6 *OCTAEDRVM ad sibi inscriptum cubum eandem habet rationem, quam eorum laterum quadrata habent.* Coroll. 2. propos. 23.

7 *DODECAEDRVM à duplo cubi sibi inscripti deficit duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateris cubi est æqualis, latitudo autem tertia parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique à latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit: Alterius verò & longitudo & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit; ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales.* Coroll. propos. 28.

8 *PYRAMIS excedit duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens.* Coroll. propos. 31.

9 *DATIS duobus circulis in sphæra parallelis, datumque in vno eorum linea recta, ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.* Ad finem lib. 16.

10 *SI in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ*

recta parallela abscindant arcus similes: erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius rectæ cum centro, parallela duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro coniungunt. Ad finem lib. 16.

11 *SI in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad easdem partes centrorum: Rectæ harum parallelarum extrema puncta ad easdem partes coniungentes, æquales quoque, & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares.* Ad finem lib. 16.

12 *SI in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes centrorum: Rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad easdem partes coniungentes, in centro sphæræ se intersecant, ac proinde diametri sphæræ erunt, & inter se æquales: Rectæ verò earundem parallelarum extrema puncta ad easdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter se sunt, & cum parallelis rectos angulos constituunt.* Ad finem lib. 16.

13 *IN datæ sphæræ duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera.* Ad finem lib. 16.

14 *IN datæ sphæræ Pyramidem aliter, quam ab Euclide factum est, describere.* Ad finem lib. 16.

15 *In datæ sphæræ Octaedrum aliter, quam ab Euclide factum est, describere* Ad finem lib 16.

16 *IN datæ sphæræ cubum aliter, quam ab Euclide factum est, describere.* Ad finem lib. 16.

17 *IN datæ sphæræ Icosaedrum aliter, quam ab Euclide factum est, describere.* Ad finem lib. 16.

18 *IN datæ sphæræ Dodecaedrum aliter, quam ab Euclide factum est, describere.* Ad finem lib. 16.

19 *SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera: erunt viginti triangula simul maiora, quam octo quadrata simul.* Ad finem lib. 16.

20 *OCTO quadrata ex semidiametro sphæræ descriptæ, æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti.* Ad finem lib. 16.

21 *SI Octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur; erit perpendicularis è centro sphæræ ad vnam basim Icosaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basim Octaedri, & cubi ducta.* Ad finem lib. 16.

22 *SI cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur: superficies Icosaedri superficie cubi maior est.* Ad finem lib. 16.

23 *DODECAEDRVM Icosaedro in eadem sphæra maius est.* Ad finem lib. 16.

24 *ICOSAEDRVM cubo in eadem sphæra maius est.* Ad finem lib. 16.

25 *CVBI*

15 *CVBVS Octaedro in eadem ſphæra maior eſt.* Ad finem lib. 16.

16 *OCTAEDRVM Tetraedro in eadem ſphæra maius eſt.* Ad finem lib. 16.

17 *SVPERFICIES conuexa Dodecaedri maior eſt ſuperficie conuexa Icoſaedri in eadem ſphæra: Et ſuperficies Icoſaedri maior ſuperficie cubi: Et ſuperficies cubi maior ſuperficie Octaedri: Superficies denique Octaedri maior ſuperficie Tetraedri.* Ad finem lib. 16.

18 *ANGVLVM inclinationis duarum baſium cuiuſcunque corporis regularis inuenire.* Ad finem lib. 16.

19 *OMNES inclinationes baſium cuiuſcunque corporis regularis, æquales inter ſe ſunt.* Ad finem lib. 16.

ITAQVE in Codicibus Græcis habentur in primo libro propoſitiones 48: *In ſecundo*, 14: *In tertio*, 37: *In quarto*, 16: *In quinto*, 21: *In ſexto*, 33: *In ſeptimo*, 41: *In octauo*, 27: *In nono*, 36: *In decimo*, 117: *In undecimo*, 40: *In duodecimo*, 18: *In tertiodecimo*, 18: *In quartodecimo*, 11: *In quintodecimo*, 5: *Atque in Vniuerſum*, 486.

PROPOSITIONES verò additæ, in quinto libro, 9: *In quartodecimo*, 21: *In quintodecimo*, 16: *In ſextodecimo*, 31: *Atque omnes numero*, 77.

IN ſcholiis denique, & corollariis demonſtrantur propoſitiones in primo libro, 108: *In ſecundo*, 21: *In tertio*, 54: *In quarto*, 23: *In quinto*, 26: *In ſexto*, 99: *In ſeptimo*, 33: *In octauo*, 37: *In nono*, 40: *In decimo*, 67: *In undecimo*, 25: *In duodecimo*, 28: *In tertiodecimo*, 33: *In quartodecimo*, 27: *In quintodecimo*, 21: *In ſextodecimo*, 29. *Quæ omnes conficiunt numerum* 671.

IN Vniuerſum ergo 1234. *propoſitiones in noſtro Euclide demonſtrantur.*

IN EV-

IN EVCLIDIS ELEMENTA PRÆFATIO.

SI QVIS fortè miratur, cur post tot præclarissimos in Euclidis Elementa Geometrica Commentarios ab egregiis, & in primis Mathematicarum rerum peritis Scriptoribus editos, nouas adhuc ipsi commentationes conscripserimus; is facilè sibi persuadebit, nō temere id à nobis esse factum, si consilij nostri rationem cognouerit. Cum enim longa diuturnaque experientia nobis esset perspectum, atque exploratum, eam esse vtilitatem, atque adeo necessitatem horum elementorum, vt frustra quisquam se speret sine ipsorum præsidio, acutissimas, subtilissimasque Archimedis, Apollonij, Theodosij, Menelai, Ptolemæi, cæterorumque illustrium Mathematicorum demonstrationes posse percipere; vehementer dolebamus, tam insignem & illustrem auctorem à plerisque omnino negligi, à perpaucis verò pro dignitate tractari, ita vt vix hoc nostro seculo reperiantur, qui sedulam operam, ac studium in perdiscendis his elementis ponant; ob eam potissimum, vt arbitror, causam, quod difficultate rerum, quas tractant, atque obscuritate deterreantur, nullumque habeant hac in re ducem, quem sibi citra erroris periculum sequendum proponant. Extant quidem Commenta-

mentarij Campani, ac Theonis in singulos Euclidis libros sanè eruditi, qui satis esse possint cuiuis ad facilè cõsequendam horum elementorum doctrinam: Sed alter secutus in omnibus est traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinem, ac methodum peruerterunt, verbaque propositionum eiusdem locis non paucis immutarunt, vt verus germanusque auctoris sensus perdifficile possit intelligi; id quod maximè in 10. lib. perspicitur: Alter (Theonem intelligo) penè innumeris mendis, vitiisque incuria librariorum ita est deprauatus, & propter notas Græcas, quæ in eius demonstrationibus adhibentur, obscuras illas ac malè expressas adeo impeditus, vt magnam difficultatem inexercitatis ingeniis, perplexitatemque gignat. Quo fit, vt Euclidem sine maximo labore ac studio nemo percipiat. Iam si alij ad nostram vsque memoriam maius aliquod studium operamque in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerunt, hi vel sex priores tantum libros exposuerunt: vel si qui in vniuersum Euclidem Commentarios ediderunt, hi persæpe, relictis antiquorum demonstrationibus certissimis, proprias alias, ac nouas confinxerunt, quæ plerunque non tam firmæ sunt, neque rem ipsam simpliciter & absolutè conficiunt; præsertim quòd modò è propositionibus voces quasdam perperam detrahunt, modò alias ineptè apponunt, modò denique nonnullas temere immutant, vt meritò de vero proprioque Euclidis sensu dubitare quis possit. Qua tamen in re Federicum Commandinum Vrbinatem, Geometram non vulgarem excipio, qui nuper Euclidem Latinè redditum in pristinum nitorem restituit, paucis locis exceptis, in quibus non parum à vero aberrauit, vt suo loco monebimus. Quæ cum ita sint, resque ac scientia tam præclara digna sit, quæ ope, studio, industria ab ijs adiuuetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre possunt, post diuturni temporis in rebus Mathematicis operam collocatam; faciendum putauimus, vt lucubra-

cubrationes noſtras ac vigilias ſtudioſis harum rerum nonnihil (niſi fallimur) ſubſidij allaturas in publicum ederemus. Acceſſit editionis cauſa altera: Nam cum Euclides, propter ſingularem vtilitatem, inſtar enchiridij, manibus ſemper debeat circumgeſtari, neque vnquam deponi ab his, qui fructum aliquem ſerium ex hoc ſuaui Matheſeos ſtudio capere volunt, in eoque progredi; id vero in hunc diem, exemplaribus omnibus maiore forma impreſſis, necdum factum videamus; hoc noſtra editio certè, ſi nihil aliud attulerit commodi, atque emolumenti. Sunt enim hi noſtri Commentarij in vniuerſum Euclidem conſcripti commodiore nunc forma, quam vulgo cæteri, (id quod magnopere à nobis, qui nos audierunt, efflagitabant,) volumineque editi, vt facilè iam queant, nulloque negotio, è loco in locum, cum res tulerit, ferri atque portari. Nunc quo modo, via, ac ratione res tota à nobis pertractetur, quidque in hac interpretatione præſtitum ſit, paucis accipe. Demonſtrationes aliorum, maximè Theonis, quas quidem ipſius eſſe Euclidis, non leuibus argumentis adducti cum pleriſque aſſeueramus, & Proclus etiam teſtatur, breuiores, quantum per rei difficultatem licuit, vel certè planiores, quando illud non potuimus, dilucidioresque reddere conati ſumus. Non enim illas nudè, ac totidem verbis, quot erant ſcriptæ, propoſuimus. Etenim ea eſt interdum illarum breuitas, vt illud accidat, quod ab elegantiſſimo Poeta dictum eſt: *Breuis eſſe laboro, obſcurus fio.* Interdum etiam cum breuius, atque ſuccinctius efferri poſſint, magna, ob longiorem, quàm ſatis eſt, ſermonem, affertur moleſtia legenti. Quare vtrumque vitantes, eas, velut ἀποδείξεις, atque ad eum ferè modum tradidimus, quem, cum publicè Euclidem interpretaremur, obſeruauimus; hac etiam re auditorum deſiderio, & voluntati, quantum eſt in nobis, ſatisfacere cupientes. Ita enim, noſtra ſententia, Euclides facilius à ſtudioſis, ijs præſertim, qui ceu tyrones, hæc Mathematica ſtudia

nunc

nunc primum auſpicantur, ac maiore voluptate, vtilitateque cognoſcetur. Præter hæc adiunximus multis in locis varia problemata, ac theoremata ſcitu non iucunda, neque à ſcopo Geometriæ aliena, quæ partim ex Proclo, Campano, aliiſque auctoribus decerpſimus, partim proprio (vt aiunt) Marte, aſſiduiſque meditationibus ipſi confecimus. Data inſuper in hoc diligens opera, vt definitiones Euclidis, præſertim obſcuriores, & quæ aliquid viſæ ſunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tanquam in ſcopulos quoſdam incidentes, à recto curſu deflexerunt, & in errores varios atque abſurdos, prorſuſque ab inſtituto diſciplinæ abhorrentes dilapſi ſunt) dilucidè atque perſpicuè, quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium ſtudioſi facilè iudicabunt. Quæ res cum in ampliorem magnitudinem excreſcerent, quàm vt vnius libri ſpatiis, hæc præſertim forma commodè includi poſſent, in duas partes totam tractationem diuiſimus. Altera ſex prioribus libris continetur: altera nouem reliquos, vnà cum decimoſexto ad comparationes quinque corporum regularium pertinente, quem ex Franciſco Fluſſate Candalla, vt Elementa hæc Geometrica euaderent perfectiora, adiicere voluimus, complectitur.

BENI-

BENIGNO LECTORI.

QVONIAM *superiorem editionem Elementorum Euclidis non ingratam fuisse Mathematicarum disciplinarum studiosis intelleximus, exhibemus tibi benigne Lector, alteram editionem priore illa multo locupletiorem: in qua scilicet varia tum problemata, tum theoremata, quæ rebus Mathematicis magnum adiumentum allatura, longo vsu, atque experientia comprobauimus, & quæ in priore editione desunt, adiecimus, plurimaque loca subobscura clarioribus notis illustrauimus. Addidimus præterea nouam demonstrationem vndecimi axiomatis Euclidis, (quod in hisce Commentariis est tertiumdecimum) quo vult, Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duas illas rectas lineas in infinitum productas, coituras tandem ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores: addidimus, inquam, nouam demonstrationem à nobis nuper inuentam, quam non iniucundam studioso Lectori futuram speramus, quod eo principio tota doctrina de lineis parallelis, quæ immensa propemodum est, atque infinita, nitatur. Quanquam enim idem illud principium Arabes quoque olim demonstrasse iam pridem acceperam: quia tamen eorum demonstrationem diu ac diligenter quæsitam videre mihi non licuit, (nondum enim ex Arabica in Latinam linguam conuersa est) coactus sum hanc meo, vt aiunt, Marte excogitare, vt nullus in eo principio tam necessario iam dubitationi locus esset. Neque enim Procli demonstratio, quam ad propos. 28. lib. 1. Euclidis de re eadem affert, omni ex parte absoluta, ac Geometrica censeri potest; cuius*

tetij cuius rei causa eodem loco à nobis explicata est. Deinde ex Pappo Alexandrino inscriptiones omnium figurarum regularium in circulo, beneficio lineæ certa quadam ratione inflexæ, perfecimus: quod ante à Mathematicis desiderabatur. Ex quâ eadem linea via quadam & ratio ad circulum quadrandum (rei tot seculis à doctissimis viris exagitatæ) conficitur: quod suo loco docebitur. In definitionibus porrò quinti libri apertè ostendimus, cur Euclides magnitudines proportionales & improportionales per æquemultiplicium habitudinem describere coactus fit. Postremo (vt alia omittam) omnes operationes fractionum vulgarium, quæ in Arithmetica practica declarari solent, Geometricè demonstrauimus. Hæc ferè præcipua sunt, quæ hac posteriore editione ad Commentarios nostros in Euclidem accesserunt. Cætera vel theoremata, vel problemata, quibus editio hæc posterior priorem superat, quæ sanè plurima sunt, & Euclidis propositionibus sparsim inserta, inter legendum facilè comperies, si vtramque editionem cum altera conferens attentius paulo considerabis. Nunc quia hæc Euclidis elementa ostium atque aditum ad omnes alias disciplinas Mathematicas referant, ac patefaciunt, operæ pretium fore duximus, antequam ad ipsa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, vnde nam Mathematica disciplina hoc nomen acceperint: quæ sit earum diuisio: à quibus primum orta, & per quos deinde singulæ fuerint excultæ: quanta sit illarum præstantia atq; vtilitas; & si qua sunt alia rei nostræ opportuna.

IN DISCIPLINAS MATHEMATICAS PROLEGOMENA.

MATHEMATICÆ DISCIPLINÆ cur sic dictæ sunt.

DISCIPLINÆ *Mathematicæ, quæ quidem circa quantitatem versantur omnes, nomen acceperunt à dictione Græca* μάθημα, *siue* μάθησις, *quæ significat disciplinam, seu doctrinam. Cur autem hæ artes de quantitate agentes nomen disciplinæ, vel doctrinæ inter reliquas omnes sola sint adeptæ, duas potissimum causas apud probatos scriptores inuenio. Pythagorei enim, atque Platonici existimantes, animas rationales certo quodam ac determinato numero contineri, easque de corpore in corpus migrare, (quod tamen Christiana fides falsum esse perspicuè docet) testantur, eas nomen doctrinæ, siue disciplinæ obtinere, quod maximè ex ipsis nanciscamur recordationem, reminiscentiamque illius scientiæ, quæ anima nostra, (vt eorum est error) antequam corpus informaret, erat prædita. Quod quidem facili, ac familiari quodam exemplo comprobare nititur Plato in dialogo, qui Menon inscribitur, vbi Socratem introducit puerum quendam interrogantem Geometrica quædam de quadrati dimensione, ad quæ licet in principio respondent, vt puer, gradatim tamen ascendens, eo deductus est, vt responderit id, quod tandem dicturus fuisset, si diutissimè perdidicisset Geometriam. Alijs autem placet, ideo has artes præcæteris nomen scientiæ, & doctrinæ sibi vendicare, quòd solæ modum rationemque scientiæ retineant. Procedunt enim semper ex præcognitis quibusdam principijs ad conclusiones demonstrandas quod proprium est munus, atq; officium doctrinæ, siue disciplinæ, vt & Aristoteles 1. Posteriorum testatur; neq; vnquam aliquid non probatum assumunt Mathematici, sed quandocunque aliquid docere volunt, si quid ad eam rem pertinet eorum, quæ ante docuerunt, id sumunt pro concesso, & probato: illud verò modo explicant, de quo ante nihil scriptum est. Quod quidem alias artes, disciplinasve non semper obseruare videmus, cum plerunque in confirmationem eorum, quæ ostendere volunt, ea, quæ nondum sunt explicata, demonstrataue adducant.*

DISCIPLINARVM MATHEMATICARVM diuisio.

PYTHAGOREI, *quos deinde secuti sunt omnes propemodum Mathematici, atque Philosophi non pauci, Mathematicas disciplinas*

plinas vniuersas in quatuor partes distribuerunt, Arithmeticam, Musicam, Geometriam, atq; Astronomiam. Cum enim omnis quantitas, circa quam versantur, sit vel discreta, sub qua omnes numeri, vel continua, sub qua omnes magnitudines comprehendantur, & vtraque tam secundum se, quàm comparatione alterius possit considerari; visum fuit illis consentaneum quatuor praedictas facultates instituere, qua vtramque quantitatem pro duplici consideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate discreta secundum se, inquirendo & accuratè explicando omnes numerorum proprietates, ac passiones. Musica tractat eandem quantitatem discretam, siue numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum sonorum concentus respicit, atque harmoniam. Geometria dè magnitudine, siue quantitate continua, secundum se quoque, vt immobilis existit, disputat. Astronomia denique eandem magnitudinem, vt est mobilis, considerat; qualia sunt cœlestia corpora, prout continuo motu cientur. Ad has autem quatuor scientias Mathematicas, quarum Arithmetica & Geometria pura, Musica verò atque Astronomia mixta dicuntur, omnes alia quouis modo de quantitate agentes, qualis est Perspectiua, Geographia, & cætera huiusmodi, vel facilè, vt ad capita, à quibus dependent, reduci possunt.

ALIA ratione à Gemino antiquo Geometra, & ab aliis, vt auctor est Proclus in Commentariis, quos in primum Euclidis librum edidit, Mathematica disciplina diuiduntur. Quam quidem diuisionem, quoniam eleganter, copioseque docet, ad quanam sese extendant Mathematica disciplina, fermè ad verbum ex Proclo iuxta interpretationem Francisci Barocij Patricij Veneti excerptam hic subiicere placuit. Volunt itaque praedicti auctores, scientiarum Mathematicarum quasdam in intellectilib. duntaxat ab omni materia separatis, quasdam verò in sensilibus, ita vt attingant materiam sensibus obnoxiam, versari. Prioris generis statuunt duas longè primas, præcipuasq; scientias, Arithmeticam & Geometriam: In posteriori verò genere constituunt sex, Astrologiam, Perspectiuam, Geodæsiam, Canonicam, siue Musicam, Suppputatricem, atque Mechanicam. Astrologiam dicunt esse eam facultatem, qua de mundanis edisserit motibus, de corpori cælestium magnitudinibus, figuris & illuminationibus, à terraq; distantiis, ac de aliis huiusmodi rebus. Huius rursum tres constituuntur partes; Gnomonica, qua in horarij dimensione, positu gnomonum exercetur: Metheoroscopica, qua elevationum differentias, siderumq; reperit distantias, necnon multa alia & varia Astrologica perdocet theoremata: & Dioptrica, qua planetarum, cæterarumq; stellarum distantias huiusmodi Dioptricis dignoscit instrumentis. Perspectiuam assumit à Geometria gigni, atq; vti radijs visorijs, tanquam lineis, & angulis, qui ex hisce constituuntur oculorum radijs. Diuiditur autem in eam, qua proprio nomine dicitur Perspectiua, qua quidem reddit

causam earum apparentiarum, qua aliter, quam sint, sese nobis offerre solent, ob eorum, qua sub visum cadunt, alios situs & distantias, & parallelarum coincidentia, vel quadratorum, tanquam circulorum, aspectionis: Et in universam specularium, qua circa varias, multiplicesq; versatur refractiones: Nec non in eam, qua Sciographice, hoc est, umbrarum designatrix appellatur, qua ostendit, qua ratione fieri possit, ut ea, qua in imaginibus apparent, haud inconcinna, vel deformia ab designatorum distantias, altitudines aq; videantur. Geodesiam appellant eam scientiam, qua res quantas metitur, & materialium rerum acervos tanquam cones; & puteos, tanquam cylindros. Quod quidem non assequitur intellectilibus rectis linois, ut Geometria, sed sensilibus tantum, interdum quidem certioribus quodam pacto, & radiis Solaribus; interdum verò crassioribus, & sparsis & perpendiculo. Dividitur hac, & Geometria, in eam partem, qua plana, & in eam, qua solida dimetitur. Canonicam, sive Musicam, vocant eam scientiam, qua apparentes concentuum considerat rationes, sinsumque ubique utitur admiviculo; & qua (ut Plato inquit) tales existit, & menti aures ipsa proposuisse videatur. Supputatrix eadem apud ipsos est, qua apud nos Arithmetica practica. Hac enim numeros considerat, non ut in intellectilibus, sed ut sunt in sensilibus ipsis. Mechanica denique, qua in cognitione rerum sensilium, materiaque coniunctarum consistit, apud ipsos multiplex est. Quadam enim est instrumentorum effectrix, qua ὀργανοποιητικὴ vocatur, eorum, inquam, qua gerendis sunt bellis idonea, qualia sane Archimedes etiam fertur construxisse, Syracusas terra marique obsidentibus resistentia. Quadam mirabilium prorsus rerum effectrix, qua θαυματοποιητικὴ, dicitur; quippe qua alia quidem spiritibus maximo cum artificio construit, quemadmodum etiam Ctesibius, atque Heron operantur, alia autem ponderibus, quorum motus quidem inaquilibrium, status verò aquilibrium esse causam censendum est, ut Timaus etiam determinauit; alia verò nervis, sparteisq; animatas convolutiones, ac motus imitantibus: Quadam est aquilibrantium omnino, & eorum, qua centropondera antia vocantur, cognitio: Quadam denique sphararum effectrix, qua σφαιροποιία appellatur, ad caelestium circumvolutionum imitationem, qualem Archimedes etiam fabricatus est. Atque, ut uno verbo dicam, omnis, qua materiam mouendi vim habet. Has igitur sunt disciplina Mathematica apud antiquos. Militarem autem artem, eam, inquam, qua ad instruendas, coordinandasq; pertinet acies, quam Graci τακτικὴν vocant, unam aliquam ex Mathematices partibus dicendam esse non censent, ut quidam alij volnere, sed ut eam volunt modo quidem arte supputandi, ut in enumerandis legionibus; modo verò Geodesia, ut in dividendis, dimetiendisque castrametationi spatijs in campo. Quemadmodum neque Historicam, neque medendi artem Mathematices partem illam esse dicunt, licet saepenumero tam

quero tum Hiſtorici, tum etiam Medici Mathematicis vtuntur theorematibus; Rerum quidem geſtarum ſcriptores, vel climatum ſitum referendo, vel orbium magnitudines, & diametros, vel ambitus, circuitumue colligendo: Medici verò quamplurimas res in arte ſua huiuſcemodi viis dilucidando. Nam vtilitatem, quæ in Medicinam ab Aſtrologia pervenit, ipſe etiam Hippocrates oſtendit, aſſere omnes, quicunque aliquid de opportunis temporibus, locisq; dixere. Eadem ſane ratione ille etiam, qui aciebus inſtruendis operam accommodat, Mathematicis quidem vtetur theorematibus, nec tamen ob hoc erit Mathematicus, quamuis interdum quidem velens eam, qua numeroſa eſt, pauciſſimam oſtendere multitudinem, caſtra ſuoſque exercitus ad figuram circuli formet; interdum verò ad figuram quadranguli, vel quinquanguli, vel alterius cuiuſdam multanguli, vbi plurimam apparere cupit. Hæc igitur fere ſunt, quæ nobis antiqui Mathematici de harum ſcientiarum partitione reliquerunt.

INVENTORES MATHEMATICARUM diſciplinarum.

OMNES diſciplinas Mathematicas à variis & diuerſis auctoribus ortum originemque duxiſſe, perſpicuè hiſtoria teſtantur: imò vero ſingulas nequaquam ſummam adeptas eſſe perfectionem ſtatim ab initio ſed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora proceſſiſſe, memoria quoque proditum eſt. Arithmetices enim inuentores primi creduntur Phœnices, propter frequentes mercaturas, atq; commercia, vt auctor eſt Proclus. Quam mirum in modum poſtea Pythagoras, eiusque ſucceſſores, necnon Ægyptij, Graci denique atque Arabes ampliſicarunt, variisque problematis, atque theorematis illuſtrarunt. Muſicam deinde à Mercurio primum eſſe inuentam, multi ſcriptores tradunt, quam ipſe poſtea Orpheo inſigni Muſico commendauit, atque concredidit; Hic autem Thamyri & Limo. Linus vero Herculi, & ſic ſucceſſionibus continuis per alios Muſicos præclaros ad noſtra vſque tempora manauit. Geometria vero, auctore Proclo, ab Ægyptijs reperta eſt, ortumq; habuit ab agrorum dimenſione. Cum enim anniuerſaria Nili inundatio agrorum terminos, ac limites ita confunderet, vaſtaretque vt nemo agrum dignoſcere poſſet ſuum, cœperunt Ægyptij animos ad rationem menſurandorum agrorum applicare, vt hoc modo cuilibet, quod ſuum erat, redderetur. Qua quidem ratio agros metiendi, quanquam tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipſo tamen officio Geometria eſt appellata. γεωμετρία enim, ſine γεωμετρίη idem ſignificat, quod terram metior. Cæterum paulatim deinde Geometria cœpta eſt expoliri, & non contenta ſuis finibus, ſeſe ad corpora etiam cæleſtia dimetienda conuertit, tradiditq; principia vniuerſæ Aſtronomiæ, Perſpectiuæ, Coſmographiæ, & aliis diſciplinis quamplurimis, quæ ex ipſa, veluti radice,

dependent. Hanc Thales Milesius ex Ægypto in Graciam primus transtulisse fertur: Deinde eam insignes Philosophi ac Mathematici plurimis acutissimisq; demonstrationibus locupletarunt, atque exornarunt: Inter quos hi sunt præcipui ex veteribus: Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Brito, Antipho, Theodorus, Theætetus, Aristarchus, Eratosthenes, Architas Tarentinus, Euclides, Serenus Hypsicles Alexandrinus, Archimedes Syracusius, Apollonius Pergæus, Theodosius Tripolita, Milenus Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemæus, Eutocius Ascalonita, Pappus, Proclus, & alij penè innumeri, quos omnes longum esset recensere. Astronomiam denique non pauci ab Atlante primum inventam esse autumant: Vnde ob eximiam, quæ primus inter mortales præditus erat, Astronomiæ cognitionem, exortam esse volunt fabulam, illum suis humeris cælum sustinere. Alij putant Chaldæos diuturna observatione (quod etiam Cicero affirmat in libro de Diuinatione) siderum scientiam adinuenisse. Alij Ægyptios primos huius scientiæ faciunt inventores: Alij Assyrios: Alij denique gloriam hanc, & laudem Babylonis esse deferendam, censent. Hæc autem in scientia, vt est præstantissima, ita quoque maximè illustres auctores clarauerunt, quod non est huius loci declarare. Cæterum præcipuis hisce quatuor disciplinis Mathematicis inventis, reliquæ omnes de quantitate quouis modo agentes, facilè ex ipsis tanquam riuuli ex fonte, derivatæ sunt, atque deductæ.

NOBILITAS ATQVE PRÆSTANTIA Scientiarum Mathematicarum.

QVONIAM disciplinæ Mathematicæ de rebus agunt, quæ absque vlla materia sensibili considerantur, quamuis re ipsa materiæ sint immersæ; perspicuum est, eas medium inter Metaphysicam, & naturalem scientiam obtinere locum, si subiectum earum consideremus, vt rectè à Proclo probatur, Metaphysices etenim subiectum ab omni est materia seiunctum, & re, & ratione: Physices verò subiectum & re, & ratione materiæ sensibili est coniunctum: Vnde cum subiectum Mathematicarum disciplinarum extra omnem materiam consideretur, quamuis re ipsa in ea reperiatur, liquidò constat, hoc medium esse inter alia duo. Si verò nobilitas, atque præstantia scientiæ ex certitudine demonstrationum, quibus vtitur, sit iudicanda; haud dubio Mathematica disciplina inter cæteras omnes principem habuit locum. Demonstrant enim omnia, de quibus suscipiunt disputationem, fi missimis rationibus, confirmantque, ita vt verè scientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorsus dubitationem tollant: Id quod aliis scientiis vix tribuere possumus, cum in eis sæpenumero intellectus multitudine opinionum, ac sententiarum varietate in veritate conclusionum iudicanda suspensus hæreat, atque incertus.

certum. Huius rei fidem apertè faciunt tot Peripateticorum sectæ, (& alios interim Philosophos silentio inuoluam) quæ ab Aristotele, veluti rami è trunco aliquo, exortæ, adeo & inter se, & nonnunquam à fonte ipso Aristotele dissident, vt prorsus ignores, quidnam sibi velit Aristoteles, num de nominibus, an de rebus potius disputationem instituat. Hinc fit, vt pars interpretes Græcos, pars Latinos, alij Arabes, alij Nominales, alij denique Reales, quos vocant, (qui omnes tamen Peripateticos se esse gloriantur) tanquam ductores sequantur. Quod quam longè à Mathematicis demonstrationibus absit, nemini latere existimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumque Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonstrationum robur, æternitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, seu dialogo, qui de summo bono inscribitur; Eam scientiam esse dignioremque, præstantioremque, quæ magis syncera sit, veritatisque est amans. Cum igitur disciplina Mathematica veritatem adeo expetat, adament, exclamantque, vt non solum nihil, quod sit falsum, verum etiam nihil, quod tantum probabile existat, nihil denique admittant, quod certissimis demonstrationibus non confirment, corroborentque, dubium esse non potest, quin eas primus locus inter alias scientias omnes sit concedendus.

VTILITATES VARIÆ MATHEmaticarum disciplinarum.

NON solum vtiles, verum etiam necessarias admodum censeri debent disciplinæ Mathematicæ cùm ad alias artes perfectè perdiscendas, tum ad rem etiam publicam rectè instituendam, & administrandam. Neq; enim ad Metaphysicam, vt eleganter ostendit Proclus, vllus patet aditus, nisi per Mathematicas disciplinas. Nam si à rebus sensibilibus, quas Physicus considerat, ad res ab omni materia sensibili secretas, seiunctasque, quas contemplatur Metaphysicus, vires, acieinque nostri intellectus attollere absque vllo medio tentemus, nosmetipsos excæcabimus, non secus, ac ei contigit, qui è carcere aliquo tenebricoso, in quo diu latuit, in lucem Solis clarissimam emittitur. Quam ob rem, antequam à rebus physicis, quæ materiæ sensibus obnoxiæ sunt coniunctæ, ad res Metaphysicas, quæ sunt ab eadem maximè auulsæ, intellectus ascendat, necesse est, ne harum claritate offundatur, prius eum assuefieri rebus minus abstractis, quales à Mathematicis considerantur, vt facilius illas possit comprehendere. Quocirca rectè Diuinus Plato Mathematicas disciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationem exacuere mentis aciem affirmat. Quantum verò emolumenti ha disciplinæ ad sacras literas rectè percipiendas, interpretandasque conferant, multis pulcherrimè nobis exponit B. Augustinus lib. 2. cap. 16. de Doctrina

Christiana, demonstrans, numerorum inscitia multa non intelligi à multis, quæ translatè, ac mysticè posita sunt in Scripturis. Cuius rei exempla non pauca in medium adducit, eandemque sententiam longè post pluribus verbis repetit eodem libro, capite 37. Hoc idem docet D. Hieronymus tomo 1. Epist. 5. asserens magnam inesse numeris vim, ad multa mysteria in Scripturis intelligenda: Quo item loco, Geometriæ magnam afferre Theologis utilitatem perhibet. Rursum B. Augustinus loco iam citato, capite 16. quem paulo ante retuli, testatur, Musicam pernecessariam esse doctori Christiano, subiungens paulo post cap. 19. Theologos debere etiam Geographiæ diligenter esse instructos. Quod non ignorans Divus Gregorius Nazianzenus, summus haud dubie Divum Basilium Præceptorem suum extollit, quòd in Astrologia, Geometria, numerorum cognitione, cæterisque scientiis Mathematicis, fuerit non mediocriter versatus. Non parum etiam conducunt hæ artes ad philosophiam naturalem, moralem, Dialecticam, & ad reliquas id genus doctrinas, artesque perfectè acquirendas, ut perspicuè docet Proclus. Huc adde, quod omnia volumina antiquorum philosophorum, maximè Aristotelis, & Platonis, quos merito duces nobis sequendos ad bene rectèque philosophandum proponimus, eorumque ferè omnium interpretum cum Græcorum, tum Latinorum, exemplis Mathematicis sunt referta, ea potissimum de causa, ut ea, quæ alioquin multis obstructa difficultatibus videbantur esse per exempla huiusmodi clariora, magisque perspicua fierent; quæ procul dubio nulla ratione percipiet is, qui scientiarum Mathematicarum omnino est expers. Quid? quod olim nemo ausus esset celeberrimum Divini Platonis gymnasium frequentare, qui prius optimè Mathematicis disciplinis non fuisset exornatus? Unde pro foribus Academiæ hoc symbolum dicitur pinxisse, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Imo vero idem Plato in Philebo, omnes disciplinas sine Mathematicis viles esse non dubitavit asserere. Qua de causa in 7. de Rep. præcipit, Mathematicas disciplinas primo omnium esse addiscendas, propter varias, ac multiplices earum utilitates, (ut copiosè scribit) non solum ad reliquas artes rectius percipiendas, verum etiam ad Remp. benè administrandam: Cuius ego rei multa exempla cum præteriti temporis, tum nostra ætatis, si id necesse foret, in medium possem adducere. Ibidem clarissimis verbis affirmat, præcipuè Arithmeticos natura ad omnes doctrinas aptos esse, idoneosque, adeo ut etiamsi nullam aliam nobis hæ scientiæ afferrent utilitatem, (cum tamen infinita propemodum alia commoda ex ipsis percipiamus) perdiscendas tamen omni studio eas esse statuat, quod ingenium, mentemque ad reliquas artes omnes capessendas aptiorem reddant, & acutiorem. Quod quidem experientia ipsa magistra facilè comprobatur. Videmus enim eos, quorum ingenium facilè, & nullo negotio hisce disciplinis accommodatur, fructus non exiguos ex aliis scientiis percipere: Contra

vero eos,

Verò eos, qui ad haſce facultates idonei minimè reperiuntur, prorſus ad cæteras eſſe ineptos. Quare iure optimo Plato tum frequenter in ſuis operibus iterum atq; iterum harum diſciplinarum Vtilitatem nobis inculcat, atq; commendat, præſertim in 7. de Rep. in Epinomide, ſeu Philoſopho, in Timæo. Vbi Mathematicas diſciplinas omnes eruditionis ingenuæ viam appellat, & pleriſq; aliis in locis, quibus nunc enumerandis brevitatis memor de induſtria ſupersedeo. Ad has omnes Vtilitates accedit maxima iucunditas, atq; voluptas, qua cuiuſq; animus his artibus colendis, exercendiſq; perfunditur. Sunt enim hæ præcipua ex ſeptem artibus liberalibus, in quibus nõ ſolùm ingenui adoleſcentes, verùm etiam nobiles viri, Principes, Reges, ac Imperatores ad honeſtiſſimam, maximeq; liberalem oblectationem animi, quam ſumma etiam cum Vtilitate coniunctam pariunt, diu multumque verſari ſolebant. Quorum exemplum multos adhuc noſtra hac ætate imitari conſpicimus. Teſtatur, magnam animi voluptatem ex his artibus percipi, Divinus Plato in 7. de Rep. Vbi audaciter dicit, & non temerè confirmat, oculum animæ, qui ab aliis ſtudijs excæcatur, defoditurq;, à Mathematicis tantùm diſciplinis recreari, excitariq; rurſum ad eius, quod eſt, contemplationem. Omitto plurima alia teſtimonia Platonis, aliorumq; grauiſſimorum Philoſophorũ, quibus harum diſciplinarum Vtilitas cum neceſſitate, & delectatione coniuncta, atq; præſtantia abundè poteſt comprobari.

EVCLIDIS ATQVE GEOMETRIÆ commendatio.

QVISNAM fuerit Euclides horum elementorum inſtitutor, (ut aliquid etiam de auctore, quem nobis interpretandum propoſuimus, deq; Geometria vniuerſa, in medium proferamus) & quo tempore floruerit, non ſatis conuenit inter ſcriptores. Multi enim, vt teſtatur vulgata elementorum Euclidis ſecundum Campanum, & Theonem editio, atq; eorundem inſcriptio, exiſtimant, eum fuiſſe Philoſophum illum Megarie natum, quod oppidum Iſthmo adiacet, Socratiq; auditorem, qui ſectam inſtituit à ſe dictam Megaricam, quæ alio nomine Dialectica appellabatur, eò quòd ſectatores illius interrogando, reſpondendoq; (quod proprium eſt munus Dialecticorum) libros conſcriberent. De quo multa ſunt in Diogene Laertio de Vitis Philoſophorum: Scribit & de hoc Cicero Quæſt. Acad. lib. 2. Vbi ait. Poſt Euclides Socratis diſcipulus Megareus, à quo idem illi Megarici dicti, qui id bonum ſolum eſſe dicebant, quod eſſet vnum, & ſimile, & idem, & ſemper. Fauet huic auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo libro ſcribit, nimirum à Platone, qui Socratis etiam diſcipulus fuit, conductores ærarij ſacra de modo, & forma eius ſecum ſermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iuſſos. Verum ſi Proclo nobili ſcriptori, & aliis auctoribus antiquis credendum

eſt, Euclides hic noſter iunior fuit illo Megareo, floruitq; tempore Ptolemæi primi, qui Ægypto, poſt Alexandri magni mortem, Olympiade 115. & ante Chriſtum natum anno 319. cœpit imperare, vt Ioannes Lucidus refert. Quod quidem verius eſſe crediderim, hoc maximè adductus argumento, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius Megarici diligentiſſimè enumerans, nullam prorſus faciat mentionem huius celeberrimi Voluminis de Geometricis elementis conſcripti, in qua perpetuam, & nunquam morituram famam ſibi comparauit Euclides, & gloriam. Neq; enim putandum eſt, Diogenem in monumentis Philoſophorum exercitatiſſimum, hoc tam inſigne opus vel ſcientem voluiſſe præterire, vel ab Euclide ſuo eſſe compoſitum ignorauiſſe. Itaq; Euclides noſter, Geometra acutiſſimus, ab illo Megareo Philoſopho longè alius eſt, qui cùm in doctrina Academicorum eſſet ſumma cum laude verſatus, animum totum ad Mathematicas diſciplinas tranſtulit; in quibus ita excelluit, vt concordi omnium iudicio principem inter Mathematicos ſibi locum iure optimo vendicarit. Scripſit autem Volumina ad rem Mathematicam ſpectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admiranda q; doctrina facilè elucet: qualia ſunt eius Optica, Catoptrica, Elementa rectæ inſtitutiones ad Muſicam capeſſendam pertinentes, Phænomena, atq; Datorum liber, opus de Diuiſionibus, quod nonnulli ſuſpicantur eſſe libellum illum acutiſſimum de Superficierum diuiſionibus, Machometo Bagdedino aſcriptum, qui nuper Ioannis Dee Londinenſis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem eſt editus. Conſcripſit item Conica elementa, auctore Proclo, quæ tamen ad nos nondum peruenere, & alia id genus opuſcula. Maximè verò hoc Volumen Elementorum Geometricorum, nunquam omnium conſenſione ſatis laudatum, tam mirabili ordine, tantaq; eruditione contexuit, vt nullum vnquam eorum, qui ſimilia conſcripſerunt elementa, (conſcripſerunt autem, vt ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipſum ſuperarit. In quo quidem, vt ſummum ingenij acumen demonſtrauit, ita non omnia, quæ ad rem Geometricam pertinent, in Vulgus edenda, ſed ea duntaxat, quæ viſa ſunt eſſe neceſſaria, atq; vtilia ad communem omnium vtilitatem, argumentis & rationibus firmiſſimis cenſuit eſſe comprobanda. Cæterum, quanta ſit horum Euclidis Elementorum Geometricorum, ac proinde vniuerſæ Geometræ præſtantia, atq; vtilitas, partim ex iis, quæ ante ſcripſimus, partim ex iis, quæ nunc dicemus, non obſcurè percipi poteſt. Dicuntur enim Geometrica elementa, eam ob cauſam, quòd ſine iis nullum opus Mathematicum poſſimus aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere. Omnes ſiquidem Mathematicarum rerum ſcriptores, vt Archimedes, Apollonius, Theodoſius, &c. in ſuis demonſtrationibus vſurpant hæc Euclidis elementa, tanquam principia omnibus iam diu perſpecta, atq; demonſtrata. Quamobrem ſicut is, qui legere vult, elementa literarum diſcit

diſcit prius, & illu aſſiduè repetitis vtitur in locibus omnibus exprimendis, ſit qui alias diſciplinas Mathematicas deſiderat ſibi reddere familiares, elementa hac Geometrica plenè ac perfectè calleat prius neceſſe eſt. Ex his etenim elementis, veluti fonte vberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, inſularum dimenſio, atque diuiſio, omnis item per inſtrumenta ſiderum obſeruatio, omnis horologiorum ſcientericorum compoſitio, omnis machinarum vis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum variarum, qualis cernitur in ſpeculis, in picturis in aquis, & in aere variè illuminato, diuerſitas manat. Ex his, inquam, elementis machina totius huius mundana eſt inuentum medium, atque centrum; inuenti cardines, circa quos perpetuò conuertitur, orbis denique totius exploratæ figura, ac quantitas. Oſtenditur atq; demonſtratur vnius huius ſcientiæ vi cæli vniuerſi, ſiderumq; perennis conuerſio, ortus, occaſus, abitus, reditus, aſcenſus, deſcenſus, diei ac noctis, temporumq; toto anno per omnem terrarum ſitum, & mundi inclinationem, varietas. Coniunctiones item Planetarum, oppoſitiones, aſpectusq; earũ tam expeditè cognoſcuntur, vt & loca illorum in cælo, & eclipſes, ſeu Solis ac Lunæ defectiones certiſſimæ, antequam fiant, in omne poſterum tempus à Mathematicis prædici queant. Hoc demq; ingens Dei, & Naturæ opus, mundum, inquam, totum, mentis noſtræ oculis, munere ac beneficio Geometriæ ſubiectum conſpicimus. Adde Geometriam hominibus plurima, quæ penitus incredibilia eſſe videntur, omniumq; fidem ſuperant, perſpicua facere, credibilia q; eſſe oſtendere: Quale eſt illud, quod de Archimede Syracuſio teſtantur hiſtoriæ. Cùm enim Hieron Syracuſarum Rex nauem, quam Ptolemæo Ægyptiorum Regi mittere ſtatuerat, tanta eſſet molis fabricatus, vt eam omnes vnà Syracuſii à loco dimouere minimè valerent: Archimedes Geometra peritiſſimus, vnius Geometriæ viribus fretus Regi promiſit, ſe effecturum, vt ipſam ſolus Rex abſque vllo labore ſubduceret. Quod cùm præſtitiſſet, in conſpectu omnium Rex ſtupefactus exclamaſſe perhibetur; Ab hac die, quidquid dixerit Archimedes, illi credendũ eſt. Non diſſimile huic videtur mihi eſſe pulcherrimũ illud factum, quod idem Archimedes ope Geometriæ geſſit Syracuſis, quando corona ex auro argentoq; confecta, quam Rex ſummo ſtudio fabricari iuſſerat, nõ diſſoluta, ſingula auri & argenti pondera, qua inter ſe aurifici fraude ac dolo commiſta erant, ſubtiliſſimè oſtendit. Neq; ſilentio prætereri debet, eundem Archimedem robori ac efficacia demonſtrationũ Geometricarum innixum ſæpenumero iactitaſſe, ſi haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc noſtrã, quam incolimus, è loco ſe commouere poſſe. Pari ratione, datis viribus quibuſcunq;, pondus quodcunq; ſe poſſe mouere. Et alia id genus, non ſolùm ab Archimede, verùm etiam ab aliis præclaris, & illuſtribus Geometris patrata eſſe, memoriæ prodita eſt.

Tantum

Tantum denique nomen hæc Geometria Archimedi peperit, vt Marcellus Romani exercitus Imperator, contra quem dux Syracusanam vrbem defenderat Archimedes, machinis quibusdam per Geometricas demonstrationes adinuentis, & constructis, in expugnata vrbi direptione, ac cade ciuium vnius Archimedis saluti publico edicto cauerit: quem vbi contra imperium suum & voluntatem à gregario quodam milite interfectum cognouit, vehementer doluit, eumq; honorem mortuo habuit, quem viuo habere non potuit. Cuius sepulchrum Cicero à se, cùm in Sicilia Quæstoris officio fungeretur, repertum esse, mirandum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in summo semper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedit quoq; ad præstantiam vtilitatemq; Geometriæ, quòd cùm demonstrationes Geometricæ sint maximè illustres, nemo sine ipsis satis perspiciet, qua sit vis demonstrationum, nemoq; eisdem destitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidem ingenuè fatetur Galenus insignis Philosophus, ac Medicorum Princeps, in libro, quem de libris propriis inscripsit. Is enim instructissimus rebus Dialecticis, cùm scholas Peripateticorum ac Stoicorum sui temporis peruersissent omnium, & præcepta mira cum animi ardore studioq; arripuisset, nihil ferè ab ipsis audisse se testatur, quod ad demonstrationis cognitionem pertineret; quinimò pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controuersia posita, nonnulla etiam naturali rationi pugnantia reperisse. Imo vt ad Pyrrhoniorum ferè (erant Pyrrhonij Philosophi, qui nihil decernebant, sed de omnibus dubitabant) hæsitantiam deuenturus fuerit, nisi Arithmetica, Geometria, Dialecticaq; (quibus artibus ab auo & patre fuerat institutus) esset cognitione scientiaq; reuocatus. Vnde suadet, sequendos esse characteres illos Arithmeticos, & linearum demonstrationes. Plato etiam cùm ob alias, tum ob eam etiam causam discendam esse Geometriam dixit, quòd eius cognitio maximè sit vtilis, vt alias artes facilius & rectius percipiantur. Postremò est hæc summa laus Geometriæ, omnibus modis prædicanda, quod non hæsit in exiguis & inferioribus hisce machinis, à quibus originem traxit, sed euolauit in cælum vsque, & humanas mentes humi abiectas in illam rursus cælestem sedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiusq; administrationem & gubernationem nostro intellectui subiecit.

DIVISIO GEOMETRIÆ ET ELEmentorum Euclidis.

GEOMETRIA diuiditur in Planorum contemplationem, qua generali vocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprio ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria vniuersè sibi hunc scopum proponit, vt plana, aut solida vel constituat, vel constituta inter se comparet, aut diuidat. Neque verò mirum alicui videri debet, quòd cùm tria

sint

ſint genera magnitudinum, linea, ſuperficies, & corpus, ſolùm de duobus poſterioribus extent propria contemplationes, vt diximus, non autem de lineis, vel etiam punctis. Non, inquam, debet videri mirum, quoniam, vt ait Proclus, Geometria petiſſimùm circa figuras verſatur, quæ in planis duntaxat, vel etiam ſolidis conſiſtunt omnes. Non enim punctum, vel linea figuram vllam conſtituunt ſine planis aut ſolidis, ac proinde neceſſe non erat, propriam de punctis, & lineis ſcientiam inſtituere; Superficiebus verò, ſine planis, & corporibus, ſolidiſve maximè conueniebat, vt proprias nanciſcerentur tractationes. Volens igitur ſummus harum rerum artifex Euclides in hiſce elementis perfectam, & omnibus numeris abſolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus ſex libris agit de planis, in poſterioribus verò quinque de ſolidis acutiſſimè diſputat, eorum q; proprietates maximè illuſtres perueſtigat. Quoniam verò cùm res omnes Geometricæ, tum præſertim ſolida illa quinque regularia, quæ corpora Platonica dici ſolent, perfectè tractari non poterant, abſque linearum commenſurabilium, atque incommenſurabilium notitia; Immò verò quàm plurimæ magnitudines ſub menſuram cadere nullâ ratione abſque earundem linearum cognitione poſſunt, cùm earum latera ſæpenumerò ſint talia, vt ea communis & nota menſura dans metiri nequeat, vt liquidò conſtat ijs, qui aliquando demonſtrationes Geometricas in opus contulerunt, atque vſum: idcirco vt hiſce elementis Geometricis complecteretur omnia documenta ad magnitudinum intelligentiã, dimenſionemq; requiſita, Stereometria ſua præpoſuit decimũ librum, in quo ſubtiliter & copioſè de huiuſmodi lineis diſſerit. Intelligens rurſum Euclides, neq; hanc tractationẽ linearum commenſurabilium & incommenſurabilium ſine numerorũ cognitione poſſe conſiſtere, ante decimum librum agit de numerorum paſſionibus, eaſq; copioſè & diligenter tribus libris, qui hunc antecedũt, eſt perſecutus. Quamobrem totũ hoc Volumen elementorũ Geometricorũ quindecim libris comprehenſum (quorum quidem priores tredecim ſine vlla controuerſia Euclidi aſcribuntur ab omnibus; poſteriores verò duo à nonnullis Hypſiclis Alexandrinis eſſe creduntur) ſecari rectè poterit in quatuor partes, ita vt prima pars contenta ſex prioribus libris agat de planis; Secunda tres ſequentes complectens, paſſiones numerorum perſcrutetur; Tertia, quam ſolus decimus conſtituit liber, de lineis commenſurabilibus, incommenſurabilibusque diſputet; Quarta denique reliquis quinque libris abſoluta ſcientiam ſolidorũ, ſiue corporum complectatur. Prima pars rurſum triplex eſt; Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis abſolutè, inueſtigando eorum æqualitatem & inæqualitatem: In quinto verò libro de proportionibus magnitudinum in genere diſputatur: In ſexto denique proportiones figurarum planarum diſcutiuntur. Quid verò Euclides in ſingulis aliis libris pertractet, propriis in locis exprimemus.

QVID

QVID PROBLEMA, QVID THEOREMA, quid Propositio, & quid Lemma apud Mathematicos.

DEMONSTRATIO omnis Mathematicorum diuiditur ab antiquis scriptoribus in Problema, & Theorema. Problema vocant eam demonstrationem, qua iubet, ac docet aliquid constituere. Vt si quis conetur demonstrare, supra lineam rectam finitam posse triangulum aquilaterum constitui, appellabitur huiusce modi demonstratio problema, quoniam docet, qua ratione triangulum aquilaterum constitui debeat supra rectam lineam finitam. Dictum est autem hoc genus demonstrationum Problema, ad similitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur quæstio illa, cuius vtraque pars contradictionis (vt ipsi loquuntur) est probabilis, qualis hæc est quæstio; An totum distinguatur realiter à suis partibus simul acceptis: Sic etiam quæsitum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent construere, & cuius contrarium effici etiam potest, problema appellatur. Vt si quis proponat se demonstraturum, supra lineam rectam finitam triangulum aquilaterum posse constitui, efficiet problema, quia & triangulum non aquilaterum, nempe Isosceles, vel scalenum, supra eandem lineam constitui potest. Par ratione, qui instituit angulum rectilineum secare bifariam, problema nobis exhibet, propterea quòd angulus idem diuisus potest in partes non æquales. Est tamen discrimen non paruum inter Dialecticorum & Mathematicorum problema. Nam in problemate Dialectico vtrauis pars contradictionis suscepta confirmatur tantùm probabiliter, ita vt intellectus cuiusque ambigat, vtrùnam illius pars vera sit: In Mathematico verò, quamcunque quis partem elegerit, eam firma demonstratione sic vt nihil omnino dubij sit reliquum, comprobabit. Si enim Geometra statuat ex puncto quolibet linea recta proposita lineam perpendicularem educere, efficiet vtiq; hoc ipsum ratione constanti, & euidenti: Eodem modo dicendum est, si ex eodem puncto velit educere lineam non perpendicularem. Theorema autem appellant eam demonstrationem, qua solam passionem aliquam, proprietatem ve vnius, vel plurium simul quantitatum perscrutatur. Vt si quis optet demonstrare, in omni triangulo tres angulos esse æquales duobus rectis, vocabunt talem demonstrationem Theorema, quia non iubet, aut docet triangulum, aut quippiam aliud construere, sed contemplatur tantummodo trianguli cuiuslibet constituti passionem hanc, quòd anguli illius duobus sint rectis æquales. Vnde à contemplatione ipsa, hæc demonstratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione potest, contradictionis vtraque pars vera vt sit. Si enim quis demonstret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duobus esse rectis angulis æquales, nullo poterit modo fieri, vt inæquales quoq; sint duobus rectis. Eadem ratio in alijs theorematibus est intelligenda. Itaq; vt vno verbo dicam, quæsitum illud Mathematicum construere aliquid

aliquid docens, cuius etiam oppositum potest effici, Problema: Illud vero, quod nihil docet construere, & cuius pars opposita perpetuo falsa existit, Theorema appellatur. Vnde si quis proponeret in modum problematis; se in semicirculo velle angulum rectum constituere, irridendus omnino esset, & Geometria prorsus ignarus iudicandus; quoniam omnes anguli in semicirculo constituti sunt recti, vt demonstratur libro 3. propositione 31. Quamobrem theorema hoc, & non problema dicendum erit. Caterùm tam problama, quàm theorema dici consuevit apud Mathematicos Propositio, propterea quòd vtrumque aliquid nobis proponit, vt in exemplis adductis constat. Hac ideo dixerim, vt studiosus lector non miretur, quando repertet in Euclide, Apollonio, & cæteris Mathematicis, propositionum alias dici problemata, alias theoremata. Elementa enim Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (vt aliorum interim volumina taceam) constant partim problematibus, partim theorematibus. Demonstrationes problematum semper concluduntur hiis ferè verbis: Quod faciendum erat; Theorematum verò hisce: Quod ostendendum, vel demonstrandum erat; habita nimirum ratione finis vtriusque. In quolibet autem problemate, ac theoremate plures demonstrationes continentur, & non vna tantùm, quamuis vltimus syllogismus demonstrationis solùm concludat id, quod in initio demonstrandum proponitur, vt declarabimus in prima Euclidis propositione, & in cæteris omnibus manifestum erit.

QVONIAM verò ad demonstrationes problematum atq; theorematum sæpenumero requiruntur alia quædam theoremata, vel problemata minus principalia, & qua facile ex ijs, qua prius demonstrata sunt, intelligi possunt; inseruntur interdum à Geometris huiusmodi theoremata, & problemata problematibus, atq; theorematibus, de quibus præcipuè agitur, vt breuius demonstrari possint. Vocant autem illa Lemmata, propterea quòd solùm assumuntur ad alias demonstrationes; non autem de illis præcipua disputatio instituitur, quemadmodũ de aliis. Itaq; Lemma dici potest demonstratio, seu constructio illius, quod ad demonstrationẽ alicuius theorematis, vel problematis principalis assumitur, vt demonstratio expeditior fiat, ac breuior.

QVÆNAM SINT PRINCIPIA APUD Mathematicos.

CVM omnis doctrina, omnisq; disciplina ex præexistente cognitione, vt auctor est Aristoteles, atq; ex assumptis, & concessis quibusdam principijs suas demonstret conclusiones; Nulla autem scientia ex eiusdem Aristotelis, aliorumq; Philosophorũ sententia sua principia demonstret; habebunt vtique & Mathematica disciplinæ sua principia, ex quibus posita, & concessis sua problemata ac theoremata confirment. Horum autem tria tantummodo genera apud Mathematicos reperiuntur. In primo reponuntur omnes definiti-

definitiones, quas nonnullis cum Aristotele suppositiones, & Gale Petitiones, appellant. His autem vocabula artis explicantur, ne in tractatione ipsa, nominum ambiguitate, aut obscuritate circumuenti in paralogismos incidamus. Secundum genus complectitur Petitiones, siue Postulata, quæ quidem adeò clara sunt, & perspicua in illa ætate, quæ in manibus habetur, vt nulla indigeant confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum expoſcant, ne vlla ſit in demonſtrando haſitatio, aut difficultas. Ad tertium genus referuntur Axiomata, ſeu communes animi notiones, quæ non ſolùm in ſcientia propoſita, ſed etiam in omnibus alijs ita manifeſtæ ſunt, & euidentes, vt ab eis nulla ratione diſſentire queat is, qui ipſa vocabula rectè perceperit. Atque his principijs rectè mihi videtur accommodari poſſe id, quod in Metaphyſicis ſcribit de primis principijs Ariſtoteles: A tanna quis aberrabit? Vt præclarè à Cicerone, Pronunciata, ſiue Effata appellentur. Euclydes igitur hoc in volumine Geometricorum Elementorum præmittit ante demonſtrationes ſuarum concluſionum omnia hæc principia, vt ex ipſis, quæ quidem facilè à quouis intelliguntur, deducat admiranda theoremata, quibus nemo vnquam aſſenſum præberet, niſi certa ac euidenti ratione confirmarentur. Vnde hoc etiam nomine ſummis laudibus efferenda eſt Geometria, omnibuſque ſeculis prædicanda, quòd ex tam exiguis initijs cuilibet quantumuis rudi & ignaro notiſſimis, & quidem perfacilibus progrediatur ad theoremata primo aſpectu ab omni ſenſu humano, & intellectu remota, quæ tamen omnia miro ordine, ac methodo facili, demonſtrationibuſque certiſſimis ita confirmat, vt nihil omnino dubij in eis relinquatur. Porrò in huiuſcemodi principijs tradendis hic ordo ab Euclide ſeruatur, vt in ipſo quidem introitu ſcientia proponat principia tota Geometria communia, in alijs autem deinde libris, vbi res poſtulat, ea exponat principia, quæ propriè, & peculiaria quadam ratione, ad materiam illorum ſubiectam videntur ſpectare. Neque verò omnia principia Geometrica ab Euclide in hac elementis ſunt explicata, ſed multa reliquit lectori diſquirenda; quæ tamen ex ijs, quæ tradidit, ſine magno labore ac ſtudio percipi poſſunt, & intelligi. Verùm ne in hac quoque parte deſuiſſe videamur rerum Mathematicarum ſtudioſis, adiunximus varijs in locis ad principia ab Euclide poſita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maximè eorſum demonſtrationum arbitrati ſumus retardari poſſe. Sed iam ad expoſitionem ipſam Principiorum Euclidis accedamus.

EVCLI

EVCLIDIS ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

I.

PVNCTVM est, cuius pars nulla est.

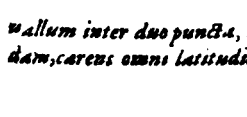
HOTVS hic primus liber in eo positus est, vt nobis tradat ortus proprietates q; triangulorum, tum quod ad eorum angulos spectat, tum quod ad latera: quæ quidem inter se comparat interdum, interdum verò vnumquodq; per se inspicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos considerat, aliquando verò ex angulis latera, secundū æqualitatem at q; inæqualitatem rimatur. Idemq; variis rationibus inquirit in duobus quandoq; triangulis inter se collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumq; contemplationē aggreditur, tum inter se, tum etiam, vt cum triangulis inter easdem parallelas constitutis conferuntur. Vt autē hæc omnia rectius & commodius exequatur Euclides, docet diuisionē anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, constitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia huiusmodi. Itaque vt vno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli sententia, rectilinearum figurarum maximè prima, ac præcipua, triangula inquam, atque parallelogramma. Ante omnia verò Euclides more Mathematicorum rem propositam exorditurà principiis, initio facto à definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate continua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac facilius percipietur, si prius intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, vnas secundum longitudinem, alteras secundum latitudinem, & secundum profunditatem altitudinémue alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes

habet, ſed quadam ſolùm ſecundum longitudinem; quadam duplices, ita vt illis adiũciat partes etiam latitudinis; quadam denique praeter duplices has partes, tertias quoque altitudinis, ſiue profunditatis continet. Quantitas enim omnis continua aut longa ſolùm eſt, aut longa ſimul, & lata, aut longa, lata, atque profunda. Neque aliam dimenſionem habere poteſt res vlla quanta, vt rectè demonſtrauit Ptolemaeus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in priſtinam dignitatem reſtituto, nec non, vt ait Simplicius in libello de Dimenſione, qui quidem, quod ſciam, adhuc nondum eſt excuſus. Itaque quod in quantitate continua, ſiue magnitudine exiſtit, intelligiturq; ſine omni parte, ita vt neque longum, neque latum, neque profundum eſſe cogitetur (vt nimirum excludamus animam rationalem, Nunc vel Inſtans temporis, & Vmbram, quae etiam partes non habent) id appellatur ab Euclide, & à Geometris punctum. Huius exemplum in rebus materialibus reperiri nullum poteſt, niſi ſolum extremitatem alicuius acus acutiſſimae, ſimilitudine puncti exprimere; punctum quod quidem omni ex parte verum non eſt, quoniam ea extremitas diuidi poteſt, & ſecari infinitè, punctum verò indiuiduum prorſus debet exiſtimari. Denique in magnitudine id concipi debet eſſe punctum, quod in numero Vnitas, quodque in tempore inſtans. Sunt enim & haec concipienda indiuidua.

II.

LINEA verò, longitudo latitudinis expers.

DEFINIT hic lineam, primam ſpeciem magnitudinis, quam dicit eſſe quantitatem longam duntaxat, non autem latam, intellige neque profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam neceſſario profunditas remouetur, non autem contra. Lineam autem hanc, ſiue longitudinem abſque latitudine, non abſurdè concipere, intelligereq; poterimus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati. Finis enim, ſeu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quadam eſt, ad longitudinem ipſiuſmet luminis, & vmbrae extenſa, carens omni latitudine, cùm ſit limes vtriuſque. Mathematici quoque, vt nobis inculcent veram lineae intelligentiam, imaginantur punctum iam deſcriptum ſuperiore definitione, è loco in locum moueri. Cum enim punctum ſit prorſus indiuiduum, relinquetur ex iſto motu imaginario veſtigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Vt ſi punctum A, fluere intelligatur ex A, in B, veſtigium effectum A B, linea appellabitur, cùm verò intervallum inter duo puncta, A, & B, comprehenſum ſit longitudo quaedam, carens omni latitudine, propterea quòd punctum A, omni priuatum



natum dimensione, eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum est, vt alij dixerint, lineam nil esse aliud, quam puncti fluxum: Alij verò, magnitudinem vno contentā intervallo. Potest enim linea vniuersim modo, vtpote secundum longitudinem secari, atq; diuidi.

III.

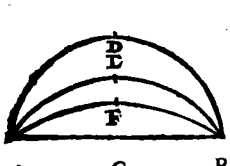
LINEÆ autem termini, sunt puncta.

DOCET, quanam sint extrema lineæ cuiusuis, seu termini, dicens lineam terminari, siue claudi vtrinque punctis; Non quòd omnis linea terminos habeat; quomodo enim linea infinita terminus assignari poterimus? qua etiam ratione in linea circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quòd linea qualibet habens extrema, in suis extremitatibus puncta recipiat. Vt superior linea A B, extrema habet puncta A, & B. Idemq; in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum est, ita vt earum extremitates sola esse puncta cogitemus.

IV.

RECTA linea est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

TRIPLEX omnino est linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, siue composita ex vtraque. Ex his describit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit esse eam, quæ æqualiter inter sua puncta extenditur, hoc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc flectendo subsultat; in qua denique nihil flexuosum reperitur. Hanc nobis ad viuum exprimit filum aliquod tenue summa vi extentum: In eo enim omnes partes media cum extremis æqualem obtinent situm, neque vlla est alia sublimior, aut humilior, sed omnes æquabiliter inter extremos fines posita progrediuntur. Proclus hanc definitionem exponens ait, tunc demum lineam aliquam ex æquo sua interiacere puncta, quando æquale occupat spatium ei, quod inter sua situm est puncta extrema. Vt linea A C B, dicetur recta, quoniam tantum occupat præcisè spatium, quanta est distantia puncti A, à puncto B. Linea verò A D B, A E B, A F B, non dicentur rectæ, cùm maiora obtineant spatia, quàm sit distantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta lineæ A C B, inter quæ est punctum C, æqualiter inter extrema A, & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in alijs lineis, quoniam puncta D, E, F, subsultant ab extremis A, & B. Plato rectā lineam perpulchrè sic definit: Linea recta est, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea A C B, si punctū C, aut quodvis aliud me-



dium, cùm haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminandi, impedimento vtiq; esset C, punctum interiectum, ne B, extremum alterum ab A, illuminaretur. Rursus oculus in A, existens extremo, nõ videret aliud extremũ B, ob interiectum punctũ C; q̃ quidem non contingit in lineis non rectis, vt perspicuum est in lineis A D B, A E B, A F B. Archimedes verò ait, lineam rectam esse minimam earum, quæ terminos habent eosdem; qualis est A C B, comparata cum A D B, A E B, A F B. Si enim A C B, nõ esset minima earũ quæ eosdem terminos A, & B, possident, nõ ex æquo interiaceret suæ puncta, sed ea potiùs linea, quæ minor diceretur, quàm A C B. Campanus denique describens rectam lineam, vocat eam brevissimam ex vno puncto in aliud extensionem. Quemadmodum autem Mathematici per fluxum puncti imaginarium concipiunt describi lineam, ita per qualitatem fluxus puncti qualitatẽ lineæ descriptæ intelligunt. Si namq; punctum recta fluere concipiatur per brevissimum spatium, ita vt neq; in hanc partem, neq; in illam deflectat, sed æquabilem quendam motũ, atq; incessum teneat, dicetur linea illa descripta, Recta: Si verò punctum fluens cogitetur in motu vacillare, atq; hinc inde titubare, appellabitur linea descripta, mixta: Si denique punctum fluens in suo motu non vacillet, sed in orbem feratur vniformi quodam motu, atq; distantia à certo aliquo pũcto, circa quod fertur vocabitur descripta illa linea, circularis. Itaq; si duo puncta moueantur similibus prorsus motibus, ita vt semper æqualiter inter se distent; describentur ab ipsis duæ lineæ similes, hoc est, si vna earum fuerit recta, erit & altera recta: si verò vna fuerit curua, erit & altera eodem omnino modo curua, &c. Lineas non rectas, quæ omnes obliquæ dici possunt, non definit hoc loco Euclides, sed circularem exponet definitione decimaquinta, mistam prorsus omittens, quod ea in hisce elementis Geometricis nullum habeat vsum. Sunt autem plurima genera linearũ mistarum; quædam enim sunt vniformes, quædam difformes. Vniformium rursus aliæ sunt in plano, aliæ in solido. In plano sunt Hyperbole, Parabole, Ellipsis, de quibus agit copiosissimè Apollonius in conicis elementis; linea Conchoideos, de qua Nicomedes; linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis spiralibus tractationem instituit, & alia huiusmodi. In solido, seu superficie curua sunt alterius generis linea helica, quàm ea ab Archimede descripta, qualis est illa, quæ circa cylindrum aliquem conuoluitur; nec non ea, quæ circa conum existit, vel etiam quæ circa sphæram, cuiusmodi sunt spiræ illæ, quas Sol describit ab ortu in occasum, vt in sphæra docuimus. Difformium autem infinitus est numerus, quas non est opus hic recenscre. Ex his constat, duas tantùm esse lineas simplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quæcunque sunt, mistas appellari, quod ex illis componantur. Vnde ingeniosè concludit Aristoteles in libro de Cœlo, tuxta triplicem lineam, tres tantùm esse motus, duos quidem simplices, rectum

cum & circularem, tertium verò mistum, sine ex illis duobus compositum.

Sed quoniam lineas rectas regula ducere solemus, doceamus, qua ratione regulam propositam examinare possimus, num linea per illam

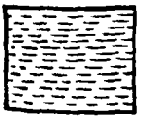


descripta recta sit, necne. Sit ergo regula A B, secundum cuius latus C D, recta C D, describatur ex puncto C, in punctum D. Deinde conuertatur regula, vt manente eadem parte superiore, punctum C, statuatur in D, & punctum D, in C: & secundum idem latus regulæ C D, recta ducatur ex eodem puncto C, in punctum D. Nam si posterior hæc linea priori omni ex parte congruet, dubitari non debet, quin regula A B, in lineis rectis ducendis fidere possimus: Si verò non congruet omni ex parte, latus illud C D, perfectè rectum non erit, sed corrigendum erit diligentius.

V.

SVPERFICIES est, quæ longitudinem, latitudinemq; tantùm habet.

POST lineam, qua est prima quantitatis continua species, vnitamq; habet dimensionem, definit superficiem, qua secundum magnitudinis speciem constituit, additq; prima dimensioni secundum longitudinem, alteram secundum latitudinem. Nam in superficie reperitur non solùm longitudo, vt in linea, verùm etiam latitudo, sine tamen omni profunditate. Vt quantitas A B C D, inter lineas A B, B C, C D, D A, comprehensa, consideratáq; secundum longitudinem



A B, vel D C, & secundum latitudinem A D, vel B C, omnis expers profunditatis, appellatur superficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiusque corporis, si ab ea omnis soliditas intellectu auferatur. Non incongruè etiam, vt ait Proclus, imaginem quasi expressam superficies nobis exhibent vmbræ corporum. Ha enim cùm interiorem terræ partem penetrare non possint, longa tantùm erunt, & lata. Mathematici verò, vt nobis eam ob oculos ponant, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri: Vestigium enim relictum ex ipso motu erit quidem longum, propter longitudinem lineæ, latum quoque propter motum, qui in transuersum est factus; nullam verò ratione profundum esse poterit, cùm linea ipsum describens omni careat profunditate; quare superficies dicetur. Vt si linea A B, fluat versus D C, efficietur superficies A B C D. Alij describentes superficiem dicunt, eam esse corporis terminum: Alij verò, magnitudinem duobus constantem intervallis.

Potest enim superficies diuidi, & secari duobus modis, vno quidem secundum longitudinem, altero verò secundum latitudinem.

VI.

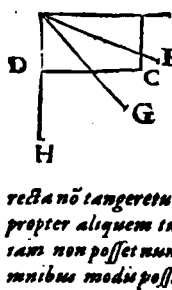
SVPERFICIEI autem extrema sunt lineæ.

NON dissimilis est hac definitio superiori, qua termini lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates superficiei esse lineas, quemadmodum lineæ fines extitere puncta. Vt superioris superficiei A B & D, extrema sunt linea A B, B C, C D, D A. Eodemq; modo in quacunq; altera superficie, quæ extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in superficie infinita, vel etiam sphærica, quæ corpus sphæricum circumdat. Potest etiã superficies aliqua claudi, & terminari vnica tantùm linea, qualis est circularis superficies, vt dicemus in definitione circuli.

VII.

PLANA superficies est, quæ ex æquo suas interiacet lineas.

HÆC quoque definitio similitudinem quandam descriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas suas interiacet, ita vt mediæ partes ab extremis sursum, deorsúmue subsultando, non recedant, appellabitur plana: qualis est superficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum sunt collocatæ, ita vt nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ sunt situm, nec vlla est alta sublimior, humiliórue, sed omnes æquabiliter protenduntur. Alij superficiem planam definiunt, dicentes eam esse, cuius partes mediæ obumbrant extrema: Vel esse minimam, siue breuissimam omnium, quæ eadem habent extrema: Vel cuius omnibus partibus recta linea accommodari potest, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt superficies A B C D, tum demum plana dici debet,



quando linea recta A E, circa punctũ A, immobile circumducta, ita vt nunc eadem sit, quæ A B, nunc eadem, quæ A F, nunc eadem, quæ A G, & nunc eadem, quæ A H, nihil in superficie offendit depressum, aut sublatum, sed omnia puncta superficiei à linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quod si minima superficiei particula aliis humilior à linea recta nõ tangeretur, vel ipsa linea recta liberè non posset circumduci, propter aliquem tumorem, seu eminentiam in superficie occurrentem, tam non posset nuncupari plana. Itaque vt sit plana, requiritur vt omnibus modis possit recta linea commensurari, hoc est, vt ei applicari possit recta linea secundum A B, & A F, & denique secundum omnes

partes

partes. Hæc autem superficies sola erit ea, quam imaginari, & intelligere possumus describi ex motu lineæ rectæ in transuersum, qui super duas alias lineas rectas conficitur. Vt si linea recta A B, per duas rectas A D, B C, feratur, efficietur superficies perfectè plana, iuxta omnes definitiones. Non enim difficile erit huic superficiei traditas descriptiones accommodare. Solent Mathematici superficiem planam frequenter appellare planum, imo & quando loquuntur de plano, intelligenda semper sit superficies plana. Cætera omnes superficies, quibus non omni ex parte accommodari potest linea recta, quales est superficies interior alicuius fornicis, vel exterior alicuius globi, columnæve rotundæ, vel etiam coni, &c. appellantur curuæ, & non planæ. Quamuis enim superficies columnæ rotundæ, seu cylindri secundùm longitudinem adaptari possit linea recta, tamen secundum latitudinem minimè potest. Idemq; dicendum est de aliis. Superficies autem curua duplex est, conuexa videlicet, vt exterior superficies sphæræ, vel cylindri; & concaua, vt interior fornicis, siue arcus alicuius. Quoniam verò omnium harum contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro solùm planam nobis explicauit, de qua est disputaturus prioribus sex libris.



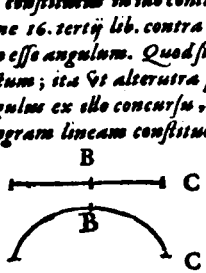
VIII.

PLANVS verò angulus, est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, quidnam sit angulus planus, dicens; Quandocunque duæ lineæ in plana aliqua superficie inuicem concurrunt, & non in directum constituuntur, efficietur ex huiusmodi concursu, seu inclinatione vnius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana constituatur superficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ A B, A C, concurrunt in A, & non iacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem existente superficie, in qua duæ illæ lineæ constituuntur. Dicentur autem duæ lineæ non in directum iacere, quando altera earum versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eam secat, vel certè statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus, qui fit, quando duo circuli se contingunt, vel etiam, quando linea recta circulum tangit. Protracta enim recta linea post punctum contactus, quamquam non secet circulum, tamen statim post illud ab eo seiungitur. Eodem pacto circularis illa linea secundum propriam dispositionem, ac formam extensa recedit à recta tangente, quamuis eam non secet. Vnde verè est angu-



lus constituetur in illo contactu: qua de re plura scribemus in propositione 16. tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eam non esse angulum. Quod si duæ lineæ se mutuo tangant iacentes in directum; ita vt alterutra producta congruat toti alteri, non fiet vllus angulus ex illo concursu, cùm nulla sit inclinatio, sed amba vnam integram lineam constituent. Vt quia recta A B, producta conuenit cum recta B C, non efficietur angulus in B.

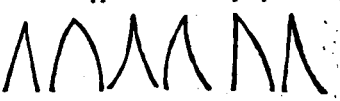


Sic etiam non fiet angulus in B, ex lineis curuis A B, B C, quia alterutra secundum suam inflexionem, & obliquum ductum extensa, cum altera coincidit. Quare in directũ dicentur iacere. Itaque vt linea recta efficiant angulum, necesse est, vt post concursum producta se mutuò secent: Curuæ autem linea, vel quarum altera curua, altera verò recta existit, angulum constituere verè possunt, etiamsi non se mutuo intersecent; sufficit enim, quod sese contingant, ita vt statim post contactum altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semota cernuntur. Consistit autem angulj cuiusuis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; linea etenim longiùs excurrentes non augent suam inclinationem, igitur neque anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum, quorum priùs solidos comprehendit, de quibus Euclides differit in Stereometria, quique in corporibus existunt; Posteriùs verò sphærales, qui in superficie sphæra constituuntur ex circulorũ maximorũ circumferentijs, & de quibus copiosè agitur in sphæricis elementis Menelai. Horum autem omnium explicatio in alium locum à nobis reijcitur, cùm hic de solis planis angulis sit futurus sermo.

IX.

CVM autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANGVLVS omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidem rectilineus dicitur, & de quo solum hic agit Euclides: aut ex duabus curuis, quem curuilineum vocare licet; aut ex vna curua & altera recta, qui non ineptè mixtus appellatur. Ex hisce porrò lineis possunt curuilinei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, seu habitudine linearum curuarum, vtpote secundum connexum, & concauum, ceu in propositis angulis planè, & apertè perspicitur. Rectilineus verò variari non potest ratione inclinationis, habitudinis ve linearum, nisi maiorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod est absurdum; cùm hoc modo augeatur tantùm angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & aliis commune est, non autem ita varietur, vt aliud constituat genus.

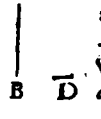


CVM

X.

CVM verò recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam eos, qui ſunt deinceps, angulos æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterq; æqualium angulorum: Et quæ inſiſtit recta linea, perpendicularis vocatur eius, cui inſiſtit.

VSVS frequentiſſimus reperitur in Geometria anguli recti, & linea perpendicularis, nec non anguli obtuſi, & acuti, propterea docet hoc loco Euclides, quinam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & quanam linea perpendicularis: In ſequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtuſum, & acutum. Non enim alius dari poteſt angulus rectilineus, præter rectum, obtuſum, & acutum. Igitur ſi recta linea A B, recta C D, inſiſtens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidem ideo dicuntur à Mathematicis eſſe deinceps, quod eos eadem linea C D, protracta, prope idem punctum B, efficiat) inter ſe æquales, quod tum demum fiet, quando recta A B, non magis in C, quam in D, inclinabit, ſed æquabiliter recta C D, inſiſtet, vocabitur vterque angulus B, rectus, & recta A B, perpendicularis recta C D, cui inſiſtit. Eadem ratione nominabitur recta C B, perpendicularis recta A B: quamuis enim C B, tantum faciat cum A B, vnum angulum, tamen ſi A B, extenderetur in rectum & continuum verſus punctum B, efficeretur alter angulus æqualis priori. Qua vero arte linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos æquales, docebit Euclides propoſitione 11. & 12. huius primi libri. Itaque vt in Geometria concludamus angulum aliquem eſſe rectum, aut lineam, quæ ipſum efficit, ad aliam eſſe perpendicularem, requiritur, & ſufficit, vt probemus angulum, qui eſt ei deinceps, æqualem illi eſſe. Pari ratione, ſi dicatur alicuius anguli rectus, aut linea, qua ipſum conſtituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quoque eſſe. Quando enim anguli, qui ſunt deinceps, fuerint inter ſe æquales, nuncupatur vterque illorum rectus, & linea ipſos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definitionem: quando autem non fuerint æquales, non dicitur quiſquam illorum rectus. Vt conſtabit ex ſequentibus duabus definitionibus, & propterea neque linea eos conſtituens perpendicularis appellatur. Hæc dixerim, vt videas, quidnam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quemnam vſum habeant apud Geometras deſcriptiones vocabulorum. Non enim magno labore hæc quæ diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.



XI.

OBTVSVS angulus eſt, qui recto maior eſt.



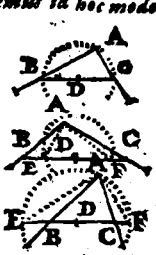
QVANDO recta A B, rectæ C D, insistens non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob eam causam neutrum rectum, sed unum quidem recto maiorem, alterum verò minorem, dicitur maior angulus obtusus, qualis est angulus B, ad punctum G, exurgens, qui continetur rectis lineis A B, B G.

XII.

ACVTVS verò, qui minor est recto.

VT in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, exurgens, qui continetur rectis lineis A B, B D, vocatur acutus. Itaque angulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, vt unus alterò maior, minórue detur, cum linea perpendicularis eum efficiens non debeat magis in unam partem inclinare, quàm in alteram: Obtusus verò, & Acutus augeri possunt, & minui infinitis modis, cum ab illa insensibilitate lineæ perpendicularis infinitus etiam modis recta linea possit recedere, vt perspicuum est. Quoniam verò ad quemuis angulum planum constituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in uno puncto plures existunt anguli, solent Mathematici, vt tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo lineæ conficiunt angulum, extremæ verò significant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia, in superiore figura angulum obtusum intelligunt per angulum A B C, acutum verò, per angulum A B D, quod diligenter est notandum, vt facile dignoscamus angulos, quorum mentio fit in demonstrationibus.

I AM verò proposito nobis angulo aliquo rectilineo, si experiri velimus, num rectus sit, an obtusus, acutúsne, efficiemus id hoc modo. Contineant duæ rectæ A B, A C, angulum A. Ducta recta B C, vtcunque, quæ angulum subtendat, & divisa bifariam in D, describatur ex D, vt centro ad intervallum D A, circumferentia circuli;



a 31. ter ej. *quæ si per puncta B, C, transeat, a erit angulus A, rectus, utpote qui in semicirculo B A C, existat: si verò idem semicirculus rectam B C, secet in E, F, erit angulus B A C, obtusus; propterea quod, du-*

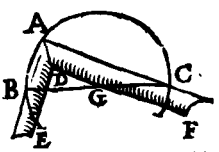
b 31. ter ej. *ctis rectis E A, F A, b angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est, qui quidem pars est anguli B A C. Si denique idem semicirculus rectam B C, productam secet in E, F, erit angulus*

c 31. ter ej. *B A C, acutus; propterea quod ductis rectis E A, F A, c angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est, qui quidem maior est angulo B A C.*

ALITER idem assequemur hoc modo. Describatur ex puncto D, quod rectam B C, dato angulo A, subtensam secat bifariam, semicirculus

circulus ad interuallum D B, vel D C: qui si transeat per punctum A, a datus angulus erit rectus, vtpote qui in semicirculo existat. Si ve- a 31. tert.
rò idem semicirculus transeat supra punctum A, tū. datus angulus erit obtusus. Ducta enim recta D A, secante circumferentiam in E, iungantur recta E B, E C; b eritq; angulus B E C, in semicirculo b 31. tert.
rectus. Cùm ergo angulus B A C, datus c maior tū. sit angulo B E C, erit angulus datus A, recto ma- c 21. pri
ior, hoc est, obtusus. Si denique semicirculus idem mi.
secet rectas A B, A C, erit datus angulus acutus.
Sumpto namque puncto E, inter rectas A B, A C, in circumferentia, iungantur recta E B, E C; d erit- d 31. tert
que angulus B E C, rectus in semicirculo: e qui cum maior sit angu- tū.
lo dato A, erit datus angulus A, recto minor, id est, acutus. Non vi- e 21. pri
deatur autem mirum cuipiam, quod ad demonstrationem assuma- mi.
mus propositiones, quæ posterius demonstrantur ab Euclide; quod alienum esse videtur à puritate demonstrationum Geometricarum: Non videatur, inquam, mirum, quia cum id, quod hoc loco ostendimus, necessarium non sit ad sequentes demonstrationes, poterit commodè differri, donec propositiones requisitæ sint demonstratæ. Satis est, vt praxis huiusce rei hoc loco intelligatur. Idem obseruabimus in nonnullis praxibus problematum. Eas enim propriis in locis, quoad eius fieri poterit, proponemus, vt diuisionem anguli rectilinei in quotuis partes æquales eo in loco docebimus, vbi Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas æquales partes, &c. quanquam ad earum praxium demonstrationes necessaria sint propositiones posterius demonstratæ.

FACILIVS idem cognoscemus beneficio normæ alicuius accuratè fabricatæ, qualem refert instrumentum A B C, constans duabus regulis A E, A F, ad angulum rectum in A, coniunctis. Nam si latus A B, huius normæ, rectæ A B, applicetur, cadente puncto A, in punctum A; si quidem & norma latus A C, rectæ A C, congruat, erit angulus A, rectus: si verò citra rectam A C, cadat norma latus A C, erit angulus A, obtusus; si denique latus norma A C, vltra rectam A C, cadat, acutus erit angulus, vt perspicuum est.



IT A autem normam examinabimus, num accuratè sit fabricata, nec ne. Descripto semicirculo B A C, ex centro G, cuiusuis magnitudinis, ductaq; diametro B C, ponatur angulus A, in aliquo puncto circumferentiæ, vt in A, latusq; vnum normæ, vt A B, per B, punctum extremum diametri transeat. Nam si alterum tunc latus A C, per alterum punctum extremum C, transeat, ritè fabricata erit norma A B C;

a 31. ter ma A B C; a quod tunc angulus B A C, in semicirculo B A C, rectus
11. sit: si vero latus A C, non per C, transeat, emendanda erit norma; quia eius angulus A, tunc rectus non erit. Eadem ratione interiorem partem normæ examinabimus, si angulum D, circumferentia applicemus, & latera D E, D F, punctis extremis B, C, &c.

XIII.

TERMINVS est, quod alicuius extremum est.

TRES sunt termini iuxta hanc definitionem. Punctum enim terminus est, seu extremum lineæ: Linea superficiei: & superficies corporis. Corpus autem terminare amplius nihil potest, quod non reperiatur alia quantitas plures habens dimensiones, quam tres. Omne siquidem terminatum superat terminum suum vna dimensione, vt perspicuum est ex adductis exemplis.

XIV.

FIGVRA est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

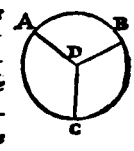
NON omnis quantitas terminos possidens Figura dici potest, ne lineam finitam figuram appellare cogamur: Sed ea solum magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe superficies terminata, & quæ profunditatem adepta quoque sunt, vt solida finita Figura nomine appellabuntur. Ha enim proprie terminis comprehendi dicuntur. Nam linea finita non proprie dicitur punctis extremis comprehendi, cum puncta lineam non ambiant, sed potius punctis terminari dicitur. Itaque termini debent quantitatem, quæ figura dicitur, ambire, & non tantum terminare. Superficies quoque infinita, vel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, Figura vocari nulla ratione potest, Figura vnico comprehensa termino sunt, Circulus, Ellipsis, sphæra, sphæroides, & alia huiusmodi: Pluribus vero terminis inclusa figuræ sunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminatæ nuncupantur figuræ planæ: solidæ autem circumscriptæ figuræ solidæ, siue corporeæ. Porro quia formas, seu types variarum figurarum inspicies quamplurimas in sequentibus, planarum quidem in prioribus 10. libris, solidarum vero in posterioribus quinque, propterea nulla hoc loco figura depingenda esse videtur.

XV.

CIRCVLVS, est figura plana sub vna linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

DEFI-

DEFINIT hic circulum, figuram inter planas perfectiſſimam, docens figuram illam planam, qua vnica linea circumſcribitur, ad quam lineam omnes recta linea ducta ab vno puncto, quod intra figuram exiſtit, ſint aquales, vocari circulum. Vt ſi ſuperficies, ſeu ſpatium concludatur vnica linea A B C, habueritq́ hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intus ſuſcepto, vtpote à D, omnes recta linea cadentes ad terminum A B C, quales ſunt D A, D B, D C, inter ſe ſint aquales, appellabitur talis figura plana, circulus, alias non. Qua vero ratione in circulo punctum illud medium reperiri debeat, docebit Euclides propoſitione 1. tertij lib. Adiungit quoque Euclides, lineam extremam circuli, qualis eſt A B C, appellari Peripheriam, ſeu, vt Latini exponunt, circumferentiam. Poteſt circulus etiam hac ratione deſcribi. Circulus eſt figura plana, qua deſcribitur à linea recta finita circa alterum punctum extremum quieſcens circumducta, cum in eundem rurſus locum reſtituta fuerit, vnde moueri cœperat. Qua quidem deſcriptio perſimilis eſt ei, qua ab Euclide ſphæra deſcribitur lib. 11. Vt ſi intelligatur recta A D, circa punctum D, quieſcens moueri, donec ad eundem redeat locum, à quo dimoueri cœpit, deſcribet ipſa recta totum ſpatium circulare; punctum verò alterum extremum A, delineabit peripheriam A B C: Erit quoque punctum quieſcens D, illud, à quo omnes linea cadentes in peripheriam ſunt inter ſe aquales, propterea quod recta A D, circumducta, omnes lineas, qua ex D, poſſunt educi ad peripheriam, aquè metiatur. Igitur Ellipſis, quamuis figura ſit plana vna linea circumſcripta, tamen quia in ea non datur punctum, à quo ad ipſam lineam terminantem omnes recta linea ſint aquales, circulus dici nequit.



XVI.

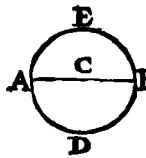
HOC vero punctum, centrum circuli appellatur.

DOCET, punctum illud intra circulum, à quo omnes linea recta ad circumferentiam ducta ſunt aquales, appellari centrum circuli; quale eſt præcedentis figuræ punctum D. Vnde perſpicuum eſt, polum alicuius circuli in ſphæra, à quo omnes recta ad peripheriam circuli cadentes ſunt aquales, vt ait Theodoſius in ſphæricis elementis, non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, exiſtat in ſuperficie ſphæræ, non autem in ſuperficie circuli; qua tamen eſt neceſſario requiſita conditio, vt punctum aliquod centrum vocetur. Cæterum, vt punctum aliquod circuli dicatur centrum, ſatis eſt, vt ab eo tres duntaxat linea cadentes in peripheriam ſint aquales inter ſe, vt demonſtrat Euclides propoſitione 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, vt omnes alia ab eodem puncto emiſſa inter ſe ſint aquales.

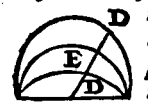
DIAME-

XVII.

DIAMETER autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat.



SI in circulo ducatur recta linea A B, per centrum C, ita vt extrema eius A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicetur, sed ea solummodo, quæ per centrum vsque ad peripheriam vtrinque extenditur. Vnde plures assignari poterunt in circulo diametri, vnum verò centrum duntaxat. Quod autem Euclides addit, circulum bifariam secari à diametro, perspicuum ex eo esse potest, quod diameter per medium circulum, vtpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, vt propter directum diametri per centrum transitum, vtrinque æquales circumferentiæ abscindantur. Quod tamen Thaletem Milesium hac ratione demonstrasse testatur Proclus. Concipiamus animo, portionem A D B, accommodari, & coaptari portioni reliquæ A E B, ita vt diameter A B, communis sit vtrique portioni: Si igitur circumferentia A D B, congruat penitus circumferentiæ A E B, manifestum est, duas illas portiones à diametro factas, esse inter se æquales, quandoquidem neutra alteram excedit: Si verò circumferentia A D B, non omni ex parte cadere dicatur super circumferentiam A E B, sed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta recta à centro C, secante circumferentiam A D B, in D, & circumferentiam A E B, in E, erunt duæ rectæ C D, C E, ductæ ex centro ad circumferentiam eiusdem circuli æquales, per circuli definitionem, cum tamen vna sit pars alterius, quod est absurdum. Non ergo cadet vna circumferentia extra aliam, vel intra, vel partim extra, partim intra, sed amba inter se aptabuntur, ideoq; æquales erunt, quod demonstrandum proponebatur.



EX hac demonstratione constat, diametrum non solùm circumferentiam, verùm etiam totam aream circuli secare bifariam. Cum enim semicircumferentiæ sibi mutuo congruant, vt ostensum est, congruent etiam superficies ipsæ inter diametrum, & vtramque circumferentiam comprehensæ, cum neutra alteram excedat. Quare æquales inter se erunt.

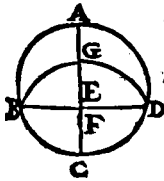
XVIII.

SEMICIRCVLVS verò est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

EXEM-

EXEMPLI gratia, in superiori circulo figura A D B, contenta sub diametro A B, & peripheria A D B, dicitur semicirculus, quia, vt in præcedenti definitione ostendimus, ea est dimidiata pars circuli. Eadem ratione erit figura A E B, semicirculus. Idem autem punctum C. diametrum secans bifariam, centrum est in circulo, & in semicirculo.

QVOD si recta linea B D, non transeat per centrum E, secabitur circulus ab ea non bifariam, sed in duas portiones inæquales B A D, B C D, quarum ea, in qua centrum circuli existit, cuiusmodi est portio B A D, maior est, quàm alia B C D, extra quàm centrum E, reperitur. Esse autem portiones B A D, B C D, inæquales, ita probari potest. Concipiatur per centrum E, ducta diameter ad rectam B D, perpendicularis A G. Si igitur dictæ portiones dicantur esse æquales, & portio B C D, intelligatur moueri circa rectam B D, vt super portionem B A D, cadat, congruet illa portio huic, & recta F C, rectæ F A, congruet, ob angulos rectos ad F, qui omnes inter se æquales sunt ex defin. 10. cum sint sibi mutuo deinceps. Recta ergo F C, quæ nunc eadem est, quæ F A, maior erit, quàm E A, pars ipsius F A. Cùm ergo ipsi E A, sit æqualis E C, quod ambæ ducantur è centro ad circumferentiam, erit quoque F C, maior quàm E C, pars quàm totum, quod est absurdum. Non igitur portio B C D, portioni B A D, congruet, sed intra eam cadet, cuiusmodi est portio B G D, vt recta F G, eadem tunc existens, quæ F C, minor possit esse quàm E A, vel E C. Si namque diceretur cadere extra, vt si circulus esset B C D G, cuius centrum E, & portio B C D, caderet extra B G D, qualis est portio B A D, esset rursus F A, eadem tunc existens, quæ F C, maior quàm E G, hoc est, quàm E C, atque ita pars F C, maior rursum foret toto E C. quod absurdum est. Ex quo patet, portionem B A D, in qua centrum E, existit, maiorem esse reliqua portione B C D, cum hæc æqualis sit portioni B G D, quæ pars est portionis B A D. Cùm enim ostensum sit, portionem B C D, circa rectam B D, circumductam non posse congruere portioni B A D, neque cadere extra, cadet omnino intra, qualis est B G D.



XIX.

RECTILINEÆ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

POST definitionem circuli, traditurus iam Euclides descriptiones variarum figurarum, explicat prius, quanam figura dicantur rectilinea. De his enim potissimum sermo futurus est in hisce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ vndiq; rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perspicuum est, figuras planas curuis

lineis

lineis comprehensas, dici curvilineas. Eas verò, quæ partim curvis, partim rectis circumscribuntur, appellari mixtas. Varia autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclide describentur.

XX.

TRILATERÆ quidem, quæ sub tribus.

AFFIRMANS Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circumscribuntur, apertè nobis innuit, quonam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot sint anguli, quot latera, seu rectæ linea, ex quibus constant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes species iam iam adducentur.

XXI.

QVADRILATERÆ verò, quæ sub quatuor.

EADEM ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius varia species mox subsequentur.

XXII.

MVLTILATERÆ autem, quæ sub pluribus, quàm quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

QVONIAM species rectilinearum figurarum sunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progressum: Nam tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam speciem, sub qua omnia triangula continentur; quatuor constituunt secundam, qua omnia quadrangula complectitur; quinque tertiam componunt speciem; sex quartam, atque ita deinceps infinitè: Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur persequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quàm quatuor, rectis lineis circumscribuntur, generali vocabulo Multilateras; contentus denominatione trilaterarum figurarum & quadrilaterarum, fortassis eam ob causam, quod præcipuè in prioribus hùi libri de Triangulis, atque Quadrangulis sermo habeatur, & quod facilè ad similitudinem harum duarum specierum cætera omnes à quolibet definiri possint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & sex lineis comprehensam sexilateram, atque reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterunt huiusmodi figuræ quinquangula, sexangula, septangula, &c.

XXIII.

TRILATERARVM autem figurarum, Æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

DESCENDIT iam ad singulas species triangulorum. Quia

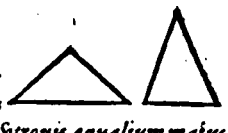
Verò triangula diuidi possunt vel habita ratione laterum, vel angulorum, declarat primus species prioris diuisionis, quæ tres sunt duntaxat, quod tria latera tribus tantum modis sese possint habere. Aut enim omnia æqualia sunt; aut duo tantùm, tertio existente vel maiore, vel minore; aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter se æqualia sunt, dicitur triangulum Æquilaterum. Porro ex æqualitate omnium trium laterum trianguli æquilateri infertur, omnes tres eius angulos æquales quoq; esse, ceu ad quintam propositionem huius libri demonstrabimus.



XXIV.

ISOSCELES autem est, quod duo tantùm æqualia habet latera.

EX hac rursum æqualitate duorum laterum trianguli Isoscelis efficitur, duos angulos super reliquum latus etiam esse æquales, vt demonstrabit Euclides propos. 5. huius libri. Appositimus autem duo triangula Isoscelia, quorum primus habet tertium latus vtrouis æqualium maius, posterius autem idem minus obtinet: ita vt duæ sint species trianguli Isoscelis; alterum, cuius tertium latus sit vtrouis æqualium maius, & alterum, cuius tertium latus vtrouis æqualium minus sit.



XXV.

SCALENVM verò est, quod tria inæqualia habet latera.

HIC denique ex inæqualitate omnium laterum trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inæqualitas, vt ostenditur propos. 18. huius 1. lib. Porro ex hu conflat, eodem modo potuisse diuidi triangulum in tres species, si æqualitatis angulorum ratio haberetur. Cum enim aut omnes tres anguli sint inter se æquales; aut duo tantùm, tertio maiore, vel minore existente; aut omnes tres inæquales; erit omne triangulum vel æquiangulum, habent tres omnes angulos æquales: vel duorum tantùm angulorum æqualium: vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum quidem Æquilatero, secundum verò Isoscelis, tertium denique Scaleno respondet triangulo. Cæterùm quanam arte construenda sint triangula huius partitionis super quauis data recta linea finita, trademus propos. 1. huius lib.



XXVI.

AD hæc etiam, trilaterarum figurarũ, Rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

NVNC exponit triangulorum ſpecies iuxta poſteriorem diuiſionem, habita ratione æqualitatis angulorum. Quia verò tria tantummodò ſunt angulorum rectilineorum genera diuerſa; (Omnis enim angulus rectilineus vel eſt rectus, vel obtuſus, vel acutus, vt ſupra diximus,) fit vt tres quoque ſpecies triangulorum ſub hac conſideratione reperiantur. Nam aut vnius anguli trianguli eſt rectus, & ob eam rem reliqui acuti, vt ex 17. propoſ. 1. lib. conſtabit; aut obtuſus, & ob eandem cauſam reliqui acuti, aut denique nullus rectus, nullus obtuſus, ſed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & aliis Geometris Rectangulum. Poteſt autem triangulum huiuſmodi eſſe Iſoſceles, vel ſcalenum, vt hæ figura indicant, æquilaterum autem nulla ratione. Propter æqualitatem enim laterum eſſent per ea, quæ propoſ. 5. dicemus, omnes etiam anguli æquales, ideoque, cum vnus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat cum propoſ. 17. & 32. huius libri.



XXVII.

AMBLYGONIVM autem, quod obtuſum angulum habet.



TRIANGVLVM Amblygonium, ſiue obtuſangulum eſſe quoque poteſt vel Iſoſceles, vel ſcalenum, vt in his figuris cernitur, non autem æquilaterum, alias eadem ratione eſſent omnes tres anguli per ea, quæ propoſ. 5. oſtendemus, æquales, ideoque cum vnus ponatur obtuſus, omnes tres obtuſi, quod multo magis pugnat cum propoſ. 17. & 32. huius libri.

XXVIII.

OXYGONIVM verò, quod tres habet acutos angulos.

OMNE triangulum Oxygonium, ſiue acutangulum, poteſt eſſe vel æquilaterum, vel Iſoſceles, vel ſcalenum, vt cernere licet in triangulis, quæ in ſpeciebus prioris diuiſionis ſpectanda exhibuimus, ne eadem hic fruſtra repetantur. Ex dictis igitur palam fit, triangulum quodcunq; æquilaterum, eſſe neceſſario Oxygonium: At omne triangulum tam Iſoſceles, quàm Scalenum, eſſe vel Rectangulum, vel Amblygonium, vel Oxygonium; atque Iſoſceles Oxygonium rurſum duplex, Iſoſceles nimirum Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium maius, atque Iſoſceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium minus: Vt vnica ſit ſpecies trianguli æquilateri, quatuor verò Iſoſcelis, & tres Scalenæ: atq; in vniuerſum octo triangulorum genera; æquilaterum, quod perpetuo Oxygonium eſſe diximus, Iſo-

mum, Isosceles rectangulum, Isosceles Amblygonium, Isosceles Oxygonium habens tertium latus trouis aqualium maius, Isosceles Oxygonium habens tertium latus trouis aqualium minus, Scalenum rectangulum, Scalenum Amblygonium, & Scalenum Oxygonium. Quæ etiam hisce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum Isosceles, Rectangulum Scalenum, Amblygonium Isosceles, Amblygonium Scalenum, Oxygonium aquilaterum, Oxygonium Isosceles habens tertium latus trouis aqualium maius, Oxygonium Isosceles habens tertium latus trouis aqualium minus, & Oxygonium Scalenum. Quare perspicuum est, quaminam connexionem, siue affinitatem habeant inter se triangula triusque partitionis. Posse autem dari triangulum Isosceles Oxygonium, cuius duorum laterum aqualium trumuis tertio sit minus, vt rectè animadvertit Franciscus Barocius in sua Cosmographia, ostendemus ad propos. 15. lib. 4. In omni porro triangulo, cuius duo quæcunq; latera expressè nominantur, soles reliquum latus tertium à Mathematicis appellari Basis, siue illud in situ infimum occupet locum, siue supremũ, &c. Hoc te breuiter monere volui, ne putares aliquod latere mysterij in basi triãguli, intelligeresq; quodlibet latus, omni discrimine remoto, basis nomine posse nuncupari.

XXIX.

QVADRILATERARVM autem figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

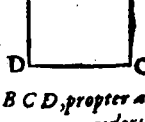
POST figurarum trilaterarum species, exponit iam singulatim quadrilateras figuras, recensendo quinque tantummodò eorum genera, quorum quatuor priora regularia sunt, posterius autem, & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum, cuius quidem omnia quatuor latera inter se aqualia existunt, omnesq; anguli recti. Itaque quadrangulum aquilaterum, & non rectangulum; vel contra, rectangulum, & non aquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides propos. 46. huius lib. quonam modo construendum sit quadratum super recta linea proposita finita.



XXX.

ALTERA verò parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.

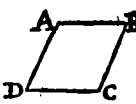
SECVNDA figura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se aqualia; quamuis bina opposita inter se aqualia existant. Vt in altera parte longiori A B C D, latera A B, D C, inter se, & A D, B C, inter se quoque æqualia sunt, cum A B C D, propter an-



gulorum rectitudinem, parallelogrammum sit, & in hoc lib. ad prop. 34. ostendemus.

XXXI.

RHOMBVS autem, quæ æquilatera, sed rectangula non est



HÆC figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppositas prorsus habet conditiones, & diuersas à conditionibus figura altera parte longioris. Habet enim omnia latera æqualia, angulos verò non rectos, & inæquales, quamuis bini oppositi inter se æquales existant. Vt in Rhombo A B C D, anguli A, & C, inter se, & B, & D, quoque inter se æquales sunt, cum A B C D, propter æqualitatem laterum, parallelogrammum sit, ceu ad eandem propos. 34. huius libri demonstrabitur.

XXXII.

RHOMBOIDES verò, quæ aduersa & latera, & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula.



EST hæc figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte oppositum. Nam neque eius latera omnia æqualia sunt, neq; vllus angulus rectus, sed tm. eius latera bina oppositum, qualia sunt A B, D C, & A D, B C, in Rhomboide A B C D, æqualia inter se, item anguli bini oppositi, quales sunt A, C, & B, D, inter se existunt æquales. Ha igitur quatuor figuræ quadrilatera dici possunt regularia; cætera verò omnes, quæcunque sint, irregularia.

XXXIII.

PRÆTER has autem, reliquæ quadrilateræ figuræ, trapezia appellentur.



RELIQVAS omnes figuras quadrilateras, quæ à prædictis quatuor differunt, ita vt neque latera omnia æqualia, neque omnes angulos æquales, seu rectos, neque latera bina opposita; neque angulos binos oppositos habeant inter sese æquales, generali vocabulo Trapezia nominat: quæ quidem cum infinitis modis variari queant, recte irregularia nuncupabuntur. Possunt enim duo anguli esse recti, vel vnus obtusus, & alij acuti, vel duo obtusi, & alij acuti, &c. Eademq; fieri potest quasi diuisio penes latera: Nam vel aliqua æqualia inter se sunt, vel nullum alteri est æquale, &c. Determinatas porro trapezio-

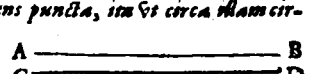
rum

rierum ſpecies nonnullas afferemus poſt definitionem linearum parallelarum, ſeu aquidiſtantium, & parallelogrammi.

XXXIV.

PARALLELÆ rectæ lineæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, & ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram ſibi mutuo incidunt.

VT dua, vel plures recta linea dicantur parallelæ, ſiue aquidiſtantes, non ſatis eſt, vt in quamcunque partem, etiam ſpatio infinito, producta nunquam ad vnum punctum coeant; ſed neceſſe quoque eſt, vt in vna plana ſuperficie exiſtant. Multæ ſiquidem lineæ rectæ non exiſtentes in eadem ſuperficie plana productæ ad ſpatium infinitum, nunquam in vnum conueniunt, & tamen non ſunt parallelæ dicendæ; quales ſunt, exempli gratia, duæ rectæ lineæ in tranſuerſum poſitæ in medio aere, & non ſe tangentes; Hæ etenim nunquam coire poſſunt. Dicuntur autem duæ rectæ lineæ in eadem exiſtere plana ſuperficie, quando ſuperficies aliqua plana vni earum accommodata, ita vt omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilem circumuoluta, alteri quoque accommodari poteſt ſecundum omnia eius puncta, quamuis reipſa in duabus ſuperficiebus diuerſis reperiantur; Vt poſitis duabus rectis lineis A B, C D, ſi ſuperficies aliqua plana recta A B, applicetur, omnia eius tangens puncta, ita vt circa illam circumducta tangat quoque omnia puncta alterius rectæ C D; dicentur huiuſmodi rectæ duæ lineæ in eadem ſuperficie plana exiſtere, aliàs non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eadem non coeant, etiamſi infinitè producantur tam ad partes A, C, quàm ad B, D, appellabuntur parallellæ, ſiue aquidiſtantes. Cæterum planius, perfectiuſq; intelliges in xi. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eadem dicantur ſuperficie exiſtere: Satis ſit hoc loco breuiter admonuiſſe, rectè ab Euclide vtramque conditionem eſſe poſitam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem exiſtere plano, & producta in vtramuis partem nunquam in vnum conuenire, quanquam hac productio continuetur ad ſpatium infinitum. Quod ſi duæ rectæ lineæ per immenſum aliquod ſpatium extenſæ non cernantur coire, conſtet tamen, eas tandem ex vna parte longius protractas in vnum punctum conuenturas, quamuis ex altera ſemper magis ac magis inter ſe diſtent, ac diſiungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotieſcunque ergo duæ lineæ rectæ dicuntur à quopiam eſſe parallelæ, is neceſſe eſt concedat, illas in vna, eademq; ſuperficie iacere, & nunquam poſſe coire. Similiter, ſi quis concludere velit, duas rectas lineas eſſe parallelas, hic demonſtret primùm oportet, eas in eodem exiſtere plano, & in neutram partem productas

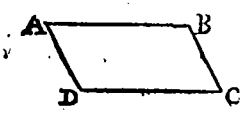


euinungi posse. Qua in re non pauci videntur hallucinari, qui ex eo duntaxat conantur ostendere, aliquas rectas lineas esse parallelas, quod in neutram partem coeant, etiamsi infinitè producantur, nulla facta prorsus mentione alterius conditionis, qua eaſdem lineas in eodem requirit existere plano.

HIC finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam verò hoc eodem libro mentio fiet figuræ, qua Parallelogrammum, nec non earum, quæ complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duabus definitionibus adiunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & quæ sint parallelogrammi complementa, vt facilius demonstrationes percipiantur.

XXXV.

PARALLELOGRAMMVM est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.

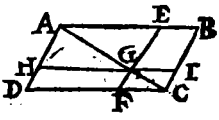


VT figura quadrilatera A B C D, si quidem latus A B, æquidistet lateri D C, & latus A D, lateri B C, nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor solum parallelogramma; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorũ prtora duo rectangula, quod omnes angulos habeant rectos, posteriora verò duo non rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus existat rectus. Caterum, quatuor has figuras esse parallelogramma, ostendemus ad propos. 34. huius lib. Itaque possumus quadrilateras figuras, (vt & antiqui Geometræ) diuidere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammum rursus in rectangulum, & æquilaterum, quale est Quadratum: in nec rectangulum, nec æquilaterum, quale est Rhomboides; in rectangulum, sed non æquilaterum, qualis est figura altera parte longior: & in æquilaterum, sed non rectangulum, cuiusmodi est Rhombus. Trapeziorum quoque aliud quidem habet duo latera opposita parallela, alia verò minimè; aliud autem nulla opposita latera habet parallela. Præterea illud prius vel habet duo illa latera, quæ non sunt parallela, inter se æqualia, diciturq; Trapezium Isosceles: vel inæqualia, Trapeziumq; Scalenum appellatur. Itaque ex his omnibus septem genera figurarum quadrilateratum constitui possunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Isosceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera sunt parallela.

XXXVI.

CVM verò in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæq; lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in vno

in vno eodemque puncto, ita vt parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non transit, complementa; duo verò reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur.



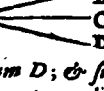
SIT parallelogrammum ABCD, in qua diameter AC, & linea EF, secans diametrum in G, & parallela existens lateribus AD, BC. Item linea HI, secans diametrum in eodem puncto G, parallelaque lateribus AB, DC, existens. Quæ cum ita sint, perspicuum est, parallelogrammum totum diuisum esse in quatuor parallelogramma, quorum quidem duo EBIG, GFDH, per quæ diameter AC, non transit, & vocantur à Geometris complementa, siue supplementa reliquorum duorum AEGH, GICF, quæ dicuntur circa diametrum consistere, quippe cum per ea diameter transeat, vt videre est in præsenti figura.

PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

I.

POSTVLETVR, vt à quouis puncto in quodvis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

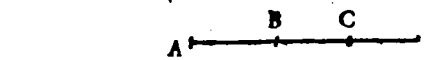
PRIMVM hoc postulatum planum admodum est, si rectè considerentur ea, quæ paulo ante de linea scripsimus. Nam cum linea sit fluxus quidam puncti imaginarius, atque adeò linea recta fluxus directo omninò itinere progrediens, fit vt si punctum quodpiam ad aliud directo moueri intellexerimus, ducta sane sit à puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione postulat Euclides, quemadmodum hic vides à puncto A, ductam esse rectam lineam ad punctum B; ab eodemque aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & sic innumeras alias ab eodem puncto educi possunt ad alia atque alia puncta.



II.

ET rectam lineam terminatam in continuum recta producere.

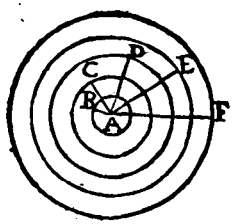
QVOD si punctum illud ferri adhuc cogitauerimus motu directo, & qui omnis inclinationis sit expers, producta erit ipsa recta linea terminata, & nunquam erit finis huius productionis, eum punctum illud intelligere possimus moueri ad infinitam distantiam. Sic linea



recta A B, producta est primo in continuum ad punctum C. Deinde ad punctum D, &c.

III.

ITEM quouis centro, & interuallo circulum describere.



IAM verò, si terminatam rectam lineam cuiuscunque quantitatis mente concepertimus applicatam esse secundum alterum extremũ ad quoduis punctum, ipsamque circa hoc punctum fixum circumduci, donec ad eum reuertatur locum, à quo dimoueri cepit; descriptus erit circulus, effectumq́, quod tertia petitio iubet. Exemplum habes in hu quinque lineis A B, A C, A D, A E, A F, quæ singulæ citra centrum A, circumuolutæ singulos circulos describserunt iuxta quantitatem, seu interuallum ipsarum.

PRÆTER hæc tria postulata, quibus Euclides contentus fuit, sunt multa alia aquè facilia, è quibus duntaxat in medium proferre decreui illud, quod frequentius repetendum erit in progressu totius Geometriæ. Reliqua enim prudens lector ex se vel facilè intelliget.

IV.

ITEM quacunque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.

OMNIS enim quantitas continua per additionem augeri, per diuisionem verò diminui potest infinitè: Vnde nunquam dabitur quantitas continua adeo magna, quin ea maior dari possit; neque tam parua, quin minor ea possit exhiberi. Hoc idem in numeris verum est, quod ad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionem vnitatis augeri potest infinitè: quamuis in eius diminutione ad vnitatem indiuiduam deueniatur.

COMMVNES NOTIONES SIVE Axiomata, quæ & Pronunciata dici solent, vel Dignitates.

I.

QVÆ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia. Et quod vno æqualium maius est, aut minus; maius quoq; est, aut minus altero æqualium. Et si vnum æqualium maius est, aut minus magnitudine quapiam, alterum quoque

quoque æqualium eadem magnitudine maius est, aut minus.

FIERI nulla ratione potest, vt duæ quantitates inæquales, æquales sint alteri quantitati. Si enim minor illarum proposita quantitati æqualis extiterit, excedet eandem necessariò maior illarum. Et si maior æqualis fuerit propositæ quantitati, superabitur minor ab eadem. Quare rectè colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter se æquales quoque esse. Reliqua quoq; partes axiomatis à nobis adiecta, quòd frequentem vsum habeant, clarissima sunt.

II.

Et si æqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt æqualia.

SI enim quantitates conflatæ, siue compositæ, inæquales forent, proculdubio maiori plus esset adiectum, quàm minori, cùm antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoque æquales.

III.

ET si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia.

NAM si reliqua quantitates forent inæquales, à minore plus fuisset detractum, quàm à maiore.

IV.

ET si inæqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt inæqualia. Et, si inæqualibus inæqualia adiecta sint, maiori maius, & minori minus, tota sunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

QVIN &, si æqualibus inæqualia adiecta sint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas addita vni æqualium, maiorem constituit quantitatem quàm minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & si inæqualibus æqualia adiiciantur, composita quantitas ex maiore, maior est, quàm composita ex minore. Alteram partem huius axiomatis nos adiecimus, propter frequentem eius vsum.

V.

ET si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia. Et si ab inæqualibus inæqualia ablata sint, à maiori minus, & à minori maius, reliqua sunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

SIC etiam, Si ab æqualibus inæqualia ablata sint, reliqua erunt inæqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quàm minor; quemadmodum residuum maioris maius est

reſidua minoris, ſi æqualia auferantur ab inæqualibus. Cæterùm Euclides non docet, quidnam ſimpliciter, & abſolutè ſignatur ex additione quantitatum inæqualium ad quantitates inæquales, vel quid relinquatur poſt ſubtractionem inæqualium quantitatum ab inæqualibus quantitatibus; propterea quod nihil certò colligi inde poteſt, niſi quando maiori maius additur, & à maiori minus detrahitur, vt in ſecunda parte axiomatis dictum eſt, quam nos ob inſignem eius vtilitatem adiecimus. Poſſunt enim compoſita quantitates, vel reſidua, eſſe & inæquales, & æquales. Si enim ad 7 & 5. addantur 4. & 3. efficientur 11. & 8. quæ ſunt inæqualia. Sic etiam ſi ex 7. & 5. detrahantur 2. & 1. relinquentur 5. & 4. quæ ſunt inæqualia. At verò, ſi ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. & 11. quæ æqualia ſunt. Item ſi detrahantur 3. & 1. ex 7. & 5. remanebunt 4. & 4. quæ æqualia quoque exiſtunt.

PORRO in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum intelligenda eſt etiam vna & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adiiciatur, tota fient æqualia: Et ſi ab æqualibus idem commune detrahatur, reſidua æqualia erunt. Et ſi inæqualibus idem commune adiiciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & ſi ab inæqualibus idem commune detrahatur, vel ab eodem communi inæqualia auferantur, reſidua exiſtent inæqualia.

VI.

ET quæ eiuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt æqualia. Et quod vnius æqualium duplum eſt, duplum eſt & alterius æqualium.

SIMILITER, quæ eiuſdem ſunt triplicia, vel quadruplicia, vel quintuplicia, &c. inter ſe ſunt æqualia. Si enim inæqualia forent, & maius eorum eſſet duplex, vel triplex, &c. alicuius quantitatis, deficeret vtique minus à duplici vel triplici, &c. Quod ſi contra, minus eſſet duplex, vel triplex, &c. quantitatis cuiuſpiam, excederet ſanè maius duplex ipſum; vel triplex, &c. Hoc autem & ex ſecunda axiomate comprobari poteſt ad hunc modum. Si enim duæ quantitates æquales fuerint alicui tertiæ, & vtrique tertiæ illa addatur, e-
a 2. prom *runt compoſita duplices illius tertiæ, a ſed & inter ſe æquales, ob idem additamentum. Quod ſi rurſum compoſitis eadem tertia adiiciatur,*
b 2. prom *erunt conflata triplices eiuſdem tertiæ. Cùm igitur b & æquales inter ſe, propter idem additamentum exiſtant; eademq; ſit ratio in cæteris multiplicibus, perſpicuum erit axioma propoſitum. Secundam porrò partem huius axiomatis nos appoſuimus, quod non raro eius vſus in rebus Geometricis requiratur.*

ET

VII.

ET quæ eiusdem sunt dimidia, inter se æqualia sunt. Et contra, Quæ æqualia sunt, eiusdem sunt dimidia.

PAR rationem, qua eiusdem sunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter se æqualia sunt.

IN his duobus pronunciatis per eandem quantitatem intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia sunt, vel triplicia, &c. inter se æqualia quoque sunt: Item, quæ æqualium sunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter se æqualia necessario existunt. Partem quoque secundam huiusce axiomatis nos adiunximus, propterea quòd non minùs frequenter, quàm prima, à Geometra usurpatur.

VIII.

ET quæ sibi mutuò congruunt, ea inter se sunt æqualia.

HOC est, duæ quantitates, quarum una superposita alteri, neutra alteram excedit, sed amba inter se congruunt, æquales erunt. Vt duæ linea rectæ dicentur esse æquales, quando una alteri superposita, eaqua superponitur, altera tota congruit, ita vt eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quãdo vno alteri superposito, is qui superponitur, alterum nec excedit, nec ab eo exceditur, sed linea illius cum lineis huius prorsus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamuis linea interdum inter se inæquales existant.

E CONTRARIO, Quæ inter se sunt æqualia, sibi mutuò congruent, si alterum alteri superponatur. Intelligendum est autem, quantitates sibi mutuò congruentes, esse æquales, secundum id duntaxat, in quo sibi congruunt. Congruit autem longitudo longitudini tantùm, superficies superficiei, solidum solido, linearum inclinatio inclinationi linearum, &c.

IX.

ET totum sua parte maius est.

CVM pars à toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipsum auferatur; perspicuum est, omne totum sua esse parte maius.

IN sequentibus porrò pronunciatis interrumpitur ordo Euclidis, propterea quòd duo alia axiomata hoc loco inferenda esse censuimus valde necessaria, cùm ex ijs axioma 12. quod Euclidi est decimum, demonstrari possit, vt ibi dicemus. In margine tamen numeros apposuimus ordini Euclidis respondentes.

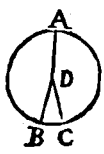
X.

DVÆ lineæ rectæ non habent vnum & idem segmentum commune.

NON

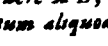
NON est difficile istud axioma, si perfectè intelligatur natura recta linea. Cùm enim linea recta directo semper tendere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione potest, vt duæ lineæ rectæ habeant vnam partem, quamuis minimam, communem, præter vnicum punctum; in quo se mutuò intersecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonstrat. Habeant, si fieri potest, duæ rectæ A B, A C, partem communem A D. Ex centro autem D,

a3. petit
b17. def



& interuallo D A, a describatur circulus secans duas rectas propositas in punctis B, & C; b Erunt igitur duæ circumferentiæ A B, A B C, inter se æquales, (Sunt enim circumferentiæ semicirculorum æqualium, cum A D B, A D C, ponantur esse diametri) pars & totum, quod est absurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnum & idem segmentum commune. Quod est propositum.

POSSVNT tamen duæ lineæ rectæ commune habere segmentum, quando vnam & eandem rectam lineam constituunt. Vt in hac

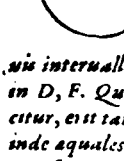


figura, rectæ A D, B C, commune habent segmentum C D, quia ambæ vnam rectam constituunt lineam A B. At verò quando duæ rectæ sunt diuersæ, quales fuêre A B, A C, in superiori exemplo, non possunt possidere segmentum aliquod commune, vt rectè à Proclo fuit demonstratum.

a. XI.

DVÆ rectæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessariò se mutuò in eo puncto intersecabunt.

HOC etiam axioma ex natura lineæ rectæ pendet. Quod tamen ita demonstrabimus. Coeant duæ rectæ A B, C B, in B. Dico illas productas se mutuò secare in B, nempe C B, productam cadere in E, supra rectam A B, productam. Nam si C B, producta non cadit supra A B, productam, congruet cum A B, producta, ita vt transeat per D, atq; ita duæ rectæ A B D, C B D, habebunt idem segmentum commune B D, quod in antecedenti axiomate ostensum est fieri non posse: Vel certè infra A B, productam cadet, ita vt C B, producta cadat in F, sitq; vna recta linea C B F. Centro igitur B, describatur ad quodvis interuallum circulus A C F D, secans rectas A B, C B, productas in D, F. Quia ergo vtraque recta A B D, C B F, per centrum B, ducitur, erit tam A C D, quam C F, semicirculus, per defin. 18. ac proinde æquales erunt circumferentiæ A C D, C F. Vt ad defin. 17. demonstrauimus, totum & pars. Quod est absurdum.



DVO proxima axiomata ab Euclide non ponuntur, quia tamen necessa-

necessaria sunt ad aliorum axiomatum probationes, ea hîc inseruimus. Tria autem sequentia Euclidis sunt.

XII.

x.

ITEM, omnes anguli recti sunt inter se inæquales.

Hoc axioma apertissimum esse cuilibet potest ex 10. definitione, quâ angulus rectus describitur; propterea quòd inclinatio linearum angulum rectum constituentium augeri, minuive nequit, sed prorsus est immutabilis. Efficitur enim rectus angulus à linea perpendiculari, qua quidem alteri linea recta ita superstat, vt faciat vtrobique angulos æquales, neque magis in vnam partem, quàm in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter se esse, cùm semper sit eadem inclinatio, quamuis linea sint inæquales interdum. Conatur tamen Proclus ex 10. definitione id demonstrare hac ratione. Sint duo anguli recti A B C, D E F, quos dico esse inter se æquales. Si enim fieri potest, sint inæquales, sitq; A B C, maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectam D E, rectæ A B, cadet recta E F, inter rectas A B, B C, qualis est B G, propterea quòd angulus D E F, minor ponitur angulo A B C. a Producatur C B, in rectum & continuum vsque ad H. Cùm igitur angulus A B C, sit rectus, b erit angulus A B H, illi deinceps æqualis, & rectus quoque: quare maior sim. etiam angulo A B C. c Producta autem G B, in rectum & continuum vsque ad I, cadet portio producta B I, infra C B, producta, vt in præcedenti axiomate est demonstratum. Quare cùm angulus A B G, ponatur rectus, d fiet angulus A B I, illi deinceps æqualis. Quapropter angulus A B H, maior quoque erit angulo A B I, pars toto, quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt duo anguli recti propositi, sed æquales. Quod est propositum: eademq; est ratio in cæteris.



a 2. petit
b 10. def.
c 10. def.

RECTE autem hoc loco monet Pappus, axioma istud non posse converti; non enim omnis angulus recto angulo æqualis rectus est, cùm & curuilineus recto æqualis esse queat, vt in 5. lib. demonstrabimus, qui tamen non dicitur rectus, cùm non sit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus æqualis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti inter se æquales erunt, sine vlla exceptione.

XIII.

xj.

ET si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.



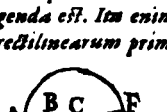
VT si in duas lineas rectas AB, CD, incidens alia recta EF, faciat duos angulos internos, & ex eadem parte BEF, DFE, minores duobus rectis. Vult Euclides, illas tandem conuenturas esse ad aliquod punctum vnum, versus eam partem, in qua duo anguli minores existunt duobus rectis, vt appositum exemplum commonstrat. Ratio huius perspicua est, quoniam quando duo anguli interni, & ex eadem parte aquales sunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partem coire possunt, sed aquali semper spatio protendantur, vt propos. 28. huius lib. demonstrabitur. Quare si duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, necesse est ex ea parte dictarum linearum spatium coarctari, ex altera verò magis ac magis dilatari; ideoq; eas conuenturas tandem esse aliquando in vnum punctum. Verùm quia axioma hoc subobscurum videri solet tyronibus, imò à numero principiorum reijcitur à Gemino Geometra, Procle, & alijs, quod non facilè quisus ei assensum prabeat; præsertim cùm reperiantur alia quadam linea, quarum spatium, licet semper magis ac magis coangustetur (quemadmodum & in duabus rectis AB, CD, accidit, vt ad propos. 28. huius lib. demonstrabimus) nunquam tamen in vnum punctum coeunt, etiamsi infinitè producantur, vt constat ex elementis conicis Apollonij Pergæi, & ex linea conchili Nicomedis. Idcircò pleniorem illius explicationem in scholium propos. 28. huius lib. differimus, vbi illud ex Procli sententia Geometricè demonstrabimus, vt firmè, ac sine vlla dubitatione, tanquam verissimũ, ad propositionis 29. huius lib. (vbi primum eius vsus incipit apparere) & ad aliarum propositionum demonstrationes possit assumi. Quod tamen nos aliter quàm Proclus, & quidem magis geometricè demonstrabimus, ita vt nullius dubitationis locus relinquatur.

xij.

XIV.

DVÆ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

NVLLAM prorsus habet difficultatem hoc principium. Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coeant ad efficiendum angulum, necessariò ex altera parte semper magis ac magis disiungẽtur, si producantur, vt in exemplo proposito perspicuum est. Quare vt superficies, spatiúmve quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quadam adiungenda est. Ita enim conficietur spatium triangulare, seu figurarum rectilinearum prima. Proclus tamen demonstrat hoc principium, hoc modo. Si fieri potest, vt duæ lineæ



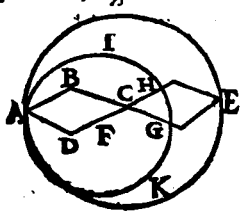
recta claudant superficiem, comprehendãt duæ rectæ ABC, ADC, superficiem ABCD, ita vt duæ illæ rectæ coeant in duobus punctis, A, &

a3. petit b2. petit

C. Facto deinde centro C, a describatur circulus interuallo CA, b & produ-

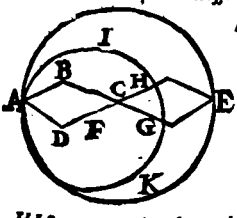
producantur rectæ A B C, A D C, in rectum, & continuum vsque ad circumferentiam, nempe ad puncta, E, & F. Itaq; quia rectæ A C E, A C F, transeunt per centrum C, 15 erunt semicirculi A E, A E F, inter se æquales, & idcirco circumferentia quoq; A E, circumferentiæ A E F, æqualis erit, pars toti, quod fieri non potest. Non ergo recta duo lineæ spatium comprehendunt. Quod est propositum. 217 *def*

SED quia fortassis aduersarius dicet, rectas A B C, A D C, productas coire iterum in aliquo puncto circumferentiæ, vt in E, vel F, atque adeò non sequi, partem æqualem esse toti, demonstrabimus tunc idem axioma hoc modo. Coeant ergo duæ illæ lineæ iterũ, si fieri potest, in E. Sumpto pũcto F, in recta A D C, quocunq; erit A F, minor, quàm F E, cùm minor sit, quàm A F C, hoc est, quàm C H E, quæ ipsi A F C, æqualis est, atq; adeò multò minor, quam F E. Circulus igitur ex F, ad



interuallum F A, descriptus secabit rectam F E, in H, atque adeò C G E, in G. Quoniam igitur A F H, diameter circuli est, erit A I H, semicirculus, vt ad defin. 17. ostendimus: Portio autem A I G, quam aufert recta A B G, & in qua centrum non est, semicirculo minor, vt ad defin. 18. demonstrauimus. Est ergo circumferentia A I G, minor quàm A I H, totum quàm pars, quod est absurdũ. Quòd autem minor sit portio A I G, semicirculo, ostendemus, vt suprà. Nam ducta ex centro F, ad rectam A B G, perpendicularis, & circumuoluta portione A I G, circa rectam A B G, cadet circumferentia A I G, intra circumferentiam A K G, ne pars maior sit quàm totum, vt suprà demonstrauimus.

CONSTAT hoc etiam axioma ex definitione lineæ rectæ. Cùm enim recta linea sit breuissima extensio ab vno puncto ad aliud, duci



poterit vnica tantùm linea ab vno pũcto ad aliud. Quare si A B C, recta est, nõ erit A D C, recta. Quod etiam patet ex definitione Platonis. Nam si A B C, est recta, obumbrabũt media illius extremitates eiusdẽ. Igitur media pũcta lineæ A D C, nõ obumbrant extrema, cùm visus, per rectam A B C, feratur. Non ergo recta est A D C.

HIS axiomatis ab Eucl. de positis adiungemus nos nonnulla alia ex aliis Geometris decerpta, non minùs necessaria ad futuras demonstrationes Problematum atq; Theorematum cùm Euclidis, tum cæterorum Mathematicorum, quàm ea, qua nobis tradidit Euclides.

XV. 6.

SI æqualibus inæqualia adjiciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis. *HOC*

HOC, & sequens pronunciatum desumit Proclus ex Pappo. Aequalibus itaq; quantitatibus AB, CD, addantur inaequales BE, DF, sitq; BE, maior quàm DF. Et ex BE, auferatur BG, aequalis ipsi DF, vt sit GE, excessus, quo quantitas addita BE, superat quantitatem additam DF Quoniam igitur aequalibus AB, CD, addita sunt aequalia BG, DF, a erunt tota AG, CF, aequalia. Quare constat, totam quantitatem AE, superare totam CF, eodem excessu GE, quo magnitudo DF, adiuncta à magnitudine adiuncta BE, superatur. Quod est propositum.

a2 prop

XVI.

SI inaequalibus aequalia adiungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quae à principio erant, aequalis.

IN eadem figura, inaequalibus quantitatibus BE, DF, addantur aequales AB, CD. Et ex maiore BE, auferatur BG, aequalis ipsi DF, vt GE, sit excessus; quo quantitas BE, quantitatem DF, superat. Quoniam igitur aequalibus BG, DF, addita sunt aequalia AB, CD, b erunt tota AG, CF, aequalia. Quamobrem tota quantitas AE, superabit totam CF, eodem excessu GE, quo maior quantitas proposita BE, minorem DF, superat. Quod est propositum.

b2 prop

XVII.

SI ab aequalibus inaequalia demantur, erit residuorum excessus, excessui ablatorum aequalis.

AB aequalibus AB, CD, auferantur inaequalia BE, DF. Sitq; EG, excessus, quo quantitas BE superat quantitatem DF, ita vt BG, aequalis sit ipsi DF. Quia igitur ab aequalibus AB, CD, ablata sunt aequalia BG, DF, c remanebunt AG, CF, aequalia. Perspicuum ergo est, residuum AE, superare residuo CF, eodem excessu EG, quo magnitudo ablata BE, ablatam magnitudinem DF, superat. Quod est propositum.

c3. pro.

XVIII.

SI ab inaequalibus aequalia demantur, erit residuorum excessus excessui totorum aequalis.



AB inaequalibus AB, CD, auferantur aequalia AE, CF. Sitq; BG excessus, quo tota quantitas AB, superat totam quantitatem CD, ita vt AG, aequalis sit ipsi CD. Quoniam igitur ab aequalibus AG, CD, ablata sunt aequalia AE, CF, remanebunt EG, FD, aequalia.

lia. Quare residuum EB, superabit residuum FD, eodem excessu BG, quo tota quantitas AB, superat totam quantitatem CD. Quod est propositum.

IN his quoque quatuor proximè positis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda est vna etiam sola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia adijciantur, erit totorum excessus adiunctorum excessui æqualis. Et si inæqualibus idem commune adsungatur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ à principio erant, æqualis. Et si ab eodem communi inæqualia demantur, erit residuorum excessus excessui ablatorum æqualis. Et si ab inæqualibus idem commune dematur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis. Nam in numeris, si ad 6. addas 5. & 3. fiunt 11. & 9. quorum excessus est 2 idem qui ipsorum 5. & 3. Rursus, si ad 5. & 3. addas 6. fiunt 11. & 9. quorum excessus 2. idem est, qui ipsorum 5. & 3. Item si ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 5. & 2. Denique si ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 10. & 7.

XIX.

OMNE totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

QVONIAM omnes partes simul sumpta constituunt totum, cuius sunt partes, manifesta est veritas huius axomatis.

XX.

SI totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

VT quia totus numerus 20. duplus est totius numeri 10; Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus etiam est reliqui huius 7. In vniuersum autem hoc demonstrabitur propos. 5. lib. 5. nimirum. Si magnitudo magnitudinis æquè multiplex sit, atque ablata ablatæ, vt decupla, vel centupla, &c. & reliqua reliquæ æquè multiplex erit, atq; tota totius.

COLLIGI potest ex dictis cum Proclo, & Gemino hoc discrimen inter postulata, & axiomata, quòd cùm vtraque sint per se nota, & indemonstrabilia, illa naturam sapiunt Problematum, propterea quòd aliquid fieri exposcant; hæc verò, Theoremata imitantur, cùm nihil fieri petant, sed solùm sententiam aliquam notissimam proponant. Differt autem postulatum à problemate, quòd constructio postulati non indigeat vlla demonstratione, problematis autem constructionem concedat nemo sine demonstratione, eo quòd difficile aliquod nobis exhibeat construendum. Idem discrimen inter Axioma, & Theorema reperitur; Illud enim demonstrari non de-

bet, hoc verò concedendum nulla est ratione, nisi demonstretur. Nam nemo huius propositionis demonstrationem, vel etiam probationem requiret. Quæ eidem æqualia, inter se quoque æqualia sunt. Huius autem statim demonstrationem desiderabit quis. Omnis trianguli tres anguli interni æquales sunt duobus rectis. Idem iudicium habeto de reliquis axiomatis, atque Theorematis, nec non de postulatis, problematisq;.

CONSTAT quoque, Postulatorum alia propria esse Geometria, qualia sunt illa tria, qua Euclides nobis proposuit; quadam verò communia & Geometriæ, & Arithmeticæ, cuiusmodi est hoc, Quantitatem posse infinitè augeri. Tam enim numerus, quàm magnitudo, per additionem augeri potest, ita vt nunquam huius incrementi finis reperiatur. Idem dices de axiematis, sive pronunciatis. Nam octauum, decimum, vndecimum, duodecimum, tertiumdecimum, & quartumdecimum solis Geometria conueniunt; Reliqua verò omnia adhibentur & ad demonstrationes Geometricas & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablatæ à magnitudinibus æqualibus, relinquunt magnitudines æquales, sive hæ magnitudines linea sint, sive superficies, sive corpora; ita quoque numeri æquales detracti e numeris æqualibus relinquunt numeros æquales, &c.

HAEC dicta à nobis sint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonstrationes accedamus, ex quibus plenius perfectiusq; principiorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima principia Mathematicorum eiusmodi, vt planè non intelligantur, nisi priùs eorum vsus appareat in demonstrationibus; id quod satis te experientia docebit.

ANTEQVAM porrò ad propositiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandum est, quémnam ordinem, ac modum in ipsis demonstrationibus simus secuti. Primum cuilibet propositioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum est secutus in Euclidis propositionibus, alter verò in ipsa propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obseruari cernimus in codicibus Græcis. Id verò eo consilio à nobis est factum: quoniam cùm à quibusdam Geometris propositiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab alijs verò iuxta Theonis seriem citentur, maximeq; interdum duo hi interpretes inter se discrepent, in serie, atque ordine propositionum, id quod maximè in 6. 7. & 10. lib. perspicitur; necessarium esse duximus, vt vtriusq; interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, vt si quando numerus propositionum à Geometra quopiam citatus non respondet alteri interpreti, alteri saltem conueniat. Deinde ne cursus demonstrationum interrumperetur, citauimus principia, & propositiones Euclidis in margine

gine, prefixa cuilibet citationi semper literula aliqua alphabeti, vel alio quouis signo, cui similis literula, seu signum respondet in demonstratione, vt facilius cognoscatur, ad quem locum qualibet citatio sit referenda. Porrò citationes intelligendæ sunt hoc modo.

1. def.	*Prima definitio. & sic de alijs numeris, vt 4. def. 23. def. &c.*
1. pet.	*Prima petitio, vel primum Postulatum.*
1. pron.	*Primum pronunciatum, seu axioma, & ita de reliquis numeris, vt prius.*
1. primi.	*Prima propositio primi libri.*
23. Vndec.	*Vigesimatertia propositio vndecimi libri.*
6. tertiæd.	*Sexta tertiædecimi libri.*
9. sextid.	*Nona sextidecimi libri.*
13. duod.	*Decimatertia libri duodecimi.*
7. quind.	*Septima libri quindecimi.*
5. quartid.	*Quinta libri quartidecimi, &c.*

Ex his alia citationes à quolibet facilè poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus est ratio.

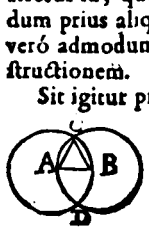
PROBLEMA I.

PROPOSITIO I.

SVPER data recta linea terminata triangulum æquilaterum constituere.

IN omni problemate duo potissimùm sunt consideranda, constructio illius, quod proponitur, & demonstratio, quâ ostenditur, constructionem rectè esse institutam. Vt quoniam primum hoc problema iubet constituere triangulum æquilaterum super data recta linea terminata quacunque, ita vt linea recta proposita sit vnum latus trianguli. (Tunc enim figura dicitur constitui super recta linea, quando ipsa linea efficitur vnum figuræ latus) idcirco primum oportet construere ex principiis concessis triangulum aliquod, deinde demonstrare, ipsum eâ ratione constructum, esse æquilaterum, hoc est, habere omnia tria latera inter se æqualia. Quod idem in alijs problematibus perspici potest. Hæc etiam duo reperiuntur ferè in omni Theoremate. Sæpenumerò enim vt demonstretur id, quod proponitur, construendum est, atque efficiendum prius aliquid, ceu manifestum erit in sequentibus. Pauca verò admodum sunt theoremata, quæ nullam requirant constructionem.

Sit igitur proposita recta linea terminata A B, super quam constituere iubemur triangulum æquilaterum. Centro A, & interuallo rectæ A B, *a* describatur circulus C B D: Item centro B, & interuallo eiusdem rectæ B A, alius circulus describatur C A D, secans priorem in punctis C, & D. Ex quorum vtrouis, nempe ex C, *b* ducantur duæ rectæ lineæ C A, C B, ad puncta A, & B; Eritque super rectam A B, constitutum triangulum A B C, hoc est, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita constructum necessariò esse æquilaterum. Quoniam rectæ A B, A C, ducuntur ex centro A, ad circumferentiam circuli C B D, *c* erit recta A C, rectæ A B, æqualis: Rursus quia rectæ B C, B A, ducuntur ex centro B, ad circumferentiam circuli C A D, erit recta B C, rectæ B A æqualis. Tam igitur A C, quàm B C, æqualis est rectæ A B. *d* Quare & A C, B C, inter se æquales erunt, atque idcirco triangulum A B C, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat.



a 3. *pet.*

b 1. *pet.*

c 15. *def.*

d 1. *prom*

SCHOLIVM.

VT autem videas, plures demonstrationes in vna propositione consti-

continueri, placuit primam hanc propositionem resoluere in prima sua principia, instito facto ab vltimo syllogismo demonstratiuo. Si quis igitur probare velit, triangulum A B C, constructum methodo praedicta, esse aquilaterum, vtetur hoc syllogismo demonstrante.

Omne triangulum habens tria latera aqualia, a *est aquilaterum.* a 23. def.

Triangulum A B C, tria habet aqualia latera.

Triangulum igitur A B C, est aquilaterum.

Minorem confirmabit hoc alio syllogismo.

Qua eidem aqualia sunt, b *inter se quoque sunt aqualia.* b 1. pron.

Duo latera A C, B C, aqualia sunt eidem lateri A B.

Igitur & duo latera A C, B C, inter se aqualia sunt.

Ac propterea omnia tria latera A B, B C, A C, aqualia existunt.

Minorem verò huius syllogismi hac ratione colliget.

Linea recta à centro ducta ad circumferentiam circuli, c *inter se* c 15 def.
sunt aquales.

Linea A B, A C, sunt ducta à centro A, ad circumferentiam C B D.

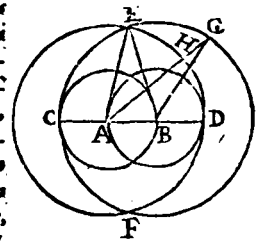
Sunt igitur linea A B, A C, aquales inter se.

Eademq; ratione erunt linea A B, B C, aquales, cùm ducantur à centro B, ad circumferentiam C A D. Quamobrem minor praecedentis syllogismi tota confirmata erit.

Non aliter resolui poterunt omnes alia propositiones non solùm Euclidis, verùm etiam caterorum Mathematicorum.

Negligunt tamen Mathematici resolutionem istam in suis demonstrationibus, eò quòd breuius ac facilius sine ea demonstrent id, quod proponitur, vt perspicuum esse potest ex superiori demonstratione.

SI quis autem super data recta desideret constituere triangulum quoque Isosceles, & scalenum, id cum Procle in hunc modum efficiet.



Sit recta linea A B, circa quam ex centris A, & B, describantur duo circuli, vti d 2. pet.
prius. d *Deinde producatur A B, in vtramque partem ad circumferentias vsque ad puncta C, & D. Atque centro A, interuallo vero A D,* e *describatur circulus E D F. Item centro B, interuallo vero B C, circulus E C F, secans priorem in punctis E, & F. Ex quorum vtrolibet,* e 3. pet.
nempe ex E, f *ducantur ad puncta A, & B, duae rectae E A, E B. Factumq; erit super recta A B,* g *triangu-* f 1. pet.
lum A B E; quod dico esse Isosceles, nimirum duo latera A E, B E, g 20. def
esse & aqualia inter se, & maiora latere A B. Cùm enim recta A E, A D, ducantur è centro A, ad circumferentiam E D F, h *erit A E,* h 15. def
aqua-

aqualis recta A D. Item cùm recta B E, B C, ducantur è centro B, ad
a 15. def *circumferentiam E C F,* a *erit B E, aqualis recta B C. Sunt autem re-*
cta A D, B C, aquales inter se (ὑtraque enim A C, & B D, aqualis
est recta A B; cum A B, A C, ex eodem centro A, ad circumferentiam
ducantur; Item B A, B D, ex eodem centro B, ad circumferentiã quoq;
b 1. pron *egrediantur.* b *Quare A C, B D, aquales inter se erunt. Addito igitur*
c 2. pron *communi recta A B,* c *erit totu A D, toti B C, aqualis.*) d *Igitur A E,*
d 3. pron *B E aquales quoq; inter se erunt. Quòd ὑerò ὑtraq; A E, B E, maior*
sit quàm A B, perspicuum est, cum A D, aqualis ostensa ipsi A E,
e 9. pron e *maior sit quàm A B; Item B C, aqualis demonstratu ipsi B E,* f *ma-*
f 9. pron *ior quoq; sit, quàm A B. Constitutum igitur est super recta A B, Isosce-*
les A B E, habens duo latera A E, B E, aqualia inter se, & maiora la-
tere A B, quod faciendum erat. Atq; hac est demonstratio Procli, a-
liorumq; interpretum Euclidis.

B R E V I V S tamen ὑidetur mihi posse demonstrari, triangulum
g 15. def *A B E, esse Isosceles, hac ratione.* g *Quoniam A E, aqualis est recta*
A D, & recta A D, est dupla recta A B, propterea quòd B A, B D, a-
h 15. def *quales inter se sunt; erit & A E, dupla recta A B. Rursus* h *quia B E,*
aqualis est recta B C, & B C, dupla est ipsius A B, propterea quòd A B,
i 15. def. i *A C, aquales sunt inter se, erit & B E, dupla ipsius A B. Cùm igitur*
k 6. pro. *ὑtraq; A E, B E, dupla sit eiusdem A B, erunt* k *A E, B E, inter se a-*
quales, maiores q; propterea recta A B. Isosceles ergo est triangulum
A B E.

l 1. petit. *I A M* ὑerò, *si ex puncto A,* l *ducatur linea recta A G, ad cir-*
cumferentiam E G F, qua non sit eadem qua A E, ὑel A D, secans
m 1. pet, *circumferentiam E H D, in puncto H, & ex G, ad B* m *ducatur alia*
n 20. def *recta G B,* n *constitutum erit triangulum A B G, super recta A B,*
o 9. pro. *quod dico esse scalenum. Quoniam* o *A G, maior est quàm A H:*
p 15. def p *Sunt autem A H, A E, ex centro A, ducta, inter se aquales; erit &*
A G, maior quàm A E, hoc est, quàm B E, qua ostensa est aqualis
q 15 def *ipsi A E, igitur & maior erit A G, quàm B G,* q *cùm B G, sit aqua-*
lis ipsi B E. Est autem & B G, maior quàm A B., propterea quòd totu
r 9. pron *B C, aqualis ipsi B G,* r *maior est quàm A B, pars. Omnia ergo tria*
latera trianguli A B G, inaqualia sunt, ideoq; scalenum est ex defi-
nitione; quod erat faciendum.

B R E V I V S quoque ostendemus, *triangulum A G B, esse scale-*
s 15. def *num, hac ratione. Quoniam tam* s *A H, A D, ex centro A, ducta,*
sunt aquales, quàm B G, B C, ex centro B, ducta: Sunt autem A D,
B C, ipsius A B, dupla, quod A B, ὑtriq; B D, A C, aqualis sit; erunt
quoq; A H, B G, ipsius A B, dupla, ac propterea maiores, quàm A B.
t 9 pron *Cùm ergo* t *A G, maior sit, quàm A H, sine quàm B G, scalenum*
erit triangulum A G B, habens latus A G, maximum, B G, me-
dium, & A B, minimum.

PRA-

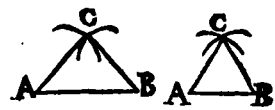
PRAXIS.

CONABIMVR in singulis ferè problematibus Euclidis tradere praxin quandam facilem, & brevem, qua effici possit id, quod Euclides pluribus verbis, atque lineis contendit construere; Idq; in ijs præsertim observabimus, quæ frequentiorem usum habent apud Mathematicos; & in quibus praxis compendium aliquod secum videtur afferre.

ITAQVE triangulum æquilaterum ita facilè construetur super data recta A B. Ex centris A, & B, intervallo vero data recta A B, describantur duo arcus circulorum se intersecantes in puncto C, sive hoc infra lineam contingat, sive suprà. Post hæc ducantur duæ rectæ A C, B C, ex puncto C, ad puncta A, & B, factumq; erit, quod proponitur. Cuius rei eadem est demonstratio cum superiori, si modò circuli essent integri, ac perfecti. Transirent enim necessariò per puncta A, & B.



ISOSCELES ita conficietur. Ex centris A, & B, intervallo vero maiore quàm A B, si datum rectam esse velimus minus latum; vel minore, si eandem in latum maius eligamus, describantur duo arcus secantes se in C. Postea ducantur rectæ A C, & B C, constructumq; erit Isosceles: quoniam A C, B C, æquales erunt, propter æquale intervallum assumptum, maius scilicet, aut minus quàm recta A B.



SCALENVM denique hoc modo fabricabitur super datam rectam A B. Ex centro B, intervallo vero maiore, quam B A, describatur arcus aliquis. Item ex centro A, intervallo vero adhuc maiore, quàm prius assumptum, describatur alter arcus priorem secans in C. Deinde ducantur rectæ A C, B C; constitutumq; erit Scalenum, & constat ex inæqualitate intervallorum, quæ assumpta fuerunt in constructione.

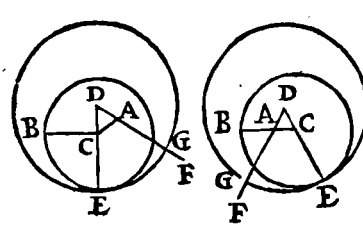


CÆTERVM quo pacto triangulum constitui debeat habens tria latera æqualia tribus datis lineis quibuscunque, singula singulis, latiùs explicabimus propos. 22. huius libri.

PROBL. 2. PROPOS. 2. ij.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

SIT punctum datum A, & data recta linea B C, cui aliam rectam æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ B C, nempe C, centro *a* describatur circulus B E, interuallo rectæ B C. Et ex A, ad centrum *a* 3. *petit*



a 1. petit C, a recta ducatur A C; (nisi punctum A, intra rectam B C, fuerit: Tunc enim pro linea ducta sumetur A C, vt secunda figura indicat.) Super recta verò A C, b constru-
b 1. prim. tur triangulum æquilaterum A C D, sursum, aut deorsum versus, vt libuerit; cuius duo latera modò constituta
c 2. pet. D A, D C, versus rectam A C, c extendantur; D C, quidem oppositum puncto dato A, vsque ad circumferentiam in E; D A, vero oppositum centro C, quantumlibet in F. Deinde centro D,
d 3. pet. interuallo vero rectæ D E, per C, centrum transeuntis, d alter circulus describatur E G, secans rectam D F, in G. Dico rectam A G, quæ posita est ad punctum datum A, æqualem esse datæ rectæ B C. Quoniam D E, D G, ductæ sunt ex centro D, ad circum-
e 15. def. ferentiam E G, e ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur D A,
f 1. pron. D C, æqualibus lateribus trianguli æquilateri A C D, f remanebit A G, æqualis rectæ C E. Sed eidem C E, g æqualis est recta
g 15. def. B C. (cùm ambæ rectæ C B, C E, cadant ex centro C, ad circumferentiam B E.) Igitur rectæ A G, B C, quandoquidem vtra-
h 1. pron que æqualis est ostensa rectæ C E, inter se h æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum.

QVOD si punctum datum fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C, facilè absoluetur problema. Si enim centro C, & in-
i 3. petit teruallo C B, i describatur circulus, ad cuius circumferentiam
k 1. pet. recta k ducatur vtcunque C E, erit hæc posita ad punctum datum
l 15. def. C, l æqualis datæ rectæ B C, cum vtraque & B C, & C E, ex eodem centro egrediatur ad circumferentiam B E.

SCHOLIVM.

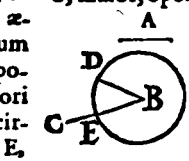
HVIVS problematis varij esse possunt casus, vt ait Proclus. Aut enim datum punctum in ipsa data recta est positum, aut extra ipsam: Si in ipsa, erit vel alterum extremorum eius, vel inter vtrumque sacebit extremum. Si verò extra ipsam, erit vel è directo data linea, ita vt producta in rectum, & continuum per ipsum punctum transeat, vel non è directo, ita vt ab ipso ad data linea extremorum quodus recta linea ducta cum data recta angulum efficiat; quo modo vel supra datam lineam erit constitutum, vel infra, vt manifestum est. In omnibus autem istis casibus semper eadem est constructio, & demonstratio. Quod si in constructione fiat triangulum A C D, super recta A C, Isosceles, eodem modo ostendemus, rectam A G, rectæ B C, æqualem esse.

PROBL.

PROBL. 3. PROPOS. 3. iij.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.

SINT duæ rectæ inæquales A, minor, & B C, maior, oportetque ex maiore B C, detrahere lineam æqualem minori A. Ad alterutrum extremorum lineæ maioris B C, nempe ad punctum B, *a* ponatur aliqua linea, quæ sit B D, æqualis minori A. Deinde centro B, interuallo autem B D, circulus *b* describatur secans B C, in E. Dico B E, detractam esse æqualem ipsi A. Quoniam B E, *c* æqualis est rectæ B D, & eidem B D, æqualis est recta A, per constructionem; erunt A, & B E, inter se æquales. Duabus igitur datis rectis, &c. quod erat faciendum.



a 2. primi.
b 3. petit.
c 15. def. fin.
d 1. pronum.

QVOD si duæ rectæ datæ coniungantur in vno extremo, quales sunt B D, & B C, coniunctæ in extremo vtriusque B; describendus erit circulus ex B, ad interuallum minoris B D. Hic enim auferet B E, æqualem ipsi B D, vt constat ex definitione circuli.

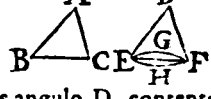
SCHOLIVM.

VARIOS etiam posse casus esse in hoc problemate, nemo ignorat, cum duæ lineæ inæquales datæ vel inter se distent, ita vt neutra alteram contingat, vel non; sed vel coniungantur ad vnum extremum, vel se mutuo secent, vel certè altera alteram suo extremo tangat duntaxat, &c. de qua re lege Proclum hoc in loco.

THEOREMA 1. PROPOS. 4. iiij.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique; habeant verò & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt: eritq; triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

SINT duo triangula A B C, D E F, & vnius vtrumque latus A B, A C, æquale sit alterius vtrique lateri D E, D F, hoc est, A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; angulusque A, contentus lateribus A B, A C, æqualis angulo D, contento lateribus D E, D F. Dico basim B C, æqualem quoq; esse basi E F;



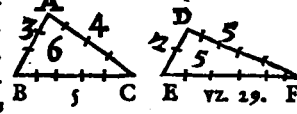
& triangulum A B C, triangulo D E F; & vtrumque angulum B, & C, vtrique angulo E, & F, id est, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus A C, D F, inter se; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus A B, D E, inter se quoque esse æquales. Quoniam enim recta A B, rectæ D E, ponitur æqualis, fit, vt si altera alteri superponi intelligatur, collocato puncto A, in punctum D, *a* ipsæ sibi mutuo congruant, punctumq; B, in punctum E, cadat. Neq; enim dicere quis poterit, partem rectæ A B, rectæ D E, congruere, & partem non, quia tunc duæ rectæ haberent idem segmentum commune, *b* quod est impossibile. Quod si quis dicat, posito puncto A, in D, cadere quidem punctum B, in E, sed rectam A B, cadere vel ad dextram, vel ad sinistram D E, claudent duæ rectæ lineæ superficiem. *c* quod fieri non potest. Quare recta A B, rectæ D E, congruet, vt dictum est. Cum ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, *d* congruet quoque alter alteri, hoc est, recta A C, rectæ D F, congruet, punctumque C, in punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum A C, D F. Basis igitur B C, basi E F, congruet quoque: alias si supra caderet, aut infra, vt efficeretur recta E G F, vel E H F, clauderent duæ rectæ E F, E G F; vel E F, E H F, superficiem, (negare enim nemo poterit, tam E G F, quàm E H F, rectam esse, cum vtraque ponatur esse eadem, quæ recta B C.) quod est absurdum. Duæ enim rectæ superficiem *e* claudere non possunt. Quocirca *f* basis B C, basi E F, æqualis erit, cum neutra alteram excedat; & triangulum A B C, triangulo D E F; & angulus B, angulo E; & angulus C, angulo F, æqualis, ob eandem causam, existet. Quare si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. Quod demonstrandum erat.

a 8. *prænunc.*
b 10. *prænunc.*
c 14. *prænunc.*
d 8. *prænunc.*
e 14. *prænunc.*
f 8. *prænunc.*

SCHOLIVM.

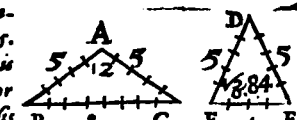
RECTE Euclides duas conditiones posuit in antecedente huius theorematis, quarum prima est, vt duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique; Secunda, vt angulus etiam vnius contentus illis lateribus æqualis sit angulo alterius contento lateribus, quæ ipsis sunt æqualia. Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque bases, neque reliqui anguli poterunt vnquam esse æquales, vt probe hoc loco à Proclo demonstratur: Triangula verò ipsa licet possint esse æqualia, posteriore duntaxat conditione deficiente, vt ex scholio propos. 37. huius lib. constabit, tamen rarò admodum illud continget. Sint enim triangulorum A B C, D E F, anguli A, & D, æquales, nempe recti, & latera A B, A C, æqualia lateribus D E, D F, non quidem vtrumque vtrique, sed illa simul sumpta hisce simul sumptis, sitque A B, 3. A C, 4. vt ambo simul efficiant 7. At verò D E, sit 2. & D F, 5. vt ambo quoque simul

simul 7. constituant. Quibus positis, erit basis BC, 5, & basis EF, radix quadrata huius numeri 29. qua maior quidem est quam 5. minor autem, quam 6. Item area



trianguli ABC, erit 6. area verò trianguli DEF, 5. Anguli denique super basim BC, inaquales erunt angulis super basim EF. Quæ quidem omnia ita esse, hic ostenderemus, nisi ad eorum demonstrationem requirerentur multa, quæ nondum sunt confirmata. Vides igitur omnia inaqualia esse, propterea quod non vtrumq; latus vtriq; lateri æquale existit in dictis triangulis ABC, DEF.

RVRSVS triangulorum ABC, DEF, latera AB, AC, æqualia sint lateribus DE, DF, vtrumque vtrique, sitq; vnumquodque 5. anguli verò A, & D, contenti dictis lateribus inæquales, sitq; A, maior quam D. Quibus concessis, erit basis BC, maior basi EF, vt propos. 24.

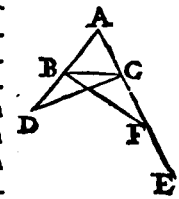


huius libri ostendetur. Quod si basim BC. ponamus esse 8. basim autem EF, 4. erit area trianguli ABC, 12. area verò trianguli DEF, radix quadrata huius numeri 84. quæ maior quidem est quam 9. minor verò, quam 10. id quod notissimum est Geometris. Vt igitur duorum triangulorum & bases, & anguli, nec non triangula ipsa æqualia inter se sint, necesse est, vt vtrumque latus vnius æquale sit vtrique lateri alterius, & anguli quoque dictis lateribus contenti æquales existant, vt optimè dixit Euclides.

THEOR. 2. PROPOS. 5.

ISOSCELIVM triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt, angŭli inter se æquales erŭt.

SIT triangulum Isosceles ABC, in quo latera AB, AC, inter se sint æqualia. Dico angulos ABC, ACB, supra basim BC, æquales inter se esse: Item si latera æqualia AB, AC, producantur quantum libuerit, vsque ad puncta D, & E, angulos quoque DBC, ECB, infra basim eandem BC, esse æquales. Ex linea enim AE, producta infinitè *a* abscindatur AF, æqualis ipsi AD, *b* & ducantur rectæ BF, CD. Considerentur deinde duo triangula ABF, ACD. Quia ergo duo latera AB, AF, trianguli ABF, æqualia sunt duobus lateribus AC, AD, trianguli ACD, vtrumque vtrique, nempe AB, ipsi AC, ex hypothesi, &



a 3. *primi.*

b 1. *primi.*

theſi, & A F, ipſi A D, ex conſtructione; angulusque A, contentus lateribus A B, A F, æqualis eſt angulo A, contento lateribus A C, A D, imò angulus A, communis eſt vtrique triangulo: *a* Erit baſis B F, æqualis baſi C D; & angulus F, angulo D; & angulus A B F, angulo A C D; cùm & priores duo, & poſteriores opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis, vt patet. Rurſus conſiderentur duo triangula B D C, C F B. Quoniam verò rectæ A D, A F, æquales ſunt, per conſtructionem, fit vt, ſi auferantur ex ipſis æquales A B, A C, *b* & reliquæ B D, & C F, ſint æquales. Quare duo latera B D, D C, trianguli B D C, æqualia ſunt duobus lateribus C F, F B, trianguli C F B, vtrumq; vtrique, videlicet B D, ipſi C F, & D C, ipſi F B, vt probatum eſt. Sunt autem & anguli D, & F, contenti dictis lateribus æqualibus æquales, vt oſtenſum etiam fuit. Igitur erit angulus *c* D B C, angulo F C B, æqualis; & angulus B C D, angulo C B F. Tam enim priores duo, quàm poſteriores, æqualibus opponuntur lateribus, exiſtuntq; ſupra communem baſim B C, vtriuſque trianguli B D C, C F B. Quod ſi ex totis angulis æqualibus A B F, A C D, (quos æquales eſſe iam demonſtrauimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æquales C B F, B C D, (quos itidem in poſterioribus triangulis modo probauimus eſſe æquales) *d* remanebunt anguli A B C, A C B, ſupra baſim B C, æquales. Oſtenſum eſt autem in poſterioribus triangulis, & angulos D B C, F C B, qui quidem ſunt infra eandem baſim B C, eſſe æquales. Igitur & anguli ſupra baſim inter ſe, & anguli infra eandem inter ſe ſunt æquales; Ac propterea Iſoſcelium triangulorum, qui ad baſim ſunt anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 4. primi.

b 3. pronun.

c 4. primi.

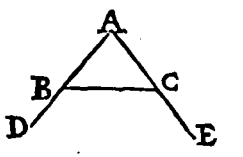
d 3. pronun.

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio vera etiam eſt in triangulis aquilateris, cum in quolibet reperiantur duo latera inter ſe aqualia, licet eam Euclides ſolis Iſoſcelibus triangulis videatur accommodaſſe. Exiſtentibus enim duobus lateribus A B, A C, trianguli A B C, aqualibus; ſiue reliquum latus B C, ipſis quoq; ſit aquale, vt contingit in triangulo aquilatero, ſiue inaquale, vt in Iſoſcele accidit, neceſſario conſequitur, & angulos ſupra baſim inter ſe, & angulos infra eandem inter ſe quoque eſſe aquales, vt conſtat ex demonſtratione pradicta. Solet autem theorema hoc tyronibus ſubdifficile, & obſcuriuſculum videri, propter multitudinem linearum, & angulorum, quibus nondum ſunt aſſueti. Verùm tamen, ſi diligenter theorematis pracedentis vis ac demonſtratio ponderetur, non multo labore hoc, quod pra manibus habemus, à quolibet percipietur, ſi modo memor ſit, illos angulos triangulorum probari aquales eſſe in antecedenti theoremate, qui aqualibus lateribus opponuntur. Quod quidem, quoniam Campanus non appoſuit,

fuit, causa fuit, & confusa esse videatur, & subobscura eius demonstratio.

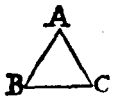
VERITAS porro huius theorematis, quoad vtramque partem, facile quoque demonstrari potest per superpositionem, & demonstrata fuit propositio. 4. Sint enim rursum in triangulo A B C, duo latera aequalia A B, A C, quae producantur quantumlibet vsque ad D, & E. Dico tam angulos A B C, A C B, supra basim B C, inter se aequales esse, quàm angulos D B C, E C B, infra eandem basim. Si enim concipiamus mente triangulum A B C, triangulo A C B, (ita vt idem triangulum sit, instar duorum) superponi, ita vt recta A B, recta A C, superponatur, cadet punctum B, in C, ob aequalitatem laterum A B, A C. Quo posito, cadet recta A C, super rectam A B, ob aequalitatem, siue identitatem anguli A; atque punctum C, in punctum B, incidet, propter aequalitatem laterum A C, A B. Quapropter angulus A B C, angulo A C B, & angulus D B C, angulo E C B, a *congruet, ac proinde tam illi, quàm hi, inter se aequales erunt.*



a 8. primum.

COROLLARIVM.

Ex hac propositione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum esse æquiangulum quoque: Hoc est, tres angulos cuiuslibet trianguli æquilateri esse inter se æquales. Sit enim triangulum æquilaterum A B C. Quoniam igitur duo latera A B, A C, sunt æqualia, *b* erunt duo anguli B, & C æquales. Item quia duo latera A B, B C, sunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod ostendendum erat.



b 5. primi.

THEOR. 3. PROPOS. 6.

SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

IN triangulo A B C, sint duo anguli A B C, A C B, super latus B C, æquales. Dico duo latera illis opposita A B, A C, esse quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, existentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum maius altero; sit igitur A B, maius quàm A C, si fieri potest: Et ex A B, *c* abscinda-tur in D, recta B D, æqualis rectæ A C, quæ minor dicitur esse quàm A B, ducaturque recta C D. Considerentur iam duo triangula A C B, D B C. In quibus cum duo latera A C, C B, trianguli A C B, æqualia sint duobus lateribus D B, B C, trianguli D B C, vterumque vtrique, nempe A C, ipsi D B, (abscidimus enim ex A B, ipsi



c 3. primi.

AB, ipſi AC, conceſſu aduerſarij, æqualem DB,) & CB, ipſi BC, cum ſit vnum & idem; Sint autem & anguli ACB, DBC, contenti dictis lateribus æquales, per hypotheſin: a Erunt triangula ACB, DBC, æqualia, totum, & pars; quod fieri non poteſt. Non igitur erunt latera AB, AC, inæqualia, ſi anguli B, & C, ſuper latus BC, æquales ſunt, ne totum parti æquale eſſe concedamus: ſed æqualia exiſtent. Quare ſi trianguli duo anguli, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 4. primi.

SCHOLIVM.

CONVERTIT hoc theorema primam partem præcedentis. Nam ibi demonſtratum eſt, ſi duo latera trianguli inter ſe æqualia fuerint, angulos, qui ad baſim ſunt, eſſe quoque æquales: Hic verò, ſi anguli ad baſim ſint æquales, latera quoque angulis illis oppoſita eſſe æqualia. Non autem mirum alicui debet videri, ſi Mathematici interdum conuertunt propoſitiones, ita vt nunc ex antecedente quopiam conceſſo colligant per demonſtrationem conſequens aliquod, nunc verò rurſus ex conſequente hoc conceſſo inferant per alsam demonſtrationem antecedens illud, vt ab Euclide in hiſce duabus proximis propoſitionibus factum eſſe conſpicimus: Non debet, inquam, videri mirum, quoniam non ſemper in rebus Mathematicis reciprocantur antecedens & conſequens. Nam in propoſitionibus neceſſarijs, quales ſunt propoſitiones Geometricæ, poteſt interdum prædicatum eſſe vniuerſalius ſubiecto, vt cum Dialecticis loquamur. Quare tunc non poterit conuerti propoſitio. Nam neceſſaria eſt hæc propoſitio; (Omnis homo eſt animal.) non tamen conuerti poteſt vniuerſaliter, cum non omne animal ſit homo. Ita quoque fieri poteſt in propoſitionibus Geometricis neceſſarijs: Cuius ego rei vnum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonſtrat Euclides propoſ. 16. huius lib. Si trianguli cuiuſuis vnum latus producatur, angulum externum maiorem eſſe duobus internis ſibi oppoſitis; In qua quidem propoſitione nullo modo antecedens, & conſequens reciprocantur. Non enim ſequitur, ſi figura cuiuſuis rectilinea vno latere producto, angulus externus maior ſit ſingulis internis oppoſitis, figuram illam eſſe triangulum, cum poſſit etiam eſſe quadrilatera figura, vt ad propoſ. 16. huius lib. oſtendemus. Eodemque modo multa alia propoſitiones converti nequeunt. Quamobrem neceſſe eſt, vt prius demonſtret Geometra, propoſitionem aliquam converti, hoc eſt, antecedens, & conſequens illius reciprocari, antequam ex conſequente conceſſo colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propoſitiones, quæ converti poſſunt, ſed eas duntaxat, quarum converſione maximè indiget: Nos tamen dabimus operam, vt fere omnes illas convertamus, quæ aliquam videbuntur afferre vtilitatem.

COROL-

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propositione, omne triangulum æquiangulum, id est, cuius omnes anguli sunt æquales, esse æquilaterum. Quod quidem conuersum est corollarij quintæ propositionis, vt liquet. Sint enim trianguli A B C, tres anguli æquales. Dico ipsum esse æquilaterum. Cum enim duo anguli B, & C, sint æquales, a erunt latera A B, A C, æqualia. Rursus cum duo anguli A, & B, sint æquales, erunt quoque latera A C, B C, æqualia, & idcirco omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia. Quod ostendendum erat.



a 6. primi.

EX PROCLO.

LICEBIT nobis etiam conuertere secundam partem quintæ propositionis, hoc modo.

SI trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter se erunt.

Trianguli enim A B C, productis lateribus A B, A C, ad D, & E, fiant anguli D B C, E C B, infra basim B C, æquales. Dico latera A B, A C, esse quoque inter se æqualia. Ex C E, quantumlibet producta b *abscindatur C F, æqualis ipsi B D, & ducantur rectæ B F, F D, D C. Considerentur deinde triangula D B C, F C B. In quibus cum latera D B, B C, æqualia sint lateribus F C, C B, vtrumque vtrique, nempe D B, ipsi F C, per constructionem, & B C, ipsi C B, quod sit communis & idem: sint autem & anguli D B C, F C B, dictis lateribus contenti æquales, per hypothesin:* c *erunt & bases C D, B F, & anguli B C D, C B F, super has bases, cum opponantur æqualibus lateribus B D, C F, æquales. Ablatis igitur hisce angulis æqualibus B C D, C B F, ex angulis F C B, D B C, per hypothesin, æqualibus;* d *remanebunt anguli F C D, D B F, æquales. Considerentur rursus triangula D B F, F C D. In quibus quoniam latera D B, B F, æqualia sunt lateribus F C, C D, vtrumque vtrique, nempe D B, ipsi F C, per constructionem, & B F, ipsi C D, vt modo ostensum est; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus D B F, F C D, æquales, vt etiam fuit nuper demonstratum:* e *Erit angulus B D F, super basim D F, trianguli D B F, æqualis angulo C F D, super eandem basim F D, trianguli F C D. His enim æqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo A D F, duo anguli A D F, A F D, sint æquales, vt nunc ostendimus,* f *erunt latera A D, A F, æqualia. A quibus si rectæ B D, C F, per constructionem, æquales demantur,* g *remanebunt A B, A C, latera trianguli A B C, æqualia. Quod erat ostendendum.*



b 3. primi.

c 4. primi.

d 3. primum.

e 4. primi.

f 6. primi.

g 3. primum.

THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 7.

SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, non constituentur, ad aliud atq; aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

SVPER recta AB, constituantur ad punctum quoduis C, duæ rectæ lineæ AC, BC. Dico super eandem rectam AB, versus partem eandem C, non posse ad aliud punctum, vt ad D, constitui duas alias rectas lineas, quæ sint æquales lineis AC, BC, vtraque vtrique, nempe AC, ipsi AD, quæ eundem habent terminum A; & BC, ipsi BD, quæ eundem etiam terminum possident B. Sint enim, si fieri potest, rectæ AC, AD, inter se, & rectæ BC, BD, inter se etiam æquales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum AC, BC, ita vt recta AD, in ipsam rectam AC vel BD, in ipsam BC, cadat; aut intra triangulum ABC; aut extra. Sit primo punctum D, in altera rectarum AC, BC, nempe in AC, vt AD, sit pars ipsius AC. Quoniam igitur rectæ AC, AD, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales, erit pars AD, toti AC, æqualis. Quod fieri non potest. Sit deinde punctum D, intra triangulum ABC, & ducta recta CD, producantur rectæ BC, BD, vsque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo ACD, ponuntur latera AC, AD, æqualia *a* erunt anguli ACD, ADC, super basim CD, æquales; *b* Est autem angulus ACD, minor angulo DCE; nempe pars toto: Igitur & angulus ADC, minor erit eodem angulo DCE. Quare angulus CDF, pars ipsius ADC, multo minor erit eodem angulo DCE. Rursus, quia in triangulo BCD, latera BC, BD, ponuntur æqualia, *c* erunt anguli CDF, DCE, sub basi CD, æquales. Ostensum autem fuit, quod idem angulus CDF, multo sit minor angulo DCE. Idem ergo angulus CDF, & minor est angulo DCE, & eidem æqualis, quod est absurdum. Sit postremo punctum D, extra triangulum ABC. Aut igitur in tali erit loco, vt vna linea super alteram cadat, vt in priori figura, dummodo loco D, intelligas C, & loco C, ipsum D; ex quo rursus colligetur pars æqualis toti, quod est absurdum. Aut in tali erit loco, vt posteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in posteriori figura, si modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C. Quo posito, in idem absurdum incidemus, nempe angulum DCF, & minorem esse angulo CDE, & eidem æqua-

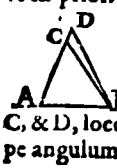


a 5. primi.

b 9. prop. num.



c 5. primi.

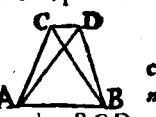


æqualem, vt perſpicuum eſt. Aut denique punctum D, ita erit extra triangulum A B C, vt altera linearum poſteriorum, nempe A D, ſecet alterum priorum, vt ipſam B C. Ducta igitur recta C D, cum in triangulo A C D, latera A C, A D, ponantur æqualia, *a* erunt anguli A C D, A D C, ſupra baſim C D, æquales: Ac proinde *b* cum angulus A D C, minor ſit angulo B D C, pars toto, erit & angulus A C D, minor eodem angulo B D C. Quare multo minor erit angulus B C D, pars anguli A C D, angulo eodem B D C. Rurſus, cum in triangulo B D C, latera B C, B D, ponantur æqualia, *c* erunt anguli B C D, B D C, ſuper baſim C D, æquales: Eſt autē iam oſtenſum, angulum B C D, multo eſſe minorem angulo B D C. Idem igitur angulus B C D, & minor eſt angulo B C D, & eidem æqualis, quod eſt abſurdum. Non ergo æquales ſunt inter ſe A C, A D, & inter ſe quoque B C, B D. Quare ſuper eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 5. primi.

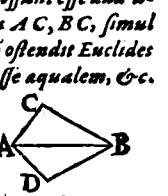
b 9. prop. nunc.



c 5. primi.

SCHOLIVM.

FIERI poteſt, vt duæ linea A D, B D, æquales ſint duabus A C, B C, vtraque vtrique, vt A D, ipſi B C, & B D, ipſi A C. vt vltima figura indicat. Verum hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto lineæ illæ, quæ ſunt æquales inter ſe, vt conſtat. Sola enim A & A D, eundem limitem poſſident A; Item B C, B D, eundem B; optimeq; demonſtratum fuit ab Euclide, fieri non poſſe, vt A C, A D, inter ſe ſint æquales, itā vt B C, B D, quoque inter ſe æquales exiſtant. Rectè igitur in propoſitione appoſitū ſunt hæc verba: eoſdemq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rurſus poſſunt eſſe duæ lineæ ſimul ſumptæ A D, B D, æquales duabus lineis A C, B C, ſimul ſumptis, vt in eadem figura perſpicit poteſt: Sed hoc nō oſtendit Euclides fieri non poſſe. Dixit enim non poſſe vtramq; vtriq; eſſe æqualem, &c.



Eadem ratione poſſunt ex A, & B, infra A B, baſim trianguli A B C, hoc eſt, ad contrarias partes, duci duæ lineæ rectæ A D, B D, conuenientes ad aliquod punctum, ita vt A D, exiens è puncto A, æqualis ſit ipſi A C; & B D, egrediens ex B, æqualis ipſi B C, vt perſpicuum eſt in appoſita figura. Non igitur ſine cauſa adiecit Euclides: ad eaſdem partes. Denique eſſe poterunt duæ linea A C, A D, æquales inter ſe eundem terminum A, poſſidentes; Sed hoc poſito, fieri nulla ratione poterit, vt reliquæ duæ B C, B D, terminum habentes eundem B, inter ſe quoque ſint æquales, vt in hac figura apparet, & ab Euclide eſt demonſtratum. Appoſite igitur dictum eſt in propoſitione: duabus eiſ-



D

dem rec-

dem rectis lineis alia duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, &c. Quare vt planè scopus Euclidi in hac propositione propositus intelligatur, diligenter singula verba propositionis sunt ponderanda.

viij. THEOR. 5. PROPOS. 8.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumque vtrique æqualia, habuerint verò & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

SINT duo latera AB, AC, trianguli ABC, duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, æqualia, vtrumque vtrique, nempe AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; sit autem & basis BC, basi EF, æqualis. Dico angulum A, æqualem esse angulo D, quorum videlicet vterq; dictis lateribus continetur. Nam si mente intelligatur basis BC, superponi basi EF, *a* neutra excedet alteram, sed punctum B, congruet puncto E, & punctum C, puncto F, cum hæ bases ponantur æquales inter se. Deinde si triangulū ABC, cogitetur cadere super triangulum DEF,



cadet punctum A, aut in ipsum punctum D, aut aliò. Si punctum A, in ipsum punctum D, cadat, congruent sibi mutuo triangulorum latera, cum ponantur æqualia; Ac propterea *b* angulus A, æqualis erit angulo D, cum neuter alterum excedat. Quod si punctum A, aliò dicatur cadere, vt ad G, quomodocunq; id contingat, hoc est, siue in latus ED, siue intra triangulum EDF, siue extra, vt in figuris apparet; erit perpetuo EG, (quæ eadem est, quæ BA,) æqualis ipsi ED; & FG, (quæ eadem est, quæ CA) æqualis ipsi FD, propterea quod latera vnius trianguli æqualia ponuntur lateribus alterius. Hoc autem fieri non posse, iamdudum *c* demonstratum est, cum tam rectæ EG, ED, terminum eundem E, quam rectæ FG, FD, eundem limitem F, possideant. Non igitur punctum A, cadet aliò quam in punctum D: ac proptrerea angulus A, angulo D, æqualis erit. Quare si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum.

a 8. *primum.*

b 8. *primum.*

c 7. *primum.*

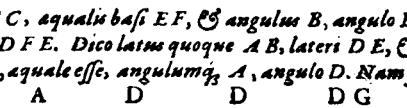
SCHOLIVM.

VT vides, hac propositio conuertit primam partem propositionis quartæ. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, collecta fuit basium æqualitas; ita hic ex æqualitate basium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateribus æqua-

bus æqualibus comprehenduntur. Possumus eodem modo ex prima, & tertia parte conclusionis quartæ propositionis inferre totum antecedens eiusdem, ita vt theorema proponatur in hanc formam.

SI duo triangula bases habuerint æquales, & angulos super bases constitutos æquales, vtrumque vtrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, vtrumque vtrique, quæ videlicet æqualibus angulis subtenduntur, angulosque reliquos hisce lateribus inclusos æquales.

SIT enim basis BC, æqualis basi EF, & angulus B, angulo E, angulus autem C, angulo DFE. Dico latus quoque AB, lateri DE, & latus AC, lateri DF, æquale esse, angulumque A, angulo D. Nam si basis basi superponatur, a *congruent sibi mutuo extrema earum, nec non & inter se anguli æqualium. Quare omnia sibi congruent, propterea quæ omnia inter se æqualia erunt. Verum hoc idem theorema à nobis propositum, quod quidem magis proprie conuertere videtur quartam propositionem, quam illud Euclidis, aliter demonstrabit Euclides in prima parte propositionis 26. vt eo loco monebimus.*



a 8. primum.

COROLLARIVM.

PORRO ex antecedente huius octauæ propositionis non solum colligi potest, angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, verum etiam reliquos angulos, qui ad bases constituuntur, vtrumque vtrique, vt angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F; imò totum triangulum toti triangulo, vt constat ex eadem superpositione vnius trianguli super alterum. Nam sibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula, vt perspicuum est. Quod etiam ex quarta propos. colligi poterit, postquam demonstratum fuerit, angulos æqualibus comprehensos lateribus æquales esse. Inde enim fiet, cum latera quoque sint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula esse æqualia, vt in propos. 4. demonstratum est.

EX PROCLO.

PHILONIS familiares hoc idem theorema octauum ostendunt demonstratione affirmatiua, hac ratione. Posito enim eodem antecedente, superponi intelligatur basis BC, basi EF, ita vt triangulum ABC, cadat in diuersas partes, & non super triangulum DEF, quale est triangulum AEF. Aut igitur duo latera, nempe DF, FA, constituunt vnam lineam rectã, quod quidem continget, si duo anguli C, & F, recti extiterint, aut non. Si constituant vna lineam rectã, veluti DA, ita propositũ concludetur Quoniã in triangulo AED, duo latera AE, DE, ponuntur æqualia (est enim nunc AE, recta eadem, quæ AB,



a 5. primi.

qua per hypotheſin recta D E, æqualis eſt) a erunt anguli A, & D, ſuper baſin A D, æquales, quod erat oſtendendum. Si verò neque D E, F A, neque D E, E A, lineam rectam conficiant, ducatur ex D, ad A, linea recta D A, quæ vel cadet intra triangula, vel extra. Cadat primum intra, quod quidem accidet, quando anguli ad E, & F, ſunt acuti. Quoniam igitur in triangulo A E D, duo latera A E, D E,

b 5. primi.

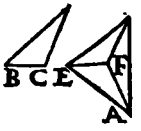


æqualia ponuntur, b erunt duo anguli E A D, E D A, æquales ad baſin D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, D F, æqualia ſint per hypotheſin, erunt duo anguli F A D, F D A, ſuper baſin D A, æquales. Si igitur his æqua-

c 2. primi.

les illis æqualibus addantur, c fient toti anguli E A F, E D F, æquales. Quod erat oſtendendum. Cadat deinde recta D A, extra triangula, quod demum fiet, quando anguli ad F, fuerint obtuſi. Quoniam igitur in

d 5. primi.



triangulo A E D, duo latera A E, D E, ponuntur æqualia, d erunt anguli E A D, E D A, æquales ſuper baſin D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, D F, in triangulo A F D, ſint per hypotheſin æqualia, erunt anguli

e 3. primi.

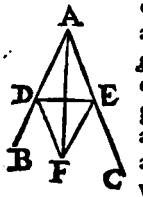
F A D, F D A, ſuper baſin D A, æquales. His ergo à prioribus ablatis, e remanebunt anguli E A F, E D F, æquales; Quod demonſtrandum proponebatur.

ix. PROBL. 4. PROPOS. 9.

DATVM angulum rectilineum bifariam ſecare.

SIT diuidendus rectilineus angulus B A C, bifariam, hoc eſt, in duos angulos æquales. In recta A B, ſumatur quodcunq; punctum D, & rectæ A D, *f* ſecetur ex A C, recta A E,

f 3. primi.



g 1. primi.

æqualis, ducaturque recta D E. Deinde ſuper D E, *g* conſtituatur triangulum æquilaterum D F E, & ducatur recta A F, diuidens angulum B A C, in angulos B A F, C A F. Dico hos angulos inter ſe eſſe æquales. Cum enim latera D A, A F, trianguli D A F, æqualia ſint lateribus E A, A F, trianguli E A F, vtrumque vtrique, quod D A, ipſi E A, per conſtructionem, ſit æquale, & A F, commune; Sit autem & baſis D F, baſi E F, æqualis, proterea quod triangulum D F E, conſtructum eſt æquilaterum: *h* Erit angulus D A E, angulo E A F, æ-

h 8. primi.

qualis, ideoque angulus B A C, diuiſus bifariam; quod erat faciendum.

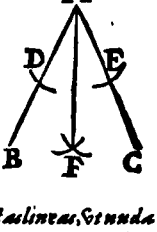
SCHOLIVM.

QVOD ſi loco trianguli æquilateri conſtruamus triangulum Iſoſceles,

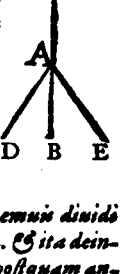
ſceles, nihilominùs idem demonſtrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propoſitionibus, quæ ſequuntur, fieri poteſt.

PRAXIS.

DICTO citius angulus quilibet rectilineus, & BAC, bifariam ſecabitur, hoc modo. Ex centro A, circino aliquo abſcindantur rectæ æquales AD, AE, cuiuſcunque magnitudinis. Et circino non variato (poſſes tamen ipſum variare, ſi velles) ex centris D, & E, deſcribantur duo arcus ſecantes ſeſe in F. Recta igitur ducta AF, ſecabit angulum BAC, bifariam. Si enim ducerentur rectæ DF, EF, eſſent hæ æquales, nempe ſemidiametri circulorum æqualium. Vnde & prius demonſtrabitur, angulum DAF, æqualem eſſe angulo EAF. Non deſcripſimus autem dictas lineas, & tota nuda praxis haberetur. Id quod in aliis quoque praxibus, quoad eius fieri poterit, obſeruabimus, ne linearum multitudo tenebras nobis effundat, pariatque confuſionem.

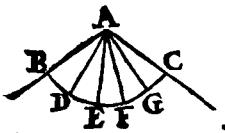


QVOD ſi quando angulus rectilineus breuiſſimis lineis contentus, & in extremo alicuius plani poſitus, diuidendus ſit bifariam, deſcribemus ex D, & E, duos arcus ſeſe mutuo interſecantes in F, ſupra angulum A, quia infra puncta D, & E, ſpatium deeſt, in quo deſcribi poſſint. Recta enim ex F, per A, & uſque ad B, ejecta ſecabit angulum A, bifariam, & prius, & in appoſita figura apparet.



SCHOLIVM.

HINC apertè colligitur, angulum rectilineum quemuis diuidi poſſe etiam in 4. angulos æquales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, ſemper procedendo per augmentum duplex. Nam poſtquam angulus quilibet rectilineus in duos æquales angulos fuerit diuiſus, ſi horum & quoque iterum bifariam ſecetur, habebimus 4. angulos æquales; Quod ſi ſinguli rurſus diuidantur bifariam, obtinebimus 8. angulos æquales, & ſic deinceps; Non docuit autem Euclides & ſquam, quanam ratione angulus rectilineus in quotuis partes æquales poſſit diuidi, quia id à nemine & ſque ad illum diem fuerat demonſtratum. Ex Pappo tamen Alexandrino nos id docebimus, beneficio cuiuſdam linea curuæ, vel inflexæ, ad finem lib. 6. Interim verò, ſi quis angulum rectilineum quemcunque propoſitum in quotuis partes æquales diuidere deſideret, rudi, & dicitur, Minerua, & ti eum neceſſe erit circino, & quaſi attentando, & ſæpius repetendo praxim ipſam ad finem deſideratum perueniat; hac nimirum ratione. Sit angulus rectilineus BAC, diuidendus in 5. angulos æquales. Ex A, centro deſcri-



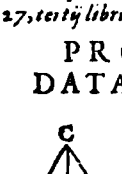
batur arcus circuli B C, ad quodcunque interuallum, secans rectas A B, A C, in B, & C. Deinde hic arcus beneficio circini (eius crura modo dilatando magis, modo restringendo, donec debitam habeant distantiam) diuidatur in tot partes aquales, in quot angulus propositus est diuidendus, vt in exemplo proposito in quinque partes in punctis D, E, F, G. Si namque ad hac puncta ex A, recta ducantur linea, diuisus erit angulus B A C, in quinque aquales angulos. Cum enim circino sumpta sint aqualia interualla B D, D E, &c si ducantur recta B D, D E, &c. erunt hæ omnes inter se aquales. Quare erunt duo latera B A, A D, trianguli B A D, a aqualia duobus lateribus E A, A D, trianguli E A D, vtrumque vtrique, cum omnia ex centro egrediantur ad circumferentiam vsque. Basis autem B D, basi quoque D E, vt dictum fuit, aqualis est: b Angulus igitur B A D, angulo E A D, aqualis existet; Eademque ratione demonstrabitur, angulum E A D, angulo E A F, aqualem esse, & sic de cæteris. Breuius autem colligetur, omnes angulos ad A, esse inter se aquales, ex 27. propos. tertij lib. propterea quod circumferentia B D, D E, &c. accepta sunt omnes aquales inter sese. Nemo verò miretur, quod praxes exhibeamus interdum, quarum demonstrationes ex sequentibus propositionibus pendent. Hoc enim, vt supra ad defin. 10. diximus, eo consilio facimus, vt quoad eius fieri potest, singula propriis in locis tractentur, diuisio nimirum angulis rectilineis cuiusuis in quotlibet partes aquales eo in loco, in quo Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas partes aquales. Et diuisio linea recta in quotuis partes aquales, vbi eandem diuidit Euclides bifariam, & ita de singulis. Neque enim ad praxes huiusmodi requiruntur semper sequentes demonstrationes, sed solum, vt probetur rectè esse per ipsas effectum, quod imperabatur. Quamobrem is, qui non contentus nuda praxi demonstrationem requirit, poterit regredi ad praxin quamlibet, postquam demonstrationes ad eam necessarias diligenter perceperit. Nam semper propositiones illas, qua ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonstrationibus nostrarum praxium; quemadmodum & in proxima praxi citauimus propositionem 27, tertij libri.

a 15. def.

b 8. pri.

x. PROBL. 5. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam finitam bifariam secare.



c 1. pri.

d 9. pri.

SIT recta finita A B, diuidenda bifariam, id est, in duas partes æquales. c Describatur super A B, triangulum æquilaterum A B C, cuius angulus C, per rectam C D, d diuidatur bifariam, rectaq; C D, rectam A B, secet in D. Dico rectam A B, bifariam esse diuisam in D. Quoniam duo latera A C, C D, trianguli A C D,

A C D, æqualia sunt duobus lateribus B C, C D, trianguli B C D, vtrumque vtrique, nempe A C, ipsi B C, cum sint ambo latera trianguli æquilateri, & C D, est commune; Est autem & angulus A C D, angulo B C D, æqualis, per constructionem: a Erit basis A D, basi B D, æqualis. Datam ergo rectam A B, bifariam sequimus in D, quod facere oportebat. a 4. pri.

PRAXIS.

EX centro A, ad quoduis interuallum, quod tamen dimidium lineæ A B, excedat, describantur duo arcus, vnus supernè, alter infernè; Et ex centro B, ad idem interuallum omnino alij duo arcus delineentur, qui priores secent in C, & D. Recta enim ducta C D, secabit rectam A B, in E, bifariam. Si enim ex A, & B, ad C, & D, ducantur quatuor rectæ, erunt hæ omnes inter se æquales, cum ex centris ad circumferentias æqualium circulorum cadant; Nam arcus circulorum descripti sunt eodem interuallo.



Quoniam igitur latera A B, C D, æqualia sunt lateribus B C, C D, vtrumque vtrique, & basis A D, basi B D, b *erit angulus A C D, angulo B C D, æqualis. Rursus quia latera A C, C E, æqualia sunt lateribus B C, C E, vtrumque vtrique, & angulus A C E, angulo B C E, vt ostensum fuit;* c *erit basis A E, basi B E, æqualis.* b 8. pri. c 4. pri.

I A M verò si linea bifariam diuidenda posita sit in extremo plani cuiuspiam, ita vt infra ipsam locus non sit, in quo commodè duo arcus sese intersecantes possint describi; descriptis supra eam duobus arcubus sese intersecantibus in C, describemus ad easdem partes alios duos arcus sese intersecantes mutuo in D, siue hoc fiat infra punctum C, vt in apposita figura, siue supra C. Nam recta per C, D, ducta secabit rectam A B, bifariam in E.



SCHOLIVM.

PERSPICVVM est, eodem modo diuidi posse eandem lineam rectam A B, in 4. partes æquales, & in 8. in 16. in 32. &c. sicuti in propositione præcedenti diximus de diuisione trianguli rectilinei. Qua verò ratione quauis recta linea proposita diuidenda sit in quotcunque partes æquales, vberrimè trademus ad propos. 40. huius lib. Idemque longè facilius postea efficiemus ad propos. 10. lib. 6. vbi varias, & non inuicundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur esse proprius huic rei locus, cum huiusmodi praxes fere omnes per linearum proportiones facilius demonstrentur. Neque verò vnquam diui-

sione linea in plures, quàm in duas partes æquales, ad eum locum vsque indigebimus.

xj. PROBL. 6. PROPOS. 11.

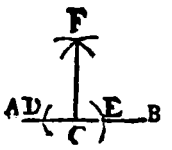
DATA recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

RECTA linea data sit A B; & in ea punctum C, à quo iubemur erigere super A B, lineam ad angulos rectos, seu perpendicularem. A puncto C, sumatur recta C D, *a* cui æqualis auferatur C E. Deinde super D E, *b* constituatur triangulum æquilaterum D E F, atque ex F, ad C, ducatur recta F C, quam dico esse perpendicularem ad A B. Quoniam latera D C, C F, trianguli D C F, æqualia sunt lateribus E C, C F, trianguli E C F, vtrumque vtrique, nempe D C, ipsi E C, per constructionem, & C F, commune; Est verò & basis D F, basi E F, æqualis, ob triangulum æquilaterum: *c* Erunt anguli ad C, contenti dictis lateribus, æquales. *d* Quare dicetur vterque rectus, atque adeo F C, recta, ad A B, perpendicularis. Data igitur recta linea à puncto in ea dato, &c. Quod faciendum erat.

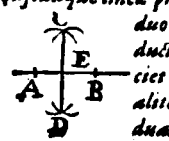


a 3. *primi.*
b 1. *primi.*
c 8. *primi.*
d 10. *def. fim.*

PRAXIS.



EX puncto C, abscindantur vtrinq; lineæ æquales C D, C E, & ex D, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Recta namq; ducta F C, erit perpendicularis. Demonstratio eadem est, quæ Euclidis, si modo ducantur rectæ D F, E F, quæ æquales erunt, propter æquales circulos ex D, & E, descriptos, qui se intersecant in puncto F. Quod si punctum datum in lineâ recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, & ex illo erigatur secundum praxim datam linea perpendicularis. Vt si linea data fuerit A C, & punctum datum C, extremum; protrahenda erit A C, in B, & sumenda æquales C D, C E, &c. Si verò ad aliquam lineam constituenda sit linea perpendicularis, non quidem in puncto assignato, sed vtcunque, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis A, & B, quibuscunque linea propositæ describantur tam superne, quàm inferne duo arcus se se intersecantes in C, & D. Nam recta ducta C D, erit perpendicularis ad A B, hoc est, faciet duos angulos ad E, rectos, seu æquales. Quod non aliter probabis, quàm supra praxim, qua lineam in duas æquales diuisimus partes, demonstrauimus.

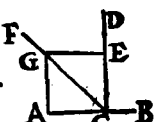


Nam per

Nam per 4. propos. erunt anguli ad E, æquales, quippe qui super æquales bases A E, B E, consistant, opponanturq; æqualibus lateribus A C, B C, quæ ex C, ad puncta A, & B, ducerentur.

EX PROCLO.

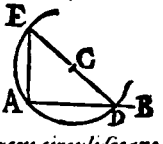
SI punctum in linea datum fuerit extremum, & linea commodè produci nequiverit, poterimus ex puncto dato educere lineam perpendicularem, lineæ non productæ, hac ratione. Sit recta A B, & punctum A. Ex C, puncto quolibet extra lineam educatur perpendicularis C D, vt docuit Euclides ; a *& abscindatur C E, æqualis ipsi A C: Deinde* b *diuidatur angulus C, bifariam, ducta recta C F: Et ex E, rursus, vt docuit Euclides, educatur E G, perpendicularis ad C D, secans rectam C F, in G. Ducta enim recta G A, perpendicularis erit ad A B. Quoniam cùm latera A C, C G, triangula A C G, æqualia sint lateribus E C, C G, trianguli E C G, vtrumque vtrique, & anguli hisce lateribus contenti æquales quoque, per constructionem :* c *Erunt anguli A, & E, oppositi communi lateri C G, æquales; Sed E, est rectus per constructionem; igitur & A, rectus erit,* d *ideoq; A C, ad A B, perpendicularis.*



a 3. primi.
b 9. primi.
c 4. primi.
d 10. def

SCHOLIVM.

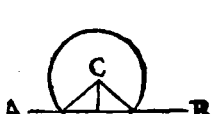
BREVIVS lineam perpendicularem erigemus ex puncto dato, siue extremum illud sit, siue non, hoc modo. Sit data linea A B, punctumq; in ea A. Ex centro C, extra lineam assumpto, vbi libuerit (dummodò recta A B, producta cum ipsa non conueniat) interuallo vero accepto vsque ad A, describatur arcus circuli secans A B, in D. Et ex D, per C, recta ducatur secans arcum in E. Recta enim ducta E A, erit perpendicularis ad A B. Nam angulus A, est rectus, cùm sit in semicirculo D A E, vt ostendemus propositione 31. libri 3.



PROBL. 7. PROPOS. 12. xij.

SVPER datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

Sit recta A B, interminatæ quantitatis, & extra ipsam punctũ C, à quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectam A B. Centro C, interuallo vero quolibet circulus describatur secans A B, in D, & E. (quoniam interuallum assumptum tantum esse

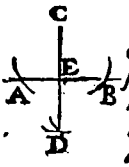


a 10 pri. debet, vt transcendat rectam A B; aliàs eam non secaret.) a Diuisa autem recta D E, bifariam in F, ducatur recta C F, quam dico perpendicularem esse ad A B. Si enim ducantur C D, C E, erunt duo latera D F, F C, trianguli D F C, æqualia duobus lateribus E F, F C, trianguli E F C, vtrumque vtrique, per constructionē; est autem & basis C D, basi C E, æqualis, cùm hæ sint ex centro
b 8. pri. C, ad circumferentiam. Quare b erit angulus D F C, angulo E F C, æqualis, & propterea vterque rectus. Ducta est igitur C F, perpendicularis, quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

PROBE apposuit Euclides hanc particulam, infinitam. *Si enim linea esset infinita, non posset semper à puncto dato extra ipsam perpendicularis ad eam deduci. Vt si linea finita esset B E, & punctum C, non posset ex C, describi circulus secans B E, in duobus punctis, quare neque ex C, perpendicularis duci ad B E. Hac igitur de causa vult Euclides, rectam datam esse infinitam, hoc est, non habere magnitudinem determinatam, vt saltem ad ipsam productam perpendicularis possit deduci. Tum enim fiet hic, si B E, producatur, donec circulus ex C, descriptus secet totam B A, productam in D, & E, &c.*

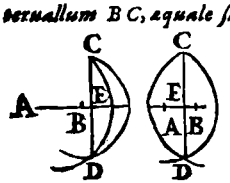
PRAXIS.



CENTRO facto C, & *interuallo quouis eodem, describantur duo arcus secantes rectam datam in A, & B. Deinde ex A, & B, eodemq; interuallo, vel alio, si placuerit, alij duo arcus describantur secantes se in D. Nam ducta recta C D secans A B, in E, erit perpendicularis ad A B. Demonstratio huius operationis non differt à demonstratione tradita in praxi propositionis*
c 4. pri. 10. *Nam anguli ad E, erunt recti,* c *nempe inter se æquales.*



IDEM efficiemus hoc modo. Ex quouis puncto A, in linea data, & interuallo quolibet vsque ad C, assumpto, arcus circuli describatur: Deinde ex quolibet alio puncto B, interuallo q; vsq; ad idem C, alius arcus describatur priorem secans in C, & D; Eritq; recta C D, secans A E, in E, perpendicularis ad A B. Demonstratio eadem est, quæ prior. Non est autem necesse, vt interuallum B C, æquale sit interuallo A C, vt in hac figura apparet.

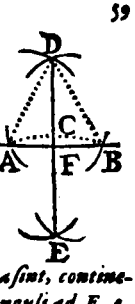


Facilior tamen erit, & brevior operatio, si idem semper interuallum accipiatur.

QVOD si punctum C, fuerit nimis vicinum rectæ A B, ita agendum erit. Centro C, ad quodvis interuallum secetur recta A B, in duobus punctis A, B, ex quibus ad maius interuallum quodcunque, quàm A C, vel A C, bini arcus

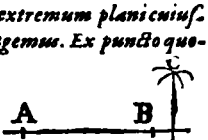
tam

tam suprà, quàm infrà describantur, se intersecantes in D, E. Nam ducta recta D C F, quæ producta necessariò per punctum E, transibit, perpendicularis erit ad rectam A B, in F. Quod ita demonstrabimus, ductis rectis A D, B D, A C, B C. Quoniam duo latera D A, D C, trianguli A C D, duobus lateribus D B, D C, trianguli B C D, æqualia sunt, nec non & bases A C, B C, æquales sunt, a erunt anguli ad D, æquales. Quare cum duo latera D A, D F, trianguli A D F, a 8. pri.

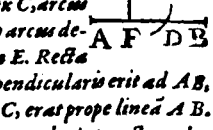


duobus lateribus D B, D F, trianguli D B F, æqualia sint, continentq; angulos ad D, æquales, & ostendimus; b erunt anguli ad F, æquales, ac proinde recti, &c. b 4. pri.

I A M verò si punctum datum sit iuxta extremum plani cuiusuis piam, ita vt linea data non possit produci, ita agemus. Ex puncto quouis B, quod è regione dati puncti C, videatur quasi esse positum, hoc est, ferè in extremitate lineæ datæ A B, describantur duo arcus supra, & infra lineam A B, ad interuallum B C. Deinde ex puncto A, aliquantum remoto à puncto accepto B (Quo autem magis distabunt inter se puncta A, & B, eo commodiùs puncta intersectionum arcuum cognoscentur) alij duo arcus ad interuallum A C, describantur, secantes priores in C, & D. Nam recta C D, perpendicularis erit ad datam rectam A B.

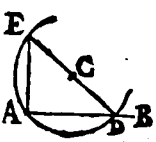


S I autem puncto non prope extremum plani, in quo linea est, dato, linea fit in extremo plani, vt duo arcus infra lineã commodè se intersecare non possint, siue punctum datum C, sit propinquum lineæ A B, siue non, absoluemus problema hoc modo. Ad interuallum A C, vbicunque punctum A, sumatur, describatur ex C, arcus secans rectam A B, in D; atque ex A, D, duo arcus describãtur versus punctũ C, sese intersecantes in E. Recta nanq; ex E, per C, ducta secans A B, in F, perpendicularis erit ad A B, vt suprà demonstratum est, quando punctum C, erat prope lineã A B.



Q V O verò modo nos gerere debeamus, quando & punctum datum est iuxta vnum extremum plani, & linea data prope alterum extremum, ita vt neque lineam producere liceat, neque duo arcus commodè se intersecare possint in D, infra datam rectam A B, docebimus in scholio propositionis 31. huius lib.

V E R V M hoc etiam efficiemus hoc modo. In figura scholij propos. 11. sit ad rectam A B, ex puncto E, deducenda perpendicularis ad extremum quodammodo linea. Ducta vtcunque recta E D, a secetur bifariam in C, & centro C, per E, arcus circuli a 11. pri.



ac scri-

describatur secans rectam datum in A. Quod si non secet, producenda erit, donec ab arcu secetur. Recta enim E A, erit ad A B, perpen-
a 31. ter *dicularis*; b *cum angulus A, sit in semicirculo rectus.*
tij.

THEOR. 6. PROPOS. 13.
xiij.

CVM recta linea super rectam consistens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



RECTA linea A B, consistens super rectam C D, faciat duos angulos A B C, A B D. Si igitur A B, fuerit perpendicularis ad C D, *b* erunt dicti anguli duo recti. Si verò A B, non fuerit perpendicularis, faciet vnum quidem angulũ obtusum, alterum verò acutũ. Dico igitur ipsos duobus esse rectis æquales. *c* Educatur enim B E, ex B, perpendicularis ad C D, vt sint duo anguli E B C, E B D, recti. Quoniam verò angulus rectus E B D, *d* æqualis est duobus angulis D B A, A B E; *e* erunt, appositio communi angulo recto E B C, duo recti E B D, E B C, tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales. Rursus quia *f* angulus A B C, duobus angulis A B E, E B C, æqualis est; *g* erunt appositio communi angulo A B D, duo anguli A B C, A B D, tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales. Sed eisdem his tribus ostendimus, æquales etiam esse duos rectos E B D, E B C; quæ autem eidem æqualia, *h* inter se sunt æqualia. Duo igitur anguli A B C, A B D, æquales sunt duobus rectis E B D, E B C. Cùm ergo recta linea super rectam consistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

b 10. def
c 11. pri.
d 10. pro
e 12. pron
f 10 pro
g 2. pro.
h 1. pron

SCHOLIVM.

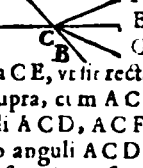
VIDETVR hac propositio pendere ex communi quadam animi motione. Quo enim angulus A B C, superat rectum angulum E B C, eo reliquum angulus A B D, superatur ab angulo recto E B D. Nam sicut ibi excessus est angulus A B E, ita hic defectus est idem angulus A B E. Quocirca anguli A B C, A B D, duobus rectis æquales esse conuincuntur: siquidem tantum vnus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

THEOR. 7. PROPOS. 14.
xiv.

SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctũ, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

Ad punctum C, lineæ rectæ A B, in diuersas partes eductæ sint duæ rectæ C D, C E, facientes cum A B, duos angulos A C D, A C E,

ACE, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipſas CD, CE, inter ſe eſſe cõſtitutas in directum, ita vt DCE, ſit vna linea recta. Si enim nõ eſt recta DCE; producta DC, ad partes C, in directum, & continuum cadet aut ſupra CE, vt ſit recta DCF, aut infra CE, vt ſit recta DCG. Si cadit ſupra, cum AC, conſiſtat ſuper rectam DCF, *a* fient duo anguli ACD, ACF, duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo anguli ACD, ACE, æquales duobus rectis; *b* & omnes recti ſunt inter ſe æquales. Quare duo anguli ACD, ACF, duobus angulis ACD, ACE, erunt æquales. Ablato igitur cõmuni angulo ACD, *c* remanebunt anguli ACF, ACE, inter ſe æquales, pars & totum, quod eſt abſurdum. Non igitur recta DC, producta cadet ſupra CE; Sed neq; infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli ACE, ACG, æquales. Igitur DC, producta eadem efficietur, quæ CE; propterea que, ſi ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 13. primi.

b 12. primi.

c 3. primi.

SCHOLIVM.

EST hac propoſitio precedentis conuerſa. In ea enim probatum fuit, ſi DCE, ſit recta, angulos ACD, ACE, duobus eſſe rectis æquales. In hac verò demonſtratum eſt, ſi dicti anguli ſint duobus rectis æquales, rectas DC, EC, eſſe vnam lineam rectam.

EX PROCLO.

RECTE Euclides addidit in propoſitione hac (& non ad eaſdem partes.) Quoniam, vt ait Porphyrius, fieri poteſt, vt ad punctum aliquod linea data ad eaſdem partes duæ lineæ ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis æquales, quæ tamen non conſtituant vnam lineam, eò quòd non ad diuerſas ſint ducta partes. Sit enim punctum C, in linea AB, datum. Ducatur CD, d *perpendiculariſ ad AB,* e *diuidatur ½ rectus angulus ACD, bifariam per rectam CE. Deinde ex D, quolibet puncto recta CD,* f *ducatur DE, perpendicularis ad CD, ſecans rectam CD, in E. Producta autem ED, ad partes D,* g *ſumatur DF, æqualis recta DE, & ducatur recta FC. Quoniam igitur latera ED, DC, trianguli EDC, æqualia ſunt lateribus FD, DC, trianguli FDC, vtrumque vtrique, & anguli D, ipſis contenti æquales, nempe recti;* h *erit baſis EC, baſi CF, æqualis, & angulus FCD, angulo FCD. Sed angulus ECD, dimidium eſt recti. (Eſt enim rectus ACD, diuiſus bifariam.) Igitur & FCD, dimidium erit recti. Quare CF, cum AC, faciet angulum ACF, conſtantem ex recto, & dimidio recti; Facit autem CE, cum eadem AC, angulum ACE, dimidium etiam recti. Duo igitur anguli ACF, ACE, quos ad eaſdem partes faciunt recta CF, CE, cum AB; æquales ſunt duobus rectis: Et tamen*



d 11. primi.

e 9. primi.

f 11. primi.

g 3. primi.

h 4 primi.

men CF, CE, non sunt vna linea recta, propterea quòd non sunt ducta ad diuersas partes, sed ad easdem.

XV. THEOR. 8. PROPOS. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuò secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficient.

Secent se duæ rectæ A B, C D, in puncto E, vtcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter se esse æquales, angulum videlicet A E D, angulo B E C, & angulum A E C, angulo B E D. Quoniam recta D E, consistit super rectam A B, *a* erunt duo anguli A E D, D E B, æquales duobus rectis. Rursus quia recta B E, super rectam C D, consistit, erunt eadem ratione duo anguli C E B, B E D, duobus rectis æquales. Cùm igitur *b* omnes recti anguli inter se sint æquales; erunt duo anguli A E D, D E B, duobus angulis D E B, B E C, æquales. Dempto igitur communi angulo D E B, *c* remanebit angulus A E D, angulo B E C, æqualis. Eadem ratione confirmabitur, angulos A E C, B E D, inter se æquales esse. Nam duo anguli A E C, C E B, *d* qui duobus sunt rectis æquales, æquales erunt duobus quoq; angulis D E B, B E C, qui duobus rectis sunt æquales. Ablato igitur angulo communi B E C, *e* remanebunt anguli A E C, B E D, æquales inter se. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuò secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.



a 13. pri. b 12. pro c 3. pro. d 13. pri. e 3. pron

COROLLARIVM I.

EVCLIDES colligit ex demonstratione huius theorematis (ex sententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium non habent) duas lineas rectas se mutuo secantes efficere ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos A E D, D E B, quàm duos A E C, C E B, duobus esse rectis æquales, per 13. propos. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales existunt.

COROLLARIVM II.

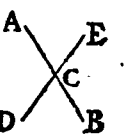
EADEM ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum constitutos, quotcunq; fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. Si enim ex E, aliæ lineæ quotlibet educantur, diuidentur solummodo illi quatuor anguli ad E, constituti in plurimas partes, *f* quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur. Cùm ergo illi quatuor anguli æquales sint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoq; omnes alij simul sumpti quatuor tantum rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circumstans, æquiualere quatuor rectis angulis, vt multi auctores asserunt: quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modo constat, quotlibet lineas rectas se inuicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales quatuor rectis.

f 9. pro.

EX

EX PROCLO.

SI ad aliquam rectam lineam, ad eiusque signum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt.

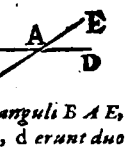


EX puncto C, recta AB, in diuersas partes egrediantur duæ rectæ CD, CE, facientes angulos ACE, BCD, inter se æquales: Vel etiam duos ACD, BCE. Dico duas CD, CE, efficere vnam lineam rectam. Quoniam enim angulus ACE, æqualis est angulo BCD; addito communi angulo BCE, a erunt duo anguli ACE, ECB, duobus angulis DCB, BCE, æquales: Sed b anguli ACE, ECB, sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo DCB, BCE, duobus erunt rectis æquales. Quamobrem CD, & CE, c erunt linea vna recta. Hoc autē, vt vides, cōuersum est propositionis decimaquintæ.

a 2. pro.
b 13. pri.
c 14. pri

EX PELETARIO.

SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi, & continuum coniunctæ.



EX puncto A, quatuor lineæ eductæ AB, AC, AD, AE, faciant duos angulos oppositos BAE, CAD, inter se æquales: Item duos BAC, DAE, inter se æquales. Dico tam BA, AD facere vnam lineam rectam, quam CA, AE. Quoniam æquales sunt anguli BAE, CAD, si æquales illis addantur anguli BAC, DAE, d erunt duo anguli BAE, BAC, æquales duobus angulis CAD, DAE. Tam ergo illi, quam hi, dimidium sunt quatuor angulorum circa punctum A, consistentium: At hi quatuor æquales sunt quatuor rectis, per 2. coroll. præcedentis propos. Igitur duo anguli BAE, BAC, æquales sunt duobus rectis; e atque adeò CA, AE, vnam efficient lineam rectam. Eodem pacto ostendetur, duas BA, AD, vnam rectam efficere lineam. Nam eadem ratione erunt duo anguli BAE, EAD, æquales duobus angulis DAC, CAB. Quare, vt primus, concludetur propositum. Peleterius autem demonstrat hoc idem ratione ducente ad id, quod fieri nequit. Nos tamen demonstrationem nostram ostensiuam eius demonstrationi iure optimo præposuimus.

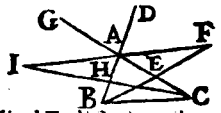
d 2. pro.
e 14. pri.

XVI.

THEOR. 9. PROPOS. 16.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito, maior est. TRIAN.

TRIANGVLI A B C, latus B A, producatur ad D. Dico angulum externum D A C, maiorem esse interno, & opposito A C B, itemque maiorem interno, & opposito A B C. Diuidatur *a* enim A C, bifariam in E; & ex B, per E, extendatur recta B E F, ita vt E F, *b* abscissa sit æqualis rectæ E B; ducaturq; recta F A. Quoniam igitur latera C E, E B, trianguli C E B, æqualia sunt lateribus A E, E F, trianguli A E F, vtrumque vtrique, per constructionem; Sunt autem & anguli ad E, dictis lateribus comprehensi, *c* inter se æquales, cùm sint circa verticem E, & oppositi: Erit *d* basis C B, æqualis basi A F, & angulus E C B, angulo E A F; Est autem angulus D A C, externus maior angulo E A F, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus D A C, maior erit interno, & oppositio angulo A C B. Quod si latus C A, producatur ad G; & A B, diuidatur bifariam in H; extendaturque recta C H I, vt H I, æqualis sit rectæ H C, & ducatur recta I A: demonstrabitur eadem prorsus ratione, angulum externum G A B, maiorem esse interno angulo, & oppositio A B C; Est autem *e* angulus D A C, angulo G A B, æqualis, cùm lineæ B D, C G, se mutuò secent in A. Igitur & angulus D A C, maior erit interno & oppositio angulo A B C. Est autem idem angulus D A C, maior quoque ostensus angulo interno & oppositio A C B. Cuiuscunque ergo trianguli vno latere producto, &c. Quod demonstrandum erat.



ato. primi.

b 3. primi.

c 15. primi.

d 4. primi.

e 15. primi.

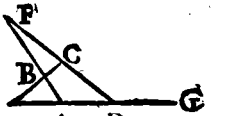
SCHOLIVM.

NON dixit Euclides, angulum externum D A C, maiorem esse angulo B A C, interno, qui sibi est deinceps; sed solùm magnitudine superare vtrumlibet A C B, A B C, internorum, sibiq; oppositorum: quoniam externus angulus æqualis potest esse angulo interno sibi deinceps, quando scilicet externus rectus est. Tunc enim necessario is, qui sibi est deinceps, rectus quoque erit: Potest & esse minor, quando nimirum est acutus. Hoc enim posito, angulus illi deinceps obtusus erit. Solum ergo, quando obtusus erit externus, superabit internũ sibi deinceps; Hic enim necessariò acutus existet. Quæ omnia facilè colligunt ur ex propos. 13. per quam angulus externus, & internus illi deinceps, æquales sunt duobus rectis.

ID verò, quod in scholio propos. 6. huius libri nos demonstraturos recepimus, nimirum hanc propositionem non posse conuerti; cum & vno latere figura quadrilatera producto, externus angulus quolibet interno, & oppositio possit esse maior; hac ratione absoluemus.

SIT figura quadrilatera A B C D, cuius angulus B A D, obtusus, & A B C, rectus constituatur, hac tamen lege, vt recta A B, D C, producta ad partes B, & C, in puncto E, necnon & recta D A, C B, ad partes

partes A & B, in puncto F, coeant. Quod quidem fiet, si constituatur triangulum ADE, obtusangulum, & producta D A, versus A, ducatur ex quouis puncto F, ad A E, perpendicularis FB, secans latus D E, in C. Dico, si A D, producatur ad G, angulum externum C D G, maiorem esse quolibet trium internorum B A D, A B C, B C D, sibi oppositorum. Cum enim A D E, triangulum sit, a erit angulus externus E D G, maior interno opposito D A E. Rursus cum D A B, obtusus maior sit recto A B C, maior quoq; multo erit E D G, ipso A B C. Postremo, quia & in triangulo C D F, b angulus externus C D G, maior est interno, & opposito F C D; manifestum est, in quadrilatero A B C D, externum angulum C D G, maiorem esse internis, & oppositis B A D, A B C, B C D. Quamobrem propositio hac 16. conuerti nequit, quippe cum eius antecedens, & consequens non reciprocentur, vt demonstratum est.

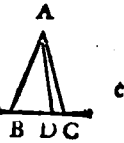


a 16. pri.

b 16. pri.

EX PROCLO.

SEQVITVR ex hac propositione, ab eodem puncto ad quamtandemq; lineam rectam non posse duci plures lineas rectas, quàm duas inter se æquales. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad lineam B C, tres lineæ rectæ æquales A B, A C, A D. Quoniam igitur latera A B, A C, sunt æqualia, c erunt anguli A C B, & A B C, æquales super basin B C. Rursus quia latera A B, A D, sunt æqualia, d erunt anguli A D B, & A B D, super basin B D, æquales. Quare cum vterque angulus A C D, & A D B, æqualis sit angulo A B C, e erit angulus A D B, æqualis angulo A C D, externus interno opposito, quod est absurdum, cùm per hanc 16. propos. externus interno maior sit. Non ergo plures lineæ rectæ, quàm duæ, inter se æquales, ex A, ad B C, possunt duci. Quod est propositum.



c 5. pri.

d 5. pri.

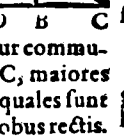
e 1. prop.

xvij.

PROBL. 10. PROPOS. 17.

CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.

Sit triangulum A B C; Dico duos angulos A B C, & A C B, minores esse duobus rectis; Itè duos C B A, & C A B; Iteḿque duos B A C, & B C A. Producantur enim duo quæuis latera, nempe C B, C A, ad D, & E. Quoniam igitur f angulus A B D, externus maior est interno & opposito angulo A C B; si addatur communis angulus A B C, g erunt duo anguli A B D, A B C, maiores duobus angulis A B C, A C B: h Sed A B D, A B C, æquales sunt duobus rectis. Igitur A B C, A C B, minores sunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli C B A, & C A B, minores duobus rectis. Nã cùm angulus externus A B D, i maior sit angulo C A B,



f 16. pri.

g 4. prop.

h 13. pri.

i 16. pri.

a 4.pro. interno, & oppoſito; *a* erunt, appoſito communi angulo A B C, duo anguli A B D, A B C, maiores duobus angulis C A B, C B A.
b 13.pri. Cùm ergo *b* duo illi duobus rectis ſint æquales, erunt hi alij duo duobus rectis minores. Non ſecus oſtendemus, duos B A C, B C A, duobus eſſe rectis minores. Cùm enim angulus externus B A E,
c 16.pri. *c* maior ſit interno & oppoſito angulo B C A; ſi apponatur com-
d 4.pro. munis angulus B A C, *d* erunt duo anguli B A E, B A C, duobus
e 13.pri. angulis B C A, B A C, maiores: ac proinde cùm illi duo *e* ſint duobus rectis æquales, erunt duo hi minores duobus rectis. Cuiuſcunque igitur trianguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

EX PROCLO.

HINC perſpicuum eſt, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non poſſe deduci plures lineas perpendiculares, quàm duas. Si



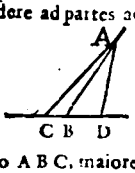
enim fieri poteſt, ducantur ex A, ad rectam B C, duæ perpendiculares A B A C. Erunt igitur in triangulo A B C, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cùm
f 17.pri. *ſint duo recti, quod eſt abſurdum.* f *Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque oſtenſi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendiculares, quàm una, ex A, ad B C, deduci poſſunt. Quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM I.

CONSTAT etiam ex his, In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtuſus, reliquos eſſe acutos, ceu monuimus defin. 26. huius lib. Cùm enim per hanc propoſ. duo quilibet anguli ſint duobus rectis minores, neceſſe eſt, ſi vnus fuerit rectus, vel obtuſus, quemcunque reliquorum eſſe acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores eſſe fateamur.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR etiam ex hac propoſ. ſi linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum acutum, & obtuſum alterum, lineam perpendicularem ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demiſſam cadere ad partes acuti anguli: Faciat enim recta A B, cum recta C D, angu-



los inæquales, nempe A B D, acutum, & A B C, obtuſum, demittatur que ex puncto A, quocunque ad C D, perpendicularis A D. Dico A D, cadere ad partes anguli acuti A B D. Nam ſi non cadit ad partes acuti anguli A B D, cadat ſi fieri poteſt, ad partes anguli obtuſi A B C. Igitur duo anguli A D C, A C B, obtuſus & rectus, in trian-
g 17.pri. gulo A B C, maiores ſunt duobus rectis; *g* ſed & duobus rectis ſunt minores, quod eſt abſurdum. Non ergo ex A, perpendicularis ad C D, deducta cadit ad partes anguli obtuſi. Quare ad partes acuti anguli cadet.

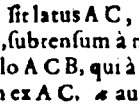
COROLLARIVM III.

PARI ratione fit ex hac propoſ. manifeſtum omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli Iſoſcelis ſupra baſin, eſſe acutos.
h 5.pri. Nam *h* cum & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in Iſoſcele
i 17.pri. ſupra baſin ſint inter ſe æquales; *i* ſintq; ſimul tam illi duo, quàm hi duobus

bus rectis minores: erit quilibet illorum recto minor, hoc est, acutus. Si enim rectus foret, aut obtusus, essent ambo vel duobus rectis æquales, aut maiores.

THEOR. 11. PROPOS. 18. XVIII.

OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

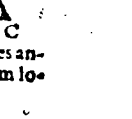


IN triangulo A B C, sit latus A C, maius latere AB. Dico angulum A B C, subtensum à maiori latere A C, maiorem esse angulo A C B, qui à minori latere AB, subtenditur. Nam ex A C, *a* auferatur A D, æqualis ipsi A B, & ducatur recta B D. Quoniã igitur duo latera A B, A D, æqualia sunt per constructionẽ, *b* erunt anguli A B D, A D B, æquales: Est autem *c* angulus A D B, maior angulo A C B. Igitur & angulus A B D, maior erit angulo A C B. Quamobrem cùm *d* angulus totus A B C, maior adhuc sit angulo A B D; erit angulus A B C, multò maior angulo A C B. Eadem ratione, si latus A C, maius ponatur latere B C, ostendens angulum A B C, maiorem esse angulo B A C; si nimirum ex C A, abscindatur linea æqualis ipsi C B, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit; Quod demonstrandum erat.

a 3. pri.
b 5. pri.
c 16 pri
d 9. pro.

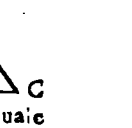
COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, omnes tres angulos trianguli scaleni esse inæquales, vt monuimus defin. 15. huius lib. Sit enim triangulum scalenum A B C, cuius maximum quidem latus A C, minimum autem B C, & medium locum habens A B. Dico eiusdem omnes angulos inæquales esse. Cùm enim latus A C, ponatur maius latere A B, erit per hanc propos. angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus A B, latere B C, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus verò A, & C, medium locum inter vtrumque tenens.



THEOR. 21. PROPOS. 19. XIX.

OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.



IN triangulo A B C, angulus B, maior sit angulo C. Dico latus A C, subtendens maiorem angulum B, maius esse latere A B, quod angulum minorem C, subtendit. Si enim latus A C, maius non est latere A B, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur A C, æquale esse ipsi A B, *e* erit angulus B, æqualis angulo C; Est autem maior per hypothesin, quod est absurdum. Si verò A C, minus esse dicatur latere A B, erit angulus B, subtensus à minore latere A C, minor angulo C, subtenso à maiore latere A B; Ponitur autem maior, quod magis est absurdum. Cùm igitur A C, latus

e 5. pri.

neque æquale sit lateri AB, neque minus eo, erit maius. Eadem ratione probabitur, latus AC, maius esse latere BC, si angulus B, maior esse concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur; Quod demonstrandum proponebatur.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propos. omnium rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcunque ductarum, eam, quæ perpendicularis est, esse minimam. Ducantur enim ex puncto A, ad rectam BC, quotcunque lineæ AD, AE, AF, & aliæ, quarum AD, sola sit perpendicularis ad BC, & nulla alia, cùm ex eodem puncto ad eandem rectam sola vna perpendicularis duci possit, vt ex Proclo ad propos. 16. demonstrauimus.



Dico omnium minimam esse AD. Nam in triangulo AED, cum duo anguli ADE, AED, a sint duobus rectis minores, ponaturque ADE, rectus; erit AED, acutus. Quare b maius erit latus AE, latere AD. Eodem modo ostendemus, omnes alias rectas maiores esse recta AD: ac proinde perpendicularis AD, omnium erit minima.

a 17. pri.
b 19. pri.

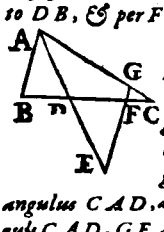
EX PROCLO.

POSSVMVS hoc idem theorema ostendere affirmatiua demonstratione, sine adminiculo præcedentis, si tamen prius demonstretur hoc sequens theorema.

SI trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansque angulum recta linea ad basin ducta in partes inæquales ipsam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento coincidit, minus verò, quod cum minori.

TRIANGVLI ABC, angulus BAC, diuidatur bifariam per rectam AD, quæ secet basin BC, in partes inæquales, maiusque segmentum sit DC. Dico latus AC, maius esse latere AB. Producatur enim AD, ad E, c *vt sit DE, æqualis ipsi AD. Deinde ex maiori segmento DC, auferatur recta DF, æqualis minori segmento DB, & per F, ex E, extendatur recta EFG. Quoniam igitur latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia sunt lateribus ED, DF, trianguli EDF, & trumq; vtrique, per constructionem; sunt autem &* d *anguli ADB, EDF, dictis lateribus contenti æquales:* e *Erunt bases AB, & EF, æquales, & angulo BAD, angulum EFD, æqualis: Est verò &* f *angulus CAD, angulo BAD, æqualis, per hypothesin: Igitur* g *anguli CAD, GEA, trianguli AGE, æquales erunt, & ideoq; latera AG, EG, æqualia erunt. Est autem recta AC, maior quàm AG: quare & AC, maior erit, quàm EG. Et quia EG, maior est, quàm*

c 3. pri.
d 15. pri.
e 4. pri.
f 1. prom.
g 6. pri.



quàm EF, erit & AC, multò maior, quàm EF. Cùm igitur demonſtratum ſit rectam EF; æqualem eſſe rectæ AB, erit AC, latus maius latere AB, quod erat oſtendendum.

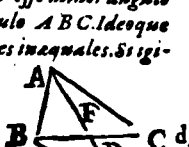
HOC oſtenſo theoremate, ita propoſitio 19. demonſtrabitur. In triangulo ABC, angulus ABC, maior ſit angulo C. Dico latus AC, maius eſſe latere AB. Diuiſa enim recta BC (ſuper quam conſtituti ſunt dicti anguli inæquales) bifariam in D, ex A. per D. extendatur recta AD F, a & ſit DE. æqualis ipſi AD: ducaturque recta BE. Quoniam igitur latera AD, DC, trianguli ADC, æqualia ſunt lateribus ED, DB, trianguli EDB, & trumque & trique, per conſtructionem, b ſunt autem & anguli ADC, EDB, dicto comprehenſi lateribus æquales: c Erunt baſes AC, & BE, æquales, angulusq; ACD, angulo EBD, æqualis: Et quia angulus ACD, ponitur eſſe minor angulo ABC, erit & angulus EBD, minor eodem angulo ABC. Ideoque angulus ABE, per rectam BD, diuidetur in partes inæquales. Si igitur bifariam ſecetur per rectam BF, cadet BF, ſupra ED, eo quòd angulus ABD, maior ſit angulo EBD. Quia verò EF, d maior eſt quàm ED, & ED, poſita eſt æqualis ipſi AD, erit EF, maior quàm AD. e Sed adhuc AD, maior eſt quàm AF. Multò igitur maior erit EF, quàm AF. Itaque quia recta BF, diuidens angulum ABE, bifariam, ſecat baſin AE, inæqualiter in F, eſt q; maius ſegmentum EF, minus autem AF; erit per theorema à Proclo proximè demonſtratum, latus BE, maius latere AB. Oſtenſum eſt autem BE, æquale eſſe lateri AC. Igitur & AC, latus latere AB, maius erit. Quod erat demonſtrandum.



a 3. pri.

b 15. pri.

c 4. pri.



d 9. pro.

e 9. prop.

SCHOLIVM.

Hæc propoſitio 19. conuerſa eſt propoſitionis 18. & perſpicuum eſt. Campanus autem duarum iſtarum propoſitionum ordinem prorſus inuertit, ita & ea, quæ apud nos eſt 18. apud ipſum ſit 19. & contra. Quarum & tramque oſtendit ducendo ad id, quod fieri nequit, cùm tamen Euclides propoſitionem 18. directè & oſtenſiuè confirmauerit, & ex dictis liquidò conſtat.

POTERIMVS quoque theorema à Proclo demonſtratum conuertere, hoc modo.

SI trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipſis contentum, ſecabit baſin in partes inæquales, maiuſque ſegmentum erit prope maius latus.

DVO latera AB, AC, trianguli ABC, ſint inæqualia; AC, maius, & AB, minus. Recta autem AD, diuidens angulum BAC,

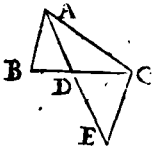
bifariam, secet basin B C, in D. Dico segmentum D C, maius esse segmento D B. Si enim non est maius, erit vel aequale, vel minus. Si di-

a 3. pri. *catur esse aequale; producatur A D, ad E,* a *vt D E, aequalis sit ipsi D A, ducaturq; recta E C. Quoniam igitur latera A D, D B, aequalia sunt lateribus E D, D C, vtrumque vtrique; A D, videlicet ipsi E D, per constructionem, & D B, ipsi D C, per hypothesin aduersarij.*

b 15 pri. *Sunt autem &* b *anguli ad D, dictis lateribus contenti aequales:* c *erit basis A B, basi E C, aequalis & angulo B A D, angulus C E D. Positus autem est & angulo B A D, angulus C A D, aequalis. Igitur*

c 4. pri.

d 5. pri.



e 1. prom *& anguli C E D, C A D, aequales erunt.* d *Ideoq; latus A C, lateri E C, aequale. Cùm igitur ostensum sit, lateri E C, aequale esse quoq; latus A B,* e *erunt latera A C, A B, aequalia; quod est absurdum, quia A C, maius ponebatur, quàm A B. Nõ erit igitur segmentum D C, segmento D B, aequale. Quod si D C, dicatur esse minus, & D B, maius; erit per theorema Procli, latus A B, maius latere A C. Ponebatur autem minus, quod multò magis est absurdum. Non igitur minus erit D C, quàm D B. Quare erit necessariò maius.*

EODEM modo demonstrari poterit hoc theorema.

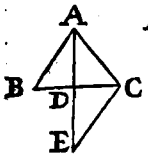
SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoque secet, erunt duo latera angulum continentia inter se æqualia: Quod si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.

PRIMVM recta A D, secans angulum B A C, bifariam diuidat quoque basin B C, in D, bifariam. Dico latera A B, A C, inter se aequalia esse. Hoc autem demonstrabimus eadem ratione, qua in praecedenti theoremate ostensum fuit, latus A C, aequale esse lateri A B, si D C, segmentum segmento D B, aequale ponatur, dummodo figuram eodem modo construas. Cùm enim latera A D, D B, aequalia sint lateribus E D,

f 15 pri. *D C,* f *& anguli ad D, dictis lateribus contenti*

g 4 pri. *aequales;* g *erunt bases A B, E C, aequales, & angulus C E D, angulo B A D, hoc est, angulo C A D,*

h 6. pri. *aequalis. Quare* h *A C, aequalis erit ipsi E C, hoc est, ipsi A B.*



DEINDE sint latera A B, A C, aequalia, & recta A D, secans basin B C, in D, diuidat angulum B A C, bifariam. Dico segmentum D C, aequale esse segmento D B. Cùm enim latera A D, A B,

i 4. pri. *aequalia sint lateribus, A D, A C, vtrumque vtrique, & anguli quoque ad A, contenti dictis lateribus aequales per hypothesin,* i *erunt bases B D, D C, aequales.*

THEOR.

THEOR. 13. PROPOS. 20. xx

OMNIS trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.

SIT triangulum A B C. Dico quælibet eius duo latera, nempe A B, A C, simul maiora esse reliquo latere B C. Producatur vnum ex illis, vt C A, vsque ad D, a sitque recta A D, æqualis alteri lateri non producto A B, & ducatur recta D B. Quoniam igitur duo latera A B, A D, æqualia inter se sunt, per constructionem, b erunt anguli A B D, A D B, æquales inter se: Est autem angulo A B D, c maior angulus C B D. Igitur & angulus C B D, maior erit angulo A D B. In triangulo ergo C B D, latus C D, oppositum maiori angulo C D B, d maius erit latere B C, quod minori angulo C D B, opponitur. Cùm igitur duo latera A B, A C, simul æqualia sint ipsi C D, (si enim æqualibus A B, A D, commune addatur A C, e fient tota æqualia; nimirum linea composita ex A B, A C, & linea composita ex A D, A C) erunt quoque latera A B, A C, simul maiora latere B C. Eodem modo demonstrabitur, quælibet alia duo latera maiora esse reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, &c. Quod demonstrandum erat.



a 3. pri.
b 5. pri.
c 9. prop
d 19. pri.
e 2. prop

EX PROCLO.

ALITER hoc theorema à familiaribus Heronis, & Porphyrij demonstratur, nullo latere producto, hac ratione. Sit probandum duo latera A B, A C, trianguli A B C, maiora esse latere B C. Dividatur angulus B A C, illi lateribus contentus f *bifariam per rectam A D. Quoniam igitur trianguli C D A, latus C D, protractum est ad B,* g *erit angulus externus B D A, maior interno & opposito C A D. Igitur & maior angulo B A D. Quare in triangulo A B D, latus A B, maiori angulo A D B, oppositum* h *maius erit latere B D, quod minori angulo B A D, opponitur. Eadem ratione ostendetur, latus A C, maius esse quàm C D, quia angulus C D A,* i *maior est angulo B A D, hoc est, angulo C A D, &c. Quamobrem duo latera A B, A C, maiora erunt latere B C. Eademq; est ratio quorumcunque duorum laterum, si angulus ipsis comprehensus bifariam secetur.*

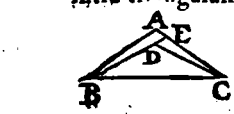


f 9. pri.
g 16. pri.
h 19. pri.
i 16. pri.

THEOR. 14. PROPOS. 21. xxj

SI super trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt.

IN triangulo A B C, ſuper extremitates B, & C, lateris B C, intra triangulum conſtituantur duæ rectæ lineæ B D, C D, in puncto D, concurrentes. Dico B D, C D, ſimul minores eſſe duobus lateribus B A, C A, ſimul; At verò angulum B D C, maiorem angulo BAC. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe B D, ad punctum E, lateris C A. Quoniam igitur in trian-



a 20. pri. gulo B A E, duo latera B A, A E, a maiora ſunt latere B E, ſi ad-
b 4. pro. datur commune E C, b erunt B A, A C, maiora quàm B E, E C.
c 20. pri Rurſus quia in triangulo C E D, duo latera C E, E D, c maiora
d 4. pron ſunt latere C D; ſi commune apponatur D B, d erunt C E, E B, maiora quàm C D, D B. Oſtenſum iam verò fuit, A B, C A, maiora eſſe quàm B E, E C. Multò igitur maiora erunt B A, C A, quàm B D, C D, quod primò proponebatur. Præterea, quoniam
e 16. pri. angulus B D C, e maior eſt angulo D E C, externus interno; & angulus D E C, angulo B A C, maior quoque eſt, eandem ob cauſam: Erit angulus B D C, multò maior angulo B A C; quod ſecundò proponebatur. Si igitur ſuper trianguli vno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

QVAM rectè Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum conſtitutas, duci debere ab extremitatibus vnius lateris, apertè intelligi poteſt ex eo, quod mox ex Proclo demonſtrabimus; in triangulis videlicet rectangulis, vel etiam amblygonijs, intra triangulum conſtitui poſſe duas lineas ſuper vnum latus circa angulum rectum, vel obtuſum, quarum quidem vna ab extremitate dicti lateris, altera verò à quouis puncto prope aliud extremum lateris eiuſdem educitur, quæ maiores ſint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulis ſcalenis eodem modo ſuper maximum latus duas rectas intra triangulum conſtitui poſſe, quæ minorẽ comprehendant angulum, &c.

EX PROCLO.

SIT triangulum habens exempli gratia angulum A B C, obtuſum. Dico ab extremo C, & à quouis puncto, nempe à D, prope aliud extremum B, lateris B C, duci poſſe duas lineas intra triangulum ad aliquod punctum, quæ maiores ſint duobus lateribus B A, A C. Ducatur enim recta D A: Et quoniam in triangulo A B D, duo anguli A B D, A D B,



f 16. pri. f *minores ſunt duobus rectis. Ponitur autem A B D, maior recto, nempe obtuſus; erit A D B, minor recto,*
g 19 pri *ideoque minor angulo A B D. Quare latus A D,* g *maius erit late-*
h 3 pri. *re A B. Ex D A,* h *abſcindatur recta D E, æqualis rectæ A B. Et re-*
i 10 pri. *liqua linea A E,* i *bifariã diuidatur in F. Si igitur ab extremo C, ad F, re-*

F, recta ducatur C F, erunt duæ lineæ rectæ constitutæ C F, D F, intra triangulum maiores duobus lateribus B A, A C. Quoniã enim in triangulo A F C, duo latera A F, F C, a maiora sunt latere A C. Est autem recta A F, ipsi F E, æqualis, per constructionẽ; erunt C F, F E, maiores quoq; latere C A. Si igitur æqualia addantur E D, & A B, sient b *recta C F, F D, maiores lateribus C A, A B. Quod est propositum. Quod si ad F, ex B, extremo rectæ duceretur, essent duæ rectæ constitutæ C F, B F, minores duobus laterib. C A, A B, vt Euclides demonstrauit.* a 20. primi. b 4. primi.

RVRSVS sit triangulum scalenum A B C, cuius latus maximum B C, minimum A B. Ex B C, c *auferatur B D, æqualis rectæ A B, & ducatur A D, recta, ad cuius punctum quodlibet, vt ad E, ab extremo C, recta ducatur C E. Constituta igitur erunt intra triangulum duæ lineæ C E, D E, quæ minorem angulum comprehendunt eo, quem efficiunt duo latera A B, A C. Cum enim duo latera B A, B D, æqualia sint,* d *erunt duo anguli B A D, B D A, æquales: Sed B D A, angulus* e *maior est angulo C E D. Maior igitur erit & angulus B A D, angulo C E D. Quare multo maior erit totus angulus B A C, angulo C E D. Quod est propositum. Rectè igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum constitutas educi debere, ab extremis punctis vnius lateris, vt minores quidem sint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem verò complectantur angulum. Alias enim propositio vera non esset, vt iam est demonstratum.*



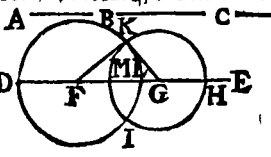
c 3. primi. d 5. primi. e 16. primi.

VERVM de constitutione duarum linearum intra triangulum, quæ maiores sint, vel æquales duobus lateribus, plura ostendemus ex Pappo ad propos. 34. huius lib.

PROBL. 8. PROPOS. 22. xxij.

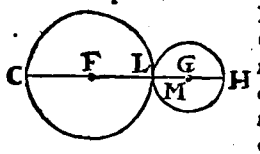
EX tribus rectis lineis, quæ sint tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua esse maiores omnifariam sumptas: quoniam vniuscuiusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt maiora.

TRES lineæ rectæ datæ sint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua sint maiores, (Alias ex ipsis non posset constitui triangulum, vt constat ex propos. 20. in qua ostensum fuit, duo quæuis latera trianguli reliquo esse maiora.) oporteat; constituere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex assumpta recta quauis D E, infinitæ magnitudinis, *f* abscindatur recta D F, æqualis rectæ A, Et ex reliqua F E, recta F G,

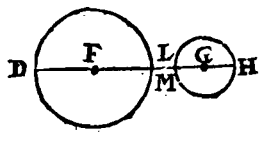


f 3. primi.

æqualis rectæ B; & ex reliqua G E, recta G H, æqualis rectæ C. Deinde centro F, interuallo verò F D, circulus describatur D I K. Item centro G, interuallo autem G H, alius circulus describatur H I K, qui necessario priorem secabit in punctis I, & K, (eum enim duæ F D, G H, maiores ponantur recta F G; si ex F E, sumatur recta F L, æqualis ipsi F D: & ex G D, recta G M, æqualis ipsi G H, cadet punctum M, inter L, & D. Si namque M, caderet in



L, punctum, essent G L, F L, hoc est, G H, & F D, æquales rectæ F G, Si verò M, caderet inter G, & L, essent eædem duæ F L, G M, hoc est, D F, G H, minores recta F G, quorum vtrumque est contra hypothesin. Id quod ex appositis figuris apparet) ex quorum quolibet, nimirum ex K, ducantur ad puncta, F, G, rectæ K F, K G, factumq; erit triangulum F G K, cuius latera dico æqualia esse datis rectis A B, & C. Cum enim recta F K, *a* æqualis sit rectæ F D, & recta A, per



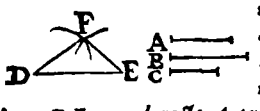
a 15 def. huius.

constructionem eidem F D, æqualis; *b* erit latus F K, rectæ A, æquale. Rursus quia G K, æqualis est ipsi G H, & recta C, eidem G H; erit quoque latus G K, rectæ C, æquale: Positum autem fuit per constructionem, reliquum latus F G, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera F K, F G, G K, tribus datis rectis A, B, C, æqualia sunt. Constituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.

b 1. *primi.*

PRAXIS.

SVMATVR recta D E, aqualis cuicunque rectarum datarum, nempe ipsi B, quam nunc volumus esse basin. Deinde ex D, ad interuallum recta A, arcus describatur: Item ex E, ad interuallum recta C, alter arcus secans priorem in F. Si igitur ducantur recta D F, E F, factum erit triangulum habens tria latera aqualia tribus datis lineis. Erit enim

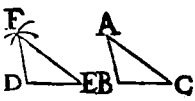


latus D F, aquale recta A, propter interuallum ipsius A, assumptum: & latus E F, ipsi C, propter assumptum interuallum C: D E, verò latus, acceptum est recta B, aquale, ab initio.

SCHOLIVM.

HAC arte cuicunque triangulo proposito alterum prorsus aquale & quoad latera, angulosq; & quoad aream ipsius, constituemus. Sit namque triangulum quodcunque A B C, cui aquale omni ex parte

parte est construendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas rectas datas A B, B C, C A, quarum qualibet duæ a maiores sunt reliqua. Deinde sumo rectam D E, æqualem vni lateri, nempe B C; & ex D, intervallo lateris A B, arcum describo, item alium ex E, intervallo reliqui lateris C A, qui priorem secet in F, &c.



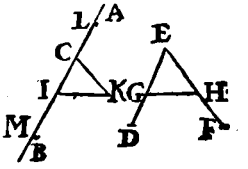
a 22. primi.

PROBL. 9. PROPOS. 23. xxiij.

AD datam rectam lineam, datumq; in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

DATA recta sit A B, datumque in ea punctum C, & datus angulus D E F. Oportet igitur ad rectam A B, in puncto C, angulum constituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis E D, E F, duo puncta vtcunque G, H, quæ recta G H, connectantur: Deinde *b* constituatur triangulum C I K, habens tria latera æqualia tribus rectis E G, G H, H E, ita vt C I, æquale sit ipsi E G; & C K, ipsi E H; & I K, ipsi G H. (Quod facile fiet, si C I, sumatur æqualis ipsi E G, & C L, ipsi E H, & I M, ipsi G H. Deinde ex centris C, & I, interuallis verò C L, & I M, circuli describantur secantes sese in K, &c.) Dico angulum C, æqualem esse angulo E. Quoniam enim duo latera C I, C K, æqualia sunt duobus lateribus E G, E H, vtrumque vtrique, & basis I K, basi G H, per constructionem; *c* erit angulus C, angulo E, æqualis: Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo F, &c. Quod facere oportebat.

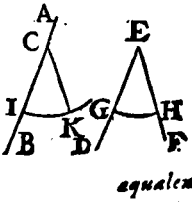
b 22. primi.



c 8. primi.

PRAXIS.

NON differt huius problematis praxis ab illa, quam in præcedente problemate tradidimus; propterea quod triangulum constituere oportet æquale alteri triangulo, & angulus dato angulo æqualis exhibeatur, & perspicuum est. Facilius tamen hac arte problema effigies. Sit linea data A B, punctumque in ea C, & angulus datus E. Centro igitur E, & intervallo quouis arcus describatur G H: Eodemque intervallo ex centro C, arcus describatur I K, sumaturque beneficio circini arcus I K, arcui G H, æqualis. Recta enim ducta C K, faciet angulum ad C,



æqualem

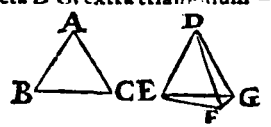
æqualem angulo E. Nam si ducerentur recta I K, G H, essent ipsæ æquales, propterea quod circino non variato utramq; distantiam I K, G H, accepimus. Cum ergo & duo latera I C, C K, æqualia sint duobus G E, E H, ob æqualia interualla, quibus arcus sunt descripti;
a 8. primi. *a erunt anguli I C K, G E H, æquales.*

CÆTERVM qua ratione ex puncto extra datam rectam proposito recta duci possit, qua cum data recta angulum constituat dato angulo rectilineo æqualem, docebimus ad propos. 31. huius lib.

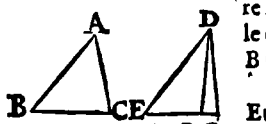
xxiiij. THEOR. 15. PROPOS. 24.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum verò angulo maiorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basin basi maiorem habebunt.

DVO latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia sint duobus lateribus D E, D F, vtrumq; vtrique, nempe A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; Angulus verò A, maior si angulo E D F. Dico basin B C, maiorem esse basi E F. Ad lineam enim D E, ad eiusque punctum
b 23. primi. D, *b* constituatur angulus E D G, æqualis angulo A; (cadetque recta D G, extra triangulum D E F, cum angulus E D F, minor ponatur angulo A) ponaturque D G, æqualis ipsi D F, hoc est, ipsi A C. Ducta deinde recta E G, cadet ea aut supra rectam E F; aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primum supra E F,

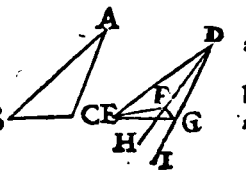


c 3. pri. ducaturque recta F G. Quia ergo latera A B, A C, æqualia sunt lateribus D E, D G, vtrumque vtrique, & angulus A, æqualis angu-
d 4. primi. lo E D G, per constructionem: *d* Erit basis B C, basi E G, æqualis.
e 5 pri. Rursus quia duo latera D F, D G, inter se sunt æqualia; *e* erunt
f 9. pro nun. anguli D F G, D G F, æquales: Est autem angulus D G F, *f* maior angulo E G F. Igitur & angulus D F G, eodem angulo E G F, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus E F G, eodem an-
g 19. primi gulo E G F. In triangulo igitur E F G, *g* maius erit latus E G, latere E F. Est autem ostensum E G, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoq; B C, quam E F. Quod est propositum.



CADAT deinde E G, in ipsam E F.
h 4. primi. Et quia rursus, vt prius basis E G, *h* æ-
c 9 pro nun. qualis est basi B C: & E G, *i* maior quam E F, quod est propositum.

CADAT tertio E G, infra E F, producanturque rectæ D F, D G, vsque ad H, & I, & ducatur recta F G. Erit autem rursus, vt
k 4. pri. prius *k* basis E G, basi B C, æqualis. Deinde quia duo latera D F, D G, æqua-



DG, æqualia ſunt inter ſe, per conſtructionem, *a* erunt anguli GFH, FGI, infra baſin FG, æquales: Eſt autem angulus FGI, *b* maior angulo FGE. Igitur & angulus GFH, eodem angulo EGE, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodem angulo FGE. In triangulo ergo EFG, *c* maius erit latus EG, latere EF. Eſt autem oſtenſum EG, æquale eſſe ipſi BC. Maior igitur erit quoque BC, baſis baſi EF. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat oſtendendum.

a 5. pri.

b 9. primum.

c 19. primi.

SCHOLIVM.

SI quis fortè roget, cur in 4. propoſitione Euclides ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia ſint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, & anguli contenti dictis lateribus æquales, concluſerit non ſolum æqualitatem baſium, verùmetiam triangulorum, & reliquorum angulorum; hic autem ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia ſint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, anguli verò lateribus illis comprehenſi inæquales, colligat tantùm inæqualitatem baſium, non autem triangulorum, & reliquorum angulorum: Huic reſpondendum eſt, neceſſario id ab Euclide perſtiſſimo Geometra eſſe factum. Nam ex antecedente huius theorematis ſemper conſequitur baſium inæqualitas, ita vt baſis illius trianguli, cuius angulus contentus lateribus aſſumptis eſt maior, ſuperet baſin alterius, cuius angulus minor exiſtit, vt demonſtratum eſt; non autem neceſſe eſt, triangulum illud maius hoc eſſe. Vt enim clariſſimè ex Proclo demonſtrabimus ad propoſ. 37. huius primi libri, Triangulum maiorem habens angulum aliquando æquale eſt triangulo minorem habenti angulum, aliquando verò minus eodem, & aliquando maius. Non igitur potuit in vniuerſum inferri, ex eo, quod angulus vnius trianguli maior eſt angulo alterius, triangulum etiam maius eſſe, cum modo æquale ſit, modo minus, & modo maius. Idem dici poteſt de angulis reliquis. Nam in prima figura huius theorematis angulus ABC, minor eſt ſemper angulo DEF; cum angulus DEG, (qui æqualis eſt per 4. propoſ. angulo ABC,) d minor ſit eodem angulo DEF, pars toto. In ſecunda autem figura, exiſtit quidem angulus ABC, angulo DEF, æqualis, per 4. propoſ. At verò angulus ACB, minor eſt angulo DFE, cum angulus DFE, e maior ſit angulo DGF, externus interno, & oppoſito; & angulus DGF, æqualis ſit angulo ACB. In tertia denique figura angulus ABC, maior quidem eſt angulo DEF, propterea quod angulus DEG, (æqualis exiſtens per 4. propoſ. angulo ABC,) f maior eſt eodem angulo DEF, totum parte. Sed angulus ACB, minor eſt angulo DFE.

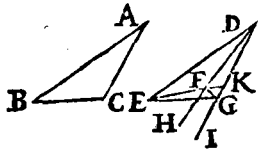
d 9. proeinum.

e 16. pri.

f 9. proeinum.

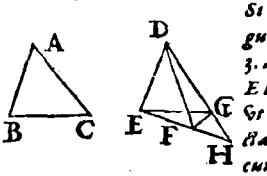
Nam ſi

Nam si recta EF, producatur secans rectam DG, in K, fiet angulus
a 16. pri mi. *DFE, a maior angulo DKE, externus interno; Est autem & angulus DKE, maior adhuc angulo DGE, externus quoque interno, & opposito. Multo igitur maior erit angulus DFE, angulo DGE,*



qui per 4. propos. æqualis est angulo ACB. Quod etiam constat ex 2. parte propos. 21. Nam interiores lineæ DF, EF, continent angulum maiorem angulo DGE, quem exteriores lineæ DG, EG, continent. Quare neque certi quicquam colligi potuit de inæqualitate reliquorum angulorum, cum modo unus altero sit maior, modo minor, & modo æqualis.

b 17. pri mi. *QVONIAM verò in triangulo DEF, duo anguli E, F, b semper minores sunt duobus rectis, erit necessario saltem alter eorum acutus. Si igitur ad partes acuti anguli (vt in 1. figura ad partes anguli DFE, in 2. verò & 3. ad partes anguli DEF.) fiat angulus EDG, æqualis angulo A, & reliqua fiant, vt in propos. dictum est, cadet semper ducta recta EG, supra punctum F. Nam*



c 13. pri mi. *cum anguli DFE, acutus sit, c erit ei*
d 19 pri mi. *deinceps, producto latere EF, obtusus. Producta ergo recta DG, secante latus EF, productum in H, d maior erit recta DH, latere DF, cum opponatur angulo obtuso in triangulo DFG; ac proinde recta EG, auferens DG, æqualem ipsi DF, cadet necessario supra F. Si namque vel per F, transiret, vel infra caderet, abscinderet ex DG, maiorem lineam latere DF; nimirum vel DH, vel maiorem, quam DH. Hoc si obseruetur, satis erit primus casus propositionis, qua fortassis causa fuit, vt Euclides apud Theonem primo casu contentus fuerit.*

XXV.

THEOR. 16. PROPOS. 25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, basin verò basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

DVO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, vtrumque vtrique, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; Basis autem BC, maior sit

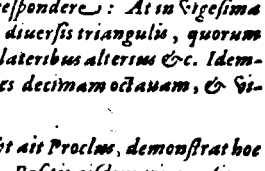
lor sit basę E F. Dico angulum A, maiorem esse angulo D. Si enim non est angulus A. maior angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur esse æqualis, cum etiam duo latera circa A, æqualia sint duobus circa D, vtrumque vtrique, per hypothesin; *a* erit & basis B C, æqualis basi B F; quod est absurdum; a 4. pri. Ponitur enim basis B C, basę E F, maior: Si verò angulus A, dicatur esse minor angulo D; erit, propter æqualitatem laterum circa istos angulos, basis E F, *b* maior basę B C; quod magis est absurdum, cum E F, ponatur esse minor quam B C. b 24 primi. Quare angulus A, cum neque possit æqualis esse angulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat ostendendum.



SCHOLIVM.

THEOREMA hoc conuersum est præcedentis. In eo enim ex maiori angulo demonstratum est, basin illi respondentem esse maiorem: In hoc autem ex maiori basi ostensum fuit, angulum illi respondentem maiorem esse. Differunt autem plurimum hæc duo theoremata, nempe Vigesimum quartum, & Vigesimum quintum, ab illis, quæ explicata sunt propositionibus decima octaua, & decima nona. Nam in decima nona demonstratum est, in vno eodemque triangulo maiori angulo maius latus respondere: At in Vigesima quarta, idem ostensum fuit in duobus diuersis triangulis, quorum duo latera vnius æqualia sunt duobus lateribus alterius &c. Idemque discrimen reperies inter propositiones decimam octauam, & Vigesimam quintam.

MENELAVS Alexandrinus, vt ait Proclus, demonstrat hoc idem theorema ostensiue, hac ratione. Positis eisdem triangulis, ex basę maiore B C, c abscindatur recta B G, æqualis basi minori E F. Fiat quoque angulus G B H, d æqualis angulo D E F, e & sit B H, æqualis ipsi B A, atque adeo ipsi D E. Ducta autem recta linea A H, ducatur quoque recta per G, ex H, secans A C, in I. Quoniam igitur duo latera B A, B H, æqualia sunt, f erunt anguli B A H, B H A, æquales. Rursus quia latera B G, B H, æqualia sunt lateribus E F, E D, vtrumque vtrique, & angulus G B H, æqualis, angulo

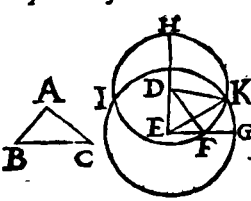


c 3. pri.
d 23 primi.
e 3. pri.
f 3. pri.

a 4. primi. angulo D E F, per conſtructionem: a erit baſis H G, baſi D F, atq; adeo ipſi A C, æqualis, angulusq; G H B, angulo E D F. Et quoniam recta H I, b maior eſt quam H G, quæ eſt oſtenſa æqualis ipſi A C, erit quoque maior H I, quam A C: Sed A C, c maior eſt adhuc, quam A I. Multo ergo maior erit H I, quam A I. Quare angulus I A H, d maior erit angulo I H A. Additis igitur duobus angulis B A H, B H A, qui oſtenſi ſunt æquales, fiet e totus angulus B A C, toto angulo B H G, maior: Sed angulus B H G, demonſtratus fuit æqualis angulo D. Maior igitur etiam erit angulus B A C, angulo D, quod eſt propoſitum. Quod ſi quando contingat, rectam A H, cadere extra triangulum, auferendi erunt anguli æquales B A H, B H A, &c. Vt reliquus fiat angulus B A C, maior reliquo angulo B H G. Quando autem recta A H, per punctum B, tranſit, nihil addendum erit, aut demendum, vt perſpicuum eſt.

b 9. pronun.
c 9. pronun.
d 18. pri.
e 4. pronun.

HERON autem idem ex eodem Proclo hoc modo demonſtrat. Poſitis eiſdem triangulis, producatur baſis minor E F, ad G, vt ſit E G, f æqualis baſi maiori B C. Deinde centro D, interuallo autem D F, deſcribatur circulus, producaturq; E D, ad H, in circumferentiam. Quoniam igitur D H, g eſt æqualis ipſi D F, erit quoque D H, æqualis ipſi A C. Additis igitur æqualibus D E, A B, h fient A C, A B, ſimul æquales toti H E: Sed A C, A B, i ſimul maiores ſunt, quam B C, atque adeo quam E G. Igitur & H E, maior erit, quam E G. Quare circulus deſcriptus ex centro E, & interuallo E G, interſecabit rectam E H, atque adeo circumferentiam prioris circuli in I, & K, punctis: ad K, autem ducantur rectæ D K, E K. Et quoniam duo latera A B, A C, æqualia ſunt duobus lateribus D E, D K, vtrumque vtrique, (eſt enim D K, æquale ipſi D F, per definitionem circuli: D F, autem poſitum eſt æquale lateri A C.) & baſis B C, baſi E K, æqualis: (cum E K, æqualis ſit ipſi E G, per definitionem circuli: E G, verò recta per conſtructionem facta ſit æqualis baſi B C.) k Erit angulus B A C, angulo E D K, æqualis: Sed angulus E D K, maior eſt l angulo E D F. Quare & angulus A, angulo E D F, maior exiſtet. Quod eſt propoſitum. Atque hac demonſtratio generalior eſt priore, cum omnibus caſibus conueniat.



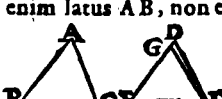
f 3. pri.
g 15 defin.
h 2. pronun.
i 20. primi.
k 8. pri.
l 9. pronun.

THEOR. 17. PROPOS. 26.

xxvj. SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſeu quod vni æqualium angulorum ſubtenditur: & reliqua latera

latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

SINT duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales duobus angulis E, & E F D, trianguli D E F, vterque vtrique, hoc est, B, ipsi E, & C, ipsi E F D; Sitque primo latus B C, quod angulis B, & C, adiacet, lateri E F, quod angulis E, & E F D, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera A B, A C, reliquis lateribus D E, D F, æqualia esse, vtrumque vtrique, hoc est, A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F, ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus A B, non est æquale lateri D E, sit D E, maius, à quo [a] abscindatur recta linea E G, æqualis rectæ lineæ A B, ducaturque recta G F. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus G E, E F, vtrumque vtrique, & anguli B, & E, æquales per hypothesin: [b] Erit angulus C, æqualis angulo E F G. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo E F D. Quare & angulus E F G, eidem angulo E F D, æqualis erit, pars toti; Quod est absurdum. Non est igitur latus A B, inæquale lateri D E, sed æquale. Quamobrem, cum latera A B, B C, æqualia sint lateribus D E, E F, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales; [c] erunt & bases A C, D F, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum.

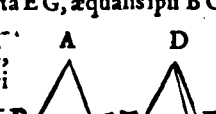


a 3. pri.

b 4. pri.

c 4. pri.

SINT deinde latera A B, D E, subtendentia æquales angulos C, & E F D, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera B C, C A, reliquis lateribus E F, F D, esse æqualia, vtrumque vtrique, hoc est, B C, ipsi E F, & C A, ipsi F D; reliquumque angulum A, reliquo angulo D, æqualem. Si enim latus B C, non est æquale lateri E F, sit E F, maius; [d] ex quo sumatur recta E G, æqualis ipsi B C, ducaturque recta D G. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus D E, E G, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales, per hypothesin; [e] Erit angulus C, angulo E G D, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo E F D, æqualis; Igitur & angulus E G D, angulo eidem E F D, æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum. [f] Est enim maior. Non ergo est latus B C, lateri E F, inæquale. Quocirca, vt prius, colligetur institutum ex 4. propos huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat.



d 3. pri.

e 4. pri.

f 16. pri.

COROLLARIVM.

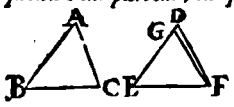
SEQVITVR ex demonstratione huius theorematis, tota etiam

 triangula,

triangula, quoad areas, esse æqualia. Nam si latera A B, B C, lateribus D E, E F, æqualia sint, vt ostensum fuit, contineantque ex hypothesi angulos
a 4. pri. æquales B, E, a erunt tota quoque triangula æqualia inter se.

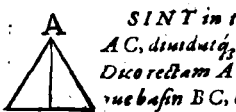
SCHOLIVM.

PRIOR huius theorematis pars conuersa est 4. propositionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulorum ipsis contentorum, collecta fuit æqualitas basium, & angulorum super bases. Nam in priori parte huius theorematis ex æqualitate basium B C, E F, & angulorum super has bases, demonstratum est, reliqua latera vnius trianguli reliquis lateribus æqualia esse, reliquumque angulum reliquo angulo, &c. Quod quidem alia nos ratione tum demonstrauimus ad propositionem octauam huius lib. quem modum eo loco monuimus.



HOC loco demonstrandum est theorema quoddam admodum necessarium, & perutile rebus Geometricis, videlicet.

IN triangulo æquilatero, siue Isoscele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenso ducta, diuidensque vel angulum, vel basin bifariam, perpendicularis est ad basim, & si quidem angulum bifariam diuidat, secabit quoque basin bifariam. Si verò basim secet bifariam, diuidet quoque angulum bifariam. Et contra; linea perpendicularis ad basin ducta diuidit & basin, & angulum bifariam.



SINT in triangulo A B C, duo latera æqualia A B, A C, diuidatque primum recta A D, angulum A, bifariam. Dico rectam A D, esse ad B C, perpendicularem, secare-que basin B C, bifariam. Cum enim duo latera A B, A D,
b 4. pri. *duobus lateribus A C, A D, sint æqualia, angulosque æquales contineant, ex hypoth. si, b erunt & bases B D, C D, æquales, & anguli ad D, atque adeo recti.*

DIVIDAT deinde recta A D, basin B C, bifariam. Dico rectam A D, ad B C, perpendicularem esse, & angulum A, secare bifariam. Cum enim duo latera B D, D A, duobus lateribus C D, D A, æqua-
c 8. pri. *lia sint, & basis A B, basi A C, ex hypothesi, c erunt quoque anguli ad D, æquales, atque adeo recti, ac proinde ex coroll. propos. 8. huius lib. & anguli ad A, æquales erunt.*

SED iam recta A D, sit ad B C, perpendicularis. Dico & basim
d 5. pri. *B C, & angulum A, secari bifariam. d Erunt enim anguli B, C, supra basin B C, æquales. Itaque quoniam duo anguli D, B, trianguli A B D, duobus angulis D, C, trianguli A C D, æquales sunt, vterque vtrique,*

trique, latumq; AD, æqualibus oppositum angulis B, C, commune; a erunt & reliqua latera BD, CD, æqualia, & reliqui anguli ad A, æquales. Quod erat demonstrandum. a 26. primi.

SED & hoc theorema verum est.

TRIANGVLVM, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad basim perpendicularis diuidit vel basim, vel angulum bifariam, habet duo latera dictum angulum comprehendentia æqualia: Et si quidem basis diuidatur bifariam, angulus quoq; bifariam secabitur: si verò angulus bifariam secetur, basis quoque diuidetur bifariam.

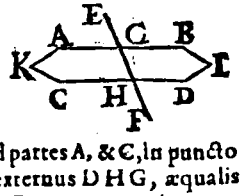
IN eodem triangulo ABC, sit AD, ad BC, perpendicularis, diuidatq; primum basin BC, bifariam. Dico & latera AB, AC, esse æqualia, & angulos ad A, æquales. Quoniam enim duo latera BD, DA, duobus lateribus CD, DA, æqualia sunt, angulosq; comprehendunt æquales, nempe rectos; b erunt quoque & bases AB, AC, & anguli ad A, æquales. Quod est primum. b 4. primi.

SECET deinde perpendicularis AD, angulum A, bifariam. Dico & latera AB, AC, æqualia esse, & rectas BD, CD. Quoniam enim duo anguli D, A, trianguli ABD, duobus angulis D, A, trianguli ACD, æquales sunt, latusq; AD, illis adiacens, commune; c erunt quoq; & latera AB, AC, & latera BD, CD, æqualia. Quod est secundum. c 26. primi.

THEOR. 18. PROPOS. 27. xxvij.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ lineæ.

IN duas rectas AB, CD, incidens recta EF, faciat angulos alternatim AGH, DHG, inter se æquales. Dico lineas AB, CD, esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, coibunt tandem, si producantur infinitè. Si namque non coirent vnquam, parallelæ essent, ex parallelarum definitione. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum est GIH, (cum AB, recta cõtinuata sit, item recta CD, vsq; ad punctum I;) & angulus AGH, positus est æqualis angulo DHG; erit externus angulus AGH, æqualis interno, & opposito DHG, quod est absurdum; d quoniã externus interno maior est. Quod si AB, CD, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rursus eadem ratione angulus externus DHG, æqualis

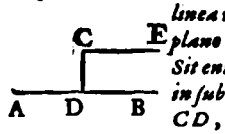


d 16. primi.

interno, & oppoſito A G H, quod eſt abſurdum. Non igitur coibunt lineæ A B, C D. Quare parallelæ erunt. Eodem modo, ſi ponantur anguli alterni B G H, C H G, æquales, demonſtrabitur, lineas A B, C D, eſſe parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

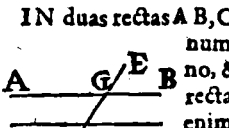
NECESSE eſt, vt linea, quæ dicuntur parallela, in eodem exiſtant plano, & ex definitione conſtat: Quare non ſatis eſt, duos angulos alternos æquales inter ſe eſſe, vt duæ linea probentur eſſe parallelæ, niſi ponatur, eas in eodem, eodemq́; exiſtere plano. Fieri enim poteſt, vt linea recta incidens in duas rectas non in eodem plano exiſtentes, faciat alternos angulos æquales. Sit enim C D, perpendicularis ad A B, rectam, quæ in ſubiecto plano exiſtit; & ex C, in alio plano, ad C D, ducatur alia perpendicularis C E, ita vt punctum E, intelligatur in ſublimi. Quo poſito, perſpicuum eſt, rectam C D, incidentem in rectas C E, A B, facere duos angulos E C D, A D C, alternos æquales, cum ſint recti; & tamen C E, A B, non ſunt parallelæ, quod non in eodem exiſtant plano. Non appoſuit autem Euclides in propoſitione hanc conditionem; in eodem plano exiſtentes: ſicut neque in ſubſequentibus; quoniam cum in prioribus ſex libris agatur de planis duntaxat, vt ſupra diximus, omnia intelligenda ſunt neceſſario in eodem plano exiſtere. In vndecimo verò libro, & aliis, qui ipſum ſequuntur, monebit ſemper, lineas aliquas in eodem eſſe plano, vel in diuerſis planis, quia in illis libris differitur de ſolidis, in quibus diuerſa plana conſiderari poſſunt. Quod idem dicendum eſt de puncto extra lineas, & ſuperficies, &c.



xxviij. THEOR. 19. PROPOS. 28.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulũ interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

IN duas rectas A B, C D, recta incidens E F, faciat primo externum angulum E G A, æqualem angulo interno, & oppoſito ad eaſdem partes G H C. Dico rectas A B, C D, eſſe parallelas. Quoniam enim angulo E G A, æqualis ponitur angulus G H C; & eidem angulo E G A, *a* æqualis eſt angulus H G B; *b* erunt anguli alterni G H C, H G B, æquales. Quare lineæ A B, C D, *c* parallelæ erũt. Idem oſtenderur, ſi angulus externus E G B, æqualis ponatur interno G H D.



a 15. *pri.*
b 1. *prænun.*
c 27. *primi.*

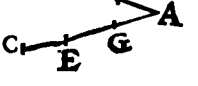
DEINDE

DEINDE faciat recta EF; angulos internos ex eadem parte, nempe AGH, CHG, duobus rectis æquales. Dico rursus rectas AB, CD, esse parallelas. Quoniam enim anguli AGH, CHG, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt autem & anguli AGE, AGH, a duobus rectis æquales; Erunt duo anguli AGH, CHG, a 13. pri. duobus angulis AGE, AGH, æquales. Ablato igitur communi angulo AGH, remanebit angulus AGE, externus angulo CHG, interno, & opposito ad eadem partes æqualis. Quare vt iam ostensum est, erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Idem ostendetur, si duo anguli BGH, DHG, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

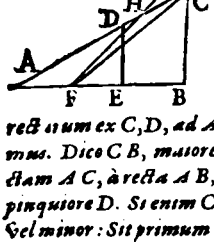
IAMDVDVM pronunciatum tertium decimum à Principiorum numero reiecimus. Cum igitur sequens propos. 29. cum multis aliis illis ita innitatur, vt sine eius auxilio demonstrari nequeat, operapretium erit illud hoc loco, ex hactenus demonstratis theorematibus, atque problematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, Geometrica demonstratione confirmare, vt in expositione dicti Axiomatis polliciti sumus. Primo autem loco demonstrationem Procli afferemus. Deinde idem nos pronunciatum magis accurate, atque euidentius demonstrabimus. Proclus igitur, antequam illud demonstret, duo præmittit. Primum est.

SI ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinitè producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.



EXEANT à puncto A, duæ rectæ AB, AC, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quam F, & G. Item puncta B, & C, plus quam D, & E, & ita deinceps, si producantur vltra rectalineæ AB, AC, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinitè ipsa producantur. Si enim nõn infinito spatio distarent, augeri posset eorum distantia; igitur & linea ipsa vltra produci, quod est absurdum, cum ponantur infinitè iam esse producta. Quare si dictæ lineæ AB, AC, producantur infinitè, ipsarum distantia excedet omnem finitam distantiam. Hoc pronunciato vsus est & Aristoteles lib. 1. de cælo, vbi demonstrauit, mundum non esse infinitum.

QVOD autem rectæ AB, AC, quo longius protrahantur, eo magis inter se distent, (Hoc enim Proclus sine demonstratione assumpsit, cum dixit puncta D, & E, in proxima figura plus inter se distare,



quam F, & G. Item B, & C, plus quam D, & E, &c.) hac ratione demonſtrabimus. Demittantur ex punctis C, D, vtcunque in rectam A C, acceptis, ad A B, perpendiculares C B, D E, quæ diſtantias punctorum C, D, à recta A B, mettentur, cum ſint minimæ omnium rectarum ex C, D, ad A B, ductarum, vt in coroll. propoſ 19. oſtendimus. Dico C B, maiorem eſſe, quam D E; ac proinde plus diſtare rectam A C, à recta A B, in puncto C, remotiore, quam in puncto propinquiore D. Si enim C B, non eſt maior, quam D E, erit vel æqualis, vel minor: Sit primum æqualis & recta A E, abſcindatur æqualis B F, ita vt punctum F, cadat vel inter A, & E, vel in E, vel denique inter E, & B, ducaturq; recta F C. Quoniam igitur duo latera A E, B D, trianguli A E D, duobus lateribus F B, B C, trianguli F B C, æqualia ſunt, vtrumque vtrique, angulosq; continent æquales, vtpote rectos: a *erunt & baſes A D, F G, & anguli D A E, C F B, inter ſe æquales. Igitur externus angulus G F B, interno D A E, æqualis erit;* b *quod eſt abſurdum. Vel cum externus angulus C F B, interno D A E, æqualis ſit,* c *parallelæ erunt A C, F C, quod etiam abſurdum eſt, cum in C, concurrant.*

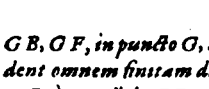
a 4. pri.
b 16. pri.
c 27 pri mi.

SIT deinde C B, minor quam D E, ſi fieri poteſt, & producta B C, fiat B G, ipſi D E, æqualis, iungaturq; recta F G. Quia igitur duo latera A E, E D, trianguli A E D, duobus lateribus F B, B G, æqualia ſunt, vtrumque vtrique, angulosq; continent æquales, puta rectos; d *erunt & baſes A D, F G, & anguli E A D, B F G, inter ſe æquales. Igitur externus angulus B F G, interno E A D, æqualis erit, quod eſt abſurdum. Vel cum externus angulus B F G, interno E A D, æqualis ſit,* e *erunt A C, F G, inter ſe parallelæ, quod abſurdum eſt, cum ſe mutuo ſecent in H. Quocirca B C, ipſa E D, maior erit, cum neque æqualis, neque minor eſſe poſſit, vt demonſtratum eſt.*

d 4. pri.
e 27. pri mi.

SECVNDVM, quod Proclus præmittit, huiuſmodi eſt.

SI duarum parallelarum rectarum linearum alteram ſecet quædam recta linea, reliquam quoque productam ſecabit.



SINT duæ parallelæ A B, C D, & recta E F, ſecet ipſam A B, in G. Dico rectam E F, ſi producatur, ſecturam eſſe quoque ipſam C D. Quoniam duæ rectæ G B, G F, in puncto G, angulum faciunt, ſi producantur infinitè, excedent omnem finitam diſtantiam; igitur & diſtantiam, qua parallela A B, à parallela C D, diſtat, cum hac diſtantia ſit finita, alias enim non eſſent linea parallelæ. Quare quando diſtantia G B, à G F, maior iam fuerit ea, quæ inter parallelas eſt, neceſſe eſt rectam G F, productam ſe-

Eam secuisse rectam C D. Nam quamdiu G F, continebitur inter duas parallelas, minori distantia à G B, remouebitur, quam C D, ab eadem G B, vt constat. His igitur ita expositis, facile demõstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidem, tertium decimum pronunciatum.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq; partes, angulos duob. rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinitè productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duob. rectis minores.

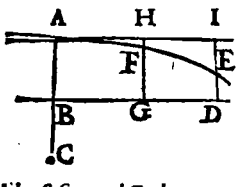
IN rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat internos angulos ad partes B, & D, vt B G H, D H G, duobus rectis minores. Dico rectas A B, C D, coire ad easdem partes B, & D. Quoniam enim duo anguli B G H, D H G, minores ponuntur esse duobus rectis: 

Sunt autem duo anguli D H G, D H F, a duobus rectis æquales: Erunt duo anguli D H G, D H F, maiores duobus angulis D H G, B G H. a 13. pri.

Ablato ergo communi angulo D H G, remanebit angulus D H F, maior angulo B G H. Si igitur ad rectam F G, & ad punctum G, b 5. pre. num.
constituatur angulus K G H, æqualis angulo D H F, cadet G K, supra G B, c 23. pri. mi.
& secabit q; producta rectam A B. Quoniam igitur in duas rectas I K, C D, recta incidens E F, facit angulum externum D H F, æqualem interno, & opposito K G H. d 11. pre. num.
e Erunt rectæ I K, C D, parallelæ. Secat autem recta A B, ipsam I K, in G. Producta igitur secabit quoque ipsam C D, vt demonstratum est. Quare A B, cum C D, conueniet ad partes B, & D, nimirum in puncto L. quod est propositum. e 28. pri. mi.

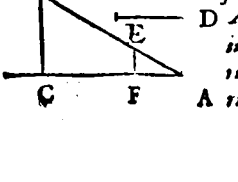
HAC ergo ratione conatur Proclus Axioma tertium decimum demonstrare. Sed quoniam principium, quod primo loco præmisit, æquè dubium, & obscurum esse videtur, atq; illud Axioma, afferemus nos demonstrationem magis accuratam, si prius doceamus, in quo difficultas, siue obscuritas principij illius à Proclo assumpti consistat. Quemadmodum igitur ex Procli, & aliorum Geometrarum sententia, sine demonstratione concedendum non est, duas rectas, quæ semper sibi mutuo fiunt propinquiores, tandem aliquando concurrere, licet sit verissimum, cuiusmodi sunt duæ rectæ, in quas recta incidens facit internos duos angulos ex eadem parte duobus rectis minores, quorum vnus rectus sit, & alter acutus: Hæ enim sibi mutuo appropinquant ad eas partes, vbi duo illi anguli duobus rectis minores existunt, vt mox demonstrabimus. Quemadmodum, inquam, concedendum hoc sine probatione non est, propterea quod dari possunt in eodem plano duæ lineæ, vna recta, & altera inflexa, nimirum vel Hyperbole, vel linea conchoides, sibi semper mutuo magis ac magis appropinquantes, quæ tamen nunquam coeant, licet in infinitum amba producantur. quorum illud ab Apollonio Pergæo, hoc verò à Nicomede demonstratum est: Ita quoque non videtur sine demonstratione admitten-

mittendum esse, (quamquam ueriſſimum ſit) duas rectas lineas angulum efficientes omnem finitam magnitudinem excedere, ſi in infinitum producantur amba, licet ſemper magis ac magis inter ſe diſtent, ut nos ſupra demonſtrauimus. Nam exhiberi poſſunt duæ lineæ in eodem plano angulum comprehendentes, recta una, & altera inflexa, quæ conchoideos appellatur à Nicomede, ſemper magis ac magis inter ſe diſtantes, quarum tamen diſtantia datam quamcunque rectam lineam nunquam ſuperet, aut exæquet, licet amba extendantur in infinitum. Data namque ſit recta AB. Dico deſcribi poſſe lineam rectam, & inflexam, quarum una ab altera ſemper magis recedat, diſtantiam tamen earum nunquam æqualem eſſe rectæ AB, aut maiorem, quantumuis producantur amba. Producta enim recta AB, quantumlibet uſque ad C, ducatur per B, ad AC, perpendicularis BD; & polo C, interuallo autem AB, deſcribatur linea conchoideos AE, inflexa nimirum linea, qua recta BD, fiat quidem ſemper propinquior, nunquam tamen cum ea conueniat, ut à Nicomede traditur. Deinde per



a 28. primi
A, excitetur recta AI, ad AC, perpendicularis, a *quæ ipſi BD, parallela erit. Poſtremo ex duobus punctis HI, uicunq; in recta AI, acceptis* b 28 primi *demittantur ad BD, perpendiculares HG, ID,* b *quæ parallelæ,* c *atque adeo æquales inter ſe erunt, angulosque* d *conſtituent ad* c 34. primi. *H, I, rectos. Admittantur enim nunc, ut propoſitum oſtendamus,* d 29. primi *omnes demonſtrationes Euclidis, ac ſi ex axiomate 13. non penderent, aut etiamſi pendeant ex eo, concedantur tamen, perinde ac ſi axioma illud iam ſit demonſtratum ante propoſ. 29. huius lib. Ubi primum ſuus illius apparere incipit, uti ſerè à nobis mox ante propoſ. 29. demonſtrabitur. Itaq; quoniam FG, maior eſt, quam ED, ut Nicomedes demonſtrauit, erit FH, reliqua minor, quam reliqua EI. Magis ergo inter ſe diſtant lineæ AI, AE, in punctis I, E, quam in punctis H, F; atque ita ſemper eas probabimus magis ac magis diſtare, ſi longius protendantur. Diſtantia nihilominus ſemper minor erit, quam recta AB, hoc eſt, quam perpendicularis ex recta AI, ad rectam BD, demiſſa, cum inflexa linea AE, ad rectam BD, numquam perueniat, ut demonſtratum eſt à Nicomede.*

SCIO principium illud Procli in lineis rectis eſſe ueriſſimum, & quod facili negotio, ſi omnes demonſtrationes Euclidis, quæ ex axiomate 13. pendent, concedantur, demonſtrari poſſit hoc modo. Contineant duæ rectæ AB, AC, angulum A, & data ſit recta D, cuiuſuis magnitudinis. Dico diſtantiam rectarum AB, AC, in infinitum productarum excedere magnitudinem D. Nam ex



quonia

quouis puncto E, in recta AB, sumpto demittatur ad AC, perpendicularis EF, quæ si maior fuerit, quam D, constat propositum: si verò non est maior, sumatur eius multiplex proximè maior, quam D, nempe G. Sumptæ autem AB, ipsius AE, ita multiplici, & vt multiplex est G, ipsius EF, demittatur ex B, ad AC, perpendicularis BC, quam dico maiorem esse datæ rectæ D. Quoniam enim a est, vt AB, ad BC, ita AE, ad EF. (quod ex coroll propos. 4. lib. 6. Euclid. triangula ABC, AEF, similia sunt, ob rectas BC, EF, quæ b parallelæ sunt.) Et permutando, vt AB, ad AE, ita BC, ad EF: erit ita multiplex BC, ipsius EF, & vt multiplex est AB, ipsius AE, hoc est, & vt multiplex est G, ipsius EF. Cùm ergo BC, & G, æquè multiplices sint ipsius EF, ipsa erunt inter se æquales. Est autem ex constructione, maior G, quàm D. Igitur & BC, distantia puncti B, à puncto C, maior erit, quam recta D, data. Quod est propositum.

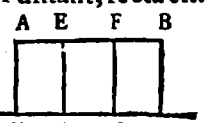
a 24. sexti.

b 28. pri

VERVM demonstratio hæc sine proprietatibus linearum parallelarum, quæ axiomate illo 13. nituntur, & im nullam habet, ac proinde principium illud Procli assumi non potest ad illud axioma 13 demonstrandum, ne principium in eo demonstrando petatur. Quæ cùm ita sint, sedulò dedimus operam, vt illud ipsum Euclidis axioma demonstraremus ex ijs solùm, quæ ante propos. 29. primi libri demonstrata sunt. Ante enim propos. 29. & sine illius axiomatis apud Euclidem nullus est. Id quod in Euclide quodam Arabico factum etiam esse accepi, sed nunquam facta mihi est copia demonstrationem illam legendi, etsi obnixè illud iterum atque iterum ab eo, qui eum Euclidem Arabicum possidet, flagitaui. Quare hanc, quæ sequitur, excogitauimus. Primùm autem præmittenda quoque sunt nonnulla, quæ licet ad id, quod proponimus, demonstrandum requirantur necessariò, multò tamen euidentiora sunt ac faciliora axiomate illo Euclidis, ita vt omni dubitatione exclusa, firmum eis assensum præbere possimus. Primum sit huiusmodi.

I.

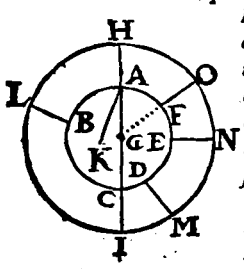
LINEA, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est.



VT si omnia puncta lineæ AB, à rectæ DC, æqualiter distent, hoc est, omnes perpendiculares, quales sunt AD, EH, FG, BC, ad DC, demissæ æquales sint (perpendicularis enim qualibet, cùm sit omnium ex eodem puncto ad rectam DC, ductarum minima, ex coroll propos. 19. huius lib. distantiam puncti, à quo ducta est, metitur.) erit AB, linea recta. Hoc autem ex defin. linea recta liquidò constare potest. Nam si omnia puncta lineæ AB, æqualiter distant à rectæ DC, ex æquo sua intertacebit puncta, hoc est, nullum in ea punctum intermedium ab extre-

mis sursum, aut deorsum, vel hinc atq; illinc deflectendo subsultabit, nihilq; in ea flexuosum reperietur, sed aequabiliter semper inter sua puncta extendetur, quemadmodum recta D C. Alioquin non omnia eius puncta aequalem à recta D C, distantiam haberent, quod est contra hypothesin. Neq; verò cogitatione apprehendi potest, aliam lineam praeter rectam posse habere omnia sua puncta à recta linea, quae in eodem cum illa plano existat, aequaliter distantia. Est sanè principium hoc, ex quo solo concesso, una cum ijs, quae vsq; ad propos. 29 huius lib. ostensa sunt, axioma 13. demonstrabimus, adeò clarum, vt lumine naturali cognitum sit, nemoq; sanae mentis illud negare possit. Aut certè citra omnem controuersiam est eiusmodi, vt longè facilius ei quilibet assentiatur, quàm illi axiomati 13. Euclidis.

IDEM prorsus in linea circulari contingit. Nam etiam linea inflexa circularem lineam ambiens, cuius omnia puncta aequaliter à circulari distant, id est, à qua omnes rectae in circularem lineam ad aequales angulos incidentes aequales sunt, circularis quoque est; tum vt naturam circularis lineae, à qua aequali semper distantia abest, induat: quemadmodum linea aequaliter semper à recta linea distans, naturam lineae rectae, cui semper aequidistat, induit. propterea q; recta est, vt diximus. Quod autem inflexa illa linea circa lineam circularem sit quoq; perfectè circularis, facilè ostendemus, si prius demonstremus, rectam ex centro circuli ductam efficere cum circumferentia angulos binos aequales; & contra, rectam, quae aequales cum circumferentia angulos constituat, per centrum transire. Sit igitur circulus A B C D E F, cuius centrum G. Dico rectam G C, ex centro ductam efficere tam angulos internos G C B, G C D, quàm externos I C B, I C D, inter se aequales.



Producta enim I G, vsq; ad A, si semicirculus A B C, circa diametrum A C, intelligatur circumuerti, congruet is semicirculo A E C, cùm semicirculi eiusdem circuli sint inter se aequales. Quod si quis dicat, num semicirculum alterum intersecare, ducenda erit recta linea ex centro G, secans vtramq; circumferentiam, colligendumq; partem toti esse aequalem, minimum semidiametrum vsque ad interiorem circumferentiam, semidiametro ad exteriorem vsque circumferentiam ducta, quod absurdum est. Anguli igitur ad C, tam interni, quàm externi inter se congruent, ac proinde aequales erunt. Efficiat iam recta H A K, aequales angulos ad A. Dico eam per centrum transire. Si enim non transeat, ducatur ex centro G, ad A, recta G A, qua ex proximè demonstratis angulos G A B, G A F, constituet aequales. Nō erunt aequales sunt K A B, K A F. Quod est contra hypothesin.

H O G ostenso, ambiat inflexa linea H L I M N O, circularem lineam

neam A B C D E F, omniaq; eius puncta ab hac aqualiter absint, id est, omnes rectæ ab ea linea in circularem lineam cadentes, efficientesq; angulos aquales, sint inter se aquales, cuiusmodi sunt H A, L B, I C, M D, N E, O F. Ha enim cùm, vt demonstratum est, per centrum transeunt, erunt omnium ex punctis H, L, I, M, N, O, in conuexam peripheriam cadentiũ, minimæ; (Hoc enim demonstratum est ab Eucl. propos 8. lib. 3. quæ solum ex propositionibus, quæ 29. huius lib. antecedunt, pendet, vt iure optimo huc transferri possit) atq; adeò eorum distantiæ à subiecta linea circulari metientur. Disco lineã H L I M N O, esse circularem. Cùm enim omnes illæ, vt proximè ostendimus, per centrum G, transeant; si aqualibus H A, O F, addantur aquales A G, F G, erunt totæ H G, O G, aquales; eademq; ratione omnes aliæ ex linea inflexa H L I M N O, ad G, ductæ aquales erunt & rectis H G, O G, & inter se. Ex defin. circuli igitur linea inflexa circularis est. Quod erat demonstrandum. Ex hoc primo, quod præmisimus, sequitur secundum: videlicet.

II.

SI recta linea super aliam rectam in transuersum moueatur, constituens in suo extremo cum ea angulos semper rectos, describet alterum illius extremum lineam quoque rectam.

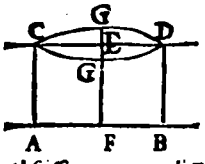
VT si in priore figura recta A D, ad D C, perpendicularis moueatur in transuersum super rectam D C, constituens cum ea in D, semper rectos angulos, hoc est, non titubans, aut vacillans, sed aquabiliter semper incedens, describet extremum A, rectam quoq; lineam, nempe A B. Constat hoc ex eo, quod primo loco præmisimus; propterea quod omnia puncta linea A B, descripta aqualiter à recta D C, distant, nimirum per rectam A D. Ex quo fit, ipsam lineam rectam esse, cùm, vt ibi dictum est, eius media ab extremis non subsultent, sed aqualiter inter ipsa iaceant, quippe cùm nullum eorum magis aut minus à recta C D, abscedat sursum, aut deorsum vergendo, quàm aliud. Patet hoc etiam ex ijs, quæ ad definitionem linea recta scripsimus. Cùm enim duo puncta D, A, similibus prorsus motibus ferantur (quòd recta A D, in suo motu non titubet, aut vacillet, sed puncta D, A, aquè velociter incedant, aqualiterq; semper inter se distent) describent vtiq; lineas similes, vt in eadem definitione docuimus. Cùm ergo punctum D, rectam D C, describat, erit quoq; linea A B, quam punctum A, describit, recta. Neq; verò imaginari quis poterit, si linea recta in transuersum moueatur vniformiter sine vlla titubatione huc atq; illuc, duo puncta eius extrema describere duas differentes inter se lineas; sed qualem vnum extremum describit, talem quoque ab altero extremo describi necesse est, propter vniformem illum, aquabilemq; motum vtriusque puncti extremi. Est principium hoc aquè clarum, & euidens, atque antecedens.

CON-

CONTINGIT autem idem omninò in circulari linea. Nam eodem pacto recta linea ſuper lineã circularem in tranſuerſum fluens æquabiliter, conſtituens nimirum in ſuo extremo cum circulari æquales ſemper angulos, non vacillando, aut deflectendo huc atque illuc, circularem lineam altero ſuo extremo deſcribit, ita vt naturam circularis linea ſubiecta, à qua æqualiter ſemper diſtat, linea illa deſcripta induat: quemadmodum linea recta A D, ſuper rectam D C, in tranſuerſum fluens æquabiliter, conſtituens nimirum cum ea in ſuo extremo D, angulos ſemper rectos, ita vt nuſquam declinet, huc atque illuc deflectendo, aut titubando, lineam rectam A B, altero extremo A, delineat: adeò vt linea deſcripta A B, naturam induat recta linea ſubiecta D C, à qua æqualiter ſemper recedit. Rectam autem, quæ ſuper lineam circularem in tranſuerſum fluit æquabiliter, deſcribere altero ſuo extremo lineam quoque circularem, facilè demonſtrabimus. Moueatur enim in figura poſteriore recta H A, in tranſuerſum ſuper peripheriam A B C D E F, æquabiliter, faciens ſemper in extremo A, cum ea angulos æquales. Dico lineam H L I M N O, ab altero extremo H, deſcriptam eſſe quoque circularem. Cùm enim recta H A, in omni ſitu motus illius imaginarij faciat æquales angulos cum peripheria A B C D E F, fit vt ea producta in centrum G, cadat, vt ſuprà oſtendimus. Quare additis rectis æqualibus H A, O F, ad rectas æquales A G, F G, fient tota recta H G, O G, & omnes aliæ, inter ſe æquales: ac propterea ex defin. circuli H L I M N O, circumferentia circuli erit. Quod oſtendendum erat. Hinc ſequitur tertium.

III.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demiſſa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis.

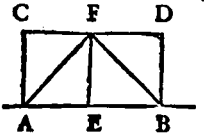


SINT ad rectam A B, erecta duæ perpendiculares A C, B D, inter ſe æquales: Et ducta recta C D, demittatur ex quolibet eius puncto E, ad A B, perpendicularis E F. Dico E F, vtriq; A C, B D, eſſe æqualem. Si namq; æqualis non eſt, erit vel maior, vel minor. Abſciſſa ergo æquali F G, ſi intelligatur recta A C, moueri in tranſuerſum per rectam A B, faciens cum ea angulos ſemper rectos, deſcribet punctum C, lineam rectam per G, tranſeuntem, vt ſuprà oſtenſum eſt, qualis eſt C G D. Duæ ergo rectæ C E D, C G D, ſuperficiem claudent. Quod eſt abſurdum. Æqualis igitur eſt E F, vtrique A C, B D. Quod erat oſtendendum. Ex hoc quartum, quod ſequitur, demonſtrabimus.

SI ad

IV.

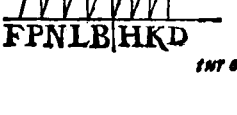
SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum.

SINT ad rectam AB, erecta duæ perpendiculares AC, BD, æquales inter se, ducaturq; recta CD. Dico vtrumque angulum C, D, rectum esse. Secta namque recta AB, bifariam in E, excitetur in E, ad AB, perpendicularis EF, iungunturq; rectæ AF, BF. Quoniam igitur duo latera AE, EF, trianguli AEF, duobus lateribus BE, EF, trianguli BEF, æqualia sunt, & 

vtrumque vtrique, angulosq; continent æquales, puta rectos, a erunt quoque & bases AF, BF, & tam anguli FAE, FBE, quàm AFE, BFE, inter se æquales. Ablatis igitur a 4. pri.
æqualibus angulis FAE, FBE, ex rectis æqualibus CAE, DBE, reliqui erunt æquales anguli CAF, DBF. Itemque cùm duo latera CA, AF, trianguli CAF, duobus lateribus DB, BF, trianguli DBF, æqualia sint, angulosq; complectantur æquales, & vt ostendimus, b *erunt quoque & bases CF, DF, & tam anguli C, D, quàm CFA,* b 4. pri.
DFB, inter se æquales. Si ergo æqualibus angulis CFA, DFB, addantur anguli AFE, BFE, ostensi æquales, fient toti anguli CFE, DFE, æquales, ac proinde recti. Quia verò perpendicularis EF, vtrique AC, BD, æqualis est, & proximo theoremate ostendimus, erunt duæ rectæ AC, EF, ad AE, perpendiculares, inter se æquales. Quare, & de angulis C, D, proximè probatum est, anguli C, & EFC, æquales inter se erunt. Est autem EFC, ostensus rectus. Igitur & C, rectus erit, ac proinde & angulus D, qui ostensus est ipsi C, æqualis.

CAETERVM angulos C, D, rectos esse, demonstrabimus alio modo, hoc priùs theoremate præmisso.

SI in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum, duæ illæ rectæ minùs semper inter se distabunt ad eas partes, vbi est angulus acutus, ex altera verò parte semper inter se magis distabunt.

RECTA linea AB, in rectas AC, BD, incidens faciat angulum ABD, rectum, & BAC, acutum. Dico rectas AC, BD, minùs semper inter se distare versus C, D, productas, magis verò, si versus E, F, producantur. c Duca- 

c 12. pri.

tur e-

tur enim ex B, ad A C, perpendicularis B G, quæ ex coroll. 2. propoſ. 17. huius lib. ad partes acuti anguli B A C, cadet: ac propterea angulus G B D, pars recti anguli A B D, acutus erit. Demiſſa ergo ex G, ad B D, perpendicularis G H, cadet quoq; ad partes anguli acuti G B D, ex eodem coroll. angulusq; propterea H G C, pars recti anguli B G C, acutus erit. Rurſus ergo ducta perpendicularis H I, ad A C, per idem coroll. ad partes acuti anguli H G C, cadet, ideoq; angulus I H D, pars recti anguli G H D, acutus erit. Atq; ita deinceps in infinitum, ſi ex I, ad B D, perpendicularis I K, ducatur, & ex K, perpendicularis K C, ad A C, & ex C, ad B D, perpendicularis C D, &c. cadent omnes ad partes angulorum acutorum, vna poſt aliam. Quoniam igitur in tri-

a19. primi. *angulo A B G, angulus B A G, acutus eſt, & A G B, rectus, a erit recta A B, maior quam G B: & in triangulo B G H, recta B G, angulo recto G H B, oppoſita, maior quàm G H; & in triangulo G H I, recta G H, maior quam H I: Atq; ita deinceps erunt ſemper rectæ, quæ ipſi A B, propiores ſunt, maiores ijs, quæ remotiores ſunt, & nunquam finis erit huius decrementi perpendicularium. Quapropter recta A C, in G, minus diſtabit a recta B D, quam in A, & in I, minus quam in G, & in C, minus quàm in I, &c. quandoquidem perpendiculares A B, G H, I K, C D, &c. quæ ordinatim deſcendunt, vt oſtendimus, minimæ ſunt omnium à punctis A, G, I, C, in rectam B D, cadentium, & ex coroll. propoſ. 19. huius lib. liquet, ac proinde eorundem punctorum diſtantiæ ab eadem recta B D, metiuntur. Conſtat ergo, rectas A C, B D, ad partes C, D, productas continenter fieri minus inter ſe diſtantes. quod eſt primum.*

b11. primi. *Ducatur rurſus* b *ex A, ad A C, perpendicularis A L, quæ angulum obtuſum B A E, partietur in rectum E A L, & acutum L A B, hoc eſt, cadet inter A B, & A E; eritq; angulus A L B, acutus, cum*

c17 primi. *ambo A B L, A L B,* c *ſint duobus rectis minores, atq; A B L, rectus ſit: ac proinde angulus A L F, obtuſus erit. Eadem ratione perpendicularis L M, ex L, ad B F, ducta cadet inter L A, L F, facietq; angulum L M A, acutum, & L M E, obtuſum: Item perpendicularis M N, ex M, ad A E, erecta cadet inter M L, M E, angulumq; M N B, acutum, & M N F, obtuſum conſtituet. Atq; ita deinceps in infinitum, ſi ex N, ad B F, perpendicularis erigatur M O, & ex O, ad A E, perpendicularis O P, & ex P, ad B F, perpendicularis P E, & ex E, ad A E, perpendicularis E F, &c. diuident omnes ſigillatim angulos obtuſos, vna poſt aliam. Quoniam igitur in triangulo A B L, angulus A B L, rectus eſt,*

d19. primi. *& A L B, acutus* d *erit A L, recta maior, quam A B, & in triangulo A L M, recta L M, angulo recto L A M, oppoſita maiori quam A L; atq; in triangulo L M N, recta M N, recto angulo M L N, oppoſita, maior quam M L: atq; ita deinceps erunt ſemper rectæ, quæ ab A B, longius abſunt, maiores ijs, quæ propinquiores ſunt, in infinitum. Quamobrem recta A E, in M, magis a recta B F, diſtabit, quam in A, & in O, ma-*

G, magis quàm in M, & in E, magis quàm in O, &c. quandoquidem perpendiculares A B, M L, O N, E P, &c. quas ordinatim augeri oſtenſum fuit, minimæ ſunt omnium ex punctis A, M, O, E, in rectam B F, cadentium, &c. Liquidò ergo conſtat, rectas A C, B D, ad partes E, F, productas continenter fieri magis inter ſe diſtantes. quod eſt ſecundũ. Quod ſi proterua quiſpiam velket contendere, rectam A L, quæ ad A C, perpendicularis eſt, non concurrere cum D B, productæ, conſtabit multò magis id, quod demonſtrandum proponitur. Nam linea D B, vltra punctum B, multò magis à recta C A, diſtabit, quàm in puncto B, quandoquidem A L, ad A C, perpendicularis in infinitum producta non concurrit cum D B, cùm tamen G B, ad eandem A C, perpendicularis cum D B, concurrat in B, &c.

HÆC cùm ita ſint, nullo negotio demonſtrabimus, in ſuperiori figura angulos C, D, eſſe rectos. Nam ſi angulus C, verbi gratia, non dicatur eſſe rectus, erit vel acutus, vel obtuſus. Sit primùm acutus. Quoniam ergo recta C A, in rectas A B, C D, incidens efficit angulum C A B, rectum, & C, acutum, minùs ſemper inter ſe diſtabunt rectæ C D, A B, ad partes D, B, productæ, hoc eſt, perpendiculares ex C D, in A B, demiſſæ ordinatim minores fient, quàm C A, vt proximè demonſtratum eſt. Minor ergo eſt perpendicularis D B, quàm C A, quod eſt abſurdum, cùm ponatur æqualis. Non igitur acutus eſt angulus C. Eademq; ratione neq; angulus D, acutus erit. Sit deinde angulus C, obtuſus. Quia igitur recta C A, in rectas C D, A B, incidens facit angulum C A B, rectum, & B, obtuſum, magis ſemper inter ſe diſtabunt rectæ C D, A B, ad partes D, B, productæ, hoc eſt, perpendiculares ex C D, in A B, demiſſæ continenter augebũtur, vt proximè oſtendimus. Maior ergo eſt perpendicularis D B, quàm C A, quod eſt abſurdum, cùm æqualis ponatur. Non igitur obtuſus eſt angulus C. Eademq; ratione neque angulus D, obtuſus erit. Sed neq; acutus eſt oſtenſus. Rectus igitur vterq; eſt, quod erat oſtendendum.

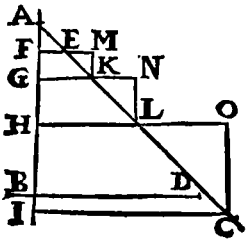
EX his demonſtratis facile iam axioma 13. demonſtrabimus hoc modo.

V.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad eaſdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuò incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.

HOC eſt axioma 13. apud Euclidem in noſtris commentarijs, apud alios eſt vndecimum, quod demonſtrandum ſuſcepimus. Incidens ergo recta A B, in rectas A C, B D, faciat internos, ad eaſdemq; partes angulos A B D, B A C, duobus rectis minores. Dico rectas A C, B D, ad

BD, ad partes C, D, productas coire. Sit enim primum alter angulorum, nempe ABD, rectus, & alter BAC, acutus. Sumpto in recta
a 12. pri. *AC, puncto quolibet E,* a *ducatur ex eo ad rectam AB perpendicularis EF, & rectæ AF, æqualis accipiatur FG, & GH, æqualis ipsi AG, & HI, ipsi AH, itæ vt AG, ipsius AF, & AH, ipsius AG, & AI, ipsius AH, dupla sit. Et quoniam si rectæ AF, abscindantur continuè æquales rectæ ex AB, aliqua tandem pars vltra B, punctum cadet, quod finita rectæ AB, per continuam abstractionem vnius eiusdemq; quantitatis absumatur tandem, quandoquidem linea AF, ita multiplicari potest (quod fit, sumendo ipsi in AB, continenter partes æquales) vt tandem aliquando finitam lineam AB, superet. Id quod Euclides frequenter assumit in lib. 5. & alijs sequentibus, vbi datis duabus magnitudinibus inæqualibus proportionem inter se habentibus, iubet plerunque minorem ita multiplicari, donec maiorem superet. Fit, vt multò magis, si ipsi AF, æqualis abscindatur FG, & toti deinde AG, non autem soli AF, æqualis auferatur GH: Item toti AH, non autem soli AF, vel AG, æqualis dematur HI, & sic deinceps, cadat tandem pars aliqua vltra punctum B. Statuatur ergo punctum I, terminans tertiam duplam in dato exemplo, existere vltra punctum B. Accipiatur quoque in recta AC, recta EK, ipsi AE, & KL, ipsi AK, & LC, ipsi AL, æqualis, ita vt tot sint partes in recta AC, quot in recta AI; ducanturq; recta KG, LH, CI, producanturq; vna tum EF, vt EM, KN, LO, ipsis EF, KG, LH, fiant æquales, ac tandem rectæ iungantur MK, NL, OC. Itaque quoniam duo latera KE, EM, trianguli KEM, duobus lateribus AE, EF, trianguli AEF, per constructionem æqualia sunt, vtrumque vtrique,* b *anguloq; ad verticem E, continent æquales,* c *erit & basis MK, basi AF, & angulus M, angulo F, æqualis. Est autem & FG, eidem AF, æqualis, & angulus F, rectus, ex constructione. Igitur & MK, FG,* d *æquales inter se erunt, & anguli M, quoque rectus. Quare cùm ad FM, excitata sint duæ perpendiculares æquales FG, MK, erit per antecedens theorema, angulus G, rectus. Rursus ergo, quia duo latera LK, KN, trianguli LKN, duobus lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia sunt, ex constructione,* e *anguloq; comprehendunt æquales ad K, verticem,* f *erit & basis NL, basi AG, & angulus N, angulo G, æqualis. Est autem & GH, ex constructione, eidem AG, æqualis, & anguli G, rectus, vt proximè demonstratum est. Igitur & NL, GH, inter se* g *erunt æquales, & angulus N, quoque rectus. Quocirca per præcedens theorema, erit etiam angulus H, rectus. Eadem ratione ostendemus angulum I, re-*

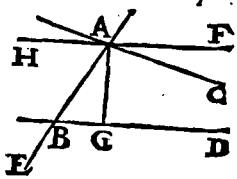


b 15. pri.
c 4. pri.
d 1. pri.
e 15. pri.
f 4. pri.
g 1. pron

ctum

dum esse: atque ita deinceps, si plures essent partes recta A B. Est autem & angulus B, per hypothesim rectus. Igitur recta I C, B D, a parallelæ sunt: ac propterea B D, producta rectam A C, secabit supra punctum C; atque adeò in puncto illo sectionis recta A C, B D, coibunt. Quod erat demonstrandum. a 28. pri

SIT deinde neuter angulorum A B D, B A C, rectus; sed A B D, quidem acutus, & B A C, vel acutus etiam, vel obtusus. Quia igitur duo anguli A B D, B A C, duobus rectis ponuntur minores; b sunt autem duo anguli A B D, D B E, duobus rectis æquales: erunt hi duo illu duobus maiores. Ablato ergo communi A B D, maior erit reliquus D B E, reliquo B A C. c Cõstituatur in A, ad rectam A B, angulus B A F, angulo D B E, æqualis: Cadet q; recta A F, supra rectã A C, cum A F, maiorem angulũ cum A B, constituat, quam A C. Quia igitur externus angulus D B E, interno B A F, ex eadem parte oppositæ æqualis est, d erunt recta A F, B D, inter se parallelæ. Demittatur quoque ex A, ad B D, e perpendicularis A G, qua ex coroll. 2 propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli A B D, cadet: Erit q; angulus quoq; G A F, rectus. Nam si acutus esse dicatur, efficiet recta A G, in rectas A F, B D, incidens angulum A G D, rectum, & G A F, acutum, ac proinde, & proximè demonstrauimus, recta A F, B D, ad partes F, D, producta coibunt tandem: Quod est absurdum. Ostensa enim sunt parallelæ. Si autem angulus G A F, dicatur esse obtusus, erit G A H, acutus. Quare ex proximè demonstratis, coibunt recta A F, B D, ad partes H B, producta, quod est absurdum, cùm parallelæ sint ostensa. Non est ergo angulus G A F, acutus, aut obtusus. Igitur rectus, ac proinde eius pars G A C, acutus. Quoniam igitur recta A G, in rectas A C, B D, incidens facit angulum G, rectum, & G A C, acutum, concurrent recta A C, B D, ad partes, C, D, producta, & proximè demonstrauimus. Si igitur recta A B, in rectas A C, B D, incidens faciat duos angulos minores duobus rectis, neutrum tamen angulorum A B D, B A C, rectum, ipsa recta A C, B D, ad partes C, D, producta conuenient. Quod erat ostendendum. Quòd si quando accidat, rectam A C, existere inter A B, & perpendicularem A G, liquidò constat, rectas A C, B D, coire, quòd tunc A C, basin B G, triangulæ A B G, secaret. Quod & facilius capias, ducere poteris rectam A C, inter A B, A G.



c 23. pri.

d 28. pri

e 12. pri.

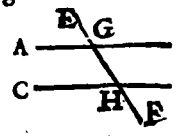
QVAMVIS autem, concesso principio nostro, optimè à nobis demonstratum sit tertiumdecimum hoc axioma, & a Proclo etiam, si eius principium difficilius quidem, quàm nostrum, admittatur, & iure optimo inter theoremata, & non inter principia possit connumerari; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, & timur

eo in omnibus propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendent, tanquam pronunciato. Sed iam ad seriem propositionum Euclidis reuertamur.

xxix. THEOR. 20. PROPOS. 29.

IN parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

IN parallelas A B, C D, recta incidat E F. Dico primùm, angulos alternos A G H, D H G, inter se esse æquales. Si enim non sunt æquales, fit alter, nempe A G H, maior. Quoniam igitur angulus A G H, maior est angulo D H G, si addatur communis angulus B G H; *a* erunt duo A G H, B G H, maiores duobus D H G, B G H: At duo A G H, B G H, *b* æquales sunt duobus rectis. Igitur duo D H G, B G H, minores sunt duobus rectis. Quare cùm sint inter-



a 4 *prom.* *b* 13 *pri.*

ni, & ad easdem partes, B, & D, *c* coibunt lineæ A B, C D, ad eas partes, quod est absurdum, cùm ponantur esse parallelæ. Non est igitur angulus A G H, maior angulo D H G: Sed neque minor. Eadem enim ratione ostenderetur, rectas coire ad partes A, & C. Igitur æquales erunt anguli alterni A G H, D H G. Eademq; est ratio de angulis alternis B G H, C H G.

c 13 *prom.*

DICO secundò, angulum externum A G E, æqualem esse interno, & ad easdem partes oppositò C H G. Quoniam enim angulo B G H, æqualis est alternus C H G, vt ostensum est; & eidem B G H, *d* æqualis est angulus A G E. Bruntanguli A G E, C H G, *e* inter se quoque æquales. Eodem modo demonstrabitur, angulum B G E, æqualem esse angulo D H G.

d 15 *pri.* *e* 1 *prom.*

DICO tertiò, angulos internos ad easdem partes, A G H, C H G, æquales esse duobus rectis. Quoniam enim ostensum fuit, angulum externum A G E, æqualem esse angulo C H E, interno; si addatur communis A G H, *f* erunt duo A G E, A G H, duobus C H G, A G H, æquales: Sed duo A G E, A G H, *g* æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo anguli C H G, A G H, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli B G H, D H G, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos, &c. Quod erat demonstrandũ.

f 2. *prom.* *g* 13 *pri.*

SCHOLIVM.

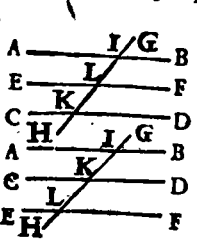
CONVERTIT autem hoc præsens theorema duo præcedentia theoremata, vt perspicuum est.

THEOR.

THEOR. 21. PROPOS. 30. xxx.

QVÆ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, eidem rectæ EF, parallelæ. Dico & ipsas AB, CD, esse inter se parallelas. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse plano. (Nam propos. 9. vndecimi libri agetur de lineis in diuersis planis) ducta recta GH, secabit omnes, nimirum AB, in I; CD, in K; & EF, in L. Quia igitur AB, ponitur parallela ipsi EF, *a* erit angulus AIL, alterno FLI, æqualis. Rursus quia CD, ponitur etiam parallela ipsi EF, *b* erit angulus DKI, eidem angulo FLI, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli AIL, DKI, *c* æquales inter se quoque erunt. Cùm igitur sint alterni, *d* erunt rectæ AB, CD, parallelæ inter se. Quæ igitur eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat.



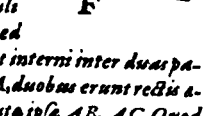
a 29. primi.
b 29. primi.
c 1. pronun.
d 27. primi.

SCHOLIVM.

QVOD si quis dicat, duas rectas AI, BI, parallelas esse rectæ CD, & tamen ipsas non esse parallelas; Occurrendum est, duas AI, BI, non esse duas lineas, sed partes tantùm vnius lineæ. Concipiendum enim est animo, quaslibet parallelas infinitè esse productas; Constat autem AI, productam coincidere cum BI. Quamobrem propositio hæc generalius ita poterat proponi.

QVÆ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ: vel certè, quandò inter se coeunt, vnam eandemq; lineam constituunt.

SINT enim duæ rectæ AB, AC, coeuntes in A, parallelæ ipsi DE. Dico illas in rectum esse constitutas. Ex puncto enim A, ducatur recta AF, secans DE, in F, vtcunq;. Quoniam igitur AB, DE, sunt parallelæ, e erunt anguli alterni BAF, AFE, æquales. Addito ergo communi angulo CAF, f erunt duo anguli ad A, æquales duobus angulis CAF, AFE. Sed hi duo g æquales sunt duobus rectis, cùm sint interni inter duas parallelas AC, DE. Igitur & duo anguli ad A, duobus erunt rectis æquales; ac propterea h in rectum erunt constitutæ ipsæ AB, AC. Quod est propositum.



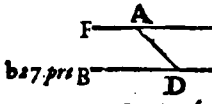
e 29. primi.
f 2. pronun.
g 29. primi.
h 14. primi.

ROBL. 10. PROPOS. 31. xxxj.

A dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

EX puncto A, ducenda sit linea parallela lineæ B C. Ducatur ex A, ad B C, linea A D, vtcunque, faciens angulum quemcunque A D B; Cui ad A, *a* æqualis constituatur E A D. Dico rectam E A, extensam ad F, quantumlibet, parallelam esse ipsi B C. Cùm enim anguli alterni A B D, D A E, æquales sint, per constructionem, *b* erunt rectæ B C, E F, parallelæ. A dato igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.

a 23. pri.



b 27. pri

SCHOLIVM.

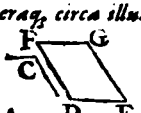
DEBET autem punctum datum in tali esse loco situm extra lineam datam, vt hæ ductæ cum illo non conueniat. Quod quidem apertè colligitur ex ipsa constructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda est linea faciens angulum aliquem cum linea data, qui fieri non posset, si punctum in directum iaceret cum ipsa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq; puncto ad eandem rectam non plures perpendiculares, quàm vna, ducuntur, vt ostendimus propos. 17. ex Proclo; ita etiam per idem punctum, data recta plures parallelas, quàm vna, duci nequeunt. Si enim duæ ducerentur, conuenirent ipsæ in puncto illo eodem, quod est absurdum, c cùm sint parallelæ inter se, propterea quòd vni & eidem, cui parallelæ dicuntur duci, sunt parallelæ.

c 30. pri.

EX hoc porrò problemate, & illo, quod propos. 23. continetur, facili negotio constituemus parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraq; angulum illum comprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia.

SINT enim data recta A B, oporteatq; constituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C, lateraq; circa illum angulum rectis A B, æqualia. Sumpta recta D E, qua recta A, sit æqualis, d fiat angulus E D F, angulo C, e & recta D F, rectæ B, æqualis. Deinde per E, f agatur recta E G, ipsi D F, parallela, & per F, recta F G, ipsi D E, parallela secans E G, in G. Quoniam ergo & latera D F, E G, & D E, F G, parallela sunt, ex constructione; g parallelogrammum erit D E G F. Quod cùm ex constructione, habeat angulum D, angulo dato C, æqualem, & latera D E, D F, circa dictum angulum D, datis rectis A, B, æqualia; factum erit, quod proponitur.

d 23. pri
e 3. pri.
f 31. pri.

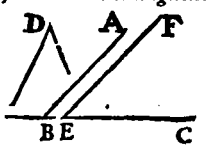


g 35. def. fin.

PARI ratione ex hoc problemate, & propos. 23. ducemus à puncto extra datam rectam lineam proposito lineæ rectæ, quæ cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem, vt ad propos. 23. pollicitis sumus.

SIT enim datum punctum A, extra rectam B C, & datus angulus rectilineus D, oporteatq; ex A, ad rectam B C, ducere lineam rectam,

dam, quæ cum ea angulum dato angulo D, æqualem comprehendat. Sumpto quolibet puncto E, in linea B C, a *constituatur in eo angulus C E F, angulo D, æqualis. Si igitur recta E F, per datum punctum A, transeat, factum erit, quod inbetur. Si verò non transeat per A,* b *ducatur per A, recta A B, ipsi E F, parallela secans B C, in B. Dico angulum A B C, angulo D, æqualem esse. Cùm enim parallelæ sint, A B, E F,* c *erit angulus C E F, externus interno A B C, ex eadem parte oppositio æqualis. Cùm ergo & angulus D, angulo E, per constructionem sit æqualis,* d *æquales inter se erunt anguli A B C, & D, quod est propositum.*



a 23. primi.

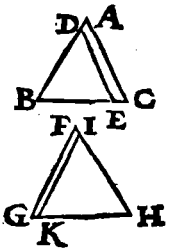
b 31. primi.

c 29. primi.

d 1. præmun.

NON videtur autem alienum ostendere hoc loco, rectè Euclidem propos. 26. vt demonstraret æqualitatem laterum in duobus triangulis, ex æqualitate duorum angulorum, & vnius lateris, præcepisse, latus illud vel adiacere debere angulis æqualibus, vel certè subtendere angulum æqualem. Nam nisi altera harum conditionum adsit, nihil colligetur.

SIT enim triangulum A B C, sintq; latera A B, A C, latere B C, maiora. Abscindatur B D, æqualis ipsi B C, e *ducaturq; D E, ipsi A C, parallela,* f *eritq; angulus B E D, angulo C, æqualis. Quare duo anguli B, C, trianguli A B C, duobus angulis B, E, trianguli D B E, æquales sunt, vterque vtrique, latusq; B C, lateri D B, æquale; cùm tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim B E, minus, quàm B C, atque adeo neque lateri A C. neque lateri A B, æquale esse potest; quòd hæc latera maiora ponantur latere B C. Causa huius rei est, quod latus B C, in triangulo A B C, adiacet angulis dictis, at latus D B, in triangulo D B E, opponitur vni angulorum dictorum, nimirum angulo D E B, qui angulo C, æqualis est.*



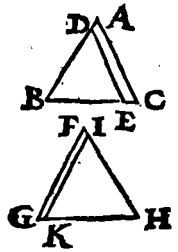
e 31. primi.

f 29. primi.

SIT rursus triangulum F G H, sintq; iterum latera F G, F H, latere G H, maiora. & F H, maius quàm F G. Abscindatur H I, ipsi F G, æqualis, g *ducaturq; I K, ipsi F G, parallela:* h *eritq; angulus H K I, angulo G, æqualis. Sunt ergo duo anguli H, G, trianguli F G H, duobus angulis H, K, trianguli I K H, æquales, vterque vtrique, latusq; F G, lateri I H, æquale; cùm tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim H K, minus, quàm H G, atque adeo neque lateri H G, neq; lateri F H, æquale esse potest; quod latus F H, maius etiam ponitur, quàm G H. Ratio huius rei est, quod latus F G, in triangulo F G H, opponitur angulo H, at latus I H, oppositur*

g 31. primi.

h 29. primi.

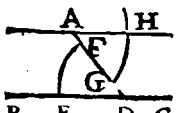


tur angulo K, in triangulo FKH, qui non ponitur aqualis angulo H, sed angulo G, est aqualis, a qui maior est angulo H, propterea quòd latus FH, maius posuimus latere FG. Dissulimus hanc demonstrationem hunc in locum, propter linearum parallelarum proprietates, ex quibus pendet.

11. primi.

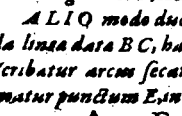
PRAXIS.

SIT ducenda parallela ipsi BC, per punctum A. Ducatur recta AD, vtcunq; ad BC, & ex D, & A, ad idem interuallum quodlibet describantur duo arcus ad diuersas partes, vnus ad partes B, alter ad partes C. Deinde beneficio circini arcui EF, abscindatur ex arcu altero arcus GH, aqualis. Si igitur ex A, per H, recta ducatur, b erit hac parallela ipsi BC. Nã alterni anguli EDF, HAG, sunt aquales, vt cõstat ex praxi propos. 23. & c.

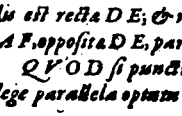


b 27. primi.

ALIO modo ducetur per idem punctum A, datum linea parallela linea data BC, hac arte. Ex centro A, ad quoduis interuallum describatur arcus secans BC, in puncto D; & eodem interuallo ex D, sumatur punctum E, in eadem recta BC. Deinde eodem interuallo ex A, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Nam ducta recta AF, erit parallela recta BC. Quoniam enim propter idem interuallum assumptum recta AF, aqualis est recta DE; & recta AD, recta EF, si ducerentur ha linea; erit AF, opposita DE, parallela, vt postea demonstrabimus propos. 34.



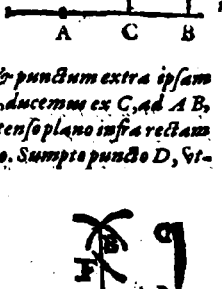
QVOD si punctum A, vicinum fuerit recta BC, commodius hac lege parallela optimè ducetur. Ex A, sumatur punctum D, in BC, ad quoduis interuallum; Et ex quouis puncto eiusdem rectæ BC, nempe E, quod tamen aliquantulum distet à puncto D (Quò enim maior fuerit distantia inter D, & E, eo facilius & accuratius parallela ducetur) eodem interuallo arcus describatur ad partes A. Deinde ex A, interuallo DE, alter arcus describatur secet priorem arcum in F. Recta namq; ducta AF, erit parallela rectæ BC, vt prius; quia recta AF, aqualis est rectæ DE, ob idem interuallum; & rectæ AD, rectæ EF, si hæ rectæ ductæ essent; &c.



SED longè facillimam rationẽ ducendi parallelam alicui linea per datum punctũ tradidimus in nostro Astrolabio lib. 1. lemmate 4.

EX his facilè ducemus ex puncto extremo alicuius linea perpendicularem lineam ad ipsam datam lineam, etiamsi linea produci non possit, quod in scholio propos. 11. promisimus. Sit enim recta AB, cir-cu-

ex cuius extremo puncto B, educenda sit ad eam perpendicularis. Sumpto puncto quouis C, abscindatur recta CB, aequalis CA, & ex A, & B, ad quodvis interuallum duo arcus describantur secantes sese in D, ducaturq; recta DC, quae ad AB, perpendicularis erit, vt ad propos. 11. scripsimus. Deinde per B, ducatur ipsi CD, parallela, hoc modo, secundum praxin huius 31. propositionis proximè explicatam. Ex CD, abscissa recta quantacunq; CE, describatur ex B, ad internallum CE, arcus, quem in F, secet alius arcus ex E, ad interuallum CB, descriptus, ducaturq; recta BF. Hac namque ipsi CD, parallela erit, vt ex praxi huius propos. 31. liquet. Igitur cum angulus ACD, aequalis sit interno CBF; sit autem ACD, rectus, erit & CBF, rectus, ac proinde BF, ad AB, perpendicularis erit.



a 29 primi.

SIMILITER si data sit recta AB, & punctum extra ipsam C, in extremo ferè plani, in quo recta illa iacet, ducemus ex C, ad AB, perpendicularem, neq; producta linea, neq; extenso plano infra rectam AB, vt polliciti sumus ad propos. 12. hoc modo. Sumpto puncto D, vtcunq; in linea AB, abscindatur vtrinq; inter se aequales DA, DB, & ex A, & B, ad quodvis internallum duo arcus describantur secantes sese in E, ducaturq; recta ED, qua ex praxi propos. 11. ad AB, perpendicularis erit. Deinde per C, ducatur ipsi DE, parallela, hoc modo, secundum praxin huius propos. 31. Ex dato puncto C, ad quodvis internallum describatur arcus secans rectam DE, in F: eodemq; interuallo ex D, versus C, alius arcus describatur, quem in G, interseçet alius arcus ex C, ad internallū DF, delineatus. Recta namq; ducta ex C, per G, secans AB, in H, parallela erit rectae DE, ex praxi huius propos. 31. Quare, vt proximè scripsimus, CH, ad AB, perpendicularis erit, situti & ED, ad eandem perpendicularis est.

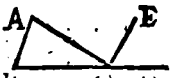


THEOR. 22. PROPOS. 32. xxxij

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est aequalis. Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis aequales.

PRODVCATVR in triangulo ABC, latus BC, ad D. Dico primò, angulum externum ACD, aequalem esse duobus internis, & oppositis simul A, & B. *b* Ducatur enim ex C, linea CE, parallela rectae AB. Quoniam igitur recta AC, incidit in parallelas AB, CE, *c* erunt anguli interni A, & ACE, aequales, *c* 29 pri-

b 31 pri



a 29. primi. b 2 pronum.

Rursus, quia recta B D, in easdem parallelas incidit, *a* erit angulus externus D C E, æqualis interno B. Additis igitur æqualibus A C E, & A, *b* fiet totus A C D (qui ex duobus D C E, A C E, componitur) duobus A, & B, simul æqualis. Quod est propositum.

c 2. pronun. d 13. primi.

DICO secundò, tres angulos internos eiusdem trianguli A, B, & A C B, duobus esse rectis æquales. Cùm enim externus angulus A C D, vt ostensum fuit, æqualis sit duobus internis A, & B; si addatur communis A C B, *c* erunt duo anguli A C D, A C B, æquales tribus A, B, & A C B; Sed duo A C D, A C B, *d* æquales sunt duobus rectis. Igitur & tres interni, A, B, A C B, duobus sunt rectis æquales. Quare cuiuscunq; trianguli vno latere producto, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CVM demonstratum sit propos. 16. angulum externum cuiusuis trianguli maiorem esse vtrolibet interno, & opposito, hic autem, eundem externum eisdem internis simul esse æqualem, perspicuum est, alterutrum internorum, & oppositorum superari ab externo, reliquo interno angulo opposito. Vt in triangulo proposito angulus A, internus superatur ab angulo externo A C D, angulo B, interno: Et angulus B, internus superatur ab eodē externo angulo A C D, angulo A, interno, quæ doquidem angulus A C D, duobus angulis A, & B, est ostensus hoc loco æqualis. Rursum, quia demonstratum est propos. 17. duos angulos quoslibet trianguli quomodocunque sumptos, duobus esse rectis minores, hoc loco omnes tres duobus rectis æquales esse, manifestum est, duos à duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eodem triangulo, duo anguli A, & B, à duobus rectis deficiunt angulo A C B, &c.

e 31. primi. f 32. primi. g 2. pronum. h 2. primi.

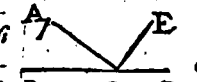


OMNE porro triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, vt refert Eudemus, Pythagorei demonstrarunt hac ratione. Sit triangulum A B C, & per punctum A, e ducatur recta B C, parallela D E. Quoniam igitur f anguli alterni D A B, & A B C, æquales sunt; si addantur æquales E A C, & A C B (sunt enim & hi alterni) g erunt duo anguli D A B, E A C, duobus A B C, A C B, æquales. Additoergo communi angulo B A C, h erunt tres anguli D A B, B A C, C A E, æquales tribus angulis A B C, B A C, A C B. Sed anguli D A B, B A C, C A E, æquales sunt duobus rectis, vt constat ex propositione decimatertia. Igitur & in triangulo A B C, anguli A B C, B A C, A C B, duobus sunt rectis æquales, quod est propositum. Ex hoc autem facilè concludemus, angulum externum A C F, si latus B C, sit protra-

ctum

tum, aqualem esse duobus internis, & oppositis A B C, B A C. Quoniam enim anguli A B C, B A C, A C B, aquales sunt duobus rectis, vt ostensum fuit. a *Sunt autem & anguli A C F, A C B, duobus rectis aquales; Erunt anguli A B C, B A C, A C B, angulis A C F, A C B, aquales. Dempto igitur communi angulo A C B,* b *remanebit angulus A C F, duobus angulis A B C, B A C, aqualis.* a 13. primi. b 3. proinum.

FACILE etiam conuerti poterit prima pars propositionis Euclidis: Hoc est, si ab vno angulo trianguli linea recta ducatur, vt angulus externus aqualis sit duobus internis, & oppositis, illam lineam esse in directum ipsi lateri constitutam. Ex C, enim ducatur C D, recta, sitq; angulus A C D, aqualis duobus angulis A B C, B A C. Dico rectas B C, C D, in directum iacere. Cum enim angulus A C D, aqualis sit angulis A B C, B A C, si addatur communis angulus A C B, c *erunt anguli A C D, A C B, aquales angulis A B C, B A C, A C B: Sed A B C, B A C, A C B,* d *aquales sunt duobus rectis. Igitur & anguli A C D, A C B, duobus erunt rectis aquales.* e *Quare B C, C D, vnam lineam rectam constituunt.*



c 2. proinum. d 32. primi. e 14. primi.

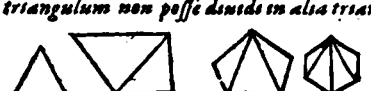
QVOT ANGVLIS RECTIS Æquiualeant anguli omnes interni cuiuscunq; figuræ rectilineæ.

DVOBVS modis ex hac propos. 32. colligemus, quotnam rectis angulis aquiualeant interni anguli figura cuiuslibet rectilinea, quorum primus hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis sunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipsa est inter figuras rectilineas.

HOC est, omnes anguli prima figura rectilinea aquales sint bis vni recto, id est, duobus rectis; Anguli verò secunda figura rectilinea aquales sunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autem tertia figura rectilinea aquales sunt bis tribus rectis, sex videlicet rectis. Et sic reliquis. Eum autem locum qualibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, seu angulorum, dempto binario; quoniam dua linea recta superficiem non concludunt, vnde nec figuram constituunt, sed cum minimum tres recta linea ad figura constitutionem requiruntur. Ex quo fit triangulum, quia habet tria latera, totidemque angulos, esse primam inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus, relinquitur vnum. Sic erit figura habens 20. latera seu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctaua, cum binarius subtractus ex 20. relinquat 18. Idem

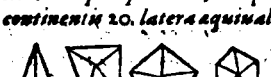
iudicium de alijs figuris est habendum. Itaque figura contenta 20. *lateribus, cum sit decimaoctaua, habebit* 20. *angulos æquiualentes* 36. *rectis angulis, nempe bis* 18. *angulis rectis, vt dictum est. Itaque omnes* 10. *anguli figuræ* 10. *lateribus contentæ, æquiualebunt* 16. *angulis rectis, cum talis figura sit octaua inter rectilineas figuras. Hoc autem hac ratione demonstrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quotus ipsa est inter figuras, seu quot ipsa habet angulos lateraue, binario dempto. Nam à quouis angulo ipsius ad omnes angulos oppositos duci possunt linea recta, solum ad duos propinquos angulos non possunt duci. Quare in tot triangula distribuetur, quot ipsa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic videl. triangulum non posse diuidi in alia triangula; quadrangulum verò in duo secari; quinquangulum in tria; sexangulum in quatuor, &c. Cum igitur anguli horum triangulorum constituant omnes angulos rectilineæ figuræ oppositæ, & omnes anguli cuiuslibet trianguli æquales sint duobus rectis; perspicuum est, omnes angulos figuræ cuiusuis rectilineæ æquales esse bis tot rectis, in quot triangula diuiditur, hoc est, quotus ipsa est inter rectilineas figuras. Quod quidem manifestè perspicitur in propositis figuris.*



SECVNDVS modus, quo scitur, valor angulorum cuiuslibet figuræ rectilineæ, hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis, æquales sunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.

HOC est, anguli cuiuslibet trianguli æquales sunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis. Item etiam anguli figuræ continentis 20. *latera æquiualebunt bis* 20. *angulis rectis, minus quatuor, nimirum* 36. *rectis angulis, &c. Demonstratio autem huius rei talis est. Si à quouis puncto intra figuram assumpto ad omnes angulos recta linea ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, angulósue figura ipsa*



continet. Cum igitur anguli cuiuscunq; trianguli æquales sint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum æquales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundem triangulorum circa punctum intra figuram assumptum consistentes non pertinent ad angulos figuræ rectilineæ propositæ, vt constat. Quare si hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli constituentes angulos figuræ propositæ, bis quoque tot rectis æquales, demptis illis circa punctum assumptum constitutis, quot latera, vel angulos continet figura.

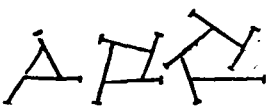
32. pri mus.

Sunt

Sunt autem omnes illi anguli, quotquot sint, circa dictum punctum existentes æquales 4. rectis tantummodò, vt collegimus ex propos. 15. Quamobrem anguli cuiusque figuræ bis tot rectis sunt æquales, ablatis quatuor, quot ipsa figura continet angulos, seu latera, quod est propositum.

EX hac porro secundo modo liquet, si singula latera figuræ cuiuslibet rectilineæ producantur ordinatim versus eandem partem, omnes angulos externos æquales esse quatuor rectis. Nam quilibet externus, & illi deinceps internus, æquantur duobus rectis; atq; adeo omnes externi vna cum omnibus internis æquales erunt bis tot rectis, quot latera, angulósue figura continet. Sunt autem & soli interni bis tot rectis æquales, minus quatuor, vt demonstrauimus. Si igitur interni auferantur, remanebunt externi quatuor tantùm rectis æquales, qui nimirum desunt internis angulis, vt interni & externi simul bis tot rectos conficiant, quot latera figuram propositam ambiunt. Exemplum. a 13. pri.

In triangulo quouis, anguli interni & externi simul æquales sunt sex rectis. Cum igitur interni b *duobus sint rectis æquales, erunt soli externi æquales quatuor duntaxat rectis. In quadrilatero, anguli externi & interni simul æquales sunt octo rectis. Cum igitur interni soli æquales sint quatuor rectis, vt ostendimus, erunt & soli externi quatuor etiam rectis æquales. In pentagono, seu quinquangulo, anguli interni & externi sunt æquales 10. rectis. Quoniam verò interni adæquantur sex rectis, vt demonstrauimus, remanebunt externi æquales quatuor tantum rectis. Qua omnia in appositis figuris conspiciuntur. Eademque est ratio in aliis omnibus figuris.*



b 32. pri.

EX CAMPANO.

SI pentagoni singula latera producantur in partem vtramq;, ita vt quælibet duo extra pentagonum coeant, efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus solum rectis.

IN pentagono ABCDE, latera in vtramque partem producta coeant in punctis F, G, H, I, K. Dico quinque angulos F, G, H, I, K, æquales tantum esse duobus rectis. In triangulo enim BHK, cum latus HB, sit protractum ad F, c erit externus angulus FBK, duobus internis, & oppositis H, K, æqualis. Eadem ratione in triangulo AIG, erit externus angulus FAG, æqualis duobus internis, & oppositis I, G. Quare duo anguli FBA, FAB, æquales sunt quatuor angulis G, H, I, K. Addito igitur communi



c 32. pri.

angulo

a 2. pro-nunc. *angulo F, a erunt tres anguli A, B, F, trianguli A B F, aequales quinque angulis F, G H I K. Sed anguli A, B, F, trianguli A B F,* b *aequales sunt duobus rectis. Igitur & quinque anguli F, G, H, I, K, duobus*
b 32. pri mi. *sunt rectis aequales. Quod est propositum.*

COROLLARIVM I.

EX hac propos. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli simul sumptos aequales esse tribus angulis cuiusq; alterius trianguli simul sumptis: Quoniam tam illi tres, quam hi, *c* aequales sunt duobus angulis rectis. Vnde si duo anguli vnius trianguli fuerint aequales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo huius aequalis, aequiangulaque erunt ipsa triangula.
c 32. pri mi.

COROLLARIVM II.

CONSTAT etiam, in omni triangulo Isoscele, cuius angulus lateribus aequalibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum. Nam reliqui duo simul conficiunt vnum rectum, *d* cum omnes tres sint aequales duobus rectis: & tertius ille ponatur rectus. Quare *e* cum duo reliqui inter se sint aequales, erit quilibet eorum semirectus. At verò si angulus aequalibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet aliorum esse semirecto minorem. Reliqui enim duo simul minores erunt vno recto, &c. Si demique dictus angulus extiterit acutus, vtrumque reliquorum maiorem esse semirecto. Quoniam reliqui duo simul maiores erunt vno recto, &c.
d 32. pri mi.
e 5. pri.

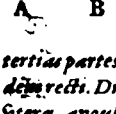
COROLLARIVM III.

PERSPICVVM quoque est, quemuis angulum trianguli aequilateri esse duas tertias partes vnius recti, vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, *f* quibus aequales sunt tres anguli trianguli aequilateri, diuisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes vnius recti.
f 32. pri.

COROLLARIVM IV.

LIQVET etiam, si ab vno angulo trianguli aequilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangula scalena, quorum vnumquodque habet vnum angulum rectum prope perpendicularem; alium duas tertias partes vnius recti, illum scilicet, qui est, & angulus trianguli aequilateri; reliquum denique tertiam partem vnius recti.

SCHOLIVM.

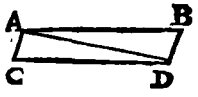


PORRO ex tertio corollario deprimi potest methodus, qua angulus rectus in tres angulos aequales diuidatur. Sit enim angulus rectus A B C. Super rectam A B, g *constituatur triangulum aequilaterum A B D. Et quia per corollarium 3. angulus A B D, facit duas tertias partes anguli recti A B C; erit angulus C B D, pars tertia eiusdem recti. Diuiso igitur angulo A B D,* h *bifariam per rectam B E, erit vterq; angulus A B E, E B D, tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus A B C, diuisus est in tres angulos aequales. Quod est propositum.*
g 1. pri.
h 9. pri.

THEOR.

THEOR. 23. PROPOS. 33. xxxiij.

RECTÆ lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes eaſdem coniungunt; Et ipſæ æquales, & parallelæ ſunt.



SINT rectæ lineæ AB, CD, æquales, & parallelæ; Ipſas autem coniungant ad eaſdem partes rectæ AC, BD. Dico AC, BD, æquales quoque eſſe, & parallelas. Ducatur enim recta AD. Quoniam igitur AD, incidit in parallelas AB, CD, *a* erunt anguli alterni BAD, CDA, æquales. Quare cum duo latera BA, AD, trianguli BAD, æqualia ſint duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, vtrumque vtrique, & anguli quoque dictis lateribus incluſi æquales; *b* erunt baſes BD, AC, æquales, & angulus ADB, angulo DAC, æqualis. Cum igitur hi anguli ſint alterni inter rectas AC, BD, *c* erunt AC, BD, parallelæ; Probatum autem iam fuit, eaſdem eſſe æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 29. pri mi.
b 4. pri.
c 27. pri mi.

SCHOLIVM.

DIXIT Euclides, lineas æquales, & parallelas ad eaſdem partes debere coniungi, vt ipſæ coniungentes ſint & æquales & parallelæ. Nam ſi ad partes diuerſas coniungerentur, vt ad A, & D. Item ad B, & C, neque coniungentes linea eſſent parallela vnquam, ſed perpetuo ſe mutuo ſecarent, neque eſſent æquales, niſi raro admodum, vt ex ſequenti propoſitione conſtabit.

THEOR. 24. PROPOS. 34. xxxiv.

PARALLELOGRAMMORVM ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex aduerſo & latera, & anguli; atque illa bifariam ſecat diameter.

SIT parallelogrammum ABCD, quale definiuimus definitione 35. Dico latera oppoſita AB, DC, inter ſe eſſe æqualia, nec non latera oppoſita AD, BC. Item angulos oppoſitos B, & D, æquales inter ſe eſſe, nec non & angulos oppoſitos DAB, & DCB: Denique ducta diametro AC, parallelogrammum ipſum bifariam ſecari. Cum enim AB, DC, ſint parallelæ, *d* erunt anguli alterni BAC, DCA, æquales. Rurſus quia AD, BC, ſunt parallelæ, *e* erunt & anguli alterni BCA, DAC, æquales. Itaq; cum anguli BAC, BCA, trianguli ABC, æquales ſint duobus angulis DCA, DAC, trianguli ADC, vterque vtrique, & latus AC, dictis



d 29. pri mi.
e 29. pri mi.

a 26. primi. A C, dictis angulis adiacens, commune vtrique triangulo; a erit recta A B, æqualis oppositæ rectæ D C, & recta B G, oppositæ rectæ A D, quod est primum. Erit rursus eadem de causa angulus B, angulo D, æqualis. Et quia si æqualibus angulis B A C, D C A, addantur æquales anguli D A C, B C A, toti quoque anguli B A D,

b 2. primi. B C D, b fiunt æquales; constat secundum, angulos nimirum oppositos esse æquales. Quòniam verò duo latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia sunt duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumque vtrique, & angulus B, angulo D, æqualis, vt iam

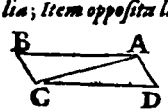
c 4. primi. ostendimus; c erunt triangula A B C, C D A, æqualia, ideoque parallelogrammum A B C D, diuisum erit bifariam à diametro A C, quod tertio loco proponebatur. Parallelogrammorum igitur spatiorum æqualia sunt inter se, quæ exaduerso, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

APPOSITE dixit Euclides, solummodo parallelogramma à diametro diuidi bifariam, non autem & angulos. In Quadrato enim, & Rhombo duntaxat anguli etiam bifariam diuidentur à diametro; At in figura Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perspicua erunt, si prius ostenderimus, quatuor hasce figuras, Quadratum, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma. Hoc autem demonstrabimus tribus sequentibus theorematibus, quorum primum est.

OMNE quadrilaterum habens latera opposita æqualia, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero A B C D, latera opposita A B, D C, æqualia; Item opposita latera A D, B C. Dico A B C D, esse parallelogrammum; hoc est, lineas A B, D C, esse parallelas; Itemque lineas A D, B C. Ducta enim diametro A C, erunt duo latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia duobus lateribus C D, D A, trianguli



d 8. primi. *C D A, vtrumque vtrique, & basis A C, communis. Igitur d erit angulus B, angulo D, æqualis. Rursus quia latera A B, B C, æqualia sunt lateribus C D, D A, vtrumque vtrique, & anguli, B, D, ostensi*

e 4. primi. *æquales; e erit angulus B A C, angulo D C A, alterno æqualis, &*

f 24. primi. *angulus B C A, alterno angulo D A C. Quare f erunt A B, & D C, parallelæ; Item A D, & B C, quod est propositum.*

HINC constat, Rhombum, & Rhomboidem esse parallelogramma; quoniam opposita eorum latera sunt inter se æqualia, vt manifestum est ex eorum definitionibus. Parallelogrammum autem quadratum, parallelogrammum erit, quod latera opposita habeat æqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter se æqualia, per eius definitionem.

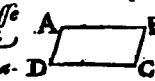
Conuer-

Conuertit autem hoc theorema primam partem propositionis 34. vt patet.

Secundum theorema tale est.

OMNE quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, est parallelogrammum.

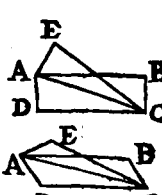
SINT in quadrilatero ABCD, anguli oppositi A, & C, æquales: Item oppositi anguli B, & D. Dico ABCD, esse parallelogrammum: hoc est, lineas AB, DC, esse parallelas: Itemque lineas AD, BC. Nam si æqualibus angulis A, & C, addantur æquales anguli B, & D: a erunt duo anguli A, & B, duobus angulis D, & C, æquales & idcirco anguli A, & B, dimidium facient quatuor angulorum A, B, C, & D. Cum igitur hi quatuor æquales sint quatuor rectis, vt ad propos. 32. demonstrauimus, erunt duo A, & B, duobus rectis æquales. Quare AD, BC, b parallela sunt. Eadem ratione erunt AB, DC, parallelæ. Erunt enim duo quoque anguli A, & D, duobus angulis B, & C, æquales, &c. Quod est propositum. Ex hoc etiam manifestum est, Rhomboidem esse parallelogrammum, cum eius anguli oppositi æquales sint, per definitionem. Similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppositi æquales, cum sint recti, ex eorum definitionibus.



a 2. primi.

b 28. primi.

HOC theorema conuertit secundam partem propositionis 34. vt constat. Tertia autem pars non potest conuerti. Nam & trapezium aliquod bifariam secari potest à diametro, & tamen non est parallelogrammum. Sit enim altera parte longius, vel Rhomboides ABCD, quod parallelogrammum esse ostensum est: in quo, ducta diametro AC, constituatur super AC, triangulo ABC, æquale triangulum AEC, inuerso ordine, ita vt latus CE, sit æquale lateri AB, & AE, ipsi CB, vt in scholio propos. 22. docuimus: fiatq; trapezium AECD. Quoniam verò triangulum ABC, triangulo ADC, æquale est, c quod diameter AC, bifariam secet parallelogrammum DB: Erit & triangulum AEC, triangulo ADC, æquale: Ac proinde trapezium AECD, bifariam diuidetur à diametro AC.



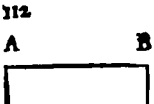
c 34. primi.

QVOD si quadrilaterum aliquod diuidatur bifariam ab vtraq; diametro, illud parallelogrammum erit, vt ostendemus ad propos. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri potest.

Tertium Theorema huiusmodi est.

OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est parallelogrammum.

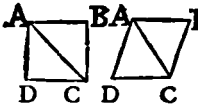
SINT



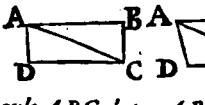
SINT in quadrilatero A B C D, omnes quatuor anguli recti. Dico ipſum eſſe parallelogrammum: hoc eſt, lineas A B, D C, eſſe parallelas: Itemque A D, B C. Quoniam enim duo anguli A, & B, æquales ſunt duobus rectis, cum ſint duo recti:
a 28. primi. *a erunt A D, B C, parallela. Eodem modo erunt A B, D C, parallela: atque adeo A B C D, parallelogrammum. quod eſt propoſitum.*

HINC rurſum conſtat, Quadratum, & altera parte longius, eſſe parallelogramma, cum eorum anguli omnes exiſtant recti, & liquet ex eorum definitionibus.

HIS in hunc modum demonſtratis, Quadratum ſcilicet, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, eſſe parallelogramma, facile oſtendemus, angulos Quadrati, & Rhombi, bifariam ſecari à diametro: Angulos verò figuræ, Altera parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, & paulo ante monuimus. Sit enim Quadratum, vel Rhombus A B C D, in quo diameter A C. Quoniam igitur duo latera B A, A C, trianguli B A C, æqualia ſunt duobus lateribus D A, A C, trianguli D A C, utrumq; utrique, & baſis B C, baſi D C, (ſunt enim ha

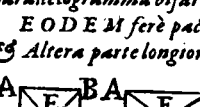


b 8. primi. *figuræ æquilateræ) b erunt anguli B A C, D A C, æquales. Quare angulus B A D, diuiditur bifariam. Eodem modo demonſtrabimus, reliquos angulos bifariam ſecari à diametro.*



SIT rurſus Altera parte longius, vel Rhomboides A B C D, in quo diameter A C, ſitque maius latus A B. Quoniã igitur in trian-
c 18. primi. *gulo A B C, latus A B, maius eſt latere B C, c erit angulus B C A,*
d 29. primi. *maior angulo B A C. Eſt autem angulus B C A, d æqualis angulo D A C, alterno: quod B C, A D, parallelæ ſint. (Eſt enim A B C D, oſtenſum eſſe parallelogrammum.) Igitur & angulus D A C, maior erit angulo B A C. Atque propterea angulus B A D, inæqualiter diuiditur à diametro A C. Eadem eſt ratio aliorum angulorum. Quamobrem appoſitè Euclides in tertia parte huius propoſitionis dixit, ſolum parallelogramma bifariam à diametro ſecari, non autem & angulos.*

EODEM ferè pacto oſtendemus, duas diametros in Quadrato, & Altera parte longiore æquales eſſe; At verò in Rhombo, & Rhom-



boide inæquales, maiorem quidem eam, quæ angulos acutos, minorem verò eam, quæ obtuſos angulos diſpertit. Sit enim quadratum, vel altera parte longius A B C D, in quo diametri A C, B D, quas dico eſſe æquales. Cum enim duo latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia

æqualia sint duobus lateribus A B, A D, trianguli B A D: & trumque utrique, & angulus A B C, angulo B A D, quia uterque rectus: a *erit basis A C, basi B D, æqualis: Ac proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore æquales sunt.* a 4. pri.

SIT rursus Rhombus, vel Rhomboides, A B C D, in quo diametri AC, BD; sitq; angulus B A D, maior; A B C, minor. Non enim æquales sunt, quia alias uterque esset rectus, cum ambo b *æquales sint duobus rectis; quod est absurdum, & contra definitiones Rhombi, & Rhomboidis. Dico diametrum B D, maiorem esse diametro A C.*



b 29. pri. mi.

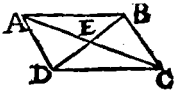
Quoniam enim duo latera A B, A D, trianguli B A D, æqualia sunt duobus lateribus A B, B C, trianguli A B C, & trumque utrique, & angulus B A D, angulo A B C, maior existit; c *erit basis B D, maior basi A C. quod est propositum. Ex quo manifestum est, cur in propositione 33. Euclides asserverit, eas tantum lineas, qua coniungunt parallelas æquales ad easdem partes, æquales esse, & ibidem annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboide recta A C, B D, inæquales sunt, licet coniungant parallelas æquales A B, D C: quia non ad easdem partes ipsas coniungunt, & perspicuum est.* c 24. pri. mi.

IN omni tamen parallelogrammo diametri se mutuo bifariam diuidunt. Cum enim duo anguli E A D, E D A, trianguli A E D, d *æquales sint alternis angulis E C B, E B C, trianguli B E C, & uterque utrique; &* e *latus A D, æquale lateri B C, opposito in parallelogrammo A B C D, quorum & trumque æqualibus adiacet angulis;* f *Erit & A E, recta recta C E, & recta D E, recta B E, æqualis. Quare & traque diameter bifariam diuidetur in puncto E.* d 29. pri. mi. e 34. pri. mi. f 26. pri. mi.

HVIVS autem, quod modo diximus, conuersum etiam demonstrabimus, nimirum.

OMNE quadrilaterum, in quo diametri se mutuo bifariam diuidunt, parallelogrammum est.

IN quadrilatero enim A B C D, diametri A C, B D, se mutuo bifariam diuidant in E. Dico A B C D, parallelogrammũ esse. Cum enim latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia sint lateribus C E, E D, triãguli C E D, & anguli contenti ad verticem E,



g *æquales quoque;* h *erunt & bases A B, C D, æquales, & anguli A B E, angulo alterno C D E, æqualis.* i *Quare recta A B, C D, parallela sunt. Eadem ratione parallela ostendentur A D, C B. Parallelogrammum ergo est A B C D.* g 15. pri. h 4. pri. i 27. pri.

IT A QVE, si quis expedite parallelogrammum describere velit, ducat duas lineas A C, B D, utcunque se in E, intersecantes. Si tamquetam E A, E C, inter se, quam E B, E D, inter se æquales abscindet,

constituent recta AB, BC, CD, DA, parallelogrammum, & vt hic demonstratum est. Quod si anguli ad E, sint recti, & omnes quatuor rectae EA, EC, EB, ED, inter se aequales, constitutum parallelogrammum erit quadratum, propterea quod octo anguli ad A, B, C, D, sunt semirecti, & vt facile demonstrabitur per 5. & 32. huius.

HVC quoque referri potest hoc theorema.)

RECTA linea secans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum bifariam quoque: & recta linea diuidens parallelogrammum bifariam quouis modo, secat quoque diametrum bifariam.

IN parallelogrammo ABCD, diametrum AC, bifariam secet recta EF, in puncto G. Dico parallelogrammum diuidi bifariam.

a 29. pri mi. *Quoniam enim angulus EAG, a aqualis est angulo alterno BCG,*
b 15. pri. *& b angulus EGA, angulo FGC. Est autem & latus AG, lateri*
c 26 pri mi. *CG, aquale, per hypothesin, qua ambo aqualibus*
d 4. pri. *angulis adiacent; c erunt & latera EG, FG,*
e 2. pro num. *aqualia. Quare cum latera AG, GE, aqualia*
f 34. pri mi. *sint lateribus CG, GF, & anguli quoque contenti aquales; d erunt triangula AGE, CGF, aqualia. Addita igitur communi quantitate BCGE, e erit triangulum ABC, trapezio BCFE, aquale: Sed triangulum ABC, f dimidium est parallelogrammi ABCD. Igitur & trapezium dimidium erit eiusdem parallelogrammi, ideoq; recta EF, parallelogrammum bifariam secat.*



SECET iam EF, parallelogrammum bifariam; Dico & diametrum AC, bifariam secari in G. Si enim diameter AC, non bifariam
g 10. pri mi. *diuiditur in G, g diuidatur bifariam in alio puncto, vt in H, per quod ducatur recta EHI. Erit ergo, vt iam demonstrauimus, EICB, trapezium dimidium parallelogrammi ABCD, atque adeo aquale trapezio EFCB, quod etiam dimidium ponitur eiusdem parallelogrammi, pars toti, quod est absurdum. Diuiditur igitur AC, bifariam in G, & non in alio puncto, quod erat propositum.*

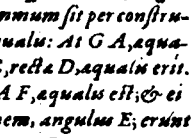
HINC facile colligitur, si in latere aliquo parallelogrammi cuiusque punctum signetur, vel etiam intra parallelogrammum, vel extra, quod tamen non sit in diametro, nisi ipsum secet diametrum bifariam; qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, qua parallelogrammum bifariam secet. Si enim diameter ducatur, & a puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt si punctum sit E, in latere AB, ducenda est recta EF, per G, punctum, in quo diameter AC, bifariam diuiditur; & sic de alijs punctis

DEMONSTRAT quoque hic Peletarius problema non insuecundum, videlicet.

INTER

INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarũ faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autẽ hunc angulum datum, & eum, qui lineis datis continetur, minores esse duobus rectis.

DVÆ recta infinita A B, A C, continent angulum B A C, sitq; data recta finita quæcunque D, & angulus datus E, hac lege, vt duo anguli E, & B A C, minores sint duobus rectis. Oportet igitur inter rectas A B, A C, collocare rectam æqualem quidem recta D, cum alterutra vero illarum, nimirum cum A C, facientem angulum æqualem angulo dato E. a *Fiat angulus C A F, æqualis angulo E, & producta F A, ad G,* b *sit A G, æqualis rectæ D; & per G,* c *ducatur G B, parallela ipsi A C, secans A B, in B: Deinde per B, ducatur B C, parallela ipsi A G, secans A C, in C. Dico rectam B C, collocatam inter rectas A B, A C, æqualem esse rectæ D, angulumq; B C A, angulo E. Cum enim parallelogrammum sit per constructionem, A C B G,* d *erit recta B C, rectæ G A, æqualis: At G A, æqualis est, per constructionem, rectæ D. Igitur & B C, rectæ D, æqualis erit. Rursus* e *quia angulus B C A, angulo alterno C A F, æqualis est; & ei dem angulo C A F, æqualis est, per constructionem, angulus E; erunt anguli E, & B C A, æquales. Quod est propositum. Cæterum ex constructione manifestum esse cuilibet potest, cur duo anguli dati minores esse debeant duobus rectis. Nam alias non fieret triangulum A B C, si anguli B A C, & B C A, æquales essent duobus rectis, vel maiores, vt constat ex propos. 17. vel 32.*



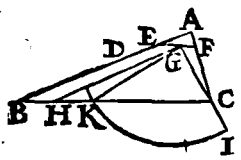
a 23. primi.
b 3. pri.
c 31. pri.
d 34. primi.
e 29. primi.

SCHOLIVM.

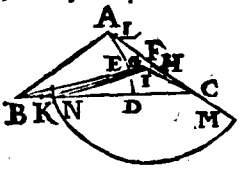
NON alienum erit à nostro instituto, adiicere quædam hoc loco ad lineas intra triangulum constitutas pertinentia, quæ à Pappo Alexandrino lib. 3. Mathematicarum collectionũ demonstrantur: quemadmodum facturos nos recepimus ad propos. 21. Primum igitur in omni triangulo, quod non sit æquilaterum, vel Isosceles habens basim vtrouis latere minorem, non solum à duobus punctis basis constitui possunt duæ rectæ intra triangulum, quæ simul sumptæ maiores sint duobus lateribus simul sumptis, vt à Proclo in triangulis rectangulis, vel obtusangulis ostensum est ad propos. 21. sed etiam æquales.

SIT enim primum triangulum A B C, habens latus A B, latere A C, maius, sitq; B D, dimidium vtriusque lateris A B, A C, simul: Sumpto autem inter A, D, puncto E, vtcunq;, agatur E F, ipsi B C, parallela; & ex quouis puncto G, lateri A B, parallela ducatur G H, rectaq; iungatur G C. Et quoniam E A, A F, f *maiores sunt, quam E F: Item C F, F G, maiores, quam G C: erunt E A, A C, F G, simul maiores, quam E F, G C, simul: ablataq; communi F G, erunt E A, A C,*

f 20. primi.



simul maiores, quam E G, G C, simul: ac proinde multo maiores, quam G C, sola. Producatur ergo G C, fiatq; G I, ipsis E A, A C, simul aequalis. Quia vero B E, maior est, quam vtraque E A, A C, simul, quod B E, superet B D, dimidium vtriusque B A, A C, simul, at E A, A C, simul deficiant à dimidio earundem, nimirum ab vtraque D A, A C, simul: erit quoque B E, maior, quam G I, quae ipsis E A, A C, simul
a 34. pri mi. *est aequalis. Cum igitur a ipsi B E, aequalis sit G H, in parallelogrammo B E G H: erit quoque G H, maior, quam G I. Si igitur centro G, & internallo G I, circulus describatur, secabit is rectam G H, ac propterea & ipsam C H, prius secabit in K. Connectatur G K. Dico vtramque G H, G K, simul aequalem esse vtrique A B, A C, simul. Id quod ex constructione perspicuum est. Nam G H, ipsi B E, aequalis est, & G I, hoc est, G K, ipsis E A, A C, simul. Atque hoc infinitis modis fieri potest, prout punctum E, remotius à D, sumptum fuerit, & punctum G, à puncto E: hoc est, prout tam A D, quam E F, infinitis in punctis secari potest.*



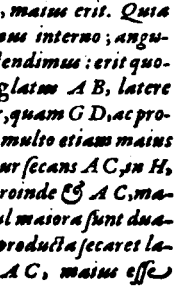
SIT deinde Isosceles A B C, habens basim B C, vtrum latere maiorem. Describito ex centro B, per A, arcu A D, secante rectam B C, in D, ducatur vtcunque recta B F, secans arcum in E, & latus A C, in F: & in E F, per quodvis punctum G, ipsi B C, parallela agatur G H, & per quodcunque eius punctum I, ipsi B F, parallela ducatur I K, rectaq; sumatur I C: atque ipsi E G: aequalis abscindatur A L. Erit igitur B G, ipsis A B, A L, simul aequalis, at L C, minor quam B E, sive A B,
b 34. pri mi. *& ob id multo minor, quam B G. Et quia ipsi B G, b aequalis est I K, in parallelogrammo B G I K: erit quoque I K, ipsis A B, A L, simul*
c 10. pri mi. *aequalis, maior autem, quam L C. Itaque c quia G F, F H, maiores sunt, quam G H: & H C, H I, maiores, quam I C: erunt G F, F C, H I, simul maiores, quam G H, I C: & ablata communi H I, erunt reliquae G F, F C, simul maiores, quam G I, I C, simul: ac proinde appositae communi B G, fient B F, F C, simul maiores, quam B G, G I, I C, si-*
d 20. pri mi. *mul. Sed ipsis B F, F C, d maiores sunt B A, A C, simul. Ergo multo maiores erunt B A, A C, simul, quam B G, G I, I C, simul. Cum ergo B G, ipsis B A, A L, simul aequalis sit, erit reliqua L C, maior, quam reliqua G I, I C, simul, ac proinde multo maior, quam I C, sola. Ponatur I M, (producta I C) ipsi L C, aequalis. Et quia I K, ostensa est maior, quam L C, hoc est, quam I M: si ex centro I, per M, arcus circuli describatur, secabit is rectam I K, ac proinde prius ipsam C K, secabit in N. Connectatur I N. Dico vtramque I K, I N, simul aequa-*

lem esse

lem esse vtrique AB, AC, simul. Id quod ex constructione patet. Est namque IK, ipsis AB, AL, simul aequalis, & IN, hoc est, IM, ipsi LC, aequalis. Atque hoc infinitis modis fieri potest: cum BF, infinitis modis duci possit: & tam EF, quam GH, infinitis modis secari.

CONSTAT autem, si intra idem triangulum ABC, ducantur duae rectae, quae rectas HG, GK, in priori triangulo, vel rectas KI, IN, in posteriori includant, eas maiores fore simul sumptas lateribus AB, AC, simul sumptis: quippe quae a maiores forent rectis HG, GK, in priori triangulo, vel rectis KI, IN, in posteriori. a 21. primi.

AT verò in triangulo aequilatero, vel Isoscele habente basim vtrouis latere minorem, non posse intus constitui duas lineas maiores, vel aequales simul sumptas duobus lateribus simul sumptis, sed quascunque interiores esse minores, ita ostendi potest. In triangulo enim ABC, cuius duo latera AB, AC, aequalia, & basis BC, non maior, sed vel aequalis, vel minor; ita vt angulus A, maior non sit, quam angulus B, vel C, b sed vel aequalis, vel minor: constituantur duae rectae DE, EF, vtcunque, quae dico minores esse simul sumptas duobus lateribus AB, AC, simul sumptis. Producatur enim DE, secans latus AC, in G, iungaturq; recta GB. Quoniam igitur c duo anguli ABC, & C, aequales sunt, estq; ABC, maior angulo GBC, erit quoque C, maior angulo GBC. Est d autem & angulus GDB, angulo C, maior, externus interno. Igitur multo maior erit angulus GDB, angulo GBC; e ac proinde latus GB, latere GD, maius erit. Quia verò f angulus BGA, maior est angulo C, externus interno; angulusq; C, vel aequalis est angulo A, vel maior, vt ostendimus: erit quoque angulus BGA, angulo A, maior. Quare g latus AB, latere GB, maius erit: Sed recta GB, ostensa est maior, quam GD, ac proinde multo maior, quam DE. Igitur latus AB, multo etiam maius erit, quam DE. Eadem ratione, si FE, producatur secans AC, in H, iungaturq; recta HB, ostendemus latus AB, ac proinde & AC, maius esse, quam FE. Quocirca latera AB, AC, simul maiora sunt duabus rectis DE, EF, simul sumptis. Quod si FE, producta secaret latus AB, demonstraremus eodem modo, latus AC, maius esse recta EF.



b 5. vel 18. pri.

c 5. pri.

d 16. primi.

e 19. primi.

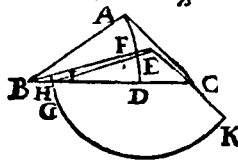
f 16. primi.

g 19. primi.

IAM verò, si admirabile videatur iis, qui Geometria ignari sunt, in illis, quae diximus, triangulis duci posse lineas interiores, quae simul sumptae maiores sint, vel aequales duobus lateribus simul sumptis; admirabilius sane erit, intra eadem illa triangula constitui posse duas lineas, quarum singula singulis lateribus maiores sint, vel aequales. Sint ergo primum constituenda singula linea singulis lateribus maiores in triangulo ABC, cuius latus AB, minus non sit latere AC, at latus BC, vtrouis latere AB, AC, maius. Descripto ex centro B, ar-

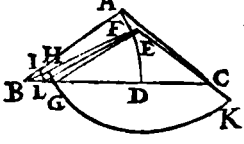
cu circuli AD, ſumatur quoduis punctum E, inter arcum AD, & latus AC, ducaturq; recta BE, ſecans arcum in F; ita vt BE, maior ſit quam BF, hoc eſt, quam BA, tangaturq; EC. Quia vero a BE, EC, ſimul minores ſunt, quam AB, AC ſimul, eſtque BE, maior, quam AB, erit EC, multo minor, quam AC. Producta igitur EC, fiat EK, ipſi AC, aqualis, ac propterea minor, quam EB; deſcribaturque

a 21. primi.



ex E, per K, arcus circuli, qui rectam EB, ſecabit, ac proinde & ipſam CB, prius ſecabit in G. Sumpto denique inter B, & G, quouis puncto H, tangatur recta EH, ſecans arcum in I: factumque erit, quod proponitur. Nam BE, maior eſt, quam BA, & EH, maior, quam EI, hoc eſt, quam EK, vel AC.

DEINDE ſint ſingula linea ſingulis lateribus aquales conſtituenda intra idem triangulum: fiatq; eadem conſtructio, dempta linea EH, ſed arcus KG, ſecet rectam EB, in H. Et latus BA, latere AC, ponatur maius, eritq; BE, recta maior, quam AB, cum maior ſit quam BF, quæ aqualis eſt ipſi AB. Sumpta igitur EI, aqualis ipſi AB, cadet punctum I, inter B, & H; quandoquidem EB, maior eſt, quam AB, & EH, minor, quam AB. Ex E, per I, deſcribatur arcus circuli ſecans BC, in L, tangaturque recta EL, EG: factumque erit, quod proponitur. Nam EL, ipſi EI, hoc eſt, ipſi AB, aqualis eſt, & EG, ipſi EK, hoc eſt, ipſi AC.



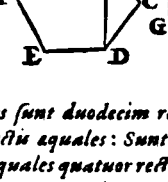
PRÆTER hac demonſtrat Pappus, intra eadem, qua diximus, triangula conſtitui poſſe duas rectas ductibus lateribus maiores, & qua habeant ad eadem latera proportionem datam, qua tamen dupla proportione minor ſit: quod incredibile cuiquam videri poſſit. Qua res hoc loco demonſtrari non poteſt, cum ex proportionibus pendeat.

EX PROCLO.

IN omni figura rectilinea latera habente numero paria, ſi quidem fuerit æquilatera, & æquiangula: erunt duo quælibet latera oppoſita, parallela inter ſeſe.

LATERA oppoſita dicuntur illa duo, qua ex vtraq; parte latera habent æqualia numero: vt in hexagono ABCDEF, latera oppoſita erunt AB, ED: quoniam tam ad partes A, & E, duo ſunt latera, quam ad partes B, & D. In octogono verò ABCDEFGH, latera oppoſita erunt AB, FE, quia tam ad partes A, & F, tria ſunt latera, quam ad partes B, & E. Et ſic in aliis figuris aquilaterum parium laterum

laterum, ex utraque parte oppositorum laterum erunt tot latera, quot sunt in dimidio numero laterum, minus uno. Vt in quadrangulo erit unum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor, in figura 12. laterum quinque, &c. Dico igitur qualibet latera opposita esse parallela; AB, nimirum ipsi ED, in hexagono; & AB, ipsi FE, in octogono, & sic de cæteris. Connectantur enim duo extrema oppositorum laterum ad easdem partes linea recta, qualis est in hexagono BD, & in octogono BE. Et quoniam, ut ad 32 propos. demonstrauimus, sex anguli hexagoni æquales sunt octo rectis, erunt tres anguli B, C, D, eiusdem hexagoni æquales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur æquales;



Sunt autem anguli BCD, CBD, CDB, trianguli BCD, a duobus rectis æquales. Reliqui igitur anguli ABD, EDB, duobus rectis æquales erunt; Quare b parallela erunt AB, & ED. Rursus quia octo anguli octogoni æquales sunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B, C, D, E, sex rectis æquales: Sunt autem quatuor anguli quadrilateri BCDE, æquales quatuor rectis. Igitur duo reliqui anguli ABE, FEB, duobus erunt rectis æquales, c atque adeo AB, FE, parallela erunt. Eodem modo demonstrabitur, in omnibus aliis figuris huiusmodi, angulos duos ad lineam rectam extrema oppositorum laterum coniungentem existentes, duobus esse rectis æquales. Nam in decagono aufert ea linea pentagonum, cuius anguli æquales sunt sex rectis: At quinque anguli decagoni æquales sunt octo rectis. Ablatis igitur sex, relinquuntur duo recti. In figura æquilatera, & æquiangula duodecim laterum eadem linea abscindet hexagonum, cuius anguli sunt octo rectis æquales: At sex anguli totius figuræ æquales sunt decem rectis. Demptis igitur octo, remanent duo recti, &c.

a 32. primi.
b 28. primi.
c 28. primi.

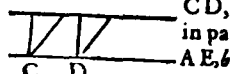
QVAMVIS autem omnis figura æquiangula parium laterum habeat latera opposita parallela, ut ostendimus; tamen sola quadrilatera figura latera opposita habens parallela, ab Euclide, & aliis Geometris parallelogrammum dici consueuit, propterea q; in definitionibus, Parallelogrammum diximus esse figuram quadrilateram, &c.

THEOR. 25. PROPOS. 35. XXXV.

PARALLELOGRAMMA super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

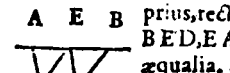
INTER duas parallelas AB, CD, super basi CD, existant duo parallelogramma CDEA, CDBF. (Dicuntur autem paral-

lelogramma in eiſdem eſſe parallelis, quando duo latera oppoſita partes ſunt parallelarum, vt in exemplo propoſito cernitur.) Dico ipſa parallelogramma inter ſe eſſe æqualia, non quoad angulos & latera, ſed quoad aream, ſeu capacitatem. Cadat enim primo punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in parallelo-



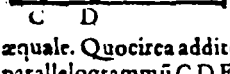
a 34.primi. grammo C D E A, recta A E, *a* æqualis eſt rectæ C D, oppoſitæ; & eidem C D, æqualis eſt F B, in parallelogrammo C D B F, oppoſita; Erunt b 1.prouun. A E, *b* F B, inter ſe æquales. Dempta igitur communi F E, *c* remanebit A F, ipſi E B, æqualis: c 3.prouun. *d* Eſt autem & A C, ipſi E D, oppoſitæ æqualis in parallelogrammo C D E A; *e* & angulus B E D, angulo F A C, externus interno. d 34.primi. *f* Quare triangulum F A C, triangulo B E D, æquale erit. Addito igitur communi trapezio C D E F, *g* fiet totum parallelogram- e 29.primi. mum C D E A, toti parallelogrammo C D B F, æquale. Quod eſt propoſitum.

f 4.pri. CADAT ſecundo punctum F, in punctum E. Dico rurſus, g 2.prouun. parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia eſſe. Erunt enim, vt



h 4.pri. prius, rectæ A E, E B, æquales, nec non & anguli B E D, E A C; atque adeo *h* triangula, E A C, B E D, i 2.prouun. æqualia. Addito igitur communi triangulo C D E, *i* fient parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia.

CADAT tertio punctum F, vltra E, ita vt recta C F, ſecet rectam D E, in G. Quoniam igitur, vt prius, rectæ A E, F B, ſunt k 2.prouun. æquales; ſi communis addatur E F, *k* erit tota A F, toti E B, æqua-



l 4.pri. lis, nec non & anguli B E D, F A C, æquales erunt; atq; adeo *l* triangulum F A C, triangulo B E D, æquale. Ablato ergo m 3.prouun. communi triangulo E G F, *m* remanebit trapezium A E G C, trapezio F G D B, æquale. Quocirca addito communi triangulo C D G, fiet totum parallelogrammũ C D E A, toti parallelogrammo C D B F, æquale. Parallelogramma igitur ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. Quod erat demonſtrandum.

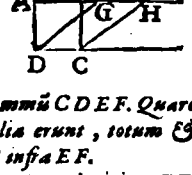
SCHOLIVM.

CONVERTEMVS facile hanc propoſitionem, hoc modo.

Parallelogramma æqualia ſuper eandem baſin, ad eaſdemq; partes cõſtituta, erunt inter eaſdem parallelas.

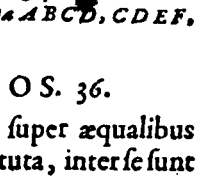
SINT duo parallelogramma æqualia A B C D, C D E F, ſuper eandem baſin C D, & ad eaſdem partes. Dico rectam A B, productam in directum iacere ipſi E F, & propterea ipſa parallelogramma inter

inter eaſdem eſſe parallelas. Aliàs enim AB, producta vel cadet infra EF, vel ſupra. Cadat primò infra, qualis eſt AH. Erit igitur parallelogrammum CDGH, a æquale parallelogrammo ABCD; Ponitur autem eidem parallelogrammo ABCD, æquale parallelogrammũ CDEF. Quare parallelogramma CDEF, CDGH, æqualia erunt, totum & pars, quod eſt abſurdum. Non ergo cadet AB infra EF.



a 35. primi.

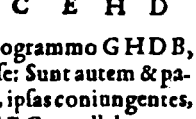
CADAT ſecundò AB, producta ſupra EF. Cadet igitur FE, protracta infra AB. Quare, vt prius, erunt parallelogramma ABCD, CDHG, æqualia, totum & pars, quod eſt abſurdum. Idem abſurdum conſequeretur, ſi CF, DE, producerentur vſque ad AB, protractã. Eademq; demonſtratio conueniet omnibus caſibus, qui occurrere poſſunt, hoc eſt, ſine pũctum E, ſit vltra B, ſine non, vt perſpicuum eſt. Non ergo cadet AB, ſupra EF; ſed nec infra, vt demonſtratum eſt; ergo producta in directum iacet ipſi EF; ac proinde parallelogramma ABCD, CDEF, in eiſdem ſunt parallelis.



THEOR. 26. PROPOS. 36. xxxvj.

PARALLELOGRAMMA ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

SINT duo parallelogramma ACEF, GHDB, ſuper æquales baſes CE, HD, inter eaſdem parallelas AB, CD. Dico ea eſſe æqualia. Connectantur enim extrema rectarum CE, GB, ad eaſdem partes lineis rectis CG, EB. Quoniam igitur recta CE, æqualis ponitur rectæ HD, & eidem HD, *b* æqualis eſt GB, in parallelogrammo GHDB, oppoſita; erunt CE, GB, *c* æquales inter ſe: Sunt autem & parallelæ, per hypotheſin. Quare & CG, EB, ipſas coniungentes, *d* parallelæ erunt, & æquales; ideoque CEBG, parallelogrammum erit. Itaque cùm parallelogramma ACEF, GCEB, ſint inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin CE, *e* erit parallelogrammum ACEF, parallelogrammo GCEB, æquale. Rurſus quia parallelogramma GCEB, GHDB, ſunt inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin GB, *f* erit quoque parallelogrammum GHDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare & parallelogramma ACEF, GHDB, *g* inter ſe æqualia erunt. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, &c. Quod oſtendendum erat.



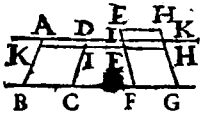
b 34. primi.
c 1. prom.
d 33. primum.
e 35. primi.
f 35. primi.
g 1. prom.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis duplex est, ad hunc modum.

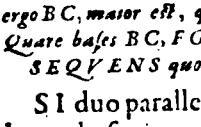
PARALLELOGRAMMA æqualia super baſes æquales, & ad eaſdem partes conſtituta, inter eaſdem ſunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſin, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta.

SINT primùm duo parallelogramma æqualia ABCD, EFGH, ſuper baſes æquales BC, FG, & ad eaſdem partes conſtituta. Dico ea eſſe inter eaſdem parallelas, hoc eſt, AD, protractam coire in directum cum EH. Nam aliàs cadet aut infra EH, aut ſupra. Quo poſito ſequitur, totũ & partem eſſe æqualia, quemadmodum in converſa præcedentis propoſitionis eſt dictum, & figura facilè commonſtrat. Intelligenda ſunt autem baſes æquales datæ in eadem linea recta BG.



SINT ſecundò eadem parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas AH, BG. Dico baſes BC, FG, eſſe æquales. Si enim altera, nempe BC, dicatur maior, a *abſcindatur BI, æqualis rectæ FG,* b *& ducatur IK, parallela ipſi CD. Erit ergo parallelogrammum ABIK,* c *æquale parallelogrammo EFGH; & ideo parallelogrammo ABCD, pars totti, quod eſt abſurdum. Non ergo BC, maior eſt, quàm FG. Eadem ratione neque minor erit. Quare baſes BC, FG, æquales ſunt.*

a 3. pri.
b 31. pri.
c 36. pri.



SEQVENS quoq; theorema facilè hinc demonſtrabitur.

SI duo parallelogramma inter eaſdem parallelas habeant baſes inæquales, illud, cuius baſis maior eſt, maius erit. Et contrà, ſi duo parallelogramma ſint inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis maioris maior erit.

SINT enim in poſteriori figura parallelogramma BD, FH, inter parallelas AH, BG, ſitq; baſis BC, maior baſe FG. Dico parallelogrammum BD, parallelogrammo FH, maius eſſe. d *Auferatur enim recta BI, ipſi FG, æqualis,* e *ducaturq; IK, ipſi AB, parallela. Erunt ergo* f *parallelogramma BK, FH, ſupra æquales baſes BI, FG, æqualia. Cùm igitur BD,* g *maius ſit, quam BK, erit idem BD, maius, quàm FH.*

d 3. pri.
e 31. pri.
f 36. pri.
g 9. pro. num.

SINT rurſum parallelogramma BD, FH, inæqualia, & BD, maius. Dico baſin BC, maiorem eſſe baſe FG. Nam ſi foret æqualis, h *eſſent parallelogramma æqualia, quod eſt abſurdum, cùm BD, maius*

h 6. pri.

natur maius. Si autem esset minor, foret parallelogrammum F H, maius, quam B D, & proximè ostendimus quod multo magis est absurdum, cùm B D, maius ponatur, quàm F H Basis ergo B C, cùm neque æqualis sit ipsi F G, neque minor, erit maior, quàm F G, quod est propositum.

THEOR. 27. PROPOS. 37. xxxvij.

TRIANGVLA super eadem basi constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

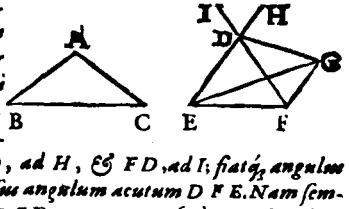
INTER parallelas A B, C D, & super basin C D, sint constituta duo triangula A C D, B C D. (Dicitur autem triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quando basis est pars vnius, & angulus oppositus alteram attingit.) Dico ea triangula esse æqualia. Per D, enim *a* ducatur D E, parallela rectæ A C, & D F, parallela rectæ B C. *b* Erunt igitur parallelogramma A C D E, B C D F, æqualia. Sunt enim super eandem basin C D, & inter easdem parallelas. Sed horum dimidia sunt triangula A C D, B C D; *c* quod A D, B D, diametri bifariam secent parallelogramma A C D E, B C D F. Igitur & triangula A C D, B C D, *d* æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.



a 31. pri. *b* 35. pri. *c* 34. primi. *d* 7. prop. num.

SCHOLIVM.

CONVERSA huius propositionis demonstrabitur ab Euclide propos. 39. Porrò ex hac propositione facilè cum Proclo demonstrabimus: Triangula, quorum duo latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus vnius illis lateribus contentus maior angulo alterius, aliquando esse æqualia, & aliquando inæqualia: Id quod ad propos. 24. polliciti sumus. Sint enim duo triangula A B C, D E F, & latera A B, A C, æqualia lateribus D E, D F, & angulus A, maior angulo E D F, sintq; primum hi duo anguli duobus rectis æquales. Dico triangula esse æqualia. e Producatur enim E D, ad H, & F D, ad I; fiatq; angulus E D G, æqualis angulo A, versus angulum acutum D F E. Nam semper alter angulorum D E F, D F E, acutus erit, f cùm ambo minores sint duobus rectis, g & recta D G, recta D F, seu A C; ducanturq; rectæ E G, G F, cadetq; semper E G, supra F, ob angulum acutum D F E, vt ad finem scholij propos. 24 ostendimus. Quoniam igitur duo anguli A, & E D F, ponuntur æquales duobus rectis, & angulus E D G, æqualis factus est angulo A; erunt & anguli E D G, E D F, duobus rectis æquales: Sunt autem & anguli E D G, G D H,

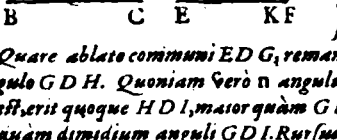


e 23. pri. *f* 17. pri. *g* 3. pri.

duobus

a13 primi. duobus a rectis æquales. Igitur anguli EDG, EDF, angulis EDG, GDH, æquales erunt. Quare ablato communi angulo EDG, b3 prænun. manebit angulo EDF, æqualis angulus GDH: Est autem eidem angulo EDF, c æqualis angulus HDI. Igitur & anguli GDH, c15 primi. HDI, æquales erunt; atque adeò angulus GDH, dimidium erit totius anguli GDI. Rursus quia latera DF, DG, sunt æqualia in d5. primi triangulo DFG; d erunt anguli DFG, DGF, æquales; qui cùm æquales e sint externo angulo GDI, erit vterque eorum, nempe e32 primi DGF, dimidium anguli GDI: Ostensum est autem, angulum GDH, dimidium quoque esse eiusdem anguli GDI. f Quare anguli GDH, f7 prænun. DGF, æquales erunt. Et quia sunt alterni inter EH, FG; g erunt g27. primi EH, FG, parallelæ. Quamobrem h triangulus DEG, DEF, æqua- h37. primi lia erunt, cùm habeant eandem basin DE, sintq; inter easdem parallelas DE, FG. Quoniam verò triangulum DEG, i æquale est i4. primi triangulo ABC, propterea quòd latera DE, DG, æqualia sunt lateribus AB, AC, & angulo A, æqualis angulus EDG; erit & triangulum ABC, triangulo DEF, æquale, quod est propositum.

SINT deinde anguli A, & EDF, duobus rectis maiores. Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulum, minus esse triangulo DEF. Producatur enim ED, ad H, & FD, ad I; k fiatq; an- k23. primi gulus EDG, æqualis angulo A, l & recta DG, recta DF, seu AC, l3. primi æqualis, ducanturq; rectæ EG, GF. Quoniam igitur anguli A, & EDF, ponuntur maiores duobus rectis, erunt & anguli EDG, EDF,



duobus rectis maiores: Sunt autem anguli EDG, GDH, m13. primi m æquales duobus rectis. Igitur anguli EDG, EDF, maiores sunt angulis EDG, GDH. Quare ablato communi EDG, remanebit angulus EDF, maior an- n15 primi. gulo GDH. Quoniam verò n angulus EDF, angulo HDI, æqualis est, erit quoque HDI, maior quàm GDH; atque adeò GDH, minor, quàm dimidium anguli GDI. Rursus quia latera DG, DF, æqualia o5. primi. sunt: o erunt anguli DFG, DGF, æquales: qui cùm sint p æquales p32. primi externo GDI, erit vterque eorum, nempe DGF, dimidium anguli GDI: Ostensum est autem, angulum GDH, minorem esse dimidio eiusdem GDI. Quare DGF, maior erit, quàm GDH. Abscindatur ex angulo DGF, angulus DGK, q æqualis angulo alterno GDH. q23. primi. Erit ergo GK, r parallela ipsi DE, secabitq; GK, rectam EF. Du- r27 primi. catur ex D, ad K, vbi GK, secat rectam EF, recta DK. Erit igitur triangulum DEG, s æquale triangulo DEK. Quoniam autem s37. primi. triangulum DEG, t æquale est triangulo ABC, propterea quòd t4. primi. latera DE, DG, æqualia sunt lateribus AB, AC, & angulo A, v9. primi angulus EDG, æqualis; erit & triangulum ABC, triangulo DEK, æquale. Cùm igitur DEK, u minus sit triangulo DEF; erit quæ-

que

que *ABC*, triangulum triangulo *DEF*, minus. Quod est propositum.

SINT tertiò anguli *A*, & *EDF*, duobus rectis minores. Dico triangulum *ABC*, quod maiorem habet angulum, maius esse triangulo *DEF*. Producatur *ED*, ad *H*, & *FD*, ad *I*;



a fiatq; angulus *EDG*, aequalis angulo *A*, b & recta *DG*, rectae *DE*, seu *AC*; ducanturq; recta *EG*, *FG*. Quoniam igitur anguli *A*, & *EDF*, ponuntur minores duobus rectis, erunt quoque anguli *EDG*, *EDF*, duobus rectis minores. Sunt autem anguli c *EDG*, *GDH*, duobus rectis aequales. Igitur *EDG*, *EDF*, minores sunt, quàm *EDG*, *GDH*; demptoq; communi *EDG*, remanebit *EDF*, minor, quàm *GDH*. Est autem *EDF*, d aequalis ipsi *HDI*. Quare & *HDI*, minor erit, quàm *GDH*; atque adeò *GDH*, maior est dimidio anguli *GDI*. Quoniam autem *DGF*, dimidium est eiusdem anguli *GDI*, & iam suprà ostensum fuit; erit *GDH* maior, quàm *DGF*. Fiat igitur angulus *DGK*, e aequalis angulo *GDH*, ducta recta *GK*, quae secabit rectam *EF*, protractam in *K*; & ducatur recta *DK*. Erit ergo, & primo, *GK*, f parallela ipsi *DE*; g triangulumq; *DEG*, triangulo *DEK*, aequale: Est autem iterum *DEG*, h aequale ipsi *ABC*. Igitur & *ABC*, aequale est ipsi *DEK*. Quocirca cùm *DEK*, i maius sit, quàm *DEF*; erit & *ABC*, maius, quàm *DEF*. Quod demonstrandum erat.

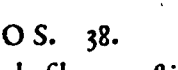
a 23. pri.
b 3. 1 pri.
c 23. pri.
d 15. pri.
e 23. pri
f 27. pri.
g 37. pri ms.
h 4. pri.
i 9. prop.

Ex his perspicuum est, cur Euclides in propos. 24. solum collegerit inaequalitatem basium, non autem triangulorum, & ibidem admonuimus.

THEOR. 28. PROPOS. 38. 38.

TRIANGVLA super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

INTER parallelas *AB*, *CD*, & super æquales bases *CE*, *FD*, sint constituta triangula *ACE*, *BFD*. Dico ipsa esse æqualia. k Ducatur enim *EG*, parallela ipsi *AC*, & *DH*; ipsi *BF*: Eruntque l parallelogramma *ACEG*, *BFDH*, æqualia. Cùm igitur horum m dimidia sint triangula *ACE*, *BED*; n erunt hæc inter se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum.

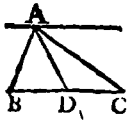


k 31. pri.
l 36. pri.
m 34. primi.
n 7. prob.

SCHOLIVM.

CONVERSA huius ostendetur ab Euclide propos. 40.

COLLIGITVR autem ex hac propositione, si à quouis angulo trianguli dati linea recta ducatur dividens latus oppositum bifariam,



riam, triangulum quoque bifariam secari. Ducatur enim in triangulo A B C, ex angulo A, recta A D, dividens bifariam latus B C, in D. Dico triangulum A B C, bifariam quoque secari. Si enim per A, ducatur parallela ipsi B C, erunt duo triangula A B D, a38.pri. A D C, inter easdem parallelas; & super aequales bases. a Quare aequalia erunt.

EX PELETARIO.

A puncto quouis dato in vno latere trianguli proposíti lineam rectam ducere, quæ bifariam secet triangulum datum.

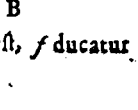
SIT triangulum A B C, & punctum datum D, in latere B C. Oportet igitur ex D, rectam lineam ducere, quæ bifariam dividat triangulum. Quod si punctũ D, dividat latus B C, bifariam, recta D A, ducta ad A, dividet triangulum bifariam, & in hoc scholio est ostensum: Si vero D, non dividit B C, bifariam, b secetur B C, bifariam in E Deinde ex D, ad angulum oppositum b10.pri. A ducatur recta D A, & per E, c parallela E F, ipsi D A, secans c31.pri. A C, in F. Si igitur ducatur recta D F, erit triangulum divisum bifariam a linea D F. Nam ducta recta E A, d erunt triangula E F A, d38.pri. E F D, aequalia, cum sint super eandem basin E F, & inter easdem parallelas E F, A D. Addito igitur communi C F E, e erunt tota tri- e2.pro- angula A E C, C D F, aequalia: Est autem A E C, dimidium totius A B C, & tam fuit ostensum. Igitur & C D F, dimidium est eiusdem trianguli A B C. quod erat probandum.



QVOD si punctum D, fuerit in altera medietate E C, eodem modo problema conficiemus: sed tunc triangulum abscindetur ad partes B, trapezium vero ad partes C, & figura praesens satis indicat. Demonstratio autem eadem est, si in ea mutetur litera B, in C, & C, in B. Hoc tamen problema multò nos vniuersalius proponemus ad finem sexti libri.

XXXIX. THEOR. 29. PROPOS. 39.

TRIANGVLA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.



SINT duo triangula æqualia A B C, D B C, super eandem basin B C, & ad easdem partes Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta, hoc est, rectam ductam A D, parallelam esse ipsi B C. Si enim non f31.pri. est, f ducatur ex A, parallela ipsi B C, quæ vel cadet supra A D,

vel

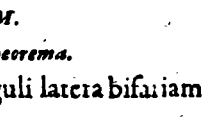
vel infra. Cadat primum supra, qualis est A E, coeatque cum B D, protracta in E, & ducatur recta E C. Quoniam igitur parallelæ sunt A E, B C; a erit triangulo A B C, triangulum E B C, æquale: a 37. pri. Est autem per hypothesin, triangulum quoque D B C, æquale eidem triangulo A B C. Igitur b erunt triangula D B C, E B C, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A F; ducta recta F C, erunt eadem ratiocinatione triangula B F C, B D C, æqualia, pars & totū; quod est absurdū. Erit igitur A D, parallela ipsi B C. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat. b 1. pronum.

SCHOLIVM.

EX his infert Campanus sequens hoc theorema.

LINEA recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.

SECET linea D E, latera A B, A C, trianguli A B C, bifariam in D, & E. Dico D E, parallelam esse lateri B C. Cùm enim triangula A D E, B D E, sint super æquales bases A D, D B, & inter easdem parallelas; (si per E, ducetur parallela ipsi A B) c erit triangulum B D E, triangulo A D E, æquale: Eadem ratione erit triangulum C E D, eidem triangulo A D E, æquale. Quod etiam constat ex scholio præcedentis propos. Recta enim E D, secabit triangulum A E B, bifariam, & recta eadem D E, triangulum A D C, bifariam etiam, quod bases A B, A C, secta sint bifariam à recta D E, ex hypothesi. Igitur triangula D B E, E C D, d æqualia erunt: Habent autem eandem basin D E, & sunt ad easdem partes constituta. Quare e inter easdem erunt parallelas, & idcirco D E, B C, parallela erunt. Quod est propositum.



c 38. pri.

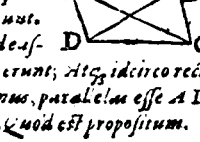
d 1. pronum.

e 39. primi.

ID autem, quod ad finem secundi theorematis in scholio propos. 34. pollicitis sumus, facilè ex hac propos. demonstrabimus. Videlicet.

OMNE quadrilaterum, quod ab vtraq; diametro bifariam diuiditur, parallelogrammum est.

NAM quadrilaterum A B C D, diuidatur bifariam ab vtraque diametro A C, B D. Dico ipsum esse parallelogrammum. Cùm enim triangula A D C, B D C, dimidia sint eiusdē quadrilateri A B C D, f ipsa inter se æqualia erunt. Quare cùm eandem habeant basin D C, ad easdem partes sint, g ipsa in eisdem parallelis erunt; Atq; idcirco recta A B, D C, parallelæ sunt. Eodem modo ostendemus, parallelas esse A D, B C. Parallelogrammum igitur est A B C D, quod est propositum.



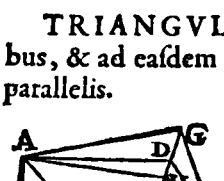
f 37. pronum.

g 39. primi.

THEOR.

xl. THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGVLA æqualia ſuper æqualibus baſibus, & ad eaſdem partes conſtituta, & in eiſdem ſunt parallelis.



SINT duo triangula æqualia A B C, D E F, ſuper baſes æquales B C, E F (quæ in eadem recta linea collocentur) & ad eaſdem partes conſtituta. Dico ea eſſe in eiſdem parallelis, hoc eſt, rectam ex A, ad D, ductam parallelam eſſe rectæ B F. Si enim non eſt, cadet parallela ipſi B F, per A, ducta, vel ſupra A D, vel infra. Cadat primum ſupra, cocatq; cum E D, producta in G, & ducatur recta G F. Quoniam igitur parallelæ ſunt A G, B F, a erit triangulum E F G, triangulo A B C, æquale: Ponitur autem & triangulum D E F, eidem triangulo A B C, æquale. Igitur b triangula D E F, G E F, æqualia erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Quod ſi parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis eſt A H; ducta recta H F, erunt eadem argumentatione triangula H E F, D E F, æqualia, pars & totum, quod eſt abſurdum. Eſt igitur A D, parallela ipſi B F. Quare triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 38. pri.

b 1. pro. nun.

SCHOLIVM.

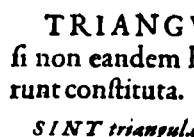
HÆC propoſitio convertit ſno modo propoſ. 38. Alio autem modo converti poteſt, quemadmodum propoſ. 36. convertimus in eius ſcholio, nimirum.

TRIANGVLA æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſin, ſuper æquales baſes erunt conſtituta.

SINT triangula æqualia A B C, D E F, inter parallelas A D, B F, & ſuper baſes B C, E F, quas dico eſſe æquales. Si enim non ſunt æquales, ſit B C, maior. c *Abſciſſa ergo recta C G, æquali ipſi E F, & ducta recta G A;* d *erit triangulum A G C, triangulo D E F, æquale: Ponitur autem & triangulum A B C, eidem triangulo D E F, æquale: Igitur triangula A G C, A B C,* e *æqualia erunt, pars & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt baſes B C, E F, ſed æquales. Quod eſt propoſitum.*

c 3. pri.

d 38 pri.



e 1. pron.

SEQVENS etiam theorema facili negotio demonſtrabitur.

SI duo triangula inter eaſdem parallelas habeant baſes

baſes inæquales, illud, cuius baſis maior eſt, maius erit. Et contrà, ſi duo triangula ſint inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis maioris maior erit.

SINT enim in proxima figura inter parallelas AD, BF, triangula ABC, DEF, ſitq; baſis BC, baſe EF, maior. Dico triangulum ABC, maius eſſe triangulo DEF. Ablata enim recta CG, a aequali ipſi EF, ductaq; recta AG; b erunt triangula AGC, DEF, ſuper aequales baſes GC, EF, aequalia. Cùm ergo c triangulum ABC, triangulo AGC, maius ſit; erit idem triangulum ABC, maius quàm DEF.

a 3. pri.
b 38. pri.
c 9. pro. num.

SINT rurſus triangula ABC, DEF, inaequalia, & ABC, maius. Dico baſin BC, baſe EF, maiorem eſſe. Si enim dicatur aequalis, d erit triangulum ABC, triangulo DEF, aequale, quod eſt abſurdum, cùm maius ponatur. Si verò credatur eſſe minor, erit triangulum DEF, maius triangulo ABC, vt proximè oſtendimus, quod multò magis eſt abſurdum, cùm ABC, ponatur maius, quàm DEF. Recta igitur BC, maior erit, quàm EF, cùm neque aequalis ſit oſtenſa, neq; minor. Quod eſt propoſitum.

d 38. pri.

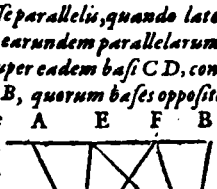
QVÆ porrò hactenus de parallelogrammis, triangulisq; inter eaſdem parallelas conſtitutis demonſtrata ſunt, facilè quoq; demonſtrari poſſunt de trapezijs inter eaſdem parallelas deſcriptis, eodem fermè ordine, hoc modo.

I.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes inter ſe æquales ſint, ſunt inter ſe æqualia: Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas æquales.

DICVNTVR trapezia in eiſdem eſſe parallelis, quando latera duo oppoſita parallela ſunt, partesq; ſunt earundem parallelarum.

INTER parallelas igitur AB, CD, ſuper eadem baſi CD, conſtituta ſint duo trapezia, ACDE, FCDB, quorum baſes oppoſitæ AE, FB, aequales ſint. Dico ipſa inter ſe eſſe aequalia. Ductis enim rectis EC, FD, c erunt tam triangula ECD, FCD, ſuper eadem baſi CD, & in eiſdem parallelis, inter ſe aequalia, f quàm triangula ACE, FDB, ſuper aequalibus baſibus AE, FB, & in eiſdem parallelis. Si igitur aequalibus ECD, FCD, addantur aequalia ACE, FDB, g erunt tota trapezia ACDE, FCDB, inter ſe aequalia.



c 37. primi.
f 38. pri.
g 2. pro. num.

SINT iam trapezia ACDE, FCDB, aequalia. Dico baſes oppoſitas

a37.primi. *positas AE, FB, æquales quoque esse. Erunt enim rursus a triangula ECD, FCD, æqualia. Si igitur ex trapezijs æqualibus auferantur,*
b3.prounum. b *æqualia erunt reliqua triangula ACE, FDB. Quare, vt in hoc scholio ostendimus, bases AE, FB, æquales erunt.*

II.

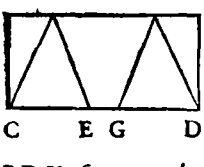
TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum oppositæ bases sint inæquales, inæqualia sunt, maiusq; est illud, cuius basis maior est; Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas inæquales, maiorque est illa, cuius trapezium maius est.

VT in eadem figura, si basis AE, dicatur esse maior base FB; Dico trapezium ACDE, maius esse trapezio FCDB. c *Erunt enim*
c37.primi. *rursus triangula ECD, FCD, æqualia: At triangulum ACE, triangulo FDB, maius, vt in hoc scholio demonstrauimus.* d *Totum ergo*
d4.prounum. *trapezium ACDE, toto trapezio FCDB, maius erit.*

RVRSVS si trapezium ACDE, dicatur esse maius trapezio
e37.pri. *FCDB; Dico basin AE, base FB, maiorem esse.* e *Erunt enim rursus triangula ECD, FCD, æqualia. Quare reliquum triangulum*
f5 pron. *ACE, reliquo triangulo FDB,* f *maius erit: ac proinde, vt in hoc scholio ostensum est, basis AE, maior erit base FB. Quod ostendendum erat.*

III.

TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorum oppositæ bases sint æquales, æqualia sunt: Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent bases oppositas æquales.



INTER parallelas AB, CD, super æquales bases CE, GD, constituta sint duo trapezia ACEF, HGDB quorum bases oppositæ AF, HB, æquales quoq; sint: Dico ipsa trapezia æqualia esse. Ductis enim rectis FC,
g38.pri. *HD,* g *erunt tam triangula FCE, HGD, super æquales bases CE, GD, quàm ACF,*
h2.prounum. *BDH, super æquales bases AF, BH, inter se æqualia.* h *Totum ergo trapezium æquale erunt.*

SINT tam trapezia ACEF, HGDB, æqualia super bases æquales CE, GD. Dico bases oppositas AF, BH, æquales quoque esse.
i38.pri. i *Erunt namque rursus triangula FCE, HGD, super æquales ba-*

ses

ſes C F, G D, æqualia: quibus ablatis ex trapezijs æqualibus, reliqua triangula A C F, B D H, a *æqualia erunt; ac proinde, vt paulo antè in hoc ſcholio oſtendimus, baſes A F, B H, æquales erunt.* a 3. prænum.

IV.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuperæqualibus baſibus, quorum oppoſitæ baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiusq; eſt illud, cuius baſis maior eſt: Et trapezia inæqualia in eiſdem parallelis, & ſuperæqualibus baſibus, habent oppoſitas baſes inæquales, maiorq; eſt illa, cuius trapezium maius eſt.

VT in eadem figura, ſi baſis A F, dicatur eſſe maior baſe H B, erit trapezium A C E F, trapezio H G D B, maius. b *Erunt enim rurſum triangula F C E, H G D, ſuper æquales baſes C E, G D, æqualia. At triangulum A C F, maius triangulo B D H, vt ſuprà oſtenſum eſt, quòd baſis A F, maior ponatur baſe B H.* c *Totum ergo trapezium A C E F, toto trapezio H G D B, maius erit.* b 38. pri. c 4 prænum.

RVRSVS ſi trapezium A C E F, maius ponatur trapezio H G D B, erit baſis A F, baſe B H, maior. d *Erunt enim rurſus triangula F C E, H G D, ſuper æquales baſes C E, G D, æqualia: quibus ablatis ex trapezijs inæqualibus, reliquum triangulum A C F, reliquo triangulo B D H,* e *maius erit; ac proinde, vt in hoc ſcholio oſtenſum fuit, baſis A F, baſe B H, maior erit. Quod erat oſtendendum.* d 38 pri. e 5. prænum.

PORRO non videtur hic omittendum theorema ſequens, per quod facili negotio lineam rectam quamcunque in quotus partes æquales diuidemus: quod nos in ſcholio propoſ. 10. huius lib. facturos hoc loco recepimus. Quamuis enim idem demonſtrari poſſit, & quidem facilius, per proportiones linearum, vt lib. 6. oſtendemus, itacunque tamen eſt intelligere, nullo labore idem abſolui poſſe per propoſitiones hactenus demonſtratas, ſine proportionum adiumento. Theorema ergo eſt huiuſmodi.

SI in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo oppoſito ducta, diuidensq; alterutram parallelarum bifariam, diuidit quoque alteram bifariam.

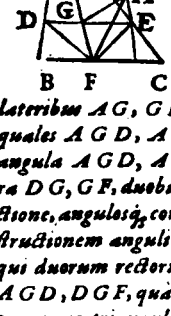
IN triangulo A B C, aquidiſtet D E, ipſi B C, & recta A F, ſecet alterutram B C, D E, bifariam in F, vel G. Dico alteram quoque bifariam ſecari. Sint enim primùm anguli ad F, recti. Quo poſito, f *& anguli ad G, recti erunt. Si igitur B C, diuiditur bifariam, diuidetur bifariam quoq; angulus A, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 26. huius* f 29. pri.



huius lib. demonstrauimus; ac proinde recta AG, ad basin DE, trianguli ADE, perpendicularis, diuidens q̃ angulum A, bifariam, diuidet bifariam quoque basin DE, & ibidem ostendimus, quod est propositum.

SI verò DE, ponatur diuidi bifariam, diuidetur, per idem scholium propos. 26. huius lib. angulus quoq; A, bifariam; ac proinde recta AF, ad basin BC, perpendicularis, diuidens q̃ angulum A, bifariam, basin quoq; BC, bifariam secabit, quod est propositum.

SINT deinde anguli ad F, non recti, sed AFC, obtusus, & AFB, acutus. Quo posito, erit & AGE, obtusus, & AGD, acutus, a29.pri. a cùm hi illis sint aquales, externi internis. Si igitur BC, diuidatur bi-



b23.primi. fariam, b constituatur acuto angulo AGD, aqualis angulus AGH, c & recta GH, recta GD, aqualis, ducanturq̃ rectæ AH, HF, FD, FE. Quia igitur tam triangula tota ABF, ACF, ex scholio propos. 38. huius libri aqualia sunt, quam d triangula ablata DBF, ECF, ob aquales bases BF, CF; e erunt quoq; reliqua triangula ADF, AEF, aqualia. Rursus quoniam duo latera AG, GD, trianguli AGD, duobus lateribus AG, GH, aqualia sunt, angulosq̃ comprehendunt aquales AGD, AGH, ex constructione, f erunt quoque triangula AGD, AGH, aqualia. Pari ratione, quia duo latera DG, GF, duobus lateribus HG, GF, aqualia sunt, ex constructione, angulosq̃ continent aquales DGF, HGF, (cùm enim per cõstructionem anguli AGD, AGH, aquales sint, erunt quoq; reli-

c3.primi. d38.primi. e3.prænum. f4.pri. g13.pri. qui duorum rectorum DGF, HGF, aquales: g sunt enim tam AGD, DGF, quam AGH, HGF, duobus rectis aquales) erunt h4.pri. h quoque triangulo DGF, HGF, aqualia: i ac proinde & tota i2.prænum. triangulo ADF, AHE, aqualia erunt. Est autem eidem triangulo ADF, aquale ostensum triangulum AEF. Igitur & inter se k aqualia erunt triangula AHF, AEF: l ac propterea inter duas eas-

k1.prænum. l39.pri. dem erunt parallelas, hoc est, ducta recta EH, erit basi AF, communi parallela. Igitur m & triangula HGF, EGF, inter easdem pa-

mi. rallelas, & super eadem basi FG, aqualia inter se erunt. Est autem m37. triangulum HGF, triangulo DGF, ostensum aquale. igitur trian-

primi. gula quoque DGF, EGF, aqualia inter se erunt; propterea q̃ basis quoque DG, basi GE, aqualis erit, & in hoc scholio demonstratum est, quod est propositum.

n23.pri. SI verò DE, ponatur bifariam diuidi, n constituatur angulo a-

mi. cuto AFB, aqualis angulus AFH, o & recta FH, recta FB, du-

o3.pri. cantur q̃ rectæ AH, HG, GB, GC. Quoniam igitur tam triangula AGD,

AGD, AGE, ex scholio propos. 38. huius lib. aequalia sunt, a quàm triangula DGB, EGC, ob aequales bases DG, EG; b erunt tota etiã triangula AGB, AGC, aequalia. Rursus quia duo latera AF, FB, duobus lateribus AF, FH, aequalia sunt, continentq; angulos aequales AFB, AFH, ex constructione; c erunt triangula quoq; AFB, AFH, aequalia. Pari ratione, quia duo latera GF, FB, duobus lateribus GF, FH, aequalia sunt, aequalesq; continent angulos GFB, GFH, ex constructione; d erunt quoque aequalia triangula GFB, GFH: quibus demptis ex aequalibus AFB, AFH, e aequalia erunt reliqua triangula AGB, AGH: Est autem eidem triangulo AGB, ostensum aequale triangulum AGC. f Igitur & triangula AGC, AGH, inter se erunt aequalia. g Quare & inter eadem parallelas erunt, hoc est, ducta recta CH, ipsi AF, parallela erit; ac proinde h aequalia inter se erunt triangula GHF, GFC. Fuit autẽ ostensum triangulum GHF, triangulo GBF. aequale. i Igitur & aequalia inter se erũt triangula GFC, GFB; ideoq; & in hoc scholio demonstrauimus, & bases FC, FB, aequales erunt. Quod est propositũ.



a 38. primi.
b 2. communi.
c 4. primi.
d 4. primi.
e 3 prom.
f 1. prom.
g 39. primi.
h 37. primi.
i 1. communi.

ALITER. Diuisa sit primum BC, bifariam in F. Dico & DE, bifariam esse diuisam in G. Si enim DG, GE, non sunt aequales, sit maior DG, ducaturq; recta FD, FE. Erit igitur per ea, quæ in hoc scholio demonstrauimus, tam triangulum ADG, triangulo AEG, quàm triangulum FDG, triangulo FEG, maius. k Totum ergo triangulum ADF, toto triangulo AEF, maius erit: quibus si addantur triangula DBF, ECF, l quæ propter bases aequales BF, CF, aequalia sunt, m fiet totum triangulum ABF, toto triangulo ACF, maius; ac proinde, vt in hoc scholio monstrauimus, basis BF, basi FC, maior erit: Sed & aequalis ponitur. Quod est absurdum. Bifariam ergo secta est DE, in G. Quod est propositum.



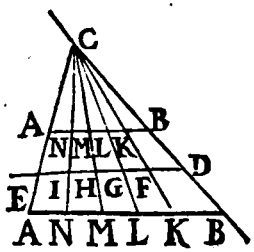
k 4. prænum.
l 38. primi.
m 4. prænum.

SIT iam DE, secta bifariam in G. Dico & BC, diuidi bifariam in F. Sin minus, n diuidatur BC, in H, bifariam, ducaturq; recta AH, secans DE, in I. Quoniam igitur AH, secat BC, bifariam in H, secabit eadem ipsam DE, quoque bifariam in I, vt proximè ostendimus. Quod est absurdum, cum bifariam secta esse ponatur in G. Sequeretur enim partem toto esse maiorem. Nam si DI, aequalis est ipsi IE, cum IE, maior sit, quàm GE, erit quoque DI, maior, quàm GE, hoc est, quàm DG, qua ipsi GE, aequalis ponitur. Diuiditur ergo BC, bifariam in F. Quod erat demonstrandum.

n 10. primi.

HOC ostenso theoremate, ad diuisionem lineæ rectæ in quotuis aequales partes tam veniamus.

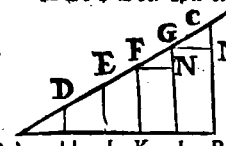
DATAM rectam lineam finitam in quotlibet partes æquales secare.



a 31. pri.
b 3. pri.

SIT data recta A B, secanda in quinque partes æquales. Per extremum punctum B, ducta recta B C, vtcunq; , & assumpto in B C, puncto quocunque D, sive infra B, sive supra, a *ducatur per D, ipsi A B, parallela D E, in qua* b *abscindantur quinque partes inter se æquales D F, F G, G H, H I, I E, hac tamen lege, vt existente puncto D, infra B, recta D E, ex quinque partibus æqualibus composita maior sit, quam data A B, minor vero, existente puncto D, supra B, vt minimum recta A C, per alterum extremum A, & per E, ducta cum B D, concurrere possit in puncto aliquo, vt in C. A quo si per puncta F, G, H, I, recta ducantur, secta erit data recta A B, in quinq; partes æquales B K, K L, L M, M N, N A. Quoniam enim in triangulo C B L, recta D G, ipsi B L, est parallela, vel in triangulo C D G, recta B L, ipsi D G: secta q; est D G, bifariam in F, secta quoque erit bifariam B L, in K, vt in proximo theoremate demonstrauimus. Eadem q; ratione recta K M, in L, secta erit bifariam, quemadmodum & F H, in G, bifariam secta est. Sunt ergo tres partes B K, K L, L M, inter se æquales, sicuti tres D F, F G, G H, atq; ita de cæteris.*

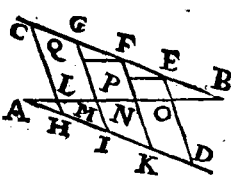
ALITER. Ad extremum A, linea A B, secanda in quinq; partes æquales, constituatur angulus rectilineus quicunq; A, & ex recta A C, c *abscindantur quinque partes quantacunque inter se æquales A D, D E, E F, F G, G C: ductaq; recta C B,* d *agantur ei parallelæ G L, F K, E I, D H. Dico rectam A B, sectam esse in quinque partes æquales.* e *Ductis enim per G, F, ipsi A B, parallelis G M, F N,* f *quæ inter se etiam parallelæ erunt, &* g *ipsis B L, L K, æquales in parallelogrammis G B, F L;* h *erunt tam anguli F G N, G C M, externus & internus in parallelis G L, C B, quàm anguli C G M, G F N, externus & internus in parallelis G M, F N, æquales inter se. Quoniam igitur duo anguli C, G, trianguli C G M, duobus angulis G, F, trianguli G F N, æquales sunt, vterque vtrique, latera q; illis adiacentia C G, G F, æqualia per constructionem,* i *erunt quoq; latera G M, F N, æqualia: quæ cùm ostensa sint æqualia rectis B L, L K, erunt quoque B L, L K, inter se æquales. Eadem q; ratione ostendemus K L, K I, æquales esse, nec non*



c 3. pri.
d 31 pri.
e 31 pri.
f 30 pri.
g 34. pri mi.
h 29 pri mi.
i 26. pri.

non IK, HI, & HI, AH; ac propterea recta AB, in quinq; aquales partes diuisa erit. Quod est propositum.

ALITER. Ad extrema puncta A, B, linea AB, in quinq; partes aquales diuidenda constituantur duo aquales anguli in diuersas partes AEC, BAD. Et in vtraque linea BC, AD, a quo ab alternos angulos aquales A, B, parallela inter se sunt, b sumantur quatuor partes inter se omnino aquales, tot nimirum, vna minus, in quot partes linea secanda est, cuiusmodi sunt BE, EF, FG, GC; AH, HI, IK, KD, sumanturq; recta CH; GI, FK, ED, c quæ inter se erunt parallela, cùm coniungant extrema parallelarum aqualium. Dico rectam AB, in quinque partes aquales sectam esse. d Ductis enim per E, F, ipsi AB, parallelis EP, FQ, e quæ inter se quoque parallelæ erunt, f & ipsis NO, MN, aquales in parallelogrammis EN, FM: g erunt tam anguli EFP, FGQ, externus & internus in parallelis FK, GI, quàm anguli GFQ, FEP, externus & internus in parallelis QF, PE, inter se aquales. Itaque quoniam duo anguli G, F, trianguli FGQ, duobus angulis F, E, trianguli EFP, aquales sunt, vterque vtrique, latera q; illis adiacentia FG, EF, aqualia per constructionem, h erunt quoque latera FQ, EP, inter se aqualia: quæ cùm ostensa sint aqualia rectis MN, NO, erunt etiam MN, NO, inter se aquales. Eadem q; ratione aquales inter se erunt OB, NO, MN, LM, AL. propterea q; recta AB, in quinque aquales partes diuisa erit. Quod est propositum.

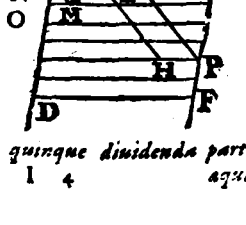


a 27. primi
b 3. primi
c 31. primi
d 31. primi
e 30. primi
f 34. primi
g 29. primi
h 26. primi

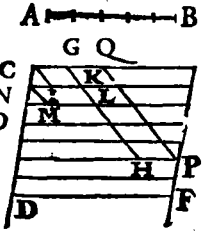
PRAXIS hac breuius ita demonstrabitur. i Quoniam recta ED, FK, GI, GH, parallela sunt, quod coniungant extrema aqualium & parallelarum; secabitur recta BL, in quatuor partes aquales, nec non & recta AO, vt in præcedenti praxi ostendimus. Omnes ergo quinque partes AL, LM, MN, NO, OB, aquales erunt.

i 33. primi

ALITER. Paretur instrumentum diuisionibus linearum in partes aquales accommodatum, hoc modo. Ductis duabus parallelis satis magno spatio inter se distantibus CD, EF, k sumantur in vtraque partes omnino inter se aquales quotcunq;, tot videlicet in vna, quot in altera, & modica quantitatis, punctaq; respondentia lineis rectis sumgantur, l quæ parallelæ inter se erunt, cùm coniungant extrema parallelarum aqualium. Si igitur beneficio circini recta AB, in quinque diuidenda partes



k 3. primi
l 33. primi



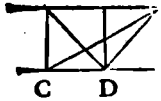
aequales, transferatur ex quouis puncto G, & quidem ad punctum H, sitq; & quinque spatia parallelarum inter G, & H, includantur, diuisa erit ducta G H, ab illis parallelis in quinque partes aequales, quibus partibus sit data A B, a sumantur partes aequales, diuisa quoque erit A B, in quinque aequales partes. Sectam autem esse G H, in quinque partes aequales, ita demonstrabitur. Ductis ex C, N, ipsi G H, parallelis C I, N M, b quae inter se quoq; parallelae erunt; c & ipsis G K, K L, aequales in parallelogrammis G I, K M; erunt d tam anguli C N I, N O M, externus & internus in parallelis N K, O L, quàm anguli O N M, N C I, externus & internus in parallelis N M, C I, aequales inter se. Igitur cùm duo anguli N, C, trianguli C N I, duobus angulis O, N, trianguli N O M, aequales sint, & eorum & latus, illis adiacentia C N, N O, aequalia, ex constructione, e erunt quoque latera C I, N M, inter se aequalia: quae cùm ostensa sint aequalia rectis G K, K L, erunt quoq; G K, K L, inter se aequales. Eadem q; ratione omnes partes rectae G H, ostendentur aequales: ac proinde recta G H, in quinque partes aequales erit diuisa.

a 3. pri.
b 30. pri.
c 34. primi.
d 29. primi.
e 26 primi.

PRAXIS etiam hac breuius demonstrabitur, si hoc modo fiat. Sumpta quinque interuallis recta E F, ab E, & usque ad P, transferatur recta A B, beneficio circini ex P, ad aliquod punctum rectae C E, & ad Q. Erit enim hac ratione ducta recta P Q, diuisa à parallelis in quinque partes aequales. & in secunda praxi demonstratum est. Quare si partes rectae P Q, quae data recta A B, aequalis est, ex constructione, transferantur in datam rectam A B, diuisa quoq; erit A B, in quinque partes aequales. Quod erat propositum.

xlj. THEOR. 31. PROPOS. 41.

SI parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.



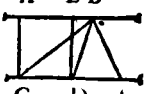
INTER parallelas AB, CD, & super basin CD, constituantur parallelogrammum A C D E, & triangulum B C D. Dico parallelogrammum esse duplum trianguli B C D. Ducta enim diametro A D, in parallelogrammo, erunt f triangula A C D, B C D, aequalia; At parallelogrammi A C D E, duplum est trianguli A C D; g quòd triangula A C D, A D E, aequalia quoque inter se sint. Igitur & trianguli B C D, h duplum erit idem parallelogrammum A C D E. Quamobrem, si paral-

f 37. pri.
g 34. primi.
h 6. prae-mm.

si parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HINC sequitur, si triangulum duplam habuerit basin, fueritq; in eisdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam si basis CD, producatur ad F, & sit DF, æqualis ipsi CD, ducaturq; recta FB, erit triangulum BCF, duplum trianguli BCD, a *quod triangula BCD, BDF, æqualia sint: Est autem & parallelogrammum ACDE,* b *duplum eiusdem trianguli BCD.* c *Igitur æqualia erunt triangulum BCF, & parallelogrammum ACDE.*



a 38. primi.
b 41 primi.
c 6. prænum.

IDEM hoc theorema Euclidis demonstrari potest eodem modo. si parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint bases, & non eandem, fuerintq; in eisdem parallelis, & cernis in parallelogrammo ACDE, & triangulo BFG, quorum bases CD, FG, æquales sunt. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, d *erunt triangula ACD, BFG, æqualia. Cum igitur parallelogrammum ACDE, duplum sit trianguli ACD:* e *quod diameter AD, secet parallelogrammum ACDE, bifariam:* f *erit quoque idem trianguli BFG, duplum. Eadem ratione si basis FG, duplicaretur, & recta ad B, duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc esset duplum etiam trianguli BFG, &c.*

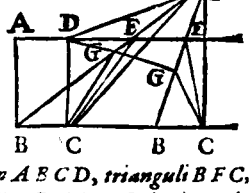


d 38. primi.
e 34. primi.
f 6. prænum.

CONVERSVM huius theorematis duplex est, hoc modo.

SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemque habuerint basin, vel æquales, & ad easdem partes constituta; Erunt ipsa in eisdem parallelis. Et si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eisdemque parallelis: erunt bases æquales, si non sit eadem.

SIT parallelogrammum ABCD, duplum trianguli EBC. sive eandem habeant basin, sive æquales. Dico parallelam AD, productam cadere in E. punctum. Nam alias cadet aut supra E, aut infra. Vnde, & in 39. vel 40. propos. ostendetur pars æqualis toti, & & figura indicat. g *Nam erit quoq; parallelogrammum ABCD, trianguli BFC, vel BGC, duplum.* h *Quare triangula EBC, FBC, vel triangula EBC, GBC, æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum.*



g 41. primi.
h 6. prænum.

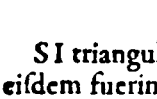


SIT deinde parallelogrammum ABCD, duplum trianguli EFG, in eisdemq; parallelis. Dico bases BC, FG, esse aequales. Nam si altera, nempe BC, sit maior, abscissa aequalis CH, & a ducta HI, parallela ipsi AB, demonstrabimus parallelogramma ABCD, IHCD, esse aequalia, totum & partem; (quia vtrumque duplum est trianguli EFG; illud quidem per hypothesin, hoc verò per 41. propos.) Quod est absurdum. Idem ostendemus, si basis FG, maior dicatur. Si enim abscindatur ipsi BC aequalis FH, ducaturq; recta HE, erunt triangula EFH, EFG, aequalia, pars & totum; (Nam vtrumque dimidium est parallelogrammi ABCD; illud quidem per propos. 41. hoc verò per hypothesin.) Quod est absurdum.

a 31. primi.

EX PROCLO.

SI triangulum, & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij sit basis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si verò minor linea parallela trapezij basis sit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.



INTER lineas parallelas AE, BC, sine constituta trapezium ABCD, & triangulum EBC, super basim BC, eandem, quae sit tamen maior, quàm altera linea AD, parallela in trapezio dato. Dico trapezium ABCD, minus esse duplo trianguli EBC. Cum enim AD, minor ponatur quam BC, sumatur AF, aequalis ipsi BC, & ducatur recta CE, b qua erit parallela ipsi AB; atq; adeo parallelogrammum erit ABCF, c quod duplum est trianguli EBC. Quare trapezium ABCD, cum sit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiusdem trianguli EBC. quod est propositum.

b 33. primi. c 41. primi.



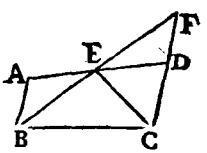
SINT rursus trapezium, & triangulum, vt prius, sed basis BC, sit minor, quam reliqua linea parallela AD, in trapezio dato. Dico trapezium ABCD, minus esse duplo trianguli EBC. Cum enim AD, maior sit, quàm BC, abscindatur DF, aequalis ipsi BC, & ducatur recta BF, d qua erit parallela ipsi CD; atq; adeo parallelogrammum erit BCDF: e quod duplum est trianguli EBC. Quare totum trapezium ABCD, quod superat parallelogrammum BCDF, minus erit duplo eiusdem trianguli EBC. quod est propositum.

d 33. primi. e 41. primi.

IDEM concludetur, si trapezium, & triangulum constituta fuerint super aequales bases, ita tamen vt nunc quidem basis trapezij sit maior latere opposito parallelo, nunc verò minor.

TRAPE-

TRAPEZIVM habens duo latera oppoſita parallela, duplum eſt trianguli, quod baſin habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem verò in medio puncto lateris oppoſiti.

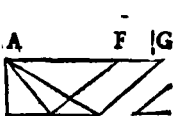


SIT trapezium ABCD, cuius duo latera oppoſita AB, DC, ſint parallela, & ſuper baſin BC, conſtituatur triangulum EBC, verticem E, habens in medio puncto E, latus AD. Dico trapezium ABCD, duplum eſſe trianguli EBC. Producatur enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe BE, donec coeat cum CD, protracto in F. Et quia parallela ſunt AB, CF, a *erunt anguli alterni BAE, FDE, æquales:* b *Sunt autem & anguli AEB, DEF, æquales, quippe qui ad verticem E; & latus AE, trianguli ABE, lateri DE, trianguli DEF, æquale, per hypotheſin.* c *Igitur & reliqua latera AB, BE, reliquis lateribus, DF, FE, æqualia erunt, vtrumque vtrique, & reliqui anguli ABE, DFE, æquales: atque idcirco triangula ABE, DFE, ex coroll. propoſ. 26. huius lib. æqualia erunt. Quare addito communi triangulo CDE,* d *erunt triangulo CEF, æqualia triangula ſimul ABE, CDE.* e *Eſt autem & triangulum BCE, eidem triangulo CEF, æquale, quod baſes BE, EF, oſtenſa ſint æquales, & ipſa triangula inter eaſdem ſint parallelas, ſi per C, duceretur parallela ipſi BF.* f *Igitur triangulum CBE, æquale erit triangulis ABE, CDE; & propterea CBE, triangulum dimidium erit trapezij ABCD, quod eſt propoſitum.*

a 29. primi.
b 15. primi.
c 26. primi.
d 1. primum.
e 38. primi.
f 1. primum.

PROBL. II. PROPOS. 42. xlij.

DATO triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.



DATVM triangulum ſit ABC, & datus angulus rectilineus D. Oportet igitur conſtituere parallelogrammũ æquale triangulo ABC, habens angulum æqualem angulo D. Diuidatur latus vnum trianguli, nempe BC, *g* bifariam in E, & *h* fiat angulus CEF, æqualis angulo D, prout libet, hoc eſt, ſiue angulus CEF, vergat ad partes C, ſiue ad partes B, prout magis videbitur expedire. Ducatur item per A, *i* recta AF, parallela ipſi BC, quæ ſecet EF, in F. Rurſus per C, vel B, ducatur ipſi EF, parallela CG, occurrens rectæ AF, productæ in G. Eritque in angulo CEF, qui dato angulo rectilineo D, factus eſt æqualis, conſtitutum parallelogrammum CEFG, quod dico eſſe æquale triangulo ABC. Ducta enim recta EA; quo-

g 10. primi.
h 23. primi.
i 35. primi.

a 41. *primi.* E A; quoniam parallelogrammum C E F G, *a* duplum est trianb 38. *primi* guli A E C; & triangulum A B C, duplum eiusdem trianguli A E C, *b* quod triangula A E C, A B E, super æquales bases E C, B E, & in eisdem parallelis, sint æqualia. Erunt parallelogrammum c 6. *pronum.* C E F G, & triangulum A B C, *c* æqualia inter se. Cum igitur angulus C E F, factus sit æqualis angulo D, constat propositum. Quocirca dato triangulo æquale parallelogrammum constituimus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

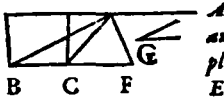
PRAXIS huius problematis facilima est ex ipsa constructione.

SVBIVNGIT autem hoc loco Peletarius subsequens problema, quod huius propos. conuersum est.

DATO parallelogrammo æquale triangulum constituere, in dato angulo rectilineo.

SIT datum parallelogrammum A B C D, & datus angulus G. Fiat angulus C B E, angulo G, æqualis, secetq; recta B E, rectam A D, productam in E. Extendatur quoque B C, ad F, sitq; C F, æqualis rectæ B C, & iungatur E F. Dico triangulum B E F, habens angulum E B F, angulo dato G, æqualem, æquale esse parallelogrammo A B C D.

d 41. *pri.* A D E *Ducta enim recta C E,* d *erit parallelogrammum A B C D, duplum trianguli B C E. Item trian-*

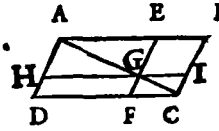


e 38. *primi.* B C F *gulum B E F, eiusdem trianguli B C E, duplum;* e *quod æqualia sint triangula E B C, E C F. Quare* f *æqualia inter se erunt parallelogrammum A B C D, & triangulum B E F. Quod est propositum.*

f 6. *pronum.* *PRAXIS quoque huius problematis Peletarij ex ipsa constructione perfacilis est.*

xliij. ## THEOR. 32. PROPOS. 43.

IN omni parallelogrammo complementa eorum, quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.



IN parallelogrammo A B C D, sint circa diametrum A C, parallelogramma A E G H, C F G I, & complementa D F G H, E B I G, vt in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter se

g 34 *primi.* esse æqualia. Cum *g* enim triangula A B C, C D A, æqualia sint;

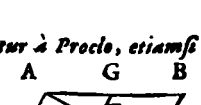
h 1. *pronum.* Itemque triangula A E G, G H A; si hæc ab illis demantur, *h* remanebunt trapezia C B E G, C D H G, æqualia: *i* Sunt autem &

i 34 *pri.* triangula C G I, C G F, æqualia. Quare si detrahantur ex trapeziis,

peziis, *e* remanebunt æqualia complementa DFGH, EBIG. In omni igitur parallelogrammo, complementa, &c. Quod ostendendum erat. a 3. *pronum.*

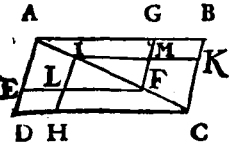
SCHOLIVM.

EODEM modo hoc theorema demonstratur à Proclo, etiamsi duo parallelogramma circa diametrum non coniunguntur in puncto G, sed vel vnum ab altero sit semotum, vel ambo se mutuo intersecent. Sit enim primum vnum ab altero distans, ita vt complementa sint figura quinquangula. Vt in parallelogrammo ABCD, circa diametrum AC, consistant parallelogramma AEFG, CHIK. Dico complementa DEFIH, BKIFG, esse æqualia. Cum enim b *triangula ABC, CDA, æqualia inter se sint: Item triangula AEF, GHI, æqualia triangulis AGF, CKI:* c *erunt reliqua complementa DEFIH, BKIFG, æqualia. Quod est propositum.*



b 34. *pri* 18. *pri.* c 3. *pronum.*

SECENT se iam mutuo parallelogramma AEFG, CHIK, circa diametrum consistentia, ita vt communem partem habeant ILFM. Dico adhuc complementa DELH, BGMK, esse æqualia. Cum enim d *æqualia sint triangula ABC, CDA: Item triangula AFG, AFE:* e *erunt reliqua quadrilatera BCFG, DCFE, æqualia: Sunt* f *autem rursus æqualia triangula IFM, IFL. Igitur si hæc addantur dictis quadrilateris,* g *erunt figura BCIMG, DCILE, æquales. Cum igitur &* h *æqualia sint triangula CIK, CIH:* i *erunt reliqua complementa BGMK, DELH, etiam æqualia. Quod est propositum.*



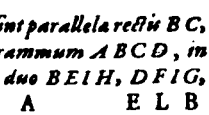
d 34. *primi.* e 3. *pronum.* f 34. *primi.* g 2. *pronum.*

CONVERSVM quoque huius theorematis cum Peletario demonstrabimus, hoc modo.

h 34. *primi.*

SI parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita vt ex illis duo aduersa sint æqualia: consistent reliqua duo circa diametrum. i 3. *pronum.*

DVCTIS duabus rectis EF, GH, quæ sint parallelæ rectis BC, CD, seque secent in I, diuisum sit parallelogrammum ABCD, in quatuor parallelogramma, quorum aduersa duo BEIH, DFIG, sint æqualia. Dico reliqua duo AEIG, CFIH, circa diametrum consistere, hoc est, diametrum à puncto C, ad punctum A, ductam transire per punctum I. Si enim non transit, secet diameter CKA, rectam GH, in K, si fieri potest, & per K, k *ducatur LM, parallela ipsi BC.* l *Erunt igitur* l 43. *pri-*



k 31. *primi.*

comple-

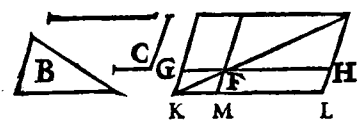
a 9. pro. mm. *complementa B H K L, D G K M, æqualia: Est autem D G K M, maius quam D G I F. Quare & maius erit B H K L, quam D G I F.*

b 1. pro. mm. *Cum ergo D G I F, æquale ponatur ipsi B E I H; b erit etiam B H K L, maius quam B E I H, pars quam totum. Quod est absurdum. Non ergo diameter A C, rectam G H, in K, secat, sed per punctum I, transit. Quod est propositum.*

xliiij. PROBL. 12. PROPOS. 44.

AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

DATA recta linea sit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habens æqualem angulo C, & vnũ latus æquale rectæ A. Constituatur triangulo B, c æquale parallelogrammum D E F G, habens angulum E F G, angulo C, æqualem, producaturque G F, ad H, vt F H, sit æqualis rectæ A, & per H, d ducatur H I, parallela ipsi F E, occurrens D E, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter I F, occurrens rectæ D G, productæ in K; & e per K, ducatur K L, parallela ipsi G H, secans I H, protractam in L, producaturque E F, ad M. Dico parallelogrammum L M F H, esse id, quod quæritur. Habet enim latus F H, æquale datæ rectæ A, & angulum H F M, angulo dato C, æqualem, f cum angulus H F M, æqualis sit angulo E F G, qui factus est æqualis angulo C: Deinque parallelogrammum L M F H, æquale est triangulo B, g cum æquale sit complemento D E F G, quod factum est æquale triangulo B. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.



c 42. primi.

d 31. primi.

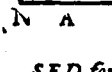
e 31. primi.

f 15. primi.

g 43. primi.

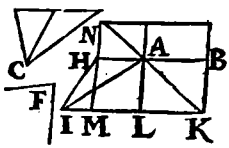
SCHOLIVM.

QVOD si quis optet, lineam ipsam A, datum, esse etenim latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammum F M L H, ad rectam A, ex iis, quæ in scholio propos. 31. huius lib. docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo M F H, & sumatur recta N O, æqualis rectæ F M, compleaturq; parallelogrammum, ceu in dicto scholio traditum fuit, effectum erit, quod quæritur.



SED fortassis magis ex sententia Euclidis problema hoc conficiemus, si super ipsam rectam datam constituamus parallelogrammum, non autem super æqualem, cuiusmodi fuit recta F H, &c. Sit ergo vtrius data

ſim data recta A B, datum triangulum C D E, & datus angulus F, oporteatque ſuper rectam A B, conſtituere parallelogrammum aquale triangulo C D E, in dato angulo F, quod ita efficiemus. Secto uno latere trianguli, ut D E, bifariam in G, ductaque recta C G, ſecante eu ſcholio propoſ. 38. huius lib. triangulum C D E, bifariam producatur recta A B, verſus eam partem, ubi parallelogrammum conſtruendum debet habere angulum dato angulo F, aqualem, ut hic verſus A, fiatque A H, aqualis ipſi E G, dimidio lateris D E. Deinde in A, a conſtituatur angulus H A I, angulo E, aqualis, deorſum quidem, ſi parallelogrammum verſus ſuperiorem partem ſit conſtruendum, ſurſum verò, ſi verſus inferiorem. Poſita autem recta A I, aquali ipſi E C, iungatur recta H I. Et quia duo latera H A, A I, duobus lateribus G E, E C, aqualia ſunt, utrumque utrique, angulosq; continent aquales, b erunt triangula A H I, E G C, aqualia. Poſt hac, c ducta per I, ipſi H B, parallela I K, d conſtituatur in A, verſus hanc parallelam angulus H A L, angulo dato F, aqualis, ſecetq; A L, rectam I K, in L. e Ducta quoque per H, ipſi A L, parallela H M, ſecante I K, in M, f erit parallelogrammum A H M L, trianguli A H I, duplum: Eſt autem & triangulum C D E, trianguli E G C, duplum, quòd aqualia oſtenſa ſint triangula E G C, D G C. Igitur cum aqualia ſint demonſtrata triangula A H I, E G C, g erunt aqualia parallelogrammũ A H M L, & triangulum C D E. Iam verò ſumpta recta L K, date recta A B, aquali, ducatur recta K A, producaturq; donec cum M H, producta coeat in N, & per N, agatur ipſi H B, parallela N O, donec in O, coeat cum K B, protracta, ac tandem L A, producatur uſque ad P, in recta N O. Dico parallelogrammum A B O P, eſſe id, quod quaritur. Eſt enim conſtitutum ſuper datam rectam A B, habetq; angulum B A P, dato angulo F, aqualem, h cum aqualis ſit angulo H A L, qui angulo F, factus eſt aqualis. Deinde aquale eſt dato triangulo C D E, i cum aquale ſit parallelogrammo A H M L, quod triangulo C D E, oſtenſum fuit aquale.



a 23. primi.

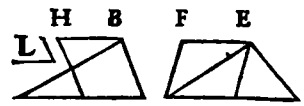
b 4. pri. c 31. primi. d 23. primi. e 31. pri. f 41. pri. g 7 prop. huius. h 15. primi. i 43. primi.

PRAXIS verò huius problematis à conſtructione ipſa non differt, niſi quod recta H I, duci non debet, neque recta C G. Ha enim propter demonſtrationem tantum ducta ſunt.

ADDIT hic aliud problema Pelatarius, hoc modo.

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo conſtituere æquale triangulum in dato angulo rectilineo.

SIT data recta A B; datum parallelogrammum C D E F, & datus angulus L. Producatur C D, ad G, ut D G, aqualis ſit ipſi C D, & rui-



a 44. primi.

& iungatur G E, recta: Eritque triangulum C E G, parallelogrammo C D E F, æquale, & demonstrauimus scholio propos. 41. a Fiat iam super data recta A B, parallelogrammum A B H I, æquale triangulo C E G, hoc est, parallelogrammo C D E F, habens angulum A, angulo L, æqualem; & producatur A I, ad K, & sit I K, æqualis ipsi A I, iungaturque recta B K. Dico triangulum A B K, constitutum super datam rectam A B, habens q; angulum A, æqualem dato angulo L; æquale esse dato parallelogrammo C D E E. Cum enim triangulum A B K, æquale sit parallelogrammo A B H I, ex scholio propos. 41. quod æquale est constructum parallelogrammo C D E F, constat propositum.

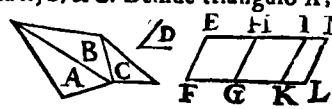
PRAXIS huiusce problematis à constructione non differt; difficilisq; non est, si adhibeatur præcedens praxis, qua triangulo E C G, parallelogrammum A B H I, super data recta A B, in dato angulo A, construatur.

PROBL. 13. PROPOS. 45.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

QVAMVIS Euclides proponat hoc problema absolutè, non astringendo nos ad certam aliquam rectam lineam datam, vt in præcedenti propos. 44. fecerat; tamen quia in sequentibus frequenter vsurpata in data recta linea, placuit ipsum proponere vna cum data recta linea. Sit ergo recta data E F; rectilineum A B C, & datus angulus D. Oportet igitur construere ad datam rectam E F, parallelogrammum æquale rectilineo A B C, quod habeat angulum æqualem angulo D. Resoluatur rectilineum in triangu-

b 44. primi.



la A, B, & C. Deinde triangulo A, *b* æquale parallelogrammum constituatur E F G H, super rectam E F, habens angulum F, angulo D, æqualem. Item super rectâ G H, parallelogrammum G H I K, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item super rectam I K, parallelogrammum I K L M, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et sic deinceps procedatur, si plura fuerint triangula in dato rectilineo: factumque erit, quod iubetur. Nam tria parallelogramma constructa, quæ quidem æqualia sunt rectilineo dato A B C, conficiunt totum vnum parallelogrammum, quod sic demonstratur. Duo anguli E F G, H G K, *c* inter se sunt æquales;

c 1. præm.

æquales, cum vterque æqualis sit angulo D. Addito igitur communi angulo FGH, erunt duo anguli EFG, FGH, *a* qui duobus rectis æquiualent, *b* æquales duobus angulis HGK, FGH, ideoq; hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt. *c* Quare FG, GK, vnam rectam lineam efficient. Eadem ratione ostendemus, EH, HI, vnam rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli EHG, HIK, æquales inter se sunt, (*d* cum sint æquales oppositis angulis æqualibus EFG, HGK.) *e* & duo anguli HIK, IHG, duobus sunt rectis æquales, &c. Cum igitur EI, FK, sint parallelæ. *f* Itemq; EF, IK, quod vtraque parallela sit rectæ HG; Parallelogrammum erit EFKI. Eodem modo demonstrabitur, parallelogrammũ IKLM, adiunctum parallelogrammo EFKI, constituere totum vnum parallelogrammum EFLM. Ad datam ergo rectam lineam EF, dato rectilineo ABC, constituimus æquale parallelogrammum EFLM, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

a 29. pri mi.
b 2. pro num.
c 14. pri
d 34. pri mi.
e 29. pri mi.
f 33. pri.

SCHOLIVM.

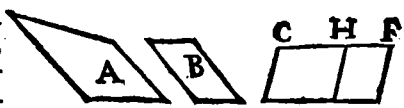
PARI ratione, propositis quotcunque rectilineis, constituemus illis parallelogrammum æquale, si omnia resoluantur in triangula, quibus æqualia parallelogramma exhibeantur, singulis singula, per propos. 44. Veluti factum est in hoc problemate. Nam cum omnia hæc parallelogramma efficiant vnum parallelogrammum, vti hic demonstratum fuit, constitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propositis. Vt si quis intelligat duo rectilinea proposita A B, & C; Atque A B, resoluatur in triangula A, & B, singulisq; triangulis, A, B, C, singula parallelogramma E G, G I, I L, super rectas E F, H G, I K, iuxta artem huius problematis, æqualia constituantur, ex propos. 44. erit constructum parallelogrammum totum E F L M, æquale duobus rectilineis A B, & C. Et sic de pluribus.

PRAXIS autem huius problematis ex praxi præcedentis propos. sæpius repetita petenda est.

HVC referri poterit problema vtilissimum ex Peletario, quod nos tamen alia ratione, & breuiori demonstrabimus in hunc modum.

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minus inquirere.

SINT data rectilinea A, & B, sitque A, maius. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, superet rectilineum B.



g Fiat parallelogrammum C D E F, in quocunque angulo D, æquale maiori rectilineo A. Et super rectam C D, parallelogram-

g 45. pri mi.

lelogrammum C D G H, in eodem angulo D, æquale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum C D E F, superat parallelogrammum C D G H, parallelogrammo E F H G, superabit quoque figura A, figuram B, eodem parallelogrammo E F H G. Quod est propositum.

XLV. PROBL. 14. PROPOS. 46.

A DATA recta linea quadratum describere.

SIT data recta A B, super quam oporteat quadratum describere. Ex A, & B, *a* educantur A D B C, perpendiculares ad A B; sintque ipsi A B, æquales, & connectatur recta C D. Dico A B C D, esse quadratum. Cum enim anguli A, & B, sint recti, *b* erunt A D, B C, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis sit ipsi A B. Igitur *c* & A B, D C, parallelæ sunt & æquales: & ideo parallelogrammum est A B C D, in quo, cum A D, D C, C B, æquales sint ipsi A B, omnes quatuor lineæ æquales existunt: Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum C, & D, *d* æquales sint oppositis rectis A. & B. Quadratum igitur est A B C D, ex definitione; ac proinde à data recta linea quadratum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 11. pri mi.
b 28. pri mi.
c 33 pri mi.
d 34 pri mi.



EX PROCLO.

LINEARVM æqualium æqualia sunt quadrata: & quadratorum æqualium æquales sunt lineæ.

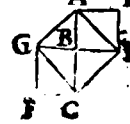


SINT primum rectæ A B, C D, æquales. Dico eorum quadrata A B E F, C D G H, æqualia quoque esse. Ductis enim diametris B F, D H, erunt duo latera B A, A F, trianguli B A F, duobus lateribus D C, C H, trianguli D C H, æqualia, vtrumque vtrique, cum ex definitione quadratæ rectæ A F, C H, æquales sint rectis A B, C D. Sunt autem & anguli A, & C, æquales, nempe recti. Igitur trianguli B A F, D C H, æqualia erunt. Quia cum sint dimidia quadratorum, erunt & quadrata toti æqualia. Quod est propositum.

e 4. pri.
f 14. pri mi.

SINT deinde quadrata A B D E, B C F G, æqualia. Dico lineas quoque ipsorum A B, B C, æquales esse. Coniungantur enim quadrata ad angulum B. & recta A B, B C, in directum constituantur. Et quoniam anguli A B G A B D, sunt recti, g erunt & rectæ G B, B D, in directum constitutæ. Ducantur diametri A D, C G, iungaturque recta A G, C D. Quoniam igitur quadrata A B D E, B C F G æqualia sunt erunt & trianguli A B D, B C G, eorum dimidia, æqualia. Addito ergo com-

g 14. pri.



uni trianguło B C D, fiet totum triangulum A C D, toti triangulo G D C, æquale. Quare triangula A C D, G D C, cum eandem habeant basin C D, ad easdemque sint partes, a in eisdem sunt parallelis: ideoque parallela sunt A G, C D. Et quoniam, & in scholio propos. 34. ostendimus, diameter in quadrato secat angulos quadrati bifariam, erunt anguli D A C, G C A, alterni semirecti, ideoque æquales. Quamobrem, b & parallela sunt A D, C G. Igitur parallelogrammum est A D C G: ac propterea c recta A D, C G, æquales. Quoniam ergo in triangulis A B D, B C G, latera A D, C G, æqualia sunt, & anguli quibus ea latera adiacent, inter se etiam æquales, cum sint semirecti, & in scholio propos. 34. ostensum fuit: erunt d reliqua latera æqualia, nempe A B, ipsi B C, &c. Quod erat propositum.

a 29. primi.
b 27. primi.
c 34. primi.
d 26. primi.

SCHOLIVM.

POSSENT hæc omnia multo brevius probari per superpositionem quadrati cuius super aliud. Nam si lineæ sint æquales, si una alteri superponatur, congruent ipsæ inter se. Cum ergo & anguli sint æquales, nempe recti, conuenient quoque ipsi inter se, ideoque totum quadratum toti quadrato congruet. Quod si quadrata sint æqualia, congruent ipsa inter se, propter æqualitatem angulorum. Igitur & lineæ: alias unum quadratum alio maius esset.

PRAXIS autem huius problematis perfacilis est. Si namque ad datam rectam A B, in altero extremorum, & in A, erigatur perpendicularis A D, ipsi data recta A B, æqualis, & ex B, & D, ad internallum eiusdem A B, duo arcus describantur sese in C, intersecantes, iungaturq; recta B C, D C, constructum erit quadratum. Nam A B C D, cum ex constructione sit figura æqualium laterum, atque adeo latera opposita habeat æqualia, parallelogrammum erit, & ad initium scholij propos. 34. demonstrauimus. Existente ergo angulo A, recto, c erunt & B, D, recti, nec non f & oppositus angulus C, &c.

c 29. primi.
f 34. primi.

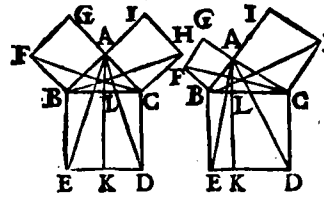
THEOR. 33. PROPOS. 47. xlvj.

IN rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.

IN triangulo A B C, angulus B A C, sit rectus, g describanturque super A B, A C, B C, quadrata A B F G, A C H I, B C D E. Dico quadratum B C D E, descriptum super latus B C, quod angulo recto opponitur, æquale esse duobus quadratis A B F G, A C H I, quæ super alia duo latera sunt descripta, siue hæc duo latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta A K, b parallela ipsi B E, vel

g 46. primi.
h 31. primi.

BE, vel ipſi CD, ſecans BC, in L, & iungantur rectæ AD, AE,
a 14 pri mi. CF, BH. Et quia duo anguli BAC, BAG, ſunt recti, *a* erunt rectæ GA, AC, vna linea recta; eodemque modo IA, AB, vna recta linea erunt. Rurſus quia anguli ABF, CBE, ſunt æquales,
b 1. pro. cum ſint recti, ſi addatur communis angulus ABC, *b* fiet totus



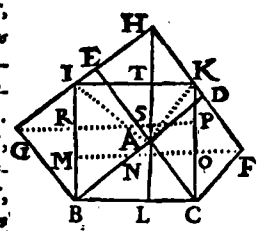
angulus CBF, toti angulo ABE, æqualis; ſimiliterque totus angulus BCH, toti angulo ACD. Quoniam igitur duo latera AB, BE, trianguli ABE, æqualia ſunt duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, vtrumque vtrique, vt conſtat ex definitione quadrati: Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hiſce lateribus æquales, vt oſtendimus;
c 4. pri. *c* Erunt triangula ABE, FBC, æqualia. Eſt autem quadratum,
d 41. pri mi. ſeu parallelogrammum ABFG, *d* duplum trianguli FBC, cum ſint inter parallelas FB, CG, & ſuper eandem baſin BF: Et parallelogrammum BEKL, duplum trianguli ABE, quòd ſint inter
e 6. pro. parallelas BE, AK, & ſuper eandem baſin BE. Quare *e* æqualia erunt quadratum ABFG, & parallelogrammum BEKL. Eadem ratione oſtendetur, æqualia eſſe quadratum ACHI, & parallelo-
f 4. pri. grammum CDKL. *f* Erunt enim rurſus triangula ACD, HCB, æqualia, ideoq; eorum dupla, parallelogrammũ videlicet CDKL, & quadratũ ACHI, æqualia erũt. Quamobrem totum quadratũ BCDE, quod componitur ex duobus parallelogrammis BEKL, CDKL; æquale eſt duobus quadratis ABFG, ACHI. In rectangulis ergo triangulis, quadratũ, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

FACILE ex theoremate iſto quinis intelliget, in triangulo amblygonio quadratum lateris obtuſo angulo oppoſiti maius eſſe duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum: In quouis autem triangulo quadratum lateris vni acutorum angulorum oppoſiti minus eſſe duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum. Nam ſi angulus coarctaretur donec fieret rectus, manentibus iiſdem lateribus eum ambientibus, euaderet latus oppoſitum minus: Si autem acutus angulus dilataretur, donec fieret rectus, manentibus iiſdem lateribus eum ambientibus, fieret latus oppoſitum maius, vt patet. Cum ergo quadratum lateris angulo recto oppoſiti æquale ſit hic oſtenſum duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum; perſpicuum eſt, quadratum lateris obtuſo angulo oppoſiti eſſe maius duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum: quadratum vero lateris angulo acuto oppoſiti eſſe minus duobus quadratis ſimul duorum laterum reliquorum.

tum. Quanto autem illud maius sit, & quanto hoc minus, demonstrabit Euclides lib. 2. propos. 12. & 13.

QVONIAM verò theorema hoc pulcherrimum est, vtilitatesq; habet insignes, operapretium iudicaui tentare, num illud aliis viis demonstrari possit, variata aliquantulum constructione; quod Peletarius sine proportionibus fieri posse negauit. Sit ergo rursus triangulum A B C, cuius angulus B A C, rectus sit, productisq; lateribus B A, C A, ad partes anguli recti fiant A D, A E, ipsis A C, A B, aequales; & per C, D, B, E, ipsis A B, A C, parallelae agantur coeuntes in F, G. Et quia in parallelogrammis C D, B E, a *tum latera D F, F C, oppositis lateribus A C, A D, quam latera E G, G B, lateribus oppositis A B, A E, aequalia sunt, erit vtrumque parallelogrammum aequilaterum: Sed & anguli omnes recti sunt.* b *Nam F, G, oppositis rectis D A C, E A B, aequales sunt, ideoque recti: Anguli autem C, D, B, E, recti sunt, quod vterus C, D, cum recto D A C, & vterus B, E, cum recto E A B,* c *aequalis sit duobus rectis. Quadrata ergo sunt C D, B E, laterum A C, A B. Productis etiam lateribus F D, G E, donec conueniant in H, erigantur in B, C, ad B C, perpendiculares B I, C K, secantes G H, F H, in I, K, iungaturq; recta I K. Et quia, si à recto angulo I B C, A B G, auferatur communis angulus A B I, reliqui A B C, G B I, aequales sunt; sunt autem & recti anguli B A C, B G I, aequales; erunt duo anguli A, B, trianguli, A B C, duobus angulis G, B, trianguli G B I, aequales, vterque vtrique: Sunt autem & latera A B, G B, illis adiacentia aequalia, ob quadratum B E.* d *Igitur & tam latera B C, B I, quàm A C, G I, aequalia erunt, & reliqui anguli C, I, aequales. Nam aliter in triangulis A B C, F K C, aequalia erunt tum latera B C, C K, quam A B, F K, & anguli B, K: propterea quod duo anguli A, C, trianguli A B C, duobus angulis F, C, trianguli F K C, aequales sunt: (cum A, F, recti sint, & duo anguli C, reliqui duorum rectorum, dempto communi A C K) & latera A C, C F, illis adiacentia aequalia, ob quadratum C D. Quare recta B I, C K, inter se etiam aequales erunt.* f *Cum ergo quoque sint parallelae,* g *erunt etiam B C, I K, aequales, & parallelae. Quadratum igitur est B C K I, lateris B C, cum quatuor eius latera sint aequalia, & omnes anguli recti, quod anguli I, K, oppositis rectis C, B, aequales sint. Dico ergo, quadratum C I, duobus quadratis B E, C D, aequale esse. Ducta enim ex H, per A, recta H T A L, ipsis B I, C K, parallela erit. Nam quia G E,* h *ipsi B A, aequalis est, & E H, ipsi A D, hoc est, ipsi G I, qua ipsi A C, siue A D, ostensa fuit aequalis, erit &, addita communi E I, tota H I, toti G E, hoc est, ipsi A B, aequalis. Cum ergo H I, A B, sint etiam parallelae,*



a 34. primi.

b 34. primi.

c 29. primi.

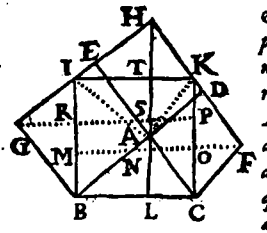
d 26. primi.

e 1. primi.

f 28 primi.

g 33. primi.

h 34. primi.



a 33. primi. lela, a erunt quoque B I, A H, parallelæ & æquales. Eodemq; modo A H ipsi C K, parallela ostendetur, & æqualis. Quoniam igitur b tam quadratum B E, parallelogrammo B H, super eandem basin A B, quam parallelogrammum B T, eidem parallelogrammo B H, super eandem basin B I, æquale est, c erit quoque quadratum B E, parallelogrammo B T, æquale. Sic etiam quia tam d quadratum C D, parallelogrammo C H, super eandem basin A C, quam parallelogrammum C T, eidem parallelogrammo C H, super eandem basin C K, æquale est, c erit quoque quadratum C D, parallelogrammo C T, æquale. Totum ergo quadratum B C K I, ex duobus parallelogrammis B T, C T, compositum, duobus quadratis B E, C D, æquale est. Quod erat demonstrandum.

b 35. primi.

c 1. primum.

d 35. primi.

e 1. primum.

ALITER. Loco rectæ H T A L, iungantur duæ rectæ A I, A K, & per A, ipsis B I, C K, parallela ducatur T A L. Quoniam ergo f tam quadratum B E, (ostendemus enim & prius, B K, B E, C D, quadrata esse laterum B C, A B, A C.) trianguli A B I, super eandem basin A B, quam parallelogrammum B T, eiusdem trianguli A B I, super eandem basin B I, duplum est, g erit quadratum B E, parallelogrammo B T, æquale. Pari ratione, quia h tam quadratum C D, trianguli A C K, super eandem basin A C, quàm parallelogrammum C T, eiusdem trianguli A C K, super eandem basin C K, duplum est, i erit quoque quadratum C D, parallelogrammo C T, æquale. Quam ob rem, & prius, totum quadratum B C K I, ex parallelogrammis duobus B T, C T, conflatum, duobus quadratis B E, C D, æquale est. Quod erat ostendendum.

f 41. primi.

g 6. primum.

h 41. primi.

i 6. primum.

ALITER. Loco rectarum H T A L, A I, A K, ducantur per F, G, ipsis B C, I K, parallelæ F M, G P, secantes A B, C K, in N, O, & B I, C E, in R, S. Eritque B R, ipsi K O, æqualis. Quoniam enim k anguli O, R, recti sunt, & O K F, R B G, æquales, quod & uterque angulo A B C, supra ostensum sit æqualis; erunt duo anguli O, K, trianguli F K O, duobus angulis R, B, trianguli G B R, æquales, & uterque utrique: Sunt autem & latera F K, B G, illis adiacentia æqualia, quod utrumque supra sit ostensum ipsi B C, æquale. l Igitur & latera K O, B R, æqualia erunt. Itaque quoniam m tam parallelogramma B C F N, B C O M, super eandem basin B C, quam parallelogramma B C S G, B C P R, super eandem basin B C, æqualia sunt, estque parallelogrammum B C P R, parallelogrammo I K O M, æquale, ob rectas B R, K O, ostensas æquales; (Nam hinc fit, ut si unum alteri superponatur, sibi mutuo congruant, propter latorum, angulorumq; æqualitatem) erunt ambo parallelogramma B C F N, B C S G, toti qua-

k 29. primi.

l 26. primi.

m 33. primi.

toti quadrato BCKI, ex duobus parallelogrammis BCOM, IKOM, compoſito æqualia. 2 Cum ergo tam quadratum CD, parallelogrammo BCFN, ſuper eandem baſin CF, quàm quadratum BE, parallelogrammo BCSG, ſuper eandem baſin BG, æquale ſit; erunt quoque ambo quadrata CD, BE, eidem quadrato BCKI, æqualia. Quod demonſtrandum erat. 2 35. pri mi.

ATQVE in hunc modum alia demonſtrationes excogitari poterunt. Video demonſtrationem Euclidis ſimpliciorem eſſe, & magis expeditam, ſed non injucundum tamen eſt intelligere, variis demonſtrationibus eandem veritatem poſſe confirmari.

INVENTIO porro admirabilis, atque pulcherrimi hujus theorematis ad Pythagoram refertur, qui, ut ſcribit Vitruvius lib 9. hoſtias Muſis immolauit, quòd ſe in tam præclaro inuento adinuenerit. Sunt qui putent, eum immolaſſe centum boues: ſi tamen Proclo credendum eſt, unum tantummodo obtulit. Fortaſſe autem Pythagoras, ut nonnulli volunt, ex numeris occaſionem ſumpſit; ut theorema hoc inueſtigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter eſſet contemplatus, vidiſſetque quadratum numerum maioris æqualem eſſe quadratis numeris reliquorum, compoſuit triangulum ſcalenum, cujus maximum latus diuiſum erat in 5 partes æquales, minimum in 3. ejuſdem magnitudinis, & reliquum in 4. Quo facto, conſideranit angulum ſub his duobus lateribus contentum, inuenitque eum eſſe rectum. Idq; in quamplurimis alijs numeris, ut in 6. 8. 10. & 9. 12. 15. &c. obſeruauit. Quare inquirendum eſſe iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis æquale eſſet, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem ſecundum dictos numeros, continebant unum angulum rectum: Atque ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi voluptate adinuenit, firmaque ratione demonſtrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 6. propoſ. 31. Vbi demonſtrauit, non ſolum quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, æquale eſſe quadratis reliquorum duorum laterum; Verum etiam figuram quamlibet rectilineam ſuper latus recto angulo oppoſitum conſtructam, ſiue ea ſit triangulum, ſiue quadrangulum, &c. æqualem eſſe duabus figuris, quæ ſuper reliqua latera deſcribuntur, dummodo prouti ſint ſimiles, ſimiliterq; deſcripta, ut ibidem oſtendemus.

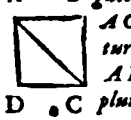
CÆTERVM quoniam mentionem facimus trium numerorum, quorum maximi quadratum æquale eſt quadratis reliquorum, non abs re fuerit, paucis explicare, quonam pacto huiuſmodi numeri inueniantur. Habitis igitur his tribus numeris 3. 4. 5. ſi duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. ſi iidem triplicentur, exurgent alij tres 9. 12. 15. & ſi quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16 20. Atque ita reperientur quotcunq; alij, ſi primi illi tres per quemcunque mul-

tiplicentur numerum. Traduntur tamen à Proclo duæ regulæ, quibus inueniuntur prædicti numeri, nulla habita ratione illorum trium. Prima ascribatur Pythagoræ, & est huiusmodi. Sumatur pro minimo quicunque numerus impar, vt 5. ex quo ista alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, vt hic ex 25. reiice vnitatem. Nam reliqui numeri dimidiũ, videlicet 12. erit alter numerus, cui si addatur vnitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum æquale est quadratis aliorum. Quod si numerus impar acceptus fuisset 3. essent reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula tribuitur Platoni, quæ talis est. Accipiatur numerus quicunque par, nempe 6. Ex huius dimidij quadrato, nimirum 9. detrahe vnum, eidemq; adde vnum, habebisq; reliquos duos numeros 8. & 10. primus autem est 6. nimirum numerus par acceptus. Hæc regula si accipiatur par 10. reperientur alij duo 24. & 26.

COLLIGVNTVR ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima scitu non iniucunda tam theoremata, quam problemata, è quibus visum est ea duntaxat in medium proferre, quæ vtilitatem magnam rebus Geometricis allatura creduntur, initium hinc sumentes.

I.

SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum à diametro descriptum duplum erit prædicti quadrati.

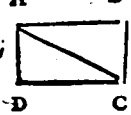


IN quadrato A B C D, ducatur diameter A C. Dico quadratum diametri A C, duplum esse quadrati A B C D. Cum enim in triangulo A B C, angulus B, rectus sit, a *erit quadratum lateris A C, æquale duobus quadratis laterum A B, B C. Cum igitur quadrata linearum A B, B C, æqualia sint, quòd lineæ A B, B C, sint æquales, erit quadratum diametri A C, duplum cuiuslibet illorum, vt quadrati lineæ A B, hoc est, quadrati A B C D. Quod est propositum.*

a 47. primi.

II.

QVADRATVM diametri figuræ alterâ parte longioris æquale est duobus quadratis laterũ inæqualium.



IN altera parte longiori A B C D, ducatur diameter A C; & quia in triangulo A B C, angulus B, est rectus, b *erit quadratum lateris A C, æquale duobus quadratis laterum inæqualium A B, B C. Quod est propositum.*

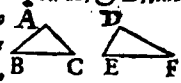
b 47. primi.

III.

SI fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis opposita sint æqualia, erunt duo quadrata reliquo-

reliquorum duorum laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius.

TRIANGVLORVM ABC, DEF, anguli A, & D, sint recti, lateráque oppositа BC, EF, aequalia. Dico duo quadrata laterum AB, AC, simul sumpta aequalia esse duobus quadratis laterum DE, DF, simul sumptis. Nam quadrata linearum BC, EF, aequalia inter se sunt, cùm & ipsa linea inter se ponantur aequales. Quadrato autem lineа BC, a aequalia sunt quadrata linearum AB, AC. Et quadrato lineа EF, aequalia sunt quadrata linearum AB, AC; Et quadrato lineа EF, aequalia sunt quadrata linearum DE, DF. b Quadrata ergo rectarum AB, AC, quadratis rectarum DE, DF, aequalia sunt. Quod est propositum.



a 47. primi.
b 1. prænum.

IV.

DVOBVS quadratis inæqualibus propositis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia sint inter se, & simul sumpta æqualia duobus inæqualibus propositis simul sumptis.

SINT A, & B, latera duorum quadratorum inaequalium. Fiat angulus rectus DCE, sitq; DC, recta aequalis rectae B, & recta CE, rectae A. Ducta deinde recta DE, coniungente duo puncta D, E, constituantur super ipsam duo anguli semirecti DEF, EDF, c coeantq; rectae DF, EF, in F. Quoniam igitur in triangulo FDE, anguli FDE, FED, aequales sunt; d erunt & latera DF, EF, aequalia, ideoq; & quadrata eorundem laterum aequalia. Dico iam, eadem quadrata linearum DF, EF, aequalia esse quadratis linearum A, & B, hoc est, quadratis linearum CE, & CD. Nam cùm in triangulo DEF, anguli FDE, FED, faciant semissem recti; e erit reliquus angulus F, rectus. f Quamobrem erunt quadrata linearum DF, EF, aequalia quadrato lineа DE: g Sed eidem quadrato lineа DE, aequalia sunt quoque quadrata linearum CD, CE. Igitur quadrata linearum DF, EF, h aequalia sunt quadratis linearum DC, EC. Quod est propositum.



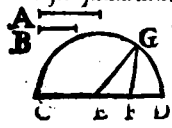
c 13. prænum.
d 6 primi.
e 32. primi.
f 47. primi.
g 47. primi.
h 1. prænum.

V.

PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus potest maior, quàm minor.

POTENTIA linea recta dicitur eius quadratum. Tantum enim quamvis recta linea posse dicitur, quantum est eius quadratum. Sint ergo duae lineae inaequales A, & B, oporteat q; cognoscere, quanto maius

maius sit quadratum maioris lineæ A, quàm minoris B. Ex quauis



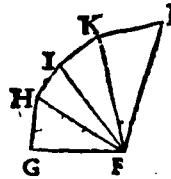
linea recta C D; sumatur C E, æqualis rectæ A, & E F, æqualis rectæ B. Deinde centro E, & interuallo E C, semicirculus describatur C G D; & ex F, ducatur F G, perpendicularis ad C D. Dico quadratum rectæ A, hoc est rectæ C E, sibi aqua-

a47.primi. lis, maius esse, quàm quadratum rectæ B, hoc est, rectæ E F, sibi aqualis, quadrato rectæ F G. Ducta enim recta E G, a erit eius quadratum æquale quadratis rectarum E F, F G, hoc est, quadratum rectæ E C, illi æquale, superabit quadratum rectæ E F, quadrato rectæ F G. Quod est propositum.

VI.

PROPOSITIS quotcunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale.

SINT latera quinque quadratorum A, B, C, D, E. Oporteat inuenire quadratum æquale omnibus illis quinque. Fiat angulus rectus F G H, sitq; recta F G, æqualis rectæ A, & recta G H, rectæ B. Ducta deinde recta H F, fiat angulus rectus F H I, sitq; H I, æqualis rectæ C. Ducta rursus recta I F, fiat angulus rectus F I K, sitq; I K, æ-





qualis rectæ D. Ducta denique recta K F, fiat angulus rectus F K L, sitq; K L, æqualis rectæ E, ducaturq; recta F L. Dico quadratum rectæ F L, æquale esse quinq; quab47.primi. dratis propositis. Quadratum enim rectæ F H, b æquale est quadratis rectarum F G, G H, hoc est, quadratis rectarum A, & B. Rursus quac47.primi. dratum rectæ F I, c æquale est quadratis rectarum F H, H I, & idcirco quadratis rectarum A, B, & C. Item quadratum rectæ F K, d47.primi. d æquale est quadratis rectarum F I, I K, ideoq; quadratis rectarum A, B, C, & D. Demq; quadratum rectæ F L, e æquale est quadratis e47.primi. rectarum F K, K L, ac propterea quadratis rectarum A, B, C, D, & E. Quod est propositum.

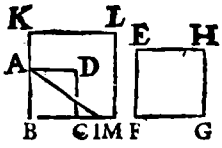
VII.

PROPOSITIS duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita vt tota figura composita sit etiam quadrata.

SINT duo quadrata A B C D, E F G H, proposito q; sit quadrato A B C D, apponere figuram, qua sit aqualis quadrato E F G H, &c. Sumatur recta B I, aqualis rectæ F G, lateri quadrati E F G H. Du-

Cta au-

Recta autem recta AI, & producta recta BA, ad partes A, accipiatur BK, aqualis rectæ AL, perficiaturq; quadratũ BKLM. Dico figuram ADCMLK, quadrato ABCD, adiunctam, aqualem esse quadrato EFGH. Quoniam enim quadratum rectæ AI, hoc est, quadratum BKLM, a *aquale est quadratis rectarum AB, BI, hoc est, quadratis ABCD, EFGH: si auferatur commune quadratum ABCD,* b *remanebit figura ADCMLK, aqualis quadrato EFGH. Quod est propositum.*



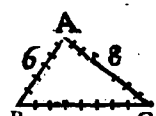
a 47. primi.
b 3. prænum.

VIII.

COGNITIS duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.

SIT angulus A, rectus in triangulo ABC, sintq; primùm cognita latera AB, AC, circa angulum rectum, quorum AB, ponatur 6. palmorum, & AC, 8. Quoniam igitur quadratum rectarum AB, AC, nempe quadrati palmi 36. & 64. c *aqualia sunt quadrato rectæ BC; si illa contungantur simul, efficietur hoc quadratorum palmorum* 100. *Latus ergo BC, continebit* 10. *palmos. Tantum enim est latus, seu radix quadrata* 100. *palmorum, & perspicuum est apud Arithmeticos. Sint deinde cognita latera AB, BC, sitq; AB, 6. palmorum, & BC,* 10. *Quoniam igitur quadratum rectarum AB, AC,* d *aqualia sunt quadrato rectæ BC; si quadratum rectæ AB, quod continet palmos* 36. *detrahatur ex quadrato rectæ BC, quod est palmorum* 100. *remanebit quadratum rectæ AC, 64 palmorum. Latus ergo AC, continebit* 8. *palmos. Tantum enim est radix quadrata, seu radix* 64. *palmorum. Quod est propositum. Cæterùm non semper hac arte inuenientur numeri rationales, quia non omnis numerus habet latus, radicémve quadratum, & notum est apud Arithmeticos. Vnde latus inuentum sæpenumero exprimi nequit, nisi per radicem surdam, quam vocant: Sed de his aliàs.*

c 47. primi.

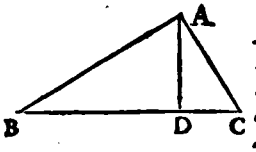


d 47. primi.

IX.

SI ex angulo à duobus lateribus inæqualibus triangulo comprehenso ad basin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum, secabitur basis in partes inæquales, maiórque pars iuxta maius latus erit. Et contrà, si basis à perpendiculari secetur non bifariam, erunt duo latera inæqualia, maiusque illud erit, quod maiori basis segmento adiacet.

CADAT



CADAT primum in triangulo ABC, cuius latus AB, maius sit latere AC, perpendicularis AD, ad ABC, demissa intra triangulum, quod tum demũ continget, quando vterque angulus B, C, acutus est, & vt ex coroll. 2. propos. 17. constat. Dico segmentum BD, esse maius segmento CD. Quoniam enim

247 pri mi. *a tam quadratum ex AB, quadratis ex AD, BD, quam quadratum ex AC, quadratis ex AD, CD, æquale est: Est autem quadratum ex AB, maius quadrato ex AC, quod latus AB, latere AC, ponatur maius; erunt quoque duo quadrata ex AD, BD, maiora duobus quadratis ex AD, CD: Et ablato communi quadrato rectæ AD, reliquum quadratum ex BD, reliquo quadrato ex CD, maius erit. Quare & recta BD, maior erit, quam recta CD, quod est primum.*

FACIAT deinde perpendicularis AD, segmentum BD, maius segmento CD. Dico latus AB, maius esse latere AC. Erit enim quadratum ex BD, quadrato ex CD, maius: Additóq; quadrato communi ex AD; duo quadrata ex BD, AD, duobus quadratis ex

247 pri mi. *CD, AD, maiora erunt. Cum ergo b tam quadratum ex AB, quadratis ex BD, AD, quàm quadratum ex AC, quadratis ex CD, AD æquale sit; erit quoque quadratum ex AB, quadrato ex AC, maius; propterea q; & latus AB, latere AC, maius erit. Quod est propositum.*

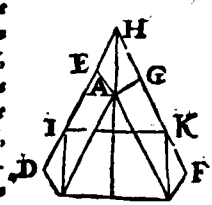
ATQVE in hunc modum plurima alia ex inuento hoc Pythagoræ colligi possunt, quæ consulto, ne lectori molesti simus, hic omittenda censuimus, & in alium locum differenda.

THEOREMATE porrò hoc Pythagoreo multò vniuersalius est illud, quod à Pappo demonstratur in omni triangulo, siue illud rectangulum sit, siue non, & de quibuscunque parallelogrammis super latera trianguli constructis tam rectangulis, quàm non rectangulis, etiamsi non sint inter se æquiangula. Quod nos in formam theorematis redigentes, clarius hoc modo proposuimus, & meo iudicio generalius adhuc, quàm Pappus.

IN omni triangulo, parallelogramma quæcunq; super duobus lateribus descripta, æqualia sunt parallelogrammo super reliquo latere constituto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli illius producantur.

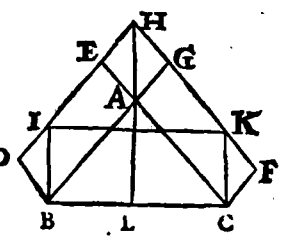
SIT triangulum quodcunque ABC, constituanturq; super latera

vera AB, AC, parallelogramma quæcunque ABDE, ACFG, quorum latera DE, FG, quæ lateribus AB, AC, assumptis in triangulo opponuntur, producta ad partes anguli A, dictis lateribus AB, AC, comprehensi, conueniant in H, ducaturq; recta AH Dico parallelogramma AD, AF, æqualia esse parallelogrammo super latus BC, descripto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum recta AH. Producta enim HA, secet BC, in L, & per B, C, agantur BI, CK, parallelæ ipsi AH, iungaturq; recta IK. Quoniam igitur parallelogramma sunt BI, HA, CK HA; a erit & trapezium BI, CK, ipsi AH, æqualis; atque adeò & inter se æquales erunt BI, CK; b quæ cùm sint etiam parallelæ, quòd eidem AH, parallelæ sint; c erunt quoque BC, IK, parallelæ, & æquales. Quare parallelogrammum est BCKI, super latus BC, habens alterum latus BI, rectæ AH, æquale, & parallelum: Cui quidem æqualia ostendenda sunt parallelogramma AD, AF. d Quia ergo æqualia sunt parallelogramma AD, ABIH, quòd eandem habeant basin AB, in eisdemq; sint parallelis AB, HD; e Est autem ABIH, parallelogrammo LL, æquale, quòd illud cum hoc etiam eandem habeat basin BI, in eisdemq; sit parallelis BI, LH: Erit quoque AD, eidem IL, æquale. Non aliter ostendemus, AF, ipsi KL, esse æquale: Quare parallelogramma AD, AF, parallelogrammo BK, æqualia sunt. Quod est propositum.



a 34 pri mi. b 30. primi. c 33. pri. d 35. pri. e 35. pri.

PAPPVS construit figuram aliter. Nam sumit rectas AG, AE, & AB, AG, in directum positas, ita vt parallelogramma AD, AF, sint æquiangula, habentia angulos AED, AGF angulo BAC, f internos externo æquales, cum hac eius figura indicat. Sed nos vniuersalius rem proposuimus, vt manifestum est.



f 29. pri.

THEOR. 34. PROPOS. 47. xlvij.

SI quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

DETVR triangulum ABC, sitq; quadratum lateris AC, æquale quadratis reliquorum laterum BA, BC. Dico angulum ABC,

A B C, esse rectum. Ducatur namque B D, perpendicularis ad B A, & æqualis rectæ B C, connectaturq; recta A D. Quoniã igitur
a 47. pri. in triangulo A B D, angulus A B D, rectus est; a erit quadratum rectæ A D, æquale quadratis rectarum B A, B D: Est autem quadratum rectæ B D, quadrato rectæ B C, æquale, ob linearum æqualitatem. Quare quadratum rectæ A D, quadratis rectarum B A, B C, æquale erit. Cùm ergo quadratum rectæ A C, eisdem quadratis rectarum B A, B C, æquale ponatur; b erunt quadra-
b 1. prowum. ta rectarum A D, A C, inter se æqualia, ac propterea & rectæ ipsæ A D, A C, æquales. Quoniã igitur latera B A, B D, trianguli A B D, æqualia sunt lateribus B A, B C, trianguli A B C; & basis A D,
c 8. pri. ostensa est æqualis basi A C; c erunt anguli A B D, A B C, æquales: Est autem angulus A B D, ex constructione rectus. Igitur & angulus A B C, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

CONVERSVM est autem theorema hoc præcedentis theorematis Pythagorici, & perspicuum est.

TRIANGVLORVM COMparationes.

NOVEM modis duo triangula inter se comparauit Euclides hoc libro. Primum quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, con-
d 4. pri. tinentque angulum angulo æqualem, d collegit æqualitatem basium, reliquorum angulorum, atq; adeò totorum triangulorum.

DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æ-
e 8. pri. qualia sunt, vtrumq; vtrique, basisq; basi æqualis, e intulit æqualitatem angulorum illis lateribus comprehensorum. Vbi nos concluſimus etiam æqualitatem reliquorum angulorum, totaq; triangula probauimus esse æqualia.

TERTIO, cùm duo latera duobus lateribus sunt æqualia, vtrumque vtrique, comprehendunt autem an-
f 24. pri. gulos inæquales, f ostendit basin maiori angulo oppositam esse maiorem basi minori angulo oppositæ.

QVAR-

QVARTO, cùm duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumq; vtrique, at baſes inæquales, *a* demonſtrauit angulum maiori baſi oppoſitum eſſe maiorem angulo minori baſi oppoſito. a 25. pri.

QVINTO, quando duo anguli duobus angulis æquales ſunt, vterque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualibus angulis adiacet, ſiue quod vni æqualium angulorum opponitur, *b* probauit reliqua latera vnius reliquis lateribus alterius eſſe æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo. Vbi nos docuimus ſequi etiam, tota triangula eſſe æqualia. b 26. pri.

SEXTO, *c* demonſtrauit, duo triangula ſuper eandem baſin, & inter eaſdem parallelas conſtituta, eſſe æqualia. c 37. pri.

SEPTIMO *d* oſtendit, duo triangula ſuper æquales baſes, & inter eaſdem parallelas conſtituta, æqualia eſſe. d 38. pri.

OCTAVO *e* docuit, duo triangula æqualia ſuper eandem baſin, & verſus eandem partem conſtituta, eſſe inter eaſdem parallelas. e 39. pri.

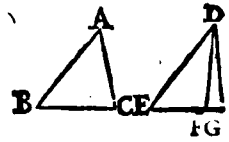
NONO denique *f* probauit, duo triangula æqualia ſuper æquales baſes in eadem linea, in eandemque partem conſtituta, eſſe inter eaſdem parallelas. f 40. pri.

ATQVE his modis argumentandi in duobus triangulis propoſitis vniuerſa ferè Geometria niti videtur, vt propterea diligenter memoriæ mandandi ſint. Quemadmodum autem à propoſ. 26. in ſcholio propoſ. 31. excluſimus duas comparationes, quãdo nimirum duo anguli duobus angulis æquales ſunt, & vnũ latus vni lateri æquale, non quidem quòd æqualibus adiacet angulis, vel quòd vni æqualium angulorum opponitur in vtroque triangulo: ſed quòd in vno quidem angulo æqualibus adiacet, in altero verò vni æqualium angulorum opponitur: vel quòd in vno opponitur vni æqualium angulorum, in altero verò alteri æqualium angulorum: Quemadmodum, inquam, duas haſce comparationes excluſimus, quòd ex iis non ſequatur reliquorum laterum æqualitas, vt in ſcholio propoſ. 31. demonſtrauimus: ita

quo-

quoque à propoſ. 4. excludendæ ſunt tres comparationes, ex quibus nullo modo inferri poteſt baſium æqualitas.

PRIMVM enim quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, qui vni æqualium laterũ opponitur, baſes æquales eſſe nequeunt; niſi quando angulus in vtroque triangulo alteri lateri æquali oppoſitus, vel eſt minor recto, vel non minor recto.

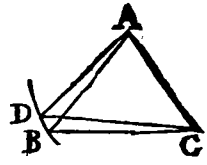


SIT enim Iſoſceles D F G, habens latera D F, D G, æqualia, & producta baſe F G, vſque ad E, iungatur recta E D, & triangulo D E G, æquale triangulum conſtruatur A B C, cuius latera A B, A C, lateribus D E, D G, æqualia ſint, & baſis B C, baſi E G. Sunt igitur duo latera A B, A C, duobus lateribus D E, D F, æqualia, vtrũq; vtriq;, angulique B, E, æqualib. lateribus AC, DF, oppoſiti æquales; & tamen baſis B C, maior eſt baſe E F; quod B C, ipſi E G, æqualis ſit. Ratio eſt, quòd angulus C, acutus eſt, at a 5. pri. *D F E, obtuſus. Nam cùm* a *anguli D F G, & G, æquales ſint,* b 17. pri. *& ſimul ſumpti minores duobus rectis; erit vterque minor recto, ac proinde D F E, recto maior; quandoquidem* c *duo an-* c 13. pri. *guli ad F, æquales ſunt duobus rectis. Quòd ſi duo latera A B, A C, duobus lateribus D E, D G, ſint æqualia, angulusq; B, angulo E, & vterque angulus C, G, vel minor recto, vel non minor; tum demum ſequitur, baſes B C, E G, æquales eſſe, &c. Nam ſi baſis B C, minor eſſet, quàm E G; ſi A B, ipſi D E, ſuperponeretur, congrueret quidem B C, ipſi E G, propter æqualitatem angulorum B, E, ſed punctum C, citra G, caderet, vt in F. Quia igitur latera D F, D G, æqualia ſunt, quod D F, idem ſit, quod* d 5. pri. *A C, ipſi D G, æquale;* d *erunt anguli D F G, & G, æquales, ac* e 17. pri. *propterea vterque minor recto: quòd* e *ambo minores ſint duo-* f 13 pri. *bus rectis. Cùm igitur* f *duo anguli ad F, ſint duobus rectis æquales, erit D F E, hoc eſt, C, quia D F E, non differt, recto maior. Non ergo vterque angulus C, & G, minor eſt, aut non minor recto, ſed G, quidem acutus, & C, obtuſus, quod eſt contra hypotheſin. Eodem modo, ſi baſis B C, dicatur eſſe maior baſe E F (poſitis lateribus A B, A C, æqualibus ipſis D E, D F, & angulo B, æquali*

quali ipſi E, & vtroque angulo G, & F, vel minore recto, vel non minore) cadet punctum C, vltra F, vt in G; eritq; rurſus angulus quidem C, hoc eſt, G, acutus, & D F E, obtuſus, quod eſt contra hypotheſin.

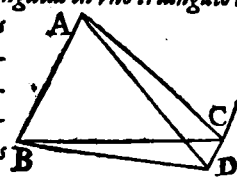
DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, ita vt vnus vni æqualium laterum, & alter alteri opponatur, nihil etiam colligi poteſt. Nam ſit triangulum A B C, cuius latus A B, maius ſit latere A C. Erit a ergo angulus A C B, maior angulo A B C. Fiat angulus A C D, angulo A B C, æqualis: cadetq; C D, ſupra C B. Deſcribatur quoque ex A, per B, arcus circuli ſecans C D, in D, iungaturq; recta A D. Sunt igitur duo latera A B, A C, duobus lateribus A D, A C, æqualia, vtrumque vtrique, & angulus A B C, lateri A C, oppoſitus, æqualis angulo A C D, lateri A D, oppoſito. Et tamen baſes B C, D C, æquales non ſunt. Si enim æquales eſſent, eſſent tam dua recta A B, A D, quàm dua C B, C D, æquales, b quod eſt abſurdum. vel etiam anguli B A C, D A C, c æquales eſſent, pars & totum. quod eſt abſurdum.

a 18. pri.



b 7. pri.
c 8. pri.

POSTREMO, quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & angulus in vno triangulo illis lateribus comprehenſus, æqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur vni illorum laterum, nihil etiam poteſt inferri. Sit namque triangulum A B C, cuius vtrumque latus A C, C B, maius ſit latere A B, & B C, maius, quàm A C. Erit d ergo angulus B A C, maior angulo A B C. Si igitur fiat angulus A B D, angulo B A C, æqualis, cadet B D, infra B C. Deſcribatur quoque arcus circuli ex A, per C, qui infra B C, cadet, ſecabitq; B D, in D. Iuncta igitur recta A D, erunt duo latera A B, A C, duobus lateribus A B, A D, æqualia; vtrumque vtrique, angulusq; B A C, illis lateribus A B, A C, comprehenſus, æqualis angulo A B D, qui lateri A D, oppo-



d 18. pri.

nitur: Et tamen baſes B C, B D, *æquales non ſunt. Aliàs tam*
a 7.*pri.* *rectæ* A C, A D, *quàm* B C, B D; *æquales eſſent*, a *quod eſt*
b 8.*pri.* *abſurdum. Vel etiam,* b *anguli* B A C, B A D, *æquales eſſent, totum & pars, quod eſt abſurdum.*

RECTE *igitur Euclides propoſ.* 4. *præcepit angulum illis lateribus comprehenſum in vno triangulo debere eſſe æqualem angulo alterius trianguli, qui illis quoque lateribus comprehenditur: quandoquidem ſine hac conditione nihil colligere licet, vt demonſtrauimus.*

FINIS ELEMENTI PRIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM SECVNDVM.

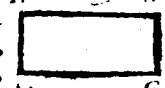
DEFINITIONES.

I.

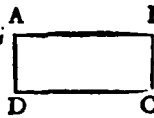
OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.

AGIT Euclides secundo hoc libro de potentijs linearum rectarum, inquirendo, quanta sint & quadrata partium cuiusuis linea recta diuisa, & parallelogramma rectangula sub partibus eiusdem linea diuisa comprehensa, tam inter se, quàm comparata cum quadrato totius linea, &c. Quod vt commodè exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, qua demonstranda sunt, rectè intelligenda maximè necessaria.

PRIORI definitione exponit, sub quibus rectis lineis contineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum: Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod vt intelligatur, explicandum primum est, Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli sunt recti. Cuius quidem duo tantùm sunt genera. Quadratum, & Altera parte longius. In hic enim omnes anguli sunt recti, vt perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porrò parallelogrammo, si vnus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessario recti. Sit enim in parallelogrammo A B C D, angulus A, rectus. Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoque esse. Nam cùm parallelæ sint A D, B C, a erunt anguli A, & B, interni duobus

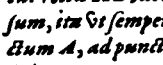


a 29 pri



a 34. primus. B *rectis æquales: At angulus A, rectus est, ex hypothesi. Igitur & B, rectus erit. Quoniam verò à quilibet suo opposito est æqualis, vt angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.*

DICIT itaq; Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub duabus rectis lineis, quæ vnum eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum A B C D, contineri dicitur sub duabus lineis rectis A B, A D, vel sub A D, D C, vel sub D C, C B, vel denique sub A B, B C: quoniam qualibet huiusmodi duæ linea exprimunt totum parallelogrammi magnitudinem, vna quidem vt A B, vel D C, eius longitudinem, altera verò, vt A D, vel B C, eius latitudinem. Vnde expressis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota eius quantitas concipitur, intelligiturq; longitudo nimirum, atq; latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario vnius linea in alteram huiusmodi parallelogrammum conficitur. Si namq; animo concipiatur recta A B, deorsum secundum rectam A D, moueri in transuersum, ita vt semper angulum rectum cum A D, constituat, donec punctum A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, descriptum erit totum parallelogrammum A B C D. Idem fiet, si A D, putatur moueri in transuersum secundum rectam A B, &c. Quamobrem iure optimo sub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogrammum rectangulum.



ITA QVE parallelogrammum rectangulum, quod sub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud, cuius duo latera circa vnum angulum rectum æqualia sunt duabus illis rectis lineis, vtrumq; vtriusq;. Vt parallelogrammum rectangulum sub rectis E, & F, contentum, erit idem, quod parallelogrammum A B C D: quoniam latus A B, æquale est rectæ E, & latus A D, rectæ F.

PERSPICVVM autem est ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum sub duabus lineis æqualibus esse quadratum. Cùm enim qualibet illarum linearum æqualium æqualis sit linea opposita, erunt omnia quatuor parallelogrammi rectanguli latera æqualia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.

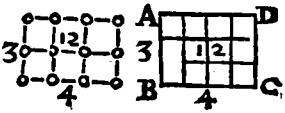
ITEM manifestum est, si duæ rectæ lineæ alijs duabus rectis lineis æquales fuerint, vtraque vtrique, rectangulum parallelogrammum sub prioribus duabus comprehensum, æquale esse ei, quod sub duabus posterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius æqualia sunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facilè hac etiam ratione demonstrari potest. Sint rectæ A B, B C, æquales rectis D E, E F, vtraq; vtriq;. Dico parallelogrammum rectangulum A B C G, contentum sub A B, B C, æquale esse

esse parallelogrammo rectangulo D E F H, contento sub D E, E F. Ductis etenim diametris A C, D F, cum latera A B, B C, trianguli A B C, aequalia sint lateribus D E, E F, trianguli D E F, & anguli B, & E, aequales, nempe recti; a *erunt triangula A B C, D E F, aequalia. Eadē ratione aequalia erūt triangula A G C, D H F. Quare totū parallelogramma A B C G, D E F H, aequalia erunt.*



a 4. pri.

H A B E T autem comprehensio hac phrallelogrammi rectanguli sub duabus rectis lineis angulum rectum continentibus, magnā affinitatem cum multiplicatione ꝙnius numeri in alterum. Sicut enim ex multiplicatione 3. in 4. producitur numerus 12. qui in formam parallelogrammi constituitur, ꝙnde & contineri dicitur sub 3. & 4. Ita quoque parallelogrammum A B C D, comprehensum sub duabus rectis A B, B C, quarum illa sit 3. palmorum, hac autem 4. constat 12. palmis quadratis, qui quidē ex ductu linea A B, 3. palmorum in lineam B C, 4 palmorum producuntur, ꝙt figura indicat, notumq; est Arithmeticis, atq; Geometris, demonstraturq; à Ioanne Regiomont. lib. 1. de triangulis, propos. 16. Hinc fit, ꝙt nonnulli dicant, parallelogrammum rectangulum gigni ex ductu duarum linearum circa angulum rectum ꝙnius in alteram. Vt proximè antecedens parallelogrammū ex ductu linea A B, in lineam B C, ꝙel (quod idem est) ex ductu linea B C, in lineam A B. Idem enim parallelogrammum procreatur, sive minor linea in maiorem, sive maior in minorem ducatur: quemadmodum etiam idem producitur numerus, sive minor numerus in maiorem, sive maior in minorem ducatur, ꝙt ab Euclide demonstratur lib. 7. propos. 16. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4. quàm ex 4. in 3. producitur hic numerus 12.



O B I T E R quoq; monendus mihi lector ꝙidetur, Euclidem in hoc secundo libro, & in alijs, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam cateri Geometra observant, ita ꝙt nomine rectanguli perpetuò intelligendum sit parallelogrammū rectangulum. Rursus, ne tōties eadem litera repetantur, solent Geometra exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quàm non rectangulum duabus auntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur. Vt appositum parallelogrammum appellant A C, ꝙel B D.

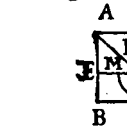


II.

1N omni parallelogrammo spatio, vnumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

IN parallelogrammo A B C D, siue rectangulum illud sit, siue non, ducatur diameter A C, ex cuius puncto quolibet G, ducantur recta E F, H I, parallela lateribus parallelogrammi, itaq; parallelogrammum diuisum sit in quatuor parallelogramma, quorũ duo E H, I F, dicuntur esse circa diametrum, alia verò duo B G, G D, complementa, vt manifestum est ex vltima definitione primi lib. Itaq; figura composita ex parallelogrammo vtrolibet circa diametrũ, vt ex I F, vna cum duobus complementis B G, G D, qualis est figura E B C D H G E, quam complectitur circumferentia K L M, dicitur Gnomon. Eadem ratione figura F D A B I G F, composita ex parallelogrammo E H, circa diametrum, & duobus complementis B G, G D, Gnomon appellabitur.





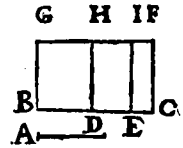
SED iam ad propositiones secundi huius lib. veniamus, in quibus sanè operæ pretium fuerit, multum laboris in eis exquisitè intelligendis ponere, propter multiplicem earum vsum cùm in rebus Geometricis, tum in humanis commercijs. Nam ex nonnullis harum propositionum demonstrantur regulæ illæ admirabiles Algebræ, quibus vix credo in disciplinis humanis præstantius aliquid reperiri, quippe cùm miracula quædam numerorum (vt ita dicam) eruant tam abstrusa, ac recondita, vt facultas illa omnem captum humanum superare videatur, tanta nihilominùs facilitate, atq; voluptate, vt facilius videatur esse nihil. Ex alijs deinde propositionibus huius lib. eliciuntur demonstrationes, quibus inter se adduntur, subtrahuntur, multiplicantur, atq; diuiduntur numeri surdi (quos dicunt) hoc est, qui nullo modo exprimi possint; cuiusmodi sunt radices numerorum non quadratorũ, aut non cubicorum, qua neq; per Diuinam potentiam in numeris possunt exhiberi, quòd hæc res contradictionem implicet, vt Philosophi atque Theologi loquuntur. Quo quid admirabilius? Quis enim credat, per demonstrationem sciri posse, quid producatur ex radice quadrata numeri 8. ad radicem quadratam num. 18. adiecta, cùm vtraq; radix incognita sit, & nulla ratione exprimi queat, quòd illa paulò minor sit, quàm 3. hæc verò paulò maior quàm 4? Et tamen summa, qua ex vtraq; fit, colligitur ex vi propositionis 4. huius lib. radix quadrata numeri 50. qua paulò maior est, quàm 7. Præterea ex propos. 12. & 13. eiusdem huius lib. area, & quantitas cuiusuis trianguli exquisitissimè cognoscitur, ex qua cognitione rursus dimensio omnium magnitudinum fluit, atq; dimanat. Postremò vltima propos. huius lib. omnem figuram rectilineam licet irregularem, vel etiam plures, ad quadratum æquale mira facilitate reducit. Vt verè aureus dici mereatur hic liber, cum mole quidem sit perexiguus, vtilitates verò contineat propè infinitas.

THEOR.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, secenturq; ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & BC, quarum BC; secetur quomodocunque in quotlibet segmenta BD, DE, EC. Dico rectangulum sub A, & BC, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indiuisa A, & quolibet segmento comprehenduntur, nempe rectangulo sub A, & BD; Item sub A, & DE; Item sub A, & EC, comprehenso.



Rectangulum enim BF, comprehenditur sub A, & BC, hoc est, recta GB, æqualis sit rectæ A. Quod quidem fiet, si erigantur ad BC, duæ perpendiculares BG, CF, æquales rectæ A, ducaturq; recta FG. Nam rectæ BG, CF, *a* parallelæ erunt, ob rectos angulos B, C: Sed & *b* æquales inter se sunt, quod vtraque rectæ A, æqualis ponatur. *c* Igitur erunt quoque GF, BC, parallelæ, & æquales inter se: ac proinde rectangulum erit BF, contentum sub A, siue GB, & BC, ex defin. 1. huius lib. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ DH, EI, parallelæ ipsi BG, vel CF. Itaque DH, EI, cùm parallelæ sint ipsi BG, *d* inter se quoque parallelæ erunt. Rursus eædem, cùm ex constructione parallelogramma sint BH, BI, *e* æquales erunt rectæ BG, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta BG, æqualis est rectæ A, erit rectangulum BH, comprehensum sub insecta linea A, & segmento BD. Eadem ratione erit rectangulum DI, comprehensum sub A, & segmento DE. Item rectangulum EF, sub A, & segmento EC. Quare cùm rectangula BH, DI, EF, æqualia sint toti rectangulo BF; perspicuum est, rectangulum comprehensum sub A, & BC, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, & segmentis BD, DE, EC, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

a 28. *pri.*
b 1. *pro.*
c 33. *pri.*
d 30. *pri.*
e 34. *pri.*

SCHOLIVM.

QVONIAM lib. 9. propos. 14. decem priora theoremata secundi huius libri, qua Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonstrabimus, si dimidiantur, & linea; non abs re fuerit, breuiter numeris applicare ea, qua pluribus verbis de lineis hic demonstran-

tur, præsertim cùm multiplicatio numeri vnius in alterum respondeat ductui vnius lineæ in alteram, vt suprà diximus. Itaq; propositis duobus numeris quibuscunq;, vt 6. & 10. dimidatur posterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem esse tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur: id quod perspicuum est.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus duo alia theoremata, quæ iam sequuntur.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis vnius, & quolibet segmentorum alterius continentur rectangulis.



SINT duæ rectæ A B, A C, rectum angulum A, continentes, quæ secentur in partes A D, D E, E F, F B; A G, G H, H C. Dico rectangulum sub rectis A B, A C, comprehensum æquale esse rectangulis, quæ sub A D, A G; A D, G H; A D, H C: D E, A G; D E, G H; D E, H C: E F, A G; E F, G H; E F, H C: F B, A G; F B, G H; F B, H C, continentur. Compleatur rectangulum A I, ducanturq; D K, E L, F M; parallela ipsi A C, vel B I. Item H N, G O, parallela ipsi A B, vel C I; quæ secent priores in P, Q, R, S, T, V. Quoniam igitur rectangulum A S, continetur sub A D, A G; & G P, sub A D, G H; & H K, sub A D, H C; (a quòd recta G S, H P, ipsi A D, sint æquales:) Item rectangula D T, S Q, P L, continentur sub D E, A G; D E, G H; D E, H C; (b quod D S, S P, P K, ipsis A G, G H, H C, æquales sint, & S T, P Q, ipsi D E.) Et eadem ratione rectangula E V, T R, Q M, continentur sub E F, A G; E F, G H; E F, H C: Nec non rectangula F O, V N, R I, sub F B, A G; F B, G H, F B, H C: perspicuum est, rectangulum sub A B, A C, æquale esse rectangulis sub singulis partibus A D, D E, E F, F B, & quolibet segmentorum A G, G H, H C, comprehensis. Quod est propositum.

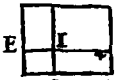
a 34. pri.

b 34. primi.

SI sint duæ rectæ lineæ, secenturq; ambæ vtcunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, vna cum rectangulo sub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenso, æquale est eis, quæ sub totis lineis, & dictis partibus mutuò continentur, rectangulis, vna cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso.

SINT duæ rectæ A B, A C, angulum continentes rectum A, quæ secentur vtcunque in D, & E. Dico rectangulum comprehensum sub A B, A C,

AB, AC, & una cum rectangulo comprehenſo ſub partibus AD, EC, æquale eſſe rectangulis coetentis ſub AB, EC; AC, AD; & una cum rectangulo ſub DB, AE, comprehenſo. Compleatur enim rectangulum AF, agaturq; per D, recta DG, ipſi AC, vel BF, parallela; nec non per E, recta EH, ſecans DG, in I, parallela ipſi AB, vel CF. Quoniam igitur rectangulum AF, æquale eſt rectangulis EF, DH, AI; ſi addatur commune EG, erunt rectangula AF, EG, nempe ſub totis AB, AC, & partibus AD, EC, comprehenſa, æqualia rectangulis EF, AG, DH, ſub AB, EC; AC, AD; DB, AE, comprehenſis æqualia. Quod eſt propoſitum.



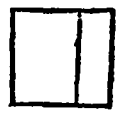
IN numeris etiam hæc eadem perſpicua ſunt. Propoſitis enim duobus hiſce numeris 10. & 8. quorum prior in tres partes, 2. 3. 5. poſterior verò in duas, 3. 5. dividatur; perſpicuum eſt, 80. numerum productum ex 10. in 8. æqualem eſſe ſex numeris 6. 10. 9. 15, 15. 25. qui producuntur ex ſingulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntq; ſimul additi 80. ut volebat theorema 1. Federici.

RVRSVS, ſi iidem numeri ſecentur utcunque, prior quidem in 3. 7. poſterior autem in 2. 6. manifeſtum quoque eſt 80. numerum productum ex 10. in 8. una cum 18. numero producto ex 3. in 6. æqualem eſſe tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum utrobique efficiantur 98. ut theorema 2. Federici optabat.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

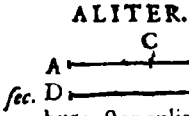
SI recta linea ſecta ſit vtcunque; Rectangula, quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, æqualia ſunt ei, quod à tota fit, quadrato.

RECTA linea AB, diuidatur vtcunque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehenſa ſub tota, AB, & ſegmentis AC, CB, ſimul ſumpta, æqualia eſſe quadrato totius lineæ AB. Deſcribatur enim AD, quadratum lineæ AB, & ex C, ducatur CF, parallela rectæ AE, vel BD, quæ *a* æqualis erit rectæ AE, hoc eſt, rectæ AB, cui æqualis eſt recta AE, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta AE, æqualis eſt rectæ AB, erit rectangulum AF, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento AC. Similiter erit rectangulum CD, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento CB. Quare cum rectangula AF, CD, æqualia ſint quadrato AD, perſpicuum eſt, rectangula comprehenſa ſub AB, & ſegmentis AC, CB, æqualia eſſe quadrato lineæ AB. Si igitur recta linea ſecta ſit vtcunque, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 34. primi.

ALITER. Sumatur recta D, æqualis rectæ AB. Quoniam igitur AB, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub insecta D, & recta AB, hoc est quadratum rectæ AB, *a* æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur sub D, insecta, hoc est, sub AB, & singulis segmentis AC, CB. Quod est propositum.

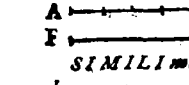


21. *sec.*

SCHOLIVM.

QVANQVAM Euclides secundum hoc theorema proponat de linea recta diuisa in duas tantummodo partes vtcunque, idem tamen eisdem mediis demonstrabitur, si linea diuidatur in quotcunque partes, vt ex his figuris manifestum est. In numeris verò idem perspicitur hoc modo. Numerus 10. *diuisus sit in duas partes* 7. *&* 3. *Dico numerus* 70. *&* 30. *qui producuntur ex multiplicatione* 10. *in* 7. *&* 3. *æquales esse* 100. *quadrato ipsius numeri* 10. *vt manifestum est. Simili modo si numerus* 10. *diuidatur in plures partes* 3. 2. 4. *&* 1. *erunt numeri* 30. 20. 40. *&* 10. *geniti ex* 10. *in* 3. 2. 4. *&* 1. *æquales* 100. *quadrato ipsius numeri* 10.





SIMILI modo demonstrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.

SI linea recta secetur in quotcunq; segmenta: Quadratum, quod à tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis.

SIT recta AB, diuisa in partes quotcunque AC, CD, DE. Dico quadratum ex AB, descriptum, æquale esse rectangulis, quæ sub singulis partibus AC, CD, DB, & quolibet segmentorum AC, CD, DB, comprehenduntur; hoc est, rectangulis sub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD; DB: DB, AC; DB, CD, DB, DB, comprehensis. Sumpta enim recta EF, quæ æqualis sit ipsi AB, diuisaq; in partes EG, GH, HF, partibus AC, CD, DB, æquales. Erit ex iis, quæ ad propos. 1. *huius libri demonstrauimus, rectangulum sub AB, EF, hoc est, quadratum ipsius AB, æquale rectangulis sub AC, EG; AC, GH; AC, HF: CD, EG; CD, GH; CD, HF: DB, EG; DB, GH; DB, HF. Cum igitur partes AC, CD, DB, partibus EG, GH, HF, sint æquales; erit quoque quadratum ex AB, æquale rectangulis sub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD, DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB. Quod erat propositum.*

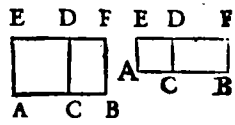


IN nu-

IN numeris idem eſt manifeſtum. Si enim numerus 10. *diuidatur in* 2. 3. 5. *erit* 100. *quadratus totius æqualis his nouem numeris* 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. *qui ex ſingulis partibus* 2. 3. 5. *in quamlibet partium* 2. 3. 5. *procreantur, vt perſpicuum eſt.*

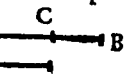
THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI recta linea ſecta ſit vtcunque: Rectangulum ſub tota, & vno ſegmentorum comprehenſum, æquale eſt & illi, quod ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto ſegmento deſcribitur, quadrato.



LINEA recta A B, diuiſa ſit vtcunque in puncto C. Dico rectangulum comprehenſum ſub tota A B, & vtrouis ſegmento, vt A C, (ſiue hoc ſegmentum maius ſit, ſiue minus) æquale eſſe rectangulo ſub ſegmentis A C, C B, comprehenſo, & quadrato ptioris ſegmenti aſſumpti A C. Conſtituatur enim quadratum dicti ſegmenti A C, quod ſit A D: & ex B, educatur B F, parallela ipſi A E, donec coeat cum E D, protracta in F. Quoniam igitur A E, recta rectæ A C, æqualis eſt, ex quadrati definitione; erit rectangulum A F, comprehenſum ſub tota A B, & ſegmento A C. Rurſus, quia recta C D, eadem ratione æqualis eſt rectæ A C; erit rectangulum C F, comprehenſum ſub ſegmentis A C, & C B. Cum igitur rectangulum A F, æquale ſit quadrato A D, & rectangulo C F; liquido conſtat, rectangulum ſub A B, tota, & ſegmento A C, comprehenſum eſſe æquale rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis A C, C B, & quadrato prædicti ſegmenti A C. Itaque ſi recta linea ſecta ſit vtcunque, &c. Quod erat oſtendendum.

ALITER. Accipiatur recta D, æqualis ſegmento A C. Quoniam igitur recta A B, diuiſa eſt in C, erit rectangulum comprehenſum ſub D, & A B, hoc eſt, ſub A B, & A C, *a* æquale rectangulo ſub D, & C B, hoc eſt, ſub A C, C B, & rectangulo ſub D, & A C, hoc eſt, quadrato ſegmenti A C. Quod eſt propoſitum.



a 1. ſec.

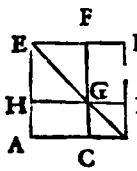
SCHOLIV M.

VT hoc theorema numeris accommodetur, ſit numerus 10. *diuiſus in* 7. *&* 3. *Dico numerum* 70. *productum ex* 10. *in* 7. *æqualem eſſe numero* 21. *qui ex* 7. *in* 3. *producitur, vna cum* 49. *quadrato prioris partis* 7. *Id quod res ipſa indicat. Pari ratione erit numerus* 30. *procreatus ex* 10.

ex 10. in 3. æqualis numero 21. producto ex 3. in 7. simul cum 9. quadrato prædicti numeri 3.

iiij. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secta sit vtcunque: Quadratum, quod à tota describitur, æquale est & illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

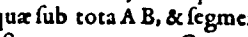


RECTA linea AB, diuisa sit vtcunque in C. Dico quadratum totius rectæ AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis AC, CB. Describatur enim super AB, quadratum AD, ducaturque diameter BE. Deinde ex C, agatur CF, parallela rectæ BD, secans diametrum in G, puncto, per quod rursus ducatur HI, parallela rectæ AB. Eritque quadratum AD, diuisum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE, æqualia sunt; *a* erunt duo anguli ABE, AEB, æquales: Atqui *b* tres anguli ABE, AEB, BAE, trianguli ABE, duobus rectis sunt æquales, & BAE, rectus est. Reliqui ergo duo anguli ABE, AEB, semirecti erunt. Eadem ratione ostendes angulos DBE, DEB, semirectos esse. Quod etiam constat ex ijs, quæ ad 34. propos. lib. 1. demonstrauimus. Nam, vt ibi ostensum est, diameter BE, diuidit angulos rectos ABD, AED, bifariam. Quia ergo anguli quoque tres trianguli EFG, *c* æquales sunt duobus rectis, & angulus EFG, rectus est, *d* cum sit æqualis recto D, externus interno; nec non FEG, ostensus semirectus; erit & reliquus EGF, semirectus; ideoque æqualis angulo FEG. Quare *e* æqualia erunt latera EF, FG: quæ cum sint *f* æqualia oppositis lateribus GH, HE, erit parallelogrammum FH, quadratum, cum omnia eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti; propterea quod existente vno angulo recto, nempe FEH, vel F, in parallelogrammo FH, omnes quatuor recti sunt, vt ad defin. 1. huius lib. monstrauimus. Eadem ratione quadratum erit CI. Quamobrem CI, FH, quadrata sunt segmentorum AC, CB, quod latus HG, *g* æquale sit rectæ AC. Rectangula quoque AG, DG, comprehensa erunt sub segmentis AC, CB, propterea quod CG, GI, æquales sunt rectæ CB, ob quadratum CI; & FG, æqualis rectæ GH, ob quadratum FH, hoc est, *h* rectæ AC. Quocirca cum quadratum AD, æquale sit quadratis CI, FH, & rectangulis AG, DG; constat quadratum AD, totius lineæ AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso sub eisdem segmentis AC, CB, bis sum-

a 5. pri. *b* 32. pri mi. *c* 32 pri mi. *d* 29. pri mi. *e* 6. pri. *f* 34. pri mi. *g* 34. pri mi. *h* 34. pri mi.

bis ſumpto. Igitur ſi recta linea ſecta ſit vtcunque, quadratum, quod à tota deſcribitur, &c. Quod demonſtrandum erat.

ALITER. Quoniam recta AB, diuiſa eſt in C, *a* erit quadratum totius AB, æquale rectangulis, quæ ſub tota AB, & ſegmentis AC, CB, comprehenduntur: Rectangulum autem ſub AB, AC, comprehenſum, *b* æquale eſt rectangulo comprehenſo ſub AC, CB, & quadrato ſegmenti AC: Item rectangulum ſub AB, CB, comprehenſum, æquale eſt rectangulo ſub CB, AC, comprehenſo, & quadrato ſegmenti CB. Igitur quadratum rectæ AB, æquale etiam eſt quadratis ſegmentorum AC, CB, & rectangulis ſub AC, CB, & ſub CB, AC. Quod eſt propoſitum.



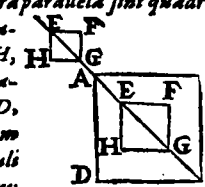
a 2. *ſec.*

b 3. *ſec.*

COROLLARIVM I.

HINC manifeſtum eſt, parallelogramma circa diametrum quadrati eſſe quadrata.

CONSTAT hoc ex priori huius theorematis demonſtratione, in qua oſtenſum eſt, rectangula CI, FH, quæ ſunt circa diametrum BE, eſſe quadrata. In omnibus enim aliis quadratis eadem erit demonſtratio. Eſt tamen corollarium iſtud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrum quadrati, quæ communem aliquem angulum habent cum toto quadrato, cuiuſmodi ſunt dicta parallelogramma CI, FH. Illud enim angulum habet ABD, communem cum quadrato, hoc verò angulum AED. Idem nihilominus verum eſt de quibuſcunque parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela ſint quadrati lateribus. Circa enim diametrum AC, quadrati BD, conſiſtat parallelogrammum FH, ſiue intra quadratum, ſiue extra, quod tamen habeat latera lateribus quadrati BD, parallela. Dico FH, eſſe quadratum. Cum enim parallela ſint AB, EF, c erunt anguli BAC, FEG, æquales, interni, & externus; atque eadem ratione anguli BCA, FGE, æquales erunt: Sunt autem anguli BAC, BCA, ſemirecti, vt oſtenſum iam fuit. Igitur & anguli FEG, FGE, ſemirecti erunt: d *propterea q, latera EF, FG, illis oppoſita, æqualia,* e *& angulus F, rectus. Quare cum EF, FG, latera* f *æqualia ſint oppoſitis lateribus GH, HE, æquilaterum erit parallelogrammum FH: Sed & rectangulum eſt, ex iis, quæ ad finem 1. huius lib. oſtendimus, propterea quod angulus vnus F, rectus eſt demonſtratus. Igitur FH, quadratum erit. Quod eſt propoſitum.*



c 29. *pri*

d 6. *pri.*

e 32. *pri*

f 34. *pri*

COROLLARIVM II.

SEQVITVR etiam ex demonſtratione huius propoſit. 4. diametrum

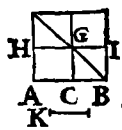
trum cuiuſuis quadrati diuidere eius angulos bifariam. Probatum enim fuit, angulos A E B, D E B, eſſe ſemirectos, &c. Id quod etiam ad propoſ. 34. lib. 1. demonſtrauimus.

SCHOLIVM.

IN numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit numerus 10. *diuiſus vtcunque in* 7. *&* 3. *Vides igitur* 100. *quadratum totius numeri aquale eſſe* 49. *&* 9. *quadratis partium* 7. *&* 3. *vna cum numero* 21. *qui ex* 7. *in* 3. *procreatur, bis ſumpto. Nam* 49. 9. 21. *&* 21. *efficiunt* 100.

PERFACILE autem erit ex hoc theoremate 4. *demonſtrare hoc aliud theorema.*

SI linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa deſcriptum, quadruplum eſt quadrati ex hac deſcripti. Et ſi quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum eſt lateris huius.



SIT enim primum linea A B, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ A B, quadruplum eſſe quadrati rectæ K. Nam diuiſa A B, bifariam in C, ſi fiat conſtructio, vt in 4, *hoc theoremate, erunt quatuor parallelogramma A G, C I, I F, F H, quadrata, atque inter ſe aqualia, cum omnia eorum latera ſint aqualia, omnesq; anguli recti, vt facile demonſtrari poteſt ex propoſ.* 34. *lib.* 1. *Quare cum quadratum A D, aquale ſit quatuor quadratis A G, C I, I F, F H, erit quadratum lineæ A B, quadruplum quadrati lineæ A C, hoc eſt, lineæ K, quæ aqualis eſt ipſi A C. Eſt enim vtraque dimidium lineæ A B.*

4. *ſec.* *BREVIVS.* a *Quadratum rectæ A B, aquale eſt quadratis rectarum A C, C B, & rectangulo ſub rectis lineis A C, C B, bis comprehenſo. Cum igitur quadrata rectarum aqualium A C, C B, aqualia ſint; & rectangulum ſub aqualibus A C, C B, quadratum quoque ſit, atque aquale quadrato rectæ A C; Conſtat quadratum rectæ A B, quadruplum eſſe quadrati rectæ A C; cum aquale ſit quatuor quadratis, quorum vnumquodque quadrato rectæ A C, æquale eſt.*

SIT deinde quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus A B, duplum eſſe lateris K. Nam diuiſa recta A B, bifariam in C, vt A B, dupla ſit ipſius A C; erit, vt iam demonſtratum eſt, quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ A C. Ponitur autem & quadruplum quadrati rectæ K. Igitur aqualia ſunt quadrata rectarum K, & A C, & ipſa propterea recta K, & A C, aquales: Eſt autem A B, ex conſtructione ipſius A C, dupla. Dupla igitur etiam erit ipſius K. Hæc tamen omnia aliter demonſtrabimus ad propoſ. 20. *lib.* 6.

CÆTE-

CÆTERVM ex hac propoſ. 4. colligi poteſt modus inueniendi numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum conſtituat. Si namq; ex dato numero auferatur 1. erit quadratus numerus ex reliqui numeri dimidio in ſe multiplicato productus, is qui quaeritur. Vt ſi datus ſit numerus 15. inueniendus q; numerus quadratus, cum quo datus numerus 15. faciat numerum item quadratum; detrahemus 1. ex 15. & reliqui numeri 14. dimidium 7. accipiemus. Nam numerus quadratus 49. ex eo dimidio in ſe multiplicato productus erit is, cum quo datus numerus 15. conſtituit 64. quadratum numerum, cuius latus eſt 8. nempe numerus vna vnitate maior, quam 7. latus quadrati inuenti. Ratio huius rei hac eſt. Quoniam quadratum AD, recta AB, a æquale eſt duobus quadratis FH, CI, partium AC, CB, vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub AC, CB; ſi gnomonem HBF, qui cum quadrato FH, conſtituit totum quadratum AD, ponamus 15. quantus nimirum eſt datus numerus: quadratum autem CI, ſtatuamus 1. atque adeo latus quoq; eius CB, 1. erit vtrumuis rectangulorum AG, DG, 7. ac proinde ſegmentum AC, 7. vt nimirum ex AC, in CB, qua eſt 1. fiant 7. Quadratum ergo FH, erit 49. Totum autem latus AB, erit 8. nempe vna vnitate maius, quam AC, latus quadrati FH. Hac ergo eſt cauſa, cur ex dato numero, hoc eſt, ex gnomone HBF, detrahamus 1. & reliqui numeri dimidium ſtatuamus latus quadrati FH, quaſiti. a 4. ſec.

VT autem numeri fracti vitentur, datus numerus debet eſſe impar, vt nimirum ablata 1. reliquus numerus diuidi poſſit bifariam. Regula nihilominus vera eſt, quicunque numerus datus ſit.

IDEM efficiemus, ſi ex dato numero quemuis quadratum numerum demamus, & reſidui dimidium per latus quadrati ablati partiamur. Quotiens enim erit latus quadrati quaſiti. Vt ſi detur numerus 45. pro gnomone HBF, auferemus numerum quadratum 9. pro quadrato CI, cuius latus eſt 3. Reſidui 36. dimidium eſt 18. pro AG, quod diuiſum per 3. hoc eſt per CG, latus quadrati ablati CI, facit Quotientem 6. pro latere GH, cuius quadratum FH, nimirum 36. additum ad gnomonem HBF, nimirum ad 45. efficit quadratum numerum 81. Vt autem fractiones euitentur, dandus erit numerus, ita vt, ablato quadrato numero aliquo, reſiduus numerus habeat dimidium numerum, quem latus quadrati ablati numeret.

VICISSIM reperiemus numerum quadratum, à quo datus quiuis numerus ſubtractus relinquat numerum quoque quadratum. Nam ſi ex numero dato demtur 1. & reliqui numeri dimidio additetur 1. conficietur latus quadrati quaſiti. Vt ſi rurſum datus ſit numerus 15. Detracta 1. erit reliqui numeri 14. dimidium 7. cui addita 1. fiet latus quadrati quaſiti 8. Si enim ex eius quadrato 64. detrahas 15. remanet quadratus numerus 49. cuius latus eſt 7. quod perpetuo eſt vna vnitate minus, quam latus quadrati inuenti. Ratio etiam

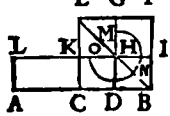
huius

huius regula facilis eſt ex eadem figura huius propoſ. 4. Nam ſi gnomonem H B F, qui ex quadrato A D, ſubtractus reliquum facit quadratum F H, ponamus 15. quantus nimirum eſt numerus datus. Quadratum verò C I, ſtatuamus 1. atq; adeo & latus eius C B, 1. erit vtrumlibet rectangulorum A G, D G, 7. ac proinde & ſegmentum A C, 7. vt ſupra dictum eſt, & totæ lineæ A B, 8. &c.

V. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, vna cum quadrato, quod ab intermedia ſectionum, æquale eſt ei, quod à dimidia deſcribitur, quadrato.

DIVIDATVR recta A B, bifariam in C, & per inæqualia in D, vt ſectionum intermedia ſit recta C D, qua nimirum dimidia C B, minus ſegmentum D B, ſuperat, vel qua maius ſegmentum A D, dimidium A C, excedit. Dico rectangulum ſub ſegmentis inæqualibus A D, D B, comprehenſum, vna cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas eſt ſectiones, æquale eſſe quadrato dimidiæ C B. Deſcribatur enim C F, quadratum ſuper dimidia C B, & ducta diametro B E, ducatur ex D, recta D G, parallela rectæ B F, ſecans diametrum B E, in H, puncto, per quod ducatur rectæ B C, parallela I K: Item ex A, rectæ C E, parallela A L, ſecans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. præcedentis propoſ. D I, K G, quadrata, ideoque D H, recta rectæ D B, æqualis: *a* Eſt autem & K H, ipſi C D, æqualis. Quare rectangulum A H, comprehendetur ſub A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C D. Probandum itaque eſt, rectangulum A H, vna cum quadrato K G, æquale eſſe quadrato C F. Quoniam ergo *b* complementa C H, F H, æqualia ſunt; ſi addatur commune quadratū D I, erit parallelogrammum D F, parallelogrammo C I, æquale: *c* Eſt autem & A K, eidem C I, æquale, quod & baſes A C, C B, æquales ſint. Igitur D F, A K, æqualia etiam inter ſe erunt: quibus ſi commune apponatur C H, erit gnomon M N O, rectangulo A H, æqualis. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, æqualia ſint quadrato C F; erit & rectangulum A H, vna cum quadrato K G, æquale eidem quadrato C F. Si recta ergo linea ſecetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod oſtendendum erat.



a 34. *primi*

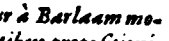
b 43. *primi*

c 36. *primi*

SCHOLIVM.

ALITER hoc theorema cum Franciſco Maurolyco demonſtrabimus.

bitum, eo modo, quo idem in numeris demonstratur à Barlaam monacho. quod etiam cum eodem Maurolyco in sequentibus propositionibus usque ad 11. exclusive faciemus. Demonstrationes autem has numeris accommodatas reperies ad propos. 14. lib. 9. Ita ergo propositum exequemur. Quia quadratum ex C B, a aequale est quadratis ex C D, D B, una cum rectangulo bis sub D B, C D; Rectangulo autem sub D B, C D, una cum quadrato ex D B, b aequale est rectangulum sub D B, C B; Erit quadratum ex C B, aequale reliquo quadrato ex C D, una cum reliquo rectangulo sub D B, C D, & rectangulo sub D B, C B, vel sub D B, A C: Atqui rectangulis sub D B, A C, & sub D B, C D, c aequale est rectangulum sub D B, & tota A D. Igitur quadratum ex C B, aequale erit quadrato ex C D, una cum rectangulo sub D B, A D; hoc est, rectangulum sub A D, D B, una cum quadrato ex C D, aequale erit quadrato ex C B. Quod erat demonstrandum.



a 4. sec.

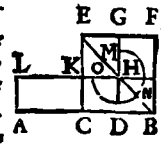
b 3. sec.

c 1. sec.

IDEM in numeris est manifestum. Dividatur enim numerus 10. aequaliter in 5. & 5. Item inaequaliter in 7. & 3. ita ut medius numerus inter sectiones sit 2. quo videlicet dimidius numerus 5. superat minorem partem 3. &c. Vides igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, una cum 4. quadrato intermedij numeri 2. aequalem esse 25. quadrato dimidij numeri 5.

EX hac etiam propos. 5. inveniemus alio modo numerum quadratum, cum quo datus quivis numerus quadratum quoque conficiat numerum. Nam si dato numero adiiciatur 1. & à compositi numeri dimidio detrahatur 1. reliquum fiet latus quadrati quaesiti. Ut si datus numerus sit 15. Addita 1. fit 16. à cuius dimidio 8. si dematur 1. manet 7. latus quadrati 49. cum quo datus numerus 15. componit numerum quadratum 64. cuius latus est 8. quod perpetuo est una unitate maior latere 7. quadrati inventi. Ratio huius regulae ex demonstratione propos. 5. difficilis non est. Cum enim rectangulum A H, cum quadrato K G, d aequale sit quadrato C F; si rectangulum A H, ponatur 15. sicut numerus datus; at verò quadratum D I, statuatur 1. ac proinde latus D B, quoque 1. erit recta A D, 15. ut nimirum ex A D, in D B, gignatur 15. rectangulum videlicet A H. Addita ergo 1. erit tota linea A B. 16. à cuius dimidio 8. demptus 1. relinquetur C D, 7. latus nimirum quadrati K G.

d 5. sec.



HIC quoque, si fracti numeri vitandi sint, debet numerus datus esse impar, ut videlicet, addita 1. dividi possit bifariam.

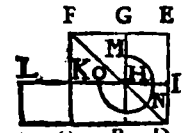
E contrario reperiemus numerum quadratum, à quo si datus quivis numerus subtrahatur, reliquus fiat numerus quoque quadratus. Nam si ad datum numerum adiiciatur 1. erit dimidium compositi numeri latus quadrati quaesiti. Ut si rursum numerus 15. datus sit.

Addita 1. erit compoſiti numeri dimidium 8. latus quadrati 64. quæſiti. Si enim demas datum numerum 15. reliquum fiet quadratus numerus 49. cuius latus 7. perpetuo minus eſt vna vnitate, quam latus quadrati inuenti. Ratio huius rei perſpicua quoque eſt ex eadem figura huius propoſ. 5. Nam ſi rectangulum AH, quod ex quadrato CF, ablatum relinquit quadratum KG, ſtatuatur 15. ſicut datus numerus; & quadratum DI, ponatur 1. atque adeo & DB, eius latus 1. erit tota AB. 16. & eius dimidium CB, 8. &c.

vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur: Rectangulum comprehenſum ſub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato à dimidia, æquale eſt quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, deſcripto.

SECETVR recta AB, bifariam in C, & ei in rectum addatur BD. Dico rectangulum comprehenſum ſub tota compoſita AD, & DB, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ CB, æquale eſſe quadrato lineæ CD, quæ ex dimidia CB, & adiecta BD, componitur. Deſcribatur namque CE, quadratum ſuper CD, & ducta diametro DF, ducatur ex B, recta BG, parallela rectæ DE, ſecans diametrum DF, in H, puncto, per quod agatur IK, parallela rectæ CD: Item ex A, ducatur rectæ CF, parallela AL, ſecans IK, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4. huius lib. BI, KG, quadrata, ideoque recta DI, rectæ DB, æqualis: *a* Eſt autem & KH, rectæ CB, æqualis. Quare rectangulum AI, comprehendetur ſub rectis AD, DB; & KG, erit quadratum rectæ CB. Probandum itaque eſt, rectangulum AI, vna cum quadrato KG, æquale eſſe quadrato CE. Quoniam ergo parallelogrammum AK, *b* æquale eſt parallelogrammo CH, quod baſes AC, CB, æquales ſint: *c* Eſt autem & parallelogrammum HE, eidem CH, æquale, complementum complemento; erunt AK, HE, æqualia inter ſe. Addito ergo communi CI, erit rectangulum AI, gnomoni MNO, æquale. Quocirca cum gnomon MNO, & quadratum KG, quadrato CE, ſint æqualia; erit & rectangulum AI, vna cum eodem quadrato KG, eidem quadrato CE, æquale. Itaque ſi recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 34. *pri ubi.*

b 36. *pri mi.*

c 43. *pri.*

SCHO-

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex CD, aequale est quadratis ex CB, BD, & una cum rectangulo bis sub DB, CB, hoc est, quadratis ex CB, BD, & una cum rectangulis sub DB, CB, & sub DB, AC: (sumpta AC, semel pro CB, quae illi aequalis ponitur.) Est autem rectangulum sub DB, AC; DB, CB; & sub DB, DB, (quod est quadratum ex DB,) aequale rectangulum sub DB, & tota AD. Igitur quadratum ex CD, aequale est reliquo quadrato ex CB, una cum rectangulo sub DB, AD: Hoc est, rectangulum sub AD, DB, una cum quadrato ex CB, aequale est quadrato ex CD. Quod demonstrandum erat. a 4. sec. b 2. sec.

CÆTERVM si rem attentius considerare velimus, comperiemus propositionem hanc 6. per precedentem 5. facillime posse demonstrari: id quod etiam eruditus vir, & in omni doctrinarum genere exercitatissimus, Mauricius Brescius Gratianopolitanus, Regius olim Mathematicarum disciplinarum in Academia Parisiensi professor, animadvertit. Sit enim recta AB, secta in C, bifariam, & ei addita recta quantacunque BD. Dico rectangulum comprehensum sub tota AD, composita, & adiecta BD, una cum quadrato dimidiae CB, aequale esse quadrato rectae CD, ex dimidia, & adiecta composita. Addita namque recta AD, ex altera parte rectae AE, quae adiecta BD, aequalis sit, erit tota ED, secta in C, aequaliter, & in B, inaequaliter, quod EA, AC, ipsis DB, BC, aequales sint. Recta quoque EB, recta AD, aequalis erit, quod EA, ipsi DB, sit aequalis, & AB, utrique communis. c Rectangulum igitur sub partibus inaequalibus EB, BD, una cum quadrato intermediae sectionis CB, hoc est, rectangulum sub AD, BD, una cum quadrato dimidiae CB, aequale erit quadrato dimidiae CD, hoc est, quadrato rectae ex dimidia CB, data recta AB, & ex adiecta BD, composita. Quod est propositum. c 5. sec.



SECETVR iam numerus 10. bifariam, (ut & hoc theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturq; ei numerus 2. Videtur igitur numerum 24. qui producitur ex toto numero composito 12. in adiectum 2. una cum 25. quadrato dimidij numeri, aequalem esse 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. componitur.

EX hoc porro theoremate colligitur propria & insignis Arithmetica proportionalitatis, quae consistit in eodem semper excessu quantitatum proportionalium. Cum enim AD, superet CD, magnitudine AC, hoc est, CB; & CD, superet BD, eadem magnitudine BC, habebunt tres lineae AD, CD, BD, proportionalitatem Arithmeticam; quandoquidem prima AD, superat secundam CD, eodem excessu AC, sive CB, quo secunda CD, tertiam BD, superat. Quare cum ostensum

sit, rectangulum sub extremis A D, B D, vna cum quadrato excessus C B, æquale esse quadrato lineæ mediæ C D; perspicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectangulum sub extremis contentum, vna cum quadrato excessus, æquale esse quadrato lineæ mediæ. Semper enim tres lineæ Arithmetice proportionales ita inter se coniungi poterunt, vt efficiant vnam lineam bifariam diuisam, (quanimirum æqualis sit excessui inter primam & tertiam, & ex tertia. Vt patet. si tres rectæ sint datæ A D, C D, B D. Si namque ex prima A D, abscindatur D C, æqualis mediæ, & ex media hac D C, auferatur tertia D B, erit A B, (excessus inter primam & tertiam) secta bifariam in C, eiq; additæ tertiæ B D. Cum enim C B, excessus sit inter mediam C D, & tertiam B D, qui æqualis esse debet, ob proportionalitatem Arithmeticam, ipsi A C, nempe excessui inter primam A D, & mediam C D; erit necessario A B, secta in G, bifariam. Eademque ratio est in aliis. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent excessum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem excessum 3. habentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. vna cum 9. quadrato excessus 3. æqualis est quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

EX hac etiam propos. 6. reperiemus, vt ex 4. propos. numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum componat. Nam si ex dato numero dematur 1. & reliquus numerus bifariam secetur, erit quadratus numerus huius dimidij is, qui quæritur. Vt si datus numerus sit 15. Dempta 1, relinquitur 14. cuius dimidium 7. dabit numerum quadratum 49. quæsitum. Nam 15. cum 49. facit quadratum numerum 64. cuius latus 8. vna vnitate maius est latere 7. quadrati inuenti. Huius rei ratio manifesta ex hac 6. propos. Cum enim rectangulum A I, cum quadrato G K, 6. *sit.* *æquale sit quadrato C E; si rectangulum A I, statuatur 15. at quadratum B I, 1. ideoque & latus B D, 1. erit tota linea A D, 15. vt nimirum multiplicata in B D, 1. producat rectangulum A I, 15. Ablata igitur 1. B D. remanet A B, 14. cuius dimidium 7. dabit C B, latus quadrati K G, quæsiti.*

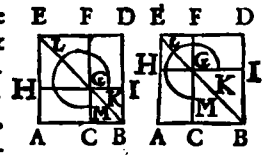
NECESSE autem etiam hic est, datum numerum esse imparem, vt fracti numeri vitentur, vt videlicet dempta 1. bifariam possit diuidi.

VERSA vice inueniemus numerum quadratum, à quo datus numerus detractus quadratum etiam numerum relinquat. Si enim ex dato numero tollatur 1. & reliqui numeri dimidio additiatur rursus 1. conficietur latus quadrati quæsiti. Vt si datus sit numerus 15. Dempta 1. erit 7. dimidium reliqui numeri 14. additaq; 1. fiet latus quadrati quæsiti 8. Nam si ex eius quadrato 64. subducas datum numerum 15. reliquus erit quadratus numerus 49. cuius latus 7. semper vna vnitate minus est latere inuento 8. Ratio est, quia si rectangulum

gulum A I, quod ex quadrato C E, ſubtractum relinquit quadratum K G, ſtatuatur 15. at quadratum B I, ideoque & B D, eius latus 1. erit totus linea A D, 15. vt dictum eſt. Dempta ergo 1. B D, erit A B, 14. cuius dimidio C B, quod eſt 7. ſi rurſus apponatur 1. fiet latus C D, 8. quod quæritur, &c.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

SI recta linea ſecetur vtcunque; Quod à tota, quodque ab vno ſegmentorum, vtraque ſimul quadrata, æqualia ſunt & illi, quod bis ſub tota, & dicto ſegmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato.



SECETVR recta A B, vtcunque in C. Dico quadratum totius A B, & quadratum ſegmenti ſiue maioris, ſiue minoris A C, æqualia eſſe rectangulo bis comprehenſo ſub tota A B, & dicto ſegmento A C, vna cum quadrato reliqui ſegmenti C B. Deſcribatur enim ſuper A B, quadratum A D, & ducta diametro B E, ducatur ex C, recta C F, parallela rectæ A E, ſecans diametrum in puncto G, per quod agatur H I, parallela rectæ A B. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4. huius lib. C I, H F, quadrata: & quia recta G H, *a* æqualis eſt rectæ A C, erit H F, quadratum ſegmenti A C. Rurſus quia A E, æqualis eſt ipſi A B, erit rectangulum A F, comprehenſum ſub tota A B, & ſegmento A C. Eadem ratione rectangulum H D, comprehenſum erit ſub eiſdem rectis A B, A C, quod rectæ D E, E H, æquales ſint rectis A B, A C, ob quadrata A D, F H. Quoniam igitur rectangulis A F, F I, vna cum quadrato C I, hoc eſt, gnomoni K L M, vna cum quadrato C I, æquale eſt quadratum A D; ſi apponatur commune quadratum H F, erunt quadrata A D, H F, æqualia rectangulis A F, D H, (quorum quodlibet comprehenditur ſub tota A B, & ſegmento A C,) vna cum C I, quadrato reliqui ſegmenti C B. Si igitur recta linea ſecetur vtcunque, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 34. pri mi.

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex A B, b æquale eſt quadratis ex A C, C B, & vna cum rectangulo bis ſub A C, C B; ſi addatur commune quadratum ex A C, erunt quadrata ex A B, A C, æqualia quadrato ex A C, bis, & quadrato ex C B, & vna cum rectangulo bis ſub A C, C B. Sed rectangulo ſub A C, C B, & vna cum quadrato ex A C,

b 4. ſec.



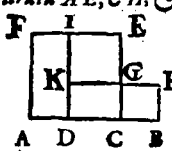
3. sec. æquale est rectangulum sub AB, AC: Et proinde rectangulo bis sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, bis, æquale est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur quadrata ex AB, AC, æqualia sunt reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis sub AB, AC. Quod demonstrandum erat.

IN numeris autem diuidatur numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Igitur 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 36. quadratus numerus partis 6. æquales sunt numero 120. qui fit bis ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. vt constat. Sic etiam 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 16. quadratus numerus partis 4. æquales sunt numero 80. qui bis fit ex toto 10 in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

SI recta linea in partes inæquales secetur: Earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

SECETVR recta AB, in partes inæquales AC, CB, sitq; maior pars AC; ponatur autem minori parti CB, æqualis linea AD, vt DC, sit excessus, quo pars AC, superat partem CB. Dico quadrata partium AC, CB, æqualia esse rectangulo, quod bis continetur sub AC, CB, vna cum quadrato lineæ DC. Constituantur enim quadrata AE, CH, & agatur DI, ipsi CE, parallela, producaturq; HG, ad K. Itaque quoniam AD, ipsi CB, est æqualis, addita communi DC, erit tota AC, hoc est, CE, totis DB, æqualis: Est autem & CG, ipsi CB, æqualis, quod quadratum sit CH. Igitur & reliqua GE, reliqua DC, æqualis erit: Ac proinde, cum & IE, ipsi DC, sit æqualis, erunt GE, IE, æquales; ideoque IG, quadratum erit ab excessu DC, descriptum. Quoniam verò rectangula AI, DH, continentur sub partibus AC, CB, (Est enim AC, vtrique linea AF, DB, & CB, vtrique AD, BH, æqualis) manifestum est, quadrata AE, CH, partium AC, CB, æqualia esse rectangulis AI, DH, quæ continentur sub partibus AC, CB, vna cum quadrato IG, excessus DC. Quod est propositum.



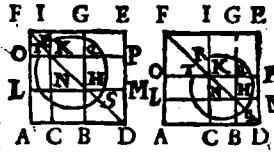
SCHOLIVM.

IN numeris. Secetur numerus 10. inæqualiter in 4. & 6. ita vt maior pars superet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16. 36. quadratos partium, qui efficiunt 52. æquales esse numero 24. qui ex 4. in 6. fit, bis sumpto, vna cum 4. quadrato excessus 2. vt volebat theorema.

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

SI recta linea secetur vtcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.



SIT recta AB, in C, diuisa vtcunque. Dico rectangulum quater comprehensum sub AB, & segmento siue maiore, siue minore CB, vna cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale esse quadrato lineæ, quæ ex recta AB, & dicto segmento CB, componitur. Producatur enim AB, versus dictum segmentum CB, ad D, sitque BD, recta æqualis segmento CB; & super tota AD, quadratum describatur AE. Ducta autem diametro DF, ducantur BG, CI, parallelæ ipsi DE, secantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur LM, OP, parallelæ ipsi AD, quæ secent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4. huius lib. OI, NQ, BM, LG, CP, circa diametrum DF, quadrata. Et quia OK, *a* æqualis est rectæ AC, erit OI, quadratum segmenti AC. Rursus *b* quia NH, æqualis est rectæ CB, erit NQ, quadratum segmenti CB, ideoque quadrato BM, æquale, cum rectæ CB, BD, æquales sint. Quare rectæ BH, HQ, æquales sunt segmento CB; atque adeo duo rectangula AH, LQ, comprehensa erunt sub AB, & segmento CB, *c* cum LH, sit æqualis rectæ AB. Eadem ratione erunt duo rectangula NG, HE, comprehensa sub AB, & CB. cum NH, HM, rectæ *d* æquales sint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectæ FL, hoc est, rectæ LH, hoc est, rectæ AB. Et quia quadrata NQ, BM, æqualia sunt; si addatur commune KG, erunt BM, KG, simul æqualia rectangulo NG. Quapropter quinque rectangula AH, LQ, HE, BM, & KG, gnomonem RST, componentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta AB, & segmento CB. Cum igitur gnomon RST, & quadratum OI, æqualia sint quadrato AE, erit rectangulū quatercomprehensum sub data recta AB, & segmento CB, vna cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale quadrato lineæ AD, compositæ ex AB, & dicto segmento CB. Quamobrem, si recta linea secetur vtcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

a 34. pri mi.
b 34. pri mi.
c 34. pri mi.
d 34. pri mi.

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex AD, æquale est quadratis c 4. sec. *ex AB, BD, vna cum rectangulo sub AB, BD, bis, hoc est, quadratis*



ex AB, BC, vna cum rectangulo bis ſub AB, BC: At quadrata ex AB, BC, a 7. *ſec.* a *aqualia ſunt rectangulo bis ſub AB, BC, vna cum quadrato ex AC; Erit quadratum ex AD, aquale rectangulo quater ſub AB, BC, vna cum quadrato ex AC. Quod demonſtrandum erat.*

SECETVR iam numerus 10. *vtcunque in* 6. & 4. *Numerus igitur* 240. *qui quater fit ex toto* 10. *in partem* 6. *vna cum* 16. *quadrato numero alterius partis* 4. *hoc eſt, numerus* 256. *aqualis eſt numero quadrato huius numeri* 16. *qui componitur ex dato numero* 10. *& dicta parte* 6. *vt conſtat. Eodem modo, numerus* 160. *qui fit quater ex* 10. *toto, in partem* 4. *vna cum* 36. *quadrato numero alterius partis* 6. *hoc eſt, numerus* 196. *aqualis eſt quadrato numero huius numeri* 14. *qui componitur ex* 10. & 4. *vt perſpicuum eſt.*

POTEST propoſitio hæc 8. *ita etiam proponi.*

SI linea recta ſecetur vtcunque, eique in rectum adiiciatur alia recta vni ſegmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compoſitæ æquale eſt rectangulo quater comprehenſo ſub data linea, & adiecta ſiue dicto ſegmento, vna cum quadrato alterius ſegmenti.

NAM recta AB, ſecta eſt in C, vtcunque, eique addita BD, ſegmento CB, aqualis, demonſtratumque eſt, quadratum totius AD, aquale eſſe rectangulo quater comprehenſo ſub data linea AE, & adiecta BD, ſiue dicto ſegmento CB, vna cum quadrato alterius ſegmenti AC,

Item ſic.

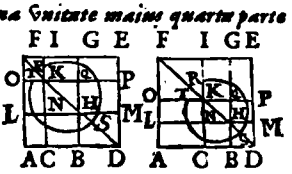
SI linea recta ſecetur bifariam, eiq́ue in rectum adiiciatur recta alia quantacunque: Quadratum totius compoſitæ lineæ æquale eſt rectangulo quater comprehenſo ſub linea compoſita ex dimidia, & adiecta, & ſub dimidia, vnà cum quadrato adiectæ.

NAM recta DC, ſecta eſt bifariam in B, eiq́, addita CA, probatumque fuit, quadratum totius AD, aquale eſſe rectangulo quater comprehenſo ſub AB, compoſita ex BC, dimidia, & adiecta AC, & ſub dimidia CB, vna cum quadrato adiecta AC.

IAM verò ex hac quoque propoſ. 8. *inueniemus alia ratione numerum quadratum, cum quo datus quilibet numerus conficiat numerum ſimiliter quadratum. Nam ſi ex quarta parte numeri dati dematur* 1. *reliquum erit latus quadrati quæſiti. Vt ſi datus numerus ſit* 32. *tollatur* 1. *ex eius quarta parte* 8. *Reliquus enim numerus* 7. *dabit quadratum* 49. *cum quo datus numerus* 32. *efficit quadra-*

tum 81.

tum 81. Cuius latus 9. est semper vna vnitate maius quarta parte dati numeri. Facilis est huiusce rei ratio. Quoniam enim rectangulum A H, quater sumptum, cum quadrato O I, 2 æquale est quadrato A E; si rectangulum A H, ponatur 8. nempe quarta pars dati numeri,



a 8. *sec.*

at vero quadratum C H, adeoq; & C B, eius latus, 1. erit linea A B, 8. vt ducta in C B, 1. faciat 8. Ablatu ergo 1. reliquum erit A C, latus quadrati O I, 7. quod quæritur.

VT autem fractiones vitentur, necesse est, datum numerum diuidi posse in quatuor partes æquales, ita vt à 4. numeretur.

CONTRA, inueniemus quoque numerum quadratum, à quo datus numerus subtractus relinquat numerum etiam quadratum. Si nanq; ad quartam partem numeri dati addatur 1. conflabitur latus quadrati quæsiti. Vt si datus rursum sit numerus 32. si ad quartam eius partem 8. adiiciatur 1. fiet latus 9. à cuius quadrato 81. si detrahatur datus numerus 32. remanebit quadratus numerus 49. cuius latus 7. semper est vnitate minus quarta parte dati numeri. Ratio est, quia si quarta pars gnomonis R S T, qui ex quadrato A E, sublatus relinquit quadratum O I, hoc est, si rectangulum A H, quod gnomonis R S T, quartam partem esse demonstrauimus, statuatur 8. quarta pars dati numeri 32. at quadratum B M, ideoq; & latus eius B D, 1. erit linea A B, 8. vt dictum est, ac proinde totum latus A D, 9. ex cuius quadrato A E, quod est, 81. si auferatur gnomon R S T, quem posuimus esse 32. reliquum fiet quadratum O I, 49. cuius latus A C, est 7. quandoquidem A B, erat 8. & C B, hoc est, B D, illi æqualis, 1. quod quidem latus A C, perpetuò vna vnitate minus est quarta parte numeri dati 32. vt dictum est.

THEOR. 9. PROPOS. 9. IX.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & eius, quod à dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

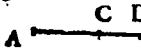
SECETVR recta A B, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata segmentorum inæqualium A D, D B, simul dupla esse quadratorum simul, quæ fiunt ex dimidia A C, & ex intermedia sectionum C D. Educatur enim ex C, ad A B, perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, vel C B, ducantúrque rectæ E A, E B. Deinde ex D, ducatur quoque ad A B, perpendicularis D F, secans E B, in puncto F, per quod ducatur F G, parallela ipsi A B, secans C E, in G, ducaturque tandem A F. Quo-

oiam igitur in triangulo A C E, latera C A, C E, æqualia ſunt;
a 6. pri. a erunt anguli C A E, C E A, æquales: Eſt autem angulus A C E,
b 32. pri ms. b rectus: Reliqui igitur anguli alium rectum conficient, ideoque A E C, ſemirectus erit. Eadem ratione angulus B E C, ſemirectus erit; ac propterea totus A E B, rectus. Rurſus, quia trianguli
c 29. pri ms. c F G E, angulus E G F, æqualis eſt recto E C B, externus interno; d erunt reliqui duo anguli vni recto æquales:
d 32. pri. Oſtenſum autem eſt, angulum F E G, eſſe ſemirectum. Igitur & E F G, ſemirectus erit, propterea-
e 6. pri. que anguli E F G, F E G; æquales erunt, e ideoque & latera E G, G F, æqualia inter ſe. Eodem modo oſtendetur, in triangulo B D F, latera B D, D F, eſſe æqualia. Nam angulus F D B, eſt rectus, & B, ſemirectus, &c. Itaque cùm in triangulo A C E, an-
f 47. pri ms. gulus C, rectus ſit, f erit quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis laterum A C, C E: Atqui hæc duo quadrata inter ſe ſunt æqualia, quod & lineæ A C, C E, æquales ſint. Igitur quadratum lateris A E, duplum erit quadrati lateris A C. Rurſus, quia in
g 47. primi. triangulo E G F, angulus G, rectus eſt, g erit quadratum lateris E F, æquale duobus quadratis laterum E G, G F: At duo hæc quadrata inter ſe æqualia ſunt, ob æqualitatem linearum E G, G F. Igitur quadratum lateris E F, duplum erit quadrati lateris F G,
h 34. pri ms. hoc eſt quadrati lineæ C D. Eſt enim C D, h recta rectæ F G, æqualis; cùm C F, ſit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum A E, E F, dupla ſunt duorum quadratorum linearum rectarum A C, C D: Sunt autem duo quadrata rectarum A E, E F,
i 47. pri ms. i æqualia quadrato rectæ A F; & quadratum rectæ A F, æquale duobus quadratis rectarum A D, D F. Igitur & duo quadrata rectarum A D, D E, dupla ſunt duorum quadratorum rectarum A C, C D: Atqui quadratum rectæ D E, æquale eſt quadrato rectæ D B. Oſtenſum enim eſt, rectas D F, D B, eſſe æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum A D, D B, ſegmentorum inæqualium, dupla ſunt quadratorum rectarum A C, C D, dimidiæ lineæ, & intermediæ ſectionum. Si ergo recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex linea recta A D, deſcriptum,
k 4. ſec. *k æquale eſt quadratis deſcriptis ex A C, C D, cum parallelogrammo rectangulo bis ſub rectis A C, C D, comprehenſo; ſi commune*



apponatur quadratum ex D B, erunt duo quadrata ex A D, D B, æqualia tribus quadratis ex A C, C D, D B, cum rectangulo bis ſub A C, C D, vel ſub B C, C D; Atqui quadrato ex D B, cum rectangulo bis ſub B C, C D,
l 7. ſec. *l æqualia ſunt quadratum ex B C, ſeu A C, & ex C D. Quadratis igi-*

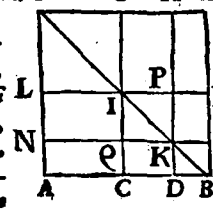
tur

tur ex AD, DB, aqualia sunt bis quadratis ex AC, CD; Ac propterea quadratum ex AD, DB, dupla sunt quadratorum ex AC, CD. Quod ostendendum erat.

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam AC, ipsi CB, aqualis est, & superat CB, ipsam CD, recta DB; superabit quoque AC, ipsam CD, eadem recta DB. Quare, vt ad 7. propos. huius libri demonstrauimus, quadrata rectarum AC, CD, aqualia sunt rectangulo sub AC, CD, bis vna cum quadrato recta DB; Ac propterea quadrata rectarum AC, CD, & rectangulum sub AC, CD, bis, vna cum quadrato recta DB, dupla sunt quadratorum ex AC, CD: Sed quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo sub AC, CD, bis a est aquale quadratum recta AD. Igitur & quadrata rectarum a 4. sec. AD, DB, dupla sunt quadratorum ex AC, CD.

IAM verò rursus numerus 10. diuidatur aqualiter in 5. & 5. Item inaqualiter in 7. & 3. vt sit intermedia sectio numerus 2. ceu in propos. 5. est dictum. Quadrati numeri igitur 49. & 9. partium inaqualium 7. & 3. dupli sunt quadratorum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas sectiones, vt manifestum est.

QVOD si lubeat, demonstrabimus & hanc 9. propos. ex ipsa constructione, vt precedentes, hoc modo. Descripto quadrato AE, totius linea AB, ductaq; diametro BF, ducantur per C, D, lateribus AF, BE, parallela CG, DH, secantes diametrum BF, in punctis I, K, per quæ lateribus AB, FE, parallela agantur LM, NO, secantes CG, DH, in Q, P. Quoniam igitur ex coroll. 1. propos. 4. huius lib. quadrata sunt LG, QP, DO, CM, NH, b estq; LI, ipsi AC, & QK, ipsi CD, & NK, ipsi AD, aqualis; erunt NH, DO, quadrata partium inaqualium AD, DB, & LG, QP, quadrata dimidiatæ lineæ AC, & intermedia sectionis CD. Dico illa horum esse dupla. Quoniam enim quadrata NH, DO, superant quadrata LG, QP, quadrato DO, & rectangulis NI, IH: Sunt autem quadratum DO, & rectangula NI, IH, aqualia quadratis LG, QP, vt mox demonstrabitur; liquidò constat, quadrata NH, DO, quadratorum LG, QP, esse dupla, cùm hæc bis in illis contineantur. Quòd autem tria hæc rectangula DO, NI, IH, aqualia sint quadrati LG, QP, ita ostendetur. Rectangulum NI, c aquale est rectangulo QM, quòd recta NQ, QO, d aquales sint aqualibus AC, CB. Igitur NI, complectitur quadratum QP; & insuper KM. Si ergo KM, DO, IH, aqualia sint quadrato LG, erunt necessariò DO, NI, IH, aqualia duob. quadratis LG, QP. Esse autē KM, DO, IH, aqualia quadrato LG, sic demonstrabimus. e Rectangula KM, DO, simul aqualia sunt ipsi PE, quòd recta BM, ME, aquales sint, cùm BM, aqua-



b 34. primi.

c 36. primi.

d 34. primi.

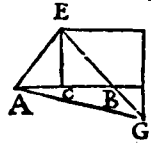
e 36. primi.

a 34. pri. *aqualis sit ipsi C B, ob quadratum C M,* a *& M E, ipsi F L, hoc est,*
b 34. pri. *ipsi L I, ob quadratum L G, hoc est* b *ipsi A C. Addito ergo communi*
c 36 pri. *I H, erunt K M, D O, I H, aqualia ipsi I E, hoc est, quadrato L G:*
d 34. pri mi. c *quod I E, L G, aqualia sint, ob rectas L I, I M,* d *qua aqualibus A C, C B, aquales sunt. Quod est propositum.*

x. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea secetur bifariam, adijciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod à dimidia, & eius, quod à composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, descriptum sit, quadrati.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D. Dico duo quadrata rectarum A D, B D, simul dupla esse quadratorum simul, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Super A B, enim ex C, erigatur perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, vel C B, & iungantur rectæ A E, E B. Per D, deinde educatur D F, ipsi C E, parallela, occurrens rectæ E B, protractæ in G; & per E, ducatur rectæ C D, parallela E F.



F secans D F, in F, iungaturque recta A G. Ostendetur iam, angulum A E B, esse rectum, vt in
e 29. pri mi. D præcedenti propos. & C E B, semirectum; *e* ideoque eius alternum E G F, semirectum quo-
f 34. pri. que: *f* Est autem angulus F, rectus, cùm in pa-
g 32. pri mi. rallelogrammo C F, recto angulo C, opponatur. *g* Igitur & re-
liquus F E G, semirectus erit, & propterea ipsi E G F, æqualis. Qua-
h 6. pri. re rectæ *h* E F, F G, angulis F E G, E G F, oppositæ, æquales quo-
que erunt. Eadem arte ostendes, rectas B D, D G, esse æquales, propterea quòd angulus B D G, sit rectus, & B G D, semirectus,
i 47. pri. &c. Quoniam igitur quadratum rectæ A E, *i* æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium A C, C E; erit quadratum rectæ A E, duplum quadrati rectæ A C. Rursus quia quadratum
k 47. pri mi. rectæ E G, *k* quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, F G, æquale est; erit quoque quadratum rectæ E G, duplum quadrati
l 34. pri mi. rectæ E F, hoc est rectæ C D, *l* cũ C D, recta æqualis sit rectæ E F. Duo igitur quadrata rectarum A E, E G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorũ. Atqui duobus quadratis recta-
m 47. primi. rum A E, E G, æquale est *m* quadratum rectæ lineæ A G; & quadrato rectæ A G, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis A D, D G, describuntur. Quadrata ergo rectarum A D, D G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorum. Cùm igitur quadratum rectæ D G, æquale sit quadrato rectæ B D; e-

runt

sunt quóque quadrata rectarum AD, DB, dupla quadratorum, quæ ex rectis AC, CD, describuntur. Itaque si recta linea secetur bifariam, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex AD, a *æquale est quadratis* a 4. sec.
ex AC, CD, & una cum rectangulo bis sub AC, CD, vel sub BC, CD;
si commune addatur quadratum ex BD, erunt C B
duo quadrata ex AD, BD, æqualia tribus qua- A D
dratis ex AC, CD, BD, & una cum rectangulo bis
sub BC, CD. b *Sed quadrato ex BD, & una cum rectangulo bis sub* b 7. sec.
BC, CD, æqualia sunt quadrata ex CD, BC, hoc est, quadratum
ex AC, CD. Igitur quadrata ex AD, BD, æqualia sunt quadratis
ex AC, CD, bis; Ac proinde quadrata ex AD, BD, dupla sunt qua-
dratorum ex AC, CD; Quod erat demonstrandum.

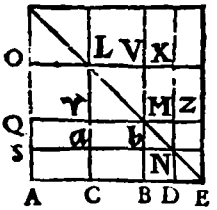
ALITER ex Federico Commandino. Quoniam AC, ipsi CB,
est æqualis, & superat CD, ipsam CB, recta BD; superabit quoque
CD, ipsam AC, eadem recta BD. Quare, ut ad 7. propos. huius lib.
ostendimus, quadrata ex AC, CD, æqualia sunt rectangulo sub AC,
CD, bis, & una cum quadrato recta BD; Ac propterea quadrata re-
ctarum AC, CD, & rectangulum sub AC, CD, bis, & una cum qua-
drato recta BD, dupla sunt quadratorum ex AC, CD: Atqui qua-
dratis rectarum AC, CD, & una cum rectangulo sub AC, CD, bis,
c *æquale est quadratum recta AD. Igitur & quadrata rectarum* c 4. sec.
AD, BD, dupla sunt quadratorum ex AC, CD.

NVMERVS 10. *bifariam secetur in* 5. *&* 5. *cui addatur nu-*
merus quinus 3. *ut totus numerus compositus sit* 13. *Quadrati igitur*
numeri 169. *&* 9. *horum numerorum* 13. *&* 3. *dupli sunt numerorum*
quadratorum 25. *&* 64. *qui ex his numeris* 5. *&* 8. *gignuntur, ut per-*
spicuum est.

SED & hac propos. 10. *facilè ex præcedenti* 9. *demonstrabitur,*
quemadmodum supra demonstratum fuit 6. *ex* 5. *Sit enim recta AB,*
secta bifariam in C, eiq; addita recta quantacunque BD. Dico duo
quadrata rectarum AD, BD, simul dupla esse duorum quadrato-
rum rectarum AC, CD, simul. Addita E A C B D
namq; recta AD, ad partes A, recta AE,
quæ adiecta BD, æqualis sit; erit tota ED,
secta in C, bifariam, & in B, non bifariam, quod EA, AC, ipsis DB,
BC, æquales sint. Recta quoque EE, recta AD, æqualis erit, quod
EA, ipsi DB, sit æqualis, & AB, utrique communis. d *Quadrata* d 9. sec.
igitur rectarum EB, BD, hoc est, rectarum AD, BD, dupla erunt
quadratorum rectarum EC, CB, hoc est, rectarum CD, AC. quod
est propositum.

QVOD si lubeat eandem hanc propos. 10. *demonstrare ex ipsa*
con-

conſtructione, quemadmodum precedentem 9. oſtendimus fiet id hoc modo. Producta AD, ad E, ſit adiecta linea BD, æqualis deſcripto quadrato AF, totius lineæ AE, ducantur per C, B, D, lateribus AG, EF, parallelæ CH, BI, DK, ſecantes ductam diametrum EG, in L, M, N, punctis, per quæ lateribus AE, GF, parallelæ agantur OP, QR, ST, ſecantes priores in V, X, Y, Z, a, b. Quoniam igitur ex coroll. 1. propoſ. 4. huius lib. omnia rectangula circa diametrum



a 34. primi. *EG, quadratum ſunt, a eſtq; SN, ipſi AD, æqualis, & OL, ipſi AC, & aN, ipſi CD: erit SK, quadratum rectæ AD, & DT, quadratum rectæ DE, ſiue BD, & OH, aX, quadratæ rectarum AC, CD. Dico quadrata SK, DT, ſimul dupla eſſe quadratorum OH, aX, ſimul. Quoniam enim quadrata SK, DT, ſuperant quadrata OH, aX, quadrato DT, & rectangulis SL, LK: Sunt autem quadratum DT, & rectangula SL, LK, æqualia quadratis OH, aX, vt mox demonſtrabitur; liquidò conſtat, quadrata SK, DT, quadratorum OH, aX, dupla eſſe, cùm hæc in illis contineantur bis. Quòd autem tria hæc rectangula DT, SL, LK, quadratis OH, aX, æqualia*

b 36 primi. *ſint, ita patebit. Rectangulum QL, b æquale eſt quadrato OH, ob*

c 34. primi. *lineas QO, OG, quæ æquales ſunt; c propterea quòd QO, ipſi YL, æqualis eſt, & YL, ipſi OG, ob æqualia quadrata YV, OH, æqualium*

d 34. primi. *laterum OL, LV. Item d SY, ipſi aM, & LI, ipſi YV, & VK, ipſi VZ, & DT, ipſi bZ. Igitur quinque rectangula QL, SY, LI, VK; DT, hoc eſt, tria rectangula DT, SL, LK, æqualia ſunt quinque rectangulis OH, aM, YV, VZ, bZ. hoc eſt, duobus quadratis OH, aX. Quod eſt propoſitum.*

11. PROBL. 1. PROPOS. 11.

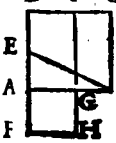
DATAM rectam lineam ſecare, vt comprehenſum ſub tota, & altero ſegmentorum rectangulum, æquale ſit ei, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato.

DATA ſit recta AB, quam ſecare oportet in duas partes, ita vt rectangulum comprehenſum ſub tota AB, & altero eius ſegmento, nempe minori, æquale ſit quadrato reliqui ſegmenti, nimirum maioris. Deſcribatur ex AB, quadratum AC, & diuiſo latere AD, quod cum linea data AB, angulum rectum efficit, bifariam in E, iungatur recta EB, cui ex EA, producta æqualis ſumatur EF, & ipſi AF, abſcindatur ex recta AB, data æqualis AG. Eſt enim AB, maior quàm AF. Nam cùm EB, ſit æqualis

a 20. pri. ipſi EF, ex conſtructione; *a* ſunt autem latera AE, AB, maiora

latere

latere E B ; Erunt quoque rectæ E A, A B, maiores recta E F: ac proinde ablata communi A E, reliqua A B, maior erit, quàm reliqua A F. Dico rectam A B, sectam esse in G, ita vt rectangulum comprehensum sub A B, B G, æquale sit quadrato rectæ A G; adeò vt A G, sit maius segmentum, & B G, minus. Ducatur enim per G, recta H I, parallela rectæ D F, secans C D, in I; Ac per F, ducatur ipsi A G, parallela F H, secans H I, in H. Erit igitur parallelogrammum A H, quadratum segmenti A G, cùm omnia eius quatuor latera sint æqualia, quippe cùm *a* F H, G H, æqualia sint oppositis A G, A F, æqualibus; omnesque anguli eiusdem recti ob rectum A, vt ad defin. 1. huius libri ostendimus. Rectangulum quoque C G, comprehensum erit sub A B, & segmento B G; quod A B, æqualis sit ipsi B C. Itaque probandum est, rectangulum C G, & quadratum A H, æqualia esse. Quoniam igitur recta D A, diuisa est bifariam in E, & ei addita in rectum A F; *b* erit rectangulum sub D F, F A, hoc est, rectangulum D H (cùm F H, sit æqualis ipsi F A;) vna cum quadrato dimidiæ A E, æquale quadrato rectæ E F, hoc est, quadrato rectæ E B, quæ rectæ E F, æqualis est: Est autem quadratũ rectæ E B, *c* æquale quadratis rectarum A E, A B. Quare rectangulum D H, vna cum quadrato rectæ A E, æquale quoque est quadratis rectarum A E, A B. Dempto ergo communi quadrato rectæ A E, remanebit rectangulum D H, æquale quadrato rectæ A B, hoc est, quadrato A C. Ablato igitur rursus communi rectangulo A I, remanebunt rectangulum C G, & quadratum A H, inter se æqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam A B, secuimus &c. Quod erat faciendum.



a 34. pri.

b 6. sec.

c 47. primi.

SCHOLIVM.

HOC problema nulla ratione accommodari potest numeris. Non enim numerus vllus in duos potest numeros diuidi, vt numerus productus ex toto in alteram partem aqualis sit quadrato alterius partis, vt demonstrabimus ad propos. 14. lib. 9. Vbi etiam decem theorematum antecedentia huius lib. in numeris demonstrabimus. Clarius autem ad propos. 29. eiusdem lib. 9. ostendemus, problema hoc 11. nulla ratione posse numeris accommodari.

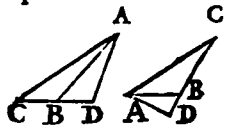
PRAXIS autem huiusce problematis non est difficilis. Nam ad extremum A, vbi terminari debet maius segmentum linea data A B, excitetur perpendicularis A D, ipsi data linea A B, aqualis, eaq; secta in E, bifariam; si ad interuallum E B, resecetur E A, producta in F, erit A F, maiori segmento A G, aqualis, vt demonstratum est.

THEOR.

xij. THEOR. 11. PROPOS. 12.

IN amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cùm protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exteriùs linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

TRIANGVLVM A B C, habeat angulum A B C, obtusum, & ex A, in latus C B, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A C, quod obtuso angulo opponitur, maius esse quadratis laterum A B, B C, rectangulo bis comprehenso sub C B, B D, hoc est, quadratū lateris A C, æquale esse duobus quadratis laterum A B, B C, vna cum rectangulo sub C B, B D, bis comprehenso. Cùm enim re-



a 4. sec. cta C D, diuisa sit in B, vtcunque a erit quadratum rectæ C D, æquale duobus quadratis rectarum C B, B D, & rectangulo comprehenso bis sub C B, B D. Addito igitur communi quadrato rectæ A D, erunt duo quadrata rectarum C D, D A, æqualia tribus quadratis rectarum C B, B D, D A, & rectangulo comprehenso

b 47. primi. bis sub C B, E D: b Est autem quadratis rectarū C D, D A, æquale quadratum rectæ A C. Quare & quadratum rectæ A C, æquale erit tribus quadratis rectarum C B, B D, D A, & rectangulo comprehenso bis sub C B, B D. Cùm igitur quadratis rectarum B D,

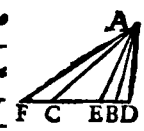
c 47. primi. D A, c æquale sit quadratum rectæ A B; erit quadratum rectæ A C, æquale quadratis rectarum C B, B A, & rectangulo comprehenso bis sub C B, B D. Quod est propositum. In amblygoniis ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

IAM hoc loco demonstrauit Euclides, quantò maius sit in triangulo amblygonio quadratum lateris anguli obtusi oppositi, quadratis aliorum duorum laterum: In sequenti autem propos. 13. ostendet, quantò quadratum lateris acuto angulo oppositi minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, vt ad institutum scholij propos. 47 lib. 1. monuimus.

QVONIAM verò assumpsit Euclides, perpendicularem ductã ex A, cadere in latus C B, ad partes anguli obtusi protractum, ideo paucis id demonstrabimus. Sit in triangulo A B C, angulus A B C, obtu-

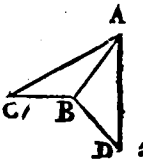
obtusus, & latus C B, ad partes S B, protractum. Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulum in latus C B, protractum, cuiusmodi est recta A D. Si enim caderet intra triangulum, qualis est recta A E, essent duo anguli A E B, A E B, duobus rectis maiores, cùm ille sit obtusus, hic verò rectus. Quod est contra propos. 17. lib. 1. Si verò caderet extra triangulum in latus B C, productum ad partes C, qualis est recta A F, essent rursus in triangulo A B F, duo anguli A B F, A F B, maiores duobus rectis, cùm ille sit obtusus, hic verò rectus. Quod est absurdum.



SED & hoc theorema verum est.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, obtusus erit.

IN triangulo A B C, quadratum lateris A C, maius sit quadratis laterum A B, B C. Dico angulum B, quem latus A C, subtendit, esse obtusum. Ducatur enim ex B, ad A B, perpendicularis B D, linea B C, aequalis, iungaturq; recta A D. Quoniam igitur quadratum ex A D, a aequale est quadratis ex A B, B D, hoc est, ex A B, B C: Ponitur autem quadratum ex A C, maius quadratis ex A B, B C; Erit quadratum ex A D, minus quadrato ex A C, & idcirco recta A D, minor quàm recta A C. Itaq; quia latera A B, B C, trianguli A B C, aequalia sunt lateribus A B, B D, trianguli A B D, vtrumq; vtriq;, & basis A C, maior est basi A D: b Erit angulus A B C, maior angulo A B D: Sed A B D, rectus est. Igitur A B C, recto maior, & obtusus erit. Quod est propositum.



a 47. primi.

b 25. primi.

QVIN etiam conuersum huius propos. 12. demonstrabimus: nimirum.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab opposito angulo demissa abscindit: Demissa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, obtusus.

IN triangulo A B C, ad latus C B, protractum demittatur ex opposito angulo A, recta A D, sitq; quadratum lateris A C, maius, quàm quadrata laterum A B, B C, rectangulo sub C B, B D, bis comprehenso. Dico A D, ad C D, esse perpendicularem, & angulum A B C, obtusum. Si enim A D, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad

C B, perpendicularis, quam dico cadere necessariò in C B, productam ad partes B. Cadat enim, si fieri potest, in B, ita vt A B, sit ad C B, perpendicularis. Erit igitur a quadratum ex A C, aquale quadratis ex A B, B C, quod est absurdum, cùm maius ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, in C B, demissa, in punctum B.

a 47. primi.

C A D A T deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, demissa, in latus B C, qualis est A F. Erit igitur b quadratum ex A C, aquale quadratis ex A F, F C. Ponitur autem quadratum ex A C, maius quadratis ex A B, B C. Igitur & quadrata ex A F, F C, maiora erunt quadratis ex A B, B C, quod est absurdum. Sunt enim quadrata ex A B, B C, maiora quadratis ex A F, F C, quòd recta A B, recto angulo A F B, opposita c maior sit quàm A F, & B C, totz maior parte F C. Perpendicularis ergo ex A, demissa non cadit in C B.

b 47. primi.

c 19. primi.

C A D A T tertiò, si fieri potest, perpendicularis ex A, ad latus B C, demissa in C, ita vt A C, sit perpendicularis. Erit igitur quadratum ex A B, d aquale quadratis ex A C, C B, ac proinde quadratum ex A C, minus erit quadrato ex A B, & propterea multò minus quadratis ex A B, B C, quod est absurdum, cùm ponatur maius. Perpendicularis ergo ex A, ad B C, demissa non cadit in C.

d 47. primi.

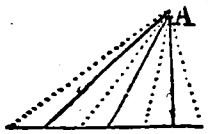
C A D A T quartò, si fieri potest, perpendicularis ex A, in B C, protractam ad partes C, qualis est A G. Quoniam igitur duo anguli A G C, A C G, e minores sunt duobus rectis, est q A G C, rectus; erit A C G, minor recto, ac proinde A C B, obtusus. Recta ergo A B, f maior erit quàm A C, & propterea quadratum ex A C, minus erit quadrato ex A B, ac proinde multò minus quadratis ex A B, B C: sed & maius ponitur, quod est absurdum. Cùm ergo perpendicularis ex A, demissa ad C B, non cadat in B, neque inter C, B, neque in C, neque extra C, cadet extra B, qualis est A D, vt demonstrabitur: Quare angulus A B E g acutus erit, & A B C, obtusus. quod secundo loco proponitur, demonstrandum.

e 17. primi.

f 19. primi.

g 17. primi.

CAETERVM angulum A B C, esse obtusum, si quadratum rectz A C, maius sit quadratis rectarum A B, B C, facilius demonstrauimus in proximo theoremate huius scholij. Ex quo fit (vt ad vltimum huius scholij ostendimus) perpendicularem ex A, ad C B, demissam cadere extra triangulum A B C, ad partes anguli obtusi.



QVOD autem A D, sit ad C B, perpendicularis, ita demonstrabimus. Si non est, ducatur A E, ad C B, perpendicularis cadens vltra B, vt ostendimus. Quoniam igitur angulus A B C, ostensus est obtusus, erit quadratum rectz A C, maius quàm quadrata rectarum A B, B C, rectangulo bis comprehenso sub C B, B E: Sed & quadratum eiusdem rectz A C, maius ponitur, quam quadrata earundem rectarum A B, B C, rectangulo bis comprehenso sub C B, B D. Igitur

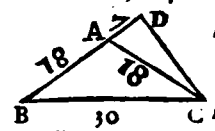
tur quadratum ex AB, BC, una cum rectangulo ſub CB, BD, comprehenſo æqualia erunt quadratis ex AB, BC, una cum rectangulo ſub CB, BE, bis comprehenſo: & ablatis quadratis communibus rectarum AB, BC, rectangulum bis ſub CB, BE, comprehenſum æquale erit rectangulo bis comprehenſo ſub CB, BD, ac proinde & rectangulum ſub CB, BE, ſemel comprehenſum æquale erit rectangulo ſemel ſub CB, BD, comprehenſo, & recta BE, recta BD, æqualis, pars toti, vel totum parti. quod eſt abſurdum. Eſt ergo AD, ad CD, perpendicularis, & nulla alia. quod eſt propoſitum.

IAM verò, quoniam neque hoc duodecimum theorema, neque ſequens 13. per numeros, quando libet, explicari poteſt, quod poſito vno latere trianguli quotlibet partium æqualium, alia latera, eorumq; partes à perpendicularibus lineis facta plerumque numeris exprimi nequeant, ſed ſint lineæ illi lateri incommenſurabiles: quod in præcedentibus propoſitionibus non accidebat, quippe cum, poſita diuiſa recta linea quotlibet partium æqualium, eius partes ſtatui poſſint pro libito ex commenſurabiles, vt in exemplis numerorum adhibitis factum eſt, præſcribemus regulas quaſdam, quibus Geometricè triangula amblygonia, atque oxygonia (quotquot quis optauerit) conſtituantur eiuſmodi, vt omnia latera, partesq; eorum à lineis perpendicularibus facta ſint lineæ commenſurabiles: atq; adeò veritas vtriuſq; theorematis in numeris quoque appareat. Hic autem de amblygonijs triangulis agemus, & in ſcholio ſequentis propoſitionis de Oxygonijs. Quoniam autem amblygonium triangulum eſt vel iſoſceles, in quo tertium latus ſemper à maius eſt, quod obtuſo angulo opponatur, vel ſcalenum (æquilaterum enim eſſe non poteſt, vt ad definitionem 27. lib. 1. diximus) & in ſcaleno linea perpendicularis cadit vel in minimum latus productum, vel in medium, proponemus tres regulas. Prima exhibebimus triangulum amblygonium iſoſceles laterum commenſurabilium, in quo etiam ſegmentum vtrimlibet laterum æqualium producti inter perpendicularem, & angulum obtuſum eiſdem lateribus commenſurabile ſit. Secunda conſtituemus triangulum amblygonium ſcalenum laterum etiam commenſurabilium, & in quo ſegmentum minimi lateris producti inter perpendicularem, & angulum obtuſum lateribus eiſdem ſit commenſurabile. Tertia denique triangulum amblygonium ſcalenum proponemus commenſurabilium laterum, & in quo ſegmentum lateris medij producti inter lineam perpendicularem, & obtuſum angulum eiſdem lateribus commenſurabile exiſtat. 219. pri.

REGVLA I.

AD conſtruendum triangulum amblygonium iſoſceles laterum commenſurabilium, in quo ſegmentum exterius alterius laterum æqualium producti inter perpendicularem lineam, & angulum obtuſum, eiſdem lateribus quoq; ſit commenſurabile; ſtatuatur ſegmen-

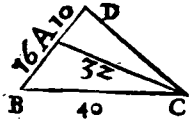
tum exterius tot partium aqualium, & earum numerus à 7. numeretur, & 7. vel 14. vel 21. vel 28. &c. Deinde utrumuis laterum aqualium ponatur dicti ſegmenti duplum ſuperquadrupartiens ſeptimas, maximum autem obtuſo angulo oppoſitum eiuſdem ſegmenti quadruplum ſuperbipartiens ſeptimas. Vt in triangulo A B C, ducta ſit C D, ad B A, latus productum. Si igitur A D, conſtituatur partium 7. & utrumuis laterum A B, A C, partium 18. qui numerus habetur, ſi duplicaueris 7. addideriſque $\frac{4}{7}$ ipſius. Latus verò B C,



partium 30. quem numerum habebis, ſi quadruplicaueris 7. adiunxeriſq; $\frac{2}{7}$ ipſius; erit triangulum A B C, quod quæritur. In hoc enim triangulo quadratum lateris B C, eſt 900. cui aqualia ſunt quadrata laterum A B, A C, nempe 324. 324, una cum rectangulo bis comprehenſo ſub A B, A D, hoc eſt, cum 126. 126. Hæc enim conficiunt quoque ſummam 900. Quam ob rem, & in hoc ſcholio oſtendimus, erit ducta C D, ad B D, perpendicularis, & angulum B A C, obtuſum. Quod ſi ſingulos numeros huius trianguli per quemlibet numerum multiplices, procreabis alias lineas triangula commenſurabiles, prioribus tamen proportionales. Vt ſi inuentos numeros duplices, efficies A D, 14. & tam A B, quàm A C, 36. at B C, 60. Propoſitum quoq; triangulum reperies, ſtatuendo ſegmentum exterius A D, quotcunq; partium, etiamſi à 7. non numerentur: ſed tunc latera erunt numeri integri cum fractionibus. Idem denique triangulum effendes, ſtatuendo latus quodcunque, à quo incipere vis, quotlibet partium, dummodò maximum fiat ſegmenti A D, quadruplum ſuperbipartiens ſeptimas, utrumuis autem aqualium ſit eiuſdem ſegmenti duplum ſuperquadrupartiens ſeptimas.

REGVLA II.

VT efficiatur triangulum amblygonium Scalenum laterum commenſurabilium, in quo perpendicularis cadens in minimum latus productum faciat ſegmentum exterius commenſurabile etiam lateribus: ſtatuatur exterius ſegmentum quotuis partium aqualium à 5. numeraturum, & 5 vel 10. vel 15. vel 20. &c. Quibus ſi addas $\frac{3}{5}$ habebis minimum latus. Si verò eaſdem partes dicti ſegmenti triplices, addasq; $\frac{1}{5}$ vel ſi partes minimi lateris inuentas duplices, efficies medium latus. Si denique partes eaſdem dicti ſegmenti quadruplices, reperies latus maximum. Vt ſi in appoſito triangulo ſegmentum A D, conſtituatur 10. erit A B, 16. A C, 32. & B C, 40. Vbi etiam vides, quadrato lateris B C, quod eſt 1600. aqualia eſſe quadrata laterum A B, A C, nimirum 256. 1024. una cum rectangulo bis ſub A B, A D, comprehenſo, id eſt, cum 160. 160.

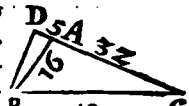


Ex quo

Ex quo fit, CD, esse ad BD, perpendicularem, & angulum BAC, obtusum, vt suprà in hoc scholio ostendimus. Iam si singulos numeros inuentos multiplices per quemuis numerum, gignentur alij numeri illis proportionales, qui idem præstabunt. Vt si eos duplices, erit latus AB, 32. AC, 64. & BC, 80. qui quidem numeri reperientur eadem arte, si exterum segmentum AD statuas partium 20. quæ duplam quoque proportionem habent ad priores partes 10. Sic si eosdem numeros triplices, efficies segmentum exterius AD, partium 30. latus AB, 48. AC, 96. BC, 120. & sic deinceps.

REGVLA III.

PRO triangulo amblygonio Scaleno commensurabilium laterum, in quo perpendicularis linea in medium latus productum cadens efficiat quoque segmentum lateribus trianguli commensurabile; accipiatur rursum exterius segmentum quotlibet partium à 5. numeraturum, vt in præcedenti regula. Quas si triplices, addasq; $\frac{1}{5}$ produces minimum latus: Si verò easdem multiplices per 6. adiungasq; $\frac{2}{5}$ habebis latus medium: Si denique easdem per 8. multiplices, produces maximum latus. Vt si in triangulo proposito segmentum AD, fiat partium 5. erit AB, 16. AC, 32. & BC, 40. Atque ita quadrato lateris BC, nimirum 1600. æqualia existent quadrata laterum AB, AC, nempe 256. 1024. vna cum rectangulo bis comprehenso sub AC, AD, hoc est, cum 160. 160. Ac proinde BD, ad CD, erit perpendicularis, angulusq; BAC, obtusus, vt in hoc scholio suprà demonstrauimus. Quòd si numeros inuentos per quemuis numerum multiplices, inuenies alios numeros laterum illis proportionales, in quibus eadem hæc propos. 12. examinabitur. Vt si eos quadruplices, efficies segmentum exterius AD, partium 20. Latus AB, 64. AC, 128. & BC, 160. Si verò eosdem illos priores numeros per 10. multiplices, erit segmentum exterius AD, 50. latus AB, 160. AC, 320. & BC, 400. Atque ita in infinitum.



CAVE autem, existimes, posito latere aliquo trianguli amblygonij, vel segmento exteriori, quotlibet partium æqualium, alia latera cum illo seruare necessario proportiones illas, quas in regulis prædictis explicauimus: adeò vt cognito vno, reliqua etiam cognoscantur. Hoc enim falsum est, cùm illa variari possint mille modis, & alias atque alias proportiones habere. Itaque ex tribus præscriptis regulis solùm colligendum erit, ex lineis rectis, quæ dictas proportiones seruent, constitutos posse triangulum amblygonium, vna cum segmento exteriore, in quo veritas propositionis 12. possit examinari.

xliij. THEOR. 12. PROPOS. 13.

IN oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum ſubtendente minus eſt quadratis, quę fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenſo, & ab vno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab aſſumpta interius linea ſub perpendiculari prope acutum augulum.

SINT omnes anguli trianguli A B C, acuti, & ex A, perpendicularis A D, demiſſa cadat in latus B C. Dico quadratum lateris A B, quod acuto angulo A C B, opponitur, minus eſſe quadratis laterum A C, C B, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, hoc eſt, quadratum lateris A B, vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, æquale eſſe duobus quadratis laterum A C, C B. Cùm enim recta B C, diuiſa ſit in D, vtcunque, erũt quadrata rectarũ B C, C D, *a* æqualia rectangulo comprehenſo bis ſub B C, C D, & quadrato rectæ B D. Addito ergo communi quadrato rectæ D A, erunt tria quadrata rectarum B C, C D, D A, æqualia rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A: Duobus autem quadratis rectarum C D, D A, *b* æquale eſt quadratum rectæ C A. Duo igitur quadrata rectarum B C, C A, æqualia ſunt rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A. Cum ergo duobus quadratis rectarum B D, D A, *c* æquale ſit quadratum rectæ A B; erunt duo quadrata rectarum B C, C A, æqualia rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, & quadrato rectæ A B, quod eſt propoſitum. Eodem modo oſtendetur, quadrata rectarum A B, B C, æqualia eſſe rectangulo bis comprehenſo ſub C B, B D, & quadrato rectæ A C, hoc eſt, quadratum lateris A C, minus eſſe quadratis laterum A B, B C, rectangulo comprehenſo bis ſub C B, B D. In oxygoniis ergo triangulis, quadratum à latere, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 7. *ſec.*

b 47. *primi.*

c 47. *primi.*

SCHOLIVM.

ITAQVE ex tribus propoſitionibus, nempe 47. lib. 1. & 12. atq; 13. huius lib. cognoſcimus, quantum ſit quadratum cuiuſuis lateris trianguli cum quadratis aliorum duorum laterum comparatum, nempe an ſit illis æquale, an maius, minus ve, & quanto maius ſit, aut minus, prout videlicet angulus aſſumpto lateri oppoſitus fuerit rectus, vel obtuſus, aut acutus.

QVAM-

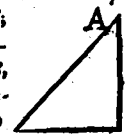
QVAMVIS autem Euclides theorema hoc proponat de triangulis duntaxat oxygonijs, quæ scilicet omnes angulos habent acutos; idem tamen verum etiam est in triangulis rectangulis, & amblygonijs, vt constat ex posterioribus duobus triangulis in schemate propositio. Sunt enim in hisce triangulis necessariò duo reliqui anguli acuti, vt perspicuè colligi potest ex propos. 17. vel 32. primi lib. Hoc solum observandum est in triangulis rectangulis, & amblygonijs, perpendi-



cularem duci debere ab angulo recto, vel obtuso, in oxygonijs verò à quolibet. Ita enim semper cadet perpendicularis intra triangulum, vt Euclides in demonstratione assumpsit. Quod quidem facilè demonstrabitur hac ratione. Sint in triangulo A B C, duo anguli A B C, A C B, acuti; angulus verò B A C, rectus, vel obtusus, acutúsve. Dico perpendicularem ex A, demissam cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in C B, protractam ad partes B, cuiusmodi est recta A E, esset in triangulo A B E, angulus exterior A B C, acutus, à maiori interno & opposito recto A E B, quod est absurdum. Si verò caderet extra B C, productam ad partes C, qualis est recta A F, 16. pri. *in idem incideremus absurdum, vt manifestum est.*

IDEM hoc theorema in triangulis rectangulis, & obtusangulis demonstrat Federicus Commandinus, etiamsi perpendicularis A D, non cadat in latus B C, sed vel eadem sit, quæ latus A B, vt in rectangulis, vel extra triangulum cadat, vt in obtusangulis accidit, ceu in scholio propos. præcedentis demonstrauimus: quòd tum demum accidet, cùm perpendicularis non ab angulo recto, vel obtuso, sed ab altero acutorum demittitur.

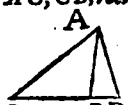
SIT triangulum rectangulum A B C, cuius angulus B, sit rectus, & ex angulo A, acuto ad B C, perpendicularis ducatur A D, quæ eadem erit, quæ latus A B, propter angulum rectum B. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, subtendentis, minus esse, quàm quadrata laterum A C, C B, rectangulo bis comprehensò sub latere C B, in quod perpendicularis cadit, & sub linea C D, quæ interijcitur inter perpendicularem A D, & acutum angulum C. Cùm enim quadrata ex A B, C B, b æqualia sint quadrato ex A C, addito communi quadrato ex C B, erunt tria quadrata, nempe quod ex A B, & duplum eius, quod ex C B, æqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C B, idem est, quod rectangulum sub C B, C D. Igitur & quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis sub C B, C D, æquale est quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quàm quadrata ex A C, C B, rectangulo bis sub C B, C D. Quod est propositum.



b 47. primi.

RVRSVS sit triangulum obtusangulum A B C, cuius angulus

B, obtusum, & ex angulo acuto A, ad B C, perpendicularis ducatur A D, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, subtendentis minus esse, quàm quadrata laterum A C, C B, rectangulo comprehenso bis sub C B, & C D. Quoniam e-



a 47. primi. *nim quadrata ex A D, C D, a aqualia sunt quadrato ex A C; addito quadrato ex C B, communi, erunt tria quadrata ex A D, C D, C B, aqualia duobus quadra-*

b 4. sec. *tis ex A C, C B: At quadratum ex C D, b aquale est quadratis ex C B, B D, & rectangulo bis sub C B, B D. Igitur & duo quadrata ex A D, C B, una cum quadratis ex C B, B D, & rectangulo bis sub C B, B D, aqualia sunt quadratis ex A C,*

c 47. primi. *C B: Sunt autem quadrata ex A D, B D, aqualia c quadrato ex A B. Quare quadratum quoque ex A B, & duplum quadrati ex C B, una cum rectangulo bis sub C B, B D, aqualia sunt quadratis ex A C,*

d 3. sec. *C B. Atqui quadrato ex C B, una cum rectangulo sub C B, B D, d aquale est rectangulum sub C D, C B. Ac propterea duplo quadrati ex C B, una cum rectangulo bis sub C B, B D; aquale est rectangulum bis sub C D, C B. Igitur & quadratum ex A B, una cum rectangulo bis sub C B, C D; aquale est quadratis ex A C, C B. Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quàm quadrata ex A C, C B, rectangulo bis sub C B, C D. Quod est propositum.*

ALITER, & brevius. Quoniam quadratum ex A C, ma-

e 12. sec. *ius e est, quàm quadrata ex A B, B C, rectangulo bis sub C B, B D, comprehenso, hoc est, quadratum ex A C, aquale est quadratis ex A B, B C, una cum rectangulo sub C B, B D, bis comprehenso; erit quadratum ex A B, minus, quàm quadratum ex A C, quadrato ex B C, & rectangulo sub C B, B D, bis: Ac proinde si quadrato ex A C, addatur quadratum ex B C, erit quadratum ex A B, minus quàm quadrata ex A C, B C, quadrato ex B C, bis sumpto, & rectangulo bis sub C B, B D, comprehenso. Cum ergo quadrato ex B C, una cum re-*

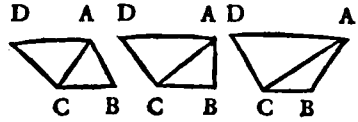
f 3. sec. *ctangulo sub C B, B D, contento, f aquale sit rectangulum sub C B, C D, contentum; erit quoque quadratum ex A B, minus quam quadrata ex A C, C B, rectangulo comprehenso bis sub C B, C D. Quod est propositum.*

IN scholio quodam antiquo demonstratur sequens theorema, instar illius, quod nos in scholio precedentis propos. secundo loco demonstravimus. Videlicet.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, acutus erit.

IN triangulo A B C, quadratum lateris A B, minus sit, quam quadrata laterum A C, C B. Dico angulum C, quem dictum latus subten-

subtendit, esse acutum. Ducatur enim ex C, ad AC, perpendicularis CD, lineæ CB, æqualis, iungaturque recta AD. Quoniam igitur quadratum ex AD, a æquale est quadratis ex AC, CD, hoc est, ex AC, CB: Ponitur autem quadratum ex AB, minus quadratis ex AC, CB; Erit quadratum ex AD, maius quadrato ex AB; & ideo recta AD, maior quam recta AB. Itaque quia duo latera AC, CD, trianguli ACD, æqualia sunt duobus lateribus AC, CB, trianguli ACB, utrumque utrique, & basis AD, maior basi AB; b Erit angulus ACD. maior angulo ACB: Sed ACD, rectus est, ex constructione. Ergo ACB, recto minor, & acutus erit.



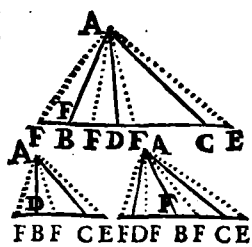
a 47. primi.

a 25. primi.

SED & conuersum huius propos. 13. ostendemus, nimirum.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub recta linea inter angulum priori lateri oppositum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri oppositio demissam: Linea hæc demissa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, acutus.

IN triangulo ABC, ad latus BC, demittatur ex angulo opposito A, recta AD; sitque quadratum lateris AB, minus quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo sub BC, CD, bis comprehenso. Dico AD, esse perpendicularem ad BC, & angulum ACB, acutum. Si namque AD, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad BC, perpendicularis, quæ dico necessario cadere citra punctum C, versus B, hoc est, vel in latus BC, vel in punctum B, vel in latus BC, versus B, productum. Cadat enim, si fieri potest, in C, ita vt AC, sit ad BC, perpendicularis. Erit igitur c quadratum ex AB, æquale quadratis ex AC, CB. quod est absurdum, cum minus ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, deducta ad BC, in punctum C.



b 47. primi.

CAD AT deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, demissa d 47 pri
vltra C, in E, qualis est AE. Erit igitur d quadratum ex AB, æquale mi.
quadratis ex AE, EB: Ponitur autem quadratum ex AB, minus quadratis ex AC, CB. Igitur & quadrata ex AE, EB, minora

247.primi. erunt quadratis ex AC, CB. Cum ergo quadratum ex AC, æquale sit quadratis ex AE, EC; erunt quoque quadrata ex AE, EB, æqualia quadratis ex AE, EC, CB: Et ablato communi quadrato rectæ AE, erit reliquum quadratum ex EB, minus quoque quadratis ex EC, CB. quod est absurdum. Cum enim quadratum ex EB, b4.sec. b æquale sit quadratis ex EC, CB, & una cum rectangulo bis comprehenso sub EC, CB, maius erit quadratum ex EB, quadratis ex EC, CB. Non ergo perpendicularis cadit, & ultra C: Sed neque in C, cadit, vt ostendimus. Igitur cadet citra punctum C, qualis est AD, vt de- c17.primi. c monstrabitur, ac propterea c angulus ACB, acutus erit. Quod secundo loco proponitur demonstrandum.

CÆTERVM angulum ACB, esse acutum, si quadratum rectæ AB, minus sit quadratis rectarum AC, CB, facilius demonstrauimus in proximo antecedente theoremate huius scholij. Ex quo fit, (quemadmodum in coroll. 2. propos. 17. lib. 1. ostensum est) perpendicularem ex A, ad BC, demissam cadere citra angulum ACB, acutum versus B.

QVOD autem AD, sit ad BC, perpendicularis, ita ostendemus. Si non est, sit AF, ad BC, perpendicularis, cadens citra punctum C, vt probatum est, vbicunque hoc contingat, sine intra triangulum sine in punctum B, sine extra triangulum. (In secundo tantum triangulo non dicet aduersarius, perpendicularem cadere in B; quia eadem esset, quæ AD. quod ille negat) Quia ergo angulus ACB, ostensus fuit d13.sec. d acutus, erit quadratum ex AB, minus, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis comprehenso sub BC, CF, hoc est, quadratum ex AB, una cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CE, æquale est quadratis ex AC, CB: Ponitur autem quadratum idem ex AB, minus quoque, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, hoc est, quadratum idem ex AB, una cum rectangulo bis contento sub BC, CD, æquale ponitur quadratis ex AC, CB. Igitur quadratum ex AB, una cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, æquale erit quadrato eidem ex AB, una cum rectangulo comprehenso bis sub BC, CF: Et ablato communi quadrato rectæ AB, rectangulum sub BC, CD, bis comprehensum æquale erit rectangulo bis sub BC, CF, comprehenso: ac proinde & rectangulum semel comprehensum sub BC, CD, æquale erit rectangulo semel comprehenso sub BC, CF, ideoque & recta CD, CF, æquales erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Est igitur AD, ad BC, perpendicularis, & non alia. Quod est propositum.

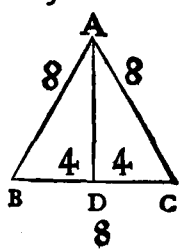
QVEMADMODVM autem in scholio superioris propositionis triangula amblygonia constituximus laterum, & linearum commensurabilium, in quibus per numeros veritas propositionis 12. examinari possit, ita hoc loco oxygonia triangula constituemus laterum atque linearum commensurabilium, in quibus huius 13. propos. veri-

tas ob-

tas explicetur. Quia verò triangulum oxygonium est vel aquilaterum, vel Isosceles, vel Scalenum; complectemur totam hanc doctrinam septem regulis. Prima de triangulo aquilatero oxygonio aget. Secunda de Isoscele, in quo perpendicularis cadit in tertium latus inaquale, sive maius illud sit, sive minus utrouis aqualium. Tertia de Isoscele, cuius tertium latus maius est, perpendicularis q; in alterutrum aqualium laterum cadit. Quarta de Isoscele, cuius latus tertium minus est, & perpendicularis rursus in alterutrum laterum aqualium cadit. Quinta de Scaleno, in quo perpendicularis cadit in minimum latus. Sexta de Scaleno, in quo perpendicularis in medium latus demittitur. Septima denique de Scaleno, in quo ad maximum latus perpendicularis ducitur. Loquor autem hic de illis etiam triangulis, in quibus perpendicularis linea cadit intra triangulum, ac proinde duo anguli supra basin sunt acuti, sive oppositus angulus acutus etiam sit, sive non. De his enim propositio etiam intelligenda est, ut diximus. Quo pacto autem triangula, in quibus linea perpendicularis cadit vel extra ipsa, vel cum uno laterum coincidit, numeris quoque possint accommodari, docebimus ad finem regularum.

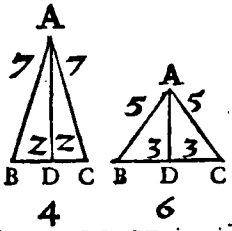
REGVLA I.

SI quodlibet latus trianguli aquilateri statuatur quotuis partium aqualium, numero tamen parium, ut fractiones vitentur, erunt omnia latera & inter se, & segmentis à linea perpendiculari factis commensurabilia. Vt in triangulo aquilatero A B C, diuidet perpendicularis A D, oppositum latus BC, bifariam, ut in scholio propos. 26. lib. 1. demonstrauimus. Quam ob rem posito quolibet latero 8. erunt segmenta B D, C D. 4 4. Vbi vides quadratum lateris A B, angulo acuto C, oppositi, (omnes enim anguli in triangulo aquilatero acuti sunt, ex corol. 3. propos. 17. lib. 1.) hoc est, 64. una cum rectangulo bis contento sub B C, C D, id est, cum 32. 32. efficere 128. quantum videlicet conficiunt duo quadrata laterum A C, C B, nempe 64. 64.



REGVLA II.

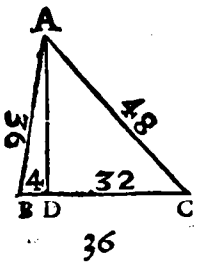
SI vtrumq; laterum aqualium trianguli Isoscelis statuatur quotcunque partium aqualium, tertium autem quotlibet partium numero parium, ut fractiones vitentur, sive pauciores partes in hoc latere ponantur, quam in vtrolibet aqualium, sive plures, dummodo tot non sint, quot in vtroque simul, aut plures; quia sic non posset fieri triangulum, propterea quod duo latera aqualia non essent maiora tertio latere, sed vel aqualia, vel minora, quod pro-



positioni 20. lib. 1. repugnat. Si inquam latera hoc modo numeris exponantur, erunt omnes lineæ triangulo inter se commensurabiles. Vt in priori horum Isoscelium Ꝟtrumuis latus A B, A C, statuatur 7. & B C, 4. In posteriori autem Ꝟtrumlibet A B, A C, 5. & B C, 6. Cum ergo perpendicularis A D, diuidat basim B C, bifariam, ex scholio propos. 26. lib. 1. erunt segmenta B D, C D, in priori quidem triangulo 2. 2. in posteriori Ꝟerò 3. 3. Vbi etiam perspicuum est, quadratum lateris A B, angulo acuto C, oppositi, (Ꝟterque enim angulus B, C, acutus est, ex coroll. 3. propos. 17. lib. 1.) Ꝟna cum rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, æquale esse quadratis simul laterum A C, C B. &c.

REGVLA III.

IN triangulo Isoscele, in quo tertium latus maius est, & perpendicularis in alterum æqualium laterum cadit, erit segmentum prope maius latus tertium, maius, Ꝟt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Si igitur minus segmentum statuas quotuis partium, easq; per 8. multiplices, habebis segmentum maius: Si Ꝟerò easdem ducas in 12. efficies tertium latus: Duo denique segmenta simul addita conflabunt Ꝟtrumque laterum æqualium; quod etiam produces ex multiplicatione minoris segmenti per 9. Vt si in Isoscele A B C, segmentum minus B D, ponatur 4. erit maius C D, 32. latus Ꝟerò A C, 48. & Ꝟtrumque latus A B, B C, 36. 36. Quadratum igitur lateris A B, angulo acuto C, oppositi, nempe 1296. Ꝟna cum ea, quod fit bis ex B C, in C D, id est, cum 1152. 1152. conficit 3600. quantum nimirum efficiunt duo quadrata ex A C, C B, nempe 2304. 1296. Ita quoque quadratum ex A C, nimirum 2304. Ꝟna cum eo, quod bis fit ex C B, in B D, hoc est, cum 144. 144. facit 2592. qui numerus etiam conficitur ex quadratis laterum A B, B C, nimirum ex 1296. 1296. In huiusmodi ergo triangulo segmenta inæqualia proportionem habent octuplam: Ꝟtrumuis Ꝟerò æqualium laterum ad minus segmentum proportionem habet nonecuplam: Tertium denique latus maius ad idem segmentum minus habet proportionem duodecuplam.

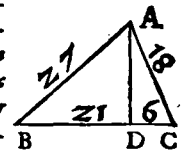


REGVLA IV.

IN triangulo Isoscele, cuius tertium latus minus est, & perpendicularis rursum in alterum æqualium laterum cadit, erit segmentum prope minus latus tertium, minus, Ꝟt ad propos. 47. lib. 1. ostensum est.

Quod

Quod ſegmentum ſi ſtatuas quotus partium numero parium, & fractiones fugiantur, eas q; per 3. multiplices, & producto earundem medietatem adiicias, vel earum medietatem per 7. multiplices, produces maius ſegmentum: Si verò eaſdem partes minoris ſegmenti multiplices per 3. efficies tertium latus minus. Vtrumque demiq; aqualium laterum componetur ex duobus ſegmentis: quod etiam ex multiplicatione medietatis minoris ſegmenti per 9. producetur. Vt ſi in iſoſcele A B C, minus ſegmentum C D, ponatur 6. erit maius B D, 21. & latus A C, 18. atque tam A B, quàm B C, 27.

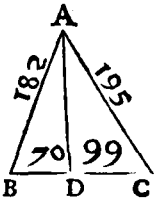


27

Quadratum ergo lateris A B, anguło acuto C, oppoſiti, nimirum 729. una cum eo, quo fit bis ex B C, in C D, id eſt, cum 162. 162. efficit 1053. qui numerus etiam componitur ex quadratis laterum A C, C B, nempe ex 324. 729. &c.

REGVLA V.

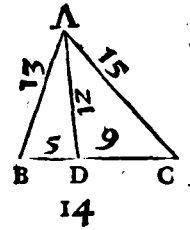
IN Scaleno triangulo, in quo perpendicularis in minimum latus demittitur, erit ſegmentum baſis iuxta medium latus, minus, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtratum eſt. Quod ſegmentum ſi conſtituatur tot partium aqualium, vt à 70. numerentur, nimirum partium 70. vel 140, vel 210. &c. eaq; addantur earum $\frac{1}{7}$ $\frac{2}{0}$ confectum erit ſegmentum maius, & ex additione partium horum ſegmentorum gignetur minimum latus. Si verò partes minoris ſegmenti duplicentur, & producto adiiciantur $\frac{4}{7}$ $\frac{2}{0}$ hoc eſt, $\frac{1}{5}$ earundem partium, procreabitur medium latus. Si denique partes eiuſdem minoris ſegmenti duplicentur, productoq; $\frac{5}{7}$ $\frac{5}{0}$ id eſt, $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{4}$ earundem addantur, componetur latus maximum. Vt in ſcaleno A B C, ſi minus ſegmentum B D, ponatur 70. erit maius C D, 99. & totum minimum latus B C, 169. Medium autem latus A B, 182. & maximum A C, 195. Quadratum ergo lateris A B, acuto angulo C, oppoſiti, hoc eſt, 33124. una cum numero, qui bis fit ex B C, in C D, id eſt, cum 16731. 16731. conficit numerum 66586. aqualem duobus ſimul quadratis 38025. 28561. laterum A C, C B, &c.



169

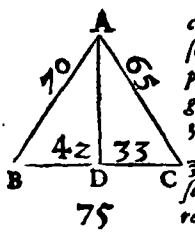
REGVLA VI.

IN triangulo Scaleno, quando perpendicularis in medium latus cadit, erit ex iis, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. oſtendimus, minus ſegmentum minimo lateri adiacens. Quod ſegmentum ſi ſtatuatur tot aqualium partium, vt à 5. numerentur, vt 5. vel 10. vel 15. &c. eaq; addantur



dantur $\frac{4}{5}$. confectum erit segmentum maius, & partes horum segmentorum in vnam summam collecta component medium latus. Si autem partibus minoris segmenti duplicatis adiiciantur earundem $\frac{3}{5}$. producetur minimum latus. Triplum denique earundem partium minoris segmenti dabit latus maximum. Vt in Scaleno A B C, si minus segmentum B D, fiat 5. erit segmentum maius C D, 9. & totum latus B C, medium, 14. Minimum verò A B, 13. & maximum A C, 15. &c.

REGVLA VII.



IN Scaleno denique triangulo, vbi perpendicularis ad maximum latus deducitur, erit minus segmentum sexta latus minimum, ex iis, quæ ad propos. 47. lib. 1. scripsimus. Si ergo pro minori segmento sumantur 33. vel quisuis alius numerus à 33. numeratus, vt 66. vel 99. &c. eiq; addantur $\frac{2}{3}\frac{2}{3}$ hoc est, $\frac{3}{1}\frac{3}{1}$. fiet maius segmentum: quæ duo segmenta simul composita maximum latus offerent. Si verò numero minoris segmenti duplicato adiiciantur $\frac{4}{3}\frac{4}{3}$. producetur medium latus. Si denique eidem minori segmento apponantur $\frac{3}{2}\frac{2}{3}$. exhibebitur minimum latus. Vt si in Scaleno A B C, minus segmentum C D, sit 33. erit maius segmentum B D, 42. totumque latus maximum B C, 75. & medium A B, 70. & minimum A C, 65. &c.

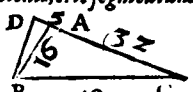
QVOD si singulos numeros harum regularum per eundem numerum aliquem, quicunque is sit, multiplices, procreabis alios numeros lateribus triangulorum tribuendos. Isdem etiam numeri reperientur, si minus segmentum, vel maius, vel quodcunq; latus statuatur quotlibet partium; si modo proportiones seruentur, quas supradictis regulis expressimus.

HIC quoque sciendum est, non in omni triangulo oxygonio proportiones præscriptas reperiri inter latera, cum mille modis possint variari eorum proportiones. Neque verò hoc regula illa docent, sed vsus earum in eo solum consistit, vt seruatis illis proportionibus, quas explicauimus, triangula oxygonia formari possint, in quibus propositio 13. huius lib. 2. ad numeros accommodetur.

IAM verò si perpendicularis coincidat cum illo latere, cuius quadratum probandum est minus esse duobus quadratis aliorum duorum laterum, &c. Ita vt triangulum propositum sit rectangulum, quærendi sunt tres numeri pro lateribus, ex iis, quæ in scholio propos. 47.

pos. 47. lib. 1. scripsimus. Vt in figura regula 6. si in triangulo A B D, minimum latus B D, ponatur 5. erit A D, 12. & A B, 13. Vbi cernis quadratum lateris A D, acuto angulo B, oppositi, nempe 144. una cum eo, quod fit bis ex B D, in B D, hoc est, cum 25. 25. efficere 194. quantum videlicet conficiunt duo quadrata simul ex A B, B D, nimirum 169. 25. Eadem ratione, si minimum latus B D, statuatur partium 6. erit A D, 8. & A B, 10. Vbi etiam vides. quadratum lateris A D, acuto angulo B, subtensi, nimirum 64. una cum ec, quod fit ex B D, in B D, hoc est, cum 36. 36. confiere 136. quem numerum etiam conficiunt duo numeri quadrati laterum A B, B D, nimirum 100. 36. Ita quoque cernis, quadratum numerum lateris B D, acuto angulo A, oppositi, hoc est, 36. una cum eo, quod fit ex A D, in A D, bis, id est, cum 64. 64. efficere 164. quantum scilicet conficiunt duo numeri quadrati simul laterum A B, A D, nimirum 100. & 64. Denique si in alio triangulo A C D, minimum latus C D, ponas 6. reperies ex iis, qua ad propos. 47. lib. 1. scripsimus, A D, 40. & A C. 41. Vbi manifestum est, quadratum numerum lateris A D, angulo acuto oppositi, nimirum 1600. una cum numero, qui fit ex C D, in C D, bis, id est, cum 81. 81. facere 1762. qui numerus aqualis est quadratis numeris duorum laterum A C, C D, hoc est, duobus numeris 1681. 81. Hi enim conficiunt quoque summam 1762. Quod si minimum latus C D, facias 7. comperies A D, 24. & A C, 25. in quibus numeris idem experieris. Nam quadratus numerus lateris C D, angulo acuto A, subtensi, id est, 49. una cum numero, qui bis producitur ex A D, in A D, hoc est, cum 576. 576. facit 1201. quantum scilicet efficiunt duo quadrati numeri laterum A C, A D, hoc est, 625. 576.

A T si perpendicularis cadat extra triangulum, ita vt triangulum sit obtusangulum, quarendum erit segmentum externus, una cum lateribus, vt in tribus regulis scholij precedentis propositionis docuimus. Segmentum namque externus cum latere producto, dabit totum segmentum inter acutum angulum assumptum & perpendicularem. Vt in figura regula 3. scholij antecedentis propositionis, erit segmentum totum C D, inter angulum acutum C, & perpendicularem B D, cadentem extra triangulum, 37. Vbi perspicuum est, quadratum lateris A B, angulo C, acuto oppositi, hoc est, 2, 6.

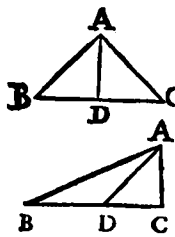


una cum rectangulo sub A C, C D, comprehenso bis, id est, cum 1184. 1184. componere numerum 2624. qui aqualis est duobus quadratis simul laterum B C, A C, nimirum aggregato quadratorum numerorum 1600. 1024. &c.

NEQVE vero alienum putavi hoc loco ex Pappo Alexandrino sequens etiam theorema demonstrare.

SI in

SI in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppositum bifariam, erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium simul dupla duorum quadratorum simul sumptorum, quorum vnum ex linea ducta, alterũ verò ex dimidiato latere describitur.



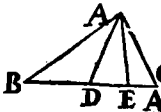
IN triangulo A B C, recta A D, secet latus B C, bifariam in D. Dico quadrata ex A B, A C; dupla esse quadratorum ex A D, B D. Demittatur enim ex A, ad B C, perpendicularis, quæ primum recta A D, congruat, ac proinde triangulum A B C, æquilaterum sit, vel Isosceles; vt ad propos. 26. lib. 1. demonstrauimus. a *Quoniam igitur tam quadratum ex A B,* a 47. primi. *æquale est quadratis ex A D, D B, quam quadratum ex A C, quadratis ex A D, D C; erunt duo quadrata ex A B, A C, æqualia quadrato ex A D, bis sumpto, vna cum quadratis ex D B, D C. Cum ergo quadrata ex D B, D C, æqualia sint, si auferantur duo quadrata ex A D, D C, ablatum erit dimidium quatuor quadratorum, nimirum quadrati ex A D, bis sumpti, & quadratorum ex D B, D C. Quare duo quadrata ex A B, A C, dupla sunt duorum quadratorum ex A D; D B.* b 47. primi. *quod est propositum. Quod clarius ita ostendetur.* b *Quoniam quadratum ex A B, duobus quadratis ex A D, D B, æquale est: Sunt autem duo quadrata ex A B, A C, quadrati ex A B, dupla, ob æqualitatem linearum A B, A C; erunt quoque quadrata ex A B, A C, dupla quadratorum ex A D, D B. Quod demonstrandum erat.*

CONGRVAT deinde perpendicularis A C, lateri A C. Et quia quadratũ ex B C, quadruplum est tam quadrati ex B D, quam quadrati ex D C, vt in scholio propos. 4. huius lib. ostendimus; erit idem quadratum ex B C, duplum duorum quadratorum ex D B, D C. Sunt autem duo quadrata ex A C, C D, bis sumpta, dupla quoque quadrati ex A D; quòd c 47. primi. *c quadrata ex A C, C D, semel sumpta æqualia sint quadrati ex A D. Igitur quadratum ex B C, vna cum quadratis ex A C, C D, bis sumptis, duplum erit quadratorum ex D B, D C, A D. Cum ergo & quadratum ex C D, bis sumptum, duplum sit quadrati ex C D;* d 20. primi. *d erit reliquum quadratum ex B C, vna cum quadrato ex A C, bis sumpto, duplum quoque reliquorum quadratorum ex D B, A D. Sunt autem* c 47. primi. *c quadrata ex B C, A C, æqualia quadrato ex A B. Igitur quadrata ex A B, A C, (quæ æqualia sunt quadrato ex B C, vna cum quadrato ex A C, bis sumpto) dupla quoque sunt, quadratorum ex A D, D B. Quod est propositum.*

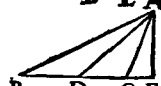
TERTIO cadat perpendicularis A E, intra triangulum inter f 9. sec. *puncta D, C. Quia igitur f quadrata ex B E, E C, dupla sunt quadratorum*

lorum ex BD, DE: Item quadrata ex AE, DE, bis sumpta, dupla sunt quadrati ex AD; quod a quadrata ex AE, ED, semel sumpta quadrato ex AD, æqualia sint; erunt quadrata ex BE, EC, una cum quadratis AE, DE, bis sumptis, dupla quoque quadratorum ex BD, DE, AD. Cum ergo & quadratum ex DE, bis sumptum, duplum sit quadrati ex DE; b erunt reliqua quadrata ex BE, EC, una cum quadrato ex AE, bis sumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex DB, AD. Quare cum quadratis ex BE, AE, c æquale sit quadratum ex AB; & quadratis ex EC, AE, quadratum ex AC; erunt quoque quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod est propositum.

a 47. primi.



b 10. prænun.



c 47. primi.

POSTREMO cadat perpendicularis AE, in latus BC, productum. Quoniam igitur d quadrata ex BE, CE, dupla sunt quadratorum ex BD, DE. Item quadrata ex AE, DE, bis sumpta, dupla sunt quadrati ex AD; e quod quadrata ex AE, DE, semel sumpta, æqualia sint quadrato ex AD; erunt quadrata ex BE, CE, una cum quadratis ex AE, DE, bis sumptis, dupla quoque quadratorum ex BD, DE, AD. Cum ergo & quadratum ex DE, bis sumptum, duplum sit quadrati ex DE; f erunt reliqua quadrata ex BE, CE, una cum quadrato ex AE, bis sumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex BD, AD. Quare cum quadratis ex BE, AE, g æquale sit quadratum ex AB, & quadratis ex CE, AE, quadratum ex AC; erunt quoque quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod erat ostendendum.

d 10. secti.

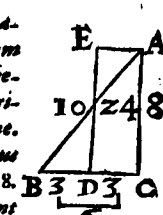
e 47. primi.

f 20. prænun.

g 47. primi.

NON te moveat autem, quod ad huius theorematis demonstrationem adhibuerimus pronunciatum 20. quod universaliter in omni genere multiplicium ab Euclide demonstratur lib. 5. propos. 5. quoniam in dupla proportione facile concedi potest sine demonstratione, ut in expositione eius principij diximus: Vel propositio 5. lib. 5. ante hoc theorema demonstrari potest: Vel certe theorema ipsum post librum 5. demonstrari; ita ut circulus in demonstrando nulla ratione committatur, etiamsi principium illud demonstretur libro 5. quia propositio 5. lib. 5. ex hoc theoremate non pendet.

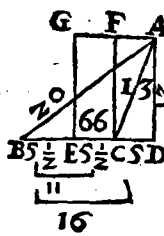
EX his autem, quæ proximis duobus theorematibus, & propos. 47. lib. 1. demonstrata sunt, aream cuiusque trianguli latera habentis nota inuenimus, ut recte hoc loco monet Campanus, & Federicus Commandinus demonstrat, hac fere ratione. Sit primo triangulum rectangulum ABC, cuius latera nota sint, nempe AB, 10. palmorum; AC, 8. BC, 6. Diuiso latere BC, bifariam in D, ut sint CD, BD, 3. palmorum, perficiatur rectangulum



A C D E, quod æquale est triangulo A B C, vt in scholio propos. 41. lib. ostendimus. Quia verò ex ductu C D, trium palmorum in C A, 8. palmorum producitur area rectanguli C E, 24. palmorum quadratorum, & ad initium huius lib. docuimus: Totidem palmos quadratos continebit triangulum A B C, rectangulo C E, æquale. Quod est propositum.

SIT deinde triangulum obtusangulum A B C, cuius latera sint cognita; A B, 20. palmorum; A C, 13. B C, 11. Primum igitur inuenienda est quantitas perpendicularis lineæ A D, ex A, in latus B C, protractum demissa, hoc modo. Quoniam quadratum lateris A B,

a 12. sec. *a maius est, quam quadrata laterum A C, B C, rectangulo bis comprehenso sub B C, C D; si quadrata laterum A C, B C, nempe 169. 121. qua efficiunt 290. detrahantur ex 400. quadrato lateris A B, remanebunt 110. pro rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, cuius numeri dimidium 55. dabit rectangulum sub BC, CD. Si igitur 55. rectangulum sub BC, CD, dividatur per 11. latus notum B C, exibit reliquum latus C D, 5. palmorum, vt Ioan. Regiom. demonstrat propos. 17. lib. 1. de triangulis, & a nobis demonstratum est in libro de mensurationibus omnium quantitatum.*



b 47 pri mi. *Quia verò quadrata laterum A D, C D, b æqualia sunt quadrato lateris A C; si quadratum 25. palmorum, nempe lateris C D, 5. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 169. quadrato lateris A C, remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris A D. Quare latus A D, erit 12. palmorum, cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12. Iam verò diuiso latere B C, bifariam in E, educantur ex C, E, ad B D, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ A G, quæ per A, ipsi B D, parallela ducitur, in punctis F, G. Quibus peractis, si E C, palmorum quinque*

c 34. pri mi. *cum dimidio, ducatur in C F, 12. palmorum, (Est enim C F, ipsi A D, æqualis,) exurget area rectanguli C G, 66. palmorum: quod cum æquale sit triangulo A B C, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum C G, & triangulum A B C, in eisdem parallelis, &c.) Erit quoque area trianguli A B C, palmorum quadratorum 66. quod est propositum.*

SIT postremo triangulum acutangulum A B C, latera habens nota; A B, 13 palmorum; A C, 15. B C, 14. Primum igitur hic quoque reperienda est quantitas perpendicularis A D, ex A, ad B C, demissa,

d 13. sec. *hac ratione. Quoniam quadratum lateris A B, d minus est, quam quadrata laterum A C, B C, rectangulo comprehenso bis sub B C, C D; si quadratum lateris A B, nimirum 169. detrahatur ex quadratis laterum A C, B C, hoc est, ex 225. 196. qua efficiunt 421. remanebunt 252. pro rectangulo comprehenso bis sub B C, C D, cuius numeri dimidium 126. dabit rectangulum sub B C, C D. Si igitur 126. rectangulum sub*



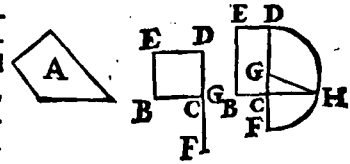
lum ſub B C, C D, dimidiatur per B C, latus notum, & per 14; exibit reliquum eius latus C D, palmorum 9. & conſtat ex Ioan. Regiom. lib. 1. de triangulis propoſ. 17. & à nobis demonſtratum eſt in lib. de menſurationibus omnium quantitatum. Quoniam autem quadrata ex A D, C D, æqualia ſunt quadrato ex A C; ſi quadratum 81. palmorum, nempe lateris C D, 9. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 225. quadrato lateris A C; remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris A D. Quare cum radix quadrata huius numeri 144. ſit 12. erit latus A D, 12. palmorum. Iam uero diuiſo latere B C, bifariam in E, educantur ex C, E, ad B C, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ A F, quæ per A, ipſi B C, parallela ducitur, in punctis G, F. Quibus peractis, ſi C E, 7. palmorum ducatur in E G, 12. palmorum; (b eſt enim E G, recta ipſi A D, æqualis) exurget area rectanguli E F, palmorum 84. Quod cum triangulo A B C, ſit æquale, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. (ſunt enim rectangulum E F, & triangulum A B C, in eiſdem parallelis, &c.) erit quoque area trianguli A B C, 84. palmorum. Quod eſt propoſitum. a47. primi. b34. primi.

IT A QVE in uniuerſum, area cuiuſcunque trianguli producitur ex dimidio baſis in perpendicularem, quæ à uertice ad baſim demittitur, ut in exemplis datis eſt manifeſtum. Sed plura hac de re in libro de menſurationibus omnium quantitatum, quem propediem, Deo iuuante, in lucem edemus. Quo pacto autem, duobus lateribus, cum uno angulo, cognitis, uel duobus angulis, cum uno latere, reliqui anguli, & latera cognoſcantur, demonſtrauimus in noſtris triangulis rectilineis.

PROBL. 2. PROPOS. 14. xiv.

DATO rectilineo æquale quadratum conſtituere.

SIT datum rectilineum A, cui quadratum æquale conſtituendum eſt. c Conſtituatur parallelogrammum B C D E, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius unum latus, ut D C, producatur ad F, ſitq; C F, recta æqualis rectæ B C. Diuidatur quoque D F, bifariam in puncto G, quod cadet aut in punctum C, aut non. Si cadit in punctum C, erit recta B C, (cum æqualis ponatur rectæ C F) rectæ C D, æqualis. Quare rectangulum B D, erit quadratum, eum latera D E, E B, d æqualia ſint oppoſitis lateribus B C, C D; atque adeo conſtitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si uero c45. primi.



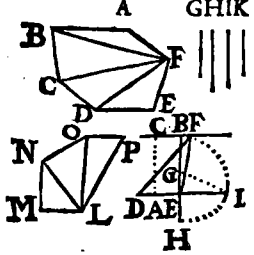
d34. primi.

punctum G, non cadit in C; facto G, centro, describatur interuallo GD, vel GF, semicirculus FHD, producaturque BC, donec circumferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ CH, esse æquale rectilineo A. Ducta enim recta GH; quia recta DF, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectangulum comprehensum sub DC, CF, hoc est, rectangulum BD, vna cum
a 5. sec. quadrato rectæ GC, *a* æquale quadrato rectæ GF, hoc est, quadrato rectæ GH; cum rectæ GF, GH, sint æquales: At quadra-
b 47. pri mi. tum rectæ GH, *b* æquale est quadratis rectarum GC, CH. Igitur rectangulum BD, vna cum quadrato rectæ GC, æquale quoque erit quadratis rectarum GC, CH. Quam ob rem dempto communi quadrato rectæ GC, remanebit rectangulum BD, hoc est, rectilineum A, quadrato rectæ CH, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum constituimus: Quod facere oportebat.

SCHOLIVM.

VERVM quia laboriosum est, rectangulum dato rectilineo multorum angulorum construere æquale, quod sæpius super datam rectam constituendum sit, ex propos. 44. lib. 1. rectangulum æquale triangulo, facilius fortasse describemus quadratum dato rectilineo æquale, si datam figuram rectilineam in triangula resoluamus, & cuilibet triangulo quadratum æquale efficiamus, hoc est, latus quadrati, quod cuiuis triangulo æquale sit, inuestigemus: quod factu facillimum est, vt mox ostendemus. Nam si per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. scripsimus, inueniamus latus alterius quadrati, quod sit omnium inuentorum laterum quadratis æquale, factum erit, quod proponitur.

VT si datum sit rectilineum ABCDEF, resoluemus illud in



triangulo ABF, FBC, CFD, DEF, inueniemusq; latera G, H, I, K, quorum quadrata sint illis ordine æqualia. Deinde angulum rectum constituemus M, & lineas LM, MN, lateribus G, H, æquales. Ducta autem recta NL, erigemus ad eam perpendicularem NO, lateri I, æqualem. Similiter ducta recta OL, excitabimus illi perpendicularem OP, lateri K, æqualem, iungemusque rectam PL.

Atq; hoc modo progrediemur, donec vltimo lateri sumpta sit perpendicularis linea æqualis, qualis hic fuit perpendicularis OP, vltimo lateri K, æqualis. Nam quadratum rectæ PL, postremo loco ducta æquale erit omnibus quadratis laterum G, H, I, K, & ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, atque adeo omnibus triangulis ABF, FBC, CFD, DEF, hoc est, datæ figuræ rectilineæ ABCDEF.

PRAXIS

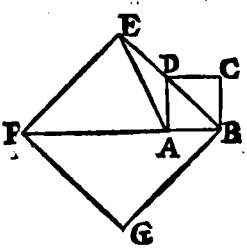
PRAXIS autem, qua cuiuis triangulo quadratum æquale inueniatur, facilis eſt. Sit enim inueniendum quadratum æquale quarto trianguli D E F, data rectilinea figura. Diuidatur quodcunque latus, nempe D E, bifariam in A, producaturque quantum libet. Ducta deinde per angulum oppoſitum F, lateri D E, parallela F B, ducatur per E, ad D E, perpendicularis H E B, ſecans F B, in B, ſitque E H, ipſi A E, dimidio lateris D E, æqualis. Poſtremo, diuiſa tota linea B H, bifariam in G, deſcribatur ex G, ad internallum G H, vel G B, arcus ſecans latus D E, productum in I. Dico quadratum lateris E I, æquale eſſe triangulo D E F. Si namque compleatur rectangulum A E C, & ſemicirculus B H, ducaturq; recta G I, oſtendemus, vt in hac propoſ. 14. quadratum ex E I, rectangulo A B, æquale eſſe. Cum ergo rectangulum A B, triangulo D E F, ſit æquale, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. quod baſis D E, ſit dupla baſis A E, conſtat propoſitum.

NON eſt tamen neceſſarium, vt rectangulum conſtruatur A B. Nam ſi fiat angulus rectus I E B, atque in B H, capiatur E H, ſemiſſi lateris D E, æqualis, & recta E B, æqualis perpendiculari ex F, in latus D E, demiſſa, ſeceturque B H, bifariam in G, auferet circumferentia ex G, circa B H, deſcripta rectam E I, cuius quadratum æquale eſt rectangulo ſub B E, E H, hoc eſt, triangulo D E F.

QVONIAM verò ſecundo hoc libro Euclides multa de quadratis, ac rectangulis parallelogrammis diſputauit, recte hic inſeri poterunt ſequentia duo problemata de quadrato, & parallelogrammo rectangulo, neque inuiucunda, neque inutilia: quorum poſterius eruditus vir, atque excellens Mathematicus, Marinus Ghetaldus Patricius Racuſinus, mihiq; familiariſſimus, ingenioſiſſimè ſanè ſoluit, & longè aliter, breuiusq;, quam à quodam alio ſolutum quondam fuit, quam ſolutionem hic ſubiungere ſuperuacaneum eſt, cum illam Marini Racuſini hic apposuerim, tanquam breuiorem, ac faciliorem.

I.

DATO exceſſu diametri alicuius quadrati ſupra latus eiuſdem; Inuenire latus ipſius quadrati.



EXCEDAT diameter alicuius quadrati latus eiuſdem recta A B, inueniendumq; ſit latus illius quadrati. Ex recta A B, deſcribatur quadratum A C, cuius diameter ducta B D, producatur ad E, vt ſit D E, recta recta A D, æqualis. Dico rectam E B, eſſe latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipſum latus B E, exceſſu dato A B. Ducatur enim E F, perpendicu-

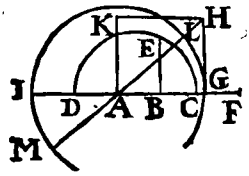
laris ad B E, quæ rectam B A, productam secet in F. Quoniam igitur in triangulo B E F, angulus F E B, rectus est, & E B F, semirectus, ex
a 32. pri *coroll. 2. propos. 4. huius lib.* a *erit & B F E, semirectus.* b *Quare recta*
mi. *B E, F E, æquales sunt. Si igitur ex F, ducatur F G, parallela ipsi B E;*
b 6. pri. *& ex B, recta B G, parallela ipsi E F, occurrens priori in G, constitu-*
c 5. pri. *tum erit quadratum rectæ B E.* c *Quod si ducatur recta A E, erunt an-*
guli A E D, E A D, æqualibus lineis D E, D A, oppositi æquales. Quare si demantur ex rectis angulis D E F, D A F, remanebunt an-
d 6. pri. *guli A E F, E A F, æquales;* d *ideoque recta E F, A F, æquales erunt. Quoniam vero diameter B F, rectam A F, superat data recta A B; superabit eadem diameter B F, latus quadrati E F, eadem recta A B. quod est propositum.*

COROLLARIVM.

ITAQVE recta composita ex diametro quadrati supra excessum datum descripti, & ex latere eiusdem quadrati, exhibet latus quadrati, quod quæritur. Eadem autem diameter cum duplo excessus, diametrum quæsiti quadrati constituit.

II.

DATIS duobus excessibus diametri alicuius parallelogrammi rectanguli supra vtrumque latus; Inuenire latera ipsius rectanguli.



SVPERET diameter minus latus recta A B, & maius recta B C. Producta A C, in vtramq; partem sumatur A D, ipsi A B, æqualis: describatque circa C D, semicirculo, erigatur ad A C, perpendicularis B E, secans circumferentiam in E, sumaturq; ipsi B E, æqualis C F. Et quia, vt ex demonstratione propos. 14. huius lib. constat, quadratum rectæ B E; æquale est rectangulo sub D B, B C, erit B E, maior quam B C, minus latus dicti rectanguli. Igitur & C F, maior erit quam B C. Sumpta ergo F G, ipsi B C, æquali, cadet punctum G, inter C, & F. Erecta autem ad A F, perpendiculari G H, ipsi B F, æquali; Dico A G, esse maius latus, & G H, minus, ita vt rectangulum quæsitum sit G K. Esse enim rectam A G, maiorem quam G H, ita probabitur: Quoniam B C, F G, æquales sunt, addita communis C G, erunt quoque B G, C F, æquales. Additis igitur inæqualibus A B, ipsi B G, & B C, ipsi C F, erit A G, maior quam B F, hoc est, quam G H: quandoquidem addita A B, maior est, quam addita B C. Esse autem A G, G H, latera quæsita, ita demonstrabitur. Descripto ex A, ad interuallum A G, circulo, ducatur per A, H, recta secans circumferentiam in L, M, & recta A D, producatur, circumferentiam

secans

secans in I. Quoniam igitur rectangulum sub B C, B D, a aequale est rectangulis sub C B, B A, & sub C B, A D, hoc est, duplum rectanguli sub excessibus A B, B C: Est autem rectangulo sub B C, D B, aequale quadratum rectae B E, vt ostendimus; erit quoque quadratum rectae B E, duplum rectanguli sub A B, B C, hoc est, quadratum rectae B E, aequale erit duplo rectanguli sub A B, B C. Addito ergo communi quadrato rectae B C, vna cum duplo rectanguli sub B G, B C, hoc est, sub C F, B C; erunt quadrata rectarum B E, sive C F, & B C, vna cum duplo rectanguli sub C F, B C, aqualia duplo rectanguli sub A B, B C, & quadrato rectae B C, vna cum duplo rectanguli sub C F, B C. Sunt autem quadrata rectarum C F, B C, vna cum duplo rectanguli sub C E, B C, b aqualia quadrato rectae B F. Igitur & quadratum rectae B F, aquale erit duplo rectanguli sub A B, B C, & quadrato rectae B C, vna cum duplo rectanguli sub C F, B C, vel sub B G, B C. Cum ergo duplum rectangulorum sub A B, B C, & sub B G, B C, aquale sit rectangulo sub I G, (quae ipsarum A B, B G, simul dupla est) & B C, vel F G; erit quoque quadratum rectae B F, aquale rectangulo sub I G, F G, vna cum quadrato rectae B C, vel F G. At rectangulo sub I G, G F, vna cum quadrato rectae F G, c aquale est rectangulum sub I F, F G. Igitur quadratum rectae B F, sive G H, aquale etiam est rectangulo sub I F, F G. Addito ergo communi quadrato rectae A G; erunt quadrata rectarum G H, A G, aqualia rectangulo sub I F, F G, vna cum quadrato rectae A G. Est autem quadratis rectarum G H, A G, d aquale quadratum rectae A H; & rectangulo sub I F, F G, vna cum aquadrato rectae A G, e aquale est quadratum rectae A F. Igitur & quadratum rectae A H, quadrato rectae A F, aquale est, rectaque A H, recta A F, aqualis: demptis aqualibus A L, A G, reliqua L H, G H, aquales erunt. Diameter ergo A H, rectanguli G K, hoc est, rectae A F, excedit maius latus A G, recta G F, sive excessu dato B C: Ipsum vero minus latus G H, sive rectam B F, ipsi G H, aqualem, excessu dato A B. Quod est propositum.

a 1. sec.
b 4. sec.
c 3. sec.
d 47. primi.
e 6. sec.

COROLLARIVM.

ITAQVE recta B E, vel C F, cuius quadratum rectanguli sub datis excessibus A B, B C, duplum est, addita minori excessui B C, efficit minus latus quaesitum B F, hoc est, G H. Eadem autem recta B E, hoc est, B G, addita maiori excessui A B, conficit maius latus quaesitum A G: Eadem denique B E, vel C F, cum vtroque excessu A B, B C, diametrum A F, vel A H, constituit.

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

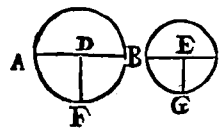
EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVM.

DEFINITIONES.

I.

ÆQVALES circuli sunt, quorum diametri sunt æquales; vel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ sunt æquales.

QVONIAM Euclides hoc 3. lib. varias circuli proprietates demonstrat, idcirco explicat prius terminos quosdam, quorum frequens in eo futurus est usus. Primum itaque docet, eos circulos esse æquales, quorum diametri, vel semidiametri æquales sunt. Cum enim circulus describatur ex circumvolutione semidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile, vt lib. 1. diximus, perspicuum est, eos circulos esse æquales, quorum semidiametri, seu rectæ ex centris ductæ, sunt æquales; vel etiam quorum totæ diametri æquales sunt. Vt si diametri A B, B C, vel rectæ D F, E G, è centris D, E, ductæ sint æquales, æquales erunt circuli A F B, & B G C. Sic etiam è contrario, si circuli sint æquales, erunt diametri, vel rectæ è centris ductæ, æquales. Ex his liquet, circulos, quorum diametri, vel rectæ ductæ ex centris sunt inæquales, inæquales esse; atque adeo illum, cuius diameter, vel semidiameter maior, maiorem. Et contra, circulorum inæqualium diametros, semidiametrosve inæquales esse, maioris quidem maiorem, & minoris minorem.

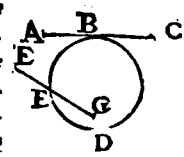


II.

RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producatur, circulum non secat.

VT recta

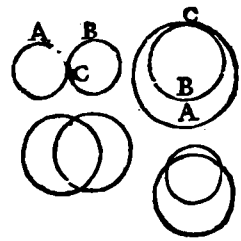
VT recta A B, si ita circulum B F D, tangat in B, & producta ad C, nulla ratione circulum secet, sed totam intra ipsum, dicetur tangere circulum. At verò recta E F, quia item eundem circulum tangit in F, & producta ad G, secet circulum, cadatq; intra ipsum, non dicetur circulum tangere, sed secare.



III.

CIRCVLI sese mutuò tangere dicuntur, qui sese mutuò tangentes, sese mutuò non secant.

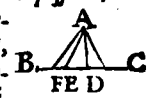
EODEM modo duo circuli A C, B C, mutuò dicuntur tangere in C, si ita sese contingant in C, vt neuter alterum secet. Est autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exterius sese circuli tangunt, vt quando vnus extra alterum est positus; aut interius, quando vnus intra alterum constituitur. Quòd si duo circuli ita se mutuò tangant, vt vnus alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuò secare, & non tangere.



IV.

IN circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, cùm perpendiculares, quæ à centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

QVONIAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, brevissima est perpendicularis, & semper eadem; aliæ verò infinitis modis variari possunt; rectè distantia illius puncti à linea illa recta accipitur penes lineam perpendicularem. Vt distantia puncti A, à recta B C, dicitur esse perpendicularis A D, non autem A E, vel A F, vel alia quauis, quæ non perpendicularis est; quia A D, omnibus est brevior, ex coroll. propos. 19. lib. 1. Immò non solum A E, A F, maiores sunt, quàm A D, sed etiam ipsæ inter se inæquales sunt. Est enim A F, a maior, quàm A E, cùm angulus A E F, sit obtusus, & A F E, acutus, & sic de alijs lineis non perpendicularibus. Quòd enim A F E, acutus sit, constat ex eo, quod in triangulo A D F, duo anguli A D F, A F D, b minores sunt duobus rectis. Hinc enim fit, cùm A D F, rectus sit, angulum A F D, recto esse minorem. Eadem ratione angulus A E D, ostendetur acutus. propterea quòd in triangulo A D E, c duo anguli A D E, A E D, minores sint.

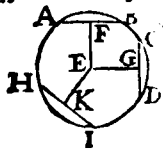


a 19 pri.

b 17 pri mi.

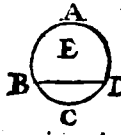
c 17. pri mi.

rei sunt duobus rectis, & A D E, rectus est) ac proinde, cùm ambo
13. pri. *A E D, A E F, æquales sint duobus rectis, erit A E F, obtusus. Hinc factum est, vt Euclides æqualem distantiam rectarum in circulo ab ipsius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem distantiam per inæquales. Vt duæ rectæ A B, C D, in circulo A B C D, æqualiter dicentur distare à centro E, si perpendiculares E F, E G, æquales fuerint. At linea C D, longiùs abesse dicetur à centro E, quàm linea H I, si perpendicularis E G, maior fuerit perpendiculari E K.*



V.

SEGMENTVM circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

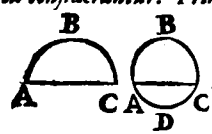


VT si ducatur in circulo A B C D, recta B D, vtcunque, dicetur tam figura B A D, contenta circumferentia B A D, & recta B D; quàm figura B C D, comprehensa recta B D, & circumferentia B C D, circuli segmentum. Ex his colligitur triplex circuli segmentum, Semicirculus, quando recta B D, per centrum E, incedit; Segmentum semicirculo maius, quando recta B D, non transit per centrum, in ipso tamen centrum existit, quale est segmentum B A D; Et segmentum semicirculo minus, extra quod centrum circuli constituitur, cuiusmodi est segmentum B C D. Id quod ad defin. 18. lib. 1. demonstrauimus. Vocatur à plerisq; Geometris recta B D, chorda, & circumferentia B A D, vel B C D, arcus.

VI.

SEGMENTI autem angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

DEFINIT iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis considerantur. Primo loco angulum segmenti, dicens angulum mixtum B A C, vel B C A, contentum sub recta linea A C, & circumferentia A B C, appellari angulum segmenti. Quod si segmentum circuli fuerit semicirculus, dicetur angulus semicirculi. Si verò segmentum maius semicirculo extiterit, vocabitur angulus segmenti maioris: Si denique segmentum minus fuerit semicirculo, angulus segmenti minoris nuncupabitur.

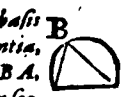


VII.

IN segmento autem angulus est, cùm in segmenti peripheria sumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ segmenti basis est, adiun-

adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is, inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehensus.

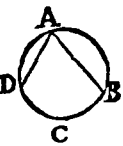
SIT segmentum circuli quòdcunque A B C, cuius basis recta A C. Ex suscepto quolibet puncto B, in circumferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema basis, rectæ lineæ B A, B C. Angulus igitur rectilineus A B C, dicitur existere in segmento A B C.

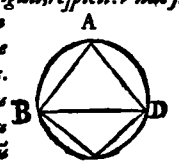


VIII.

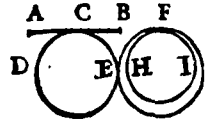
CVM verò comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquã assumunt peripheriã, illi angulus insistere dicitur.

EX puncto A, quolibet suscepto in circumferentia circuli A B C D, ducantur rectæ duæ lineæ A B, A D, ad duo extrema B, & D, circumferentiæ B C D, cuius q̃, quam quidem duæ rectæ A B, A D, assumunt. Angulus itaque rectilineus B A D, insistere dicitur circumferentiæ B C D. Perspicuum autem est, hunc angulum à præcedenti non differre, nisi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus B A D, iuxtæ præcedentem quidem definitionem dicitur esse in segmento B A D, si recta B D, basis duceretur; ex hac verò insistere circumferentiæ B C D. Non tamen confundendus est angulus in segmento aliquo, cum angulo, qui circumferentia insistit, quamuis vnus & idem sit; ad diuersa siquidem referuntur. Angulus enim in segmento, segmentum, in quo existit, angulus autem insistens circumferentia, circumferentiam, qua basis est ipsius anguli, respicit. Vnde si sumatur segmentum aliquod circuli B C D, in circulo A B C D, non erit idem angulus in hoc segmento existens, & eius circumferentia insistens. Angulus enim in eo existens, erit B C D; at eius circumferentia B C D, insistens, erit angulus B A D, qui multum ab eo differt. Quæ in re mirũ in modum hallucinati sunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nonnulli. Quòd autem angulus in segmento, & angulus circumferentia cuipiam insistens, ad diuersos arcus referantur, luce clarius patebit ex vltima propos. lib. 6. quæ solùm conuenire potest circumferentijs circulorum, quibus anguli insistunt, nõ autem in quibus existunt, vt eo in loco ostendemus. Idem quoq; facilè constat ex verbo græco βιβηκίναι, quod ascendisse significat. Ascendit enim angulus D A B, supra circumferentiam B C D.





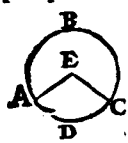
PRÆTER tres dictos angulos consideratur etiam à Geometris angulus contingentia, qui continetur linea recta tangente circulum, & circumferentia circuli; vel certè duabus circumferentijs sese mutuò tangentibus, siue hoc exterius fiat, siue interius. Exemplum. Si recta A B, tangat circulum C D E, in C, angulus mixtus A C D, vel B C E,



BCE, dicetur angulus contingentiæ, ſine contactus: Rurſus, ſi circulus CED, tangat circulum EFG, exterius in E; Item circulus HFI, circulum EFG, interius in F; appellabitur tam angulus curuilineus CEF, quàm EFH, vel GFI, angulus contactus, ſeu contingentiæ. Sunt itaque, vt vides, tres anguli contingentiæ, vnus quidem mixtus, reliqui verò duo curuilinei.

IX.

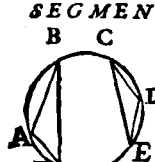
SECTOR autem circuli eſt, cùm ad ipſius circuli centrum conſtitutus fuerit angulus, comprehenſa nimirum figura & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis aſſumpta.



SI in circulo ABCD, cuius centrum E, recta AE, CE, conſtituant angulum AEC, ad centrum E; nominabitur figura AECD, contenta rectis AE, EC, & circumferentia ADC, quam prædictæ lineæ aſſumunt, Sector circuli. Ex hoc autem perſpicuè etiam colligitur, angulum, qui definitione 8. explicatur, referri ad circumferentiam, quæ ipſius baſis eſt, non autem ad eam, in qua exiſtit, vt multi interpretes exiſtimarunt. Nam ſicut in hac definitione Euclides intelligit circumferentiam ADC, quæ baſis eſt anguli ad centrum conſtituti, quando mentionem facit peripheriæ à rectis AE, CE, aſſumptæ; Ita quoque in illa intellexiſſe eum neceſſe eſt nomine peripheriæ, quam rectæ lineæ aſſumunt, eam, quæ baſis eſt anguli ad circumferentiam conſtituti; quandoquidem in vtraque definitione vſus eſt eodem verbo græco ἀπολαμβάνω.

X.

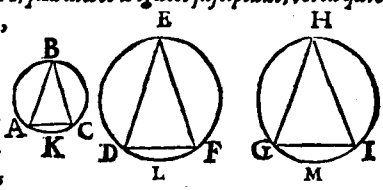
SIMILIA circuli ſegmenta ſunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter ſe ſunt æquales.



SEGMENTA videlicet ABDF, DCAE, eiuſdem circuli ABCDEF, quæ capiunt hos duos angulos AEF, ACE, æquales: vel, quod idem eſt, in quibus ijdem anguli æquales exiſtunt, iuxta 7. definitionem, ſimilia dicuntur, & ipſa circumferentia quoque ABDF, DCAE, ſimiles.

EODEM modo ſegmenta diuerſorum circulorum tam æqualium, quàm inæqualium, à Geometris dicuntur ſimilia, quæ vel ſuſcipiunt æquales angulos; vel in quibus æquales anguli

guli existunt. Vt si in circulis A B C K, D E F L, G H I M, anguli A B C, D E F, G H I, fuerint aequales, dicentur segmenta, seu circumferentia A B C, D E F, G H I, quae dictos angulos suscipiunt, vel in quib. praedicti anguli existunt,

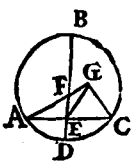


similes. Consistit autem hac segmentorum, circumferentiarúmve similitudo in eo, quod qualis pars est vna circumferentia totius suae circumferentiae, talis quoque sit altera circumferentia, quae dicitur huic similis, totius suae circumferentiae; ita vt qualis, & quanta pars est circumferentia A B C, totius circumferentiae A B C A, talis & tanta quoque pars sit circumferentia D E F, totius circumferentiae D E F D; Item talis, & tanta circumferentia G H I, totius circumferentiae G H I G, Vel potius segmentorum similitudo in hoc consistit, quòd segmenta, seu circumferentia similes, ad totas circumferentias suas eandem habeant proportionem. Quòd autem segmenta, quae vel aequales suscipiunt angulos, vel in quibus existunt aequales anguli, sint huiusmodi, demonstrabimus propositione vltima lib. 6. Nunc satis sit, talia segmenta circulorum, vel etiam arcus, circumferentiasve, appellari similes.

EADEM ratione dicuntur arcus, vel circumferentia similes, quibus aequales anguli, iuxta defin. 8. insistunt. Vt si in ijsdem circulis anguli A B C, D E F, G H I, sint aequales, dicentur arcus, circumferentiaeve A K C, D L F, G M I, quibus insistunt similes. Immò si anguli ad centra insistentes arcubus A K C, D L F, G M I, sint aequales, erunt adhuc ipsi arcus similes. Id quod à nobis in scholio propos. 22 huius lib. demonstrabitur.

PROBL. 1. PROPOS. 1. j.

DATI circuli centrum reperire.



SIT circulus datus A B C D, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque A C, a quae bifariam diuidatur in E, & per E, ad A C, perpendicularis agatur B D, vtrinque in peripheria terminata in punctis B, D. Hac igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta B D, aliud punctum, praeter F, non erit centrum, cùm omne aliud punctum ipsam diuidat inaequaliter, quandoquidem in F, diuisa fuit aequaliter. Si igitur F, non est centrum, sit punctum G, extra rectam B D, centrum, à quo ducantur lineae G A, G E, G C. Quoniam ergo latera A E, E G, trianguli A E G, aequalia sunt lateribus C E, E G, trianguli C E G; & basis A G, basi

a 10. *pri.*

a 8. pri. AG, basi CG; (à centro enim duci dicuntur) a erunt anguli AEG, CEG, æquales, ideoq; recti; Erat autem & angulus AEF, rectus ex constructione. Igitur recti AEF, AEG, æquales sunt, pars & totum. quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademq; est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaq; dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod BD, recta rectam AC, bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensum fuit, puncti eius medium F, necessariò esse circuli centrum.

ij. THEOR. 1. PROPOS. 2.

SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.



IN circulo ABC, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circumferentia. Dico rectam ex A, in C, ductã cadere intra circulum, ita vt ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea ADC, recta, vt vult aduersarius. Inuento b igitur centro E, ducãtur ab eo ad puncta assumpta A, & C, nec non ad quoduis punctum D, in recta ADC, lineæ rectæ EA, EC, ED, secetq; ED, circumferentiam in B. Quoniam ergo duo latera EA, EC, trianguli, cuius basis ponitur recta ADC, æqualia sunt, (è centro enim ducuntur) c erunt anguli EAD, ECD, æquales: d Est autem angulus EDA, d angulo ECD, maior, externus interno opposito, cùm latus CD, in triangulo ECD, sit productum ad A. Igitur & angulo EAD, maior erit idem angulus EDA, Quare recta EA, maiori angulo ADE, opposita, hoc est, recta EB, sibi æqualis, e maior erit, quàm recta ED, minori angulo DAE, oppositæ, pars quàm totum. Quod est absurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur, rectam ductam ex A, in C, non posse cadere super arcum ABC, ita vt eadem sit, quæ circumferentia ABC. Esset enim recta EA, maior, quàm recta EB. Quod etiam ex definitione rectæ lineæ patet, cùm ABC, arcus sit linea curua, non autem recta. Itaque si in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.

b 1. tertij.

c 5. pri.

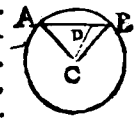
d 16. pri.

e 19. pri.

SCHOLIVM.

IDEM hoc theorema demonstrari poterit affirmatiuè, hoc modo. Recta AB, contingat duo puncta A, & B, in circumferentia circuli AB,

AB, cuius centrum C. Dico rectam AB, intra circulum cadere, ita vt omnia eius puncta media intra circulum existant. Assumatur enim quodcunque eius punctum intermedium D, & ex centro educantur rectæ CA, CB, CD. Quoniam igitur duo latera CA, CB, trianguli CAB, æqualia sunt, a *erunt anguli CAB, CBA, æquales: Est autem angulus CDA,* b *angulo CBA, maior, externus interno. Igitur idem angulus CDA, angulo CAD, maior erit, & ob id latus CA,* c *latere CD, maius erit. Quare cùm CA, sit ducta a centro ad circumferentiam, vsque, non perueniet recta CD, ad circumferentiam, ideoq; punctum D, intra circulum cadet. Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto. Tota igitur recta AB, intra circulum cadit. Quod est propositum.*



a 5. pri.
b 16. pri.
c 19. pri.

COROLLARIVM.

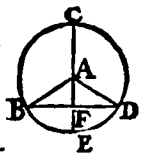
HINC est manifestum, lineam rectam, quæ circulum tangit, ita vt eum non secet, in vno tantùm puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, *d* caderet pars rectæ inter ea duo puncta posita intra circulum. Quare circulum secaret, quod est contra hypothesin.

d 2. ter.

THEOR. 2. PROPOS. 3. iij.

SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

PER centrum A, circuli BCD, recta CE, extensa diuidat rectam BD, non per centrum extensam, bifariam in F. Dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi BD. Ductis enim rectis AB, AD, erunt duo latera AF, FB, trianguli AFB, duobus AF, FD, trianguli AFD, æqualia; & bases AB, AD, æquales. *e* Igitur anguli AFB, AFD, æquales erunt, hoc est, recti. Quod erat primò propositum.



e 8. pri.

SIT iam AF, ad angulos rectos ipsi BD. Dico rectam BD, bifariam secari in F, à recta CE. Ductis enim iterum rectis AB, AD; cùm latera AB, AD, trianguli ABD, sint æqualia, *f* erunt anguli ABD, ADB, æquales. Quoniam igitur duo anguli AFB, ABF, trianguli ABF, æquales sunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF; & latera AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque: *g* erunt latera FB, FD, æqualia. Quod secundò proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extensa, &c. Quod demonstrandum erat.

f 5. pri.
g 6. pri.

FACILE quoque demonstrari poterat secunda hæc pars, quæ quidem conuersa est primæ partis, hac ratione. Si enim AF, perpendicularis est ad BD, erit tam quadratum rectæ AB, æqua-

a47 pri mi. æquale quadratis rectarum AF, FB, quàm quadratum rectæ AD, quadratis rectarum AF, FD. Cùm igitur quadratum rectæ AB, æquale sit quadrato rectæ AD; erunt & quadrata rectarum AF, FB, æqualia quadratis rectarum AF, FD. Quare dempto cõmuni quadrato rectæ AF, remanebunt quadrata rectarum FB, FD, æqualia; atque idcirco & rectæ FB, FD, æquales erunt.

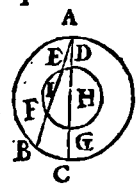
COROLLARIVM.

EX hac demonstratione facilè inferemus, in quouis triangulo duorum laterum æqualium, siue æquilaterum illud sit, siue Isosceles, lineam, quæ basin bifariam secet, perpendicularem esse ad basin. Et contrà, lineam, quæ ad basin sit perpendicularis, basin secare bifariam. Nam in triangulo ABD, cuius duo latera AB, AD, æqualia sunt, atque adeò ex centro A, per B, D, circulus describi potest: ex eo, quod recta AF, secat basin BD, bifariam, ostensum est, angulos ad F, esse rectos: Et ex eo, quòd anguli ad F, recti sunt, demonstratum est, basin BD, à recta AF, bifariam secari. Sed hoc etiam demonstrauimus ad propos. 26. lib. 1. & quidem vniuersalius.

SCHOLIVM.

CENSEMVS quoque, demonstrandum esse hoc loco sequent theorema, ad ea, quæ sequuntur, non inutile; videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis, si ab aliquo puncto circumferentiæ exterioris recta ducatur interioris circumferentiam secans; erunt eius segmenta inter vtramque circumferentiam posita, inter se æqualia.



DVO circuli ABC, DEFG, habeant idem centrum H, & ex puncto A, ducatur primum per centrum H, recta AC, secans circumferentiam interiorem in D, G. Dico rectas AD, CG, æquales esse. Nã si ex HA, HC, quæ b *æquales sunt, demantur HD, HG, quæ eadem ratione æquales sunt,* c *erunt recta AD, CG, æquales.*

b15. def. c4. prænun.

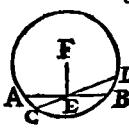
DEINDE ex eodem puncto A, ducatur recta AB, non per centrum, secans interiorem circumferentiam in E, F. Dico rursus, rectas d12. pri. c 3. ter. *AE, BF, esse æquales.* d *Ducta enim ex centro H, ad AB perpendicularis HI,* c *secabit hæc tam rectam AB, in circulo ABC, quàm rectam EF, in circulo DEFG, bifariam. Ablatis igitur æqualibus* f3. pron. *IE, IF, ex æqualibus IA, IB,* f *remanebunt AE, BF, æquales. quod est propositum.*

iiij. THEOR. 3. PROPOS. 4.

SI in circulo duæ rectæ lineæ seſe mutuò secent non per centrum extensæ; seſe mutuò bifariam non secabunt.

DVÆ

DVÆ rectæ AB, CD, ſe mutuò in E, ſecent in circulo ACBD, non per centrum extenſæ. Dico fieri non poſſe, vt mutuò ſeſe bifariam ſecent. Si enim vna earum per centrum tranſit, certum eſt, eam bifariam non ſecari: ſolùm enim in centro, per quod altera ponitur non tranſire, bifariam diuiditur: Si verò neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquam bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minimè ſecabitur bifariam. Diuiſa enim ſit & AB, & CD, ſi fieri poteſt, bifariam in E. *a* Inuento igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta FE. Quoniam ergo FE, ponitur ſecare rectam AB, bifariam in E, *b* ſecabit ipſam ad angulos rectos. Eadem ratione ſecabitur CD, ad angulos rectos, cùm ponatur bifariam diuidi in E. Quare rectus angulus FED, recto angulo FEB, æqualis eſt, pars toti, quod eſt abſurdum. Itaque ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecent, &c. Quod erat demonſtrandum.



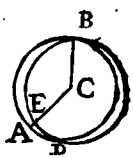
a 1. *ter.*

b 3. *ter.*

THEOR. 4. PROPOS. 5. v.

SI duo circuli ſeſe mutuò ſecent; non erit illorum idem centrum.

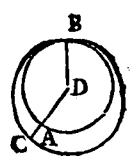
DVO circuli ABD, EBD, ſe mutuò ſecent in B, & D. Dico ipſos non habere idem centrum. Sit enim, ſi fieri poteſt, idem centrum vtriuſque, C, à quo duæ rectæ ducantur; CB, quidem ad ſectionem B; CA, verò ſecans vtramq; circumferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli EBD, erit recta EC, rectæ BC, æqualis. Rurſus quia C, centrum quoque ponitur circuli ABD, erit & recta AC, eidem rectæ BC, æqualis. Quare rectæ EC, AC, *c* æquales inter ſe erunt, et *prem.* pars, & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe mutuò ſecent, &c. Quod oſtendendum erat.



THEOR. 5. PROPOS. 6. vj.

SI duo circuli ſeſe mutuò interius tangant; eorum non erit idem centrum.

DVO circuli AB, BC, ſe interius tangant in B. Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, ſi fieri poteſt, idem centrum D, à quo duæ rectæ ducantur; DB, quidem ad tactum B. At DC, ſecans vtramq; circumferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli AB, erit recta AD, rectæ BD, æqualis. Rurſus quia D, ponitur centrum circuli BC, erit recta CD, eidem rectæ BD, æqualis. Quare rectæ AD, & CD; *d* inter ſe erunt æquales, pars & totum, quod eſt abſurdum.



d 1. *prem.*

ſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe mutuò interius tangant, &c. Quod demonſtrandum erat.

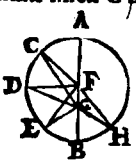
SCHOLIVM.

EVCLIDES propoſuit theoremα hoc de circulis ſeſe interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius ſeſe tangentium, cùm vnus ſit extra alium, non poſſe eſſe idem centrum, manifeſtum eſt.

viij. THEOR. 6. PROPOS. 7.

SI in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima verò reliqua; aliarū verò propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore ſemper maior eſt: Duæ autem ſolùm rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtraſq; partes minimæ, vel maximæ.

IN diametro AB, circuli ACDEB, cuius centrum F, punctum aſſumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ GC, GD, GE. Dico omnium, quæ ex G, ad circumferentiam ducuntur, maximam eſſe GA, in qua eſt centrum, minimam verò reliquam GB, quæ diametrum perficit: Deinde rectam GC, quæ rectæ GA, per centrum ductæ propinquior eſt, maiorem rectæ GD, quæ ab eadem GA, plus diſtat; & eadem ratione GD, maiorem rectæ GE, atque ita de aliis lineis, ſi ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad vtraſque partes minimæ lineæ GB, vel maximæ GA, duci poſſe tantummodò duas lineas inter ſe æquales. Ducantur è centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ FC, FD, FE. Quoniam igitur duo latera GF, FC, trianguli GFC, a maiora ſunt latere GC. Sunt autem rectæ GF, FC, æquales rectis GF, FA, hoc eſt, toti rectæ GA; erit & GA, maior quàm GC. Eadem ratione maior erit recta GA, quàm GD, & quàm GE. Quare GA, maxima eſt omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.



a 20. primi.

DEINDE, quoniam in triangulo EFG, latus EF, b minus eſt duobus lateribus FG, GE. Eſt autem EF, ipſi FB, æqualis; erit & FB, minor duabus rectis FG, GE. Dempta ergo communi recta FG, remanebit adhuc GB, minor, quàm GE. Eadem ratione minor erit GB, quàm GD, & quàm GC. Quare GB, minima eſt omnium, quæ ex G, in circuli circumferentiam cadunt.

b 20. primi.

RVRSVS, quia duo latera GF, FC, trianguli GFC, æqualia ſunt

unt duobus lateribus G F, F D, trianguli G F D; & angulus totus G F C, maior eſt angulo G F D; a erit baſis G C, maior baſe G D. a 24. pri.
Eadem ratione maior erit G C, quàm G E: Item maior erit G D, quàm G E. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior eſt ea, quæ remotior. m.

FIAT iam angulo B F E, ex altera parte æqualis angulus B F H, & ducatur recta G H. Quoniam igitur latera E F, F G, trianguli E F G, æqualia ſunt lateribus H F, F G, trianguli H F G, & anguli his lateribus contenti E F G, H F G, æquales; b erunt rectæ b 4. pri.
G E, G H, ex vtraque parte ipſius lineæ minimæ G B, vel maximæ G A, æquales inter ſe. Quòd autem nulla alia his duabus poſſit eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex G, ducatur alia, quæ cadat ſupra punctum H, erit ea, cùm ſit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, maior quàm G H: ſi verò cadat infra H, erit ea, cùm ſit remotior ab eadem G A, per centrum ducta, minor quam G H, vt oſtenſum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad vtraſque partes minimæ G B, vel maximæ G A, cadunt. Itaque ſi in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, &c. Quod erat demonſtrandum.

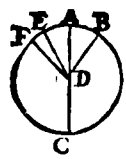
SCHOLIVM.

QVANQVAM autem Euclides ſolùm demonſtrauerit, lineam, quæ propinquior eſt rectæ per centrum ductæ, remotiore eſſe maiorem, ſi ambæ lineæ ex eadem parte diametri AB, exiſtant: idem tamen verum etiam eſt, ſi ad diuerſas partes ductæ ſint. Vt ſi quis dicat, rectam G D, propinquiorem eſſe rectæ G A, quàm rectam G H; dico G D, maiorem eſſe, quàm G H. Si namque ipſi G H, ex altera parte æqualis ducatur G E, vt dictum eſt, nempe ſi fiat angulo G F H, æqualis angulus G F E, &c. cadet punctum E, inter D, & B; quod G H, G E, æqualiter à G A, diſtent, ob æqualitatem angulorum G F H, G F E; & G D, ponatur minùs diſtare quàm G H, ac proinde minùs, quàm G E. Cùm c ergo G D, maior c 7. tert.
ſit, quàm G E, maior quoque erit eadem G D, quàm G H.



HANC porrò propoſitionem nonnulli conuertunt, hoc modo.

SI intra circulum punctum ſumatur, ab eoque puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima ſit, vna verò minima; & reliquarum aliæ ſint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum tranſibit, minima verò erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt maximę propinquiores, æquales autem ab eadem maxima, vel minima æqualiter diſtabunt.



IN circulo A B C, punctum ſumatur D, à quo rectæ quotcunque D A, D C, D E, D F, D B, cadant in circumferentiam, quarum omnium maxima ſit D A, minima verò D C; ipſarum verò D E, D F, maior ſit D E; denique D E, D B, ſint æquales. Dico D A, per centrum tranſire, & D C, reliquam partem eſſe diametri, hoc eſt, D C, ipſi D A, eſſe in directum. Item D E, quæ maior ponitur quàm D F, propinquiorem eſſe maximæ D A, quàm D F. Denique D E, D B, æqualiter ab eadem D A, vel D C, abeſſe. Primum enim ſi D A, non tranſit per centrum; ducta ex D, per centrum recta

a 7. ter. *quapiam linea, a erit ea omnium ex D, cadentium maxima. Quod eſt abſurdum; cùm D A, maxima ponatur. Tranſit ergo D A, per centrum.*

DEINDE ſi D C, non eſt in directum ipſi D A; protracta A D,

b 7. ter. *in directum, b erit alia recta quàm D C, ex D, cadens, nempe pars ipſius A D, protracta, omnium minima; Quod eſt abſurdum; cùm D C, minima ponatur. Eſt ergo D C, reliqua pars diametri.*

RVRSVS ſi D E, non eſt vicinior maximæ D A, quàm D F; aut æqualiter diſtabunt ab ea, aut D E, longiùs ab ea aberit: Si æqualiter

c 7. ter. *vtrinq; à D A, dicantur diſtare, c ipſæ erunt æquales; quod eſt abſurdum. Ponitur enim D E, maior. Si verò æqualiter ex eadem parte à D A, diſtare dicantur, erunt D E, D F, vna eademq; linea; atq; adeò D E, maior non erit, quàm D F, quod eſt contra hypotheſin. Quod ſi*

d 7. ter. *D F, dicatur eſſe propinquior maximæ D A, d ipſa erit maior, quàm D E. Quod magis eſt abſurdum.*

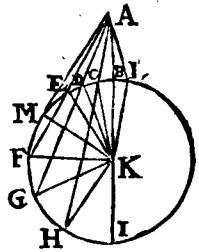
POSTREMO ſi D E, D B, non æqualiter diſtant à D A, vel

e 7. ter. *D C, e erit ea, quæ magis à D A, diſtat, reliqua minor. Quod eſt abſurdum. Ponuntur enim æquales D E, D B.*

viij. THEOR. 7. PROPOS. 8.

SI extra circulum ſumatur punctum quodquiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ verò vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt; In conuexam verò peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarũ autem ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ autem tantùm rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſq; partes minimæ, vel maximæ.

EX puncto A, extra circulum B C D E, cuius centrum K, lineæ ſecantes circulum ducantur, quarum A I, per centrum tranſeat, aliæ verò A H, A G, A F, vtcunque. Dico omnium eſſe maximam A L, quæ per centrum incedit: Deinde rectã A H, quæ rectæ A I, quæ per centrum ducitur, propinquior exiſtit, maiorem recta A G, quæ remotior eſt ab eadem A I: Et eadem ratione A G, maiorem quàm A F. E contrario autem, rectam A B, omnium, quæ extra circulum ſunt, minimam eſſe: Deinde rectam A C, quæ vicinior eſt minimæ A B, minorem eſſe recta A D, remotiore; Et eadem ratione, ipſam A D, minorem, quàm A E. Denique ex A, ad vtraſque partes minimæ lineæ A B, vel maximæ A I, duoi poſſe tantummodò duas lineas rectas inter ſe æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ K C, K D, K E, K F, K G, K H. Quoniã igitur duo latera A K, K H, trianguli A K H, *a* maiora ſunt recta A H, Sunt autem rectæ A K, K H, æquales rectis A K, K I, hoc eſt, toti rectæ A I;



a 20 primi.

erit & A I, maior quam A H. Eadem ratione erit A I, maior, quàm A G, & quàm A F. Quare A I, eſt omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.

DEINDE, quoniam latera A K, K H, trianguli A K H, æqualia ſunt lateribus A K, K G, trianguli A K G; Et angulus totus A K H, maior eſt angulo A K G; *b* erit baſis A H, baſe A G, maior. Eadem ratione maior erit A H, quàm A F: Item A G, maior, quàm A F. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior eſt linea remotiore.

b 24 primi.

RVRSVS, quia in triangulo A C K, recta A K, *c* minor eſt duabus A C, C K; ſi auferantur æquales B K, C K: remanebit adhuc A B, minor, quàm A C. Simili ratione erit A B, minor, quàm A D, & quàm A E. Quare A B, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima eſt.

c 20. primi.

RVRSVS, cùm intra triangulum A D K, cadant duæ rectæ A C, C K, ab extremitatibus lateris A K; *d* erunt A C, C K, minores, quàm A D, D K, Sublatis igitur æqualibus C K, D K, remanebit adhuc A C, minor quàm A D. Pari ratione erit A C, minor, quàm A E: Item A D, minor quàm A E. Quare linea propinquior minimæ lineæ A B, minor eſt, quàm remotior ab eadem.

d 21. primi.

POSTREMO fiat angulo A K C, angulus A K L, æqualis, & ducatur recta A L. Quoniam igitur latera A K, K C, trianguli A K C, æqualia ſunt lateribus A K, K L, trianguli A K L; Sunt autem & anguli A K C, A K L, dictis lateribus contenti æquales; *e* erunt rectæ A C, A L, ex vtraque parte minimæ A B, vel maximæ A I, in-

e 4. primi.

A I, inter ſe æquales. Quòd autem nulla alia his poſſit eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex A, ducatur recta cadens vltra L, erit ipſa, cùm ſit remotior à minima, maior quàm A L. Quod ſi cadat inter B, & L, erit ea, cùm ſit minimæ propinquior, minor quàm A L, vt oſtenſum eſt. Duæ igitur ſolùm rectæ lineæ æquales ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EADEM ratione ab A, in peripheriam concauam duæ tantùm lineæ æquales, cadent, ad vtraſque partes maximæ A I.

FIAT enim angulo A K H, æqualis angulus A K M, iungaturque recta A M. Quia igitur latera A K, K H, æqualia ſunt lateribus A K, K M; ſunt autem & anguli A K H, A K M, æquales: a *erunt baſes A H, A M, æquales. Neque verò vlla alia his duabus æqualis exhiberi poteſt. Nam quæcunque ex A, ducatur ad partes H; ea vel maior erit, vel minor, quàm A H, prout extra vel vltra rectam A H, ducta fuerit, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione theorematis.*

a 4. pri.



HÆC propoſitio vera etiam eſt, quando vna linearum ex A, cadentium circulum tangit. Hac enim quia longius à linea per centrum ducta abeſt, minor erit omnibus aliis in cauam peripheriam cadentibus, qualis eſt recta A M, in priori figura. Nam ducta recta K M, ex centro ad contactum, erunt duo latera A K, K F, trianguli A K F, æqualia duobus lateribus A K, K M, trianguli A K M, angulus verò b *A K F, angulo A K M, maior. Igitur* b *baſis A F, baſe A M, maior erit. Eadem ratione maior erit quæcunque alia in cauam peripheriam cadens, quàm recta A M.*

b 24. pri mi.

PARI ratione eadem linea tangens A M, maior erit omnibus aliis in conuexam peripheriam cadentibus. Nam cùm duo latera A E, c *E K,* c *minora ſint duobus lateribus A M, M K: ſi auferantur æquales rectæ K E, K M, erit reliqua A E, minor quàm reliqua A M. Eademq; ratio eſt de cæteris.*

c 21. pri.

QVAM QVAM verò Euclides ſolùm demonſtrauerit, lineam propinquiorem ei, qua per centrum ducitur, maiorem eſſe remotiore: Item lineam propinquiorem minima minorem eſſe remotiore, ſi ambæ lineæ ex eadem parte maximæ, vel minimæ exiſtant: idem tamen verum etiam eſt, ſi ad diuerſas partes ductæ ſint. Quod non aliter demonſtrabitur, quàm idem in ſcholio precedentis propoſitionis de duabus lineis ad diuerſas partes ductis demonſtratum fuit.

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 9.

SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quàm duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

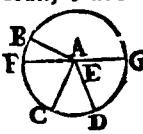
A puncto assumpto A, in circulo B C D, cadant plures rectæ, quàm duæ, A B, A C, A D, inter se æquales. Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis B C, C D; quibus diuisis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ A E, A F. Quoniã igitur latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus A E, E C, trianguli A E C; & bases A B, A C, ponuntur etiam æquales; *a* erunt anguli A E B, A E C, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cùm rectæ A E, A F, diuidant rectas B C, C D, bifariam, & ad angulos rectos, transibit vtraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo se mutuò secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret vtraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.



a 8. pri.

ALITER. Si punctum A, non est centrum circuli, *b* sit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter F G. Quoniam igitur in diametro F G, præter centrum acceptum est punctum A, à quo in circumferentiam cadunt rectæ A D, A C; *c* erit recta A D, quæ propinquior est rectæ A G, per centrum E, ductæ maior, quàm recta A C, remotior ab A G, quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ A D, A C. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter A, centrum ponatur.

b 1. 10.



c 7. 10.

QVOD si quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum vna trium æqualium datarum, vt si dicantur æquales tres A B, A F, A C, vbi E A, coincidit cum A F; *d* erit A F, omnium à puncto A, cadentium minima, atque adeò minor, quàm A B, & A C. quod est absurdum. Ponitur enim vtriq; æqualis.

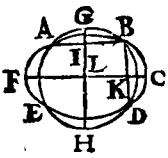
d 7. 10.

THEOR. 9. PROPOS. 10.

CIRCVLVS circulum in pluribus, quàm duobus, punctis non secat.

SECET enim, si fieri potest, circulus A B C D E F, circulum A G B D H E, in pluribus, quàm duobus, punctis A, B, & D, quæ tan-

a 10. pri. b 11. pri.

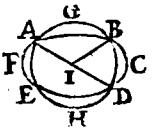


gantur rectis AB, BD: quibus *a* bifariam diuisis in I, & K, *b* educantur ex I, & K, ad AB, & BD, perpendiculares IL, KL. Quoniam igitur rectæ IL, KL, secant rectas AB, BD, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; transibit vtraque, ex corollario propos. 1. huius lib. per centrum ipsius. Quare punctum L, in quo se diuidunt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli ABCDEF. Duo igitur circuli se mutuò secantes idem possident centrum, *c* quod est absurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat, Quod erat demonstrandum.

c 5. ter.

ALITER. Secent se ijdem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A, B, & D. *d* Inuentum autem sit I, centrum circuli AGBDHE, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ IA, IB, ID, quæ per defin. circuli æquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulum ABCDEF, assumptum est punctum I, à quo cadunt in circumferentiam plures, quàm duæ, rectæ æquales, *e* erit I, centrum circuli ABCDEF. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE. Duo ergo circuli se mutuò secantes habent idem centrum. *f* Quod est absurdum.

d 1. ter.



e 9. ter.

f 5. ter.

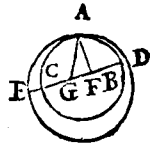
xj. THEOR. 10. PROPOS. 11.

SI duo circuli sese intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TANGAT circulus ABC, circulum ADE, intus in A, & sit F, centrum circuli ABC, & G, centrum circuli ADE, quod necessariò ab illo diuersum erit, cùm duo circuli interius se tangentes, *g* non possint idem centrum habere. Dico rectam extensam per G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit, secet vtrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur AF, AG. Quoniam igitur in triangulo AFG, duo latera GF, FA, *h* maiora sunt latere GA; Est autem GA, recta rectæ GD, æqualis; (quod G, positum sit centrum circuli ADE) erunt & GF, FA, rectæ maiores recta GD. Dempto igitur communi GF, remanebit FA, maior, quàm FD. Quare cùm FA, æqualis sit ipsi FB; (quod F, positum fuerit centrum circuli ABC) erit & FB, maior, quàm FD, pars quàm totum, quod est absurdum.

g 6. ter.

h 20. pri.



QVOD si quis velit contendere F, esse centrum circuli ADE,

ADE, & G, centrum circuli A B C, instituetur argumentatio hac ratione. In triangulo A F G, duo latera F G, G A, *a* maiora sunt latere F A: Est autem recta F A, rectæ F E, æqualis. (cum F, ponatur centrum circuli A D E.) Igitur rectæ F G, G A, maiores sunt recta F E. Dempta ergo communi F G, remanebit G A, maior, quam G E. Quia igitur G A, æqualis est ipsi G C: (propterea quod G, ponitur esse centrum circuli A B C,) erit quoq; G C maior, quam G E, pars quam totum, quod est absurdum. Idem absurdum sequetur, si centrum maioris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta F G, extensa vtrumque circulum secabit, sed in contactum A, cadet. Quare si duo circuli sese intus cõtingant, &c. Quod erat demonstrandum.

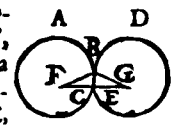


a 20. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 12. xj.

SI duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactũ transibit.

CIRCVLI duo A B C, D B E, tangant se exterius in B, & centrum circuli A B C, sit F, circuli verò D B E, centrum sit G. Dico rectam extensam per F, & G, transire per contactum B. Si enim non transit, secet circumferentias in C, & E, ducanturque à centris F, G, ad B, contactum rectæ F B, G B. Quoniam igitur in triangulo F B G, latera duo B F, B G, *b* maiora sunt latere F G: Est autem recta B F, rectæ F C, æqualis: (quod F, ponatur centrum circuli A B C,) & recta G B, rectæ G E, æqualis; (quod G, ponatur centrum circuli D B E,) erunt & rectæ F C, G E, maiores quam recta F G, pars quam totum, (cum F G, contineat præter F C, G E, rectam adhuc C E,) quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

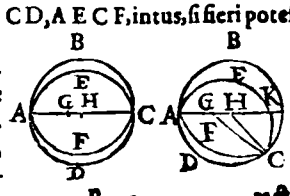


b 20. primi.

THEOR. 12. PROPOS. 13. xij.

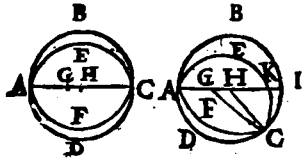
CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, siue intus, siue extra tangat.

TANGANT sese circuli A B C D, A E C F, intus, si fieri potest, in pluribus punctis, quam vno, A, & C: Assumantur autem centra horum circulorũ G, H, *c* quæ diuersa erunt, per quæ recta G H, in vtramque partem extendatur, quam necesse est *d* cadere in con-



c 6. tert.

d 11. tert.



tactus A, & C. Itaque cum G, sit centrum, & recta A G H C, diameter, diuidetur A G H C, bifariam in puncto G. Simili ratione diuidetur eadem A C, bifariã in H, quod est absurdum. Vna enim recta in vno duntaxat puncto diuiditur bifariam. Si namque G C, est dimidium totius A C, erit necessario H C, dimidio minor, cum sit pars dimidij G C.

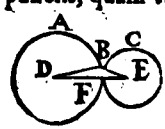
QVOD si quis dicat rectam G H, extensam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At verò ad partes H, minime pertinere ad contactum C, sed secare vtrumque circulum in I, & K, vt in secunda figura perspicuum est: (Dicere enim quis posset, in præcedenti propos. ostensum esse, rectam per duo centra circulorum sese intus tangentium ductam cadere in vnum duntaxat contactum, non autem in alterum, quod tamen nemo rectè affirmare poterit, cum demonstratio præcedentis propos. vtrique contactui conueniat. Sed quicquid dicat aliquis, ostendemus, absurdum illud esse) ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ G C. H C. Ponatur igitur primo G, centrum circuli, A B C D: & H, centrum circuli A E C F. Et quia in triangulo G H C, duo latera G H, H C, *a* maiora sunt latere G C: Sunt autem rectæ G H, H C, æquales ipsi G K: (quod H C, H K, ex centro H, sint æquales, & G H, communis) & recta G C, rectæ G I; (quod sint ex G, centro) erit quoque recta G K, maior quam G I, pars quam totum, quod est absurdum. Ponatur secundo G, centrum circuli A E C F; & H, centrum circuli A B C D. Quoniam igitur rectæ H G, G C, *b* maiores sunt recta H C; Est autem H C, æqualis rectæ H A: (cum vtraque ducta sit ex centro H,) erunt quoque H G, G C, maiores recta G A. Quare dempta communi H G, erit G C, maior, quam G A, quod est absurdum, cum vtraque ex centro G, ducatur. Non igitur circuli intus se tangent in pluribus punctis, quam vno.

a 20. *primi*

b 20. *primi*

TANGANT se iam circuli A B, C B, exterius in pluribus punctis, quam vno prope F. Ducatur ex D, centro circuli A B, ad B, centrum circuli C B, recta D E, *c* quæ per contactum F, necessario transibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, se tangunt, tangant sese in B. Ductis igitur rectis D B, E B, erunt rectæ D B, E B, æquales rectis D F, E F, hoc est, ipsi D E: *d* Sunt autem & maiores, quod est absurdum. Non ergo se tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam vno.

c 11. *ter.*



d 20 *primi*

ALITER. Si circuli A B, C B, exterius se tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta B F, cadet ipsa intra vnum circulo-

rum, per

rum, per 2. propoſ. huius tertij lib. & ideo extra alium, quod eſt contra eandem propoſ. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SI recte conſideretur Euclidis demonſtratio, qua probauit, circulum à circulo intus non poſſe tangi in pluribus punctis, quam vno, videtur ea potiſſimum concludere, circulum non poſſe tangi à circulo in duobus, vel pluribus punctis, qua longo interuallo à ſe diſſideant, non autem eundem contactum plura puncta habere non poſſe; quamuis facile hoc ipſum eodem argumento fere demonſtrari poſſit. Quare vt omni ex parte confirmatum relinquatur, circulum non poſſe tangere circulum in pluribus punctis, quam vno, oſtendemus breuiter, in vno eodemque contactu non poſſe eſſe plura puncta, quam vnum. Tangat enim circulus A B C, circulum A B D, prope A; & per eorum centra E, & F, a qua diuerſa ſunt, recta ducatur E F, b qua ad contactum peruenire neceſſario, vt ad punctum A. Dico igitur, hos circulos ſeſe duntaxat tangere in puncto A. Si enim ſe tangant in alio etiam puncto, vt in B; ductis ex B, ad centra E, & F, rectis B E, B F, c erunt recta E F, F B, maiores recta E B. Eſt autem recta E B, æqualis rectæ E A, cum vtraque ſit ex centro E. Igitur & recta E F, F B, maiores erunt recta E A. Quare dempta communi E F, remanebit F B, maior, quam F A, quod eſt abſurdum, cum F B, F A, cadant è centro F, ad circumferentiam, ideoque ex circuli defin. æquales exiſtant. In ſolo ergò puncto A, ſe mutuo tangent circuli A B C, A B D, & non in alio.

a 6. ter.

b 11. ter.



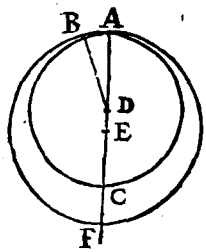
c 10. primi.

NON videtur etiam omittendum hoc loco ſequens theorema, videlicet.

SI in ſemidiametro circuli producta punctum vltra centrum ſumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum ſemidiametri punctum deſcriptus tanget priorem circulum in dicto puncto extremo ſemidiametri, totusque extra eundem cadet.

SIT circulus A B C, cuius centrum D, & in ſemidiametro A D, producta ſumatur punctum quodcunque E, ex quo ad interuallum E A, circulus deſcribatur A F, quem dico circulum A B C, in ſolo puncto A, tangere. Aut enim punctum E, eſt intra circulum A B C, aut extra. Si intra, quoniam A E, maior eſt, quam A D, hoc eſt, quam D C, hoc eſt, à fortiori, quam E C; erit quoque E F, qua ipſi A E, æquali

A E, æqualis eſt, maior quam E C: ac proinde punctum F, extra circulum A B C, exiſtet, circulumq; A F, extra eundem circulum A B C,



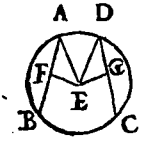
prope punctum F, exiſtet. Multo magis punctum F, extra circulum A B C, cadet, ſi E, extra eundem circulum A B C, exiſtet: Si igitur circulus A F, non totus extra circulum A B C, cadat, ita vt eum in ſolo puncto A, tangat; ſecet, vel tangat circulus A F, circulum A B C, in alio puncto B. ſi fieri poteſt, ducaturque recta D B. Quoniam igitur in diametro circuli A F, ſumptum eſt punctum D, præter centrum E,

17. ter. *a erit D A, omnium rectarum ex D, cadentium minima. Minor eſt ergo D A, quam D B. quod eſt abſurdum. Sunt enim æquales rectæ D A, D B, cadentes ex centro D, in circumferentiam eiuſdem circuli A B C. Non ergo circulus A F, circulum A B C, ſecat aut tangit in alio puncto, quam in A, ſed totus extra illum cadit. Quod eſt propoſitum.*

QVOD ſi in ſemidiametro non producta punctum ſumatur citra centrum, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum ſemidiametri punctum deſcriptus tanget quoque priorem circulum in dicto puncto extremo ſemidiametri, totusq; intra eundem cadet. Vt ſi in ſemidiametro A E, circuli A F, ſumatur punctum D, ex quo ad internallum D A, circulus deſcribatur A B C, cadet hic totus intra illum, tangetq; eum in ſolo puncto A. Cum enim oſtenſum proxime ſit, circulum A F, cadere totum extra circulum A B C, cadet vicißim totus hic intra illum, ita vt ſe mutuo in ſolo puncto A, contingant.

xiij. THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro. Et quæ æqualiter diſtant à centro, æquales ſunt inter ſe.



SINT in circulo A B C D, cuius centrum E, duæ rectæ æquales A B, C D. Dico ipſas æqualiter diſtare à centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas A B, C D, duæ perpendiculares E F, E G, & coniungantur rectæ E A, E D. *b* Secabunt rectæ E F, E G, rectas A B, C D, bifariam. Quare cum totæ A B, C D, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ videlicet A F, D G, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum E A, E D, æqualium, inter ſe ſunt æqualia; Quadratum

b 3. ter.

c 47. pri. aurem rectæ E A, *c* æquale eſt quadratis rectarum A F, F E; & quadratum rectæ E D, quadratis rectarum D G, G E: Erunt quoque

quadra-

quadrata rectarum AF, FE, æqualia quadratis rectarum DG, GE. Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum AF, DG, remanebunt quadrata rectarum FE, GE, æqualia, ideoque & rectæ EF, EG, æquales erunt: Distant igitur per 4. defin. huius lib. rectæ AB, CD, æqualiter à centro E.

RVRSVS distent rectæ AB, CD, æqualiter à centro E. Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterum ex centro B, ad AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; *a* diuidentque rectas AB, CD, bifariam. Ductis igitur rectis EA, ED, erunt earum quadrata æqualia: Est autem quadratum rectæ EA, *b* æquale quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, æquale quadratis rectarum DG, GE. Igitur & quadrata rectarum AF, FE, æqualia sunt quadratis rectarum DG, GE; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectarum AF, DG, æqualia; atque adeo rectæ AF, DG, ac propterea earum duplæ AB, CD, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro, &c. Quod erat demonstrandum.

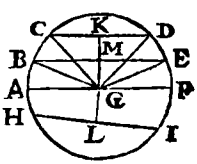
a 3. *tert.*

b 47. *pri mi.*

THEOR. 14. PROPOS. 15. xiv.

IN circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.

IN circulo ABCDEF, cuius centrum G, diameter sit AF; & recta ei propinquior HI, remotior autem CD. Dico omnium esse maximam AF, & HI, maiorem, quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ GK, GL, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior est CD, à centro, quam HI, erit GK, maior quam GL, per 4. defin. huius lib. Abscindatur ex GK, recta GM, ipsi GL, æqualis; atque per M, educatur BME, perpendicularis ad GK, & connectantur rectæ GB, GC, GD, GE.



Quoniam igitur rectæ perpendiculares GM, GL, æquales sunt, æqualiter distabunt rectæ BE, HI, à centro, per 4. defin. huius lib. *c* & ideo inter se æquales erunt. Rursus quia rectæ GB, GE, *d* maiores quidem sunt recta BE, æquales autem diametro AF; erit & diameter AF, maior, quam BE. Eadem ratione ostenditur AF, maior omnibus aliis lineis. Deinde quia latera GB, GE, trianguli BGE, æqualia sunt lateribus GC, GD, trianguli CGD; & angulus BGE, maior est angulo CGD; *e* erit recta BE, maior quam CD; atq; adeo HI, quæ æqualis ostensa fuit ipsi BE, maior quoque

c 14. *tert.*

d 20. *pri mi.*

e 24. *pri mi.*

quoque erit quam CD. In circulo igitur maxima quidem linea eſt diameter, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EODEM fere modo demonſtrabitur theorema, ſi ab vno, eodemque circumferentia puncto plurima linea cadant.

CADANT enim à puncto A, plures lineæ AB, AC, AD, quarum AD, per centrum E, tranſeat. Dico AD, eſſe omnium maximam, & AC, maiorem remotiore AB. Ductis enim rectis BE, CE; cum in triangulo AEC, latera AE, EC, a maiora ſint latere AC; ſintque rectæ AE, EC, æquales rectis AE, ED, hoc eſt, recta AD; maior erit AD, quam AC. Eademque ratione maior erit, quam AB. & ſic de cæteris. Maxima ergo omnium eſt AD.

a 20. primi.



DEINDE, quia duo latera AE, EC, trianguli AEC, æqualia ſunt duobus lateribus AE, EB, trianguli AEB; & angulus AEC, totus maior eſt angulo AEB; b erit baſis AC, maior baſe AB. Eodemque argumento erit AC, maior quacunque alia linea, quæ à centro remotior eſt.

b 24. primi.

CÆTERVM & hic duæ tantum æquales lineæ duci poſſunt à puncto A, ad vtraſque partes maximæ AD. Si namq; angulo AEC, æqualis fiat angulus AEF, iungaturque recta AF; cum latera AE, EC, æqualia ſint lateribus AE, EF, & anguli contenti quoq; AEC, AEF, æquales; c erunt baſes AC, AF, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis poteſt exhiberi. Quacunque enim ducatur ex A, ſupra AC, ea minor erit quam AC; ſi verò infra AC, ea maior erit, vt iam demonſtratum eſt.

c 4. primi.

QVOD ſi AB, AF, ad diuerſas partes diametri AD, ductæ ſint, & dicatur AF, propinquior centro, quàm AB, demonſtrabitur, vt in ſcholio propoſ. 7. huius lib. AF, maiorem eſſe, quam AB. Sit namque, vt proxime oſtenſum fuit, ducatur ipſi AF, æqualis AC, ex altera parte, nempe ſi fiat angulo AEF, æqualis angulus AEC, & cadet punctum C, inter B, & D; quod AF, AC, d æqualiter diſtent ab AD, ob earum æqualitatem, aut certe ob æquales angulos AEF, AEC. Hinc enim ſit, cum AF, ponatur propinquior centro, quam AB, vt & AC, ipſi AF, æqualis, propinquior ſit centro, quam AB, ac proinde punctum C, ſit inter B, & D. Cum ergo AC, maior ſit, quam AB, vt in hoc ſcholio demonſtratum eſt, maior erit quoque AF, quam AB.

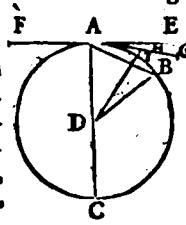
d 14. huius.

THEOR. 15. PROPOS. 16.

XV. QVÆ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locum inter ipſam rectam lineam, & peripheriam compre-

comprehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

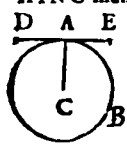
IN circulo A B C, cuius centrum D, diameter sit A C, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum qualis est A B; ducta D B; *a* erũt duo anguli D A B, D B A, æquales, sed D A B, rectus est, per constructionem: Igitur & D B A, rectus erit, quod est absurdum. Duo enim anguli in triangulo *b* minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; neque eandem ob causam in ipsam circumferentiam, sed extra, qualis est E F. Dico iam ex A, inter A E, rectam, & circumferentiam A B, non posse cadere alteram rectam. Cadat enim, si fieri potest, recta A G, ad quam ex D, ducatur perpendicularis D H, secans circumferentiam in I, quæ necessario ad partes anguli acuti D A G, cadet, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 1. Quoniam igitur in triangulo D A H, *c* duo anguli D H A, D A H, minores sunt duobus rectis; & D H A, rectus est, per constructionem, erit angulus D A H, recto minor, ideoque recta D A, hoc est, recta illi æqualis D I, *d* maior erit, quam D H, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter A E, & circumferentiam A B: sed quæcunque ex A, ducatur infra A E, ea secabit circulum. Dico denique angulum semicirculi, contentum diametro A C, & circumferentia A B, maiorem esse omni acuto angulo rectilineo; reliquum verò angulum contingentiæ, qui continetur recta A E, & circumferentia A B, minorem esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim ostensum est, omnem rectam ex A, ductam, infra perpendicularem A E, cadere intra circulum, faciet necessario ea linea cum A C, angulum rectilineum acutum minorem angulo semicirculi, at verò cum A E, angulum rectilineum acutum maiorem angulo contingentiæ, cum ille sit pars anguli semicirculi, hic verò totum quidpiam respectu anguli contingentiæ Id quod liquido constat, ducta recta A B, quomodocunque infra A E. Nam cum hæc linea A B, intra circulum cadat, vt demonstratum est, erit angulus rectilineus acutus C A B, minor angulo semicirculi contento sub diametro A C, & circumferentia A B C, cum ille huius sit pars: Angulus verò contingentiæ contentus sub tangente linea A E, & circumferentia A B C, minor angulo rectilineo acuto B A E, quod ille huius pars sit. Eademq; ratio est de omnibus aliis an-



a 5. *pri.*
b 17. *pri.*
c 17. *pri.*
d 19. *pri.*

aliis angulis acutis rectilineis, cum omnes contineantur à diametro A C, vel tangente A E, & rectis ex A, sub A E, ductis, quæ omnes intra circulum cadent, vt demonstrauimus. Angulus igitur semicirculi maior est omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentiæ, minor. Itaque quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.



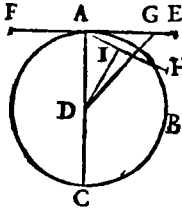
HINC manifestum est, rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam ipsum circulum tangere. Ostensum enim est, ipsam cadere extra circulum. Quare solum in puncto illo diametri extremo circulum attingit.

QVARE si iubeamur per datum punctum A, in circumferentia circuli A B, rectam lineam ducere, quæ circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam A C, & ad eam excitabimus perpendicularem D A E. Hæc enim circulum tanget in A, vt demonstratum est.

EX ORONTIO.

POTEST hoc idem theorema demonstrari ostensiue hac ratione. Sit diameter A C, in circulo A B C, cuius centrum D. Ducatur ex A, ad A C, perpendicularis A E, quam dico extra circulum cadere. Sumatur enim in ea quoduis punctum G, & coniungatur recta G D. Quoniam igitur in triangulo A D G, duo anguli D A G, D G A,

a 17. primi. *a minores sunt duobus rectis, & D A G, factus est rectus; erit D G A, recto minor. Quare* b *maior erit recta D G, quam D A; ideoque punctum G, extra circulum erit. Eademque est ratio de omnibus aliis punctis recta A E. Cadet ergo tota A E, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra A E, recta A H, quam dico necessario secare circulum. Fiat enim angulus A D I, æqualis angulo E A H. Addito igitur communi angulo D A H, erunt duo anguli A D I, D A H, æquales toti angulo recto D A E, ideoque minores duobus rectis: Quare* c *coibunt rectæ A H, D I, in aliquo puncto, vt in I. Dico igitur punctum I, esse intra circulum. Quoniam enim tres anguli in triangulo D A I,* d *æquales sunt duobus rectis, & duo anguli D A I, A D I, ostensi sunt æquales recto D A E; erit reliquus A I D, rectus, atque adeo maior, quam D A I, acutus. Quare recta D A,* e *maior est, quam D I. Non igitur D I, ad circumferentiam perueniet; propterea que punctum I, intra circulum existet; atque adeo recta A H, circulum secabit. Reliquæ partes theorematis ostendentur, vt prius.*



b 19. primi.

c 13. primi.

d 32 primi.

e 19. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

EXISTIMAT Peletarius, angulum contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem esse omni acuto angulo rectilineo, nihil esse, atque adeo ex illo contactu lineæ rectæ, & circumferentiæ, non effici angulum vllum. Vt autem sententia illius planior fiat, afferemus in medium digressionem illam, quam ipse hoc loco instituit. Sic igitur inquit:

CVM huius theorematis caput postremum attentius considerarem, mihi sanè in mentem subiit prima specie, Geometriam non satis sibi constare; immo adeo repugnantiam in se admittere.

PRIMVM enim extra intelligentiam est, vt inter quantitates minima dari possit; qualem hoc loco angulum, quem dicunt contingentiæ, seu rectius. contactus, minorem omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima quantitas detur, qualis hic angulus semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas est, quod partibus constet, & secundum eam æquale & inæquale dicatur. Quantitatis etiam continuæ in infinitum sectio est. Atque adeo cum in primam propositionem decimi incidissem, tum magis anxie expendere cepi, quonam pacto conciliari posset tam aperta, vt apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.

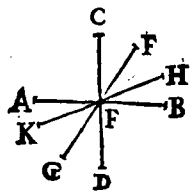
SI à maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidium; ac rursus ex reliquo maius, quàm dimidium, idque continuo fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.



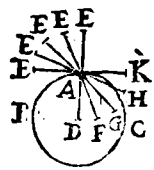
VERBI causa, sint duo anguli A, quidem rectilineus; B C D, verò angulus (si modo sit angulus) contactus: Vult prima decimi, si auferatur ab angulo A, maius, quàm dimidium, ac rursus à reliqua parte maius, quam dimidium; sicque continuo ex residuis partibus maius, quam dimidium; tandem relinqui minorem angulum, quam B C D. Cuius demonstrationem hic non appono, cum ex sequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propositio est, qua (vt sic dicam) magis naturaliter vera sit. Quod ex numeris (in quibus verum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non videt, propositis duobus numeris 8. & 2. cum ab octonario maius quam dimidium abstuleris, vt quinarium; tum à ternario residuo, maius quam dimidium, vt binarium; relinqui vnitatem posito binario minorem? Neque verò ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hac quippe conciliatio nulla est; quin etiam mentis Euclidis contraria, vt nos, cum illuc ventum erit, manifestum faciemus. Immo & ipse Campanus secum pugnat, cum in se-

cunda duodecimi demonſtranda, aliúmq; propoſitionibus nonnullis ſolidorum, à curuo rectum auferat.

NOS igitur hanc dubitationem ſic expediemus; & dicamus, lineam rectam, quæ circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere; ſcilicet B C D, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in ſectione conſiſtit, non in contactu. Et ubi ceſſat ſectio, ceſſat quoque anguli forma. Atque vt vno verbo dicam, in decuſſatione (Decuſſationem hoc loco, & ſectionem ſine diſcrimine accipio) omnes angulorum ſpecies perficiuntur. Duabus enim lineis A B, & C D, ſe



ſcindentibus in puncto E, ad angulos rectos, intelligatur C D, ſic moueri in orbem, ſcilicet ſuper puncto E fixo, vt ex C D, fiat F G; hinc ſanè ex recto angulo A E C, fiet obtuſus A E F: Inde ex recto B E C, fiet acutus B E F. Cumque facta fuerit H K, hinc quidem angulus obtuſior fiet H E A, inde verò acutior B E H; ſicque continuo, donec peruenerit ad A B, & intra eoſdem terminos concludatur cum ea. Tum enim immerſa, vt ſic dicam, linea C D, in lineam A B, euaneſcet angulus. Neque diuerſa ratio eſt in curuo. Sit enim in circulo A B C A, cuius centrum D, linea D E, prætereuntes peripheriam, & ſecans ipſam in A, puncto fixo, ſuper quod circumducatur ipſa D E, per puncta F, G, H. Tum fient anguli continuo varij cum peripheria, in ipſo puncto



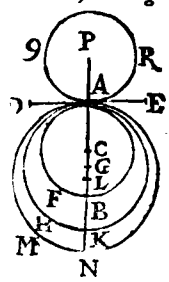
A; donec ceſſante decuſſatione, linea E D, facta ſit E K, & tangat circulum. Ac tum linea D E, non iam inclinata intelligitur, ſed immerſa in lineam B A C, quantum ad angulum attinet: non aliter quam ſi B A H, eſſet linea recta; neque contra facit, quod deducantur lineæ, faciantque ſpatium C A K. Nam id ſola A C, linea efficit, quæ rectam refugit; ſed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non conſiſtat, quam vno; fit, vt punctum A, tum ſit ineptum angulo conſtituendo, quam modo erat punctum ſectionis E, linearum rectarum. Fortaſſe dices, punctum A, lineæ rectæ manere in ſuo recto, punctumque A, peripheriæ in ſuo rotundo; neque vtrumq; eſſe idem punctum; ſed lineas ſe tantum inter ſe veluti lambere, quia altera alteram penitus, omniq; puncto refugit; vt contraria contrapoſita fiant manifeſtiora; id vero ſenſus non recipit. Duo enim circuli ſeſe exterius tangentes rectam lineam inter mediam illibatam relinquerent: Scilicet, ſi intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipſum A B C, circulum exterius: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri poſſe, vt nihil in cogitationem cadat, quod ſemel viam Geometria non repræſentet. Illud tamen minimè vrgebit; imo tanto minus contactus linearum erit angulus.

Habit

Habit enim vtrinque ipſarum concurſus. Sed nos hac Geometricis rationibus confirmemus per theoremata.

CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non eſt.

SIT enim circulus A F B A cuius centrum C, diameter verò A B, per cuius extremitatem A, ducatur linea D E, ad angulos rectos. Et conſtat, ex conſectario huius decimaſexta lineam D E, contingere ipſum A F B A, circulum: ac propterea D A F, eſſe minorem omni angulo acuto, ex ipſa Euclidis ſententia: ſcilicet per vltimam partem huiuſce decimaſexta. Iam verò inter puncta C, & B, ſuſcipiatur in diametro A B, centrum G, & ſpatio G A, deſcribatur alter maior circulus A H K A. Dico F A H, non eſſe quantitatem. Conſtat quippe circulum A H K A, tranſire inter rectam D A, & curuam A F, cum ſit ſemidiameter G A, maior ſemidiametro C A. Manifeſtum quoque eſt, lineam D E,



tangere ipſum A H K A, circulum, ex eodem huiuſce decimaſexta conſectario: ac propterea D A H, eſſe omni acuto minorem. Deſcribatur tertio, ſecundum maius ſpatium L A, circulus A M N A. Et erit ex eodem conſectario, D A M, omni acuto minor. Sicque in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea D E, cum circulis ductis per A, punctum, quorum centra in A B, linea, minores omni acuto rectilineo: ac ſic omnes æquales, ſi modò æqualitas inter non quanta dici poſſit. Quapropter contactus D A M, erit æqualis contactui D A F: Fietque vt M A F, contactus interior circulorum, neque augeat, neque minuat contactum D A M. Igitur M A F, quantitas non eſt. Quod erat demonſtrandum.

SED & probabimus, contactum interiorem circulorum quantitatem non eſſe in hunc modum. Nempe cum omnes circuli ſint ſimile, erunt & ſemicirculi ſimiles. Quapropter anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, in omnibus circulis ſunt æquales, per conuerſam definitionis ſimilium ſectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus B A F, æqualis vtriq; angulorum K A H, & N A M: Ac propterea contactus F A M, nihil addit ad angulum B A F. Quare F A M, quantitas non eſt. Quod fuit demonſtrandum. Hinc ſequitur alterum.

CONTACTVS lineæ rectæ cum circulo, quantitas non eſt.

MANENTE enim eadem conſtructione, ſi D A F, ſit quantitas; ipſa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non

per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimæsextæ: neq; per obliquam, vt per lineam A M. Esset enim F A M, pars ipsius D A F: Atqui F A M, quantitas non est, vt modo probauimus. Non est igitur F A M, pars ipsius D A F. Igitur D A F, neque per lineam rectam, neque per obliquam diuidi potest. Quare D A F, quantitas non est: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non est.

IN eadem constructione, protrahatur B A, diameter ad punctum P. Tum centro P, interuallo autem P A, describatur circulus A Q R A, tangens circulum A B F A, exterius in puncto A. Dico contactum F A Q, non esse quantitatem. Id verò manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur, cum F A M, non sit quantitas per primam harum; neque per rectam, cum neque D A F, sit quantitas, per secundam earundem; neque D A Q, quantitas per eandem. Quare cum F A Q, partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

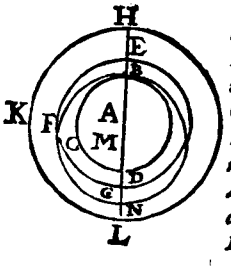
EX hu emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit.

ANGVLI, qui fiunt à diametro, & peripheria, siue intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

VT in posteriori figura, angulus B A F, aqualis est angulo B A D; cum ipsi nihil accrescat ob contactum D A F, qui quantitas non est: & ob id Q A P, rectus quoque est, & aqualis ipsi D A P, cum D A Q, nihil addat: quod erat probandum.

HÆC Peletarius hoc in loco. In epistola autem, quam ad Cardanum scribit, affert aliam demonstrationem, quam ipse ait plenioremesse. Hanc igitur hic subiicere statuo. In primis autem præmittit hoc theorema.

IN circulis anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, sunt æquales.



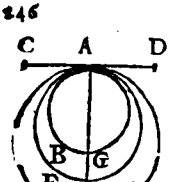
SINT enim super centro A, duo circuli B C D B, & E F G E, quorum diametri B D, & E G; & secet E G, ambos circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos C B D, & F E D, esse æquales. Nam si sit F E D, maior ipso C B D; (neque enim contra, C B D, maior vllo pacto erit ipso F E D) ac describantur plures circuli super eodem centro A, quorum vnus hoc loco satis fuerit H K L H: fiet tandem ex continuo augmento, an-

to, angulus à diametro, & peripheria, verbi gratia, angulus K H L, maior recto: quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter se aquales: quod fuit ostendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonstrandi ratione vllus est paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos; attamen erit angulorum, qui fiunt ex sectione recta linea, & peripheria, aliqua collatio ad ipsos rectilineos. Eiusmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifesto maiores, & minores fiunt.

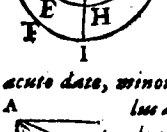
HIS ad hunc modum demonstratis, aio contactum circulorum interiorem, non esse quantitatem. Super centro M, in eadem linea H L, posito, describatur circulus B F N B, tanto interuallo, quanto est circulus E F G E; posita scilicet M B, semidiametro aquali ipsi A E; qui circulus tangat B C D B, circulum in puncto B. Et manifestum est, angulum F B D, aqualem esse angulo F E D, propter aqualitatem peripheriarum & diametrorum. Quapropter & idem ipse F B D, erit angulo C B D, aqualis. Igitur C B F, contactus nihil addit ad ipsum C B D, angulum. Quare C B F, quantitas non est: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonstratio eorum, quain tertio libro adduximus, theorematum.

HÆC igitur est Peletarij sententia de angulo contactus, qua omnino Euclidi est contraria. Si enim Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi aqualem recto rectilineo: Quid, obsecro, tantopere desudasset, vt demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, minus esse quocunque angulo? Quid quoque magis perspicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Quapropter angulum contactus vere esse angulum, ac quantitatem, affirmamus; atque adeo angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Vnde dissoluenda sunt à nobis omnia Peletarij sophismata, qua in hac digressione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil esse.

PRIMVM igitur extra intelligentiam esse fatemur, vt inter quantitates minima dari possit: sed inficiamur, nos asserere, angulum contactus esse minimam quantitatem: Imo vero asseueramus, quemuis angulum contactus, etsi ab Euclide minor ostensus est omni acuto rectilineo, diuidi posse in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonstrauit, & optimè; sed per lineam circularem. Vt proposito angulo contactus C A B, si per A, describatur circulus A E H, maior circulo A B G, tangens rectam C D, in A; fiet angulus contactus C A E, minor angulo contactus C A B. Quod



si adhuc maior circulus A F I, describatur, erit multo minor angulus contactus G A F, eodem angulo contactus C A B. Atque ita sine fine semper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inaqualitas inter angulos contactuum, quamuis quilibet eorum minor sit acuto rectilineo quocunque. Quemadmodum quouis angulus acutus minor est recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit; cum diuidi possit infinitè. Vt angu-



lus acutus B A C, minor est recto B A F; & tamen si ducatur recta A D, inter A C, A B, fiet acutus minor B A D. Quod si alia recta A E, inter A B, A D, ducatur, erit multo minor acutus B A E, nec ∇nquam finis erit huius decrementi.

PARI ratione asserimus, angulum contactus augeri posse infinitè, ita vt quouis angulo contactus proposito, dentur alij maiores sine numero. Vt in superiori figura circulari, angulo contactus C A F, maior est angulus contactus C A E, & multo maior angulus contactus C A B; Atq; ita deinceps, si minores semper circuli, quam A B G, describantur, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus contactus; semper tamen minor existet quouis rectilineo acuto. Quemadmodum quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto B A E, maior est acutus B A D, & multo adhuc maior acutus B A C. Quod si alia recta ducatur inter perpendicularem A F, & rectam A C, fiet adhuc maior angulus acutus, nec ∇nquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiusmodi incremento nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui sit aqualis angulo recto, vel maior recto, nisi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtusum, sed semper recto, vel obtuso minor est angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui aqualis sit acuto angulo rectilineo proposito, vel maior acuto, nisi angulus contactus mutetur in alium angulum innatum, (qui quidem efficitur à duabus lineis se secantibus; cuiusmodi est angulus segmenti.) sed angulus contactus acuto semper minor est.

EODEM modo negamus, nos ponere angulum semicirculi maximam quantitatem. Imò asserimus, quelibet angulo semicirculi proposito, quamuis ostensus sit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari posse maiores. Vt in eadem figura superiori circulari, angulo semicirculi B A G, maior est angulus semicirculi E A H, & multò adhuc maior angulus semicirculi F A I: Atque ita deinceps, si maiores semper circuli describantur, quàm A F I, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus semicirculi, semper tamen minor existet angulo recto C A I. E contrario verò, an-

gulo so-

gulo semicirculi F A I, minor est angulus semicirculi E A H, & multo adhuc minor angulus semicirculi B A G, nec unquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior est quouis angulo acuto rectilineo, licet infinitè diminuatur, vt Euclides demonstrauit. Quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij verò minores innumerabiles.

QVOD autem anguli contactus sint inaequales inter se, non omnes aequales, vt vult Peletarius, similiter & anguli semicirculorum, ex eo manifestum est, quod angulus quilibet consistit in vnico puncto, & linearum inclinatione, qua non in directum iacent, vt constat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt aequalitas angulorum eiusdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt linea vnius conueniant omnino lineis alterius, si vnus alteri superponatur; Ea enim aequalia sunt, quae sibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis semicirculorum, nequaquam reperiatur semper eadem inclinatio, quod (vno superposito alteri) linea eorum non sibi respondeant, sed prorsus inter se dissideant, vt ex figuris superioribus perspicuum est; non erunt omnes anguli huiusmodi inter se aequales. Imò quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinitè per lineam curuam, licet per rectam secari nequeat, vt rectè ostendit Euclides. Cuius etiam rei haec afferri potest causa. Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuò circulum secabit, donec iterum ipsum contingat: Tunc enim primum secare desinet circulum. Quare si vel minimè inclinari intelligatur super punctum illo contactus fixo, secabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum possit tangere, vt ex 2. propos. huius lib. colligimus.

SOLVM igitur illi anguli contactus, pariterque illi duntaxat anguli semicirculorum aequales inter se erunt, qui efficiuntur à peripheriis aequalibus: In his enim tantummodo linea sibi congruunt mutuo. Anguli verò contactus, qui efficiuntur à peripheriis minoribus, maiores erunt; Et qui à peripheriis maioribus, minores. Anguli denique semicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obscurè intelligi potest ex superioribus figuris. Neque enim linea talium angulorum sibi mutuo conuenirent.

CONSTAT ergo, quemuis angulum contactus habere partes: & vnum alteri posse aequalem exhiberi, ac rursus inaequalem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur rectè intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum verò semicirculi, maximam.

DEINDE non est, quod anxium reddat Peletarium prima propositio decimi libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatibus eiusdem generis, quam diuersi, dummodo vtraus multiplicata alteram excedere possit; cuiusmodi non sunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis sumatur, siue ter, quater ue, siue denique quoties libuerit, semper minor est angulo acuto rectilineo. Si namque quotcunque anguli contactus, vt centum, inter se aquales angulum acutum rectilineum excederent, vel se illis aquarent; esset quoque vnus illorum maior, vel aqualis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei; quod est absurdum, cum quilibet angulus contactus minor sit quocunque angulo acuto rectilineo, vt ab Euclide fuit demonstratum. Quare nullo modo ex illa propositione colligere licebit, si ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rursus ex reliquo maius, quam dimidium, idque continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus propositi; quoniam angulus contactus, vt dictum est, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, siue quantumuis auctus, semper minor existit angulo acuto; nec vnquam ipsum superare potest: quod tamen necessario requiritur ad demonstrationem illius propositionis. Vt enim demonstretur, multiplicanda est minor quantitas proposita toties, donec excedat maiorem, vt videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipse Euclides per Campanum, quando in Stereometria à curuo rectum aufert, vel contra, vt vult prima propos. lib. 10. assumit semper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere potest.

IAM verò nulla ratione concedemus Peletario, angulum tuntummodo effici à duabus lineis se secantibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano adinuicem inclinari, ita tamen, vt non in directum iaceant, vt constat ex anguli plani descriptione tradita ab Euclide, quanquam se mutuo non secent, si producantur; cuiusmodi sunt peripheria se tangentes. Quare verè angulum efficiunt, vt antea diximus.

PORRO demonstratio Peletarij, qua conatur ostendere, contactum interiorem non esse quantitatem, nullius est momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur à linea tangente, & peripheria, minores sint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter se omnes aquales esse necesse est, sed potest alio alius maior esse, & minor, vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores sunt angulo recto, & tamen ipsi inter se non sunt omnes aquales. Sic etiam omnes formica (vt ex rebus quoque naturalibus exemplum afferamus,) minores sunt homine, vel monte, cum tamen ipsa inter se valde sint inaquales. Quare non rectè concludit Peletarius, contactum interiorem nihil esse.

NEGA-

NEGAMVS deinde, angulos segmentorum similium aquales esse, sicut ipse assumit in sequenti demonstratione: Neque enim hoc Euclides significauit in vltima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea segmenta esse similia, in quibus anguli rectilinei sunt aquales, vel qua angulos rectilineos capiunt aquales; non autem quorum anguli aquales existunt. Immò magnum discrimen est inter angulos in segmentis, & angulos segmentorum, vt apertè constabit ex propos. 31. huius libri.

EX his facilè reijcientur reliqua Peletarij demonstrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur à linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior sit vere pars eius, cùm contrarium nullo modo ostenderit. Eodem pacto angulus contactus, quem constituunt duo circuli se exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, qua vtrumque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo asseruit, angulum semicirculi aqualem esse angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum semicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Postremò hallucinatus est quoque Peletarius in illa demonstratione, quam ad Cardanum misit. Etsi enim angulus semicirculi in maiori circulo maior est angulo semicirculi in circulo minori: non tamen propterea efficitur, vt aliquis angulus semicirculi maior sit angulo recto. Semper enim rectus angulus superabit quemuis angulum semicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur à peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto proposito, dari possunt alij maiores; nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in precedenti figura cernere licet. Constat igitur ex his, angulum contactus vere esse angulum, demonstrationes autem Peletarij sophisticas esse, ac nullius momenti, hominem q; Geometra prorsus indignas.

HAEC porrò mea de angulo contactus disputatio adeò Peletarium commouit, atque perturbauit, vt lasam esse omnino, atque offensam existimationem putauerit suam. Quare annis ferè quinque post mei in Euclidem commentarij editionem, hoc est, anno 1579. vt se defenderet, Apologiam in me conscripsit: in qua tamen neque ausus est solutiones meas hoc loco adductas infringere, aut impugnare, neque opinionem suam, nouam illam quidem, & inauditam, nouis rationibus (scilicet nullas habebat) confirmare, sed verbis duntaxat, & conuitijs se defendere conatur, vt facilè ij, qui eam perlegerint, iudicabunt. Huic ego Apologiæ iam pridem non tam mei purgandi, quàm veritatis tuenda gratia respondissem, nisi me ab hoc consilio grauissima eruditissimorum hominum auctoritas, qui eam responsè omnino indignam iudicabant, reuocasset. Nunc verò quoniam locus hic à me postulare videtur, vt in secunda hac editione patrocinium veritatis iterum suscipiam, non alienum esse duxi, breuiter calumnias,

atque iniurias, quibus frequenter me in ea Apologia afficit, quantum potero modestia, depellere. Quamuis enim hoc à me factum iam sit anno 1586 in meis triangulis sphæricis, vbi necessario de re ipsa, eiusque Apologia mentio facienda fuit; quia tamen fortassis non omnes librum illum meum viderunt, operæ pretium arbitratus sum me facturum, si totam illam responsionem hic, vbi proprium eius locus est, interseram, vt benignus lector intelligat sine causa cum tanto animi dolore, & iracundia, quantam præ se fert, contra me exarsisse, falsoq; mihi imposuisse multa: me autem è contrario nullum verbum iniuriosum in illum effudisse, aut conuitium, quod frustra in epistola nuncupatoria criminatur, vbi me à conuitijs non abstinere, apertè testatur. Atq; in illa Apologia nihil adeo me offendit, quàm quod me Peletarius non syncerè, sed animosè, atque adeò inuidiosè fecisse insimulat, vt eum in meis commentarijs vel reprehenderem, vel laudarem: qua sanè vitia pusillis semper animis esse duxi, & ab homine liberaliter, Christianéque educato alienissima. Verùm ea quam longè absint tum à nostræ Societatis disciplina, tum à mea consuetudine, nemo omnino, qui nos ac nostra norit, ignorat. Hæ verò, qui nostra minimè norunt, hic ipse liber fidem faciet, syncerè omnia dici, nihil inuidiosè, nihil animosè: planè vt veritatem quæsitam, non cuiusque auctoritatem contemptam esse appareat. Neque enim mihi tantum derogo, (etsi nihil arrogo) vt mihi vni interdictum putem, ne, si quid in alieno scriptu falsum videatur, occasione oblata, cur id mihi minùs probetur, ostendam; modo (quod prudentium, ac bene moratorum hominum consuetudo postulat) id sine conuitio, atque irrisione faciam: Hoc autem liber ipse, qui in medio est, ita à me factum esse clamat. Etenim vt totum hunc librum pervolutes, ne verbum quidem vnum reperias, quod vel speciem maledicti habeat, atque conuitij. Nam in scholio hoc de angulo contactus iurare liquidò possem, nihil me minùs cogitasse, quàm vt Peletarium obtrectando animo oppugnarem; sed illud habuisse propositum, (si modò consequi possem) vt suum esset veritati locum. Quod quidem eo liberiùs feci, quod Peletario ipso non modò inuito, sed etiam libenti existimauì me esse facturum, quod vel ipse auctore facerem: qui non à Cardano solùm, atque Campano, sed etiam à Proclo, Theone, Apollonio, Eratosthene, Pappo, Ptolemæo, Hipparcho, Cleomedeque Cleomedis, Geometria luminibus, ab ipso denique omnium magistro Euclide dissentire non dubitauit. Nimirum quia, vt ab eodem in Apologia verè dictum est, in omni doctrina, præsertim verò in Geometria, non auctoritas est spectanda, sed veritas: quanquam nō video, qui amicus veritatis sit is, apud quem veritas odium parit; nisi forte aut decipi se non posse arbitratur, qui columina illa Geometriæ errasse interdum prædicat, aut veritatem in alienis rebus amat, ac quærit potiùs, quàm in suis. Equidem si quis me in re quapiam (quod pro humani ingenij imbecillitate fieri posse video) errasse ostenderit, ma ego maxi-

mam

mam illi gratiam habuêre, qui errantem in viam veritatis reduxerit. At enim probat studium veritatis Peletarius, convitia ferre non potest: quæ tandem convitia? rogas? Demonstrationes meas appellat sophismata. Nunc demum, quæ convitia dicat, intelligo. Nam alia nulla in meo hoc libro esse certò scio: ab his (si convitia sunt) fateor me non abstinere. At ego homo simplex, & ignarus verborum, convitia esse nunquam duxi, cùm verè dicerentur. Neque enim, quo alio vocabulo demonstrationes planè fallaces, & adulterinas appellarem, habebam: neque verò Philosophorum, ac Mathematicorum consuetudo loquendi magis appositum mihi verbum suppeditabat. Accedit, quod cùm à Peletario, homine in loquendo consideratissimo, germanas Campani, Cardanique demonstrationes paralogismos appellari viderem, existimaui in falsis eius demonstrationibus refellendis impunius persimili me vocabulo vsurum. Quod si sophisma contumeliosius verbum est, quam paralogismus, in Gallia, ignoscat consuetudini eius ignaro, atque existimet, me paralogismos dicere voluisse. Atque vt planè intelligat Peletarius, me non contradicendi studio illa scripsisse, mecum vnà consideret, quantum mihi materiam sui refellendi dederit, si hominem refellere potiùs, quàm rem, qua tum agebatur, explanare in animo fuisset: quanquam occasionem eius reprehendendi in sinum delatam sapiùs omisi, ne illum mihi delegisse viderer, in quem potissimùm incurrerem. Quàm præclara enim occasio fuit in propos. 4. & 8. lib. 1. atq; in propos. 24. lib. 3. quam ipse 23. facit? In his enim omnibus reiecit demonstrationes antiquissimas Euclidis, tanquam non Geometricas; quippe in quibus figuram vnam alteri superponi concipere animo oporteat: quod ipse à Geometria dignitate putat esse alienum, hac solùm inductus ratione, quod superpositionem illam mechanicum quid esse arbitretur, & quòd omnes ferè propositiones hoc modo, vt ait, possint demonstrari, etiam problemata, in quibus aliquid proponitur construendum: atq; in huius rei exemplum adducit propos. 2. & 3. lib. 1. quæ problemata sunt. Hic certè Peletarium iure carpere potuissem, si id mihi fuisset propositum, vt falsò criminatur; maximè in eo, quod eadem ratione vsui fore existimauit superpositionem in demonstrandis problematibus, ac theorematibus. Nam non satis intellexisse videtur, quo pacto Geometra superpositionem illam vsurpent. Neque enim volunt, re ipsa faciendam esse superpositionem, (hoc enim mechanicum quid esset) sed cogitatione tantum, ac mente, quod opus est rationis atque intellectus. Itaque in theorematibus quidem locum habebit genus hoc argumentandi, in problematibus verò non. Nam q̃ in theorematibus, propter magnitudinum æqualitatẽ, inæqualitatemve, qua, vt notum, ponitur, facilè intellectus cuiusuis sine vlla hæsitatione comprehendit, vnã vel nõ excedere alteram, vel excedere, si animo concipiatur vna alteri esse superposita, quamuis re ipsa non fiat illa superpositio, vt in prop. 4. lib. 1. factũ est:

At in

At in problematibus, in quibus magnitudinem quis alteri æqualem conſtruere iubetur, licet mente cogitet magnitudinem propoſitam transferri in alium locum, non tamen propterea quicquam efficiet, cum re ipſa translatio nulla facta ſit: Vt mirum ſit, Peletarium ſibi perſuadere potuiſſe, propoſ. 2. & 3. lib. 1. & alias pene omnes per ſuperpoſitionem, ſiue translationem linearum, figurarúmve poſſe demonſtrari, ſi hoc modo argumentandi in Geometria vti liceret. Et certè hac in re non ſolum Euclidem in crimen vocat Peletarius, verùm etiam Archimedem, quo, omnium iudicio, acutior in demonſtrando, & ſubtilior fuit nemo, eiuſque commentatorem grauiſſimum, eumq; doctiſſimum Eutocium Aſcalonitam, qui eodem argumentandi genere vtuntur in æqueponderantibus, immò verò & omnes Geometras redarguat neceſſe eſt, qui non rarò hoc argumenti genus adhibent. Sed videamus, quò tandem egregius hic noſter Geometra, qui omnes alios Geometras reprehendit, ſit deuolutus. Viderat Peletarius, (neque enim rem adeò manifeſtam videre non poterat) ſi hunc modum argumentandi è medio tollat, vniuerſam ſe Geometriam funditus euertere, cùm plurima, eaque præcipua propoſitiones in Geometria demonſtrentur ex propoſitione 4. & 8. lib. 1. & ex 24. lib. 3. qua quidem alio modo demonſtrari nequeunt, quam per illam figurarum ſuperpoſitionem, non quidem re ipſa exiſtentem, ſed cogitatione duntaxat, vt dixi, comprehenſam. Quò igitur ſe verteret? quid ageret? Excogitauit ſanè rem magis à Geometria alienam, quam eſt ſuperpoſitio illa figurarum. Coactus enim eſt aſſerere, propoſitionem 4. lib. 1. eſſe definitionem angulorum æqualium, (& quis vnquam talem audiuit definitionem?) atque adeò concedendam eam eſſe ſine demonſtratione: propoſitionem verò 8. eiuſdem lib. principium eſſe per ſe quoque notum. Quod vt credibile magis efficiat, ita ſcribit in propoſitionem 4. lib. 1. (Etenim nulla euidentiori ſpecie æqualitas figurarũ dignoſcitur, quàm ex laterum æqualitate.) *Idemq; quaſi confirmat, & repetit in propoſitionem 8. eiuſdem lib. dum ita loquitur.* (Quis enim negauerit, duas ſuperficies eſſe æquales, quarum latera & quantitate, & numero ſunt æqualia?) *Hæc Peletarius, vt dicta propoſitiones Euclidis ſine demonſtratione admittuntur, commentus eſt, ſed quæ omnino falſa ſunt: vt magnoperè mirandum ſit, potuiſſe eum propoſitiones à Geometria prorſus alienas tam inconſideratè proferre. Scilicet verum eſt, quod Philoſophi aſſerunt; Dato vno abſurdo, cætera conſequuntur. Aſſumpſerat enim Peletarius propoſ. 4. & 8. lib. 1. pro principijs: quod quidem falſum eſt, atque abſurdum. Vnde ad eas abſurditates neceſſariò deuenit, quas etiam illi, qui vix adhuc principia Geometria attigerunt, vel facilè vitare potuiſſent. Nam quis non videt, Rhombum, & Quadratum, etiamſi latera habeant & quantitate, & numero æqualia, poſſe tamen inter ſe valde eſſe inæqualia? Id quod in Pentagonis quoque æquilateris, & in alijs figuris plurimum late-*

laterum aqualium eorum potest: quod non est huius loci pluribus verbis explicare. Cùm ergo in omnibus figuris multilaterum inaqualitas reperiatur, licet latera habeant & quantitate, & numero aqualia; demonstrandum fuit necessariò Euclidi, aqualitatem triangulorum colligi ex laterum aqualitate, quandoquidem in alijs figuris ea non colligatur. Quare neque propositio 4. Definitio, neque propositio 8. principium erit; ac proinde omnes propositiones, quas illis nituntur, quæ innumerabiles propemodum sunt, corruant necesse est, nisi demonstrationes Euclidis recipiantur in illis propositionibus, cum alio modo demonstrari non possint. Demonstratio enim nouæ propos. 4. quam Peletarius confinxit, nihil aliud est, quàm (vt cum Logicis loquamur) petitio principij. Id quod perspicuum erit cuilibet, qui eam diligentius considerare voluerit. Nam in ea solùm construitur, & unum triangulum posteriori ex duobus datis aquale, immò idem, atque hoc ipsum quidem ineptissimè, cùm ad id præstandum circulos describat Peletarius, quibus tamen in demonstratione non vtitur, quod vitiosum omnino est in Geometria: Deinde infert, triangulum hoc constructum, quod à posteriori ex duobus propositis non differt, priori esse aquale, sine vlla demonstratione; certum autem est, hoc ab initio propositum fuisse, vt demonstraretur. Quocirca manifestè principium petit, cum eadem facilitate statim in principio concludere potuisset, etiamsi nullam adhibuisset constructionem, triangula proposita esse aqualia; quippe cùm constructio illa ad rem non faciat. Idem dico de demonstratione propos. 24. lib. 3. quam etiam nouam confinxit: quod eorum iudicio, ad quorum manus eius commentarij pervenerunt, relinquo. Præterea alia loca innumerabilia, in quibus abutitur propositionibus Euclidis in demonstrando, vt quod plerunque secundam propos. lib. 1. inscitè pro tertia assumat, &c. Neque enim mihi in animo nunc est, eius commentarios examinare, sed solùm calumnias, quas frequentes in sua Apologia adhibuit, à me depellere. Quæ cùm ita sint, quod ille falsò de me, verè ego de illo dicere possem, rubere me, (vt eius verbis vtar) Euclidi interpretem contigisse, qui nõ iam Theonem, aut Campanum emendet, sed ipsum Euclidem sine causa reprehendat; quippe cùm ego Euclidem (vt par est) à calumnijs ipsius defendam, omnesq; insidias, ac fallacias, quas contra eum instruxerat, detegam ac refellam. Liquet igitur, me ea mente non fuisse, vt Peletarium redarguerem, cùm tot ac tantos errores dissimulauerim: quos ego ne nunc quidem in lucem protulissem, nisi vellem omnes & intelligere, quantum Peletarius à me, de quo tam acerbè queritur, tum beneficium acceperit, & ex breui hac disputatione fructus aliquid, & tilitatisq; percipere. Nunc vt, quam dispar ille animo in me fuerit, appareat, eius calumnias breuiter exponam, atque ita refellam ac diluam, vt omnes oculis videant, eas esse calumnias: In quo tamen eusmodi à me moderatio adhibebitur, vt modestia, qua hominem

reli-

velgiosum decet, minimè obliuiscar. Neque enim illi, vti prouocauit, respondebo.

PRIMVM itaque mihi obijcit Peletarius, quod in eius demonstrationibus citandus ita me gesserim, vt si quo modo nomen ipsius supprimere potuissem, id me ostendam libenter fuisse facturum. Quod quàm sit falsum, facilè iudicabunt ij, qui meos commentarios legerint; cùm vbique eum honorificè appellem, eiq; plurimas demonstrationes adscribam, tanquam proprias, quas tamen aliter, quàm ipse, & multò breuius demonstro, & interdum etiam (quod maius est) vniuersalius, vt liquidò constat ex ijs, quæ tum ad propos. 38. tum ad propos. 45. lib. 1. ex Peletario demonstraui, vt alia interim taceam: quæ non iniuriâ mihi vendicare potuissem: vt mirer, quid illi in mentem venerit, id à me parum syncerè, atque adeò inuidiosè factum existimare, quod ego verebar, ne nimis ambitiosè factũ quispiam iudicaret. Quod verò propos. 16. lib. 3. & in prioribus duabus definitionibus lib. 5. vt ipse obijcit, animosè, vt ego fateor, liberè, quid de eius demonstrationibus sentirem, exposui, id feci, vt iam antè dixi, non cuiusquam ladendi causa, sed quærendæ veritatis. Ea enim est natura, & conditio eorum, qui liberalibus artibus dant operam, vt etiamsi alter alterius interdum sententiam impugnet, non tamen idcirco odijs potius, quàm ingenijs inter se certare videantur. Qui sit aliorum sensus ignoro, equidem, vt supra dixi, ita sum animo, vt si quis me alicuius erroris in demonstrando commissi admoneret, ei quàm maximas gratias haberem: atque vt liberius id faceret, enixè rogaui non paucos, & nunc iterum eosdem, atq; etiam alios amicè oratos volo. Scio enim, quàm facilè possit in suis quisq; inuentis hallucinari; video (quod ipse quoque Peletarius in Apologia sapienter asseruit) omnibus hominibus commune esse, vt peccent. Deinde quod in additionibus ad propos. 47. lib. 1. eius mentionem non fecerim, non est, quod ægrè ferat, cùm illa propositiones non sint ab ipso inuenta. Quadam enim multo tempore ante ipsum demonstratæ sunt vel à Campano, vel à Procle, aut Theone, quasdam verò demonstraui egomet, antequam ipsius demonstrationes vidissem; quod adeò manifesta sint, & faciles, vt nulla probatione egeant, sed sint instar corollariorum propos. 47. Vt nulla prorsus laus, aut gloria illi accessura videretur, si maximè eas ab ipso inuentas esse (quod tamen verum non est) prædicassem; cùm eas quilibet, modò primoribus labris studia Mathematica degustarit, nullo negotio ex illa propos. 47. colligere possit: Vt non videam, cur tandem eas propositiones tanti ponderis esse dicat, cùm sint omnium iudicio leuissimæ; adeò vt in plerisque earum necipse Peletarius demonstrationem vllam, propter earum euidentiam, adducat, sed eas nulla probatione egere fateatur. Denique non est, quod tantopere mihi succenseat idcirco, quod constructionem Pentagoni æquilateri, & æquianguli supra datam rectam lineam finitam ei non tribuerim: quoniam in ea con-

stru-

structione nihil prorsus ab eo sum mutuatus: quod ijs dijudicandum relinquo, qui meam cum illius constructione contulerint. Nam & mea omnino diuersa est, & ille in sua mirificè (vt alia peccata taceã) abutitur propositione 9. lib. 3 cùm ex ea probet, punctum quoddam esse centrum circuli, qui nondum est descriptus. Geometra sanè dixisset, punctum illud esse eiusmodi, vt circulus ex eo descriptus ad internallum cuiuslibet linea recta ex illis tribus, qua ibi ostensa sunt aquales, transeat per extremitates reliquarum duarum linearum aqualium. Nam propositio 9. lib. 3 nihil eo loco ad rem facit, cùm propositum ex ipsa constructione possit concludi, & ex demonstratis, vt proximè dixi, etiamsi propositio illa vera non esset, aut nusquam demonstrata. Idem peccatum committit Peletarius in omnibus propositionibus lib. 4. in quibus vel intra figuram rectilineã, vel circa eandem circulus describendus est. Quòd si ideo sum reprehendendus, quòd propositionem suã, multò aliter à me, & breuius demonstratam, et non ascripserim, non video, quo pacto in idem ipse vitium non incurrat, cùm problema hoc (Propositis duabus lineis inæqualibus, potentiam maioris supra minorẽ cognoscere) multis seculis ante ipsum à Theone demonstratum sibi arroget, hac solùm de causa, vt arbitror, quod illud alia ratione, longiore tamen, demonstrauit. Mitto hoc aliud problema, (Dato angulo rectilineo æqualem angulum curuilineum constituere.) quod in Apologia suum proprium appellat, idemq; hactenus desideratum esse gloriatur; cùm tamen illud ipsum ego ex Proclo, qui multis ante eum seculis floruit, in defin. 5 lib. 5. multò breuius, & clarius demonstrauerim. Nam, vt eo in loco ostendi si recta linea datũ angulum rectilineum continentes ponantur aquales, & circa ipsas duo semicirculi (qui aquales erunt) versus easdem partes describantur, illico constitutus erit angulus curuilineus dato angulo rectilineo aqualis: Neq; opus est tot ambagibus vti, quot Peletarius ad eam rem demonstrandam adhibet; quamuis robur demonstrationis ipsius idẽ sit, quod mea. Et quod magis mirandũ est, fatetur Peletarius, se meam demonstrationem vidisse, & eã nihilominùs sibi audet, tanquam propriã, arrogare. Et cur Peletarius clamet, me nõ paucas demonstrationes parum honeste, vt mihi vendicem, sibi subducere conatũ. Quis antẽ non videt, id eum in altero vituperare, quod ipse sibi gloriosum putat? Itaq; multo verius, ac iustius eodẽ illum crimine ego, quàm ille me, cõdemnare possum; cùm nunquã propositionũ illarum inuentorem me appellauerim, vt ipse, sed solũ eius nomen, ob rationes à me expositas, reticuerim.

DEINDE angulum contactus, & acutum rectilineum eiusdem generis esse, contra me pluribus verbis conatur ostendere. Sed nescio quo modo aberrat, quod dicitur, à scopo. Solum enim probat, vtrumque angulum eodem genere quantitatis contineri, hoc est, vtrumq; angulum planũ esse; quod acutus angulus rectilineus, vel etiam rectus constare possit ex angulo contactus, & alio angulo mixto: quod ne-

que

que ego, neque vllus vnquam Geometra negauit. Ego angulos illos eiusdem esse generis negaui hac solùm de causa, quòd angulus contactus quantumuis multiplicatus angulum acutum rectilineum superare nequeat, vt in scholio huius propos. 16. euidenter ostendi. Hinc enim fit, vt alter ad alterum proportionem non habeat, atque adeò quodammodo diuersi generis sint: quemadmodum eadem de causa linea recta finita, & infinita non censentur esse eiusdem generis, cum altera ad alteram proportionem non habeat; quamuis sub eodem genere magnitudinis; nimirum sub linea recta, comprehendantur. Hoc itaque fieri, vt collimasse videatur: quanquam vt omnia faciat, collimabit nunquam; ita longè abest, quod est propositum. Magnitudines autem, quarum altera multiplicata alteram superare nequit, non censeri eiusdem generis, (quod ad proportionem attinet) licet sub eodem genere quantitatis, hoc est, sub longitudine, aut latitudine, aut profunditate, aut numero, collocentur, liquidò constat ex defin. 5. lib. 5. vbi Euclides satis perspicuè explicat, cuiusmodi debeant esse magnitudines eiusdem generis, inter quas proportio reperitur. Quare videriut alij, Peletarius homo consideratus quam cogitate me incogitantem hominem appellarit; quasi non rectè intellexerim, quæ magnitudines sint eiusdem generis, quæ non sint. Nunquam enim dixi (id quod mihi affinxit, vt carperet) duarum magnitudinum, quæ sub diuersis quantitatis generibus collocantur, quales sunt linea, superficies, corpus, ac numerus, alterutram ita posse multiplicari, vt alteram superet: In quo, nemine reluctante, frustra sese fatigat, vt doceat, id fieri non posse, sed de illis duntaxat magnitudinibus sum locutus, quæ cùm in eodem genere quantitatis versentur, diuersi tamen generis censeri possunt: quales sunt superficies rectilinea, & curuilinea, siue mixta: Itemq; linea recta, & curua. Hæ etenim ita differre inter se videntur, vt Aristoteles liquidò affirmarit, quam alteri æqualem esse non posse: quod tamen (pace Aristotelis dictum sit) verum esse quoquouaque non est; cùm Archimedes in lib. de lineis spiralibus demonstrauerit, quanam linea recta æqualis possit esse circumferentiæ cuiusuis circuli dati, idemq; nos in quadratura circuli ostenderimus. Non igitur negare poterit Peletarius, ab Euclide defin. 5. lib. 5. aliquas quantitates à proportionis definitione excludi, diuersisq; propterea esse quodammodo generis, quod ad proportionem attinet, licet in eodem magnitudinis genere ponantur: quales sunt angulus contactus, & angulus rectilineus; Linea item recta finita, & infinita: Multas item magnitudines comprehendi in eadem definitione proportionis, quas plerique excludebant; eiusmodi sunt curuilinea, superficies, & rectilinea; nec non linea circularis, & recta, vt paulò antè diximus, latiusq; in defin. 5. lib. 5 exponemus. Verùm Peletarium, ne opinionem illam suam, quam de angulo contactus semel imbiberat, deserere cogeretur, nolnit hanc expositionem 5. defin. lib. 5. recipere;

immo

immò eam ſit oppugnet, omnes videtur in Apologia intendiſſe nervos, obſtitus ſui, qui ferè eodem modo illam defin. in 5. lib. olim expoſuerat; niſi quod non rectè inde colligit, angulum contactus non eſſe quantitatem, propterea quòd multiplicatus nullam magnitudinem, ſit dicit, poſſit excedere. Hoc enim (pace eius dixerim) falſum eſt. Nam licet angulus contactus multiplicatus angulum rectilineum non poſſit excedere, excedet tamen alium angulum contactus. Quare ex illa defin. ſolùm rectè colligitur, angulum contactus ad angulum rectilineum non habere proportionem illam; ad angulum verò alium contactus quemcunque proportionem habere. Sed ſive ita intellexerit eam defin. ſit ex commentarijs eius in lib. 5. colligi poteſt, ſive ſecus, ſit in Apologia indicare videtur, non multum laboro: Certè ita illam eſſe intelligendam, ſit expoſui, nemo qui verba Euclidis diligenter expenderit, negabit. Verum enim verò, ſi mihi fidem habere non vult Peletarius, habebit certè, (niſi arrogans haberi volet) aut Proclo graviſſimo ſcriptore, qui lib. 2. in lib. 1. Euclidis ad definitionem anguli plani eodem modo definitionem illam intellexit, aut Petro Nonio Laſitano, quem tanti facit, (& meritò id quidem: fuit enim acerrimo vir ingenio, & nullo hac noſtra aetate in Mathematicis inferior) ſit eum unum pro multis millibus teſtem citet, & ſuarum demonſtrationum approbatorem, qui diſertiſſimis verbis tum in libro de Erratis Orontij, tum in Algebra ſua, illam definitionem explicat, ſit à me eſt expoſita: quin etiam ibidem aſſerit ex ea defin. colligi, angulum contactus ad angulum rectilineum, & lineam finitam ad infinitam nullam habere proportionem; ſit Petrus Nonius, quem teſtem produxerat pro ſe Peletarius, iam pro me teſtimonium dicat. Atq; ex hiſce duobus locis Petri Nonij facilè quivis intelliget, quam ſine ratione, & quanto contradicendi ſtudio mihi inſultet Peletarius, cùm ſemel atque iterum odioſè percontatur, Undenam potuerim illi lineam infinitam deportare. In idem enim crimen (ſi crimen eſt, lineam infinitam exempli cauſa nominare) vocat etiam Petrum Nonium teſtem ſuum, atque adeò omnes Philoſophos, quorum eſt illa vox nemini inaudita, praterquam Peletario, finiti ad infinitum nullam eſſe proportionem. Deſinat igitur à me ſciſcitari, Unde lineam infinitam deportauerim: Inde enim reſpondebo, Unde eam Petrus Nonius, Unde Philoſophi omnes deportarunt. Quid? nonne ſophiſma illud Peletarij, ſemper in hoc erro, demonſtratio illa, Volui dicere, & quidem palmaris, qua conatur oſtendere, propoſitionem 1. lib. 10. cum propoſ. 16. lib. 3. ſtare non poſſe, ſi angulus contactus concedatur eſſe quantitas, à Petro Nonio Peletarij cognitore eadem prorſus ratione, qua à me ipſo confutatur? Qua ſi germana demonſtratio eſt, miror quid ſit, cur eam Nonius Geometria ſcientiſſimus, idemq; Peletarij approbator, minus probarit: Cur nihilo magis demonſtrationes eiuſdem, quibus planum facit, (ſit putat) angulum contactus

quantitatem non esse, eundem illum Nonium nihil admodum mouerint? Id enim (nisi fallor) illa Nonij verba (Si quis sententiam Peletarii de angulo contactus amplecti velit.) declarant. Nam si demonstrationes existimasset, profectò Peletarij doctrinam in eo retinendam esse dixisset, Geometrica enim demonstrationes eiusmodi sunt, vt assensum extorqueant, ac dubitationem omnem excludant, nulloq; modo quempiam sinant ancipiti opinione distrahi sic, vt tum assentiatur, si velit, tum, si nolit, dissentiat. Encur Peletarius Nonij testimonia aliorum iudicia contemnat, en praclarum testimonium, quod Petrus Nonius eius demonstrationibus dedit: quo aequiore animo ferat, eas à me nihilo magis, quàm ab illo suo approbatore, demonstrationes putari.

TERTIO, quod existimare dixi Peletarium, angulum contingentia nihil esse, falsum esse clamat: Nusquam enim dixisse se, nihil esse, sed quantitatem non esse. Ita ne vero? at in praedicamento Quantitatis, quod neque est punctum, (quis enim inclinationem illam punctum esse dixerit?) neque quantitas, quo alio nomine vocetur, quàm Nihil? Sed vt vt dixit, profectò non modò mirabile est, sed monstri in Geometria simile, putare angulum contactus non esse quantitatem, qui postea additus alijs angulis efficiat curuilineum angulum rectilineo aequalem. Quis enim vnquam Geometrarum id, quod quantitas non est, magnitudini adiunxit, vt aequalem eam alteri efficeret? Praetereo, quòd figura trilatera curuilinea intra tres circulos se mutuò tangentes conclusa nullum haberet angulum ex Peletarij sententia; quia tres illi contactus, anguli non sunt: cum tamen tribus diuersis lineis contineatur; quod omnino nouum est, & inauditum apud Geometras. Itemque, si quatuor, aut plures circuli se mutuò tangerent, vt fieret figura curuilinea quadrilatera, vel plurium laterum, illa nullum angulum haberet. Atque etiam, si duae lineae rectae angulum continentes, vnum eundemque circulum tangerent, trilatera illa figura habens tertium latus curuum, vnicum tantùm haberet angulum. Quae omnia si sunt absurda, consentanea non est opinio Peletarij. Sed nimis fortasse multa ad Nihil illud Peletarij euertendum, ad quod tuendum ille nihil afferat. Quoniam verò, ne pro Nihilo suo nihil agere videatur, quandoquidem non potest, mea verba carpit, verba defendam: qua quidem ille nescio quibus praestigijs ita depravat, vt dicere videar, Nihil esse minus quocunque angulo: atque (vt simplicem, credo, hominem irretiat) quarit ex me, quod tandem genus sermonis sit illud. Viderit is, cuius ex officina prodijt. Neq; enim ego eiusmodi sermonem agnosco, qui, Nihil esse minus quocunque angulo, nusquam dixerim, nisi ex sententia Peletarij. Sed videlicet homo vehemens, vt suum illud Nihil eleiseretur, aliud mihi Nihil affinxit, quo cum impune pugnaret: At quàm palaestricè pugnat? quam sibi placet hoc loco, dum meum illud argumentum, quo petitum fuerat, in me ipsum mira venustate conuertit? Sic enim argumentatur. (Angulus

Bulus contactus nihil est: Angulus contactus angulo contactus maior est. Angulus igitur maior nihilo est: Atqui Clauius eundem ponit minorem nihilo, Est igitur angulus contactus nihilo maior, & idem nihilo minor.) *Mox quasi Nihil illud ab se effictum ingulasset, exclamat.* (En Clauii argumenta, quæ vtrum tandem Peletarii sophismata sunt, an Clauii potiùs figmenta, cùm ipse suum angulum contactus nihil esse dicat, non ego?) *Verum vt hominem faneum, atq; adumbratum nequicquam petere desinat, virum ostendam, qui cum, si velit, certare cum laude possit. Ego, vt ostenderem, angulum contactus, ex Euclidis sententia, verè esse angulum, & angulum semicirculi angulo recto rectilineo minorem; ita sum argumentatus. Si Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, (hoc est, vt Peletarius intelligit, non esse angulum, vel non esse quantitatem) & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo; quid obsecro, tantoperè desudasset, vt demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum verò semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quàm nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, hoc est, quàm id, quod quantitas non est, minus esse quocunque angulo? Quid rursus magis perspicuum, quàm angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Agnoscat itaque Peletarius, Nihil illud suum malè à nobis acceptum, idque ita vlciscatur, vt meum hoc argumentum refellat: in quo ego si angulum contactus dixi esse nihil, & non potius eum nihil esse asserui ex sententia Peletarij, libenter manus dabo. Videtur Peletarius aut non intellexisse meum argumentum, aut intelligere noluisse: nisi eum quis dicat, dedita opera verba mea voluisse cauillari; quod & plerisque alijs in locis facere videtur. Numquam enim dixi, angulum contactus minorem esse, aut maiorem nihilo: Solum affirmaui, angulum contactus quemcunque minorem esse, aut maiorem aliquo alio angulo contactus; quem non ego dixi nihil esse, sed Peletarius, eundemq; Euclides minorem quolibet acuto rectilineo rectè demonstrauit. Vt autem intelligat Peletarius, me, quod ipse negat, didicisse Dialecticam, illum ipsum tam lepidum, atq; acutũ syllogismum, quo nihil illud ab se confictum mira venustate confinxit, paulisper considerabimus; vt quàm suo iure Dialectica ignaros alios vocet, appareat. Nam mihi quidem malè tornatus ille ipse syllogismus videtur, incudique reddendus. Etenim cùm versetur in tertia figura, in eo maior extremitas (vt Dialectici loquuntur) qua est, Nihil, de minori extremitate, qua est, angulo contactus maior, in recto pradicari deberet, hoc pacto. Angulus contactus nihil est: Angulus contactus angulo contactus maior est. Igitur aliquid, quod angulo contactus maius est, nihil est. Qua quidem conclusio rectè sequitur ex præmissis, quarum prior Peletarij est, non mea, posterior autem mea, & Procli, immò & Euclidis. Conclusio autem illa Peletarij,*

Angulus igitur maior nihilo eſt, nulla ratione ex præmiſſis inferri poteſt. Nam ſi, angulum cùm dicit, intelligit Peletarius angulum contactus, aſſumitur medius terminus, qui in utraque præmiſſa ſubijcitur: quod nefas eſſe, Ariſtoteles in prioribus Anal. & Dialectici omnes clamant. Si autem alium angulum intelligit, aſſumitur in concluſione terminus, cuius nulla facta eſt mentio in præmiſſis: quod nihilo magis licere, nemo eſt tam plumbeus in Dialecticis, qui neſciat. Neque contendat Peletarius, mentionem factam eſſe angulis in minore extremitate, ubi dictum eſt, angulum contactus angulo contactus maiorem eſſe. Nam angulus in minore extremitate poſitus eſt in obliquo, qui in concluſione ſubijcitur in recto: quod, ut auctore Ariſtotele docent omnes Logici, ſine peccato fieri non poteſt. Quod, ut planum fiat, utemur ea palæſtra, quam ab illo didicimus. Si quiſpiam ita argumentetur; Angulus in ſemicirculo rectus eſt: Angulus in ſemicirculo angulo acuto maior eſt. Angulus igitur acutus maior recto eſt; quis, modò ſit imbutus Dialecticis, eiuſmodi argumentationem probet, cùm præmiſſa vera ſint, concluſio autem falſa? Talis ille ſyllogiſmus eſt Peletarij, qui apud imperitam multitudinem alter Chryſippus videri voluit. Concluſio, quæ recte ex præmiſſis inferretur, hæc eſſet. Igitur aliquis angulus, qui acuto maior eſt, rectus eſt. Sed tamen ei veniam dandam puto, quòd ſe Geometricum Dialecticum, ex alio quodam Dialecticorum genere, profitetur, cuius ego me Dialectica, ſi ab Ariſtotelica abhorret, planè fateor ignarum. Fatetur deinde Peletarius, ſe non intelligere, quo pacto dicere poſſim, angulum rectilineum minimum dari non poſſe, & tamen angulum contactus eſſe omni acuto rectilineo minorem, (ipſe ut aliquid addat de ſuo, dicit, omni minimo acuto rectilineo minorem; cùm tamen verbum illud, minimo, ego non addiderim) cupitque ſcire, quid aliud ſit, angulum contactus minorem eſſe omni rectilineo acuto, quàm angulum contactus eſſe acutorum rectilineorum minimum. Quam rem ignorem geram homini non grauatè, etſi è ſcholio huius propoſ. 16. potuit id, quod cupit, cognoſcere. Nempe ea ratione me illud obtuiſſe dicere, qua dicimus: angulum obtuſum rectilineum minimum dari non poſſe, & tamen angulum rectilineum acutum eſſe omni obtuſo rectilineo minorem. Item quemadmodum aliud eſt, angulum rectilineum acutum minorem eſſe omni rectilineo obtuſo, quam angulum rectilineum acutum eſſe obtuſorum rectilineorum minimum: propterea quòd angulus acutus non eſt obtuſus, ſicut nec angulus contactus rectilineus eſt, aut acutus. Id quod etiam clariſſimè docet Proclus lib. 2. in primum Euclidis ad defin. anguli recti, obtuſi, & acuti. Sed hæc puerilia ſunt; & quæ magis ad Grammaticos ſpectent, quàm ad Geometras. Quod etiam, ne librum meum patrum ſpiſſum videret feciſſe, ſuas demonſtrationes ad verbum me recitaſſe queritur, id in me reprehendit, quod ego in ipſo deſidero. Id enim eo à me com-

me consilio factum est, ut omnes planè viderent, sincerè me, ac fideliter eius opinionem retulisse, nullumq; omnino verbum immutasse. Quod utinam in meis verbis recitandis ipse facere in animum induxisset, Multò enim minùs spissam Apologiam suam facere potuisset. Nam ego, quid erat, cur laborarem meum librum Peletarij verbis magis spissum efficere? Qui enim parum spissum iudicarem librum eum, qui necrasas, nec inanes in libros omnes Euclidis commentationes contineret, cùm Peletarius suum librum, qui sex priorum duntaxat librorum demonstrationes complectitur, satis spissum sit arbitratus? Sed eo sum aequior Peletario, quod ex se alios iudicat. Nam in Apologia sua, ne inanum rerum videretur, tres demonstrationes nihil penitus ad eam pertinentes inserit: quarum priorem immeritò suam propriam facit, ut suprà dixi: posteriorem verò, quam mirum in modum gloriatur se clariorem fecisse, ego & longè brevius, & dilucidius (nisi meorum me amor fallat) iam pridem demonstraui, ut mox, Deo adiuuante, ex Geometria mea Practica clarissimè apparebit. Sed licuerit Peletario sua Apologia, ne incomitata prodiret, nouo more comites ac pedissequas adiungere: mihi cur non liceat, quod omnibus semper licuit, aliorum sententias totas meis scriptis intexere? Aut igitur omnes reprehendat, atque inprimis Petrum Nonium laudatorem suum, qui idem fecit in refellendis paralogismis Orontij, aut sine causa id se mihi vitio dedisse fateatur. Quod si, postquam tam fideliter eius verba proposui, Peletarius criminatur, me eius sententiam perperam esse interpretatum, quid facturus fuisset, si alienis verbis eius opinionem in medium adduxissem? Equidem facilè sibi persuadebit quis, nullum eum verbum relicturum fuisse, quod non reprehendisset.

QVARTO. Ut leuiora hæc omittat, illud putat palmare, quod me laborare ostendit, ut probem, angulos contactus alios alijs esse inæquales: propterea quòd scripsi æqualitatem angulorum eiusdem generis requirere eandem inclinationem linearum, ita ut linea quæ conueniant omnino lineis alterius, si alter alteri superponatur, iuxta octauum pronunciatum. Qua in re dupliciter me peccare ait. Primum quod dicam, ad æqualitatem angulorum eiusdem generis requiri eandem linearum inclinationem; cùm tamen angulus rectilineus ostensus sit à me æqualis curuilineo, atque adeò eiusdem generis cum illo, licet non sit in utroque eadem linearum inclinatio. Deinde, quòd putem angulos contactus ideo inter se inæquales esse, quod sibi mutuò non congruant. Equidem si quid in eo à me peccatum esse intelligerem, & peccatum (quod est inganno, & liberaliter educato homine dignum) agnoscerem, & Peletario correctori, & emendatori meo (quocunque id animo fecerit) gratias agerem. Nunc verò, cum, tota re etiam atque etiam considerata, nihil omninò vitij inesse videam, ita, quæ obijciuntur, diluam, ut tamen gratiam habeam Pele-

rario, qui occasionem dedit eius loci diligentius explicandi. Ego igitur eo loco intellexi angulos eiusdem generis illos, qui vnam lineam habent rectam, & alteram circularem, quales sunt anguli contactus, & semicirculorum, de quibus tunc agebamus. Quare cum linea recta vnius congruat linea recta alterius, circularis verò circulari non item, nisi circuli ponantur aequales, efficitur, angulos illos esse inaequales inter se, quippe cum alter alterum excedat. Eadem ratione, si dentur duo anguli curuilinei aequalium circulorum aequales, necesse est, lineas vnius lineis alterius congruere, si alter alteri superponatur. Quòd si Peletarius hanc doctrinam oppugnat, sciat, se iam bellum mouere non mihi, sed Proclo, qui lib. 3. in primum Euclidis ad propos. 4. idem prorsus docet, quod ego. Ait enim (Angulorum autem æqualitatem sumemus iuxta conuenientiam laterum in rectilineis: in cæterisque omnibus, qui eiusdem sunt speciei, vt in Lunaribus, in Systroidibus, atque in vtrinque conuexis, &c.) *Et infra.* (Quæ æqualia data sunt, sibi inuicem congruunt. Hoc autem non in omnibus verum est, sed in ijs, quæ specie similia sunt. Specie autem similia hæc dico, vt recta linea rectæ lineæ, & circumferentia circumferentiæ circuli eiusdem, & anguli, qui à similibus similiter iacentibus lineis comprehensi sunt. Horum autem dico, quòd quæ æqualia data fuerint, sibi inuicem congruunt.) *Nonne luce clarius ex his colligitur, Proclum illos solùm angulos contactus concedere æquales, quorum recta linea, & curua sibi mutuò congruunt? Temerè igitur Peletarius mihi obiecit angulum rectilineum, & curuilineum, triangulum & quadratum, atque alia huiusmodi, de quibus eo loco sermo non erat; quippe qua non sint eiusdem speciei, atque adeò æqualitatem tueantur, etiamsi alterum alteri non congruat. Vt iam vereri incipiam, ne Peletarius noster contentionis sit cupidior, quàm veritatis.*

POSTREMO, vt nihil intactum relinquat, me non modò Geometria ignarum vocat, sed etiam Logices: propterea quòd lib 5. dixi, non rectè à quibusdam diuidi Proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, atque inæqualitatis; quòd multæ proportiones inæqualitatis sint etiam irrationales. Ego verò (etsi non sum, qui mihi quicquam illo in genere arrogem) tamen in hisce studijs, in quibus mediocriter versatus sum, planè rudem non esse, præ me semper tuli. Quantulum autem sit id, quod in vtroque possim, cæteri melius, qui vacant amore, & odio, iudicabunt; Peletarius quidem ipse ita me adhuc respondisse arbitror, vt iam minùs fortasse ignarum Geometriæ, ac Dialecticæ videar, quàm putarat. Nunc, vt perspicuè, neq; me pertinacem esse, neq; illa, quæ exagitat, à Dialecticorum præceptis abhorrere, libenter ei concedo, diuisionem illam, quam à me reprehensam criminatur, probam esse, ita tamen si in quolibet diuisionis membro Diuisum intelligatur: neque vero hoc vnquam negarim,

cum

cùm alibi similes diuisiones usurpem. Solùm id eo loci contendi, rectius meo iudicio, diuidi Proportionem in uniuersum duplici diuisione, priori quidem in proportionem rationalem, & irrationalem; posteriori verò in proportionem æqualitatis, atque inæqualitatis, (quod uerissimum esse, neminem negaturum censeo, qui rem diligentius expenderit) cùm tam priora duo membra diuidentia, quàm posteriora totum Diuisum, (ut Logici loquuntur) exhauriant: quàm si prima membrum prioris diuisionis, hoc est, proportio rationalis, secetur in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis, cùm hæc membra diuidentia latiùs pateant, quàm Diuisum, nisi in illis Diuisum intelligatur. Atque eo magis duplex illa diuisio mihi probatur, quòd non desint, qui primùm partiantur Proportionem in proportionem æqualitatis & inæqualitatis; posteriorem deinde hanc in proportionem rationalem, & irrationalem: contrario scilicet modo, quàm priores. Vt igitur hanc controuersiam dirimerem, ac dubitationem, utri rectiùs faciant, priores ne, an posteriores, tollerem, statui duabus diuisionibus secandam esse Proportionem, quarum utraque absolutissima est, ac perfectissima. Non aliter arbitror, omnes magis esse probaturos, si corpus duplici diuisione secetur, primùm quidem in uiuens, & non uiuens; deinde verò in album, nigrum, ac mixto colore affectum: quam si corpus uiuens diuidatur in album, nigrum, ac mixto colore affectum; ob causam iam dictam: licet hæc subdiuisio bona sit, si Diuisum semper intelligatur. Huiusmodi diuisiones sexcentas adducere possem: sed satis est, me prudenti lectori instituti meum in diuisione Proportionis exposuisse, & cur duplicem illam diuisionem subdiuisioni aliorum prætulerim. Quòd si tam acres, & seueri iudices singulorũ uerborum aut improprietatum, quæ per incogitantiã interdum excidunt, esse uelimus, nã scriptorum nullius aliquo uitio carebit, neq; ipse quidem Peletarius, ut partim ex ijs, quæ dicta sunt, constat, partim etiam ex alijs eius demonstrationibus apparere potest: quas si liberet ad certam illam Dialecticorum normam exquirere, profectò reprehendendã materia non deesset. Verum non est hoc nostri consilij, refellendis studio uitia aliena scrutari, sed ubi sese occasio obtulerit, meam (quæ-liscunque est) de aliorum sententijs sententiam exponere: Solùm ab eo peto, (quoniam se tam acutum Dialecticum iactat, & alios contemnere uideatur; quanquam ex superiore syllogismo, quem in me conuertit, liquidò constat, quam sit Dialectica peritus) ex qua Logica hanc argumentationem hauserit; Omnes anguli contactus sunt minores quolibet angulo acuto rectilineo: ergo omnes inter se sunt æquales. Itemque hanc; Anguli semicirculorum, quo à maioribus circulis fiunt, eo sunt maiores: igitur tandem ad aliquem peruenietur, qui recto rectilineo maior sit; in qua quidem ad Cardanũ scribit, nullum esse paralogismum. Ego sanè uehementer miror, qua ratione in tam apertas hallucinationes, & uir Geometra omnium iudicio, incidere

potuerit. Sed argumentationes eiusmodi satis superq; in scholio huius propos. 16. à me sunt confutatæ, adductis contra ipsas euidentissimis instantijs. Deinde quòd me perstringat, quasi parum intellexerim, quæ sit proportio rationalis, & quæ irrationalis, non multum laboro. Constat enim, eum studio mihi detrahendi id dixisse, cùm has proportiones vbique ex sententia grauissimorum scriptorum definierim, neque verò ipse vllum peccatum à me ea in re esse commissum, poterit ostendere. Certè commentarius meus in lib. 10. Euclidis abundè declarat, num illas intellexerim, nec ne. Denique quod criminatur, me in definitionibus lib. 5. proportionis nomen confundere cum Rationis nomine, nullo modo verum est. Perspicuis enim verbis docui in defin. 4. lib. 5. me in commentario comparationem duarum quantitatum, Proportionem cum pluribus Geometris appellaturum, habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem; licet in textu cum interprete illam dicam Rationem, hanc verò, Proportionem. Neque enim quicquam in textu Euclidis volui immutare. Itaque nulla in meis verbis potest esse ambiguitas.

EX his, quæ diximus, satis (vt opinor) apparet, doctissimos illos viros, de quibus initio memini, non sine causa Apologiam Peletarij inanem, ac responsionis indignam iudicasse. Ego tamen, ne contemnere hominem viderer, quem semper laudandum esse duxi, occasione inuitatus respondendum amicè putaui. Existimet ille, angulum contactus quantitatem non esse, atque adeò angulum semicirculi recto rectilineo esse æqualem, ego certè contrariam sententiam tuebor, donec aliud mihi demonstratum ab aliquo fuerit: rationes enim Peletarij fallaces sunt, nihilq; continent in se probabilitatis, vt in scholio huius propos. 16. ostendi, vbi omnes dissolui, neque meum ipse solutionibus vel vnum verbum (exceptis ijs, quæ suprà ex lib. 10. adduxi) respondit; quod tamen maximè ad Apologiam pertinebat: Vt non sine causa permulti existimauerint, eum non veritatis studio eam Apologiam scripsisse, sed ne veritatis cessisse videretur. Nec verò quisquam putet, me vnum existimare, angulum contactus verè esse angulum, & angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Multos enim eius rei auctores, eosq; grauissimos laudare possum, Theonem, Campanum, Petrum Nonium, & (vt Nonius refert) Archimedem, atq; Iordanū: quin etiam (quod plurimi facio) Euclidem ipsum, eiusq; commentatorem celeberrimum Proclum; vt taceam ex Gallis præstantissimos, atque eruditissimos viros non paucos, è quorum numero imprimis est Franciscus Candalla ex illustrissima Flussatum familia oriundus, qui insigne volumen in elementa Geometrica Euclidis edidit, vbi ad propos. hanc 16. apertissimè docet, angulos contingentia verè esse angulos, ex definitione anguli plani, alioqui esse maiores, æquales, ac minores: Eos autem, qui aliter sentiunt, (Peletarium proculdubio intelligit. Præter eum enim ad hunc diem nemo hac de re scripsit) absurdè

multa

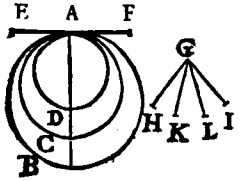
multum ex falsis suppositis concludere affirmat. Huc accedat etiam Henricus Monantholius Mathematicarum artium professor regius, qui, cum Apologiam Peletarij in me conscriptam vidisset, opusculum eruditum aduersus Peletarium de angulo contactus edidit. Vt autem studiosus lector videat, quid in hoc negotio sentiat Proclus, afferam in medium pauca quadam ex eius commentarijs in lib. 1. Euclidis, quæ obiter notaui, & ex quibus liquido constabit, eius sententiam esse Peletarij commento prorsus contrariam. Primum itaque ita scribit lib. 2. in primum Euclidis, ad definitionem anguli plani. (Duæ namque circumferentiæ se inuicem secando, vel sese contingendo, angulos efficiunt. Quin etiam à recta linea, & conuexa circumferentia angulus continetur, vt Cornicularis.) *Intelligit autem nomine Cornicularis anguli angulum contactus mixtum. Paulo enim ante dixerat, angulum Cornicularem esse omni rectilineo minorem: quod solius anguli contactus proprium est. Deinde in eodem libro ad definitionem anguli recti, obtusi, & acuti ita habet.* (Cornicularis namque angulus omni recto est minor, quandoquidem & acuto, nec tamen acutus est: Semicircularis itidem quocunque recto est minor, acutus tamen non est.) *Quid clarius, quam Proclum hic asserere, angulum semicirculi minorem esse recto? Rursus lib. 3. ad propos. 4. lib. 1. Euclidis ita scribit.* (Addiscemus enim, quòd angulus Cornicularis acuto semper inæqualis est, & nunquam æqualis; Et semicircularis similiter, transitusque à maiori ad minus non omnino per æquale fit.) *En quam apertè docet, angulum semicirculi æqualem esse non posse angulo rectilineo, transitumque propterea fieri à maiori ad minus non per æquale: quorum vtrumque Peletarius negat, audetque posterius appellare paralogismum. Denique eodem lib. 3. ad propos. 23. hæc verba habentur.* (Cum autem nullus angulus mixtus rectilineo æqualis esse possit, &c.) *Et Peletarius tamen non dubitat angulum semicirculi, qui mixtus est, angulo recto rectilineo facere æqualem, contra Procli sententiam. Ex his liquere arbitror, vt de cæteris taceam, idem sentire Proclum de angulo contactus, & semicirculi, quod ego contra Peletarium scripsi; quis autem neget, maiorem esse auctoritatem, meliora argumenta Procli, quam Peletarij?*

OBITER quoque hoc loco monendum lectorem censeo, id quod de angulo contactus, qui fit in circulis, ex sententia Euclidis, & Procli docui, verum etiam esse de angulo contactus, qui in conicis sectionibus efficitur, nimirum in Parabola, Hyperbola, & Ellipsi. Vt enim Apollonius Pergæus demonstrat lib. 1. propos. 32. in locum, qui inter coni sectionem, & rectam lineam tangentem interijcitur, altera recta linea non cadit, atque adeo angulus ille contactus minor etiam est omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (si nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitetur perpendicularis)

omni acuto rectilineo maior. Si igitur, vt opinatur Peletarius, angulus contactus quantitas non est, (eadem enim hic est ratio, qua in circulo) erunt omnes anguli contactus inter se æquales, hoc est, vt ipse vult, non inæquales, & reliquorum angulorum singuli recto rectilineo æquales. Vbi sanè maior absurditas apparet, quo ad sensum, in ea Ellipsi, qua perexiguam habeat latitudinem, & in ea Hyperbola, quæ ferè linea recta esse videatur. Valde enim inæquales cernuntur anguli ad verticem illius Ellipsis, & Hyperbolæ constituti; vt incredibile omnino sit, nisi firma ratione demonstretur, angulos illos contactus ad vertices sectionum constitutos inter se, & reliquos ex rectis inter se quoque esse æquales; propterea quod in ea Ellipsi linea tangens magis recedere perspiciatur à circumferentia Ellipsis, quam in circulo; in illa verò Hyperbola minus. Sed hæc alio tempore examinanda relinquamus: nunc ad interruptam expositionem Euclidis reuertamur.

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas potest continuè, & infinitè augeri, altera verò infinitè minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius.



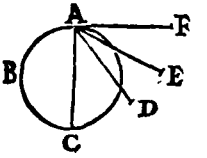
PROPONANTVR enim angulus contactus BAE, & acutus HGI. Si igitur describantur alij circuli minores AC, AD, tangentes rectam EF, in A, angebitur continuè angulus contactus, vt dictum est. Si rursus inter rectas GH, GI, alia recta cadant GK, GL, diminuetur continuè angulus acutus: Et tamen semper angulus contactus, quantumlibet angeatur, minor est angulo acuto, quantumuis diminuatur.

EX CAMPANO.

CÆTERVM ex hac propos. 16. perspicuum est, vitiosam esse argumentationem hanc, qua vsus est Brisso in quadrando circulo, vt auctor est Aristoteles. Videlicet.

TRANSITVR à minori ad maius, vel contra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc, & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.

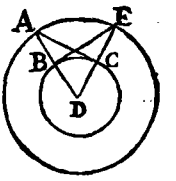
DESCRIBATVR enim circulus ABC, cuius diameter AC, moueri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per puncta D, E, F, donec circulum contingat in A. Hoc concesso, manifestum est, quam-



est, quamdiu recta AC, secat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo semicirculi; quamprimum vero secare cessat, efficit angulum rectum maiorem eodem angulo semicirculi. Cum igitur factus sit transitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus aqualis reperitur angulo semicirculi; (Rectus enim, vel obtusus, maior est; & acutus, minor,) constat quoque vitiosam esse posteriorem consequentiam.

PROBL. 2. PROPOS. 17. xvj.

A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.



EX puncto A, ducenda sit linea, quæ tangat circulum BC, cuius centrum D. Ducatur recta AD, secans circulum BC, in B. Deinde centro D, interuallo autem DA, describatur circulus AE, & ex B, educatur BE, perpendicularis ad AD, secans circulum AE, in E. Ducta denique recta ED, secante circulum BC, in C, connectatur recta AC: quam dico tangere circulum BC, in C. Cum enim duo latera DE, DB, trianguli BDE, æqualia sint duobus lateribus DA, DC, trianguli CDA, vtrumque vtrique, vt constat ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus sit communis: Erunt *a* & bases BE, CA, & anguli DBE, DCA, a 4. pri. super ipsas, æquales. Est autem DBE, rectus ex constructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaque CA, eum sit perpendicularis ducta ad C, extremum semidiametri CD, tanget circulum, per corollariū præcedentis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est AC, recta tangēs circulum BC, in C, quod faciendum erat.

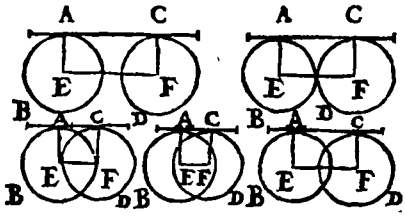
SCHOLIVM.

PRAXIS huius problematis ex ipsa demonstratione facile elicitur. Faciliorem tamen praxim, ad propos. 31. huius lib. inuenies.

SED & sequens problema cum Cardano absoluemus.

PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterum includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumque tangat circulum.

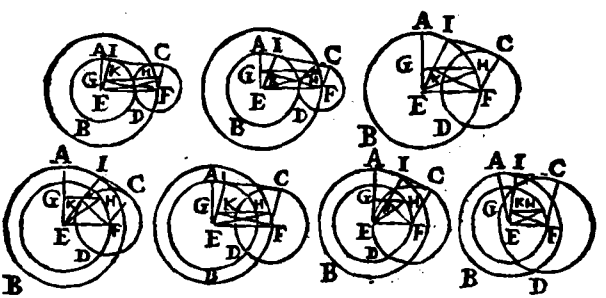
SINT primum duo propositi circuli aquales AB, CD, quorum centra E, & F, recta iungantur EF, ad quam ducantur perpendiculares EA, FC, secantes circumferentias in punctis A, & C. Dico rectam, et



a 28.pri mi. b 33.pri mi. c 29.pri mi.

tam per A, & C, eductam vtrumq; circulum tangere. Cũ enim E A, F C, semidiametri circulorum aqualium sint aquales, a & parallela, quod anguli E, & F, recti sint; b *Erunt quoque E F, A C, aquales & parallelæ; Ideoque c & anguli A, & C, recti. Quare, per coroll. propos. 16. huius lib. recta A C, vtrumque circulum tanget, cum rectos angulos constituat in extremitatibus semidiametrorum.*

SINT deinde duo circuli propositi inaquales A B, C D, quorum rursus centra E, & F, iungantur recta E F, ad cuius inter uallum ex E, centro maioris circuli circulus describatur F H, si maior non transeat per centrum minoris. Deinde ducta ad E F, perpendiculari E A, abscindatur ex ea portio A G, semidiametro minoris circuli C D, aqualis; & ex G, ipsi E A, perpendicularis ducatur G H, vsque ad circumferentiam circuli F H, proxime descripti. Ducta autem recta H E, fiat angulo H E A, angulus F E I, aqualis; atque per F, aqua-



tur ipsi E I, parallela recta F C. Dico rectam per puncta I, & C, ductam vtrumque circulum A B, C D, contingere. Abscindatur enim ex I E, recta I K, ipsi A G, vel semidiametro F C, minoris circuli, aqualis, vt sint reliquæ E G, E K, aquales quoque, ducaturque recta K F. Quoniam igitur latera H E, E G, trianguli H E G, aqualia sunt lateribus F E, E K, trianguli F E K, & anguli ipsis contenti aquales, d *ex constructione:* d *Erunt anguli H G E, F K E, aquales: Ac proinde,* e *cum H G E, rectus sit, ex constructione, erit & F K E, rectus. Rursus* f *quia C F, I K, aquales sunt, & parallelæ, ex constructione,* e *erunt quoque I C, K F, aquales & parallelæ; Atq; propterea angulus E I C,* g *cum aqualis sit externo F K E, rectus erit;* g *Ideoque & I C F, rectus existet. Quocirca, per coroll. propos. 16. huius lib. recta I C, vt-unmque*

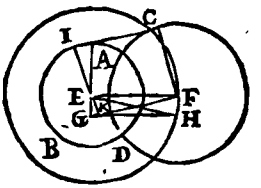
d 4.pri. e 33.pri. f 29.pri mi. g 29.pri mi.

circulum

circulum continget, cum rectos angulos efficiat in extremitatibus semidiametrorum. Quod erat propositum.

SATIS autem constat, si circuli propositi æquales fuerint, id quinque modis posse fieri. Aut enim alius extra alium cadit, aut se mutuo contingunt, aut se inuicem per centra secant, aut non, ita tamen, vt vel centra consistant in communi eorum segmento, vel certe extra illud.

ITEM si circuli propositi fuerint inæquales, id contingere posse septem modis. Aut enim minor totus extra maiorem cadit, aut ipsum tangit, aut ipsum secat, ita vt vel centrum eius sit in circumferentia maioris, vel intra ipsum circulum, hac tamen lege, vt circumferentia minoris citra centrum maioris transeat, vel centrum minoris sit extra circulum maiorem, vel iterum ita intra, vt circumferentia minoris per maioris centrum incedat, vel denique ita intra, vt circumferentia minoris includat centrum maioris.



QVONIAM verò circulis inæqualibus existentibus, initium constructionis sumpsimus semper à maiori, si quis maluerit à minori incipere, id efficiet eadem constructione, demonstrationeq́, nisi quod rectæ AE, IE, protrahendæ sunt ad G, & K, vt AG, IK, æquales sint semidiametro FC, maioris circuli; Addito insuper, angulos HEG, FEK, contentos lateribus HE, EG; FE, EK, idcirco æquales esse, quod HEA, FEI, reliqui duorum rectorum, æquales sint ex constructione. Denique angulum EIC, esse rectum, ex 29. propos. lib. 1. quod & EKF, inter parallelas IC, KF, rectus sit ostensus.

QVIA verò & per punctum in circumferentia circuli datum, & per punctum extra circulum existens lineam rectam, quæ circulum tangat, ex ijs, quæ demonstrata sunt, ducere possumus; per punctum quidem in circuli circumferentia positum, ex coroll. propos. 16. per punctum verò extra circulum ex hac propos. 17. Item ostensum est hoc scholio, rectam duci posse, quæ duos circulos tangat, dummodo alter eorum in altero non totus includatur; non alienum erit hoc loco demonstrare, quo pacto per datum punctum circulus alium datum circulum tangens, sive interius, sive exterius, describendus sit: Item quæ ratione describendus sit circulus tangens duos alios circulos, quorum vnus non sit totus intra alium.

SIT ergo primum in circulo AB, cuius centrum C, datum punctum A, in circumferentia, per quod describendus sit circulus, circulum AB, tangens in A. Ducta ex A, per centrum C, recta AC, sumatur in ea quodvis punctum D, ex quo ad internallum DA, circulus describatur AE, qui circulum AB, in A, tanget; Et si quis eorum punctum D,



ctum D, fuerit vltra centrum C, cadet circulus A E, totus extra circulum A B; intra vero, si punctum D, in semidiametro A C, extiterit, vt scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

DEINDE extra eundem circulum AB, datum sit punctum G, per quod describendus sit circulus circulum A B, tangens. Ducta ex G, per centrum C, recta G C A, eaque secta bifariam in D, describatur ex D, per A, circulus A E, qui per datum punctum G, transibit, tangetque circulum A B, in A, per ea, qua in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

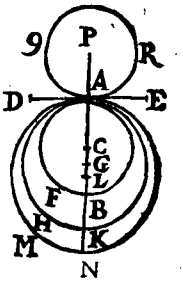
ALITER. Sit datum rursus punctum E, extra circulum A B. Ducta recta E A, vtcunque ex puncto dato E, qua circulum secet, & non per centrum transeat, ducatur ex A, per centrum C, recta A C; eritque angulus E A C, acutus, cum pars sit anguli semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo E A C, in E, aqualis constituatur A E D: coibitque recta E D, cum A C, in D, ob duos angulos D A E, D E A, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli D A E, D E A, aqua-
a 6. pri. *les sunt, a erunt & latera D A, D E, aqualia. Circulus ergo ex D, per A, descriptus per datum punctum E, transibit, tangetque circulum A B, in A, ex ijs, qua in supradicto scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.*

TERTIO datum sit punctum F, intra circulum A E. Ducta ex F, per centrum D, recta F A; eaque secta bifariam in C, describatur ex C, per A, circulus A B, qui per datum punctum F, transibit, tangetque ex dicto scholio circulum A E, in A.

ALITER. Sit datum rursus punctum B, intra circulum A E, cuius centrum D. Ducta recta quacunque A D, per centrum D, & non per datum punctum B, transeunte, qua cum recta coniuncta A B, faciet angulum acutum B A D, vtpote minorem angulo semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo B A D, in B, aqualis fiat A B C: coibitque recta B C, cum A D, in C, ob duos angulos B A C, A B C, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli B A C, A B C, aquales
b 6. pri. *sunt, b erunt & latera C A, C B, aqualia. Circulus ergo ex C, per A, descriptus per datum punctum B, transibit, tangetque circulum A E, in A, per ea, qua à nobis scholio propos. 13. huius lib. demonstrata sunt.*

QVOD si per punctum N, extra circulum Q A R, datum describendus sit circulus tangens circulum Q A R, exterius, ita vt neuter intra alium cadat, ducatur ex N, puncto dato ad centrum P, circuli Q A R, recta N P, secans circumferentiam circuli in A. Diuisa deinde recta N A, bifariam in L, describatur ex L, per A, circulus, qui per datum

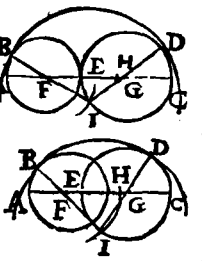
datum punctum N, transibit, tangetque circulum Q A R, in A, propterea quod vterque circulus rectam D E, qua per A, ducitur ad N P, perpendicularis, tangit in A, ex coroll. propos. 16 huius lib.



EODEM modo, si in circumferentia circuli Q A R, datum sit punctum A, describemus circulum, qui circulum Q A R, exterius tangat in A. Ducta enim ex centro P, recta P A C, per datum punctum A, si ex quolibet puncto huius recta, per A, circulus describatur, nimirum A M N, ex centro L, tanget hic circulum Q A R, vt dictum est, in A:

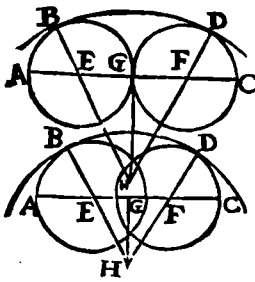
EX his liquet, per idem punctum datum plures posse circulos describi alium datum circulum tangentes, (si nimirum ex datis punctis E, B, in priori figura ducantur aliæ rectæ, quæ à rectis E A, B A, differant; Item ex punctis datis F, G, emittantur aliæ lineæ non per centra C, D, transeuntes, sed circulos secantes; ac tandem in recta A C, eiusdem figuræ, vel in P A C, posterioris figuræ, quando punctum A, in circumferentia datur, alia centra à centris C, D, L, diuersa assumantur) cum tamen per punctum datum extra circulum vna sola linea ad easdem partes duci possit circulum tangens. Quo pacto autem circulus duos circulos tangens, quorum vnus non sit totus intra alium, describendus sit, hac ratione cum Ioan. Bapt. Benedicto demonstrabimus.

SINT primum duo circuli se mutuo tangentes, aut secantes inæquales, A B, minor, & C D E, maior, quorum centra F, G, per quæ recta ducatur F G, occurrens circumferentiis in A, C, qua, si circuli se tangant in E, à per contactum E, transibit. Abscissa recta E H, ex semidiametro maioris circuli, quæ semidiametro minoris sit æqualis, describatur ex F, centro minoris ad interuallum rectæ H C, quæ maior est, quam semidiameter minoris, arcus secans circumferentiam maioris in I; & ex I, per centra F, G, rectæ ducantur I F, I G, occurrentes circumferentiis in B, D. Et quia C H, ipsi I F, & H E, ipsi F B, æqualis est, per constructionem; erunt totæ C E, I B, æquales. Cum ergo & diameter I D, diametro C E, æqualis sit, erit quoque I B, ipsi I D, æqualis. Circulus ergo ex I, per B, descriptus transibit per D. Cum ergo idem, ex scholio propos. 13. huius lib. extra vtrumque circulum cadat totus, tanget vtrumque circulum in B, D. Quod est propositum.



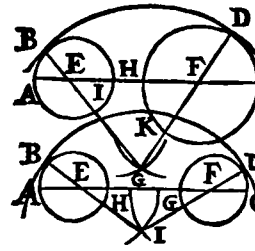
812. tex.

SINT



SINT deinde duo circuli se mutuo tangentes, vel secantes aquales, A B, C D, per quorum centra E, F, recta educatur A C. Diuisa deinde recta E F, inter duo centra bifariam in G, (Quando circuli se mutuo tangunt, diuiditur recta E F, bifariam in puncto contactus, propter semidiametros aquales aqualium circulorum) excitetur in G, ad E F, perpendicularis G H: in qua sumpto puncto H, vtcunque, ducantur ex eo per centra E, F, recta occurrentes circumferentiis in B, D. Quoniam igitur duo latera G E, G H, duobus lateribus G F, G H, aqualia sunt, angulosque a 4. pri. *comprehendunt aquales, nimirum rectos; a erunt & bases H E, H F, aquales: Et additis semidiametris aqualibus E B, F D, tota linea H B, H D, aquales erunt. Circulus igitur ex H, per B, descriptus transibit per D, cadetq; extra vtrumque circulum, ex scholio propos. 13. huius lib. Quare vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.*

TERTIO sint duo circuli siue aquales, siue inaquales, A B, C D, quorum alter extra alterum sit totus. Per eorum centra E, F, ducatur recta A C. Et si circuli sunt inaquales, describatur ex E, centro minoris ad interuallum diametri maioris C H, arcus, quem in G, secet alter arcus ex F, centro maioris descriptus ad interuallum recta F I, composita ex semidiametro maioris F H, & H I, semidiametro minoris aquali. Ponamus enim nunc hos arcus se intersecare; quando autem se non secant, dicemus mox, quid agendum sit. Ex G, autem per centra E, F, recta ducantur secantes circumferentias in B, D. Et quia F G, ipsi F I, aqualis est: ablatis aqualibus F K, F H; reliqua aquales erunt K G, H I. Est autem H I, sumpta aqualis semidiametro minoris E B. Igitur & K G, ipsi E B, aqualis erit. Cum ergo & E G, diametro maioris K D, sit aqualis; erunt tota recta G B, G D, aquales. Quare circulus ex G, per B, descriptus transibit per D, cadetque extra vtrumque circulum ex scholio propos. 13. huius lib. ac proinde vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.

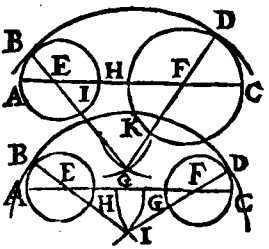


VERVM quia non semper duo illi arcus ex E, & F, descripti se intersecant, quod accidit propter nimiam circulorum distantiam vnius ab altero, absoluemus problema hoc alio modo, qui generalis est, siue circuli se tangant, siue non, etiamsi non se secent, & siue aquales sint, siue inaquales. Ducta recta A C, per circulorum centra

sumantur

sumantur rectæ æquales AG, CH, ita vt qualibet semissem ipsius AC, superet: & ex centro E, per G, arcus GI, describatur, quem secet in I, alius arcus HI, ex centro F, per H, descriptus: ac denique ex I, per centra E, F, rectæ emittantur circumferentijs occurrentes in B, D. Et quoniam EG, EI, æquales sunt; si addantur æquales AE, BE, fient tota AG, BI, æquales. Eadem ratione erunt CH, DI, æquales. Cùm ergo AG, CH, posita sint æquales, erunt quoq; BI, DI, æquales. Circulus igitur ex I, per B, descriptus transibit per D, totusq; extra vtrumque circulum cadet, ex scholio propos. 13. huius lib. ac propterea vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.

IAM verò eadem arte describemus circulum datæ magnitudinis, qui duos circulos propositos tangat, dummodò semidiameter circuli describendi maior sit semisse rectæ AC, per centra circulorum vsque ad circumferentias ductæ. Nam si semidiametro dati circuli rectas æquales abscindamus AG, CH, reliqua perficiemus, vt proximè dictum est.

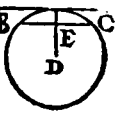


PORRO manifestum etiam est, si ex puncto medio rectæ AC, per centra circulorum vsque ad circumferentias ductæ, describatur circulus per A, & C, eum circulum tangere vtrumque circulum AB, & CD, in A, & C, ex scholio propos. 13. huius lib.

EX PELETARIO.

LINEÆ rectæ, quæ circulum secet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.

CIRCVLVM enim ABC, cuius centrum D, secet recta BC, cui ducenda est parallela tangens circulum ABC. Ducatur ex centro D, recta DE, perpendicularis ad BC, extendaturq; ad punctum A, in circumferentiam; & ex A, ducatur FG, perpendicularis ad AD. a *Erit igitur FG, parallela ipsi BC, tangetq; circulum in A, per corollarium propos. 16. huius lib. quod erat faciendum.*



a 28. primi.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xviij.

SI circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.



RECTA linea AB, tangat in C, circulum CD, cuius centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem esse ad AB. Si enim non est, ducatur EF, perpendicularis ad AB, secans circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo CEF. a duo anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis; & est EFC, rectus, ex constructione erit ECF, minor. Quare b maior erit recta EC, hoc est, ED, quàm EF, pars quàm totum. quod est absurdum. Est igitur EC, perpendicularis ad AB Quare si circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonstrandum erat.

a 17. primi.

b 19. primi.

ALITER. Si EC, non est perpendicularis ad AB, erit alter angulorum ad C, obtusus, & alter acutus. Sit ergo EGB, acutus, qui cùm maior sit angulo semicirculi ECD, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum. Omnis siquidem angulus semicirculi c maior est omni acuto.

c 16. tertij.

SCHOLIVM.

HINC licebit demonstrare sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: Videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis; erunt omnes rectæ lineæ interiorem circulum tangentes, & vsque ad circumferentiam exterioris circuli extensæ, inter se æquales, bifariamque in punctis contactuum secabuntur.



SINT duo circuli ABCD, EF, ex eodem centro G, descripti, quos tangant rectæ AC, BD, in punctis E, F. Dico rectas AC, BD, esse æquales, bifariamq; secari in E, F. Ducantur enim ex centro G, ad puncta contactuum E, F, rectæ GE, GF, d quæ ad AC, BD, perpendiculares erunt; ac proinde, per defin. 4 huius lib. rectæ AC, BD, æqualiter à centro G, in circulo ABCD, distabunt, cùm perpendiculares GE, GF, æquales sint. Igitur e rectæ AC, BD, æquales sunt. Diuidunturautem f & bifariam in E, F, à perpendicularibus GE, GF. Constat ergo id, quod propositum est.

d 18. tertij.

e 14. tertij.

f 3. tertij.

xviij. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TANGAT recta AB, circulum CDE, in C; & ex C, ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in CE, esse centrum circuli. Si enim est extra CE, sit F, centrum, à quo ad C, ducatur recta FC, quæ

quæ *a* perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo FCB, æqualis erit, pars toti: quod est absurdum. Non igitur extra CE, centrum circuli existet. Itaq; si circulum tetigerit recta quæpiã linea, &c. Quod erat demonstrandum.



a 18. tertij.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xxix.

IN circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cùm fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN circulo ABC, cuius centrum D, super basin BC, constituatur angulus BDC, ad centrum; & super eandem basin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplum esse anguli BAC. Includant enim primũ duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, *b* erunt anguli DAB, DBA, æquales; Est autem externus angulus BDE, *c* æqualis duobus angulis internis DAB, DBA. Quare BDE, duplus erit alterius eorum, vt anguli DAB. Eodem modo duplus ostendetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC. Quando enim duæ magnitudines duarum sunt duplæ, singulæ singularum, est quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Constat ergo propositum.



b 5. primi.

c 32. primi.

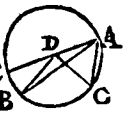
DEINDE non includant rectæ AB, AC, rectas DB, DC, sed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC, *d* æqualis est duobus internis DAC, DCA. Hi autem duo *e* inter se sunt æquales, quòd latera DA, DC, sint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod est propositum.



d 32. primi.

e 5. primi.

TERTIO recta AB, secet rectam DC, & per centrum D, extendatur recta AE. Quoniam igitur angulus EDC, ad centrum, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandem basin EC, & recta AE, extenditur per centrum; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, vt ostensum est in secunda parte. Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent enim hi anguli eandem basin EB. Reliquus igitur angulus BDC, duplus erit reliqui anguli BAC. *f* Quando enim totum totius est duplum, & ablatum ablati; est & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex est, &c. Quod erat demonstrandum.



f 20. primum.

SCHOLIVM.

AD primam partem huius propos. demonstrandam assumptum est hoc principium. (Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint duplæ, singulæ singularum; erit quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum) *In tertia verò partis demonstratione hoc aliud principium adhibitum est.* (Si totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum) *Quorum vtrumq; ab Euclide vniuersaliter demonstratur in omni genere multiplicium, & de quotcunque magnitudinibus, libro 5. propos. 1. & 5. Non tamen propterea demonstratio huius propos. censenda est vitiosa, quasi assumat ea, quæ nondum sunt demonstrata: quia & duo illa principia lumine naturali ita cognita sunt in duplis magnitudinibus, vt facilè à quouis sine vlla demonstratione concedantur, & vtraque illa propositio lib. 5. demonstrari potest ante tertium hunc librum, cùm ex communi ideant: adeò vt duo illa principia iure optimo adhiberi possint hoc loco, tanquam demonstrata. Neque verò hac in re circulus ab Euclide committitur, cùm duo illa principia, per quæ propos. 20. huius lib. demonstratur, hac eadem propositione non utantur, aut aliis propositionibus, quæ ex hac 20. pendent.*

VERVM, si placet, demonstrabimus primam partem huius propos. sine priore illo principio, & tertiam sine posteriore, (secunda enim pars neutro eorum indiget) *hac ratione. Repetatur prima figura. Et quoniam* a *tam anguli DAB, DBA, inter se æquales sunt, quàm anguli DAC, DCA; erit totus angulus BAC, duobus angulis BC, simul sumptis æqualis, ac proinde tres anguli BAC, B, & C, simul sumpti dupli erunt anguli BAC. Quia verò angulus BDC, æqualis est iisdem tribus angulis BAC, B, & C;* (*Nam*

a 5. primi.

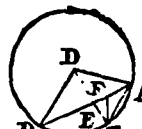


b 32. primi. b *cùm BDE, duobus internis, B, & DAB, & CDE, duobus internis C, & DAC, æqualis sit, erit totus BDC, omnibus quatuor, hoc est, tribus BAC, B, & C, æqualis.*) *erit angulus quoque BDC, duplus anguli BAC. quod est propositum.*

c 32. primi. *ALITER. Quoniam* c *sex anguli triangulorum ABD, ACD, sunt æquales quatuor rectis, sunt autem & tres anguli BDC, CDA, ADB, quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos 15 lib. 1. erunt hi*

d 3. pronun. *tres illis sex æquales: ablatis q; communibus ADB, ADC,* d *reliqui BDC, reliquis BAC, B, & C, æqualis erit. Quare vt primus, erit*

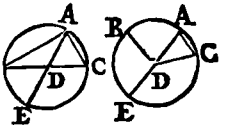
e 5. pronun. *BDC, ipsius BAC, duplus.*



REPETATVR quoque tertia figura, vbi recta DC, rectam AB, secat, vt in E. Quoniam ergo, ductæ rectæ AD, e *duo anguli DAC, DCA, æquales sunt, est q; angulus DAC, angulo EAC, maior, erit quoq; angulus DCA, eodem angulo EAC, maior. Si igitur fiat angulus ACF, angulo*

gulo E A C, æqualis, secabit C F, rectam A E, & in puncto F, a angulus ſq; E F C, æqualis erit internis angulis F A C, F C A, ac proinde anguli B A C, duplus. Quia verò b anguli D A C, D C A, æquales ſunt, & ablati quoque F A C, F C A; erunt & reliqui D A B, E C F, æquales. Cùm c ergo D A B, ipſi D B A, æqualis ſit; erit quoq; E C F, eidem D B E æqualis: Sunt autem, d & anguli D E B, F E C, ad verticem E, æquales. Igitur & reliqui anguli B D E, E F C, æquales erunt, ex corolli. 1. propoſ. 32. lib. 1. Cùm ergo angulus E F C, oſtenſus ſit anguli B A C, duplus; erit quoque angulus B D C, anguli B A C, duplus. quod eſt propoſitum.

a 32. primi.
b 5. primi.
c 5. primi.
d 15. primi.



QVOD ſi recta B D, C D, in centro angulum non conſtituant ad partes baſis B C; quod tum demum fit, quando ſegmentum B A C, eſt vel ſemicirculus, vel ſegmentum minus; nihilominùs ſpatium illud ad centrum duplum erit anguli ad circumferentiam, qui eandem habeat baſin, quam ſpatium illud. Ducta enim recta A E, per centrum, erit tam angulus B D E, ad centrum duplus anguli B A E, ad circumferentiam, quam angulus C D E, ad centrum, anguli C A E, ad circumferentiam, & oſtenſum eſt. Spatium igitur ad centrum D, baſin habens B E C, conſtansq; ex duobus angulis B D E, C D E, duplum eſt totius anguli B A C. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

IN circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli, ſunt inter ſe æquales.

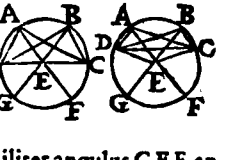
IN circulo A B C D, cuius centrum E, exiſtant anguli A, & B, in ſegmento D A B C. Dico eos eſſe æquales. Sit enim ſegmentum D A B C, primum ſemicirculo maius; & ducantur rectæ D E, C E, ad centrum E. Quoniam igitur angulus D E C, ad centrum e duplus eſt tam anguli D A C, quàm D B C, ad peripheriã, cùm omnes habeant eandem baſin D C; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E. f Quare inter ſe æquales erunt. Eademq; ratione omnes alij anguli exiſtentes in ſegmento D A B C, oſtendentur eſſe æquales.

e 20. tertij.
f 7. prænunc.



SIT deinde ſegmentum D A B C, vel ſemicirculus, vel ſemicirculo minus. Ducantur per centrum E, rectæ A F, B G, & in ſegmento minori connectantur rectæ D E, C E. Quoniam igitur angulus D E F, ad centrum, g duplus eſt anguli D A F, ad peripheriam: Similiter angulus C E F, anguli

g 20. tertij.



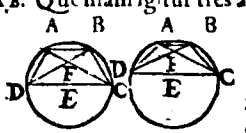
guli C A F; ac proinde duo anguli simul D E F, C E F, duorum angulorum simul D A F, C A F, dupli erunt, hoc est, totius anguli D A C: Sunt autem anguli D E G, G E F, æquales angulo D E F: erunt quoq; tres anguli D E G, G E F, F E C, simul dupli anguli D A C. Eadem ratione erunt ijdem tres anguli dupli anguli D B C. *a* Quare æquales erunt anguli D A C, D B C.

a 27. *primi.*

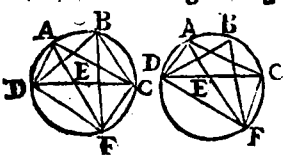
ALITER. Quoniam, vt in scholio propos. præcedentis demonstrauimus, spatium ad centrum E, cuius basis D G F C, duplum est vtriusque anguli D A C, D B C, ad circumferentiam: *b* Erunt ipsi anguli D A C, D B C, inter se æquales.

b 7. *primi.*

ALITER. Secent sese rectæ A C, B D, in F, & connectatur recta A B. Quoniam igitur tres anguli trianguli A F D, æquales sunt tribus angulis trianguli B F C; quoniam tam illi, quàm hi *c* æquales sunt duobus rectis: Si auferantur anguli A F D, B F C, *d* qui æquales sunt; erunt reliqui A D F, D A F, reliquis B C F, C B F, æquales. Atqui & anguli A D F, B C F, æquales sunt ostensi in segmento maiori A D C B. Ergo & anguli reliqui D A C, C B C, æquales sunt.



c 32. *primi.*
d 25. *primi.*



ALITER. Ductis rectis D F, C F, ad punctum in circumferentia quoduis F, includentibus centrum E, ita vt tam D A B C F, quàm E D A B C, sit segmentũ maius; iungantur quoq; rectæ A F, B F. Quia igitur anguli D A F, D B F, in eodem segmento maiori D A B C F, æquales sunt; nec non & anguli F A C, F B C, in segmento etiam maiori F D A B C, existentes: si hi illis addantur, fiet totus angulus D A C, toti angulo D B C, æqualis. Itaq; in circulo, qui in eodem segmento sunt, &c. Quod erat ostendendum.

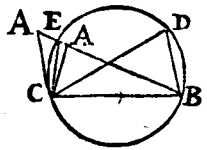
SCHOLIVM.

FACILE quoq; theorema istud conuertemus hoc modo.

SI à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex singulis binæ, quæ ad eadem partes contineant angulos duos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum descriptus, per alterum quoque angulum transibit.

EX duobus enim punctis B, C, educantur quatuor rectæ lineæ B A, C A, B D, C D, vna ex singulis, constituentes ad eadem partes duos æquales angulos A, D. Dico circulum per puncta B, C, & angulum D, descriptum, transire quoq; per angulum A. Si enim non transit, transibit

ibit vel vltra A, vel citra secans rectam AB, in E. Ducta ergo recta CE, a erunt anguli E, D, æquales. Cùm ergo & angulus A, angulo D ponatur æqualis; erunt anguli CAB, CEB, æquales, externus, & internus, quod est absurdum. b *Externus enim interno maior est. Transit ergo circulus per A, quod est propositum.*



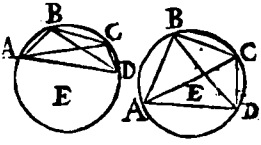
a 11. tertij.

b 16 primi.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxj.

QVADRILATERORVM in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

IN circulo, cuius centrum E, inscriptum sit quadrilaterum ABCD. Dico duos angulos oppositos ABC, CDA: Item BCD, DAB, æquales esse duobus rectis. Ductis enim diametris duabus quadrilateri AC, BD, c erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem segmento ABCD, æquales. Similiter erũt duo anguli CBD, CAD, in eodem segmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est, totus angulus ABC, æqualis est duobus angulis ACD, CAD. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA. d Sed hi tres æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos BCD, DAB, duobus esse rectis æquales. Nam rursus duo anguli, ABD, ACD, sunt æquales: Item duo BCA, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Addito igitur communi angulo BAD; erunt duo anguli BCD, BAD, æquales tribus angulis ABD BDA, DAB. f Sed hi tres sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo BCD, DAB, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorum, &c. Quod demonstrandum erat.



c 21. tertij.

d 32. primi.

e 32. primi.

SCHOLIVM.

CONVERSVM quoque huius theorematis demonstrari potest, hoc modo.

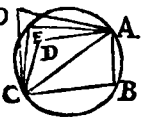
SI in quadrilatero anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sint æquales; circulus, qui per tres quoscunque eius angulos describitur, transibit etiam per reliquum

quartum angulum; Atq; adeò circa ipſum quadrilaterum circulus deſcribi poteſt.

IN quadrilatero enim ABCD, ſint anguli oppoſiti B, & D, duob. rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus deſcribatur; (Quo modo autem hoc fieri poſſit, ad 25. propoſ. huius lib. & ad 5. quarti lib. oſtendetur.) quem dico tranſire etiam per D. Si enim non, tranſibit vel vltra D, vel citra. Ducantur ergo rectæ CE, AE, ad circumferentiam, ita vt non ſecent rectas CD, AD. Quo facto, a *erunt anguli B, & E, æquales duobus rectis: Erant autem & anguli B, & D, duobus rectis æquales. Igitur duo anguli B, E, æquales ſunt duobus angulis B, D. Quocirca ablato communi B, remanebunt anguli D, & E, æquales;* b *quod eſt abſurdum. Ducta enim recta AC,* b *erit angulus D, maior angulo E, vel contrà, angulus E, maior angulo D. Tranſit igitur circulus per punctum D. Quod eſt propoſitum.*

a 32. primi.

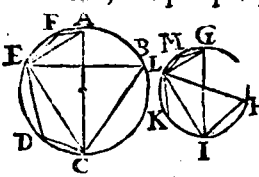
b 21. primi.



SATIS autem eſt, ſumere duos tantùm angulos oppoſitos æquales duobus rectis, vt theorema hoc verum ſit: quia ſi duo oppoſiti ſunt æquales duobus rectis, erunt neceſſario & reliqui duo oppoſiti duobus rectis æquales; cùm omnes quatuor ſint quatuor rectis æquales, vt ad propoſ. 32. lib. 1. demonſtrauimus.

EX hac etiam propoſ. facilè demonſtrabimus theorema hoc inſequens, quod frequenter vſurpari ſolet, tanquam principium, à Mathematicis, ſcilicet.

SI ex ſemicirculis, aut circulis ſegmenta ſimilia detrahantur; reliqua quoque ſegmenta ſimilia erunt.



SINT primùm in circulis ABC DEF, GHIKLM, arcus ſimiles CDE, IKL. Dico & reliquos arcus EFABC, LMGHI, ſimiles eſſe. Sumptis enim in dictis arcubus, punctis vtcunq; D, B, K, H, tangantur rectæ DC, DE, BC, BE, KI, KL, HI, HL. Quia igitur arcus CDE, IKL, ſimiles ſunt, erunt, ex definitione ſegmentorum ſimilium, anguli CDE, IKL, æquales. Cùm ergo duo anguli CDE, CBE, duobus angulis IKL, IHL, ſint æquales; c *quòd tam illi, quàm hi ſint æquales duobus rectis:* d *erunt & reliqui anguli CBE, IHL, æquales; ac propterea, ex defin. 10. huius lib. arcus EBC, LHI, ſimiles erunt.*

c 22. tertij.

d 3. prop. huius.

DEINDE in ſemicirculis AEC, GLI, ſimiles ſint arcus EC, LI. Dico & reliquos arcus AE, GL, eſſe ſimiles. Sumptis enim punctis D, F, K, M, vtcunq; in ijs arcubus, iungantur rectæ CD, DE, CE, EF, FA, AE; IK, KL, IL, LM, MG, GL. Itaq; quia arcus EC, LI, ſimiles

similes sunt, erunt ex defin. anguli C D E, I K L, æquales. Cum ergo & duo anguli C D E, E A C, duobus angulis I K L, L G I, æquales sint; a *quòd tum illi, quàm hi sint duobus rectis æquales: erunt & reliqui anguli E A C, L G I, æquales. Sunt autem & anguli A E C, G L I, in semicirculis, hoc est, in segmentis similibus A E C, G L I, æquales, ex definitione segmentorum similium. Igitur in triangulis A E C, G L I, & reliqui anguli A C E, G I L, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. æquales erunt. Cum ergo duo anguli A C E, E F A, duobus angulis G I L, L M G, æquales sint;* b *quod tum illi, quam hi duobus sint rectis æquales; erunt quoque anguli reliqui E F A, L M G, æquales: ac proinde, ex defin. similium segmentorum, arcus A E, G L, reliqui in semicirculis, similes erunt. Quod erat ostendendum.*

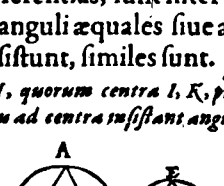
a 22. ter tij.

b 22. ter tij.

QVANDO autem de segmentis similibus sermo hic incidit, non videntur omittenda hoc loco tria theoremata tum Geometricis rebus, tum præsertim Astronomicis pernecessaria, quorum primum sit hoc, quod nos ad defin. 10. huius lib. demonstrandum recepimus: videlicet.

ANGVLI insistentes arcubus circulorum similibus sive ad centra, sive ad circumferentias, sunt inter se æquales. Et contra, arcus, quibus anguli æquales sive ad centra, sive ad circumferentias insistunt, similes sunt.

SINT in circulis A B C D, E F G H, quorum centra I, K, primum arcus similes B C D, F G H, quibus ad centra insistant anguli I, K, ad circumferentias verò anguli A, E. Dico tam illos, quam hos inter se æquales esse. Constituantur enim in illu arcubus anguli C, G, qui ex defin. segmentorum similium, æquales erunt.



c 22. ter tij.

Sunt autem tam duo anguli C, A, quam duo G, E, duobus rectis æquales. d 20. ter tij. *Ablatis igitur æqualibus C, G, erunt quoque reliqui A E, æquales. Quorum* d *cum dupli sint anguli I, K,* e *erunt hi quoque æquales. Quod est propositum.*

e 6 prænum.

DEINDE sint tam anguli I, K, quàm A, E, insistentes arcubus B C D, F G H, inter se æquales. Dico arcus B C D, F G H, esse similes. Nam si A, & E, sint æquales: sint f *autem tam duo anguli A, C, quam duo E, G, duobus rectis æquales; erunt & reliqui C, G, æquales; ac propterea, ex defin. similium segmentorum, arcus B C D, F G H, quibus anguli æquales A, E, ad circumferentias insistunt, similes. Si verò anguli I, K, ad centra sint æquales,* g *erunt quoque eorum dimidia æqualia, hoc est, anguli A, E. Quare & primus, arcus B C D, F G H, similes sunt. Quod erat ostendendum.*

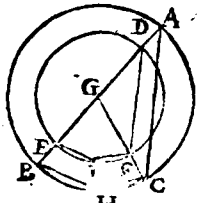
f 22. ter tij.

g 7. prænum.

SECVNDVM autem, quod nos etiam in sphæra ad finem primi cap. demonstrauimus, hunc modi sit.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duæ, aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti, similes.

DVO circuli A B C, D E F, ex eodem centro G, descripti sint, & ex centro G, duæ rectæ educantur G B, G C. Dico arcus E F, B C, esse similes. Producta enim B G, ad A, tangantur rectæ A C, D F; Item sumptis punctis H, I, vtcunque ducantur rectæ B H, C H, E I, F I.



a 20. ter tij. b 7. pro nun. c 22. ter tij. d 3. pro nun.

Quoniam igitur angulus G, ad centrum arcubus E F, B C, insistens a duplus est tum anguli E D F, quam anguli B A C; b erunt anguli E D F, E I F, duobus angulis B A C, B H C, æquales; quod c tum illis, quam his duobus rectis sint æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis E D F, B A C, d reliqui E I F, B H C, æquales erunt: ac proinde segmenta E F, B C, in quibus sunt, similia erunt, ex definitione similium segmentorum. Quod erat ostendendum.

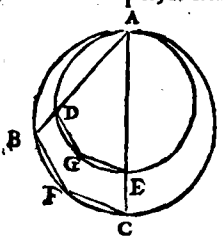
e 7. pro nun. f 20 ter tij.

BREVIVS sic. e Quoniam anguli A, D, æquales sunt, quod vtrisque f duplus sit anguli G, ad centrum; erunt per antecedens theorema, arcus B C, E F, quibus ad circumferentias insistunt, similes. Quod est propositum.

VEL adhuc brevius. Quoniam arcubus E F, B C, æquales anguli in centro insistunt, imò vnus & idem angulus B G C; erunt per antecedens theorema arcus E F, B C, similes. Atque in hac demonstratione non est opus vlla constructione, vt manifestum est.

TERTIVM denique, quod aliter quoque in nostro Astrolabio ostendimus, hoc sit.

SI duo, aut plures circuli se mutuo tangant interius in vno puncto, à quo duæ, aut plures rectæ educantur; erunt & arcus inter quascunque duas lineas intercepti, & arcus inter quamcunque lineam, & punctum contactus intercepti, similes.



g 22. ter tij.

TANGANT se mutuo interius duo circuli A B C, A D E, in puncto A, à quo duæ rectæ educantur A B, A C. Dico tum arcus D E, B C, quam A D, A B, & A E D, A C B, similes esse. Sumptis enim duobus punctis vtcunque F, G, tangantur rectæ B F, C F, D G, E G. Quoniam igitur duo anguli D A E, D G E, duobus angulis B A C, B F C, æquales sunt, quod tum illis, quàm

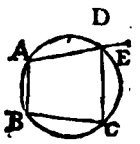
illi, quàm bi sint duobus rectis æquales: ablato communi angulo B A C, a *erunt reliqui anguli D G E, B F C, æquales; ac proinde arcus D E, B C, similes erunt ex defin. segmentorum similium.* a 3. *prænum.*

B R E V I V S sic. Quoniam angulus A, communis utrique arcui D E, B C, ad circumferentias insistit, erunt, ex demonstratis ante proximè antecedens theorema, arcus D B, B C, quibus insistit, similes. Quod est propositum.

Q V I A verò, si per circulorum centra ducta cogitetur recta A C, b *hæc in contactum A, cadit, suntque eodem pacto arcus D E, B C, similes, fit, ut hisce similibus ablatis ex semicirculis similibus, reliqui* b 11. *tij. arcus A D, A B, similes quoque sint: atque his ablatis ex totis circumferentiis similibus, similes quoq; sint reliqui arcus A E D, A C B, ut paulo ante demonstrauimus. Quod est propositum.*

H V C etiam referri potest hoc theorema.

SI vnum latus quadrilateri in circulo descripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.

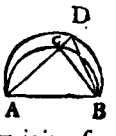


I N circulo A B C D, descriptum sit quadrilaterum quodcunque A B C D, cuius latus A D, producatur ad E. Dico angulum E D C, angulo B, æqualem esse. Cum enim duo anguli ad D, c *æquales sint duobus rectis: Item* d *duo B, & D, in quadrilatero; erunt duo illi his duobus æquales. Ablato ergo communi angulo A D C; reliquus E D C, externus reliquo B, æqualis erit. Quod est propositum.* c 13. *primi.* d 22. *tij.*

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxij.

SVPER eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.

SI enim fieri potest, super recta A B, constituantur ad easdem partes duo segmenta similia, & inæqualia A C B, A D B. Perspicuum est autem, quod se solum intersecent in punctis A, & B; *e* Circulus enim circulum non secat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius segmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta A D, secans circumferentias in C, & D, & connectantur rectæ C B, D B. Quoniam igitur segmenta ponuntur similia, erit per 10. defin. huius lib. angulus A C B, æqualis angulo A D B, externus interno: *f* quod est absurdum. Non igitur segmenta sunt similia: Quare super eadem recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.



e 10 *tij.*

f 16. *primi.*

SCHO-

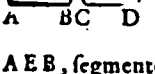
SCHOLIVM.



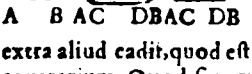
EADEM ratione, neque ad diuersas partes super eadem recta linea duo segmenta circulorum similia, & inaqualia constituentur. Nam si alterum eorum intelligatur moueri circa lineam AB, & iam ambo sint ad easdem partes, in idem absurdum incidemus, & figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inaqualitatem.

xxiij. THEOR. 22. PROPOS. 24.

SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.



SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD, constituta sint segmenta similia AEB, CFD. Dico ea inter se esse æqualia. Lineæ enim AB, CD, cum sint æquales, cõgruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmentũ AEB, segmento CFD, congruere. Si enim non congruit, cadet



aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod si extra cadat, aut intra, cõstituentur super eadem recta CD, duo segmenta AEB, AFB, similia, & inæqualia, quorum vnum totum extra aliud cadit, quod est absurdum. *a* Demonstratum enim est contrarium. Quod si partim extra cadat, partim intra, secabunt sese in pluribus punctis, quam duobus, nimirum in A, B, G. Quod est absurdum. *b* Circuli enim non se secant in pluribus punctis, quam duobus. Congruet igitur segmentum AEB, segmento CFD, atque adeo ipsa inter se æqualia erunt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

a 23. *ter tij.*

b 10. *ter tij.*

SCHOLIVM.

NON solum in hac propositione ostenditur, segmenta similia AEB, CFD, esse æqualia, super æquales bases AB, CD; verum etiam ipsas peripherias, eo quod, vt demonstratum est, sibi mutuo congruant.

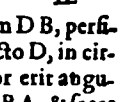
CONVERSVM quoque huius propos. & præcedentis, facile demonstrabitur. Nimirum, segmenta circulorum æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, esse similia. Nam propter æqualitatem, alterum alteri congruet; quare similia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipsis constituti æquales sint. Quod si quis dicat, non sibi mutuo congruere segmenta, secabit necessario vna circumferentia alteram. Vna enim extra alteram non cadet. Inæqualia namque

maemque forent segmenta, quod est contra hypothesin. Sint ergo segmenta A F B, A G B, aequalia super eandem rectam A B, secentque se mutuo in G. Igitur circuli A F B, A G B, secant sese in punctis A, G, B, pluribus quam duobus, quod est absurdum. a *Circuli enim non se intersecant in pluribus punctis quam duobus. Eodem modo res demonstrabitur, si aequalia segmenta super aequales rectas sint constituta: si nimirum altera alteri superponatur, &c.* a 10. tert. vij.

PROBL. 3. PROPOS. 25. xxiv.

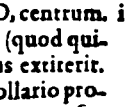
CIRCVLI segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

SIT segmentum circuli A B C, quod perficere oporteat. Subtendatur recta A C, quae bifariam secetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur D B, connectaturque A B. Angulus igitur D B A, vel maior est angulo D A B, vel aequalis, vel minor. Sit primum maior, (quod quidem continget, quando segmentum A B C, minus fuerit semicirculo: Tunc enim, quia B D, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. quod est extra segmentum, cum ponatur esse minus; erit D A, maior, quam D B, cum D B, perficiens diametrum *b* sit omnium minima, quae ex puncto D, in circumferentiam cadunt. Quare angulus D B A, *c* maior erit angulo D A B.) fiatque angulus B A E, aequalis angulo D B A, & secet recta A E, rectam B D, productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cuius segmentum A B C. Ducta enim recta E C, erunt latera A D, D E, trianguli A D E, aequalia lateribus C D, D E, trianguli C D E, & anguli contenti, recti. *d* Quare bases E A, E C, aequales erunt; *e* Est autem & E A, aequalis ipsi E B, quod anguli E A B, E B A, aequales sint. Igitur tres lineae E A, E B, E C, aequales erunt, *f* ac propterea E, centrum erit circuli A B C, quandoquidem ex E, plures quam duae rectae aequales cadunt in circumferentiam.



b 7. tert. c 18. pri. d 4. pri. e 6. pri. f 9. tert.

SIT deinde angulus D B A, angulo D A B, aequalis: (Quod demum continget, quando segmentum A B C, semicirculus fuerit. Tunc enim erit A C, diameter, & D, centrum, atque adeo rectae D A, D B, aequales; quare *g* & anguli D A B, D B A, aequales erunt.) *h* Erunt igitur rectae D A, D B, aequales: Erat autem & D C, aequalis ipsi D A, quòd recta A C, secta sit bifariam. Quaptopter cum tres rectae D A, D B, D C, cadant ex D, in circumferentiã, *i* erit D, centrum.



g 5. pri. h 6. pri. i 9. tert.

SIT tertio angulus D B A, angulo D A B, minor, (quod quidem euenier, si segmentum A B C, semicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam B D, transit per centrum, ex corollario propos. 1.



a 7. ter. b 18. primi.

posi. 1. huius lib. quod quidem intra segmentum, cum maius esse ponatur, existit; a erit D B, omniũ, quæ ex D, in circumferentiam cadunt, maxima; maior igitur erit quam D A, b ideoq; angulus DAB, maior angulo D B A.) fiatque angulus B A E, æqualis angulo D B A, & secet recta A E, rectam B D, in E, puncto, quod ostenderur esse centrum eodem modo, quo id ipsum ostendimus, quando angulus D B A, maior erat angulo D A B, vt constat, si recta ducatur E C. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cuius est segmentum. Quod facere oportebat.

SCHOLIVM.

SED fortassis hac demonstratio Euclidis, qua per omnia tria circuli segmenta progreditur, ita facilius instituetur. Diuisa recta A C, bifariam in D, erectaque perpendiculari D B, & ducta A B; aut D B,

c 18. primi. *minor est, quàm D A, aut æqualis, aut maior. Si minor,* c *erit angulus D B A, maior angulo B A D. Constituto igitur angulo B A E, æquali ipsi A B D; ostendemus, vt prius, E, centrum esse. Atque hoc euenit, quando segmentum est semicirculo minus.*

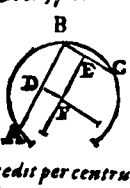
SI verò D B, æqualis est ipsi D A; erunt omnes tres D A, D B, D C,

d 9. ter. *æquales;* d *ac proinde D, centrum. Qua ratio locum habet in semicirculo.*

c 18. pri. *Si deniq; D B, maior est, quàm D A;* d *erit angulus D B A, minor angulo D A B. Constituto ergo angulo B A E, æquali ipsi A B E, ostendetur E, esse centrum, vt prius. Hoc autem maiori segmento accidit.*

ALITER idem problema hoc modo absoluetur. Posita iisdem, quæ prius, fiat angulo D B A, æqualis angulus E A B. Et si quidem recta A E, cadit infra A C, erit segmentum semicirculo minus, vt in prima figura. Si verò A E, cadit supra A C, erit segmentum semicirculo maius, vt in tertia figura: semper autem E, centrum erit, vt demonstratum est. Si denique recta efficiens cum A B, in A, angulum æqualem angulo A B D, coincidit cum A C, erit segmentum semicirculus, punctumque D, centrum erit, vt in secunda figura.

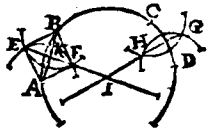
BREVIVS tamen inuenietur centrum segmenti propositi cuiuslibet, siue illud semicirculo minus sit, siue æquale, siue maius, hac



ratione. Assumantur in peripheria segmenti tria puncta vtcunque A, B, & C, quæ duabus rectis coniungantur A B, B C, quæ bifariam secentur in D, & E. Deinde ex D, & E, educantur ad A B, B C, perpendiculares D F, E F. Quoniam igitur per corollarium propos. 1. huius lib. tam D F, quam E F, incidit per centrum circuli, cuius A B C, est segmentum, coibunt ambæ in centro, vt in F. Quare centrum est inuentum. Quod est propositum.

ALITER, vt Mechanici solent. Accipiantur in circumferentia duo

tiæ duo puncta vtcunque A, & B, à quibus describantur duo arcus ad idem internallum quodcunque, qui se intersecent in E, & F. Posteà ex alio duobus punctis C, & D, alij duo arcus se secantes in G, & H, describantur ad quoduis internallum, siue idem quod prius, siue diuersum. Si igitur agantur recta E F, G H, transibunt amba per centrum. Quare punctum I, in quo coeunt, erit centrum. Quod autem linea E F, G H, per centrum transeant, ita demonstrabitur. Ducantur rectæ A E, A F, B E, B F, quæ inter se æquales erunt, ob æqualitatem circulorum. Quoniam igitur latera A E, E F, trianguli A E F, æqualia sunt lateribus B E, E F, trianguli B E F; & basis quoque A F, B F, æquales: a Erunt anguli A E F, B E F, æquales. Rursus ducta recta A B, quæ secet E F, in K: quoniam latera A E, E K, trianguli A E K, æqualia sunt lateribus B E, E K, trianguli B E K; & anguli A E K, B E K, ostensi quoque æquales; b erunt & bases A K, B K, & anguli A K E, B K E, æquales, ideoque recti. Quare cum E F, diuidat rectam A B, in circulo bifariam, & ad angulos rectos, transibit per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. Eadem ratione ostendetur G H, transire per centrum. Debent autem quatuor puncta A, B, C, D, in tali situ accipi, vt recta E F, G H, non in directum sibi occurrant, sed vt se mutuo secent. Quod si quando contingat, rectas E F, G H, in directum esse constitutas, diuidenda erit recta intra circumferentiam comprehensa, bifariam. Punctum enim diuisionis erit centrum circuli: propterea quòd tunc recta illa est diameter circuli, quandoquidem per centrum transit, ex coroll. propos. 1. huius lib.



a 8. pri.

b 4. pri.

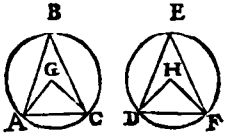
THEOR. 23. PROPOS. 26. XXV.

IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripheriis insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.



IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, H, constituti sint primũ ad centra anguli æquales A G C, D H F. Dico peripherias A C, D F, quibus insistunt, siue super quas ascenderunt, esse æquales. Sumantur enim in peripherijs A B C, D E F, duo puncta B, E, ad quæ rectæ ducantur A B, C B, D E, F E, connectantur quæ rectæ A C, D F. Quoniam igitur e anguli B, & E, dimidij sunt æqualium angulorum G, & H; erunt & ipsi æquales inter se. Quare ex definitione segmenta ABC, D E F, similia erunt. Et quia latera A G, G C, trianguli A G C, æqua-

c 20. def 3.
tij.



æqualia ſunt lateribus DH, HF, trianguli DHF, propter circulorum æqualitatem; & anguli, quos continent, G, H, æquales, ex hypotheſi; *a* erunt baſes AC, DF, æquales. Cum igitur ſegmenta ſimilia ABC, DEF, ſint ſuper lineas æquales AC, DF, *b* erunt ipſa inter ſe æqualia. Quare ſi à circulis æqualibus demantur, remanebunt & ſegmenta AC, DF, inter ſe æqualia; atque adeo peripheriæ AC, DF. Quod eſt propoſitum.

a 24. pri.

b 24. ter tÿ.

SINT deinde ad peripherias conſtituti duo anguli æquales B, & E; Dico rurſus, peripherias AC, DF, ſuper quas aſcenderunt, eſſe æquales. Erunt enim, vt prius, ſegmenta ABC, DEF, ſimilia. Cum igitur ſint ſuper æquales lineas AC, DF: (cum enim anguli G, H, æquales ſint, *c* quod ſint dupli angulorum æqualium B, & E; erunt, vt prius, rectæ AC, DF, æquales) *d* erunt ipſa inter ſe æqualia. Si igitur à circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & ſegmenta AC, DF, æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

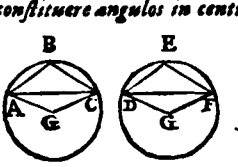
c 20. ter tÿ.

d 24. ter tÿ.

SCHOLIVM.

HÆC ſecunda pars breuius ita demonſtrabitur. Quoniam anguli G, H, dupli ſunt angulorum æqualium B, E, erunt ipſi inter ſe æquales. Quare vt oſtenſum eſt prius, peripheria AC, DF, ſuper quas aſcenderunt, æquales erunt.

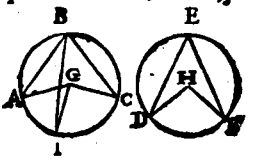
IAM verò ſi quando contingat, rectas AG, CG; DH, FH, non conſtituere angulos in centris ſupra baſes AC, DF, ſed ſupra baſes ABC, DEF, vt ſubiecta hæ figura monſtrant: ita ſecunda pars huius propoſ. demonſtranda eſt. Quoniam ſpatia ad centra G, H, inſiſtentia arcubus AC, DF, æqualia inter ſe ſunt, cum ex ſcholio propoſ. 20. huius lib. dupla ſint angulorum B, E, ad circumferentias; erunt etiam anguli AGC, DHF, reliqui quatuor rectorum, quibus tam ſpatium circa G, quam ſpatium circa H, æquale eſt, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. inter ſe æquales. Quare, vt prius, oſtendemus, baſes AC, DF, triangulorum AGC, DHF, æquales eſſe, ideoque ſegmenta ſimilia ABC, DEF, ob æqualitatem angulorum B, E, ſuper æquales baſes AC, DF, eſſe æqualia, &c.



HINC etiam fit, ſpatia æqualia in centris, inſiſtere arcubus æqualibus. Nam ſi ſpatia in centris G, H, inſiſtentia arcubus maioribus AC, DF, æqualia ſunt; erunt quoque, vt oſtendimus, anguli AGC, DHF, æquales. Igitur, vt in prima parte propoſitionis demonſtratum

stratum est, erunt & arcus AC, DF, maiores & minores ABC, DEF, inter se æquales.

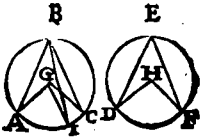
QVOD si dicti anguli fuerint inæquales, maior insistet maiori peripheriæ, quam minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, sit angulus AGC, ad centrum maior angulo DHF, ad centrum: Item angulus ABC, ad circumferentiam, maior angulo DEF, ad circumferentiam. Dico peripheriam AC, maiorem esse peripheria DF. Si enim fiat angulus CGI, angulo DHF, & angulus CBI, angulo DEF, æqualis; erunt vt ostensum est, peripheriæ CI, DF, æquales. Ac propterea AC, maior, quam DF.



PORRO propositio hæc, & tres proximè sequentes intelligendæ etiam sunt in eodem circulo. Hoc est. In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripheriis insistunt, &c. vt ex demonstratione huius propos. & sequentium trium liquidò constat. Eadem enim semper demonstratio, qua duobus, pluribusve circulis accommodatur, locum habet in vno eodemque circulo.

THEOR. 24. PROPOS. 27. XXVj.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.



IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, insistant primum anguli ad centra AGC, & DHF, æqualibus peripheriis AC, DF. Dico angulos AGC, & DHF, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit angulus G, maior, fiatque angulus AGI, æqualis angulo DHF. [a] Erunt igitur peripheriæ AI, DF, æquales. Cum igitur peripheria AC, æqualis ponatur peripheriæ DF, erunt peripheriæ AI, AC, inter se æquales, pars, & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli AGC, DHF, æquales. [a] 26. 3ij.

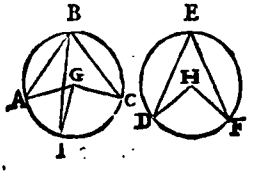
INSISTANT deinde eisdem peripheriis æqualibus AC, DF, anguli B, & E, ad peripherias; quos rursus dico æquales esse. Nam si alter, vt ABC, maior est; fiat angulo E, æqualis angulus ABI, [b] eruntque peripheriæ AI, DF, æquales. Quare, vt prius, erunt peripheriæ AI, AC, æquales, pars & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli ABC, DEF, æquales. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis insistunt, &c. Quod demonstrandum erat. [b] 26. 3ij.

SCHOLIVM.

HÆC secunda pars ita quoque demonstrabitur, quandò rectæ A G, C G; D H, F H, in centris angulos constituunt supra bases A C,
a20.ter vij. *D F. Quoniam a anguli A B C, & E, dimidij sunt angulorum A G C, & H quos tam ostendimus esse æquales; erunt & ipsi inter se æquales.*

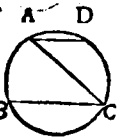
EODEM modo spatia in centris G, H, insistentia arcubus A B C, D E F, æqualibus, æqualia erunt. Nam ablatis æqualibus A B C, D E F, ex circulis æqualibus, reliqui fient æquales arcus A I C, D F; ideoque & ostendimus, anguli A G C, D H F, æquales erunt: quibus ablatis ex spatijs circa centra G, H, quæ æqualia sunt, cum quodlibet sit quatuor rectis æquale, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. reliqua erunt & spatia in centris G, H, insistentia arcubus A B C, D E F, æqualia.

SI verò peripheria fuerint inæquales, insistet maior maior angulus, sive ad centrum, sive ad circumferentiam, quam minori. In figura enim scholij præcedentis sit peripheria A C, maior, quam peripheria D F. Dico angulum A G C, maiorem esse angulo D H F, & angulum A B C, maiorem angulo D E F. Si enim fiat peripheria C I, æqualis peripheriæ D F, ducanturque rectæ I G, I B, erunt, & ostensum est, tum anguli ad centrum C G I, D H F, quam anguli ad circumferentiam C B I, D E F, æquales. Quare & angulus A G C, angulo D H F, & angulus A B C, angulo D E F, erit maior.



QVOD etiam de spatijs ad centra G, H, insistentibus arcubus A B C, D E F, intelligendum est. Nam eodem modo demonstrabimus spatium ad H, arcui D E F, insistens maius esse spatio ad G, quod arcui A B C, insistit, si arcus D E F, maior ponatur arcu A B C.

EX hac postrema propositione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuo non secantes, esse parallelas. Et si sint parallelæ, ab ipsis arcus æquales intercepti. In circulo enim A B C D, rectæ A D, B C, intercipiant arcus æquales A B, D C. Dico A D, B C, esse parallelas. Ductâ namque
b27.ter vij. *rectâ A C, cum arcus A B, D C, ponantur æquales,*
c27.primi. b *erunt anguli A C B, C A D, ipsis insistentes, æquales; qui cum sint alterni,* c *erunt A D, B C, parallelæ.*



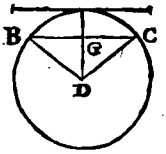
SINT iam A D, B C, parallelæ. Dico arcus interceptos A B, D C,
d29.primi *esse æquales. Cum enim sint parallelæ A D, B C,* d *ductâ rectâ A C; erunt anguli alterni A C B, C A D, æquales;* d *Ac proinde arcus A B,*
c26.ter vij. *D C, quibus insistunt, æquales erunt.*

VISVM est quoque hoc loco apponere sequens theorema ad ea quæ sequuntur, non inutile: videlicet.

LINEA

LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, quæ peripheriam illam subtendit.

IN circulo A B C, cuius centrum D, ducantur ex A, puncto medio peripheriæ B A C, linea E F, tangens circulum. Dico E F, parallelam esse rectæ B C, arcum B A C, subtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctum contactus A, recta D A, secante rectam B C, in G, connexisque rectis D B, D C, a *erunt anguli A D B, A D C, circumferentiis æqualibus A B, A C, insistentes, æquales: Sunt autem & latera B D, D G, trianguli B D G, lateribus C D, D G, trianguli C D G, æqualia, & trumque utrique* b *igitur & anguli ad G, æquales sunt super bases G B, G C, ac propterea recti. Igitur & A G B, A G C, illi deinceps recti sunt: Sunt autem & anguli G A E, G A F, recti,* c *quòd D A, perpendicularis sit ad E F.* d *Ergo E F, B C, parallelæ sunt. Quod est propositum.*



a 27. *tertij.*

b 4. *primi.*

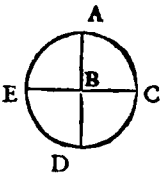
c 18. *primi.*

d 28. *primi.*

EX demonstratis in hac propos. & antecedente, colligitur etiam hoc theorema, quod ad initium quoque triangulorum rectilineorum demonstrauimus.

ANGVLVS rectus in centro insistit quadranti; acutus verò arcui quadrante minori; & obtusus arcui quadrante maiori. Et contra, angulus in centro quadranti insistens, rectus est; insistens verò arcui quadrante minori, acutus; & arcui quadrante maiori, obtusus.

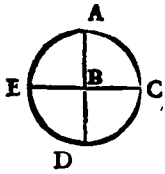
RECTVS angulus A B C, insistat arcui A C, in centro B, circuli A C D E. Dico arcum A C, quadrantem esse, &c. Productis enim rectis A B, C B, ad D, E, erunt quoq; anguli A B E, C B D, recto A B C, deinceps, recti. ex defin. 10. lib. 1. nec non & anguli D B E, rectus, e *cum æqualis sit recto angulo A B C, ad verticem. Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B, æquales sunt, & utpote recti: ac propterea* f *arcus A C, C D, D E, E A, quibus insistunt, æquales erunt. Quilibet igitur eorum quadrans est. Et quoniam recta cum A B, in B, constituens angulum acutum, cadit in arcum A C: recta verò cum eadem A B, in B, continens angulum obtusum, cadit in arcum C D; liquido constat, angulum acutum insistere arcui quadrante minori, obtusum verò maiori.*



e 15. *pri.*

f 26 *ter tij.*

SED insistat tam quadranti A C, angulus A B C, in centro B. Dico angulum A B C, esse rectum, &c. Productis enim rursum rectis A B, C B, ad



CB, ad D, E; quoniam tam CAE, quam ACD & AED, semicirculus est, est q; AC, quadrans erit tam AE, quàm CD, quadrans quoque, atq; proinde & DE, in semicirculo AED, quadrans erit: Sunt ergo quatuor arcus AC, CD, DE, EA, aequales, a ac proinde anguli ad centrum B, illis insistentes, aequales erunt. Quare cum omnes quatuor sint quatuor rectis aequales, erit eorum quilibet rectus. Et quia recta cum AB, auferens minorem arcum quadrante AC, facit in centro B, cum AB, minorem angulum recto angulo ABC; recta verò cum eadem AB, auferens maiorem arcum quadrante AC, constituit in centro B, angulum recto angulo ABC, maiorem; perspicuum est, angulum minori arcui quadrante insistentem, esse acutum; maiori verò, obtusum. Quod est propositum.

a 27. ter tij.

PARI ratione & hoc theorema ex demonstratis elicitur, quod in sinubus etiam demonstrauimus.

RECTA linea è centro circuli ducta, secansque aliam rectam non per centrum ductam bifariam, secabit & arcum, cui haec recta subtenditur, bifariam. Et contra, si secet arcum bifariam, secabit & rectam ei subtensam bifariam.



EX centro A, circuli BCDE, recta egrediens AE, secet rectam BD, bifariam in F. Dico & arcum BED, in E, sectum esse bifariam, &c. Ductis enim rectis AB, AD; quoniam duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, aequalia sunt, utrumq; utrique, basisque BF, basi DF, aequalis positur; b erit angulus BAF, angulo DAF, aequalis. Igitur c arcus BE, arcui DE, aequalis erit. Sectus ergo est arcus BD, in E, bifariam.

b 8. pri.

c 26 ter tij.

SECET iam recta AE, arcum BD, in E, bifariam. Dico rectam quoq; BD, in F, bifariam esse sectam. Ductis enim rursum rectis AB, AD: quoniam arcus BE, DE, ponuntur aequales; d erunt & anguli BAE, DAE, in centro aequales. Itaq; quia duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, aequalia sunt, utrumq; utriq; angulos q; continent aequales, ut ostendimus; e erunt quoq; bases BF, DF, aequales: ac proinde recta BD, in F, secta est bifariam. Quod erat ostendendum.

d 27. ter tij.

e 4. pri.

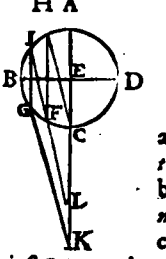
NEQVE verò omittenda hoc loco videtur eximia quadam proprietas circuli, quam Ioannes Baptista Benedictus ex Cardano lib. 16. cap. 1. de subtilitate desumptam demonstrat: Videlicet.

SI in circulo, ductis duabus diametris se se ad angulos rectos secantibus, altera earum producatur, eique ex

vna par-

vna parte quotquot parallelæ agãtur diuidentes vtrumque Quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctum proximæ parallelæ recta ducatur conueniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum concursus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis vna cum diametro, quæ producta est, simul sumptis, æqualis.

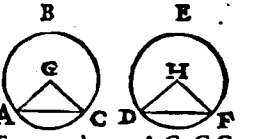
IN circulo A B C D, secent se ad rectos angulos diametri A C, B D, & A C, producatur versus C, quantumlibet. Diuiso autem Quadrante B C, in quotuis partes æquales C F, F G, G B, & Quadrante B A, in totidem, iungantur rectæ F H, G I, quæ ex scholio huius propos. 27. ipsi A C, parallelæ erunt, cum arcus æquales intercipiant. Ex B, per G, denique extendatur recta B G, occurrens A C, productæ in K. Dico rectam A K, æqualem esse omnibus parallelis A C, H F, I G, simul sumptis. Ductis enim rectis H C, I F, & productis, donec cum A K, conueniant; a quoniam anguli C H F, H F I, arcubus æqualibus C F, H I, insistentes, sunt æquales; b erunt rectæ H C, I L, parallelæ: Est autem & F H, ipsi C L, parallela. Parallelogrammum ergo est C H F L; c ac proinde recta C L, rectæ F H, æqualis. Eadem ratione erit K L, ipsi G I, æqualis: & sic deinceps, si sint plures. Additæ ergo communi A C, fiet tota A K, omnibus A C, H F, I G simul sumptis æqualis. Quod est propositum.



a 27. tertij. b 27. primi. c 34. primi.

THEOR. 25. PROPOS. 28. xxvij.

IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

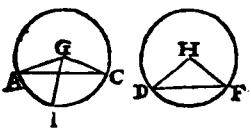


IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, sint rectæ æquales A C, D F. Dico maiorem peripheriam A B C, æqualem esse maiori D E F, & minorem A C, minori D F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F; erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F. Ponuntur autem & bases A C, D F, æquales. Igitur *d* anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ A C, D F, quibus insistunt, *e* æquales erunt; quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquent etiam æquales A B C, D E F. In æqualibus ergo circulis æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

d 8. pri. e 26. tertij.

SCHOLIVM.

QVOD si fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorem peripheriam, quam minor, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo. Nam si de segmentis circuli maioribus sermo habeatur, maior linea auferet minorem peripheriam, quàm minor. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, sint rectæ A C, maior, quam D F. Dico peripheriam A C, semicirculo minorem, maiorem esse peripheria D F: At peripheriam A B C, minorem peripheria D E F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, triangulo D H F. Ponitur autem basis A C, maior basi D F. Igitur a angulus A G C, maior erit angulo D H F. Fiat angulus C G I, angulo D H F, æqualis; eritque propterea b peripheria C I, peripheriæ D F, æqualis; Ac proinde peripheria A I C, maior, quam peripheria D F: Ideoque reliqua A B C, minor, quam reliqua D E F.



a 25. primi.

b 26. tertij.

xxviij.

THEOR. 26. PROPOS. 29.

IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.



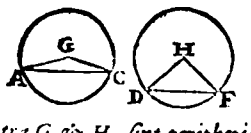
IN circulis eisdem æqualibus ponantur æquales peripheriæ A B C, D E F; Item A C, & D F. Dico rectas A C, D F, quæ eas subtendunt, esse æquales. Ductis enim lineis, vt prius, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F: Sunt autem & anguli G, H, æquales, quod æqualibus peripheriis A C, D F, insistant. Igitur a bases A C, D F, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

c 27. tertij.

d 4. primi.

SCHOLIVM.

SI autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet maiorem maior linea, quam minorem, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmentis maioribus semicirculo loquamur, subtendet maiorem minor linea, quam minorem. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, sint peripheriæ semicirculo minores A C, D F; sitque A C, maior, quam D F; Ac proinde A B C, minor quam D E F. Dico lineam A C, maiorem esse, quam D F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F;



D H, H F; erit angulus A G C, maior angulo D H F, ex scholio propos. 27. huius lib. Cum igitur latera A G, G C, trianguli A G C, aequalia sint lateribus D H, H F, trianguli D H F, a erit basis A C, a 24. pri. maior basi D F, &c.

S V N T autem proximè antecedentes quatuor propositiones 26. 27. 28. & 29. intelligendæ etiam in eodem circulo, & in scholio propos. 26. monuimus, quemadmodum constat ex demonstrationibus adductis. Eadem enim locum habent in uno eodemq; circulo.

I T A Q V E eadem quatuor propositiones magis vniuersales fient, si sic proponantur.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales anguli æqualibus peripheriis insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN æqualibus circulis, vel eodem, anguli qui æqualibus peripheriis insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

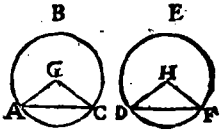
IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales peripherias æquales rectæ lineæ subtendunt.

S E D & sequentes propositiones demonstrare, non fuerit inutile.

I.

CIRCVLI, è quibus æquales rectæ lineæ auferunt similes circumferentias, æquales sunt.



E X circulis A B C, D E F, rectæ lineæ æquales A C, D F, abscindant similes circumferentias A B C, D E F. Dico circulos ipsos æquales esse. Nam si segmenta A B C, D E F, similia sunt, erunt & reliqua segmenta A C, D F, similia; & ad propos. 22. demonstrauimus. Rursus quia super rectas æquales A C, D F, constituta sunt similia segmenta A B C, D E F, b ipsa inter se æqualia erunt. Eadem ratione æqualia erunt segmenta A C, D F, quæ similia sunt demonstrata. Toti ergo circuli æquales erunt. Simili modo, si rectæ æquales A C, D F, dicantur auferre similes circumferentias A C, D F, erunt ex ijs, quæ ad propos. 22. demonstrauimus, & segmenta A B C, D E F, similia. c Tam ergo illa, quam hæc inter se æqualia erunt: ac proinde & toti circuli æquales erunt inter se. Quod erat propositum.

b 24. ter tij.

c 24. ter tij.

II.

EX circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circumferentias dissimiles auferunt.

IN eadem figura ponantur rectæ A C, D F, æquales, at circuli A B C, D E F, inæquales. Dico circumferentias A B C, D E F, dissimiles esse. Si enim similes essent, circuli ipsi, vt proximè demonstrauimus, essent æquales. Quod pugnat cum hypothesi. Dissimiles ergo sunt circumferentiæ A B C, D E F. Eadem ratione circumferentiæ A C, D F, erunt dissimiles. Quod erat ostendendum.

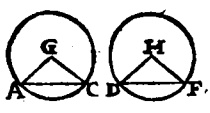
III.

EX circulis inæqualibus lineæ rectæ, quæ circumferentias similes auferunt, inæquales sunt.

IN eadem figura ponantur circuli inæquales, at circumferentiæ A B C, D E F, similes. Dico rectas A C, D F, inæquales esse. Si enim dicantur esse æquales, erunt, ex primo theoremate, circuli æquales, quod est absurdum, cum ponantur inæquales. Sunt ergo rectæ A C, D F, inæquales. Eodem modo, si similes dicantur circumferentiæ A C, D F, demonstrabitur, rectas lineas A C, D F, inæquales esse.

IV.

RECTÆ lineæ, quæ ex quibuscunque circulis circumferentias similes inæquales auferũt, inæquales sunt.



IN eadem figura ponantur circumferentiæ A B C, D E F, similes & inæquales. Dico rectas A C, D F, inæquales esse. Aut enim circuli æquales sunt, vel inæquales. Sint primum æquales. Si ergo rectæ A C, D E, dicantur æquales, a erunt circumferentiæ A B C, D E F, ablata æquales, quod est contra hypothesin. Non ergo æquales sunt rectæ A C, D F. Sint deinde circuli inæquales. Igitur rectæ A C, D F, auferentes circumferentias A B C, D E F, similes, inæquales sunt, vt in tertio theoremate demonstratum est. Non aliter ostendemus, rectas A C, D F, inæquales esse, si circumferentiæ A C, D F, ponantur similes, & inæquales.

a 28. ter iij.

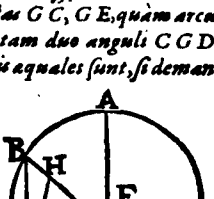
V.

SI in diametro circuli præter centrum punctum sumatur, ab eoque in peripheriam duæ rectæ non in easdem partes cadentes efficiant ad diametrum angulos æquales, rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abscindent æquales. Et si lineæ sint æquales, constituent rectæ illæ ad

illæ ad diametrum angulos æquales, abscindentq; æquales arcus. Si denique arcus æquales abscindant, erunt rectæ illæ æquales, constituentq; ad diametrum angulos æquales.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F; sumatur in diametro AD, punctum G, præter centrum, constituanturq; primùm duo anguli æquales CGD, EGD. Dico tam rectas GC, GE, quàm arcus CD, ED, æquales esse. Quoniam enim a *tam duo anguli CGD, CGF, quàm duo EGD, EGF, duobus rectis æquales sunt, si demantur æquales CGD, EGD; erunt & reliqui CGF, EGF, æquales. Ductis igitur rectis CF, EF, ad centrum, erunt duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia, angulique FGC, FGE, æqualibus lateribus oppositi æquales. Cùm ergo reliquorum angulorum FCG, FEG, vterque sit recto minor; (Ducta enim recta CD, erit angulus FCD, in Isoscele FCD, acutus; ex 3. coroll. propos. 17. lib. 1. ac propterea à fortiori FCG, acutus erit. Eodemq; modo, ducta recta DE, angulus FEG, acutus erit,) erit ex iis, qua ad finem lib. 1. demonstrauimus, basis GC, basi GE, æqualis, & angulus CFG, angulo EFG; b ac proinde arcus CD, ED, æquales erunt. Constat ergo propositum.*

a 13. primi.



b 26. tertij.

DEINDE sint lineæ GC, GE, æquales. Dico & angulos CGD, EGD, æquales esse, & arcus CD, ED. Si enim lineæ GC, GE, sunt æquales, erunt duo latera GC, GF, æqualia duobus lateribus GE, GF: Est autem & basis FC, basi FE, æqualis. c Igitur anguli FGC, FGE, æquales erunt, ac proinde & ex duobus rectis reliqui CGD, EGD, erunt æquales. Rursus quia duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia sunt, baseſq; æquales ponuntur GC, GE, d erunt & anguli CFD, EFD, æquales, e atq; idcirco & arcus CD, ED, æquales erunt. Quod est propositum.

c 8. primi.

d 8. primi.

e 26. tertij.

TERTIO sint arcus CD, ED, æquales. Dico & lineas GC, GE, & angulos CGD, EGD, esse æquales. Si enim arcus CD, ED, æquales sunt, f erunt & anguli CFD, EFD, æquales. Quare cùm duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, sint æqualia, angulosq; æquales contineant; g erunt & bases GC, GE, æquales, & anguli FGC, FGE; ac proinde ex duobus rectis reliqui CGD, EGD. Quæ omnia demonstranda erant.

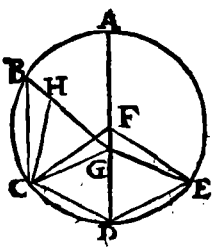
f 27. tertij.

g 4. primi.

HOC tamen theoremate multò vniuersalius est Lemma 11. lib. 1. nostri Astrolabij.

V.

SI in diametro circuli præter centrum ſumatur punctum quodpiam, in quo ad eaſdem partes duo anguli æquales conſtituantur, inſiſtent hi anguli æquales arcubus inæqualibus, maiorque erit ille, qui à maiori portione diametri remotior eſt.



IN eadem figura proxima ſint anguli æquales G G D, duo C G B. Dico arcum B C, arcu C D, maiorem eſſe. Ductis enim
a 7. tertij. *rectis B C, C D, a quoniam recta G B, maior eſt, quàm recta G D, abſcindatur G H, ipſi G D, æqualis, iungaturq; recta C H. Quia igitur duo latera G H, G C, duobus lateribus G D, G C, æqualia ſunt,*
b 4. primi. *angulosq; continent æquales; b erunt & baſes C H, C D, æquales, & angulus G H C, angulo G D C, æqualis. Eſt autem G D C, in iſoſcele F C D, acutus, ex 1. coroll. propoſ. 17. lib. 1. Igitur & G H C, acutus erit; ac proinde*
c 17. primi. *ex duobus rectis reliquus C H B, obtuſus erit. Cùm ergo c duo anguli C H B, C B H, ſint duobus rectis minores, erit C B H, acutus.*
d 19 primi. *Quare d latus B C, latere C H, maius erit. Eſt autem C H, recta oſtenſa ipſi C D, æqualis. Igitur recta B C, maior quoq; erit quam C D; ac propterea ex ſcholio propoſ. 28. huius lib. arcus B C, arcu C D, maior erit. Quod erat oſtendendum.*

xxix. PROBL. 4. PROPOS. 30.

DATAM peripheriam bifariam ſecare.

SIT peripheria A B C, ſecanda bifariam. Ducatur recta ſubtendens A C, qua diuiſa bifariam in D, erigatur perpendicularis D B, quæ peripheriam A B C, bifariam ſecabit in B. Ductis enim rectis A B, C B, erunt latera A D, D B, trianguli A D B, æqualia lateribus C D, D B, trianguli C D B: Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti. Igitur
c 4. primi. *e* & baſes A B, C B, æquales erunt; Ac propterea *f* peripheriæ A B, C B,
f 28. tertij. A D C erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam ſecuimus. Quod erat faciendum.



PRAXIS.

NON differt praxis diuidendo datam peripheriam bifariam à praxi diuidendi rectam lineam bifariam, quam ad propoſ. 10 lib. 1. tradidimus. Si namq; quicunq; arcus proponatur, vt A B C, intelligenda ſemper eſt recta linea eum ſubtendens A C, etiamſi ducta non ſit; atq; ex punctis A, & C, deſcribendi arcus eodem internallo ſemi-

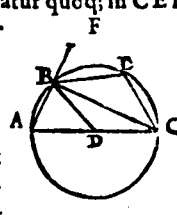
tus

tuò interſecantes ſupra & infra puncta A, & C, &c. non ſecus, ac ſi dicta recta A C, ſecanda eſſet bifariam. Recta enim dividens rectam A C, bifariam, ſecabit quoq; arcum datum bifariam.

THEOR. 27. PROPOS. 31. XXXI

IN circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in maiore ſegmento, minor recto: qui verò in minore ſegmento, maior eſt recto. Et inſuper angulus maioris ſegmenti, recto quidem maior eſt: minoris autem ſegmenti angulus, minor eſt recto.

CIRCVLI enim A B C, cuius centrum D, diameter ſit A C, conſtituaturq; in ſemicirculo angulus A B C, exiſtetq; angulus B A C, in maiori ſegmento C A B. Conſtituatur quoq; in C E B, minori ſegmento angulus B E C. Dico angulum A B C, in ſemicirculo rectum eſſe; angulum verò B A C, in maiore ſegmento, minorem recto: & angulum B E C, in minori ſegmento, maiorem recto. Item angulum maioris ſegmenti comprehenſum recta B C, & peripheria B A C, eſſe recto maiorem. At angulum minoris ſegmenti comprehenſum recta B C, & peripheria B E C, recto minorem. Ducatur enim recta B D, ad centrum, & extendatur A B, in F. Quoniam igitur rectæ D A, D B, æquales ſunt, *a* erit angulus D B A, angulo D A B, æqualis. Eadem ratione erit angulus D B C, angulo D C B, æqualis, ideoq; totus angulus A B C, duobus angulis B A C, B C A, æqualis erit. *b* Eſt autem & angulus F B C, externus eiſdem duobus internis angulis B A C, B C A, in triangulo A B C, æqualis. Quare æquales erunt inter ſe anguli A B C, F B C; ac propterea vterque rectus. Rectus igitur eſt angulus A B C; quod eſt primum.



a 5. primi.

b 32. primi.

QVONIAM verò in triangulo A B C, *c* duo anguli A B C, & B A C, ſunt duobus rectis minores; Et eſt angulus A B C, oſtenſus rectus: Erit angulus B A C, in ſegmento maiori, recto minor; quod eſt ſecundum.

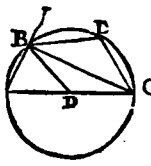
c 17. primi.

RVRSVS quia in quadrilatero A B E C, intra circulum deſcripto, *d* duo anguli oppoſiti B A C, & B E C, ſunt duobus rectis æquales; Et angulus B A C, oſtenſus eſt recto minor: Erit B E C, angulus in ſegmento minore, recto maior; quod eſt tertium.

d 22. primi.

SATIS autem eſt, demonſtraſſe, Omnem angulum in ſemicirculo, nimirũ A B C, rectum eſſe: & in maiori ſegmento, qualis eſt B A C, recto minorem: ac denig; in ſegmento minori, cuiuſmodi eſt B E C, maiorem recto. Cùm enim omnes anguli in eodem ſegmento ſint inter ſe æquales, perſpicuum eſt, ſi Omnis angulus in ſemicirculo rectus ſit, omnes in eodem ſemicirculo eſſe rectos: Et ſi in maiore ſeg-

segmento omnis sit recto minor, omnes in eodem segmento esse recto minores: Et si denique in minore segmento omnis sit maior recto, omnes in eodem segmento maiores esse recto. Hoc idcirco dixerim: quia Euclides non probat absolutè, quemcunq; angulum in segmento maiore B A C, esse recto minorem, & constat, si alius angulus in eo segmento constitueretur; cùm is non contineretur à diametro, quemadmodum angulus B A C. Quare quicunque alius ostendetur esse etiam recto minor, quia æqualis est angulo B A C, in eodem segmento maiore, qui recto minor est ostensus ab Euclide.

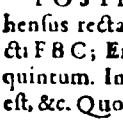


a 21. tertij.

AMPLIVS cùm angulus rectus A B C, pars sit anguli segmenti maioris B A C, qui comprehenditur recta B C, & peripheria B A C; erit angulus segmenti maioris, recto maior, quod est quartum.

POSTREMO, cùm angulus segmenti minoris, comprehensus recta B C, & peripheria B E C, pars sit quoque anguli recti F B C; Erit angulus segmenti minoris, recto minor; quod est quintum. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est, &c. Quod erat demonstrandum.

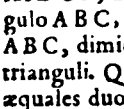
ALIA demonstratio huius propositionis. In semicirculo, cuius diameter A C, & centrum D, sit angulus A B C, quem dico esse rectum. Ducta enim recta B D, *b* erunt anguli D B A, D A B, æquales, quòd rectæ D A, D B, æquales sint. Cùm igitur angulus B D C, exteruus *c* æqualis sit duobus angulis internis D B A, D A B, in triangulo A B D; Erit angulus B D C, duplus anguli D B A. Eodem modo erit angulus A D B, duplus anguli D B C, atque adeò duo anguli ad D, dupli erunt totius anguli A B C. Cùm igitur *d* anguli ad D, sint duobus rectis æquales; erit angulus A B C, eorum dimidium, rectus: quod est primum.



b 5. primus
c 32. primi.
d 13. primus.

Vel sic. Quoniam *e* angulus D A B, angulo D B A, & angulus D C B, angulo D B C, æqualis est; erunt duo anguli A, C, angulo A B C, æquales in triangulo A B C: ac proinde angulus A B C, dimidium erit trium angulorum A, C, & A B C, eiusdem trianguli. Quocirca *f* cùm tres anguli in triangulo A B C, sint æquales duobus rectis; erit A B C, dimidium duorum rectorum, atq; idcirco rectus.

e 5. primi.
f 32. primi.



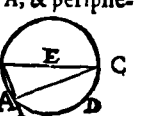
SIT rursus in segmento maiori, cuius centrum D, angulus A B C, quem dico esse recto minorem. Ducta enim diametro A E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in semicirculo rectus, vt demõstratum est. Quare angulus A B C, pars recti, recto minor erit: quod est secundum: Atq; hæc demonstratio in omnem

nem angulum in minori segmento quadrat: quod de superiori demonstratione dici non poterat, vt ibidem monuimus.

SIT iterum in segmento minori, cuius centrum D, angulus A B C, quem dico esse recto maiorẽ. Ducta enim diametro A E, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in semicirculo rectus, vt demonstratũ est; qui cùm sit pars anguli A B C, erit angulus A B C, recto maior: quod est tertium.



IAM verò proponatur segmentum maius A B C, & segmentum minus A D C, quorum centrum E. Dico angulum C A B, segmenti maioris, qui videlicet constituitur à recta C A, & peripheria A B C, esse recto maiorem; At angulũ C A D, segmenti minoris, qui fit à recta eadem C A, & peripheria A D C, recto minorem. Ducta enim diametro C B, & recta B A F, cadet eius segmentum B A, duo puncta B, A, coniungens, *a* intra circulum, reliqua verò pars A F, extra circulum; eritq; angulus B A C, in semicirculo rectus, atque adeò ei deinceps F A C, rectus quoq;. Cùm igitur angulus rectilineus rectus B A C; sit pars anguli C A B, segmenti maioris, qui nimirũ sub recta C A, & peripheria A B C, continetur, & angulus C A D, segmenti minoris, contentus videlicet sub recta C A, & peripheria A D C, pars quoque anguli recti F A C; constat vtrumque.



a 2. tertij.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, quòd angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est: eo quòd illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit æqualis. Quod quidem constat ex priore demonstratione. Vel eo quod dimidium sit trium angulorum trianguli, qui duobus rectis æquiualent. Quod ex posteriore demonstratione manifestum est.

EX CAMPANO.

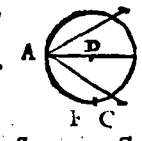
EX hac propositione perspicuum quoque est, non valere duas illas argumentationes, quas impugnauimus ad propos. 16. huius lib. quarum vna est.

TRANSITVR à maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

ALTERA verò est eiusmodi.

CONTINGIT reperire maius, & minus eodem; Igitur continget reperire æquale.

IN circulo enim A B C, cuius centrum D, & diameter A E, ducatur recta, A B, & erit angulus A B E segmenti maioris, recto maior. Quare si A B, moueatur versus A E, circa A, punctum fixum, b 31. tertij. *fiet*



a 16. ter tij.
b 31. ter tij.

faciet semper cum peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum A E, peruenerit, a Vbi faciet angulum semicirculi, recto minorem. Quod si Vlterius moueatur ad A C, b faciet à fortiori angulum A C F, segmenti minoris, recto minorem. Transitur ergo ab angulo segmenti maioris, qui recto maior est, ad angulum semicirculi, vel etiam segmenti minoris, quorum vterque recto minor est, non tamen per angulum recto aqualem. Cum igitur per omnes medios angulos fiat transitus, per spicuum est, vtrosuis esse prædictas consequentias.

SCHOLIVM.

MANIFESTVM quoq; est conuersum huius theorematis: hoc est.

SEGMENTVM circuli, in quo angulus constitutus est rectus, est semicirculus: in quo verò angulus est acutus, est segmentum maius: & in quo angulus est obtusus, est segmentum minus. Et segmentum, cuius angulus recto est maior, est semicirculo maius; cuius verò angulus est recto minor, est vel semicirculus, vel semicirculo minus.

NAM angulo existente recto, si segmentum non sit semicirculus, erit vel maius, & sic angulus erit acutus; vel minus, & sic angulus in eo obtusus erit: quorum vtrumque pugnat cum hypothesi. Rursus angulo existente acuto, si segmentum non sit semicirculo maius, erit vel semicirculus, & sic angulus in eo erit rectus; vel minus, & sic angulus in eo erit obtusus: quorum vtrumque cum hypothesi etiam pugnat. Denique angulo existente obtuso, si segmentum non sit minus semicirculo, erit vel semicirculus, atque ita angulus in eo rectus erit; vel maius, atq; ita angulus in eo acutus erit: quod similiter hypothesi contrarium est. Præterea, quando segmenti angulus est recto maior, si segmentum non sit maius semicirculo, erit vel semicirculus vel semicirculo minus, & sic eius angulus recto erit minor, quod non ponitur. At quando angulus segmenti est recto minor, si segmentum non sit semicirculus, aut semicirculo minus, erit maius, atque ita eius angulus recto quoq; maior erit. quod hypothesi aduersatur.

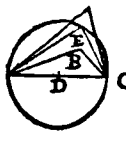
QVIN & hoc theorema verum est; scilicet.

SI angulo recto linea recta subtensa, hoc est, si in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, bifariã secetur, & ex puncto diuisionis circa illam rectam, vel latus, circulus describatur; transibit necessariò circulus ille per angulum rectum.

ANGVLO enim recto A B C, subtensa recta A C, vel in trian-

gulo

gulo rectangulo A B C, latus A C, recto angulo B, oppositum bifariam
secetur in D, puncto, ex quo ad intervallum D A,
vel D C, circulus describatur A E C, quem dico
transire per B. Si enim transeat citra B, vel ultra;
ductis rectis A E, C E, ita ut rectas A B, A C, non
secent, sed vel intra eas cadant, vel extra; a erit
angulus A E C, rectus quoq;. Quare anguli recti
B, & E, aequales erunt; quod est absurdum: cùm
angulus E, sit necessariò, b vel maior, vel minor angulo B. Transit
igitur circulus per punctum B: quod est propositum.

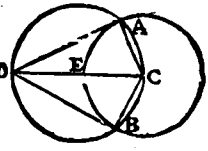


a 31. tertij.

b 21. primi.

EX ijs, quæ in priore parte huius propos. demonstrata sunt, nullo
negotio ex puncto extra circulum dato ducemus duas rectas ad utram-
que partem recta ex eodem puncto per centrum circuli ducta, quæ cir-
culum tangant. Id quod ad propos. 17. huius lib. polliciti sumus.

SIT enim circulus A B, cuius centrum C, & punctum D, extra
ipsum. Ducta recta D C, ex dato puncto ad
centrum, eaq; divisa bifariam in E, describatur
ex E, ad intervallum E C, vel E D,
circulus A C B D, secans datum circulum
in punctis A, B, jungantur q; rectæ D A,
D B. Dico utramq; circulum tangere in A,
& B. Ductis enim rectis A C, B C, c erit uterq; angulus A, & B, in
semicirculo rectus. Quare per coroll propos. 16. huius lib. recta D A, cir-
culum A B, tanget in A; & recta D B, eundem tanget in B: quando-
quidem tam illa perpendicularis est ad extremitatem semidiametri
A C, quàm hæc ad extremitatem semidiametri C B.

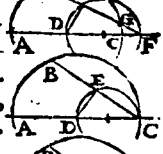


c 31. tertij.

SED & hoc theorema non injucundum ex Pappo Alexandrino
demonstrabimus hoc loco.

SI per centrum circuli alius circulus describatur, & per vtriusque circuli centrum recta eijciatur, à puncto verò, vbi hæc recta à posteriori circulo secatur, ducatur recta vtcunq;: secabitur eius portio intra priorem circulum à circumferentia posterioris bifariam.

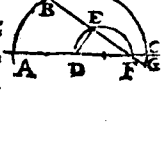
SIT circulus A B C, per cuius centrum D, de-
scribatur alius circulus D E F, & per horum circu-
lorum centra ducatur recta A F; ac denig; ex punc-
to F, vbi circulus D E F, rectam A F, intersecat, du-
catur recta F B, secans circumferentias in B, E, G.
Dico B E, G E, esse aequales. Ducta enim recta D E,
d erit angulus D E F, in semicirculo D E F, rectus.
Igitur e recta D E, rectam B G, secat bifariam.



d 31. tertij.

e 3. tertij.

QVOD si posterior circulus transeat per punctũ
C, ut in 2a figura fecit f rursum angulus D E C, in



f 31. tertij.

semi-

a 3. ter- *semicirculo D E C, rectus; ac* a *propterea B C, in E, secabitur bifa-*
tij. *riam.*

SI denique posterior circulus totus sit intra priorem, & in tertia
b 31. ter figura; *erit iterum* b *angulus D E F, in semicirculo D E F, rectus.*
tij. *Quare* c *recta D E, rectam B G, bifariam secabit. Quod erat oste-*
c 3. ter- *dendum.*
tij.

FACILE etiam aliud hoc theorema demonstrabitur.

QVADRILATERVM in circulo descriptum, cuius duo latera opposita sunt parallela, & æqualia, parallelogrammum est rectangulum, hoc est, vel quadratum, vel altera parte longius.



IN circulo, A B C D, descriptum sit quadrilaterum A B C D, cuius duo opposita latera A D, B C, parallela sint, & æqualia. Dico, sum esse parallelogrammum, & rectangulum. Cùm enim recta A D, B C, pa-
d 33. pri- *rallela sint, & æquales,* d *erunt quoque A B, D C, parallelæ, & æquales. Parallelogrammum ergo est*
e 28. ter *A B C D. Quia verò* e *& arcus A D, arcui B C, ob rectas æquales*
tij. *A D, B C, & arcus A B, arcui D C, ob æquales rectas A B, D C, æqualis est; erit totus arcus B A D, toti arcui B C D, & totus arcus*
f 31. ter- *A D C, toti arcui A B C, æqualis; ac proinde, ductis rectis B D, A C,*
tij. *semicirculi erunt B A D, B C D, A D C, A B C. Quare* f *anguli quadrilateri recti erunt. Quod est propositum.*

xxxj. THEOR. 28. PROPOS. 32.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

TANGAT recta A B, circulum C D E, in C, puncto, à quo ducatur recta C E, diuidens circulum in duo segmenta, in quibus fiant anguli C G E, C D E. Dico angulum A C E, æqualem esse angulo C G E, in alterno segmento; & angulum B C E, angulo C D E, in alterno quoque segmento. Tranleat enim primum, vt in priore figura, recta C E, per centrũ.



g Erit igitur vterque angulus A C E B C E, rec-
g 18 ter- tus: h Sunt autem & anguli C G E, C D E, in
tij. semicirculis recti. Igitur angulus A C E, angulo
h 31. ter tij. C G E; & angulus B C E, angulo C D E, æqualis est.

NON

NON transeat iam CE, recta per centrum, vt in figura posteriore. Ducta igitur recta CF, per centrum, connectatur recta EF: *a* eritque CF, perpendicularis ad AB, *b* & angulus CEF, rectus; ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, æquales erunt vni recto, vt angulo recto ACF. Dempto ergò communi angulo ECF, erit reliquus ACE, reliquo CFE, æqualis: *c* Est autem angulo CFE, æqualis quoque angulus CGE, cùm vterq; sit in segmento CGE. Quare angulus ACE, angulo CGE, æqualis erit. Quoniam verò in quadrilatero CDEG, duo *d* anguli CDE, CGE, duobus sunt rectis æquales: *e* Sunt autem & duo anguli ACE, BCE, duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli ACE, CGE, remanebit angulus BCE, angulo CDE, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem, &c. Quod erat ostendendum.

a 18. ter tÿ.
b 31. ter tÿ.
c 21. ter tÿ.
d 22. ter tÿ.
e 13. pri mi.

SCHOLIVM.

POTEST theorema hoc conuerti hoc modo.

SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

IN eadem figura priore transeat primùm recta CE, per centrum, secans circulum CDE, & ducatur recta AB, per C, faciens angulum ACE, æqualem angulo CGE. Dico AB, tangere circulum. Quoniam f *angulus CGE, rectus est, erit & angulus ACE, illi æqualis, rectus.* f 31. tert. *Quare per coroll. propos. 16. huius lib. AB, circulum tanget. Iam verò* tÿ. *CE, non transeat per centrum, construatur* q *figura posterior, vt suprà. Quoniam igitur angulus ACE, æqualis ponitur angulo CGE, in alterno segmento maiore,* g *& hic est æqualis angulo CFE; erit* g 21. ter *& angulus ACE, æqualis angulo CFE. Addito ergo communi angulo ECF, erit angulus ACF, æqualis duobus angulis EFC, ECF: Atqui anguli EFC, ECF, æquales sunt vni recto; quod* h *angulus* h 32. ter *CEF, rectus sit in semicirculo, & tres anguli in triangulo CEF, æquales* i *sint duobus rectis. Angulus igitur ACF, rectus quoq; erit;* i 32. pri *ideoq; per coroll. propos. 16. huius lib. AB, circulum tanget.* mi.

EODEM modo, si angulus BCE, æqualis fuerit angulo CDE, in alterno segmento minori, ostendetur recta AB, tangere circulum. Cùm enim k *anguli BCE, ACE, duobus sint rectis æquales; Item duo* l *anguli CDE, CGE, duobus rectis æquales; si demantur æquales BCE, CDE, remanebunt anguli ACE, CGE, æquales. Quare, vt demonstratum iam est, recta AB, circulum tanget.*

k 13. pri mi.
l 22. ter tÿ.

PROBL. 5. PROPOS. 33. xxxij.

SVPER data recta linea describere segmentum circuli,

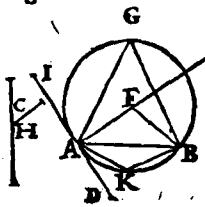
culi, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

RECTA data sit A B, & datus angulus primum rectus C.



Oportet igitur super A B, segmentum describere, in quo angulus existens sit æqualis angulo recto dato C. Diuisa A B, bifariam in D, describatur centro D, interuallo autem D A, vel D B, semicirculus A E B; factumq; erit, quod proponitur. Nam *a* angulus A E B, in descripto semicirculo rectus est, ideoque æqualis angulo C, recto.

a 31. *ter tij.*



SIT deinde angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus D A B, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad D A, perpendicularis A E, quæ cadet supra A B. Fiat deinde angulo F A B, æqualis angulus F B A, secetq; B F, rectam A E, in F. *b* Erunt igitur rectæ F A, F B, æquales. Quare si centro F, & interuallo F A, circulus describatur A G B, transibit is per B. Dico igitur angulum in segmento A G B, quod descriptum est super A B, esse æqualem angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento A G B. Quia igitur A E, per centrum F, transit, & ei perpendicularis est D A, tanget D A, recta circulum in A, per coroll. propos. 16. huius lib. Quapropter *c* angulus D A B, hoc est, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in segmento alterno A G B.

b 6. *primi.*

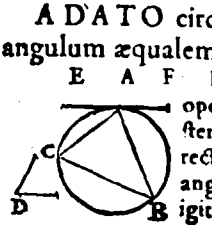
c 32. *ter tij.*

SIT tertiò angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo H, æqualis angulus I A B, & agatur ad I A, perpendicularis A E, quæ supra A B, cadet. Reliqua omnia fiant, vt prius, describatumq; erit super A B, segmentum A K B, in quo angulus K, æqualis est angulo dato obtuso H. Nã angulus I A B, hoc est, angulus datus H, æqualis *d* est angulo K, in alterno segmento A K B. Eadem enim est demonstratio. Itaque super data recta linea descripsimus segmentum, &c. Quod efficiendum erat.

d 32. *ter tij.*

xxiij. PROBL. 6. PROPOS. 34.

A DATO circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.



DATVS circulus sit A B C, à quo auferre oporteat segmentum, in quo angulus existens æqualis sit dato angulo D. *e* Ducatur recta E F, tangens circulum in A. Fiat deinde angulus F A B, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulum A C B, in segmento ablato A C B,

e 17. *ter tij.*

ACB, æqualem esse dato angulo D. Est enim *a* angulus FAB, æqualis angulo C, in alterno segmento ACB. Cùm ergo angulo dato D, factus sit æqualis angulus FAB, erit quoque angulus C, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abscindimus segmentum ACB. &c. Quod erat faciendum. *a* 32. *huj.*

THEOR. 29. PROPOS. 35.

SI in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuò secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis vnius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo. XXXIV.

IN circulo ACBD, secent se mutuò rectæ AB, CD, in E. Dico rectangulum comprehensum sub segmentis AE, EB, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis CE, ED. Aut enim vtraque linea transit per centrum, aut vna tantùm, aut neutra. Transeat primùm vtraq; per centrum. Quoniã igitur omnia quatuor segmenta inter se æqualia sunt, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub duobus vnius lineæ æquale esse ei, quod sub duobus alterius lineæ comprehenditur, rectangulo, ex ijs, quæ ad initium lib. 2. scripsimus.

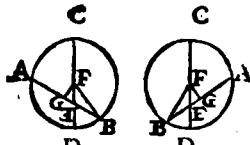


TRANSEAT deinde CD, sola per centrum F, diuidatque primùm rectam AB, bifariam, *b* ac propterea ad angulos rectos, coniungaturq; recta BF. Quoniam igitur CD, diuisa est per æqualia in F, & per inæqualia in E, *c* erit rectangulum sub CE, ED, vnà cum quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectæ FD, ideoq; quadrato rectæ FB, cùm rectæ FD, FB, sint æquales: Est autẽ quadratum rectæ FB, *d* æquale quadratis rectarum FE, EB. Igitur rectangulum sub CE, ED, vnà cum quadrato rectæ EF, æquale quoq; erit quadratis rectarũ FE, EB. Quare ablato communi quadrato rectæ FE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale quadrato rectæ EB, hoc est, rectangulo sub AE, EB, cùm AE, EB, rectæ sint æquales: ac proinde rectangulum sub eis comprehensum, sit quadratum, ex ijs, quæ ad defin. 1. lib. 2. scripsimus. *b* 3 *huj.* *c* 5. *sec.* *d* 47. *primi.*



DIVIDA T iam CD, transiens per centrum rectam AB, non bifariam. Secetur ergo AB, bifariam in G, ducanturq; rectæ FG, FB, *e* eritq; FG, perpendicularis ad AB. Quoniam verò rectangulum sub CE, ED, vnà cum quadrato rectæ FE, æquale *f* est quadrato rectæ FD, hoc est, quadrato rectæ FB: Est autem quadratum rectæ FE, *g* æquale quadratis rectarum FG, GE, *e* 3. *huj.* *f* 5. *secundi.* *g* 47. *primi.*

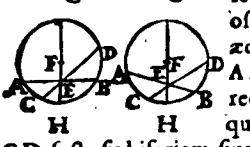




FG, GE, & quadratũ rectæ FB, æquale quadratis rectarũ FG, GB; erit quoque rectangulum sub CE, ED, vna cũ quadratis rectarum FG, GE, æquale quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo communi quadrato rectæ FG, remanebit rectangulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectæ GE, æquale quadrato rectæ GB. Atqui etiam rectangulum sub AE, EB, vna cum quadrato rectæ GE, *a* æquale est eidem quadrato rectæ GB: propterea quòd recta AB, secta est bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vnà cum quadrato eiusdem rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale rectangulo sub AE, EB. quod est propositum.

a 5. *secũ di.*

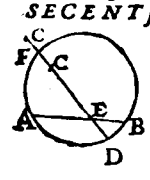
TERTIO neutra per centrum transeat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra. Ducatur per centrum F, & punctũ sectionis E, recta GH. Quoniam itaque ostensum est, rectangulum sub AE, EB, æquale esse rectangulo sub GE, EH, siue AB, diuidatur bifariam, siue non: item rectangulũ sub CE, ED, æquale esse quoque eidem rectangulo sub GE, EH, siue CD, secta sit bifariam, siue non; Erit rectangulum sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED. quod est propositum. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ seseè mutuò secent, &c. Quod demonstrandum erat.



SCHOLIVM.

CONVERTI poterit theorema istud hoc modo.

SI duæ rectæ ita se secent, vt rectangulum sub vnius segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo; describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc est, circulus per quælibet tria puncta earum extrema descriptus, per quartum quoq; punctum transibit.



SECENT se mutuò rectæ AB, CD, in E, sitq; rectangulum sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED. Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circumferentiam circuli cadere, hoc est, per ea circulum posse describi: adeò vt circulus per tria puncta A, D, B, descriptus, transeat necessariò per punctum etiam C. Describatur enim per tria puncta A, D, & B, circulus aliquis;

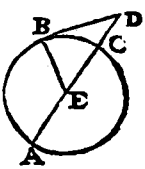
(quo

(quo autem modo id fiat, ostendemus ad 5. propos. lib. 4). quia si non transeat per C, transibit aut vltra C, vel citra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum sub F E, E D, æquale est rectangulo sub A E, E B; & rectangulum sub C E, E D, ponitur quoq; æquale eidem rectangulo sub A E, E B; Erunt rectangula sub C E, E D, & sub F E, E D, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Transibit igitur circulus per punctum C. quod erat propositum. 35 tertij.

THEOR. 30. PROPOS. 36. XXXV.

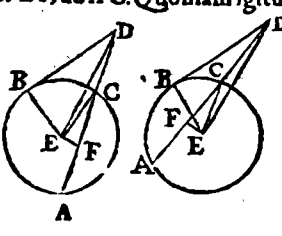
SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera verò tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.

EXTRA circulum A B C, punctum sumatur D, a quo linea ducatur D A, secans circulum in C, *b* & linea D B, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub D A, D C, æquale esse quadrato rectæ D B. Transeat enim primum recta D A, per centrum E, & iungatur recta E B *c* quæ perpendicularis erit ad D B. Quoniam igitur C A, diuisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum & cõtinuum C D, *d* erit rectangulum sub D A, D C, vna cum quadrato rectæ E C, hoc est, cum quadrato rectæ E B, æquale quadrato rectæ D E: Est autem quadratum rectæ D E, *e* æquale quadratis rectarum E B, B D. Quare rectangulum sub D A, D C, vna cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadratis rectarum D B, B E. Ablato igitur communi quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale. Quod est propositum.



b 17. tertij. c 18. tertij. d 6. secundi. e 47. primi.

NON transeat iam D A, secans per centrum E Diuisa ergo A C, bifariam in F, ducantur rectæ E B, E C, E D, E F; *f* eritque E B, ad B D, perpendicularis; *g* & E F, ad A C. Quoniam igitur C A, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta C D, *h* erit rectãgulum sub D A, D C, vna cum quadrato rectæ C F, æquale quadrato rectæ D F. Addito igitur communi quadrato rectæ F E, erit rectangulum sub D A, D C, vna cum quadratis rectarũ C F, F E, æquale quadratis rectarũ D F,



f 18. tertij. g 3. tertij. h 6. secundi.

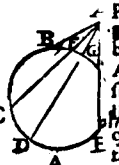
14. primi. FE: Est autem quadratis rectarum CF, FE, *a* æquale quadratum rectæ EC, ideoque & quadratum rectæ EB; Et *b* quadratis rectarum DF, FE, æquale est quadratum rectæ DE. Quare rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadrato rectæ DE. Cùm igitur quadratum rectæ DE, *c* æquale sit quadratis rectarum DB, BE; erit & rectangulum sub DA, DC, vnà cum quadrato rectæ EB, æquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum sub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale: quod est propositum. *Si* igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

b 47. primi.

c 47. primi.

COROLLARIVM I.

HINC manifestum est, si à puncto quouis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus, inter se esse æqualia. Vt si ex A, ducantur rectæ AC, AD, AE, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub AC, AF; Item sub AD, AG; & sub AE, AH, æqualia inter se. Nam ducta AB, tangente circulum, *d* erunt quadrato rectæ AB, æqualia singula illa rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt.



d 36. tert. elem.

COROLLARIVM II.

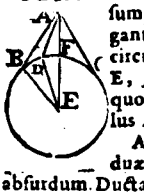
CONSTAT etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter se esse æquales. Ducantur enim ex A, rectæ AB, AC, tangentes circulum; quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta AD, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ AB, quàm quadratum rectæ AC, *e* æquale rectangulo sub AD, AE. Quare quadrata rectarum AB, AC, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ AB, AC, æquales quoque erunt.



e 36. tert. elem.

COROLLARIVM III.

PERSPICVVM quoque est, ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantùm posse duas lineas, quæ circulum tangant. Si enim præter duas AB, AC, duci possit tertia AD, circulum eundem tangens; ductis rectis EB, ED, ex centro E, *f* erunt anguli ABE, ADE, recti, ideoque æquales; quod est absurdum. Nam si ducatur recta AE, *g* erit angulus ADE, maior angulo ABE.



f 8. tert. elem.

g 21. primi.

ALITER. Si tertia AD, circulum etiam tangat, erunt duæ tangentes AB, AD, æquales, vt ostensum est; quod est absurdum. Ducta namque recta AE, ad centrum E, quæ circulum secet in F, *h* erit AD, cùm sit propinquior minimæ AF, minor, quam AB, quæ à minima AF, remotior est. Vel sic. Si AB, AD, sunt æquales; additis æqualibus EB, ED, erunt quoque AB, BE, ipsis AD, DE, æquales. quod est absurdum. *i* Sunt enim maiores AB, BE. Solùm igitur duæ rectæ ducentur a puncto A, quæ circulum tangant: Quod est propositum.

h 8. tert. elem.

i 1 primi.

COROL-

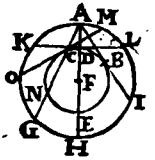
COROLLARIVM IV.

ILLVD denique constat etiam, si duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in conuexam peripheriam incidant, & earum vna circulum tangat, alteram quoque circulum tangere. Vt si duæ rectæ A B, A C, in antecedente figura sint æquales, & A C, tangat circulum in C, tanget quoque A B, eundem circulum in B. Si enim non tangat, ducatur A D, tangens, (semper enim duæ tangentes ab eodem puncto duci possunt, vt constat ex scholio propos. 31. huius lib. eruntq; ex 2. coroll. A C, A D, æquales. Cum ergo & A B, ipsi A C, æqualis ponatur, ducentur tres rectæ æquales A B, A C, A D, quod est absurdum. a Duæ enim tantùm duci possunt. a 8. ter. tij.

ALITER. Ponantur in figura sequentis propos. duæ rectæ æquales D B, D F, & D B, circulum tangat, in B. Dico & D F, eundem tangere in F. Ductis enim rectis E B, E F, ex centro, erunt duo latera D B, B E, duobus lateribus D F, F E, æqualia, & basis D E, communis. b Igitur anguli B, F, æquales erunt: c Sed B, rectus est. Igitur & F, rectus erit. atque idcirco D F, circulum tanget in F, ex coroll. propos. 16. huius lib. b 8. pri. mi. c 18. ter. tij.

SCHOLIVM.

FACILLIMO negotio propositionem hanc per antecedentem propositionem demonstrabimus, hoc modo. Ex puncto A, extra circulum B C D, ducatur tangens A B, & secans A E, quæ primùm per centrum F, transeat, secetq; circumferentiã in D. Dico rectangulum sub A E, A D, æquale esse quadrato ex A B. Descripto namque ex F, per A, circulo A K L, producantur A E, A B, & q; ad H, I; & per D, ad A H, perpendicularis K L, quæ eundem circulum B C D, tanget in D, ex coroll. propos. 16. huius lib. Eruntq; ex demonstratis in scholio propos. 3. huius lib. A D, H E, æquales, ac proinde, addita communi D E, & A E, H, D, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius lib. A I, K L, æquales erunt, secabunturq; in B, D, bifariam: ac propterea rectangula sub A B, B I: & sub K D, D L, æqualia inter se erunt, atq; adeò quadrata, ob æqualitatem rectarum A B, B I; K D, D L. Itaq; quoniam rectangulum sub H D, D A, hoc est, sub A E, (quæ ipsi H D, ostensa est æqualis) A D, d æquale est rectangulo sub K D, K L, hoc est, rectangulo sub A B, B I, siue quadrato ex A B, constat propositum.



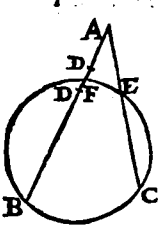
d 35. ter. tij.

SED iam secans linea A N, non transeat per centrum F, secetq; circumferentiam in C. Dico rursum, rectangulum sub A N, A C, quadrato ex A B, æquale esse. Descripto enim rursus ex F, per A, circulo A K L, producantur A N, A B, & q; ad G, I; & per C, ducatur O M, circulum B C D, tanget. Eruntq; ex scholio propos. 3. huius lib. A C, G N, æquales, ac proinde, addita communi C N, & A N, G C, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius lib. A I, O M, æquales erũt, secabunturq; in B, C, bifariã: ac propterea rectangula sub

A B, B I, & sub O C, C M, æqualia inter se erunt, atq; adeò quadrata, ob æqualitatem rectarum A B, B I; O C, C M. Itaque quoniam rectangulum sub G C, C A, hoc est, sub A N, (quæ ipsi G C, ostensa est 35. ter. 6. *æqualis) A C, æquale est rectangulo sub O C, C M, hoc est, rectangulo sub A B, B I, sine quadrato ex A B; constat rursus id, quod proponebatur.*

PRIMVM etiam corollarium huius propos. hoc modo fermè consequemur.

SI à puncto aliquo binæ lineæ rectæ finitæ egrediantur, quæ ita secentur in binas partes, vt rectangula sub totis, & segmentis prope punctum comprehensa sint æqualia: describi poterit per extrema puncta aliorum segmentorum circulus, hoc est, circulus per tria puncta extrema aliorum segmentorum descriptus, per quartum etiam punctum extremum transibit.



EX puncto enim A, egrediantur duæ rectæ A B, A C, quæ ita secentur in punctis D, E, vt rectangula sub A B, A D, & sub A C, A E, sint æqualia. Dico quatuor puncta B, C, E, D, in circumferentiam circuli cadere; hoc est, per ea posse describi circulum: adeò vt circulus per tria puncta B, C, E, descriptus, transeat necessariò per reliquum etiam punctum D. Describatur enim per tria puncta B, C, E, (vt ad propos. 5. lib. 4. docebimus) circulus B C E, qui si dicatur non transire per quartum punctum D, transibit aut citra D, aut vltra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum sub A B, A F, æquale est, ex coroll. 1. huius propos. rectangulo comprehenso sub A C, A E; & rectangulum sub A B, A D, eidem rectangulo sub A C, A E, ponitur æquale: erunt rectangula sub A B, A F, & sub A B, A D, inter se æqualia, pars & totum: quod est absurdum. Transibit ergo circulus per punctum D. Quod erat demonstrandum.

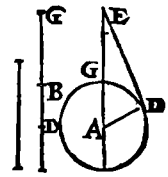
LICEBIT quoque ex demonstratis hac propos. colligere huiusmodi problema.

DATIS duabus rectis siue æqualibus, siue inæqualibus, alterutri earum rectam adiungere, vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta comprehensum, quadrato alterius sit æquale.

SINT data duæ rectæ A B, & C, sitque ipsi A B, minori adiungenda recta, ita vt rectangulum comprehensum sub tota composita, & adiuncta, æquale sit quadrato rectæ C, maioris. Diuisa recta A B,

recta A B, bifariam in D, describatur ex quouis centro A, ad interuallum A D, dimidiatus, circulus D F G, & ad A D, in D, excitetur perpendicularis D E, ipsi C, aqualis, ac denique ex E, per A, centrum recta extendatur E F, secans circumferentiam in G. Dico si recta A B, adiiciatur B G, ipsi E G, aqualis, rectangulum sub totA G, & G B, aquale esse quadrato recta C. Quoniam enim rectangulum sub F E, E G, a aquale est quadrato recta E D, (quod E D, circulum tangat in D, ex coroll. propos. 16. huius lib.) Est autem rectangulum sub F E, E G, aquale rectangulo sub A G, G B, (quod recta F E, E G, rectis A G, G B, aquales sint. Sumpta enim est G B, ipsi E G, aqualis, & A B, ipsi F G, aqualis posita est,) & quadratum ex E D, quadrato ex C, (ob aqualitatem rectarum E D, & C, ex constructione,) aquale. Igitur & rectangulum sub A G, G B, quadrato ex C, aquale erit. Quod est propositum.

a 36. tert. tij.



NON secus propositum demonstrabitur, si recta C, maiori adiungenda sit recta, ita vt rectangulum sub totA compositA, & adiunctA comprehensum quadrato recta A B, minoris aquale sit.

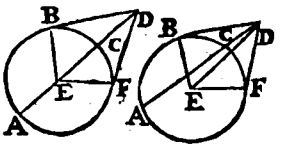
THEOR. 31. PROPOS. 37. xxxvj.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.

EXTRA circulum A B C, cuius centrum E, punctum sumatur D, à quo ducatur recta D A, circulum secans in C, & recta D B, incidens in circulum ad punctum B; sitque rectangulum sub D A, D C, æquale quadrato rectæ D B. Dico D B, circulum tangere in B. *b* Ducatur enim D F, tangens circulum, & iungantur rectæ E B, E F. Quod si D A, secans non transeat per centrum E, iungatur quoque recta D E. Quoniam igitur rectangulo sub D A, D C, *c* æquale est quadratum rectæ tangentis D F: Et eidem rectangulo sub D A, D C, æquale ponitur quadratum rectæ D B: erunt quadrata rectarum D F, D B, inter æqualia, ideoque & rectæ D F, D B, æquales inter se erunt. Ita-

b 17. tert. tij.

c 36. tert.



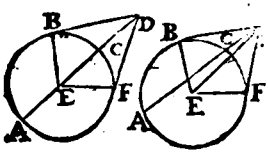
que quia latera D F, F E, trianguli D F E, æqualia sunt lateribus
a 8. pri. D B, B E, trianguli D B E; & basis D E, communis, a erunt anguli
b 18 tert. D F E, D B E, æquales. b Atqui angulus D F E, rectus est, quod D F, circulum tangat. Igitur & angulus D B E, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib. D B, circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EST autem hoc theorema conuersum præcedentis theorematis, & perspicuum est.

PLACET hoc loco sequens etiam theorema demonstrare.

SI à puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum tangentes ducantur, aut duæ lineæ vsque ad conuexam peripheriam inter se æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circuli ducta angulum ab eis comprehensum diuidit bifariam: Et contra, Linea recta angulum ab eis comprehensum diuidens bifariam, per centrum circuli transibit.



IN priori figura huius propos. duæ rectæ D B, D F, circulum A B C F, tangant in B, F, punctis, quæ ex 2. coroll. præcedentis propos. æquales erunt: Vel ducantur quacunq; duæ æquales D B, D F. Et per centrum E, ducatur recta linea D E A. Dico angulum B D F, sectum esse bifariam à recta D A. Cum enim tangentis rectis E B, E F, duo latera B D, D E, duobus lateribus F D, D E, æqualia sint, basisque E B, basi E F, æqualis; c *erunt duo anguli ad D, inter se æquales. Quod est propositum.*

c 8. pri.

DIVIDAT iam recta D A, angulum B D F, bifariam. Dico rectam D A, per centrum transire. Si enim in D A, non est centrum, sit extra ipsam centrum E, iungatur que recta E D, & in posteriore figura huius propos. Ergo, vt demonstratum est, recta E D, angulum B D F, bifariam diuidet; ac propterea anguli B D A, B D E, cum sint dimidiata partes anguli B D F, æquales inter se erunt, pars, & totum; quod est absurdum. Transit ergo recta D A, per centrum. Quod demonstrandum erat.

EVCLI-

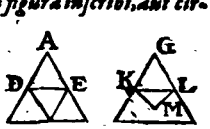
EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli ſingula latera eius, in qua inſcribitur, tangunt.

GENS Euclides quarto hoc libro de variis inſcriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum deſcriptionibus: Item de inſcriptionibus circuli in eiſdem figuris, & circuli deſcriptionibus circa eaſdem: exponit paucis definitionibus, quid ſit figuram in figura inſcribi, aut circa figuram deſcribi, incipiens à rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni D E F, tangant latera A B, A C, B C, trianguli externi A B C; dicetur triangulum D E F, in triangulo A B C, eſſe inſcriptum. At quoniam angulus M, trianguli K L M,



non tangit latus H I, trianguli G H I, non dicetur triangulum K L M, inſcribi in triangulo G H I; quamuis totum illud ſit intra hoc, denique anguli K, L, tangant duo latera G H, G I.

II.

SIMILITER & figura circum figuram deſcribi dicitur, cum ſingula eius, quæ circumſcribitur, latera ſingulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa deſcribitur.

E con-

E contrario dicetur triangulum A B C, describi circa triangulum D E F; quoniam singula latera illius singulos huius angulos tangunt; At triangulum G H I, non dicetur descriptum esse circa triangulum K L M, propterea quòd latus illius H I, angulum huius M, non tangit. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

CÆTERVM propriè figura rectilinea dicuntur in figuris rectilineis describi, & circa easdem describi, quando inscriptæ, & circumscriptæ habent latera numero æqualia, & angulos numero æquales: quamuis hoc non sit omnino necessarium, cum & quadratum intra triangulum describi possit, vt ad finem lib. 6. docebimus.

III.

FIGVRA rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

VT si tangant anguli A, B, C, trianguli A B C, peripheriam circuli A B C, dicetur triangulum in circulo esse inscriptum. Quod si vel vnus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum esse inscriptum in circulo.

IV.

FIGVRA verò rectilinea circa circulum describi dicitur, cum singula latera eius, quæ circumscribitur, circuli peripheriam tangunt.

AT verò, si latera trianguli A B C, singula tangant peripheriam circuli D E F; dicetur triangulum circa circulum esse descriptum.

V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

VI.

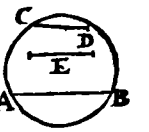
CIRCVLVS autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit eius figuræ, quam circumscribit, angulos.

VICISSIM dicetur circulus D E F, in figura definitionis 4. inscriptus esse in triangulo A B C: At verò circulus A B C, in figura definitionis

finitionis 3. descriptum esse circa triangulum A B C. Idem iudicium habeto de aliis figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.

VII.

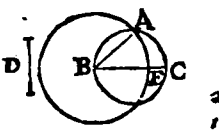
RECTA linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.



VT recta linea A B, quoniam eius extrema A, & B, in peripheria circuli A B C, existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicetur: Non autem recta E, vel C D; quia hæc alterum duntaxat extremorum, nempe C, habet in peripheria circuli; illa verò neutrum.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro nõ sit maior.



IN circulo A B C, coaptanda sit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen maior non sit diametro circuli dati. Cum enim diameter *a* sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta diametro maior foret, non posset in circulo aptari illi vna æqualis. Ducatur ergo diameter B C. Itaque si data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit B C, illi æqualis: Si verò D, minor fuerit diametro, *b* abscindatur B E, æqualis ipsi D, & centro B, interuallo autem B E, circulus describatur E A, secans circulum A B C, in A. Ducta igitur recta B A, erit ea aptata in circulo A B C, æqualis datæ rectæ D. *c* Est enim B A, æqualis ipsi B E; & D, æqualis eidem B E, per constructionem. Quare A B, & D, inter se æquales quoque erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

a 15. *ter tij.*

b 3. *primi.*

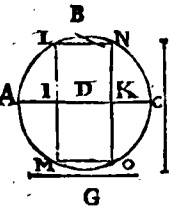
c 15. *def. primi.*

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.

IN dato circulo A B C, cuius centrum D, accommodanda sit recta æqualis rectæ E F, quæ diametro maior non sit, & alteri rectæ G, parallela. d *Ducatur per centrum D, diameter A C, rectæ G, parallela. Quod si recta E F, diametro fuerit æqualis, factum iam erit, quod proponi-*

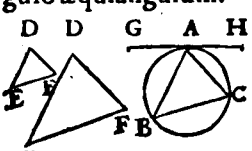
d 31. *primi.*



a 11. pri. *proponitur. Si verò E F, diametro minor fuerit, secta ea bifariam in H, abscindatur D I, ipsi H E, & D K, ipsi H F, aequalis, & tota I K, toti E F, sit aequalis.* a *Et per I, K, ad angulos rectos ipsi A C, ducantur L M, N O; jungaturque L N. Dico L N, accommodatam esse aequalem ipsi E F, & ipsi G, parallelam. Cum enim L M, N O,* b 14 ter tij. *aequaliter à centro distent,* b *ipsa aequales inter se secerunt:* c *quæ cum dividantur bifariam in I, & K, quod ad angulos rectos secentur à recta A C, per centrum D, transeunte; erunt & earum semisses L I, N K,* c 3. tert. d 28. pri mi. *aequales.* d *Quia verò L I, N K, parallela etiam sunt;* e *erunt quoque L N, I K, aequales, & parallelæ. Quare cum I K, æqualis sit ipsi E F,* e 33. pri mi. *& parallela ipsi G. Erit etiam L N, æqualis ipsi E F,* f *& ipsi G, parallela. Eadem ratione si recta ducatur M O, erit ea æqualis ipsi E F,* f 30. pri mi. *& parallela ipsi G. Quod est propositum.*

ij. THEOR. 2. PROPOS. 2.

IN dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.



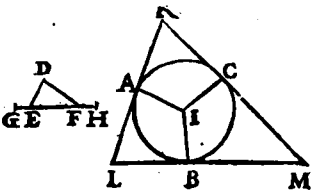
SIT in circulo A B C, dato describendum triangulum æquiangulum triangulo dato cuicunque D E F. Ducatur recta G H, tangens circulum in A, fiatque angulus G A B, angulo F, æqualis, & angulus H A C angulo E, atque extendantur rectæ A B, A C, ad circumferentiam usque in puncta B, & C, coniungaturque recta B C. Non cadet autem recta A C, in rectam A B, vel inter rectas A B, A G: propterea quod anguli G A B, H A C, hoc est, anguli F, E, g 17. pri mi. *minores sunt duobus rectis.* h *Essent autem duobus rectis æquales, si A C, in A B, caderet;* h 13. pri mi. *vel maiores duobus rectis, si inter A B, A G, cadere. Dico triangulum A B C, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato* i 32. ter. *triangulo D E F. Est enim angulus C, i æqualis angulo G A B; & eidem angulo G A B, æqualis est angulus F, ex constructione. Quare anguli C, & F, inter se quoque erunt æquales. Similiter quia* k 32. ter tij. *angulus B, k æqualis est angulo H A C; & eidem angulo H A C, æqualis est, per constructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter se æquales. Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli* l 32. pri mi. *A B C, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli D E F, l erunt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum est ergo triangulum A B C, triangulo D E F. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.*

PROBL.

PROBL. 5. PROPOS. 5. iij.

CIRCA datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

CIRCA circulum datum A B C, describendum sit triangulum æquiangulum dato triangulo D E F. Producto latere E F, vtrinque ad G, & H, sumptoq; centro circuli I, ducatur recta vtcunque A I, & fiat angulus A I B, æqualis angulo D E G, & angulus B I C, angulo D F H. Deinde ex A, B, C, educantur ad A I, B I, C I, perpendiculares K L, L M, M K, quæ circulum



tangent in punctis A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K, L, M. Si enim ducerentur rectæ A C, fierent duo anguli K A C, K C A, duobus rectis minores, ac proinde A K, C K, coibunt, &c. Nam recta hæc ducta A C, caderet supra rectas A I, C I, quod hæ angulum constituant in L. Cum enim spatium circa I, æquale sit quatuor rectis, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. hoc est, quatuor angulis ad E, & F, sintque duo anguli A I B, C I B, duobus angulis D E G, D F H, æquales; erit reliquum spatium A I C, reliquis duobus angulis D E F, D F E, æquale: Sed *a* hi minores sunt duobus rectis. Igitur & spatium A I C, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit A I C. Alias spatium illud esset vel æquale duobus rectis, si nimirum A I, C I, vnam rectam lineam constituerent; vel maius duobus rectis, si recta A I, producta caderet supra I C. Cadit igitur necessario A I, producta infra C I, atque idcirco angulus fiet A I C, ad partes K, & ducta recta A C, faciet cum A K, C K, duos angulos minores duobus rectis ideoque productæ A K, C K, coibunt in K. Non secus ostendemus, A L, B L, coire in L, & C M, B M, in M: quia ductæ rectæ A B, B C, facient cum A L, B L, C M, B M, angulos minores duobus rectis. Descriptum est igitur circa circulum triangulum K L M, quod dico esse æquiangulum triangulo D E F. Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero A I B L, æquales sunt quatuor rectis, vt ad 32. propos. lib. 1. ostensum fuit, & anguli I A L, I B L, sunt duo recti, erunt reliqui A I B, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur *b* & anguli D E G, D E F, sint duobus rectis æquales; si auferantur æquales A I B, D E G, remanebit angulus L, angulo D E F, æqualis. Pari ratione ostendemus angulum M, æqualem esse angulo D F E. *c* Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum K L M, æquiangulum triangulo D E F. Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.

a 17. pri mi.

b 13. pri mi.

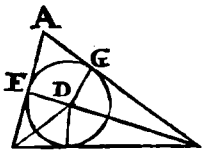
c 32 pri mi.

PROBL.

IV. PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato triangulo circulum inſcribere.

SIT deſcribendus circulus in dato triangulo A B C. Diuiſis duobus angulis A B C, A C B, bifariam rectis B D, C D, quæ intra triangulum coeant in D, ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares D E, D F, D G. Quoniam igitur duo anguli D B E, D E B, trianguli D B E, æquales ſunt duobus angulis D B F, D F B, trianguli D B F, vterque vtrique; & latus B D, commune; a erunt quoque latera D E, DF, æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera D F, D G, in triangulis D C F, D C G. Cum igitur tres rectæ D E, DF, D G, ſint æquales; circulus ex D, ad interuallum D E, deſcriptus tranſibit per reliqua puncta F, & G; tangetque latera trianguli in E, F, G, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. quod latera perpendicularia ſint ad ſemidiametros D E, D F, D G. In dato ergo triangulo circulum deſcripſimus. Quod erat efficiendum.



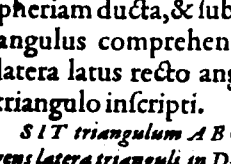
a 26. primi.

SCHOLIVM.

b 20. primi. *VERVM quoniam Euclides lib. 1. demonſtrauit*; b *in omni triangulo duo latera quomodolibet aſſumpta reliquo eſſe maiora*; *non abs re fuerit demonſtrare hoc loco, cum Io. Baptiſta Benedicto, quanto maiora ſint, hoc propoſito theoremate.*

IN omni triangulo, ſi circulus inſcribatur, duo quælibet latera ſuperant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum eſt rectanguli comprehenſi ſub recta ab angulo illis lateribus comprehenſo in cauam peripheriam ducta, & ſub eius ſegmento exteriore. Quòd ſi angulus comprehenſus ſit rectus ſuperabunt illa duo latera latus recto angulo oppoſitum diametro circuli triangulo inſcripti.

c 4. quar. *SIT triangulum A B C*, c *cui circulus inſcribatur D E F, tangens latera trianguli in D, E, F, punctis*: *& à quouis angulo B, ſiue rectus ſit, ſiue obtuſus, ſiue acutus, ducatur recta B H, ſecans circulum in I. Dico duo latera B A, B C, ſuperare latus A C, recta linea, cuius quadratum quadruplum eſt rectanguli ſub B H, B I, comprehenſi. Quoniam enim per coroll. 2. propoſ. 36. lib. 3. recta C F, recta C E, & recta A D, recta A E, æqualis eſt, erunt duo recta F C, D A, latera A C, æquales. Latera igitur*

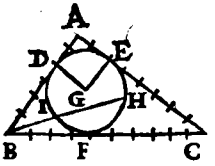


igitur B A, B C, latus A C, superant segmentis B D, B F: quia cum ex eadem coroll. sint aqualia; superabunt eadem latera B A, B C, latus A C, recta, qua dupla est segmenti B D. Sed quadratum recta, qua dupla est segmenti B D, quadruplum est quadrati recta B D, ex scholio propos. 4. lib. 2. Et a quadratum recta B D, aquale est rectangulo sub B H, B I. Igitur latera B A, B C, superant latus A C, recta, cuius tij. quadratum quadruplum est rectanguli sub B H, B I. Quod est propositum. a 36. ter

QVOD si angulus A, rectus sit, dico non solum duo latera A B, A C, superare latus B C, recta, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ex A, in cauam peripheriam ducta, & eius segmento exteriore, & ostensum est: Verum etiam excessum illum esse diametro circuli D E F, aqualem. Ductis enim ex centro G, ad puncta contactuum D, E, rectis G D, G E; b erunt anguli ad D, & E, rectis. Cum ergo & angulus A ponatur rectus, c erunt tam recta A E, D G, quam A D, E G, parallela inter se: atque idcirco A G, parallelogrammum erit. d Quare tam recta A D, semidiametro E G, quàm recta A E, semidiametro D G, aqualis erit: hoc est, dua recta A D, A E, simul tota diametro circuli erunt aquales. Superant autem duo latera A B, A C, latus B C, duabus rectis A D, A E, & ostensum est. Nam E C, ipsi F C, & D B, ipsi F B, aqualis est, ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. Igitur eadem latera A B, A C, superant latus B C, diametro circuli inscripti. Quod est propositum. b 18. ter tij. c 28. pri mi. d 34. pri mi.

IT A QVE quauis duo latera superant reliquum duabus rectis circulum triangulo inscriptum tangentibus, qua inter angulum duobus illis lateribus comprehensum, & circulum interiacentur. Ostensum enim est, latera A B, A C, superare latus B C, rectis tangentibus A D, A E, &c.

IAM verò hus ita demonstratis, si tria latera trianguli cognita sint, inuentemus nullo negotio tria puncta, in quibus circulus triangulo inscribendus latera tangere debet. Quia enim latera, verbi gratia, A B, A C, superare debent latus B C, duabus tangentibus ex A, ductis, qua quidem aquales sunt: si dematur latus B C, notum ex notis lateribus A B, A C, relinquentur dua tangentes A D, A E, nota. Semissis ergo huius excessus dabit vtrumq; punctum D, E. Reliquum deinde segmentum E C, dabit segmentum C F, usque ad punctum tertium F? Vel reliquum segmentum D B, dabit segmentum B F; ad idem punctum F. Si igitur ex duobus punctis D, E, erigantur perpendiculares D G, E G; coibunt ha in G, centro circuli inscribendi. Exempli gratia. Sit latus A B, 6. latus A C, 8. & latus B C, 10. palmorum Dempto latere B C, 10. palmorum ex duobus lateribus A B, A C, hoc est, ex 14. palmis, relinquuntur 4. palmi. Tam ergo A D, quam A E, duos palmos continebit. Segmentum ergo D, B, continebit 4 palmos, totidemq; segmentum B F, habebit. Segmentum autem

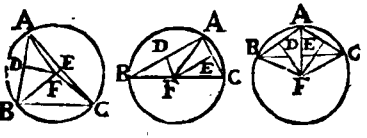


E C, ac proinde & C F, erit 6. palmorum. Sic etiam dempto latere A B, 6. palmorum, ex lateribus A C, B C, id eſt, ex 18. palmis, reliqui fiunt 12. palmi. Vtrumque ergo ſegmentum C E, C F, erit 6. palmorum: ac proinde vtrumque A E, A D 2. palmorum, & vtrumque B D, B F, 4. palmorum. Poſtremo dempto latere A C, 8. palmorum ex lateribus A B, C B, hoc eſt, ex palmis 16. remanent 8. palmi. Vtrumque ergo ſegmentum B D, B F, habebit 4. palmos: At vtrumque C F, C E, 6. palmos: & vtrumque A D, A E, 2. palmos.

v. ## PROBL. 5. PROPOS. 5.

CIRCA datum triangulum circulum deſcribere.

SIT circulus deſcribendus circa datum triangulum A B C. Diuidantur duo latera A B, A C, (quæ in triangulo rectangulo, vel obtuſangulo ſumenda ſunt facilitatis gratia, circa rectũ, vel obtuſum angulũ, quamuis hoc non ſit omnino neceſſarium, ſed duo quæuis latera bifariam poſſint ſecari) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur D F, E F, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F, (Quod enim coeant, patet. Nam ſi ducta eſſent recta D E, fierent anguli F D E, F E D, duobus rectis minores,) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere B C, vel extra triangulum. Ducantur rectæ F A, F B, F C. Quoniam igitur latera A D, D F, trianguli A D F, æqualia ſunt lateribus B D, D F, trianguli B D F, & anguli ad D, recti; *a* erunt baſes F A, F B, æquales. Eodem modo erunt F A, F C, æquales. Cum ergo tres rectæ F A, F B, F C, ſint æquales, circulus deſcriptus ex F, ad interuallum F A, tranſibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triangulum circulum deſcripſimus. Quod erat faciendum.



a 4. pri.

COROLLARIVM.

b 31 ter tij. HINC manifeſtum eſt, ſi centrum intra triangulum cadat, *b* omnes angulos eſſe acutos, quoniam omnes ſunt in maiori ſegmento circuli: ſi verò ſit in latere B C, *c* angulum B A C, ei lateri oppoſitum, eſſe rectum, quod ſit in ſemicirculo: Si denique cadat extra triangulum, *d* angulum oppoſitum B A C, obtuſum eſſe, cum ſit in minori ſegmento circuli.

c 31. ter tij.

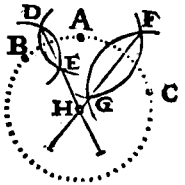
d 21. ter tij.

CONTRA verò perſpicuum eſt, ſi triangulum fuerit acutangulum, cadere intra triangulum: ſi rectangulum, in latus recto angulo oppoſitum: ſi denique obtuſangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facilè oſtendetur, ducendo ad incommodum aliquod, ſiue abſurdum. Quia ſi in acutangulo caderet centrum in vnum latus, eſſet angulus ei oppoſitus

positus rectus: si vero extra, esset idem angulus obtusus. Item si in rectangulo centrum caderet intra, essent omnes anguli acuti, si vero extra, esset angulus oppositus obtusus. Denique si in triangulo obtusangulo caderet in vnum latus, esset angulus ei oppositus, rectus, si vero intra, omnes anguli essent acuti. Quæ omnia ex priori parte huius coroll. colliguntur, & pugnant cum hypothesi.

SCHOLIVM.

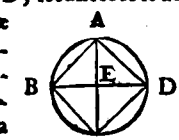
COLLIGITVR etiam ex hoc problemate, quanam arte describendus sit circulus, qui per data tria puncta non in vna recta linea existentia transeat. Nam si data puncta tribus rectis iungantur, vt constituatur triangulum, facilè circa ipsum circulus describetur, vt hac propos. traditum est. Quod tamen facilius efficietur praxi illa, quam tradidimus propos. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C. Ex A, & B, quouis interuallo eodem duo arcus describantur se interfecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur D H. Item ex A, & C, quouis alio interuallo eodem, vel etiam, si placet, priori illo, alij duo arcus delineentur secantes sese in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur F H, secans rectam D H, in H. Dico H, esse centrum circuli transeuntis per data puncta A, B, & C. Nam si ducerentur rectæ A B, A C, B C, dimidierentur latera A B, A C, trianguli A B C, bifariam à rectis D H, F H, eis demonstratum est in praxi illa propositionis 25. lib. 3. Quare vt in hoc 5. problemate Euclides ostendit, H, erit centrum circuli circa triangulum A B C, descripti. Quod est propositum.



PROBL. 6. PROPOS. 6. vj.

IN dato circulo quadratum describere.

SIT in dato circulo A B C D, cuius centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, secantes se se ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ A B, B C, C D, D A. Dico A B C D, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera E A, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus E C, E B, trianguli C E B, cum omnia sint ex centro; & anguli contenti sunt recti; a erunt bases A B, B C, æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ B C, C D: Item rectæ C D, D A, & rectæ D A, A B. Omnia igitur latera quadrilateri A B C D, æqualia inter se sunt. Quod breuius ita concludemus. Quoniam quatuor anguli ad E, æquales sunt, nimirum recti; b erunt quatuor arcus, quibus insistunt, æquales: c ac proinde & rectæ quatuor subtensæ æquales erunt. Omnia ergo latera quadrilateri A B C D, inter se æqualia sunt.



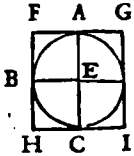
a 4. primi.
b 26. tertij.
c 29. tertij.

a 31. ter sunt. Sunt autem a & anguli recti, cum omnes in semicirculis exi-
tij. stant. Quare quadratum erit A B C D, propterea que in dato cir-
culo quadratum descripsimus. Quod erat faciendum.

vij. PROBL. 7. PROPOS. 7.

CIRCA datum circulum quadratum describere.

SIT circa datum circulum A B C D, cuius centrum E, describendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, secantes se in E, centro ad angulos rectos; & per A, B, C, & D, educatur ad diametros lineæ perpendiculares F G, F H, H I, I G, coeuntes in punctis F, H, I, G. Quod enim coeant A F, B F, patet ex eo, quod ducta recta A B, faciat cum A F, BF, duos angulos duobus rectis minores; atque ita de reliquis. Dico F H I G, esse quadratum circa circulum datum descriptum. Cum enim anguli A E B, F B E, sint recti, b erunt F H, A C, parallelæ; similiterque erunt G I, A C, parallelæ. c Quare & F H, G I, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt F G, H I. Quoniam igitur parallelogrammum est A C H F, d erunt latera oppositá A C, F H, æqualia, & anguli oppositi A C H, A F H, æquales: Sed A C H, est rectus. Igitur A F H, rectus erit. Eadem ratione ostendemus angulos H, I, G, rectos esse: & latera H I, I G, G F, æqualia esse diametris B D, A C. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera F G, F H, H I, I G, æqualia, ideoque F G I H, quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propos. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.

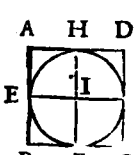


b 28. primi.
c 28 primi.
d 38. primi.

viij. PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato quadrato circulum describere.

SIT in dato quadrato A B C D, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bifariam in E, F, C, H, ducantur rectæ E G, F H, secantes se in I. Quoniam igitur A D, B C, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum A H, B F, æquales & parallelæ. e Quare & A B, parallela est, & æqualis ipsi F H. Eadem ratione erit D C, parallela, & æqualis eidem F H: Itemque rectæ A D, B C, parallelæ erunt, & æquales ipsi E G. Sunt igitur parallelogramma A I, I B, C I, I D, ideoque rectæ I E, I F, I G, I H, æquales erunt rectis A H, E B, D H, A E: Sunt autem hæ inter se æquales, cum sint semisses æqualium A D, A B, &c. Quare & rectæ I E, I F, I G, I H, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad



e 31. primi.

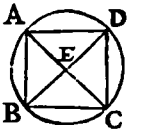
interual-

interuallum IE, transibit quoque per puncta F, G, H, qui cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propos. 16. lib. 3. a quod anguli ad E, F, G, H, sint recti, descriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum descripsimus. Quod efficiendum erat. a 29. primi.

PROBL. 9. PROPOS. 9. IX.

CIRCA datum quadratum circulum describere.

SIT describendus circulus circa quadratum ABCD. Ducantur diametri AC, BD, secantes se in E. Quoniam igitur latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia sunt, b erunt anguli ABD, ADB, æquales: Est autem angulus BAD, rectus. c Quare ABD, ADB, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cum ergo anguli EAD, EDA, sint æquales; d erunt rectæ EA, ED, æquales. Eadem ratione EA, EB, æquales erunt; nec non EB, EC. Item EC, ED. Quare circulus ex E, descriptus, interuallo EA, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.



b 5. primi. c 32. primi. d 6. primi.

SCHOLIVM.

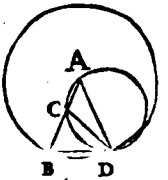
QVOD si circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inscribatur, erit quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum. Quoniam enim latus quadrati circumscripti æquale est diametro circuli, & ex 7. propos. huius lib. constat, hoc est, diametro quadrati inscripti: quadratum verò diametri duplum est quadrati, cuius est diameter, & ad 47. propos. lib. 1. ostendimus; Constat propositum.



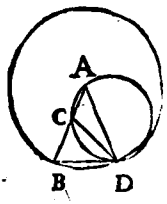
PROBL. 10. PROPOS. 10. X.

ISOSCELES triangulum constituere; quod habeat vtrumque eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.

SVMATVR quæuis recta linea AB, quæ e diuidatur in C, ita vt rectangulum sub AB, BC, æquale sit quadrato rectæ AC. Deinde centro A, interuallo vero AB, circulus describatur, in quo f accommodetur recta BD, æqualis ipsi AC, iungaturq; recta AD. Quoniam autem rectæ AB, AD, æquales sunt, erit



e 11. secundi. f 1. quarti.



triangulum A B D, Isosceles. Dico vtrumque angulorum A B D, A D B, duplum esse reliqui anguli A. Ducta enim recta C D, *a* describatur circa triangulum A C D, circulus D C A. Quoniam igitur rectangulum sub A B, B C, æquale est quadrato rectæ B D, & recta A B, secat circulum D C A, *b* tanget recta B D, eundem circulum D C A, in D. Quare angulus B D C, *c* æqualis est angulo A, in alterno segmento C A D. Addito igitur communi C D A, erit totus angulus A D B, æqualis duobus angulis C A D, C D A: Sed his eisdem *d* æqualis est etiam angulus externus B C D. Angulus ergo B C D, æqualis erit angulo A D B, hoc est, angulo A B D, *e* cum A B D, A D B, æquales sint; ac propterea *f* rectæ C D, B D, æquales erunt: Est autem B D, æqualis *g* posita rectæ A C. Igitur & C D, ipsi C A, æqualis erit; *g* ac propterea anguli C A D, C D A, æquales. Angulus igitur A D B, qui æqualis ostensus est duobus angulis C A D, C D A, duplus erit alterius eorum, anguli nimirum A. Quare & angulus A B D, duplus erit eiusdem anguli A. Isosceles ergo triangulum constituimus, habens, &c. quod erat efficiendum.

a 5. *quarti.*
b 37. *tertij.*
c 32. *tertij.*
d 32. *primi.*
e 5. *primi.*
f 6. *primi.*
g 5. *primi.*

COROLLARIVM.

QVONIAM vero tres anguli trianguli A B D, *h* æquales sunt duobus rectis, hoc est, quinque quintis duorum rectorum; perspicuum est, angulum A, esse quintam partem duorum rectorum; vtrumlibet autem B, D, duas quintas partes. Item A, esse duas quintas partes vnius recti, & vtrumuis B, D, quatuor quintas partes; quandoquidem omnes tres *i* æquales sunt duobus rectis, hoc est, decem quintis vnius recti.

h 32. *primi.*
i 32. *primi.*

SCHOLIVM.

POTVISSET problema hoc proponi ad instar theorematis, hoc modo.

SI recta linea secetur, vt propos. 11. lib. 2. traditum est; Isosceles triangulum, cuius basis maiori segmento æqualis est, vtrumuis verò laterum æqualium ipsi datæ lineæ æquale, habet vtrumlibet angulorum æqualium ad basim, duplum reliqui.

NON est autem, quod se excrucient Campanus, & Peletarius, vt probent, rectam B D, ita applicari circulo D C A, vt eum nullo modo secet. Nam propterea quod quadratum rectæ B D, æquale est rectangulo sub A B, B C, ostensum est vltima propos. 3. lib. rectam B D, perpendicularem esse ad semidiametrum circuli ex D, ductam. Quare circulum tanget, & nulla ratione secabit.

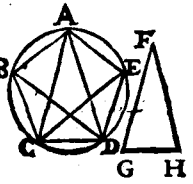
QVÆ arte autem construi debeat triangulum Isosceles, cuius vterque angulorum ad basim, ad reliquum habeat quamcunque proportio.

portionem datam, non solum duplam, vt hic ab Euclide factum est, trademus cum Pappo ad finem lib. 6. Qua res hactenus desiderata est.

PROBL. II. PROPOS. II. xj.

IN dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT in dato circulo A B C D E, inscribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. *a* Constituatur triangulum Isosceles F G H, ita vt vterque angulorum G, H, duplus sit reliqui F, & in circulo *b* inscribatur triangulum A C D, æquiangulũ triangulo F G H, & vterque angulorum A C D, A D C, *c* bifariam diuidatur rectis C E, D B, atque rectæ iungantur A B, B C, C D, D E, E A. Dico pentagonum A B C D E, in circulo dato inscriptum, esse æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim vterque angulorum A C D, A D C, duplus sit anguli C A D, & diuisis bifariam; erunt quinque anguli A D B, B D C, C A D, D C E, E C A, æquales. *d* Quare arcus A B, B C, C D, D E, E A, super quos ascendunt, atque idcirco *e* & rectæ A B, B C, C D, D E, E A, æquales erunt. Æquilaterum est igitur pentagonum A B C D E. Rursus quia arcus A B, E D, æquales sunt; addito communi B C D, fient æquales A B C D, E D C B. *f* Anguli ergo A E D, B A E, dictis arcubus insistentes æquales erunt. Eodem modo æquales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Insistunt enim æqualibus arcubus, quorum singuli externis arcubus æqualibus componuntur. Æquiangulum est ergo pentagonum A B C D E. Quare cum & æquilaterum esse sit ostensum, inscriptum erit dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum: Quod faciendum erat.



a 10. *quarti.*
b 2. *quarti.*
c 9. *pri.*
d 26. *tertij.*
e 29. *tertij.*
f 27. *tertij.*

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum rectorum; vel sex quintas rectis. *g* Cum enim tres anguli B A C, C A D, D A E, æquales sint, vtpote qui æqualibus arcubus B C, C D, D E, insistant, sit autem C A D, per coroll. præcedentis propos. quinta pars, duorum rectorum, vel duæ quintæ vnius recti: erit totus B A E, tres quintæ duorum rectorum: vel sex quintæ vnius recti.

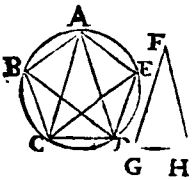
g 27. *tertij.*

SCHOLIVM.

QVOD si detur recta linea terminata C D, super ea constituamus pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc modo. h *Fiat triangulum Isosceles F G H, habens vtrumlibet angulorum G, H, duplum reliqui anguli F. Deinde constituantur anguli A C D, A D C,*

h 10. *quarti.*

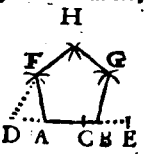
a 32. primi.



b 5. quarti.

aquales angulis G, H, coëantque recta C A, D A, in A, aqua efficient angulum C A D, aqualem angulo F; ac propterea trianguli A C D, vterque angulorum A C D, A D C, duplus erit reliqui anguli C A D. Iam verò circa triangulum A C D, circulus b *describatur A B C D E; In quo cum sit inscriptum triangulum A C D, si anguli A C D, A D C, bifariam secentur, inscribetur, vt prius, pentagonum aquilaterum, & aquiangulum, cuius latus est recta C D. Quod est propositum.*

FACILIVS idem efficiemus hac ratione. Secta recta proposita A B, supra quam pentagonum aquilaterum, & aquiangulum constituendum est, in C, vt propos. 11 lib. 2. traditum est, producatur ad vtramque partem, sintq; A D, B E, maiori segmento A C, aquales. Interuallo deinde data recta A B, ex A, D, duo arcus describantur secantes sese in F. Item ex B, E, eodem interuallo alij duo se intersecantes in G. Denique ex F, G, eodem interuallo alij duo se diuidentes in H, coniungantur q; recta A F, F H, H G, G B. Dico pentagonum A B G H F, super datam rectam A B, descriptum, esse aquilaterum, atque aquiangulum. Quòd enim sit aquilaterum, constat ex constructione, cum omnes linea ipsi A B sumpta sint aquales, hoc est, omnes arcus descripti sint ad interuallum A B. Quod autem sit & aquiangulum, sic ostendetur. Ducta recta D F, erit A D F, Isosceles, quale ab Euclide propos. 10. constructum est, vt ex scholio eiusdem propos. manifestum est, propterea quod basis A D, aqualis est maiori segmento A C, linea A B. Verumuis verò laterum aqualium ipsi A B, aquale. Quare ex coroll. eiusdem propos. 10. anguli D A F, continebit duas quintas duorum rectorum; ac proinde reliquus angulus duorum rectorum, nimirum B A F, reliquas tres quintas duorum rectorum continebit. Cum ergo ex coroll. huius propos. angulus pentagoni aquilateri, & aquianguli comprehendatur tres quintas duorum rectorum; erit B A F, angulus pentagoni aquilateri, & aquianguli. Eademque ratione erit A B G, angulus pentagoni aquilateri, & aquianguli. Ex quo sequitur, totum pentagonum esse aquiangulum. Si enim compleatur, aut concipiatur esse completum, hoc est, super F, G, cogitentur descriptæ duo alia latera, cadent ea necessario in punctum H. Alioquin, si supra H, aut infra



c 21. primi.

conuenirent, cessent ea vel maiora, vel minora rectis F H, G H, vt constat, si angulo H, subtenderetur basis F G: atque idcirco alia lateribus F A, A B, B G, aqualia non forent, quod est absurdum. Pentagonum ergo A B G H F, & aquilaterum, & aquiangulum est. Quod erat ostendendum.

PROBL.

PROBL. 12. PROPOS. 12. xij.

CIRCA datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT circa datum circulum ABCDE, describendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. *a* Inscribatur in eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & ex centro F, ducantur rectæ FA, FB, FC, FD, FE, ad quas ducantur perpendiculares GH, HI, IK, KL, LG, coeuntes in G, H, I, K, L. Cùm enim anguli GAE, GEA, duobus



a 11. quarti.

sint rectis minores, partes nimirum angulorum rectorum FAG, FEG; *b* coibunt rectæ AG, EG, ad partes G, & sic de aliis. Et quia ipsæ tangunt circulum, per coroll. propos. 16 lib. 3. erit descriptum pentagonũ GHIKL, circa circulum; quod dico esse æquilaterum atque æquiangulum. Ductis enim rectis FG, FH, FI, FK, FL, erunt quadrato rectæ FH, *c* æqualia tam quadrata rectarum FA, AH, quàm rectarum FB, BH. Quare quadrata rectarum FA, AH, æqualia erunt quadratis rectarũ FB, BH. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium FA, FB, remanebunt quadrata rectarum AH, BH, æqualia; ideoque & rectæ AH, BH, æquales erunt. Quod etiam constat ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. cùm AH, BH, ex eodem puncto H, ducantur circulum tangentes in A, & B. Quoniam ergo latera AF, FH, trianguli AFH, æqualia sunt lat. ribus BF, FH, trianguli BFH. Est autem & basis AH, basi BH, æqualis, vt ostensum est; *d* erunt anguli AFH, BFH, æquales. Igitur *e* & anguli AHF, BHF. Duplus igitur est angulus AFB, anguli BFH; & angulus AHB, anguli BHF. Eodem modo ostendemus, angulum BFC, duplum esse anguli BFI, & angulum BIC, anguli BIF. Cùm igitur *f* anguli AFB, BFC, sint æquales, quòd insistant circumferentiis AB, BC, *g* quæ æquales sunt, cùm à rectis æqualibus subtendantur AB, BC; erunt & dimidij eorum BFH, BFI, æquales. Quocirca cùm duo anguli BFH, HBF, trianguli BFH, æquales sint duobus angulis BFI, IBF, trianguli IFB, & latus illis adiacens commune BF, *h* erunt & latera BH, BI, æqualia, & anguli BHF, BIF, æquales. Dupla est ergo recta HI, rectæ HB. Eademque ratione ostendemus GH, rectam duplam esse rectæ HA. Sunt autem ostensæ æquales HB, HA. Igitur & earum duplæ HI, HG, æquales erunt. Similiter demonstrabimus, rectas IK, KL, LG, æquales esse cuilibet rectarum HI, HG. Æquilaterum ergo est pentagonum GHIKL. Rursus quoniam ostensum est, angulos BHF, BIF, æquales esse, ac semisses angulorum BHA, BIC; erunt & eorum dupli BHA, BIC, æquales. Eademque ratione an-

b 13. primum.

c 47. primi.

d 8. primi.

e 4. primi.

f 27. tertij.

g 28. tertij.

h 26. primi.

guli I K L, K L G, L G H, æquales erunt cuilibet angulorum B H A, B I C. Æquiangulum igitur est pentagonum G H I K L. Quapropter cùm & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterũ, & æquiangulum. Quod efficiendum erat.

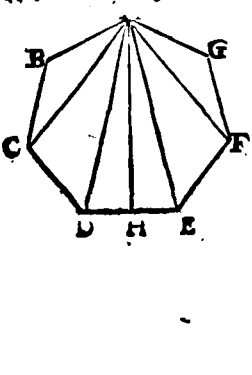
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex huius problematis demonstratione; si in circulo quæcunque figura æquilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: has perpendiculares constituere aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualium circulo circumscriptam. Eadem enim semper ratione demonstrabitur, illas perpendiculares concurrere, angulosque conficere æquales, si nimirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, vt in pentagono factum est: quæ quidem ipsos angulos bifariam secabunt, quemadmodum in pentagono hic probatum est, &c.

HVC referendum est theorema sequens ad figuras æquilateras, & aquiangulas spectans, quod perutile erit ad inuenienda centra circulorum circa ipsas figuras, siue intra ipsas describendorum, vt ex sequentibus patebit.

IN figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est, recta linea ex quouis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, diuidit quoq; angulum bifariam; Et contrà, recta linea diuidens angulum bifariam secat quoq; latus oppositum bifariã: Si verò numerus angulorum est par, recta linea ex quouis angulo ad oppositum angulum ducta secat vtrumq; angulum bifariam; Et contrà, recta linea secans quemuis angulum bifariam cadit in oppositum angulum, eumq; bifariam quoq; diuidit.

SIT primùm figura æquilatera, æquiangulaq;, imparium laterum A B C D E F G, & ex angulo A, demissa recta A H, secet latus oppositum D E, bifariam. Dico angulum quoq; B A G, sectum esse bifariam. Ductis enim ex A, rectis ad omnes angulos non proximos; quoniam duo latera B A, B C, duobus lateribus G A, G F, æqualia sunt, angulosq; continent æquales, ex hypothesi; a erunt & bases A C, A F, æquales, & tam anguli B A C, G A F, quàm B C A, G F A: ac proinde cùm toti anguli B C D, G F E, ponantur æquales; erunt quoq; reliqui A C D,



a 4. primi.

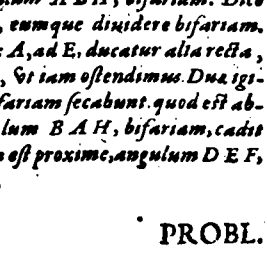
ACD, AFE, æquales. Quia igitur rursus duo latera CA, CD, duobus lateribus FA, FE, æqualia sunt, continentq; angulos æquales, & ostensum est; a erunt & bases AD, AE, æquales, & tam anguli CAD, FAE, quàm CDA, FEA. Atque ita procedendum erit, donec ad latus oppositum peruentum sit. Vbi quia rursus toti anguli CDE, FED, æquales sunt; erunt quoque reliqui ADH, AEH, æquales. Quare cùm duo latera DA, DH, duobus lateribus EA, EH, æqualia sint, angulosque æquales contineant, b erunt etiam anguli DAH, EAH, æquales. Quocirca cùm quotuis anguli BAC, CAD, DAH, totidem angulis GAF, FAE, EAH, sint æquales, singuli singulis; erit quoque totus angulus BAH, toti angulo GAH, æqualis; ac proinde angulus BAG, sectus erit bifariam. Quod est propositum.

a 4. primi.

b 4. primi.

SED iam recta AH, secet angulum BAG, bifariam. Dico eam secare quoque latus oppositum DE, bifariam. Si enim dicatur latus DE, non secari bifariam, sitq; A, ducatur alia recta secans DE, bifariam, secabit eadem & angulum BAG, bifariam, & iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAG, secabunt bifariam. quod est absurdum, cùm una minor esset quàm altera. Recta ergo AH, secans angulum BAG, bifariam, secat quoque latus DE, bifariam. Quod est propositum.

SIT deinde figura æquilatera, & æquiangula parium laterum ABCDEFGH, & ex angulo A, ad angulum oppositum E, ducatur recta AE. Dico rectam AE, secare tam angulum BAH, quàm DEF, bifariam. Ductis enim ex A, ad omnes angulos non proximos rectis; demonstrabimus, & in antecedente figura, quotuis angulos BAC, CAD, DAE, totidem angulis HAG, GAF, FAE, esse æquales, singulos singulis; ideo totum angulum BAE, toti angulo HAE, æqualem esse, nec non & angulum DEA, FEA, esse æqualem. Vterq; igitur angulus BAH, DEF, secabitur bifariam. Quod est propositum.



SED iam recta AE, secet angulum ABH, bifariam. Dico eam cadere in angulum oppositum E, eumque diuidere bifariam. Si enim non dicatur cadere in E, si ex A, ad E, ducatur alia recta, secabit ea angulum BAH, bifariam, & iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAH, bifariam secabunt. quod est absurdum. Recta ergo AE, secans angulum BAH, bifariam, cadit in E, secatq; propterea, & demonstratum est proxime, angulum DEF, bifariam quoque. Quod est propositum.

PROBL.

xiij. PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inſcribere.



SIT inſcribendus circulus in dato pentagono ABCDE. *a* Diuidantur duo eius anguli BAE, ABC, proximi bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F. Cùm enim ex ſcholio præcedentis propoſ. rectæ AF, BF, ſecent oppoſita latera CD, DE, bifariam, neceſſe eſt, duas rectas AF, BF, ſe mutuò intra pentagonum ſecare, priuſquam rectis CD, DE, occurrant. Connectantur deinde rectæ FC, FD, FE. Quoniam igitur latera AB, BF, trianguli ABF, æqualia ſunt lateribus CB, BF, trianguli CBF. Sunt autem ex conſtructione, & anguli ipſis contenti æquales ABF, CBF; *b* erunt baſes AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cùm igitur anguli BAE, BCD, ponantur æquales, & BAF, dimidium ſit anguli BAE, per conſtructionem; erit & BCF, dimidium anguli BCD. Diuiſus eſt ergo angulus BCD, bifariam. Simili modo oſtendemus, reliquos duos angulos CDE, DEA, diuiſos eſſe bifariam. Ducantur iam ex F, ad ſingula Pentagoni latera perpendiculares FG, FH, FI, FK, FL. Quoniam igitur duo anguli FGA, FAG, trianguli FAG, æquales ſunt duobus angulis FLA, FAL, trianguli FAL; eſtque latus AF, ſubtenſum vni æqualium angulorum commune, *c* erunt & rectæ FG, FL, æquales. Similiterq; oſtendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK, æquales cuilibet iſtarum. Circulus igitur deſcriptus ex centro F, & interuallo FG, tranſibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam verò lateta pentagoni circulum hunc tangũt, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. eo quòd angulos rectos faciant cum ſemidiametris FG, FH, &c. erit circulus in dato pentagono inſcriptus. Quod faciendum erat.

a 9. primus.

b 4. primus.

c 26 primus.

SCHOLIVM.

EADEM prorſus arte in quacunque figura aquilatera, & aquiangula circulum deſcribemus. Semper enim oſtendemus, diuiſis duobus angulis proximis bifariam, ſi ex puncto concurſus linearum angulos dimidientium perpendiculares ducantur ad latera, eas inter ſe eſſe æquales: ac proinde punctum illud concurſus centrum eſſe circuli inſcribendi. Concurrent autem neceſſariò intra figuram duæ illæ rectæ, quæ angulos duos proximos ſecant bifariam: propterea quòd in figura imparium laterum diuidunt latera oppoſita bifariam; in figura verò parium laterum, angulos oppoſitos bifariam, vt in ſcholio antecedentis propoſ. oſtenſum eſt.

THEOR.

PROBL. 14. PROPOS. 14. XIII.

CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.



SIT circa pentagonum A B C D E, æquilaterum, & æquiangulum, circulus describendus. Diuisis duobus angulis B A E, A B C, bifariam rectis A F, B F, quæ coeant in F, intra pentagonum, vt in antecedente propos. demonstratum est; & coniunctis rectis F C, F D, F E, ostendemus, vt in præcedenti problemate, reliquos etiam angulos B C D, C D E, D E A, sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter se æquales, quòd toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo A F B, duo anguli æquales sunt F A B, F B A; *a* erunt rectæ F A, F B, æquales. Eademque ratione erunt reliquæ F C, F D, F E, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, interuallo autem F A, transibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.

a 6 *primi.*

SCHOLIVM.

EODEM prorsus artificio circa quamlibet figuram æquilateram, & æquiangulam circulum describemus: Semper enim ostendemus, diuisis duobus angulis proximis bifariam, rectas ex puncto concursus linearum angulum diuidentium ad angulos figuræ ductas, inter se esse æquales: ac propterea punctum illud concursus centrum esse circuli circumscribendi.

PROBL. 15. PROPOS. 15. XV.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum & æquiangulum inscribere.



SIT in dato circulo A B C D E F, cuius centrum G, inscribendum hexagonum æquilaterum, & æquiangulum. Ducta diametro A D, describatur circulus ex centro D, interuallo verò D G, qui secet circulum datum in punctis C, & E, è quibus per centrum G, rectæ extendantur C F, E B. Si igitur connectantur rectæ A B, B C, C D, D E, E F, F A, inscriptum erit in dato circulo hexagonum A B C D E F; quod dico esse & æquilaterum & æquiangulum. Cùm enim recta G C, æqualis sit rectæ G D, & recta D C, æqualis eidem rectæ D G, ex definitione circuli; erunt & rectæ G C, D C, æquales inter se: Ideoque triangulum C D G, erit æquilaterum. Quare *b* tres anguli C G D, G D C, D C G, æquales inter se erunt: qui cùm *c* æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe C G D, tertia pars duorum rectorum.

b 5. *primi.*
c 32. *primi.*

Eodem

Eodem modo erit angulus D G E, tertia pars duorum rectorum.

a 13. pri mi. Sunt autem tres anguli C G D, D G E, E G F, *a* æquales duobus rectis. Reliquus igitur angulus E G F, tertia quoq; pars erit duorum rectorum. Sunt ergo tres anguli C G D, D G E, E G F, inter

b 15. pri mi. se æquales; quibus cùm etiam *b* æquales sint ad verticem anguli F G A, A G B, B G C; erunt sex anguli ad centrum G, æquales.

c 26. ter tij. *c* Quare circumferentiæ, quibus insistunt, *d* ac propterea rectæ A B, B C, C D, D E, E F, F A, æquales erunt. Quapropter æquilate-

d 29. ter tij. rum est hexagonum A B C D E F. Rursus quia circumferentia B C, æqualis est circumferentiæ A F; si addatur cõmunis C D E F, erunt circumferentiæ B C D E F, A F E D C; æquales. Anguli igi-

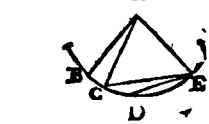
e 27. ter tij. tur ipsis insistentes B A F, A B C, *e* æquales erunt. Similiterque ostendemus, reliquos angulos B C D, C D E, D E F, E F A, æquales esse cuilibet istorum, quia nimirum quilibet insistit arcui compositio ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inscripta, demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes æqualibus arcubus insistere. Quare æquiangulum quoq; est hexagonum A B C D E F. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendũ erat.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, Hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli. Nam D C, latus hexagoni, æquale est semidiametro D G, ex definitione circuli.

SCHOLIVM.

GÆTERVM per ea, quæ dicta sunt de pentagono propos. 12. 13. & 14. describemus hexagonum æquilaterum, & æquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus, & denique circa idem hexagonum describemus circulum. Nam, vt hexagonum circulo circumscribatur, inscribendum prius erit hexagonum intra circulum, vt hac propos. 15. docuit Euclides. Si verò circulus vel in hexagono, vel circa hexagonum describendus sit, dividendi erunt duo anguli proximi bifariam. Reliqua deinde perficienda, vt propos. 12. 13. 14. traditur.



PORRO ex his quoque facilè demonstrabimus, dari posse triangulum Isosceles oxygonium, cuius tertium latus vtrouis æqualium maius sit; siue in quo vtrumuis laterum æqualium tertio minus sit. Id quod ad defin. 28. lib. 1. admonuimus. Sit enim A, centrum circuli B C D E, in quo

f 15. quarti. *sexta pars sit D E, & quarta B E. f Erit ergo subtensa D E, semidiametro æqualis. Et si ex quouis puncto C, inter B, & D, ad E, recta ducatur C E; erit hæc maior quàm D E, ex scholio propos. 19. lib. 3. hoc est, maior, quàm semidiameter. Quare iunctis duabus semidiametris A C, A E, erit triangulum A C E, Isosceles, cuius tertium latus*

tur C E, vtrouis æqualium A C, A E, maius est. Dico idem esse oxygonium. Quoniam enim a *anguli A C E, A E C, æquales sunt,* b *& simul duobus rectis minores, erit vterque acutus. Ducta autem recta A B, erit angulus B A E, quadranti B E, in centro insistens rectus, ex scholio propos. 27. lib. 3. ac proinde C A E, acutus erit. Oxygonium ergo est Isosceles triangulum A C E, habens tertium latus C E, vtrolibet æqualium maius. Quod est propositum.*

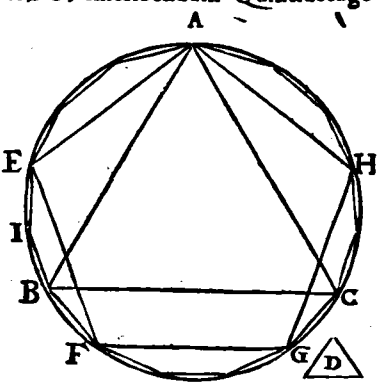
a 5. primi.

b 17. primi.

PROBL. 16. PROPOS. 16. xvj.

IN dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT in dato circulo A B C, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo æquilatero D, quod ex coroll. propos. 5. lib. 1. erit etiã æquiangulum; *c* inscribatur ei æquiangulum triangulum A B C, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterũ, ex coroll. propos. 6. lib. 1. *d* eruntque tres arcus A B, B C, C A, æquales, vel propter tres rectas A B, B C, C A, æquales, vel propter tres æquales angulos A, B, C, trianguli A B C. Quelium igitur partiũ æqualium quindecim est circumferentia tota A B C, talium quinque erit arcus A B, qui tertia pars est totius circumferentiæ. *e* Inscribatur rursus in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum A E F G H, applicans vnum angulorum ad punctum A, *f* eruntque quinque arcus A E, E F, F G, G H, H A, æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim est tota circumferentia A B C, talium trium erit arcus A E, quinta pars existens totius circumferentiæ. Itaque cùm arcus A B, contineat tales partes quinque, & arcus A E, tres; continebit reliquus arcus E B, duas. Diuiso *g* ergo arcu E B, bifariam in I, erit arcus B I, pars decimaquinta totius circumferẽtiæ. Quare ducta recta B I, subtendet decimaquintam partem totius circumferentiæ; cui si aliæ quatuordecim *h* æquales in circulo accommodentur, inscriptum erit in circulo quintidecagonum æquilaterum, quod *i* & æquiangulum est, cùm eius anguli subtendant arcus æquales, compositos videlicet ex 13. arcubus æqua-



c 2. quarti

d 26. vel 28. tertij.

e 11. quarti. f 28 tertij.

g 30. tertij.

h 1. quarti. i 27. tertij.

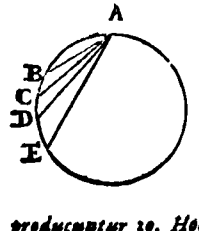
æqualibus omnes, vt perſpicuum eſt. In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

SIMILITER autem per ea, quæ dicta ſunt de pentagono ſupra, propoſ. 12. 13. & 14. deſcribemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribemus; & tandem circa datum quintidecagonum deſcribemus circulum.

SCHOLIVM.

EX huius problematis ſtructura, atque demonſtratione colligi poteſt methodus, atque ars quædam, qua infinitæ propemodum figuræ in dato circulo inſcribantur. Nam quia recta AB, denominatur à ternario, quòd ea ſit latus trianguli æquilateri, & recta AE, à quinario, quòd ea ſit latus pentagoni; ſi multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex illis duobus lateribus in circulo deſcriptis, inſcribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumq; æqualium, hac ratione. Denominator lateris AB, hoc eſt, 3. exceditur à denominatore lateris AE, id eſt, à 5. binario. Igitur arcus BE, continebit duo latera figuræ prædictæ; Ideoque diuiſo arcu BE, bifariam in F, erit ſubtenſa recta BI, latus figuræ 15 laterum, angulorumq; æqualium; Vt demonſtratum fuit. Hac ferè arte vſus eſt Euclides in deſcribendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiuſmodi Theoremá.

SI in circulo ab eodem puncto inſcribantur duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum; continebit arcus inter illa latera incluſus tot latera alterius figuræ inſcribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter ſe differunt denominatores eorundem laterum: Continebit autem figura inſcribenda tot latera, angulosque æquales, quot vnitates ſunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.



INSCRIBANTVR in circulo ABCDE, initio ſemper facto à puncto A, plurima latera; Hexagoni quidem AB, pentagoni verò AC, & quadrati AD, trianguli denique æquilateri AE. Quoniam igitur denominator lateris AB, nimirum 6. excedit denominatorem lateris AC, nempe 5. vnitate; continebit arcus BC, inter ea latera incluſus vnum latus figuræ 30. laterum, angulorumq; æqualium. Nam ex multiplicatione 5 cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita eſſe, ſic demonſtrabitur. Qualium

partium

partium æqualium 30. est tota circumferentia, talium 5. est arcus AB, sexta pars circumferentia; & talium 6. est arcus AC, quinta pars circumferentiæ. Igitur arcus BC, quam talem continebit partem.

PARI ratione arcus BD, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumq; æqualium. Nam denominator lateris AB, videlicet 6. superat denominatorem lateris AD, nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24.

ITA quoque arcus BE, comprehendet tria latera figuræ 18. laterum.

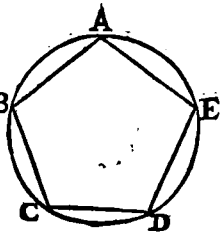
ARCVS verò CD, complectetur quam latus figuræ 20. laterum.

ARCVS autem CE, duo latera figuræ 15. laterum.

ARCVS denique DE, continebit quam latus figuræ 12. laterũ, angulorumq; æqualium. Hac itaque arte, ac methodo inuestigabuntur ferè infinitarum figurarum latera.

NON est autem prætereundum hoc loco, omnem quidem figuram æquilateram circulo inscriptam, esse quoque æquiangulam: at non omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam necessariò æquiangulam quoque esse, nisi quando numerus angulorum ipsius est impar; vel si par est, quando duo anguli proximi æquales sunt, vel duo non proximi, dummodo vno eorum primo posito, alter occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (si enim secundum occuparet, esset primo proximus. quod est contra hypothesin.) sextum, octauum, decimum, &c. Qua in re nonnulli hallucinati sunt, putantes omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam, necessariò esse quoq; æquiangulam: inter quos est Campanus Euclidis non obscuri nominis interpres.

SIT enim figura æquilatera quotcunq; angulorum ABCDE, circulo inscripta. Dico eam necessariò esse quoq; æquiangulam. Cùm enim latera AB, BC, CD, sint æqualia, a erunt arcus quoque AB, BC, CD, æquales; ac proinde & totus arcus ABC, totius arcus BCD, æqualis erit. Reliqui ergo ADC, BED, in eodem circulo æquales erunt. Quocirca b anguli ad BC, BCD, illis insistentes æquales e-



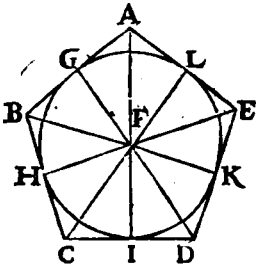
a 28 *tertij.*

b 27. *tertij.*

runt.

runt: Eodemq; modo omnes anguli ostendentur esse æquales, quotquot illi sint; ac propterea figura A B C D E, æquiangula est, sive angulorum numerus sit par, sive impar. Quod ostendendum erat.

SIT rursus figura æquilatera A B C D E, quotlibet angulorum numero imparium circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam necessario esse quoq; æquiangulam. Ductis enim ex F, centro ad omnes angulos, & ad puncta contactuum, rectis, a erunt ha ad latera perpendiculares. Et quoniam tangentes A G, A L, ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. æquales sunt; erunt duo latera A G, A F, duobus lateribus A L, A F, æqualia. Cùm ergo & bases F G, F L, ex centro sint æquales; b erunt & anguli ad A, æquales: ac proinde angulus B A E, divisus erit bifariam. Non aliter ostendemus reliquos omnes angulos figura sectos esse bifariam. Rursus quia duo latera A B, B F, duobus lateribus C B, B F, æqualia sunt, angulisq; illis contenti, ostensi æquales; c erunt quoq; bases A F, C F, & anguli B A F, B C F, æquales. Cùm ergo hi anguli sint semisses angulorum B A E, B C D, & ostensum est, erunt toti anguli B A E, B C D, quoq; æquales. Eadem ratione erit recta C F, rectæ E F, & angulus B C D, angulo D E A, æqualis: Atq; ita deinceps, si figura plures habeat angulos, erit semper tertius quisq; angulus ex, à quo tertius est, uno relicto in medio, æqualis: hoc est, primus (constitutus autem potest primus quicunq; angulus) æqualis erit tertio, tertius quinto, quintus septimo, septimus nono, &c. Atq; ita omnes anguli in locis imparibus positi, æquales inter se erunt: Eademq; ratione omnes anguli parium locorum, & secundus, quartus, sextus, octavus, decimus, &c. æquales inter se erunt; cùm quartus sit à secundo tertius, & sextus à quarto tertium quoq; locum occupet, &c. Itaq; quoniam figura proposita habet numerum angulorum imparem, erit primus angulus, qui æqualis ostensus est omnibus angulis locorum imparium, æqualis ultimo angulo impari, qui primo proximus est. Hic autem ultimus angulus erit eadem ratione secundo angulo æqualis, qui tertius est ab ultimo, primo relicto in medio; & omnibus alijs à secundo tertium locum occupantibus, & quarto, sexto, octavo, decimo, &c. usque ad penultimum. Quapropter omnes anguli figuræ propositæ inter se æquales erunt. Quod erat ostendendum.



a 18. tertij.

b 8. primi.

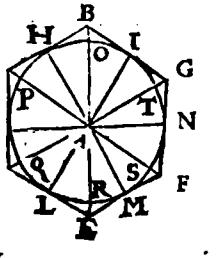
c 4. primi.

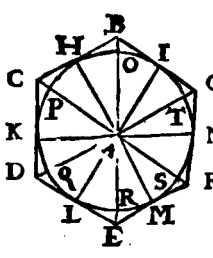
HÆC demonstratio in figuris æquilateris circulo circumscriptis, quæ habent numerum angulorum parem, locum non habet. Ex ea enim solùm concludetur, primum angulum æqualem esse tertio, quinto, septimo, nono, & alijs locum imparia occupantibus; nunquam autem proba-

probabitur, primum vltimo esse aqualem, eo quòd vltimus locum parem occupet. Vt in quadrangulo quartum, in hexagono sextum, in octogono, octauum, &c. Sic etiam solùm ex eadem demonstratione colligetur, angulum secundum aqualem esse quarto, sexto, octauo, decimo, & alijs locaparia occupantibus; nunquam autem ostendetur, secundum angulum esse primo aqualem, propterea quòd primus locum imparem occupat. Itaq; soli anguli imparium locorum inter se, & soli quoque anguli locorum parium inter se semper conuincentur aquales.

QVOD si duo anguli proximi, vel etiam duo non proximi, dummodò vnus eorum in loco impari, alter verò in loco pari collocatus sit, fuerint inter se aquales, tum demum per superiorem demonstrationẽ concludetur omnium angulorum aqualitas. Nam si primus angulus aqualis sit secundo, (quando enim duo anguli proximi sunt aquales, licebit vnum eorum dicere primum, & alterum secundum,) cùm ostensum sit, primum esse aqualem quoque omnibus angulis locaimparia occupantibus, secundum verò omnibus parium locorum; erunt omnes inter se aquales. Si autem primus angulus aqualis sit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo anguli non proximi sunt aquales, quorum vnus in loco impari, & alter in loco pari existat, dicere licebit eorum vnum primum, & alterum vel quartum, vel sextum, vel octauum, &c. prout ab illo destiterit, non autem secundum, quia secundus primo proximus est) cùm primus ostensus sit aqualis omnibus alijs locorum imparium, alter verò omnibus pariumlocorum, atque adeò & secundo angulo; erit quoque primus secundo aqualis: hoc est, duo proximi inter se aquales erunt. Quamobrem, vt proximè demonstrauimus, omnes anguli inter se erunt aquales.

VERVM si dicat forsan aliquis, quanquam ex ea demonstratione colligi nequeat, omnem figuram aquilateram, cuius angulorum numerus sit par, circulo circumscriptam, esse quoque aquiangulam; non colligi tamen contrarium; ac proinde eam posse esse aquiangulam, non quidem propter illam demonstrationem, sed propter quampiam aliam; adeo vt nulla dari possit figura aquilatera circulo circumscripta, quin simul sit aquiangula, vt Campanus cum nonnullis alijs asseruit. Si, inquam, aliquis ita dicat, respondemus, infinitas figuras aquilateras angulorum numero pariũ circumscriptas circulo, non esse aquiangulas. Sit enim circulus ex centro A, descriptus, cuius circumferentia trib. diametris BE, CF, DG, in 6. partes aquales OP, PQ, QR, RS, ST, TO, diuidatur, quemadmodũ prop. 15 in descriptione hexa-





goni traditum est. Deinde arcus O P, secetur inaqualiter in H, sitq; maius segmentum O H, & minus P H. Arcui quoq; O H, æquales sumantur O I, Q K, Q L, S M, S N, ita vt sex arcus æquales ad vtrasq; partes trium semidiametrorum non proxima ū, sed inter binas singulis relictis in medio, sumātur. Erūtq; ad vtrasq; partes semidiametrorū relictarum sex reliqui arcus P H, P K, R L, R M, T N, T I, æquales. Ductis item ex centro A, ad puncta H, K, L, M, N, I, rectis lineis, ducatur per H, ad H A, perpendicularis B C, secans semidiametros A O, A P, productas in B C, quæ circulum tanget in H, ex coroll propos. 16. lib. 3. Coibunt autē necessariò rectæ H B, A B, propterea quòd duo anguli B H A, B A H, duobus rectis minores sunt. Est enim B H A, rectus, & B A H, insistens arcui O H, qui minor est quadrante, minor recto, ex scholio propos. 27. lib. 3. Iungatur quoq; recta B I. Et quia duo latera A H, A B, duobus lateribus A I, A B, æqualia sunt, a anguloq; q̄ continēt æquales æqualibus arcubus O H, O I, insistentes; b erunt quoq; bases B H, B I, & anguli H, I, æquales. Cùm ergo B H A, rectus sit ex constructione, erit & B I A, rectus: ac propterea recta B I, circulum tanget in I, & conueniet q̄ cum semidiametro A T, producta in G, ob angulos A I G, G A I, duobus rectis minores: Est nanq; A I G, ostensus rectus, at G A I, recto minor est, ex scholio propos. 27. lib. 3. ob arcum T I, quadrante minorem. Et quoniam duo anguli I, A, trianguli G A I, duobus angulis H, A, trianguli C A H, æquales sunt; (Nam I, H, recti sunt, c & G A I, C A H, æquales sunt insistentes æqualibus arcubus T I, P H,) lateraq; A I, A H, quibus adiacent, æqualia; d erunt quoq; latera G I, G A, lateribus H C, C A, æqualia. Cùm ergo & B I, ipsi B H, ostensa sit æqualis; erit tota B G, toti B C, æqualis. Eadem ratione, ducta recta G N, tanget circulum in N, coibitq; cum semidiametro A F, producta in F, eritq; ipsi G B, æqualis. Item iuncta recta F M, circulū tanget in M, & cum semidiametro A R, producta conueniet in E, ipsiq; F G, æqualis erit. Similiter ducta recta E L, tanget circulum in L, & semidiametro A Q, protracta occurret in D, ipsiq; E F, fiet æqualis. Deniq; iuncta recta D K, eundem circulum tanget in K, & cum semidiametro A P, producta concurret in C, fietq; ipsi D E, æqualis. Quòd autem D K, in eodē puncto C, occurrat semidiametro A P, in quo recta B H, eidem occurrit, manifestū est. Si enim in alio puncto eam secaret, cum ducta recta C L, circulum tangeret in K, & demonstratum est, tangerent duæ rectæ circulum in eodem puncto K; aq; adeò inter peripheriam, & tangentem interciperetur ad punctum contactus vna linea recta: quod fieri non posse, e Euclides demonstrauit. Est ergo hexagonum B C D E F G, circulo circumscriptum, æquilaterū. At idem

a 27. tertij.
b 4. primi.
c 27. tertij.
d 26. primi.
e 16. tertij.

esse

ſſe non æquiangulum, ita demonſtrabimus. Quoniam figura BCDEFG, æquilatera eſt, erunt quidem per ea, quæ paulò antè monſtrauimus, anguli locorum imparium, nimirum B, D, F, inter ſe, & anguli locorum parium, vt C, E, G, inter ſe æquales; omnes q; ſectis erunt bifariam à ſemidiametris: At quia tres anguli trianguli A B H, a tribus angulis trianguli A C H, æquales ſunt, ablatis rectis ad H, erunt reliqui duo reliquis duobus æquales: Eſt autem B A H, maior quàm C A H, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. quod & arcus G H, maior ſit arcu P H. Igitur reliquus A B H, reliquo A C H, minor erit; qui cùm ſemiſſes ſint totorũ angulorum B, C, vt oſtenſum eſt; erit totus quoq; C B G, toto B C D, minor. Eodemq; modo toti anguli D, F, totis angulis E, G, minores oſtendentur. Non eſt ergo hexagonum B C D E F G, æquiangulum. Quod erat oſtendendum. a 32. primi

E A D E M omnino conſtructio, & demonſtratio fieri poteſt in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterum, ſi circulus quatuor diametris ſecetur in 8. partes, vel quinq; diametris in 10. &c.

Q V O D ſi figura æquilatera quotcunq; angulorum circulo circumſcribatur per doctrinam propoſ. 12. deſcripta nimirum prius ſimili figuræ intra circulum, & ductis lineis circulum tangentibus in figura inſcripta angulis, &c. vt factum eſt in pentagono propoſ. 12. tum neceſſariò figura illa erit ſimul æquiangula, vt ex demonſtratione eiuſdem propoſ. liquidò conſtat.

OBSERVATIONE quoq; dignum eſt, omnẽ quidem figuram æquiangulam circulo circumſcriptam, eſſe etiam æquilateram: at non omnem figuram æquiangulam circulo inſcriptam neceſſariò æquilaterã quoque eſſe, niſi quando numerus laterum ipſius eſt impar; vel ſi par eſt, quando duo latera proxima æqualia ſunt, vel duo non proxima, dummodo vno eorum poſito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (ſi enim ſecundũ occuparet, eſſet primo proximum, quod eſt contra hypotheſin.) ſextum, octauum, decimũ, &c. Qua in re facilè etiã quis hallucinari poſſit.



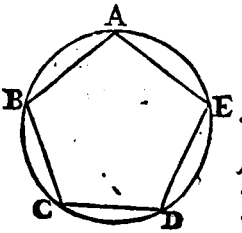
S I T enim figura æquiangula A B C D E, quotuis laterum circulo, cuius centrum F, circumſcripta. Dico eam eſſe quoque neceſſario æquilateram. Ductis enim ex F, centro ad puncta contactuum rectis F G, F H, F I, F K, F L, b *quæ ad latera figuræ ſunt perpendiculares; emittantur quoq; ex centro F, ad angulos figuræ rectæ F A, F B, F C, F D, F E. Et quoniam tangentes A G, A L, ex 2. coroll. propoſ. 36. lib. 3. æquales ſunt, erunt duo latera A G,* b 18. ter tij.



A F, trianguli A G F, duobus lateribus A L, A F, trianguli A L F, æqualia: Sunt autem & bases F G, F L, ex centro æquales. a *Igitur anguli quoq; ad A, illis lateribus comprehensi æquales sunt, ideoq; angulus B A E, sextus est bisariam. Non aliter ostendemus, reliquos angulos figuræ bisariam sectos esse, ac proinde cùm toti anguli ponantur æquales, & eorum semisses æquales erunt. Quocirca duo anguli A, G, trianguli A F G, duobus angulis B, G, trianguli B F G, æquales erunt: Est autem latus F G, vni æqualium angulorum oppositum commune.* b *Igitur latera quoq; A G, B G, æqualia erunt; atq; ideo latus A B, sectum erit bisariam in G. Eodem modo probabis, reliqua figuræ latera secta esse bisariam. Quia ergo A G, A L, dimidia æquales sunt, erunt quoq; tota linea A B, A E, æquales. Eademq; ratione A B, B C, & B C, C D, & C D, D E, & D E, E A, æquales erunt. Quamobrem figura A B C D E, æquilatera est, siue numerus laterum sit par, siue impar. Quod erat demonstrandum.*

a 8. primi.

b 26. primi.



SIT rursus figura æquiangula A B C D E, quotuis laterum numero imparium circulo inscripta. Dico eam necessario esse quoq; æquilateram. Quoniam enim anguli B A E, A B C, ponuntur æquales; c *erunt arcus B C E, A D C, quibus insistunt, æquales: quibus demptis ex communi circulo, æquales quoq; erunt reliqui arcus B A E, A B C. Dempto ergo communi arcu A B, erunt & reliqui arcus A E, B C, æquales. Eadem ratione arcus B C, arcui D E, æqualis erit;* d *ac proinde & latus A E, lateri B C, & latus B C, lateri D E, æquale erit: atq; ita deinceps, si figura plura habeat latera, erit semper tertium quoq; latus ei, à quo tertium est, & uno relicto in medio, æquale: hoc est, primum (constitui autem quodvis latus potest primum) æquale erit tertio, tertium quinto, quintum septimo, septimum nono, &c. atque in hunc modum omnia latera in locis imparibus posita, æqualia inter se erunt: Eademq; ratione omnia latera parium locorum, vt secundum, quartum, sextum, octauum, decimum, &c. æqualia inter se erunt, cùm quartum sit à secundo tertium, & sextum à quarto tertium item occupet locum, &c. Itaque quoniam propositæ figuræ numerum laterum habet imparem, æquale erit vltimum primo, cui proximum est. Hoc autem vltimum latus eadem ratione æquale erit secundo, quod ab vltimo tertium est, primo in medio relicto; & omnibus alijs à secundo tertium locum occupantibus, vt quarto, sexto, octauo, &c. vsque ad penultimum. Quocirca omnia latera figuræ propositæ inter se æqualia erunt. quod ostendendum erat.*

c 16. tertij.

d 29. tertij.

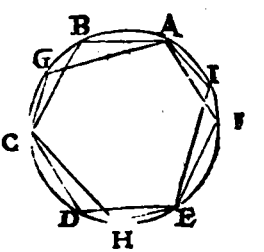
HÆC etiam demonstratio in figuras æquiangulas parium late-

rum

rum circulo inscriptas non quadrat. Ex ea enim solùm concludetur, primum latus esse æquale tertio, quinto, septimo, & aliis loca impara occupantibus; nunquam autem per eam demonstrabitur, primum vltimo esse æquale, propterea quòd vltimum occupat locum parem, vt in quadrangulo quartum, in hexagono sextum, &c. Pari ratione eadem demonstratio conuincet tantum, latus secundum æquale esse quarto, sexto, octauo, & aliis locis paria possidentibus, at per eam nunquam colligetur, secundum latus esse æquale primo, eo quòd primum in loco impari locetur. Itaque sola latera imparium locorum inter se, & sola latera in paribus locis posita inter se conuincentur esse æqualia.

QVOD si duo latera proxima, vel etiam duo non proxima dummodò vnum eorum in loco impari, alterum verò in loco pari positum sit, fuerint inter se æqualia, tum demum superior demonstratio concludet omnium laterum æqualitatem. Nam si primum latus secundo sit æquale, (quando enim duo proxima latera æqualia sunt, dici poterit vnum primum, & alterum secundum) cùm demonstratum sit, primum æquale esse quoque omnibus lateribus locorum imparium, secundum verò omnibus parium locorum; perspicuum est, omnia inter se esse æqualia. Si autem primum latus æquale sit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo latera non proxima sunt æqualia, ita tamen, vt vnum in loco impari, & alterum in loco pari reperiatur, licebit vnum eorum appellare primum, & alterum vel quartum, vel sextum, &c. prout ab illo destiteris, non autem secundum, quia secundum primo proximum est.) cùm primum ostensum sit æquale omnibus alijs positis in locis imparibus, alterum verò omnibus loca paria occupantibus, atque idcirco & secundo lateri; erit quoque primum secundo æquale: ac proinde duo proxima inter se æqualia erunt. Vt ergo proximè demonstratum est, omnia latera erunt inter se æqualia.

SI quis autem dubitet, dari posse figuram æquiangulam parium laterum circulo inscriptam, quæ non sit æquilatera (quanquàm enim superior demonstratio non probet omnia latera esse æqualia, si omnes anguli æquales sint; contrarium tamen ex ea inferre non licet.) demonstrabimus id Geometricè hac ratione. Primum quidem constat id in figuris quadrilateris. Nam figura altera parte longior æquiangula est, quippe cùm omnes eius anguli sint recti, sed non æquilatera. Quis autem dubitet,

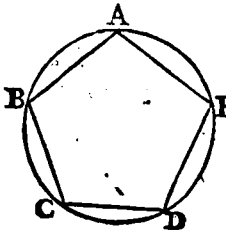




A F, trianguli A G F, duobus lateribus A L, A F, trianguli A L F, æqualia: Sunt autem & bases F G, F L, ex centro æquales. a *Igitur anguli quoq; ad A, illis lateribus comprehensi æquales sunt, ideoq; angulus B A E, sectus est bifariam. Non aliter ostendemus, reliquos angulos figura bifariam sectos esse, ac proinde cùm toti anguli ponantur æquales, & eorum semisses æquales erunt. Quocirca duo anguli A, G, trianguli A F G, duobus angulis B, G, trianguli B F G, æquales erunt: Est autem latus F G, vni æqualium angulorum oppositum commune.* b *Igitur latera quoq; A G, B G, æqualia erunt; atq; ideo latus A B, sectum erit bifariam in G. Eodem modo probabis, reliqua figuræ latera secta esse bifariam. Quia ergo A G, A L, dimidia æquales sunt, erunt quoq; totæ lineæ A B, A E, æquales. Eademq; ratione A B, B C, & B C, C D, & C D, D E, & D E, E A, æquales erunt. Quamobrem figura A B C D E, æquilatera est, siue numerus laterum sit par, siue impar. Quod erat demonstrandum.*

a 8. primi.

b 26. primi.



S I T rursus figura æquiangula A B C D E, quotuis laterum numero imparium circulo inscripta. Dico eam necessario esse quoq; æquilateram. Quoniam enim anguli B A E, A B C, ponuntur æquales; c *erunt arcus B C E, A D C, quibus insistunt, æquales: quibus demptis ex communi circulo, æquales quoq; erunt reliqui arcus B A E, A B C. Dempto ergo communi arcu A B, erunt & reliqui arcus A E, B C, æquales. Eadem ratione arcus B C, arcus D E, æqualis erit;* d *ac proinde & latus A E, lateri B C, & latus B C, lateri D E, æquale erit: atq; ita deinceps. Si figura plura habeat latera, erit semper tertium quoq; latus ei, à quo tertium est, vno relicto in medio, æquale: hoc est, primum (constitus autem quodvis latus potest primum) æquale erit tertio, tertium quinto, quintum septimo, septimum nono, &c. atque in hunc modum omnia latera in locis imparibus posita, æqualia inter se erunt: Eademq; ratione omnia latera parium locorum, vt secundum, quartum, sextum, octauum, decimum, &c. æqualia inter se erunt, cùm quartum sit à secundo tertium, & sextum à quarto tertium item occupet locum, &c. Itaque quoniam propositæ figuræ numerum laterum habet imparem, æquale erit vltimum primo, cui proximum est. Hoc autem vltimum latus eadem ratione æquale erit secundo, quod ab vltimo tertium est, primo in medio relicto; & omnibus alijs à secundo tertium locum occupantibus, vt quarto, sexto, octauo, &c. vsque ad penultimum. Quocirca omnia latera figuræ propositæ inter se æqualia erunt. quod ostendendum erat.*

c 26. tertij.

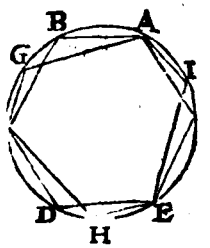
d 29. tertij.

H Æc etiam demonstratio in figuras æquiangulas parium laterum

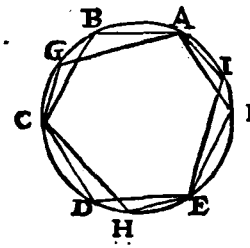
rum circulo inscriptas non quadrat. Ex ea enim solùm concluditur, primum latus esse æquale tertio, quinto, septimo, & alijs loca impari occupantibus; nunquam autem per eam demonstrabitur, primum vltimo esse æquale, propterea quòd vltimum occupat locum parem, vt in quadrangulo quartum, in hexagono sextum, &c. Pari ratione eadem demonstratio conuincet tantum, latus secundum æquale esse quarto, sexto, octauo, & alijs loca paria possidentibus, at per eam nunquam colliget ur, secundum latus esse æquale primo, eo quòd primum in loco impari locetur. Itaque sola latera imparium locorum inter se, & sola latera in paribus locis posita inter se conuincentur esse æqualia.

QVOD si duo latera proxima, vel etiam duo non proxima quomodò vnum eorum in loco impari, alterum verò in loco pari positum sit, fuerint inter se æqualia, tum demum superior demonstratio concludet omnium laterum æqualitatem. Nam si primum latus secundo sit æquale. (quando enim duo proxima latera æqualia sunt, dici poterit vnum primum, & alterum secundum) cùm demonstratum sit, primum æquale esse quoque omnibus lateribus locorum imparium, secundum verò omnibus parium locorum; perspicuum est, omnia inter se esse æqualia. Si autem primum latus æquale sit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo latera non proxima sunt æqualia, ita tamen, vt vnum in loco impari, & alterum in loco pari reperiatur, licebit vnum eorum appellare primum, & alterum vel quartum, vel sextum, &c. prout ab illo destiterit, non autem secundum, quia secundum primo proximum est.) cùm primum ostensum sit æquale omnibus alijs positu in locis imparibus, alterum verò omnibus loca paria occupantibus, atque idcirco & secundo lateri; erit quoque primum secundo æquale: ac proinde duo proxima inter se æqualia erunt. Vt ergo proximè demonstratum est, omnia latera erunt inter se æqualia.

SI quis autem dubitet, dari posse figuram æquiangulam parium laterum circulo inscriptam, quæ non sit æquilatera (quanquam enim superior demonstratio non probet omnia latera esse æqualia, si omnes anguli æquales sint; contrarium tamen ex ea inferre non licet.) demonstrabimus id Geometricè hac ratione. Primum quidem constat id in figuris quadrilateris. Nam figura altera parte longior æquiangula est, quippe cùm omnes eius anguli sint recti, sed non æquilatera. Quòd autem dubitet,



eam circulo posse inscribi? Deinde verò hexagonum aequilaterum & aequiangulum A B C D E F, in circulo descriptum; sumaturq; in arcu B C, quodvis punctum G, & arcui B G, in tertio arcu ab eo arcus aequalis D H; Item in quinto ab eo arcus aequalis F I, jungaturq; recta A G, G C, C H, H E, E I, I A. Dico hexagonum A G C H E I, aequiangulum esse, at non aequilaterum. Quòd enim sit aequiangulum, sic ostendemus. Anguli B, G, a aequales sunt in eodem segmento A B C. Eadem ratione aequales sunt anguli D, H, & F, I. Praeterea quia arcus B G, D H, aequales sunt, per constructionem; addito communi G D, erunt tots arcus B C D, G C H, aequales. Igitur reliqui ex circulo arcus B F D, G F H, b aequales erunt; b ac proinde anguli B C D, G C H, illis insistentes aequales quoq; erunt. Non aliter ostendemus & angulos D E F, H E I, & F A B, I A G, aequales inter se esse. Ergo sex anguli hexagoni A G C H E I, sex angulis hexagoni A B C D E F, aequales sunt, singuli singulis: ideoq; cùm hoc ponatur aequiangulum, erit quoq; illud aequiangulum. Quòd autem non sit aequilaterum, ita probabimus. Latus A G, latere A B, maius est, & latus G C, latere B C, minus, ex scholio propos. 29. lib. 3. Item eadem ratione latera C H, E I, lateribus C D, E F, maiora sunt, & latera H E, I A, lateribus D E, F A, minora. Cùm ergo latera A B, B C, C D, D E, E F, F A aequalia ponantur, erunt A G, G C, C H, H E, E I, I A, inaequalia: quanquam A G, C H, E I, inter se, & G C, H E, I A, inter se, relicto semper uno in medio, aequalia sint, ut suprà ostendimus.



a 21 tertij.

b 27. tertij.

I D E M prorsus eodem modo demonstrabitur fieri posse in octogono, decagono, & aliis figuris pariũ laterum, si in circulo inscribantur prius octogonũ, decagonũ, & alia figura aequilatera, atq; aequiangula.

Q V O D si figura inscribatur circulo per doctrinam propos. 11. 15. & 16. erit ea perpetuò & aequiangula, & aequilatera, ut ex earum propositionum demonstrationibus perspicuum est.

P O R R O qualemcunq; figuram aequilateram & aequiangulam in circulo nouerimus inscribere, talem etiam sciemus describere circa circulum, & in ea circulum quoq; inscribere, & circa eandem describere circulum, si artem imitemur, qua tradita fuit de pentagono, propos. 12. 13. & 14.

R V R S V S inscripta figura quacunque aequilatera & aequiangula in circulo, inscribetur in eodem figura, qua habeat latera duplo plura. Diuisis etenim arcubus, quos latera subtendunt, bifariam, & subtensis rectis lineis, constat propositum. Vt per triangulum aequilaterum inscriptum inscribetur & hexagonum, & ideo de-

deca-

decagonum, figura 24. laterum, &c. Sic quoque ex quadrato in circulo deſcripto, inſcribetur octogonum, atque adeo figura 16. laterum, figura 32. 64. 128. laterum, &c.

CÆTERVM omnes figuræ æquilatera & æquiangula in circulo inſcribi poſſunt beneficio Iſoſcelium triangulorum, ſtrictè hoc loco nonnullis Euclidis interpretes monent.

IMPARIVM enim laterum figura inſcribentur beneficio triangulorum Iſoſcelium, quorum anguli æquales ad baſin multiplices ſunt eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum. Vt beneficio Iſoſcelis, cuius vterque angulorum ad baſin æqualis eſt ei, qui ad verticem, deſcripti in circulo inſcribetur prima figura imparium laterum, hoc eſt, triangulum æquilaterum. Nam Iſoſceles huiuſmodi, triangulum æquilaterum erit. Quod ſi in circulo inſcribatur Iſoſceles, cuius vterque angulorum ad baſin duplus ſit eius, qui ad verticem, inſcribetur ſecunda figura imparium laterum, nimirum pentagonum, in circulo, ſi duo anguli æquales ſecentur bifariam, veluti propoſ. 11. fuit oſtenſum. At Heptagonum, tertia figura laterum imparium, inſcribetur in circulo, per triangulum Iſoſceles habens vtrumque angulorum ad baſin triplum eius, qui ad verticem, ſi duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad verticem. Item quoque figura quarta imparium laterum, quale eſt Hennagonum, in circulo inſcribetur beneficio Iſoſcelis, cuius vterque angulorum ad baſin quadruplus eſt eius, qui ad verticem, ſi vterque diſtribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad verticem, &c.

DIVISIO autem hæc angulorum ad baſin in partes æquales perfacilis eſt. Nam ſi angulo ad verticem conſtituantur ad baſin tot anguli æquales ordine, quot vnitates ſunt in numero proportionis multiplicis, quam vterque angulorum æqualium habet ad reliquum, diuiſus erit angulus in partes æquales. Verum deſcripto huiuſmodi triangulo Iſoſcele in circulo, deſcribetur figura in circulo ſine diuiſione angulorum ad baſin, ſi baſi accommodentur rectæ æquales in circulo. Baſis enim ſemper eſt vnum figuræ latus, vt in Pentagono patuit.

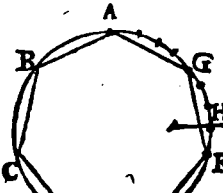
PARIVM verò laterum figura, in circulo inſcribentur, beneficio Iſoſcelium, quorum anguli æquales ad baſin multiplices ſeſquialteri ſunt eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum. Vt quadratum conſtituens primam figuram parium laterum, inſcribetur beneficio Iſoſcelis, cuius vterque angulorum ad baſin ſeſquialter eſt anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem inſiſtit quartæ parti circumferentiæ. Cum enim duo anguli ad baſin ſimul contineant tres angulos æquales ei, qui ad verticem, quod quilibet ſemel eum contineat, & dimidiatum inſuper eius partem; ſubtendent ipſi tres partes circumferentiæ, & idcirco angulus ad verticem vnam duntaxat. Hexagonum, hoc eſt, ſecunda figura laterum parium, inſcribetur beneficio Iſoſcelis, cuius vterq; angulorum ad baſin duplus ſeſquialter eſt eius,

qui ad Verticem, anguli. Nam angulus ad Verticem, insistit sextæ partì circumferentiæ, cum reliqui anguli simul compositi contineant ipsum quinquies; propterea quod quilibet bis eum continet, & dimidiatam eius insuper partem. Ita quoque Octogonum, id est, tertia figura laterum parium, inscribetur beneficio Isoscelis habentis Vtrumque angulorum ad basin triplum sesquialterum anguli ad Verticem.

SI igitur inuenta fuerit ars, qua Isoscelia triangula constituantur habentia angulos ad basin multiplices eorum, qui ad Verticem sunt, angulorum, quemadmodum Euclides Isosceles fabricauit habens Vtrumque angulorum ad basin duplum anguli ad Verticem, facilè in circulo describentur figura omnes laterum imparium. Et si arcus earum diuidantur bifariam, inscribentur quoque omnes figura parium laterum, post quadratum, atque adeo circumferentia cuiuslibet circuli in quotlibet æquales partes Geometrice diuidetur. Quæ res summam Astronomis afferret Vtilitatem. Verum hæc ars adhuc ignota extitit. Non enim rectè sibi eam vendicat Orontius Finæus in libello hactenus, Vt ipse ait, desiderato de absolutis figurarum rectilinearum omnium descriptione intra circulum, &c. cum eius demonstrationes falsæ sint, ac sophisticæ, Vt Geometricè ostensum est à Petro Nonio Lusitano in libello de erratis Orontij.

NOS tamen ad finem lib. 6 ex Pappo Alexandrino lineam quandam inflexam Geometricè describemus, qua non solum triangula Isoscelia, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant datam proportionem, constituantur, ac proinde omnes figura æquilatera, & æquiangula in circulo describantur: Verum etiam arcus quiuis circuli distribuatur in quotcunque partes æquales, siue is quadrans sit, siue non. Quin etiam eiusdem linea inflexa beneficio incunda operatione circulus quilibet sine vllo negotio in quadratum æquale commutabitur, Vt ibidem dicemus. Quæ res ad hunc vsque diem animos Mathematicorum tenuit suspensos.

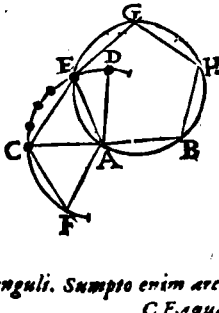
SED doceamus, si placet, qua etiam via figura quauis æquilatera, & æquiangula circulo inscribatur sine triangulis Isoscelibus, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant proportionem datam. Sit ergo in circulo A B C D E F G, inscribendum heptagonum æquilaterum, & æquiangulum. Secetur eius quadrans A H, in septem partes æquales, in tot videlicet, quot latera, angulosve figura inscribenda continet. Secabis autem quadrantem A H, in propositas partes æquales vel ex iis, quæ ad finem lib. 6. nos demonstraturos diximus, vel beneficio circini, dilatando eius crura modo magis, modo minus, donec reperias eorum distantiam



partiri

partiri quadrantem in partes optatas. Facilius enim quadrans in quotuis æquales diuidetur partes, quàm tota circumferentia, quòd sæpius attentando, & quasi repetendo opus, clarius appareat in parua magnitudine, quam in magna, quantum detrahi, vel addi debeat parti vni beneficio circini accepta, si ea partem desideratam non offerat. Secto quadrante in septem partes æquales, vel in plures, si figura plurium laterum desideretur, erit recta linea A G, qua quatuor eiusmodi partes subtendit, latus figuræ inscribendæ. Quoniam enim in tota circumferentia quater tot partes æquales continentur, in quot quadrans diuisus est, continebitur aggregatum ex quatuor partibus toties in tota circumferentia, quoties vna pars in quadrante: quia qualibet pars cum aliis tribus, quarum singulæ in singulis aliis tribus quadrantibus accipiantur, efficit aggregatum ex quatuor partibus. Quod etiam ita perspicuum fiet. Quoniam partes eandem proportionem habent, quam earum aquemultiplicia, vt ab Euclide demonstratur lib. 5. propos. 15. (Liceat enim hoc accommodare eam propos. cum ex antecedentibus nullo modo pendeat.) ita se habebit vna pars ad quadrantem, vt quadruplum vnius partis, hoc est, arcus A G, ad quadruplum quadrantis, id est, ad totam circumferentiam. Qualis ergo pars quadrantis est vna illarum, in quas quadrans diuisus est, talis erit arcus A G, totius circumferentiæ. Atque ita si quadrans diuisus sit in 7. partes, continebuntur eiusmodi partes 28. in tota circumferentia. Igitur 4. efficient $\frac{4}{28}$. hoc est, $\frac{1}{7}$. totius circumferentiæ. Ita quoque si quadrans sectus sit in 11. partes, continebuntur eiusmodi partes 44. in tota circumferentia: atque adeo 4. efficient $\frac{4}{44}$. hoc est, $\frac{1}{11}$. totius circumferentiæ: & sic de cæteris. Itaque si arcui A G, quatuor partium abscindantur arcus continuè æquales, eisdemque arcubus recta subtendantur, inscripta erit circulo figura propositæ, vt ex demonstratis liquet.

I A M verò si supra datam rectam lineam quauis figura æquilatera, & æquiangula describenda sit, efficiemus id hac ratione. Sit supra datam rectam A B, constituendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Producta B A, ad C, vt A C, ipsi A B, æqualis sit, describatur ex A, per C, arcus circuli; ductaque A D, perpendiculari ad A C, vt quadrans sit C D, ex scholio propos. 27. lib. 3. diuidatur quadrans C D, in quinque partes æquales, in tot videlicet, quot laterum figura construenda sit; quarum 4. sint C E, iungaturque recta A E, quæ ipsi A B, æqualis erit. Dico angulum B A E, æqualem esse angulo pentagoni æquilateri & æquianguli. Sumpto enim arcu C F, æquali



CF, aquali arcui CE, iungantur rectæ CE, CF. Et quoniam CE, recta subtendens 4. partes quadrantis, latus est pentagoni æquilateri & æquianguli, vt proximè demonstrauimus, in circulo ECF, describendi, erit CF, alterum latus; ac proinde duo latera EC, FC, comprehendent angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ECF. Quoniam verò, ducta recta AF, duo latera EC, CA, duobus lateribus
a 8. pri. *FC, CA, æqualia sunt, & bases item æquales AE, AF; a erunt an-*
b 5. pri. *guli ECA, FCA, æquales. Cum ergo, b & anguli ACE, AEC, sint æquales; erit & ACF, ipsi AEC, æqualis: addatoque communis ACE, totus angulus ECF, duobus angulis ACE, AEC, æqualis*
c 32. primi. *erit. Est autem c externus BAE, eisdem internis ACE, AEC, æqualis. Igitur & ECF, BAE, inter se æquales erunt. Cum ergo ECF, sit angulus pentagoni, erit quoque BAE, pentagoni angulus. Quocirca si circa tria puncta B, A, E, circulus describatur, &*
d 1. quarti. *rectæ AB, AE, d rectæ æquales in eo accommodentur BH, HG, GE, describetur erit pentagonum æquilaterum & æquiangulum descriptum in circulo ABHGE, ac proinde supra datam rectam AB. Quod faciendum erat. Non est autem dubitandum, quin rectis AB, AE, æquales rectæ possint in circulo accommodari, quæ totum circumferentiam absoluant. Nam angulus pentagoni BAE, insistit tribus quintis partibus totius circumferentiæ, singulæ autem latera AB, AE, singulas quintas partes subtendunt, ac proinde singulæ BH, HG, GE, singulas quoque quintas partes subtendent, cum ipsis AB, AE, sumptæ sint æquales, propterea que totum arcum BGE, continentem tres quintas partes absoluent. Eadem ratio est de aliis figuris æquilateris & æquiangulis.*

SI forte in promptu habeamus aliquam figuram æquilateram, & æquiangulam, cui supra datam rectam lineam desideramus constituere similem siue ea in circulo aliquo descripta sit, siue non: satis erit vni eius angulo æqualem angulum constituere BAE, in extremo datæ lineæ AB. Si namque, posita recta AE, æquali ipsi AB, per tria puncta B, A, E, circulus describatur, perficiemus figuram propositam, vt ante diximus.



QVONIAM verò longa est, atque difficilis ea inscriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo, quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annectere praxin quandam, qua vna eademq; opera Ptolemæus lib. 1. magnæ constructionis, in circulo dato inscribit Pentagonum, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus ABC, cuius centrum D; Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuisa semidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abscindatur EF. Itaque si ducatur recta AF, erit AF, latus Pentagoni, & DF, latus Decagoni

Polygoni in dato circulo inscribendi, vt ipse demonstrat. Caterum cum demonstratio huius rei pendeat ex 13. lib. Euclidis, non videtur hoc loco scribenda, sed in proprium locum, vtpote in librum 13. differenda.

NON erit etiam praeter institutum nostrum, aut ab hoc libro alienum, si sequens adhuc theorema adiungamus, vtidelicet.

SI bifariæ sectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula totidem laterum in illa figura, idem centrum habens.

CENTRVM figuræ aquilateræ, & aquiangulæ appellatur punctum illud, è quo circulus figuræ inscribitur, aut circumscribitur: vt idem sit centrum circuli, & figuræ.

SIT igitur figura aquilatera, & aquiangula A B C D E F, cuius latera bifariam secentur in G, H, I, K, L, M, iunctis rectis G H, H I, I K, K L, L M, M G. Dico figuram G H I K L M, inscriptam figuræ A B C D E F, æquilateram esse quoque, atque aquiangulam, idemque centrum habere. Æquilatera quidem erit, quoniam eius latera cum subdant angulos æquales comprehensos æqualibus rectis, vtpote dimidijs laterũ æqualium, a *æqualia sunt. Quoniam verò tam tres anguli A M G, G M L, L M F, quàm tres F L M, M L K, K L E,* b *duobus sunt rectis æquales: Sunt autem A M G, L M F, F L M, K L E,* c *inter se æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, subtendanturque à basibus æqualibus; Erunt reliqui anguli G M L, M L K, æquales. Eodemque argumento concludemus, reliquos angulos & hisce, & inter se æquales esse. Æquiangula igitur quoque est figura G H I K L M.*



a 4. pri

b 13. primi.

c 8. pri

QVOD autem idem habeat centrum, ita ostendetur. Ex centro N, figura A B C D E F, ad omnes angulos figura inscripta ducantur recta N G, N H, &c. iungánturque recta N A, N B. Quoniam igitur A G, G N, latera trianguli A G N, æqualia sunt lateribus B G, G N, trianguli B G N; sunt quæ bases A N, B N, cum sint semidiametri circuli circa figuram descripti, æquales: d *Æquales erunt anguli A G N, B G N, ideoque recti. Quare N G, perpendicularis est ad latus A B; Eodemque modo reliqua N H, N I, &c. perpendiculares erunt ad latera B C, C D, &c. Qua cum ex defin. 4. lib. 3. ostendant distantias rectarum A B, B C, &c. æqualium à centro N;* e *æquales ad inuicem erunt. Circulus igitur ex N, interuallo N G, descriptus, per reliquos angulos H, I, K, L, M, incedet; Ac propterea N, centrum erit figuræ G H I K L M, hoc est, circuli circa eam figuram descripti. Quod est propositum.*

d 8. pri.

e 14. ter tij.

NEQVE verò & hoc omittendum est, inter omnes figuras aquilateras

lateras, & aquiangulas, solum triangulum, quadratum, & hexagonum replere locum, hoc est, aliquot triangula, vel quadrata, vel hexagona, ita in plano posse inter se aptari, vt inter eorum angulos nihil sit vacui, sed planam superficiem constituant. Nam sex anguli in triangulo aquilatero, & quatuor in quadrato; & tres in hexagono aquilatero, & aquiangulo, aequales sunt quatuor rectis, quantum nimirum est spatium circa punctum quodlibet in plano, vt ad propos. 15. lib. 1. ostendimus. Quoniam enim vnus angulus trianguli aquilateri continet $\frac{2}{3}$. vnius recti, quod omnes tres contineant $\frac{6}{3}$. vnius recti, hoc est, duos rectos, continebunt sex eiusmodi anguli $\frac{12}{3}$. vnius recti, id est, quatuor rectos. Item quatuor anguli in quadrato sunt quatuor recti. Denique quia vnus angulus hexagoni aquilateri, & aquianguli continet $\frac{4}{3}$. vnius recti, quod omnes sex contineant $\frac{24}{3}$. vnius recti, hoc est, 8. rectos, continebunt tres eiusmodi anguli $\frac{12}{3}$. vnius recti, id est, 4. rectos. Quod in aliis figuris planis aquilateris, & aquiangulis non cernitur. Nam tres anguli in pentagono aquilatero, & aquiangulo aequales sunt $\frac{18}{5}$. vnius recti, hoc est, angulis rectis $3\frac{3}{5}$. duntaxat, at quatuor aequales sunt $\frac{20}{5}$. vnius recti, id est, angulis rectis $4\frac{4}{5}$. propterea quod omnes quinque aequivalent 6. rectis, hoc est, constituunt $\frac{30}{5}$. vnius recti, atque idcirco vnus continet $\frac{6}{5}$. vnius recti, &c. Tria igitur pentagona locum replere non possunt, cum trium in plano aptatorum tres anguli minores sint quatuor rectis: quippe qui efficiant tantum tres angulos rectos cum tribus quintis. Eadem ratione quatuor pentagona locum replere nequeunt, propterea quod quatuor in plano aptatorum quatuor anguli maiores sunt quatuor rectis, cum aequales sint quatuor angulis rectis, & insuper quatuor quintis vnius recti, vt dictum est. Pari ratione neq; ex heptagonis locum poterit repleri. Nam tres anguli cuiuslibet heptagoni aquilateri, & aquianguli aequales sunt $\frac{3}{7}$ $\frac{0}{7}$. vnius recti, hoc est, angulis rectis $4\frac{2}{7}$. Quoniam enim omnes septem anguli 10. rectis sunt aequales, hoc est, complectuntur $\frac{7}{7}$ $\frac{0}{7}$. vnius recti; fit, vt vnus contineat $\frac{1}{7}$ $\frac{0}{7}$. vnius recti, hoc est, vnum rectum, & praeterea $\frac{3}{7}$. vnius recti: ac proinde tres contineant quatuor rectos, & $\frac{2}{7}$. vnius recti. Non ergo tribus heptagonis in plano aptatis, eorum tres anguli locum replere possunt, cum quatuor rectos excedant. A fortiori neq; quatuor heptagona locum replebunt: neque tria octogona aquilatera, & aquiangula, aut quatuor, neq; tres aut quatuor figura aquilatera, atq; aquiangula plurium laterum, quàm octo, quippe cum semper tres anguli simul sumpti sint maiores quatuor rectis, propterea quod maiores sunt tribus angulis heptagoni aquilateri & aquianguli, quos ostendimus quatuor rectis esse maiores. Solum ergo triangulum aquilaterum, quadratum, & hexagonum aquilaterum atq; aquiangulum, suis angulis locum replere possunt, vt diximus.

FINIS ELEMENTI QVARTI

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM.

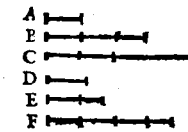
DEFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

EGIT in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolutè considerata; Nunc verò duobus sequentibus de eadem disputat non absolutè, sed prout vna ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, non descendendo ad vllam quantitatis speciem, vt ad lineam, superficiem, vel corpus aliquod. Sexto verò ostendit in specie, quamnam proportionem habeant inter se linea, anguli, circumferentia circulorum, triangula, & alia figura plana. Vt igitur instituum suum seruet, definit prius vocabula, qua ad demonstrationes proportionum adhibentur.

IT A QVE ait magnitudinem illam minorem, qua maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Vt quoniam magnitudo A, ter sumpta, metitur magnitudinem B; sexies autem sumpta, magnitudinem C, dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C. At verò quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, sed sumpta bis, excedit magnitudinem E, & sumpta ter, deficit à magnitudine F, sumpta autem quater, eandem superat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.



DVPLEX

DVPLEX autem est pars apud Mathematicos: Quadam metitur suum totum, ita & vt aliquoties repetita totum suum constituat; qualis est numerus 4. cum 8. 12. 16. 20. &c. collatus; Quadam autem non metitur suum totum, sed aliquoties sumpta ipsum vel excedit, vel ab eodem deficit: cuiusmodi pars est numerus 4. collatus cum 6. 7. 9. 10. 18. 38. &c. Prior dici solet aliquota, posterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc loco definit partem aliquotam duntaxat, tum quia hac solum metitur suum totum; (Aliquanta enim non dicitur metiri suum totum) tum etiam, quia & ex lib. 7. constabit, pars aliquanta in numeris non dicitur ab Euclide pars, sed partes. Nam numerus 4. non est pars huius numeri 6. sed duæ partes tertia, quales sunt duo binarij. Accedit etiam, quod in omnibus demonstrationibus huius quinti libri pars sumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vnde mirum sane est, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos est etiam Peletarius, contendere, partem hoc loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quam aliquantam; cum tamen in demonstrationibus etiam ipsi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II.

MVLTIPLEX autem est maior minoris, cum minor metitur maiorem.

VT in superiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo C, multiplex est magnitudinis A; quoniam hac vtramque illam metitur. At verò neque magnitudo E, neque magnitudo F, multiplex est dicenda magnitudinis D; propterea quod hac neutram illarum metitur. Itaque pars ad multiplex refertur, & multiplex ad partem, sic & vt minor quantitas mensurans maiorem, dicatur pars maioris; Maior verò mensurata à minori, dicatur minoris multiplex.

SATIS autem perspicuè ex hac definitione colligitur, partem ideo definitam esse eam, qua perfectè metitur suum totum. Si enim 6. diceretur metiri 7. & vult Peletarius, esset iuxta hanc definitionem; 7. multiplex ipsius 6. quod est absurdum.

CÆTERVM quando duæ magnitudines minores duas alias maiores æque metiuntur, hoc est, vna minor in vna maiore toties continetur, quoties altera minor in altera maiore; dicuntur duæ hæ maiores duarum illarum minorum æquemultiplices. Quod idem dicetur, si plures minores æquè metiantur plures maiores.

III.

RATIO est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam, secundum quantitatē, habitudo.

QVANDO duæ quantitates eiusdem generis, & duo numeri, duæ li-

duæ lineæ, duæ superficies, duo solida, &c. inter se comparantur secundum quantitatem, hoc est, secundum quod vna maior est, quam altera, vel minor, vel aqualis; appellatur huiusmodi comparatio, seu habitudo mutua, Ratio seu (vt alijs placet) Proportio. Itaque si comparetur linea aliqua cum superficie quapiam, vel numerus cum linea, non dicetur ea comparatio proportio, quod neque linea, & superficies; neque numerus, & linea sint eiusdem generis quantitatis. Similiter si conferatur linea aliqua cum alia linea secundum qualitatẽ, hoc est, secundum quod vna est alba, & altera nigra; aut quod vna est calida, & altera frigida, &c. quamuis ambæ sint eiusdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non fit secundum quantitatem.

QVAMQVAM autem in solis quantitatibus propriè reperitur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam sapiunt quantitatis, cuiusmodi sunt tempora, soni, voces, loca, motus, pondera, & potentiæ, proportionem quoque dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur secundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore esse maius, vel minus, vel duo tempora esse æqualia, &c. appellabitur eiusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc considerantur, veluti quantitates quædam.

CÆTERVM in omni proportione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs antecedens proportionis; Ea verò, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Vt in proportione lineæ 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis, at linea 3. palmorum, proportionis consequens. Quod si è contrario consideretur proportio lineæ 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens linea 3. palmorum, consequens verò linea 6. palmorum, & sic in cæteris.

IV.

PROPORTIO verò est rationum similitudo.

QVOD hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία, plerisque autem Latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter se, dicitur proportio; ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter se, proportionalitas solet nuncupari. Vt si proportio quantitatis A, ad quantitatem B, similis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, si similis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G, appellabitur hæc similitudo proportionalitas. Multa autem habitudines proportionum, seu proportionalitates, (Nos enim cum pluribus comparationem duarum quantitatum, proportionem appellabimus: habitudinem autem



proportionum, Proportionalitatem) à ſcriptoribus, præſertim Boëtio, & Iordano, deſcribuntur; inter quas primum ſemper locum obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Muſica, ſeu Harmonica, de quibus paulò poſt dicemus. Verum Euclides de ſola Geometrica agit hoc libro; qua quidem duplex eſt, continua altera, in qua ſingula quantitates intermedia bis ſumuntur, ita vt nulla fiat proportionum interruptio, ſed qualibet quantitas intermedia ſit & antecedens, & conſequens; Antecedens quidem quantitatis ſubſequentis, conſequens verò quantitatis antecedentis. Vt ſi dicatur, qua eſt proportio E, ad F, ea eſt F, ad G; vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera verò diſcreta, ſeu non continua, in qua ſingula quantitates intermedia ſemel tantum accipiuntur, ita vt fiat proportionum interruptio, nullaque quantitas ſit & antecedens, & conſequens, ſed vel antecedens tantum, vel conſequens tantum. Vt ſi dicatur, qua eſt proportio A, ad B, ea eſt C, ad D; appellabitur proportionalitas hæc, diſcreta, ſiue non continua.

DE PROPORTIONIS Diuiſionibus.

OPERAE pretium eſſe arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam ſint genera proportionum apud Mathematicos, & quænam ſint præcipuæ proportionalitates, earumque proprietates, vel ob hanc præcipuè vtilitatem, vt ea, quæ his duobus libris ab Euclide demonſtrantur de proportionibus magnitudinum, rebus poſſint materialibus accommodari, quando opus fuerit, & tum ea, quæ à Mathematicis de proportionibus dicuntur, tum ea, quæ à Philoſophis cum Ariſtotele de proportione motuum diſputantur, intelligi. Vt autem maior vtilitas, ac voluptas ex admirabilibus proportionum affectionibus percipi poſſit, inſtituemus paulo vberiorem tractationem in hac poſteriori editione, quam in priori: reiicientes nihilominus innumera propemodum, quæ dici poſſent, in pleniorem noſtram Arithmeticam, vbi omnia genera Proportionalitatum diligentiſſimè perſequemur.

PROPORTIO igitur ab Euclide definita diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis eſt ea, quæ in numeris poteſt exhiberi. qualis eſt proportio lineæ 20. *palmorum, ad lineam* 10. *palmorum. Hæc enim proportio in hiſce numeris* 20. *&* 10. *oſtenditur. Irrationalis verò proportio ea eſt,*

ta est, quæ in numeris exhiberi nequit, qualis est proportio diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiusdem quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non potest, vt in 10. lib. ab Euclide demonstratur. Alii dicunt, proportionem rationalem eam esse, quam habent quæuis duæ quantitates commensurabiles: Irrationalem vero eam, quam habent duæ qualibet quantitates incommensurabiles. Dicuntur autem quantitates incommensurabiles, quæ habent vnam communem partem aliquotam seu quas eadem mensura communis metitur. Cuiusmodi sunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam linea 4. palmorum est vtriusque pars aliquota, similiter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quam 2. palmorum metitur lineam 20. palmorum; ita quoq; eadem linea tum 4. tum 2. palmorum lineam 8. palmorum mensurat. Non aliter omnes numeri, commensurabiles dicentur, quia saltem vnitas omnes metitur. Quantitates vero incommensurabiles dicuntur, quæ nullam habent communem partem aliquotam, seu quarum nullam mensuram communem contingit reperiri. Cuiusmodi sunt diameter, & latus eiusdem quadrati. Quamuis enim qualibet harum linearum infinitas habeat partes aliquotas, vtpote partem dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota vnius, quantumuis minima, alteram metiri potest, vt demonstratur ab Euclide lib. 10. propos. vltima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommensurabiles ostenduntur, præter illas duas. Itaque in numeris inuenitur sola proportio rationalis; At in quantitate continua tam rationalis, quam irrationalis proportio continetur.

ALIO modo diuidi solet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. AEqualitatis proportio, est inter duas quantitates æquales, vt inter 20. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorum, & lineam 10. palmorum, &c. Inæqualitatis vero proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, vt inter 20. & 10. inter 8. & 40. inter lineam 6. palmorum, & lineam 2. palmorũ, &c. Habent autem hæc duo proportionum genera cum superioribus duobus eam cõnexionem, vt omnis proportio æqualitatis sit necessario rationalis, sed non contra. Omnis item proportio irrationalis necessario sit proportio in-

æqualitatis, ſed non contra. Ex quo manifeſtum eſt minus rectè à quibuſdam diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis ſit neceſſario æqualitatis, inæqualitatisve, non tamen contra omnis proportio huiuſmodi eſt rationalis; cum multæ proportiones inæqualitatis ſint irrationales. Pari ratione perſpicuum eſt, quoſdam non ſatis rectè diſtribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis ſit neceſſario rationalis, irrationalisve, non tamen omnis huiuſmodi proportio è contrario eſt proportio inæqualitatis: cum multæ proportiones rationales ſint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio duplici diuiſione ſecanda eſt proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem, & irrationalem; Poſteriori verò in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis, vt à nobis factum eſt. Ita enim membra diuidentia cum Diuiſo (vt cum Dialecticis loquamur) in vtraque diuiſione reciprocantur. Scio rectè poſſe ſubdiuidi tam proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis; quam proportionem inæqualitatis in proportionem rationalem, & irrationalem; ſi in vtraque diuiſione ſubintelligatur Diuiſum. Sed cur duplicem noſtram diuiſionem, qua proportio in tota ſua latitudine diuiditur, vtrique harum ſubdiuiſionum prætulerim, ſupra expoſui in reſponſione ad Apologiam Peletarii.

RVRSVS proportio inæqualitatis (Reliquimus enim æqualitatis proportionem, quoniam amplius ſubdiuidi nequit, cum quæcunque quantitates æquales ſiue magnæ, ſiue paruæ fuerint, eandem ſemper habeant proportionem æqualitatis) ſubdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis: Maioris inæqualitatis proportio eſt, quando maior quãtitas cum minore confertur; qualis eſt proportio 20. *ad* 10. *Item lineæ* 8 *pedum ad lineam* 6. *pedum, &c. Proportio minoris inæqualitatis eſt, quando minor quantitas ad maiorem refertur; qualis eſt proportio* 10. *ad* 20. *Item lineæ* 6. *pedum ad lineam* 8. *pedum, &c. Non eſt autem hæc diuiſio inanis, & ſuperuacanea, vt multi ſuſpicantur. Neque enim eadem eſt proportio*

4. *ad* 2.

4. ad 2. quæ 2. ad 4. sed multum inter se differunt, cum valde diuersus sit vsus vtriusque, vt perspicuum est iis, qui vel mediocriter in rebus Geometricis, & regula Algebræ sunt versati. Hæ igitur sunt generales diuisiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla secluſa: Nunc autem tam proportionem maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, quatenus solas proportiones rationales comprehendunt, subdiuidemus; quoniam de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. est sermo futurus.

PROPORTIO *ergo rationalis maioris inæqualitatis, distribuitur in quinque genera, vt in proportionem multiplicem, superparticularem, superpartientem, multiplicem superparticularem, & multiplicem superpartientem. Pari ratione proportio rationalis minoris inæqualitatis in eadem genera secatur, si modo singulis vocabulis præponatur præpositio (sub) vt in proportionem submultiplicem, subsuperparticularem, subsuperpartientem, submultiplicem superparticularem, & submultiplicem superpartientem. Horum autem quinque generum priora tria sunt simplicia, posteriora verò duo ex illis tribus composita, vt manifestum est. Cur verò tantum sint quinque hæc genera proportionis rationalis tam maioris, quàm minoris inæqualitatis, post explicationem omnium harum quinque proportionum ostendemus.*

DE PROPORTIONE MVLTIPLICI.

PROPORTIO *Multiplex est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, decies, centies, &c. continet: ita vt minor maiorem metiatur. qualis est proportio numeri 20. ad 4. Nam numerus 20. comprehendit 4. quinquies. Item proportio lineæ 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c.*

HÆC *autem sub se continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorem bis tantum continet, dicitur proportio dupla: si ter, tripla: si decies, decupla, si centies, centupla, &c.*

EX *his facilè omnes species proportionis multiplicis definiemus. Nam proportio octupla nil erit aliud, quam habitudo ma-*

ioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem ollies complectitur. Eodemque modo definienda erunt reliqua proportiones multiplices: vt proportio quintupla, qualis est 40. ad 8. dicetur ea, cuius maior quantitas minorem continet quinquies. Item proportio dupla linea 10. cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & sic de reliquis.

CÆTERVM omnes proportiones multiplices in numeris integris, hoc est, omnes numeros multiplicem habentes proportionem, inuenies hoc modo. Accipe numerum, qui indicat, quoties maior numerus minorem in data proportione multiplici continet. Is enim ad Vnitatem habet primam proportionem multiplicem, qua inuestigatur: hoc est, numerus ille, & Vnitas sunt primi, ac minimi numeri, inter quos propositæ proportio multiplex reperitur. Atq; numerus ille idem, atq; Vnitas dicuntur ab Arithmeticis termini esse proportionis multiplicis, qua proponitur. Inuentis hisce terminis, inter quos prima proportio multiplex propositæ reperitur, si Vterque duplicetur, producentur duo numeri habentes secundam proportionem multiplicem propositam: si Vterque idem triplicetur, procreabuntur numeri tertia proportionis multiplicis propositæ: si Vterque quadruplicetur, exurgent numeri quarta proportionis multiplicis quæsita. Atque ita si idem termini per quemuis numerum multiplicentur, producentur duo numeri proportionis multiplicis propositæ, qua eum locum inter omnes proportiones multiplices illius speciei obtinet, quem numerus, qui Vtrumque terminum multiplicauit, indicat: Adeo vt, si multiplicatio fiat per 100. procreentur duo numeri obtinentes centesimum locum inter omnes numeros propositam proportionem habentes.

EXEMPLI gratia. Quærantur omnes numeri proportionis quintuplæ. Et quoniam maior numerus minorem continet quinquies in quintupla proportione, erit prima proportio quintuplæ inter 5. & 1. qui duo termini si ducantur in 2. reperietur secunda proportio quintuplæ inter 10. & 2. Si idem terminiper 3. multiplicentur, procreabuntur numeri 15. & 3. tertia proportionis quintuplæ: Et sic deinceps. Itaque si decima proportio quintuplæ quæratur, ducendi erunt duo primi termini inuenti 5. & 1. per 10. si verò millesima reperienda sit, multiplicandi erunt iidem terminiper 1000. &c.

OMNES item numeri cuiusque proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Constituantur duæ series numerorum in infinitum progredientes: quarum inferior ab Vnitate incipiat, & per seriem naturalem numerorum progrediatur; superior autem ab eo numero, qui significat, quoties maior numerus minorem in data proportione continet, initium ducat, progrediaturque per continuam additionem eius-

dem nu-

dem numeri, primum ad ſeipſum, deinde ad conflatum numerum, &c. Nam ſuperioris ordinis numeri ad numeros ordinis inferioris, vt primus ad primum, ſecundus ad ſecundum, tertius ad tertium, &c. habent omnes proportiones multiplices ſpeciei propoſitæ. Exemplo hoc habes in proportionibus quintuplis, ſeptuplis, & decuplis.

Proportiones quintuplæ.

5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.	55.	60.	65.	70.	75. 80. &c.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15. 16. &c.

Proportiones ſeptuplæ.

7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.	70.	77.	84.	91.	98.	105. &c.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15. &c.

Proportiones decuplæ.

10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90.	100.	110.	120.	130.	140.	&c.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	&c.

DE PROPORTIONE.

PROPORTIO ſuperparticularis eſt habitudo maioris quantitatis ad maiorem, quando maior minorem ſemel duntaxat continet, & inſuper vnam eius partem aliquotam, ſcilicet dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Qualis eſt proportio 3. ad 2. Nam 3. continent 2. ſemel, & inſuper vnitatem, quæ dimidiata pars eſt numeri 2. Ita quoque linea 12. pedum ad lineam 9. pedum, proportionem habet ſuperparticularem, quia prior linea continet poſteriorem ſemel, & inſuper lineam 3. pedum, quæ tertia pars eſt lineæ 9. pedum, &c.

HAEC quoque proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, eſt dimidiata pars minoris quantitatis, conſtituitur proportio ſeſquialtera; ſi eſt tertia pars, exurgit proportio ſeſquitertia; ſi quarta, ſeſquiquarta; ſi milleſima, ſeſquimilleſima, &c.

VNDE ex ipſomet vocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum ſuperparticularium. Erit enim proportio ſeſquioctaua, quando maior quantitas minorem ſemel includit, & inſuper octauam partem minoris: qualis eſt inter 9. & 8. Item inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.

INVENIENTVR omnes proportiones superparticulares, siue omnes numeri, inter quas proportio superparticularis quacunque reperitur, hoc modo. Accipiatur numerus, qui partem aliquotam in proportione expressam denominat. Ad eum enim numerus proximè maior, qui videlicet eum vna sola vnitate superat, habebit primam proportionem superparticularem propositam, ita vt in minoribus numeris ea proportio reperiri nequeat. Hi duo numeri, qui termini data proportionis dicuntur, si duplicentur, triplicentur, vel per quemcunque alium numerum multiplicentur, gignentur alij numeri eandem proportionem habentes, nimirum secundam, tertiam, vel eam, quam numerus multiplicans indicat.

VERBI causa. Si quarantur omnes proportiones sesquiseptimæ, quoniam hic exprimitur pars septima, erit 7. minor terminus huius proportionis, maior autem erit 8. vna vnitate illum superans: atque inter 8. & 7. prima proportio sesquiseptima existit. Qui duo termini si duplicentur, procreabuntur hi alij duo numeri 16. & 14. inter quos secunda proportio sesquiseptimæ cernitur: si triplicentur, erit tertia proportio eadem inter 24. & 21. Si denique centesima proportio eadem quaratur, ducendi erunt termini inuenti 8. & 7. per 100. vt gignantur numeri 800. & 700.

NVMERI quoque omnes cuiusque proportionis superparticularis competentes, si constituantur duo ordines numerorum, quorum inferior à numero partem aliquotam denominante incipiat, superior verò à numero proximè maiore: vterq; verò per continuam additionem numeri, à quo initium sumit, primum ad se, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur. Exempla hic posuimus in proportionibus sesquialtera, sesquiseptimis, & sesquidecimis.

Proportiones sesquialteræ.

3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. 36. 39. 42. 45. &c.	
2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. 30. &c.	

Proportiones sesquiseptimæ.

8. 16. 24. 32. 40. 48. 56. 64. 72. 80. 88. 96. 104. 112. 120. &c.	
7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. 84. 91. 98. 105. &c.	

Proportiones sesquidecimæ.

11. 22. 33. 44. 55. 66. 77. 88. 99. 110. 121. 132. 143. 154. &c.	
10. 20. 30. 40. 50. 60. 70. 80. 90. 100. 110. 120. 130. 140. &c.	

DE PROPORTIONE SVperpartiente.

PROPORTIO superpartiens est habitudo maioris quantitatis

titatis. ad minorem, quando maior minorem ſemel duntaxat continet, & inſuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes vnam aliquotam. Qualis eſt proportio 8. ad 5. Nam 8. continent ſemel 5. & inſuper tres vnitates, quarum qualibet eſt pars aliquota, vtpote quinta, huius numeri 5. ipſe autem ternarius ex illis compoſitus, non eſt pars vna aliquota numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere conſtituere vnam partem aliquotam, ob multas proportiones, qua primo aſpectu videntur eſſe ſuperpartientes, cùm tamen ſint ſuperparticulares; cuiuſmodi proportio eſt inter 10. & 8. Quanquam enim 10. contineant ſemel 8. & duas inſuper vnitates, quarum qualibet eſt octaua pars numeri 8. quia tamen binarius ex illis vnitatibus compoſitus, eſt quarta pars 8. non dicenda eſt ea proportio ſuperpartiens, ſed ſuperparticularis, nempe ſeſquiquarta. Itaque vt dua quantitates dicantur habere proportionem ſuperpartientem, neceſſe eſt, vt maior quantitas minorem contineat ſemel, & plures eius partes aliquotas, qua ſimul ſumpta non conſtituant vnam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter ſe confundunt.

DIVIDITVR primùm proportio ſuperpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorem ſemel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non conſtituentes vnam, conficitur proportio ſuperpartiens; ſi tres partes aliquotas, ſupertripartiens; ſi decem, ſuperdecupartiens, &c.

DIVIDITVR deinde quodlibet horum generum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio ſuperbipartiens inter duas quantitates inaequales, quarum maior continet minorem ſemel, & duas eius partes tertias, dicitur ſuperbipartiens tertias. Quod ſi dua illa partes fuerint quinta, appellabitur ſuperbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus ſuperbipartientibus. Pari ratione ſuperdecupartiens proportio inter duas quantitates inaequales, quarum maior excedit minorem decem partibus vndecimis, appellabitur ſuperdecupartiens vndecimas. Quod ſi decem illa partes ſint decimatertia, vocabitur proportio ſuperdecupar-

siem decimastertias; & sic de reliquis omnibus superdecupartientibus proportionibus.

NE *autem proportiones superpartientes vel inter se confundantur, vel cum proportionibus superparticularibus, quod à plerisque factum esse deprehendimus, diligenter considerandа sunt ea, quae sequuntur. Primum, in pronunciatione cuiuscunq; proportionis superpartientis, duos indicari numeros, quorum alter monstrat, quotnam partes aliquotae minoris quantitatis in maiore superfint; alter verò, quotae partes ea sint, aut quanta, indicat. Vt in proportione supertripartiente octauas, denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior significat, maiorem quantitatem dicta proportionis continere semel minorem, & adhuc tres eius partes aliquotas, exprimiturque syllaba illa (tri) quando dicitur, supertripartiens: posterior autem per vocem (octauas) expressus ostendit, illas tres partes aliquotas esse partes octauas minoris. Deinde in qualibet proportione superpartiente duos praedictos numeros, (qui quidem facilè ex ipsa proportionis prolatione cognoscuntur, vt ex proximo exemplo patet) eiusmodi esse debere, vt non habeant vllam partem aliquotam communem, praeter vnitatem, quae quidem est omnium numerorum pars aliquota: hoc est, vt sint inter se primi. Numeros enim, qui praeter vnitatem nullam aliam partem aliquotam communem admittunt, dicunt Arithmetici cum Euclide, primos inter se, vt ex lib. 7. constabit. Tales sunt duo illi numeri 3. & 8. in superiori proportione supertripartiente octauas expressi. Nam sola vnitas, vt constat, est vtriusque pars communis aliquota. Quare rectè denominabimus proportionem inter 11. & 8. supertripartientem octauas: qualis etiam est inter 22. & 16. Non autem rectè appellabitur proportio posterior inter 22. & 16. supersextupartiens sextasdecimas, quamuis maior minorem contineat semel, & insuper sex vnitates, quarum qualibet decima sexta pars est minoris: Non, inquam, rectè sic appellabitur, quia duo numeri 6. & 16. in ea expressi, habent partem aliquotam 2. per quam, vt in Arithmetica traditur, reducuntur $\frac{6}{1}\frac{6}{6}$. ad $\frac{3}{8}$. atque ita proportio ea dicenda est, supertripartiens octauas. Sic etiam non rectè vocabitur proportio inter 9. & 6. supertripartiens sextas, quo-*

quoniam duo numeri in ea notati 3. & 6. habent præter vnitatem, aliam communem mensuram, videlicet 3. Nam ternarius semel sumptus, seipsum, & bis repetitus, senarium metitur, ac proinde $\frac{3}{6}$. reducentur per partem aliquotam communem 3. ad $\frac{1}{2}$. Quocirca talis proportio nuncupanda erit sesquialtera, cùm maior quantitas contineat semel minorem, & eius partem dimidiatam. Eadem ratione non rectè dicetur proportio inter 10. & 6. superquadripartiens sextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habent 2. communem partem aliquotam, præter vnitatem; atque ita dicenda erit talis proportio, superbipartiens tertias, cùm maior quantitas contineat minorem semel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur non difficile erit vnicuique, denominare conuenienter omnes proportiones superpartientes.

PERSPICVVM *etiam ex dictis relinquitur, cur proportionem superbipartientem diuiserimus paulò antè, in proportionem superbipartientem tertias, quintas, septimas, nonas, &c. præterentes superbipartientem quartas, sextas, octauas, decimas, &c. Cùm enim hæ posteriores omissæ, sint superparticulares, propterea quòd $\frac{1}{4}$. faciunt $\frac{1}{2}$. & $\frac{2}{6}$. constituunt $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{8}$. efficiunt $\frac{1}{4}$. denique $\frac{2}{10}$. aequiualent $\frac{1}{5}$, confunderentur proportiones superpartientes cum proportionibus superparticularibus, si & ipsæ in numerum proportionum superbipartientium referrentur. Quo modo autem dignoscendum sit, an duo quilibet numeri propositi habeant, præter vnitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, nec ne, in Arithmetica docetur, demonstrabiturque ab Euclide, ad initium libri 7.*

INVENTIO omnium proportionum superpartientium cuiusque speciei sic se habet. Numerus tot Vnitatibus maior denominatore partium aliquotarum, quæ in proportione nominantur, quot partes in eadem proportione exprimuntur, habebit primam proportionem speciei propositæ ad numerum easdem partes aliquotas denominantem. Qui duo termini duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati, gignent secundos numeros eandem proportionem habentes, tertios, vel alios, vt suprà dictum est. VERBI gratia, si inquirendi sint omnes numeri proportionis superpartientis decimas, erunt primi huiusmodi numeri, 13 & 10. quia maior superat minorem, qui partes decimas denominat, tribus Vnitatibus, quot videlicet partium decimarum mentio fit, in proportione superpartientis

per bipartientes decimas. Duplæ eorum, qui numerum secundum proportionem constituunt; sunt 26. & 20. Triplí, 39. & 30. Centesimæ autem eiusmodi proportio erit 1300. ad 1000. cum bi numeri centupli sint terminorum 13. & 10. qui primo loco inuenti sunt.

IISDEM numeros omnium proportionum superpartientium reperies, si statuas duos numerorum ordines, quorum inferior incipiat à partium aliquotarum denominatore; superior autem à numero, qui numero partium nominatarum priorem illum superat: vterque deinde ordo progrediatur per continuam additionem primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad numeros conflatos, vt suprà diximus. Exempla hic adiecimus proportionum superbipartientium quintas, supertripartientium nonas, & superseptupartientium decimas.

Proportiones superbipartientes quintas.

7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.	70.	77.	84	91. 98. &c.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.	55.	60.	65. 70. &c.

Proportiones superoctupartientes nonas.

17.	34.	51.	68.	85.	102.	119.	136.	153.	170.	187.	&c.	
9.	18.	27.	36.	45.	54.	63.	72.	81.	90.	99.	&c.	

Proportiones superseptupartientes decimas.

17.	34.	51.	68.	85.	102.	119.	136.	153.	170.	187.	&c.	
10.	20.	30.	40.	50.	60.	70	80.	90.	100.	110.	&c.	

DE PROPORTIONE MVLTIplici superparticulari.

PROPORTIO *multiplex superparticularis est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, vel quater, &c. continet, & præterea vnam eius partem aliquotam. Cuiusmodi est proportio 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (quæ ex parte proportio hæc cum multiplici conuenit, vtpote cum duplæ) & insuper comprehendunt vnitatem, quæ est quarta pars numeri minoris; (quæ in re proportioni superparticulari, nimirum sesquiquartæ, eadem proportio proposita similis est.) vt rectè proportio hæc composita dicatur ex multiplici, & superparticulari.*

DIVIDITVR autem proportio hæc, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita, veluti multiplex. Vt in

duplam

duplam ſuperparticularem; triplam ſuperparticularem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quaterve, &c. & inſuper vnam partem minoris quantitatis aliquotam.

VNVM QVODQVE rurſus horum generum in infinita alia ſubdiuiditur, habita ratione proportionis ſuperparticularis. Nam proportio, v.g. tripla ſuperparticularis continet ſub ſe triplam ſeſquialteram, (quando ſcilicet maior quantitas minorem ter continet, & praterea dimidiatam eius partem;) triplam ſeſquitertiam; triplam ſeſquiquartam, & ita infinitas alias.

REPERIEMVS Verò omnes proportiones multiplices ſuperparticulares cuiuslibet ſpeciei, ſi aduertamus diligenter denominatorem partis aliquotæ, & proportionis multiplicis, quarum in propoſitione proportione mentio fit. Nam ſi denominatorem partis aliquotæ per denominatorem multiplicis proportionis multiplicemus, productoque numero adiiciamus vnitatem, habebit hic numerus conflatus ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem ſpeciei propoſitæ. Et hi duo numeri duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati dabunt alios in eadem proportione numeros, nimirum ſecundos, tertios, vel alterius ordinis, pro numero vnitatum, qua in numero multiplicante continentur, vt in alijs dictum eſt. EXEMPLI gratia, ſi inueniendi ſint omnes numeri proportionis ſextuplæ ſeſquinonæ, ducemus 9. denominatorem partis nonæ in 6. denominatorem multiplicis proportionis, productoq; numero 54. addemus 1. Conflatus namque numerus 55. ad 9. denominatorem partis nonæ expreſſe habet primam proportionem ſextuplam ſeſquinonam, ita vt in minoribus numeris integris ea dari nequeat. Dupli horum numerorum 110. & 18. erunt ſecundi numeri in eadem proportione. Tripli verò 165. & 27. erunt tertij, &c. ita vt eorundem centupli 5500. & 900. exhibeant centeſimam proportionem eandem.

EASDEM proportiones multiplices ſuperparticulares inuenies, ſi conſtituas duas ſeries numerorum, quarum inferior incipiat à denominatore partis aliquotæ nominatæ, ſuperior autem à numero conflato ex vnitate, & numero producto ex multiplicatione denominatoris partis aliquotæ eiuſdem in denominatorem proportionis multiplicis expreſſa: Vterque verò ordo per continuam additionem primi numeri ſui ordinis ad ſeipſum, & ad conflatum numerum, &c. progrediatur, vt in ſuperioribus dictum eſt. Exempla hic vides proportionis duplæ ſeſquialteræ, triplæ ſeſquiſeptimæ, & decuplæ ſeſquitertiæ.

Propor-

Proportiones duplæ ſeſquialteræ.											
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.	55.	60. 65. 70. &c.
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.	20.	22.	24. 26. 28. &c.
Proportiones triplæ ſeſquiſeptimæ.											
22.	44.	66.	88.	110.	132.	154.	176.	198.	220.	242.	&c.
7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.	70.	77.	&c.
Proportiones decuplæ ſeſquitertiæ.											
31.	62.	93.	124.	155.	186.	217.	248.	279.	310.	341.	&c.
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.	27.	30.	33.	&c.

DE PROPORTIONE MVLTIplici ſuperpartiente.

PROPORTIO *denique multiplex ſuperpartiens eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & inſuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes vnam: qualis eſt proportio* 11. *ad* 3. *Dixi, non conficientes vnam, ob cauſam dictam in proportione ſuperpartiente. Nam ſi partes illæ aliquotæ vnam efficerent, non eſſet proportio multiplex ſuperpartiens, ſed multiplex ſuperparticularis. Vt proportio* 20. *ad* 6. *non dicenda eſt multiplex ſuperbipartiens ſextas, quamuis* 20. *contineant ter* 6. *& duas ſextas; quia duæ ſextæ conficiunt vnam tertiam partem. Quare vocabitur proportio tripla ſeſquitertia.*

DISTRIBVITVR *autem hæc proportio primùm, habita ratione proportionis multiplicis. Vt multiplex in duplam ſuperpartientem: triplam ſuperpartientem, &c.*

DEINDE *qualibet harum, habita ratione numeri partium, ſub ſe continet genera infinita. Vt ſub tripla ſuperpartiente, continetur tripla ſuperbipartiens; tripla ſupertripartiens, &c.*

POSTREMO *quæuis iſtarum, habita ratione denominationis partium aliquotarum: in genera adhuc infinita ſecatur. Vt tripla ſupertripartiens diuiditur in triplam ſupertripartientem quartas; in triplam ſupertripartientem quintas, &c.*

&c. Quarum omnium definitiones, & exempla non difficile ex cuiuis ex dictis depromere, &c.

OMNES proportiones multiplices superpartientes postremæ divisionis ita inueniemus. Denominator partium aliquotarum propositarum multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis propositæ, productoque numero addatur numerus partium aliquotarum expressus. Conflatus enim numerus ad earundem partium aliquotarum denominatorem habet primam proportionem earum, quæ inuestigantur. Atque hi duo numeri, si duplicentur, triplicentur, vel per alium quemcunque numerum multiplicentur, dabunt secundos numeros, tertios, & alios in eadem proportione. VELUTI si quærantur omnes proportiones quadruplæ superoctupartientes undecimas, ducemus 11. denominatorem partium undecimarum in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, numeroque procreato 44. adjiciemus 8. numerum octo partium. Nam conflatus numerus 52. ad 11. denominatorem partium habet primam proportionem quæsitam. Secundi numeri erunt 104. & 22. Tertij 156. & 33. numerum illorum dupli, tripli, &c. Centupli autem eorundem, vt 5200. & 1100. habent centesimam proportionem inter omnes quadruplas superoctupartientes undecimas.

QVOD si duo numerorum ordines constituantur, quorum inferior incipiat à denominatore partium aliquotarum propositarum, & per continuam eiusdem additionem primùm ad se, deinde ad numerum conflatum, &c. progrediatur; superior verò incipiat à numero conflato ex numero producto ex eodem partium denominatore in denominatorem multiplicis proportionis data, & ex numero partium expresso, ac per eiusdem continuam additionem primùm ad se, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur; obtinebimus quoque omnes numeros oblatæ proportionis, vt in superioribus quoque diximus: Exempla hic vides in proportione dupla superbipartiente tertias, dupla superquintupartiente sextas, & quintupla supertripartiente quintas.

Proportiones duplæ superbipartientes tertias.

8. 16 24. 32. 40. 48. 56. 64. 72. 80. 88. 96. 104. &c.	
3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. 36. 39. &c.	

Proportones duplæ superquintupartientes sextas.

17. 34. 51. 68. 85. 102. 119. 136. 153. 170. 187. &c.	
6. 12. 18. 24. 30. 36. 42. 48. 54. 60. 66. &c.	

Propor-

Proportiones quintuplæ ſupertripartientes quintas.

28. 56. 84. 112. 140. 168. 196. 224. 252. 280. 308. &c.	
5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55. &c.	

DE PROPORTIONIBVS RATIONALIBUS minoris inæqualitatis.

OMNIA, quæ dicta hactenus ſunt de quinque generibus proportionum rationalium maioris inæqualitatis, intelligenda ſunt quoque de quinque generibus correſpondentibus minoris inæqualitatis, præmiſſa tamen ſemper præpoſitione (ſub) vt dictum eſt. Nam ſi in exemplis allatis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportiones minoris inæqualitatis correſpondentes. Quemadmodum enim proportio 100. ad 1. eſt centupla, ita proportio 1. ad 100. eſt ſubcentupla. Sicut etiam proportio 11. ad 3. eſt tripla ſuperbipartiens tertias, ita proportio 3. ad 11. eſt ſubtripla ſuperbipartiens tertias; Atque ita de cæteris.

NON videtur autem hoc loco prætermittenda inſignis vtilitas tabulæ Pythagoricæ, quam cap. 4. noſtræ Arithmeticæ conſtruximus, in omnibus proportionibus rationalibus inueniendis: quæ eiuſmodi eſt. Conſtructa tabula Pythagorica, (Eſt autem conſtructio facillima, cùm numeri in ſiniſtro latere conſtituant ſeriem numerorum naturalem, in infinitumq; progredi poſſint; qualibet autem linea in tranſuerſionem procreetur ex continua additione numeri in ſiniſtro latere, à quo incipit, ad ſeipſam, & ad numerum conflatum, & ſic in infinitum: ita vt hæ lineæ in tranſuerſum nil aliud ſint, quàm progreſſiones Arithmeticæ numerorum, quorum differentia ſint primi numeri earundem linearum) primùm omnes numeri cuiuſuis proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Denominator datæ proportionis multiplicis in ſuprema linea acceptus ad vnitatem in ſiniſtro latere habet primam eam proportionem multiplicem: Numeri autem ſub eodem denominatore deſcendentes per lineam rectam ad numeros ſub vnitate in latere ſiniſtro poſitos, ſinguli ad ſingulos, habent ſecundam, tertiam, quartam, & alias proportiones eiuſdem ſpeciei, in infinitum. Vt prima proportio nouicupla erit inter 9. ſuprema linea ad 1. in ſiniſtro latere; ſecunda inter 18. ſub 9. ad 2. ſub 1. tertia inter 27. eiuſdem linea à 9. deſcendentis, & 3. in ſiniſtro latere, &c. atque ita de aliis proportionibus multiplicibus diſcendum eſt.

DEINDE omnes numeri cuiuſuis proportionis ſuperparticularis ſit

tu sic inuenientur. Ad denominatorem partis aliquotæ, quæ in proportione exprimitur, in latere supremo acceptum habet proximè insequens numerum primam proportionem datam: Et si per lineam rectam ab hisce duobus numeris descendamus, reperiemus omnes alios numeros eiusdem proportionis, vt de multiplicibus dictum est. Verbi gratia, prima proportio sesquioctaua erit 9. ad 8. alia verò ordine erunt inter numeros sub illis positos, vt secunda inter 18. & 16. tertia inter 27. & 24. &c.

TERTIO sic reperies omnes proportiones superpartientes cuiuslibet speciei. Posti denominatorem partium aliquotarum, quarum in proportione data mentio fit, in supremo latere acceptum numera tot numeros, quot partes in eadem proportione nominantur. Vltimus enim ad denominatorem earundem partium habebit primam proportionem superpartientem propositam. Secunda autem, tertia, quarta, & alia ordine, reperientur inter numeros sub illis duobus collocatos. Exempli causa, si quis omnes numeros proportionis superoctupartientis vndecimas desideret, sumat in latere supremo denominatorem partium, id est, 11. post quem numeret hos octo numeros, propter octo partes, 12.13.14.15.16.17.18.19. Vltimus enim 19. ad 11. habet primam proportionem superoctupartientem vndecimas. Secundam habebit numerus 38. ad 22. tertiam 57. ad 33. & alias alij numeri sub 19. & 11 per rectam lineam descripti.

QVARTO numeros omnes cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis inuenies hac ratione. In supremo latere accipe numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ expressa habeat proportionem multiplicem, cuius mentio fit. Numerus enim proxime insequens habebit ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem propositam: Secundam autem, tertiam, & alias habebunt numeri sub illis duobus positis. Vt autem scias numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ habeat multiplicem proportionem propositam, sumendus est denominator partis in supremo latere, & in sinistro denominator proportionis multiplicis: Vel prior denominator in sinistro latere, & posterior in supremo. In angulo enim communis reperies numerum multiplicem, quem desideras. Exempli gratia. Inueniendi sint omnes numeri proportionis triplæ sesquiquintæ. Primum quæratur numerus ad denominatorem partis aliquotæ, hic est, ad 5. triplus, nimirum 15. quem reperies in communi angulo denominatoris proportionis triplæ, qui est 3. & denominatoris partis aliquotæ, qui est 5. quorum alterutter in supremo latere, & alter in sinistro sumatur. Deinde hic numerus triplus, nimirum 15. accipiatur in latere supremo. Numerus enim 16. proxime insequens ad denominatorem partis aliquotæ, id est, ad 5 habet primam proportionem triplam sesquiquintã. Alias proportiones eiusdem

 speciei

TABVLA PYTHAGORICA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308

ſpeciei reperies in numeris, qui ſub illis duobus ponuntur, vt de aliis dictum eſt.

QVINTO, & vltimo reperientur omnes numeri cuiuslibet proportionis multiplicis ſuperpartientis hoc modo: In latere ſupremo accipiatur numerus, qui ad denominatorem partium aliquotarum habeat proportionem multiplicem propoſitam: qui quidem inuenietur quoque in angulo communi denominatoris proportionis multiplicis, & denominatoris partium aliquotarum. Deinde poſt acceptum numerum multiplicem numerentur tot numeri, quot partium aliquotarum ſit mentio. Vltimus namque ad denominatorem partium aliquotarum comperietur habere primam datam proportionem multiplicem ſuperpartientem. Alias proportiones eiuſdem ſpeciei reperies ſub illa prima, vt de aliis diximus. Vt ſi cupiat quis omnes proportiones quadruplas ſupertripartientes quintas. Primum inquirat numerum quadruplum denominatoris partium, qui eſt 5. Inueniet autem eum numerum eſſe 20. quippe qui in angulo communi denominatoris proportionis quadruplæ, qui eſt 4. & denominatoris partium quintarum, qui eſt 5. deſcriptus ſit. Deinde poſt numerum hunc 20. inuentum numeret in ſupremo latere tres hos numeros 21. 22. 23. quod tres partes quintas nominentur. Nam vltimus 23. ad 5. hoc eſt, ad denominatorem partium, habet primam proportionem quadruplam ſupertripartientem quintas. Numeri aliarum proportionum eiuſdem ſpeciei continentur ſub duobus illis numeris, vt in aliis traditum eſt.

INVENTIS hac arte omnibus numeris cuiuslibet proportionis maioris inæqualitatis, ſi minores cum maioribus conferantur, inuenti quoque erunt omnes numeri eiuſdem proportionis minoris inæqualitatis.

NEQVE verò ſilentio tranſiri debet hoc loco admirabilis quædam proprietas cuiuslibet proportionis rationalis; qua ſic ſe habet. Inuentis minimis, ſiue primis terminis, numeriſue cuiuslibet proportionis, ſi conſtituatur progreſſio, ſeu proportionalitas Arithmetica incipiens à numero, qui vna vnitate minor ſit, quàm differentia minimorum illorum numerorum, progrediensque per ipſammet eandem differentiam numerorum minimorum, cadent inter primos numeros illius progreſſionis tot numeri in ſerie naturali numerorum, quot vnitates ſunt in primo termino conſtituta tua proportionalitatis Arithmetica; Inter ſecundos verò, qui primorum dupli ſunt, tot, quot in ſecundo termino eiuſdem progreſſionis continentur vnitates; inter tertios autem tot, quot vnitates in tertio termino eiuſdem progreſſionis continentur: atque ita deinceps. Exempli gratia, ſi proponatur proportio dupla, cuius minimi numeri ſunt 2. & 1. conſtituetur progreſſio incipiens ab 0. (quod differentia inter 2. & 1. ſit 1. & figura 0. vna vnitate minor quàm 1.) progrediensque per continuam additionem

Quintus, nimirum differentia inter 2. & 1. primum ad 0. deinde ad conflatum numerum 1. Postea ad numerum confectum 2. &c. hoc scilicet modo.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. &c.

Itaque inter primos numeros dupla proportionis, hoc est, inter 2. & 1. nullus cadit medius numerus: Inter secundos, qui sunt 4. & 2. cadet unus medius, nimirum 3. Inter tertios 6. 3. duo medij intercipiuntur 5. 4. Inter quartos 8. 4. tres medij existunt 7. 6. 5. & sic deinceps. Id quod in hac formula apparet, Vbi numeri extremi cuiuslibet lineæ habent proportiones omnes duplas, Vt primam, secundam, tertiam, &c. Multitudines autem numerorum seriei naturalis inter eos cadentium respondent numeris superiorum proportionalitatis Arithmeticæ.

							2	1						
						4	3	2						
					6	5	4	3						
				8	7	6	5	4						
			10	9	8	7	6	5						
		12	11	10	9	8	7	6						
	14	13	12	11	10	9	8	7						
	16	15	14	13	12	11	10	9	8					
18	17	16	15	14	13	12	11	10	9					
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10				

QVOD si superiori proportionalitati Arithmeticæ superponas seriem naturalem numerorum, qua ab 1. incipiat, ita Vt singuli eius termini singulis terminis constitutæ Arithmeticæ proportionalitatis respondeant, dicto citius cognoscemus, quotnam numeri cadant medij inter quosuis duos numeros proportionis duplæ. Numeri enim seriei huius naturalis indicabunt, quem locum duo numeri duplæ proportionis obtinent, respondentes Verò numeri in proportionalitate Arithmeticæ constitutæ multitudinem numerorum inter illos cadentium significabunt. Exemplum hic Vides.

Ordo

Ordo proportion. duplarum.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multit. med. numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

Itaque si scire cupias, quot numeri cadant inter undecimos numeros proportionis duplæ, cape in serie naturali numerum 12. cui supponitur numerus 10. Dices ergo 10. numeros inter illos intercipi, & sic de cæteris.

PROPONATVR deinde proportio decupla, cuius terminj minimi sunt 10. & 1. Differentia eorum est 9. & numerus una unitate minor, 8. Progressio ergo Arithmetica incipiet ab 8. progredietur que per continuam additionem 9. primum ad 8. deinde ad numerum conflatum 17. & sic deinceps; Vt hic videre licet, ubi suprà scripsimus etiam seriem numerorum naturalem, cuius idem usus hic est, qui suprà fuit in proportione dupla.

Ordo propor. decuplarum.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multid. med. numerorum.	8	17	26	35	44	53	62	71	&c.

Itaque inter primos numeros decuplæ proportionis cadent 8. numeri medij; Et 17. inter secundos: Et 26. inter tertios. At inter octauos intercipientur 71. numeri medij, & sic de cæteris. Vt hac formula declarat.

	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
20.	19.	18.	17.	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.

RVRSVS detur proportio quæcunque superparticularis. Et quoniam duo minimi numeri differunt sola unitate, quemadmodum & minimi numeri proportionis duplæ, insequentur hic eadem progressiones, quæ in dupla proportione, ita vt idem numerus sit numerorum mediorum hic, qui ibi. Vt hic perspicuum est in proportione sesquioctaua.

Ordo propor. sesquioct.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multid. med. numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

			9	8			
		18	17	16			
	27	26	25	24			
36	35	34	33	32			
45	44	43	42	41	40		
54	53	52	51	50	49	48	
63	62	61	60	59	58	57	56

OFFERATVR quoque proportio superquadrupartiens septimas, cuius minimi termini sunt 11. *&* 7. *Differentia eorum est* 4. *Progressio ergo Arithmetica incipiet à* 3. *progredieturq; per* 4. *& hic patet, una cum serie naturali. Igitur inter primos numeros pro-*

Ordo propor. superquadr.	1	2	3	4	5	6	7	8 &c.
Multit. med. numerorum.	3	7	11	15	19	23	27	31 &c.

portionis superquadrupartientis septimas comprehendentur 3. *numeri medij. Et* 7. *inter secundos: Et* 23. *inter sextos, atque ita de cæteris, & hic vides.*

										11.	10.	9.	8.	7.						
								22.	21.	20.	19.	18.	17.	16.	15.	14.				
						33.	32.	31.	30.	29.	28.	27.	26.	25.	24.	23.	22.	21.		
44.	43.	42.	41.	40.	39.	38.	37.	36.	35.	34.	33.	32.	31.	30.	29.	28.				

ITEM data sit proportio dupla sesquisexta, cuius numeri minimi sunt 13. *&* 6. *Differentia eorum est* 7. *Incipiet ergo progressio à* 9. *habebitque differentiam* 7. *inter eius numeros, & hic cernitur,*

Ordo propor. dup. sesquisex.	1	2	3	4	5	6	7	8 &c.
Multid. med. numerorum.	6	13	20	27	34	41	48	55 &c.

una cum serie naturali numerorum. Inter primos ergo numeros proportionis duplæ sesquisextæ cadent 6. *medij numeri: inter secundos,* 13. *& inter octaues,* 55. *&c. Veluti hic cernitur.*

13.12.11. 10. 9. 8. 7. 6.

26.25.24.23.22.21.20.19.18.17.16.15.14 13.12.

39 38.37.36.35.34.33.32.31.30 29.28.27.26 25.24.23 22.21.20.19.18.

POSTREMO propositum sit idem experiri in proportione dupla superbipartiente tertias, cuius minimi termini sunt 8. & 3. Et quia eorum differentia est 5 sumet progressio Arithmetica initium à 4 habebuntque eius numeri differentiam 5. Veluti hic manifestum est, cuà cum numerorum naturali serie.

Ordo propor. duplarum superbip. tertias.	1	2	3	4	5	6	7	8 &c.
Multid. med. numerorum.	4	9	14	19	24	29	34	39 &c.

Cadent ergo inter duos primos numeros proportionis duplæ superbipartientis tertias, 4. numeri medij; & inter secundos, 9. & inter septimos, 34. & 6. Ut hic perspicuum est.

8. 7. 6. 5. 4. 3.

16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6.

24 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9.

32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12.

MANIFESTVM autem est, quod de proportionibus maioris inæqualitatis hoc loco diximus, Verum quoque esse de minoris inæqualitatis proportionibus, cùm ijdem numeri inter maiorem numerum, ac minorem, & inter minorem, ac maiorem inter ijcantur.

CAETERVM ex iis, quæ de quinque speciebus proportionis rationalis tam maioris, quàm minoris inæqualitatis diximus, perspicuè colligitur, non posse plura esse genera proportionis rationalis maioris inæqualitatis, quam quinque iam exposita. Cùm enim, vt Euclides demonstrat propos. 5. lib. 10. commensurabiles quantitates quæcunque, inter quas, vt diximus, est proportio rationalis, inter se proportionem eam habeant, quam numerus ad numerum; sit, vt omnis proportio rationalis quarumcunque quantitatum continuarum assignari, seu exhiberi possit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfectè; qua ratione constituitur proportio multiplex: Aut semel tantummodo, ac præterea vnam eius partem aliquotam; & sic habetur

proportio ſuperparticularis: Aut ſemel duntaxat, & inſuper plures partes eius aliquotas non facientes vnam; & conficitur proportio ſuperpartiens: Aut aliquoties, & vnam eius partem aliquotam, & colligitur proportio multiplex ſuperparticularis; Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes vnam; & exurgit proportio multiplex ſuperpartiens. Neque verò alio modo maior quantitas minorem continere, aut minor quantitas à maiore contineri poteſt. Eadem ratione conſtat, totidem eſſe genera proportionis minoris inæqualitatis. Rectè ergo proportionem rationalem tum maioris inæqualitatis, tum minoris, in quinque genera, quæ expoſuimus, partiti ſumus.

DE PROPORTIONVM RATIONALIVM DENOMINATORIBVS.

QVONIAM verò non exiguus eſt vſus Denominatorum proportionum rationalium, quas hactenus expoſuimus, non abs re erit, paucis docere, à quibuſnam numeris ſingulæ proportiones denominentur. Denominator ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit diſtinctè, & apertè habitudinem vnius quantitatis ad alteram: Vt denominator proportionis octuplæ eſt 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ continere minorem octies. Similiter denominator proportionis ſeſquiquintæ eſt $1\frac{1}{5}$; quoniam iſte numerus ſignificat, maiorem quantitatem proportionis ſeſquiquintæ, continere minorem ſemel, & quintam eiuſdem partem. Atq; ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum eſt, vt arbitror, quod Euclides lib. 6. & pleriq; alii Mathematici, appellant denominatorem cuiuſuis proportionis quantitatem illius; quia denominator, vt diximus, oſtendit, quanta ſit vna quantitas ad alteram, cum qua confertur, vt ex propoſitis exemplis conſtat.

Ex iis autem, quæ diximus, facilè colligi poteſt denominator cuiuſque proportionis. Denominator enim proportionis multiplicis, quacunque ea ſit, eſt numerus integer tot continens vnitates, quoties maior quantitas minorem continet

dici-

dicitur in ea proportione, cuius denominator quæritur. Vt proportionis duplæ denominator est 2. Noncuplæ, 9. Centuplæ, 100. Millecuplæ, 1000. &c. Deominatores autem proportionum submultiplicium multiplicibus correspondentium, sunt partes aliquotæ à denominatoribus proportionum multiplicium, quibus respondent, denominatæ. Vt denominator proportionis subduplæ, est $\frac{1}{2}$; subquintuplæ, $\frac{1}{5}$. subnoncuplæ, $\frac{1}{9}$. subcentuplæ, $\frac{1}{100}$. submillecuplæ, $\frac{1}{1000}$. Eodem modo, denominatores aliarum proportionum submultiplicium reperiemus. Itaque denominator cuiuscunque proportionis submultiplicis est numerus fractus, cuius numerator perpetuo est vnitas, denominator autem, numerus proportionem multiplicem correspondentem denominans, vt ex prolatis exemplis patet. Neq; vero vlla difficultas est in cuiusque proportionis multiplicis, vel submultiplicis denominatore reperiendo, si ea, quæ dicta sunt, rectè intelligantur: quippe cum ipsa prolatio proportionis denominatorem offerat, vt ex datis exemplis manifestum est.

DENOMINATOR *cuiusuis proportionis superparticularis est vnitas cum parte illa aliquota, quam maior quantitas debet vltra minorem comprehendere. Vt proportionis sesquialteræ denominator est $1\frac{1}{2}$; sesquioctauæ, $1\frac{1}{8}$. sesquimillesimæ, $1\frac{1}{1000}$, &c. Neque difficile erit denominatorem cuiusque proportionis superparticularis inuenire; cum ipsa proportionis prolatio denominatorem exprimat per suam partem aliquotam, vt ex datis exemplis perspicuum est. Denominatores autem proportionum subsuperparticularium correspondentium, sunt fractiones, quarum numeratores vnà tantum vnitate minores sunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis subsesquialteræ, est $\frac{2}{3}$; subsesquioctauæ, $\frac{8}{9}$. subsesquimillesimæ, $\frac{1000}{1001}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotæ in proportione expressæ, & pro eiusdem fractionis denominatore, numerus vnitate maior. Vt denominator proportionis subsesquidecimæ est $\frac{10}{11}$. cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partem decimam, nimirum 10. denominator autem eius-*

dem fractionis numeratorem ſuperet vnitate, &c. Reperiemus quoque denominatorem cuiuſuis proportionis ſubſuperparticularis hoc modo. Denominatorem correſpondentis proportionis ſuperparticularis reuocabimus ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator ſuperabit his ſemper vna vnitate denominatorem, qui etiam denominator eſt partis aliquotæ, cuius mentio fit in oblata proportione. Nam ſi huius fractionis terminos inuertamus, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, habebimus denominatorem propoſitæ proportionis ſubſuperparticularis. Vt ſi offeratur proportio ſubſeſquiſeptima: quoniam denominator proportionis ſeſquiſeptimæ, quæ illi reſpondet, eſt $1\frac{1}{7}$. qui reuocatur ad hanc fractionem $\frac{8}{7}$. cuius numerator vna vnitate maior eſt, quam denominator partis aliquotæ. Quare ſi eam fractionem inuertamus hoc modo $\frac{7}{8}$. dicemus denominatorem proportionis ſeſquiſeptimæ eſſe $\frac{7}{8}$. Facilius denique cuiuſuis proportionis ſubſuperparticularis denominator fortaſsis reperietur, ſi inueniantur primi numeri habentes proportionem ſuperparticularem reſpondentem, vt ſupra docuimus. Nam fractio, cuius numerator ſit eorum numerorum minor, denominator verò maior, erit denominator propoſitæ proportionis. Vt ſi proponatur proportio ſubſeſquiſeptima: quoniam primi, ſiue minimi numeri habentes proportionem ſeſquiſeptimam, ſunt 8. & 7. ſi ex minore fiat numerator, & ex maiore denominator, conficiemus hanc fractionem $\frac{7}{8}$. pro denominatore proportionis ſeſquiſeptimæ propoſitæ, vt prius.

DENOMINATOR *cuiuſuis proportionis ſuperpartientis eſt vnitas cum illis partibus aliquotis non efficientibus vnam, quas maior quantitas debet vltra minorem continere. Vt denominator proportionis ſupertripartientis ſeptimas, eſt $1\frac{3}{7}$. ſupertripartientis vigeſimas, $1\frac{3}{20}$. &c. Neque vlla difficultas eſt in huiuſmodi denominatoribus inueniendis: propterea quod prolatio ipſa proportionis denominatorem proprium exhibet, vt ex ſuperioribus exemplis liquido conſtat. Denominatores autem proportionum ſubſuperpartientium, ſunt fractiones, quarum numeratores tot vnitatibus minores ſunt, quam earundem fra-*

ctionum

ctionum denominatores, quot partibus aliquotis maior quantitas minorem ſuperat. Vt denominator proportionis ſubſupertripartientis ſeptimas, eſt $\frac{7}{10}$; *ſubſupertripartientis vigeſimas:* $\frac{20}{23}$; *&c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubſuperpartientis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partium aliquotarum, quæ in proportione exprimuntur, cui ſi addatur numerus earundem partium, habebitur eiuſdem fractionis denominator. Vt denominator proportionis ſubſuperquadripartientis vndecimas, eſt* $\frac{11}{15}$, *cum huius fractionis numerator ſit numerus denominans partes vndecimas, nimirum* 11. *cui additus eſt numerus* 4. *quatuor partium, vt fiat eiuſdem fractionis denominator* 15. *Denominator autem proportionis ſubſupertripartientis quintas eſt hæc fractio,* $\frac{5}{8}$. *Nam eius numerator eſt numerus denominans partes quintas, nimirum* 5. *Denominator autem* 8. *eiuſdem fractionis conflatus eſt ex illo numeratore* 5. *& ex numero* 3. *triũm partium. Eademque ratione reperiemus & aliarum proportionum ſubſuperpartientium denominatores. Quos hac etiam ratione inuenies. Reuoca denominatorem proportionis cuiuſque ſuperpartientis correſpondentis ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator denominatorem, qui partes etiam aliquotas expreſſas denominat, ſuperabit hic ſemper tot vnitatibus, quot ſunt partes aliquotæ. Nam huius fractionis numeri inuerſi, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, dabunt denominatorem propoſitæ proportionis ſubſuperpartientis. Vt denominator proportionis ſubſuperdecupartientis decimastertias eſt* $\frac{13}{2}$. *quia denominator proportionis ſuperdecupartientis decimastertias eſt* $1\frac{6}{7}$, *qui ad hãc fractionem* $\frac{7}{13}$. *reuocatur; cuius numeri inuerſi efficiunt hanc fractionem* $\frac{13}{2}$. *Denique facilius cuiuſuis proportionis ſubſuperpartientiũ denominator inuenietur fortaſſis, ſi reperiantur primi, vel minimi numeri habentes proportionem ſuperpartientem correſpondentem, vt ſupra tradidimus. Fractio etenim, cuius numerator ſit eorum numerorum minor; denominator autem, maior, denominator erit propoſitæ proportionis ſubſuperpartientis. Veluti ſi proponatur proportio ſubſuperquadrupartiens nonas:*

nonas: quoniam minimi numeri habentes proportionem ſuperquadrupartientem nonas ſunt 13. & 9. faciemus fractionem $\frac{9}{13}$. *pro denominatore proportionis ſubſuperquadrupartientis nonas: & ſic de cæteris.*

DENOMINATOR *cuiuſuis proportionis multiplicis ſuperparticularis eſt numerus integer multiplicem proportionem expreſſam denominans, cum illa parte aliquota, quam maior quantitas continere debet vltra minorem quantitatem. Vt denominator proportionis triplæ ſeſquiſeptimæ eſt* $3\frac{1}{7}$. *Quintuplæ ſeſquinonæ,* $5\frac{1}{9}$, *&c. Vt nullus omnino labor ſit, exhibere denominatorem cuiuslibet proportionis multiplicis ſuperparticularis; quippe cum ipſa prolatio proportionis diſtincte exprimat & denominatorem multiplicis proportionis, & partem aliquotam, vt exempla propoſita declarant. Denominatores autem proportionum ſubmultiplicium ſuperparticularium, ſunt fractiones, quarum numeratores numeri ſunt denominantes partes aliquotas in proportionibus expreſſas. Vt denominator proportionis ſubtriplæ ſeſquiſeptimæ, eſt* $\frac{7}{21}$; *ſubquintuplæ ſeſquinonæ,* $\frac{9}{45}$; *&c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperparticularis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partis aliquotæ, qui ſi multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis, addaturq; vnitas numero producto, habebitur denominator eiuſdem fractionis. Vt denominator proportionis ſubquadruplæ ſeſquiſextæ, eſt* $\frac{6}{25}$; *cum huius fractionis numerator 6. denominet partes ſextas, isq; ductus ſit in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, ac producto numero 24. addita vnitas, vt eiuſdem fractionis denominator conficiatur 25. &c. Iidem denominatores proportionum ſubmultiplicium ſuperparticularium inuenientur, ſi denominator cuiuſuis proportionis multiplicis ſuperparticularis reſpondentis reuocetur ad vnã fractionem, vt in Arithmetica docuimus, multiplicando nimirum denominatorẽ multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero vnitatem, id eſt, numeratorem eiuſdem fractionis addendo. Nam ſi huius fractionis termini commutent ordinem inter ſe, fiet denominator proportionis propoſitæ. Vt ſi detur proportio ſubquadrupla*

tripla seſquiſexta: quoniam denominator correſpondentis proportionis quadruplæ ſeſquiſextæ eſt $4\frac{1}{6}$. *ducemus* 4. *id eſt, denominatorem multiplicis proportionis, in* 6. *hoc eſt, in denominatorem fractionis adhærentis, numeroque producto* 24. *addemus* 1. *nimirum numeratorem eiuſdem fractionis, vt totum denominatorem* $4\frac{1}{6}$. *reuocemus ad hanc fractionem* $\frac{25}{6}$. *Cuius termini ſi inter ſe ordinem permutent, fiet hæc fractio* $\frac{6}{25}$. *pro denominatore proportionis ſubquadruplæ ſeſquiſextæ. Eodemque modo in cæteris agendum erit. Denique facilius fortaſſe denominatorem cuiuſque proportionis ſubmultiplicis ſuperparticularis inuenies, ſi duos primos, minimoſue numeros proportionis multiplicis ſuperparticularis correſpondentis reperias, vt ſupra traditum eſt. Nam fractio, cuius numerator ſit minor eorum numerus, denominator autem, maior, erit denominator proportionis propoſitæ. Vt ſi offeratur proportio ſubtriplæ ſeſquiſeptimæ: quoniã primi, ſiue minimi numeri proportionis triplæ ſeſquiſeptimæ ſunt* 22. *&* 7. *fiet ex illis fractio hæc* $\frac{7}{22}$. *pro denominatore proportionis ſubtriplæ ſeſquiſeptimæ, atq; ita de cæteris.*

DENOMINATOR *cuiuſuis proportionis multiplicis ſuperpartientis, eſt numerus integer denominans proportionem multiplicem in ea expreſſam, cum illis partibus aliquotis, non conſtituentibus vnam, quas maior quantitas vltra minorem debet comprehendere. Vt denominator proportionis triplæ ſuperquintupartientis octauas, eſt* $3\frac{5}{8}$; *quadruplæ ſuperbipartientis quintas,* $4\frac{2}{5}$. *&c. Nihil enim difficultatis habet hæc inuentio denominatorum in proportionibus multiplicibus ſuperpartientibus, quod aperte, & diſtincte in qualibet earum exprimatur tam denominator proportionis multiplicis in ea contentæ, quam partes aliquotæ, vt perſpicuè in exemplis prolatis apparet. Denominatores verò proportionum ſubmultiplicium ſuperpartientium, ſunt fractiones, quarum numeratores numeri ſunt denominantes partes aliquotas, quæ in proportionibus expreſſæ ſunt. Vt denominator proportionis ſubtriplæ ſuperquintupartientis octauas, eſt* $\frac{8}{9}$. *ſubquadruplæ ſuperbipartientis quintas,* $\frac{5}{12}$. *&c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis, ſi pro numeratore fractionis*

fractionis ſumatur denominator partium aliquotarum, quem ſi multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroque producto addas partium aliquotarum numerum, obtinebis eiuſdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis ſubduplæ ſuperoctupartientis decimastertias, eſt $\frac{1}{3}\frac{2}{4}$. *quia huius fractionis numerator* 13. *denominat partes tertiasdecimas: qui ſi ducatur in* 2. *denominatorem duplæ proportionis, productoque numero* 26. *adiiciatur numerus* 8. *octo partium, conficietur eiuſdem fractionis denominator* 34. *&c. Denominatorem quoque cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis ſic reperies. Reduc denominatorem proportionis multiplicis ſuperpartientis, quæ propoſitæ reſpondet, ad vnam fractionem, vt in Arithmetica præcepimus, nimirum multiplicando denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero addendo numeratorem eiuſdem fractionis. Nam huius fractionis termini, ſi inter ſe permutent ordinem dabunt fractionem, quæ denominator erit proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis. Veluti ſi proponatur proportio ſubquintupla ſupertripartiens decimas, reducemus denominatorem correſpondentis proportionis quintuplæ ſupertripartientis decimas, hoc eſt,* $5\frac{3}{10}$. *ad hanc fractionem* $\frac{5}{1}\frac{3}{0}$. *quod fit ducendo* 5. *in* 10. *productoq; numero addendo* 3. *vt fiat numerator* 53. *cui idem denominator* 10. *ſupponendus eſt. Nam ſi hæc fractio terminos permutet, fiet denominator proportionis ſubquintuplæ ſupertripartientis decimas,* $\frac{1}{5}\frac{0}{3}$. *&c. Sed forſitan facilius denominatorem cuiuſuis proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis obtinebis, ſi primos, ſiue minimos numeros proportionis multiplicis ſuperpartientis reſpondentis reperias, ex eisq; fractionem conſtituas, ſumendo minorem pro numeratore, & maiorem pro denominatore. Fractio enim hæc dabit denominatorem proportionis propoſitæ. Vt ſi proponatur proportio ſubquintupla ſupertripartiens decimas: quoniam minimi numeri in proportione quintupla ſupertripartiente decimas ſunt* 53. *&* 10. *conſtituetur ex eis denominator proportionis propoſitæ hæc fractio* $\frac{1}{5}\frac{0}{3}$. *& ſic de cæteris.*

DENOMINATOR *deniq; proportionis æqualitatis perpetuo*

petuo eſt vnitas: quia vna quantitas debet in ea proportione eſſe æqualis alteri, ac proinde vna alteram continere ſemel, & nihil præterea. quod quidem vnitas ſignificat.

EX hu, qua de proportionum denominatoribus diximus, perſpicuum eſſe puto, denominatores proportionum maioris inæqualitatis re & nomine ipſas proportiones maioris inæqualitatis denominare; denominatores verò proportionum minoris inæqualitatis re tantum, non autem & verbo, ſiue nomine, denominare proportiones minoris inæqualitatis. Id quod exprolatis exemplis liquido conſtat. Nam denominator, verbi gratia, proportionis triplæ ſuperquadrupartientis nonas, qui eſt $3\frac{4}{9}$. hoc eſt, tria integra, & quatuor nona partes, re & verbo denominat eam proportionem, cum diſtinctè aperteq; nobis indicet, in ea maiorem quantitatem continere minorem ter, & inſuper quatuor eius partes nonas. At verò denominator correſpondentis proportionis ſubtriplæ ſuperquadrupartientis nonas, nimirum $\frac{9}{3}$. id eſt, nouem trigeſimaprima partes, re quidem ipſa proportionem ſubtriplam ſuperquadrupartientem nonas denominat, cum verè ſignificet, minorem quantitatem in ea eſſe maioris nouem partes trigeſimas primas, quod omnino neceſſarium eſt, vt minor quantitas ad maiorem habeat proportionem ſubtriplam ſuperquadrupartientem nonas: Verbo autem, ſiue nomine, eam proportionem nequaquam denominat; quippe cum $\frac{9}{3}$. hoc eſt, nouem partes trigeſimaprima cum nomine proportionis ſubtriplæ ſuperquadrupartientis nonas nihil videantur habere commune, ſed penitus ab eo diſcrepare.

QVARE ſi denominator alicuius proportionis minoris inæqualitatis numerus expreſſus ſit, nimirum per fractionem, vt dictum eſt; vt ſcias, quo pacto proportionem, quam denominat, offerre debeas, vide quam proportionem habeat denominator eius fractionis ad numeratorem: quod ſcies, ſi partiaris denominatorem fractionis per numeratorem. Nam Quotiens denominabit proportionem, quam denominator fractionis habet ad numeratorem. Eodem enim nomine proportionem dati denominatoris proportionis minoris inæqualitatis pronuntiabis, præpoſita tantum ſyllaba, ſub, quo illa denominatoris fractionis ad numeratorem appellatur. Vt ſi detur denominator $\frac{1}{8}$. dicetur eius proportio ſuboctupla. Quando enim numerator fractionis eſt vnitas, proportio dati denominatoris erit ſubmultiplex ab eiuſdem fractionis denominatore denominata. Quod ſi datus denominator ſit $\frac{2}{3}\frac{0}{7}$. Diuiſo denominatore 327. per numeratorem, ſit Quotiens $16\frac{7}{20}$. Denominator igitur fractionis $\frac{2}{3}\frac{0}{27}$. ad numeratorem habet proportionem ſedecuplam ſuperſeptupartientem vigeſimas: ac proinde proportio, cuius denominator eſt $\frac{2}{3}\frac{0}{27}$. dicenda eſt ſubſedecupla ſuperſeptupartiens vigeſimas, & ſic de cæteris.

QVIA verò non ſemper commodè omnes proportiones propriis nominibus

minibus appellari possunt, (quis enim proportionem, verbi gratia, 37. ad 1. commodè dixerit triginta septuplam, vel trigecuplam septuplam, vel also id genus nomine? Quis item commode proportionem 48. ad 29. dixerit supernonemdecupartientem vigesimasnonas? &c.) solent Geometra plerumque in suis scriptis exprimere proportionem quamcumque per primos, sine minimos numeros eius proportionis. Vt proportionem 13. ad 1. vel 39. ad 3. vel 390. ad 30. malunt dicere eam, quam habent 13. ad 1. quam tredecuplam. Et brevissimi proportionem 1. ad 13. vel 3. ad 39. vel 30. ad 390. potius dicunt eam, quam habet 1. ad 13. quàm subtredecuplam. Item quoq; proportionem 52. ad 40. vocant proportionem 13. ad 10. quæ alias diceretur supertripartiens decimas. Proportionem vero 40. ad 52. appellant eam, quæ est 10. ad 13. quæ proprio nomine diceretur subsupertripartiens decimas, & sic de aliis.

QVANQVAM autem proportio qualibet exprimi possit per minimos eius numeros, vt diximus: permeceſſaria tamen est cognitio denominatoris eiusdem proportionis, vt habitudinem vnius numeri ad alterum cognoscamus. Nam etiamsi aliquis proportionem numeri 1700. ad 400. dicat esse eam, quæ est numeri 17. ad 4. non intelligam tamen plane, quanam sit illa proportio, nisi eius denominatorem cognouero, qui est $4\frac{1}{4}$. Hic enim manifeste declarat, maiorem numerum continere minorem quater, & insuper quartam eius partem. Atque hic denominator facilius ex minimis numeris alicuius proportionis percipitur, quam ex numeris non minimis. Quòd si quando minimi numeri alicuius proportionis sint ita magni, vt denominator ex illis non facile possit intelligi, recurrendum erit ad præceptum, quod mox subiungam, & ex quo denominator proportionis inter quoslibet duos numeros, sive minimi ij sint, sive non, notus efficitur.

QVOD si proportionem quamcunque per eius numeros minimos efferunt Mathematici, licebit nobis multo commodius proportionem quorumlibet duorum numerorum explicare per eius proportionis denominatorem: ita vt proportionem 100. ad 20. dicamus eam, cuius denominator est 5. Item proportionem 48. ad 38. eam, cuius denominator est $1\frac{\Sigma}{9}$. quæ dicenda esset superquintupartiens decimas nonas, sic etiam proportio 20. ad 100. dici potest ea, quæ habet denominatorem $\frac{1}{5}$. Et proportio 38. ad 48. ea, cuius denominator est $1\frac{9}{4}$. atque ita de reliquis; quoniam videlicet denominator clarissime demonstrat habitudinem vnius numeri ad alium, vt dictum est.

DENOMINATOR porro proportionis inter duos quoslibet numeros ita reperietur. Dividatur numerus antecedens, qui minorum ad alium refertur, per consequentem. Quotiens enim numerus, reducta prima fractione, si qua adsit, ad minimos numeros, vt in Arithmetica tradidimus, erit eius proportionis denominator. Veluti propositæ propositione 39. ad 3. vel 390. ad 30. dicemus denominatorem eius esse 13. Quotientem videlicet numerum divisionis 39. per 3. vel 390. per 30.

Quod

Quod si vicissim conferantur 3. cum 39. vel 30. cum 390. erit quotiens diuisionis fractio hac $\frac{3}{39}$. *vel* $\frac{30}{390}$. *Nam quando minor numerus per maiorem diuiditur, Quotiens semper est fractio, cuius numerator est minor numerus, & denominator, maior, vt in Arithmetica explicauimus. Et quia vtraque fractio, si eius numeri ad minimos reuocentur, reducitur ad hanc* $\frac{1}{13}$. *dicemus denominatorem proportionis 3. ad 39. vel 30. ad 390. esse* $\frac{1}{13}$. *Rursus data proportione 52. ad 40. ex diuisione 52. per 40. fit Quotiens* $1\frac{3}{40}$ *cuius fractio reducitur ad hanc* $\frac{3}{10}$ *Igitur denominator proportionis 52. ad 40. erit* $1\frac{3}{10}$. *Si autem proportio offeratur 40. ad 52. inuenietur denominator siue Quotiens* $\frac{40}{52}$. *hoc est, in minimis numeris,* $\frac{10}{13}$. *Praterea proportio 100. ad 20. denominatorem habebit 5. Diuisis enim 100. per 20. Quotiens est 5. Proportionis verò 20. ad 100. denominator erit* $\frac{1}{5}$. *propterea quod diuisis 20. per 100. Quotiens est* $\frac{1}{10}$. *id est, in minimis numeris* $\frac{1}{5}$. *Deinde denominator proportionis 48. ad 10. erit* $4\frac{8}{10}$. *quod diuisis 48. per 10. Quotiens fit* $4\frac{8}{10}$. *hoc est, in numeris minimis,* $4\frac{4}{5}$. *At denominator proportionis 10. ad 48. erit* $\frac{10}{48}$. *id est, in minimis numeris* $\frac{5}{24}$. *Et quia denominator fractionis,* $\frac{5}{24}$. *ad numeratorem habet proportionem quadruplam superquadrupartientem quintas (quod diuisis 24. per 5. Quotiens fiat* $4\frac{4}{5}$. *appellabitur proportio 10. ad 48. subquadrupla superquadrupartiens quintas. Vt enim ritè efferatur proportio minoris inaqualitatis, denominanda prius est proportio denominatoris fractionis ad numeratorem, vt supra diximus.*

INVENTO denominatore proportionis duorum numerorum in minimis numeris, vt dictum est, eoque reducto ad vnam fractionem, vt in Arithmetica traditum est, erunt numerator, & denominator fractionis, minimi numeri, inter quos illa proportio reperitur. In multiplici tamen proportione, quando nimirum denominator inuentus non habet annexam fractionem, erunt denominator inuentus, & vnitas, minimi numeri illius proportionis. Vt quoniam denominator proportionis 348. ad 120. est $2\frac{9}{10}$. *si reducatur ad hanc vnam fractionem,* $\frac{29}{10}$. *(quod fit, ducendo integrum numerum 2. in denominatorem fractionis 10. productoque numero 20. eiusdem fractionis numeratorem 9. addendo:) erunt 29. & 10. minimi numeri habentes proportionem eandem, quam 348. ad 120. Sic etiam, quia denominator proportionis 824. ad 1133. est* $\frac{8}{11}$. *erunt 8. & 11. minimi numeri proportionis 824. ad 1133. Item quia denominator proportionis 84. ad 12. est 7. erunt in ea proportione minimi numeri 7 & 1. Vicissim numeri minimi proportionis 12. ad 84. cuius denominator est* $\frac{1}{7}$. *erunt 1. & 7. Itaque propositis duobus numeris quibuscunque, si quarantur minimi numeri eandem, quam illi, habentes proportionem, inueniendus erit denominator proportionis eorum, vt dictum est, isque ad vnam fractionem redigendus. Huius enim fractionis numerator, & denominator, erunt minimi numeri quæsiti. Vt si quarantur mi-*

nimi numeri proportionis, quam habent 400. ad 90. Diuiso antecedente per consequentem terminum, fit Quotiens $4\frac{4}{9}$. in minimis numeris. Quo reuocato ad hanc fractionem $\frac{4}{9}$. decimus, minimos numeros proportionis 400. ad 90. esse 40. & 9. Eademque ratio est de cæteris.

IAM verò si, propositis duabus proportionibus, cognoscere velis, vtra earum maior sit, vel minor, dices eam maiorem esse, cuius denominator maior est, minorem verò eam, cuius denominator est minor. Quod si denominatores sint æquales, proportiones quoque æquales esse pronunciabis. Vt si proponantur duæ hæ proportiones, superoctupartiens decimasquintas, & superdecupartiens decimas septimas, quarum denominatores sunt $1\frac{8}{15}$. & $1\frac{10}{17}$. dices priorem posteriore esse minorem: quia denominator $1\frac{8}{15}$. minor est denominatore $1\frac{10}{17}$. Quæ vero arte cognoscas, vtra duarum fractionum maior sit, vel minor, an verò æquales sint, tradidimus in Arithmetica. Eadem ratione, si offerantur duæ proportiones, quarum denominatores sint $10\frac{1}{1000}$. $9\frac{100}{1001}$. dicemus priorem esse maiorem. Quanquam enim fractio $\frac{1}{1000}$. minor sit fractione $\frac{100}{1001}$. numerus tamen integer 10. integro numero 9. maior est. Sic si dentur duæ proportiones, vna 17. ad 11. altera 18. ad 12. dices illam hac esse maiorem, quia illius denominator $1\frac{6}{11}$. maior est huius denominatore $1\frac{1}{2}$. Cæterum, quando duæ proportiones proponuntur in numeris, dignoscemus facilè, vtra earum sit maior, etiamsi earum denominatores non inquiramus, hac ratione. Multiplicato antecedente termino prioris proportionis in terminum consequentem posterioris, & termino antecedente posterioris in consequentem terminum prioris; cuius proportionis antecedens terminum maiorem numerum produxerit, illa proportio maior est: Et si duo æquales numeri geniti fuerint, proportiones inter se æquales erunt. Vt si proponantur duæ proportiones 17. ad 11. & 18. ad 12. comperiemus priorem maiorem esse, quia illius antecedens 17. in huius consequentem 12. ductus procreat 204. at antecedens huius 18. in consequentem illius 11. producit tantummodo 198. Rursus si dentur duæ proportiones 18 ad 12. & 108. ad 72. producetur idem numerus 1296. tum ex prioris antecedente 18. in posterioris consequentem 72. quàm ex antecedente posterioris 108. in consequentem prioris 12. multiplicato. Quare proportiones ipsæ æquales inter se erunt. Ratio huiusce operationis est: quia hac ratione, propositis quatuor numeris, multiplicantur inter se tum extremi duo, quam duo intermedij, vt in datis exemplis patet. Igitur si procrecentur numeri æquales, erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum, vt ab Euclide demonstratur lib. 7. propos. 19. Hinc fit, si primus in quartum producat maiorem numerum, quam secundus in tertium, maiorem esse primum quam vt eandem habere possit proportionem ad secundum, quam tertius ad quartum: quandoquidem minor esse deberet, vt eandem ma-

dem numerum posset producere, ac proinde eandem habere proportionem.

DESIDERANTVR nonnunquam duo numeri in quacunque proportione, sine ij primi sint, sine non; hos ergo, vt inuenimus, multiplicabimus quemcunq; numerum assumptum, vel diuidemus, per propositæ proportionis denominatorem. Nam productus numerus ad assumptum, qui multiplicatus est, vel assumptus, qui diuisus est, ad Quotientem habebit proportionem propositam. Verbi gratia, si sint inueniendi duo numeri in proportione quintupla, ducemus quemcunque numerum, vt 100. in denominatorem 5. Productus enim numerus 500. ad multiplicatum numerum 100. proportionem habebit quintuplam. Vel eundem numerum 100. diuidemus per denominatorem 5. Nam diuisus numerus 100. ad Quotientem 20. habebit quoque datam proportionem quintuplam. Item quoque si inueniendi sint duo numeri in proportione dupla sesquitertia, cuius denominator est $2\frac{1}{3}$. multiplicabimus quemuis numerum, vt 24. per $2\frac{1}{3}$. Productus enim numerus 56. ad numerum multiplicatum 24. habet proportionem denominatam à $2\frac{1}{3}$. Item si numerum 24. diuidamus per $2\frac{1}{3}$. habebit diuisus numerus 24. ad Quotientem $10\frac{3}{7}$. proportionem datam duplam sesquitertiam. Sed vt fractiones vitentur, si quidem per multiplicationem rem expedire lubet, accipiendus erit numerus multiplicandus, qui numeretur à denominatore partu aliquota, vel plurium partium, quarum in proportione fit mentio: In proportione tamen multiplici, quia nullius partis fit mentio, assumi potest quilibet numerus. Vt si desiderentur duo numeri proportionis triplæ superbipartientis nonas, accipiendus erit numerus à 9. numeratus, qualis est 18. vel 27. 36. 45. &c. Quilibet enim horum ductus in denominatorem $3\frac{2}{9}$. gignet numerum integrum: vt ductis 45. in $3\frac{2}{9}$. fit numerus 145. qui ad assumptum numerum 45 proportionem habet datam. Sic etiam si cupiat quis proportionem subquadruplam, cuius denominator est $\frac{1}{4}$. sumendus erit numerus a 4. numeratus, vt 12. Hic enim ductus in denominatorem $\frac{1}{4}$ producet 3. numerũ integrum, qui ad assumptum 12. habet proportionem subquadruplam. Si verò per diuisionem agendum sit, & fractiones vitandæ, sumendus erit in proportione multiplici numerus à denominatore proportionis numeratus. In alijs autem proportionibus, reuocandus erit denominator proportionis ad vnam fractionem, numerusq; sumendus a numeratore numeratus. Vt si quæratur proportio quintupla, sumendus erit, Verbi gratia, numerus 30. à 5. numeratus. Hic enim diuisus per denominatorem 5. facit Quotientem 6. ad quem proportionem habet quintuplam Si autem desideretur proportio, cuius denominator sit $4\frac{2}{7}$. reuocato eo ad fractionem $\frac{30}{7}$. sumendus erit numerus à 31. numeratus, vt 62. Nam hoc diuiso per $\frac{30}{7}$ fit Quotiens 14. ad quem acceptus numerus 64. habet proportionem à $4\frac{2}{7}$. denominatam, nimirum qua-

druplam ſupertripartientem ſeptimas. Caterum ſi duo numeri proponantur, cupiatque quis alios duos in eadem proportione reperire, ſatis erit, ſi vtrumque per quemuis numerum multiplicet, aut diuidat. Numeri enim producti, aut Quotientes eandem habebunt proportionem, quam propoſiti duo numeri. Item ſi propoſito quouis numero, inueniendus ſit alius, qui ad eum proportionem habeat datam, vel ad quem is datum habeat proportionem, aſſequeris primum, ſi propoſitum numerum per denominatorem proportionis multiplices: at ſecundum obtinebis, ſi eundem per denominatorem proportionis diuidas. Quod ſi proportio detur in duobus numeris, proponaturque tertius quiſpiam numerus; ſi quidem inueniendus ſit quartus, ad quem tertius datus eandem habeat proportionem, quam primus datus ad ſecundum: ſi quidem denominator proportionis duorum numerorum datorum notus eſt, diuidendus erit tertius numerus datus per denominatorem. Quotiens enim numerus erit, quem quærimus. Vel certè ſiue denominator cognitus ſit, ſiue non, multiplicandus erit tertius numerus per ſecundum datum, hoc eſt, per conſequentem terminum data proportionis, productúmq; numerum per primum, ſiue per antecedentem terminum, diuidendus. Vt ſi dentur duo numeri 4. 7. quorum proportionis denominator eſt $\frac{4}{7}$. detur item tertius numerus 20. Diuide numerum 20. per denominatorem $\frac{4}{7}$. producetúrque quartus numerus quæſitus 35. Vel multiplica tertium numerum 20. per ſecundum 7. & productum numerum 140. partire per primum 4. Ad Quotientem enim 35. habebit tertius numerus 20. eandem proportionem, quam 4. ad 7. Si verò inueniendus ſit quartus, qui ad tertium eandem habeat proportionem, quam dati duo numeri, ſi quidem denominator notus eſt, ducendus is erit in tertium numerum. Productus enim numerus erit, quem quæris. Vel ſiue notus ſit denominator, ſiue non, multiplicandus erit tertius numerus per primum datum, nimirum per terminum antecedentem, & numerus productus per ſecundum, id eſt, per conſequentem terminum, diuidendus. Vt datis eiſdem duobus numeris 4. 7. & tertio 20. multiplica 20. per $\frac{4}{7}$. denominatorem, gignetúrque quæſitus numerus $11\frac{3}{7}$. Vel duo tertium numerum 20. in primum 4. numerumq; productum 80. partire per ſecundum 7. Nam ad tertium 20. habebit Quotiens $11\frac{3}{7}$ eandem proportionem, quam 4 ad 7.

QVIA verò diximus, eam proportionem eſſe maiorem; cuius denominator maior eſt, ſit, vt in proportionibus multiplicibus datur minima, nimirum dupla, denominata à 2. non autem maxima: propterea quod numerus 2. inter omnes denominatores proportionum multiplicium eſt minimus, maximus autem dari non poteſt, cum numeri augeantur in infinitum. Efficitur quoque, inter proportiones ſuperparticulares reperiri maximam, nimirum ſeſquialteram, denominata à $1\frac{1}{2}$. non autem minimam: quia numerus $1\frac{1}{2}$. omnium denominatorum proportionum ſuperparticularium maximus eſt, minimus autem

unum autem dari non potest, cum denominatores fractionum progredi possint in infinitum. Constat autem ex iis, quæ in Arithmetica tradidimus, fractionem, cuius denominator maior est, minorem esse, si idem sit numerator; fractionem autem, cuius denominator minor est, si idem sit numerator, maiorem esse. Cum ergo denominator 2. sit omnium minimus, erit fractio $\frac{1}{2}$. omnium, quæ numeratorem habent 1. (quales sunt fractiones denominatorum proportionum superparticularium) maxima. Colligitur denique, in aliis proportionibus maioris inæqualitatis neque minimam posse dari, neque maximam. Quod intelligendum est de vltimis speciebus. Nam si de vltimis speciebus non sit sermo, erit superbipartiens inter superpartientes, minima; superpartiens autem tertias, maxima. Inter multiplices autem superparticulares maxima erit multiplex sesquialtera; minima verò, dupla superparticularis. Inter multiplices denique superpartientes maxima erit multiplex superpartiens tertias; minima verò, dupla superbipartiens. E contrario in proportionibus submultiplicibus datur maxima, nimirum subdupla, non autem minima: In subsuperparticularibus autem reperitur minima, & subsesquialtera, non autem maxima: In aliis denique proportionibus minoris inæqualitatis neque maxima, neque minima dari potest. Quæ omnia perspicua erunt, si denominatores proportionum inter se conferantur.

COLLIGITVR etiam, hanc esse connexionem inter proportionem maioris inæqualitatis, æqualitatis, & minoris inæqualitatis, vt qualibet proportio maioris inæqualitatis maior sit proportione æqualitatis, qualibet verò proportio minoris inæqualitatis, minor: propterea quòd quilibet denominator proportionis maioris inæqualitatis, quātumuis minimus, maior est vnitate, quæ denominator est proportionis æqualitatis, cum ille minor esse nequeat, quàm vnitas cum vna parte aliquota: At denominator proportionis minoris inæqualitatis semper minor est, quàm vnitas, cum sit fractio, cuius numerator à denominatore superatur vt ex iis, quæ supra diximus, patet. Itaque proportio æqualitatis, media est inter proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Vbi hoc animaduersione dignum est, Proportionem maioris inæqualitatis decrescendo appropinquare semper magis ac magis in infinitum proportioni æqualitatis, nunquam tamen ad eam peruenire: E contrario verò proportionem minoris inæqualitatis crescendo semper magis, ac magis in infinitum accedere ad eandem proportionem æqualitatis, nunquam tamen eam attingere. Nam qualibet proportione multiplici proposita datur minor, ac minor, vsque ad duplam, quæ omnium multiplicium est minima. Deinde hac datur minor, nimirum superparticularis, vel superpartiens quæcunque, in qua cum minima non possit dari, omnisque proportio eiusmodi maior sit proportione æqualitatis, liquido constat, proportionem maioris inæqualitatis ad æqualitatis proportionem non

posse pervenire, etiamsi in infinitum decrescendo ad ipsam accedat. Rursus cum omnis proportio minoris inaqualitatis minor sit, proportione aqualitatis, non possit autem in ea reperiri maxima, manifestum quoque est, proportionem minoris inaqualitatis attingere non posse proportionem aqualitatis, licet in infinitum crescendo ad eam accedat. Sed & utrumque exemplo etiam dictatur, sciendum est, si inter duos numeros quosuis non proximos interponatur quilibet numerus intermedius, maior scilicet uno eorum, & altero minor; proportionem maioris numeri ad minorem diuisam esse in duas minores, quarum una est maioris numeri ad medium interpositum, altera uerò numeri medij ad minorem. Item proportionem minoris numeri ad maiorem diuisam esse in duas maiores, quarum una est minoris numeri ad medium interpositum, altera uerò medij ad maiorem. Vt si inter duos numeros 6. 3. ponatur medius 4. hoc modo, 6. 4. 3. proportio 6. ad 3. qua dupla est, diuisa erit in sesquialteram 6. ad 4 & sesquitertiam 4. ad 3. quarum utraque minor est proportione dupla 6. ad 3. Contra uerò, proportio 3. ad 6. qua subdupla est, diuisa erit in subsesquitertiam 3. ad 4. & subsesquialteram 4. ad 6. quarum utraque maior est proportione subdupla 3. ad 6. Idem fit, si inter eosdem numeros 6. 3. interponatur medius 5. hoc modo, 6. 5. 3. Tam enim proportio 6. ad 5. sesquiquinta, quam proportio superbipartiens tertias 5. ad 3. minor est proportione dupla 6. ad 3. Contra uerò tum proportio superbipartiens tertias 3. ad 5. quam subsesquiquinta 5. ad 6. maior est proportione subdupla 3. ad 6. Qua omnia ex denominatoribus probari possunt. Verum utrumque demonstrabitur hac ratione. Quoniam medius numerus minor est maiore dato, & maior minore, habebit maior datus ad minorem datum, maiorem proportionem, quam idem maior ad medium, & quam medius ad minorem. At uerò minor ad maiorem habebit minorem proportionem, quam idem minor ad medium, & quam medius ad maiorem, ut manifestum est uel ex defin. 20. lib. 7. & ibidem explicauimus, uel ex propos. 8. huius lib. 5. Vbi demonstrat Euclides, propositis duabus quantitatibus inaqualibus maioris ad tertiam aliquam esse maiorem proportionem, quam minoris: At è contrario, tertiam eandem quantitatem ad maiorem habere minorem proportionem, quam ad maiorem. Ex quo sequitur id, quod diximus: nimirum positis his tribus numeris 6. 4. 3. maiorem esse proportionem eiusdem numeri 6. ad minorem 3. quam ad medium 4. maiorem: Item maiorem esse proportionem maioris numeri 6. ad 3. quam minoris 4. ad eundem 3. Contra uerò, maiorem esse proportionem eiusdem numeri 3. ad minorem 4. quam ad maiorem 6. Item maiorem esse proportionem maioris numeri 4. ad 6. quam minoris 3. ad eundem 6. Eademque in cæteris ratio est. His positis, erit proportio dupla 4. ad 2. diuisa hic, 4. 3. 2. in duas minores. Et tum proportio 8. ad 6. quæ eadem est, quæ 4. ad 3. diuisa hic, 8. 7. 6. quam

proportio

proportio 6. ad 4. qua eadem est, qua 3. ad 2. hic 6. 5. 4. in duas minores. Item tam proportio 16. ad 14. qua eadem est, qua 8. ad 7. diuisa hic, 16. 15. 14. & proportio 14. ad 12. qua eadem est, qua 7. ad 6. hic, 14. 13. 12. quam proportio 12. ad 10. qua eadem est, qua 6. ad 5. hic, 12. 11. 10. & proportio 10. ad 8. qua eadem est, qua 5. ad 4. hic, 10. 9. 8. in duas minores: atque sta fieri potest in infinitum. E contrario verò proportio subsesquialtera 4. ad 6. diuisa erit hic, 4. 5. 6. in duas maiores. Et tam proportio 8. ad 10. qua eadem est, qua 4. ad 5. diuisa hic, 8. 9. 10. quam proportio 10. ad 12. qua eadem est, qua 5. ad 6. hic, 10. 11. 12. in duas maiores. Item tam proportio 16. ad 18. qua eadem est, qua 8. ad 9. diuisa hic, 16. 17. 18. & proportio 18. ad 20. qua eadem est, qua 9. ad 10. hic, 18. 19. 20. quam proportio 20. ad 22. qua eadem est, qua 10. ad 11. hic, 20. 21. 22. & proportio 22. ad 24. qua eadem est, qua 11. ad 12. hic, 22 23. 24. in duas maiores: atque huius incrementi nunquam erit finis. Idemque experiri licebit in quibuslibet aliis proportionibus. Vt proportio decupla 10. ad 1. diuisa hic est, 10. 6. 1. in duas minores: Et proportio subsuperseptupartiens undecimas 11. ad 18. diuisa hic, 11. 15. 18. in duas maiores, &c.

DE PROPORTIONALITATIBVS.

PROPORTIONALITAS *ab Euclide definita in plura genera diuiditur, vt videre licet apud Boetium, Iordanum, & alios Arithmeticos: sed præcipua proportionalitates, quas auctores nominati Medietates vocant, sunt hæ tres; Arithmetica, Geometrica, & Musica, siue Harmonica.*

ARITHMETICA *proportionalitas, siue Medietas, est, quando tres, vel plures numeri per eandem differentiam progrediuntur. Vt hi numeri 4. 7. 10. 13. 16. quorum quilibet suum antecedentem ternario superat, dicuntur constituere proportionalitatem Arithmeticam. Est autem duplex, continua, & discreta. Continua est, quando in progressione numerorum nulla fit interruptio, sed quilibet cum proximè antecedente confertur, vt in dato exemplo fit. Discreta autem est, quando in numerorum progressione interruptio fit, ita vt bini tantum inter se conferantur, non autem quilibet cum proximè præcedente. Vt in his numeris contingit, 4. 7. 8. 11. 30. 33. Nam eadem differentia est inter binos 4. 7. & 8. 11. & 30. 33. non autem inter 4. 7. & 7. 8. &c.*

GEOMETRICA proportionalitas, siue Medietas est, quando tres, vel plures numeri eandem proportionem habent: quam quidem Euclides definiuit. Hac enim propriè proportionalitas dicitur siue Analogia: alia verò impropriè, cum non sit eadem semper inter earum terminos proportio, ita vt rectius Medietates dicantur, propter medios terminos, qui certa quadam ratione inter extremos interiiciuntur. Vt hi numeri, 2. 6. 18. 54. quoniam quilibet ad suum antecedentem eandem habet proportionem triplam, constituunt proportionalitatem Geometricam. Hac duplex quoque est, continua, & discreta, vt in 4. defin. huius lib. explicauimus. Continua cernitur in datis numeris, discreta autem in hisce sex, 2. 3. 12. 18. 20. 30. Nam bini tantum 2. 3. & 12. 18. & 20. 30. eandem habent proportionem sesquialteram; non autem quilibet ad proximè præcedentem.

MVSICA siue Harmonica proportionalitas, siue Medietas est, quando tres numeri ita ordinantur, vt eadem sit proportio maximi ad minimum, quæ differentia inter maiores duos ad differentiam inter duos minores: ita vt nec eadem inter eos sit differentia, vt in Arithmetica, nec eadem proportio, vt in Geometrica. Vt tres hi numeri, 3. 4. 6. quoniam eadem est proportio maximi 6. ad minimum 3. quæ differentia inter maximum 6. & medium 4. nimirum numeri 2. ad differentiam inter medium 4. & minimum 3. id est, ad 1. (cum vtrobique proportio sit dupla) constituunt proportionalitatem, siue Medietatem Musicam siue Harmonicam: Ipsi verò neque eandem habent differentiam, neque eandem proportionem, vt patet. Sic etiam tres hi numeri 42. 12. 7. Harmonicam proportionalitatem constituunt, quia eadem proportio est maximi 42. ad minimum 7. quæ differentia inter maximum 42. & medium 12. hoc est, numeri 30. ad differentiam 5. inter medium 12. & minimum 7. cum vtrobique proportio sit sextupla. Dicitur autem huiusmodi proportionalitas Musica, siue Harmonica, quia plerumque eius numeri habent proportiones eas, in quibus consonantiæ Musicæ consistunt. Vt in priori exemplo inter 6. & 4. est proportio sesquialtera, constituens consonantiam, quæ Diapente dicitur, siue Quinta. Item inter 4. & 3. est proportio sesquitertia, constituens conso-

consonantiam, quam Diatessaron, siue Quartam vocant. Denique inter extremos 6. & 3. cernitur proportio dupla, qua Diapason consonantiam, siue octauam constituit. Atque eodem modo in plerisque aliis idem cernitur.

PROPRIETATES ALIQVOT TRIVM proportionalitatum, siue Medietatum, quas explicauimus.

I.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmetica, minor est proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic patet. 2. 4. 6. Nam proportio 6. ad 4. est sesquialtera; & 4. ad 2. dupla.

AT in tribus numeris proportionalitatis Musica, maior est proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic videre. 3. 4. 6. Proportio enim 6. ad 4. est sesquialtera; & 4. ad 3. sesquitertia.

IN tribus denique numeris proportionalitatis Geometrica, eadem est proportio maximi ad medium, qua medij ad minimum, vt ex eius definitione constat, apparetq; in hisce tribus numeris 3. 6. 12. Tametsi 12. ad 6. quàm 6. ad 3. duplam habent proportionem. Qua in re Geometrica proportionalitas medium locum tuetur inter Arithmeticam, atque Harmonicam, cùm in Arithmetica inter maiores numeros minor sit proportio, quàm inter minores. Contrà verò in Harmonica inter maiores numeros maior, quàm inter minores: In Geometrica autem eadem inter maiores, qua inter minores, vt explicatum est.

II.

ARITHMETICA proportionalitas habet terminorum differentias aquales, proportiones verò eorundem inaquales.

GEOMETRICA è contrario differentias terminorum habet inaquales, proportiones verò eorundem aquales.

HARMONICA denique neque differentias, neque proportiones terminorum aquales habet: Patet hoc ex superioribus exemplis.

III.

IN tribus numeris Arithmetica proportionalitatis, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, & à maiori superatur. Vt hic, 3. 7. 11. Medius 7. superat minorem 3. quatuor vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{4}{7}$ ipsius medij 7. Item medius idem 7. superatur à maiore 11. quatuor quoque vnitatibus, quæ constituunt eiusdem medij, $\frac{4}{7}$. Item hic 15. 20. 25. medius 20. superat minorem 15. quinque vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{1}{4}$. ipsius medij 20. Item medius idem 20. superatur à maiore 25. quinque quoque vnitatibus, quæ constituunt $\frac{1}{4}$. eiusdem medij 20.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, qua parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic 4. 6. 9. medius 6. superat minorem 4. binario, qui est $\frac{1}{3}$. medij, superaturq; à maiore 9. ternario, qui quoque est $\frac{1}{3}$. maioris. Sic etiam his 9. 15. 25. vbi est continua proportio superbipartiens tertias, medius 15. superat minorem 9. sex vnitatibus, quæ faciunt $\frac{2}{5}$. ipsius medij 15. Et idem medius 15. superatur à maiore 25. decem vnitatibus, quæ efficiunt quoque $\frac{2}{5}$. ipsius maioris 25.

IN tribus denique numeris Harmonica proportionalitatis, medius eadem parte, vel partibus minoris minorem superat, qua parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic, 3. 4. 6. medius 4. superat minorem 3. vnitate, quæ est $\frac{1}{3}$. eiusdem minoris, superaturq; à maiore 6. binario, qui quoque est $\frac{1}{3}$. eiusdem maioris. Rursus in hac proportionalitate Harmonica, 42. 12. 7. medius 12. superat minorem 7. quinque vnitatibus, quæ sunt $\frac{5}{7}$. ipsius minoris 7. Et idem medius 12. superatur à maiore 42. triginta vnitatibus, quæ sunt $\frac{30}{42}$. hoc est, in minimis numeris, $\frac{5}{7}$. quoq; ipsius maioris 42.

IV.

IN tribus numeris Arithmetica proportionalitatis, summa extremorum dupla est medij. Vt hic, 3. 7. 11. summa extremorum 14. dupla est medij 7.

AT in tribus numeris proportionalitatis tam Geometricæ, quàm Harmonicæ, summa extremorum superat duplum medij numero, quo differentia maiorum differentiam minorum superat. Vt hic, 4. 6. 9. & 3. 4. 6. tam summa 13. extremorum 4. 9. superat duplum medij 6. hoc est, 12. vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 3. superat 2. differentiam minorum, quam summa 9. extremorum 3. 6. duplum medij 4. id est, 8. superat vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 2. superat differentiam minorum, qua est 1. Sic etiam hic, 9. 15. 25. vbi est continua proportio superexbipartiens tertias, summa 34. extremorum 9. 25. superat duplum medij 15. hoc est, 30. numero 4. quo eodem differentia maiorum, 10. differentiam minorum, 6. superat. Item in hac proportionalitate Harmonica, 42. 12. 7. summa 49. extremorum duplum medij 12. id est, 24. superat numero 25. quo differentia maiorum 30. superat differentiam minorum 5.

V.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, extremi inter se multiplicati procreant numerum, qui à quadrato medij superatur numero, qui fit ex differentia minorum in maiorum differentiam. Vt hic 3. 7. 11. numerus 33. factus ex 3. in 11. superatur à 49. quadrato medij, numero 16. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, numerus

ex primo in tertium genitus quadrato medij æqualis est, vt hic, 4. 6 9. Extremi inter se multiplicati faciunt 36. quadratum medij.

IN tribus numeris denique Harmonica proportionalitatis, numerus ex multiplicatione extremorum inter se genitus superat quadratum medij numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum. Vt hic 42. 12. 7. numerus 294. factus ex 42. in 7. superat 144. quadratum medij numero 150. qui fit ex differentia 30. in differentiam 5. Qua in re etiam medium locum obtinet Geometrica proportionalitas inter Arithmeticam, & Harmonicam; quippe cùm in Arithmetica minus producatur ex primo in tertium, quam ex medio in se, in Harmonica verò plus, & in Geometrica idem numerus gignatur.

VI.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmetica, summa extremorum in medium ducta producit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum duplicatam. Vt hic, 3. 7. 11. Summa extremorum 14. in medium 7. facit 98. qui numerus superat numerum 66. qui duplus est producti 33. ex primo in tertium, numero 32. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4. duplicatam, hoc est, in 8.

IN tribus autem numeris Geometrica proportionalitatis summa extremorum in medium multiplicata gignit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum. Vt hic 4. 6. 9. Summa 13. extremorum in medium 6. facit 78. qui numerus duplum producti ex 4. in 9. id est, 72 superat numero 6. ex differentia 2. in differentiam 3 geniti.

DENIQVE in tribus numeris proportionalitatis Harmonicæ, ex summa extremorum in medium procreatur numerus duplus producti ex primo in tertium. Vt hic 3. 4. 6. Ex summa extremorum 9. in medium 4. fit numerus 36. duplus producti 18. ex 3. in 6.

VII.

QVATVOR numeris in proportionalitate Geometrica non continuè proportionalibus datis, si secundus est inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, erit tertius inter eosdem extremos medius in Harmonica proportionalitate: Et si secundus medius est in proportionalitate Harmonica, erit tertius in Arithmetica medius. Vt hic, 6. 9. 8. 12. quoniam ita est 6. ad 9. vt 8. ad 12. Et sunt 6. 9. 12 proportionales Arithmeticè, cùm eundem habeant excessum 3. vides 6. 8 12. Harmonicè proportionales esse, cùm eadem sit proportio 12. ad 6. quæ differentia maiorum, 4. ad 2. differentiam minorum. Item hic, 6. 8. 9. 12. quia ita est 6. ad 8. vt 9. ad 12. Et sunt 6. 8. 12. proportionales Harmonicè, vt diximus, vides 6. 9. 12. Arithmeticè esse proportionales, cùm eundem excessum 3. habeant.

ITEM quatuor numeris datis, quorum alteruter mediorum sit inter

inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica; erunt quatuor dati numeri Geometricè non continuè proportionales. Vt quia datis his 4. numeris, 4.6.8.12. tertius 8. medius est Arithmeticè inter extremos 4.12. & secundus 6. inter eosdem extremos 4.12. medius est Harmonicè; videsne ita esse 4. ad 6. & 8. ad 12. Et 4. ad 8. & 6. ad 12.

VIII.

PROPOSITIS quotquot numeris continuè proportionalibus sive Arithmeticè, sive Geometricè, sive Harmonicè, (continuantur autem plures numeri in proportionalitate Harmonica, quando tres primi sunt Harmonicè proportionales, item tres primum insequentes, relicto primo; & relictis primis duobus, alij tres, qui sequuntur; nec non primis tribus relictis, subsequentes tres, & sic deinceps.) erunt in eadem proportionalitate constituti numeri, qui in locis tam imparibus, quàm paribus, atque etiam partim in imparibus, partim in paribus alternis locantur, dummodò aqualis multitudo numerorum inter quosvis impares, & pares, vel inter partim impares, partim pares alternis interjaciantur: cuiusmodi sunt primus, tertius, quintus, septimus, &c. Item secundus, quartus, sextus, &c. Praterea primus, quartus, septimus, &c. Insuper primus, quintus, nonus, &c. atq; ita deinceps. Id quod in exemplis, qua sequuntur, perspicuum est.

PROPORTIONALITATES Arithmeticæ.

3.	7.	11.	15.	19.	23.	27.	31.	35.	39.	43.	47.	51.	55.	59.
3.		11.		19.		27.		35.		43.		51.		59.
	7.		15.		23.		31.		39.		47.		55.	
3.			15.			27.			39.			51.		
	7.			19.			31.			43.			55.	
3.				19.			35.			51.				

Proportionalitates Geometricæ.

5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120	10240	20480	40960
5		20		80		320		1280		5120		20480	
	10		40		160		640		2560		10240		40960
5			40			320			2560			20480	
	10			80			640			5120			40960
5				80				1280				20480	

Propor-

Proportionalitates Harmonicæ.

252	280	315	360	420	504	630	840	1260	2520	
252		315		420		630		1260		
	280		360		504		840		2520	
252			360			630			2520	
	280			420			840			
252				420				1260		

IX.

QVOTQVOT numeris proportionalibus dati sive in Arithmetica proportionalitate, sive Geometrica, aut Harmonica, si singuli per aliquem numerum eundem multiplicentur, aut dividantur, habebunt quoque producti numeri, vel Quotientes proportionalitatem Arithmeticam, vel Geometricam, aut Harmonicam. Vt hic vides singulos multiplicatos per 4. Item divisos per 4.

Arithmetica prop.		
20	28	36
Producti.		
80	112	144
Quotientes.		
5	7	9

Geometrica prop.		
20	40	80
Producti.		
80	160	320
Quotientes.		
5	10	20

Harmonica prop.		
60	84	140
Producti.		
240	336	560
Quotientes.		
15	21	35

CÆTERVM in Geometrica, & Harmonica proportionalitate, numeri producti, & Quotientes retinent eandem speciei proportionem, quam numeri multiplicati, aut divisi habent: At in Arithmetica non seruant eandem differentiam: Sed producti numeri habent differentiam differentiæ multiplicatorum numerorum multiplicem à numero multiplicante denominatum. Vt in dato exemplo quadruplam. Differentia enim inter 20. & 28. est 8. at inter 80. & 112. est 32. Quotientum verò differentia ad differentiam numerorum divisorum habet proportionem submultiplicem à divisore denominatam, præposita particula, sub. Vt in dato exemplo subquadruplam. Nam differentia inter 20. & 28. est 8. at inter 5. & 7. est 2. Eadem proportio differentiarum inter productos numeros, & multiplicatos, atque inter Quotientes, numerosq; divisos reperitur in proportionalitate Geometrica, & Harmonica: Ita vides differentias numerorum 80. 160. 320. Item numerorum 240. 336. 560. quadruplas esse differentiarum inter numeros 20. 40. 80. & inter numeros 60. 84. 140. At verò differentias numerorum 5. 10. 20. & numerorum 15. 21. 35. esse earundem differentiarum subquadruplas.

DE

DE PROPORTIONALITATE Arithmetica.

I.

DATIS duobus numeris quibuscunque, si eorum differentiam maiori addas, habebis tertium terminum in proportionalitate Arithmetica Vtroque dato maiorem. Et si eandem differentiam huic tertio addas, conficies quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps reperies infinitos alios semper maiores, si differentiam Vltimo inuento semper adijcias. Vt datis duobus numeris 4. 11. quorum differentia est 7. constituetur hac proportionalitas Arithmetica, quae extendi potest in infinitum.

4. 11. 18. 25. 32. 39. 46. 53. 60. 67. &c.

Quod si eandem differentiam à minori subtrahas, quando subtrahi potest, habebis rursus tertium terminum in eadem proportionalitate: Vtroq; minorem: Et si differentiam eandem à tertio detrahas, reliquus fiet quartus adhuc minor in eadem proportionalitate. Atq; ita deinceps inuenies alio minores, si differentiam ab Vltimo inuento semper demas, donec subtractio amplius fieri nequeat. Vt datis numeris 30. 34. quorum differentia est 4. constituetur hac proportionalitas Arithmetica Vsq; ad 2. quae Vlterius progredi nequit, cum differentia 4. amplius subtrahi nequeat à 2.

34. 30. 26. 22. 18. 14. 10. 6. 2.

EADEM proportionalitas extendetur, etiamsi differentia non assumatur, hoc modo. Datis duobus numeris, à maiore duplicato detrahe minorem. Reliquus enim numerus erit tertius terminus Vtroque dato maior. A quo duplicato si proximè precedentem subtrahas, habebis quartum; & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 4. 15. si à 15. duplicato, hoc est, à 30. subtrahas 4. reliquus erit tertius terminus 26. Ab huius duplo 52. si quoque demas 15. habebis quartum terminum 37. & sic deinceps, Vt hic apparet 4. 15. 26. 37. 48. &c.

RVRSVS datis duobus numeris; si ex duplo minoris detrahas maiorem, relinquetur tertius numerus Vtroque minor. Et si ex huius duplo proxime precedentem demas, relinquet quartum terminum adhuc minorem; & sic deinceps, donec amplius subtractio fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 20. 27. si ex 20. duplicato, id est, ex 40. detrahas 27. reliquus fiet tertius terminus 13. Ab huius duplo 26. si quoque detrahas 20. manebit quartus terminus 6. Et quia ab huius duplo 12. precedens terminus 13. subtrahi non potest, non poterit proportionalitas Vlterius progredi, Vt hic vides. 27. 20. 13. 6.

QVAN-

II.

QVANDO terminorum numerus est impar, summa extremorum aqualis est summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis aqualiter distantium, dupla autem medij termini, à quo extremi aqualiter distant. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28.

Summa 4. & 28. *Item* 7. & 25. *Item* 10. & 22. *Item* 13. & 19. *Item duplum medij termini* 16. *semper est* 32.

QVANDO autem numerus terminorum est par, summa extremorum aqualis semper est summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis aqualiter remotorum. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31.

Summa 4. & 31. *Item* 7. & 28. *Item* 10. & 25. *Item* 13. & 22. *Item* 16. & 19. *semper est* 35.

ITAQVE quando numerus terminorum impar est, habebit summa omnium terminorum ad medium terminum ab extremis aqualiter distantem, hoc est, ad semissem summæ extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis aqualiter distantium, proportionem multiplicem à numero terminorum denominatam. Cùm enim summa extremorum, vel quorumlibet duorum ab extremis aquali internallo distantium, dupla sit termini medij, continebitur medius terminus, siue semissis summa extremorum, in summa omnium terminorum toties, quot sunt termini; semel quidem in ipso medio termino, & bis in qualibet summa duorum à medio termino aqualiter distantium: ac proinde omnium terminorum summa ad semissem aggregati extremorum, hoc est, ad medium terminum, proportionem habebit multiplicem, cuius denominator est numerus terminorum. Vt in hac serie nouem numerorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30.

Summa omnium terminorum continebit medium terminum 18: *hoc est, semissem summæ extremorum* 6. & 30. *toties, quot vnitates sunt in* 9. *numero terminorum, id est, summa omnium terminorum ad* 18. *semissem summæ extremorum, siue ad medium terminum, proportionem habebit nonuplam. Eadem q, in cæteris est ratio.*

SVMMAM igitur omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus impar est, facilè inueniemus, si semissem aggregati extremorum, (quod semper par est, quando terminorum numerus est impar) per numerum terminorum multiplicemus. Vt in hac serie 11. *terminorum.* 7. 19.

7. 19. 31 43. 55. 67. 79. 91. 103. 115. 127.

Summa extremorum est 134. Cuius semissis 67. quæ à medio termino 67. non differt, in 11. numerum terminorum ducta producit 737. summam omnium terminorum. Atq; hac ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est par: sed quando extremorum summa impar est (quando enim terminorum numerus est par, potest esse summa extremorum impar, non autem semper par) erit eius semissis, numerus integer cum $\frac{1}{2}$.

QVANDO autem terminorum numerus est par, habebit summa omnium terminorum ad summam extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium proportionem multiplicem à semisse numeri terminorum denominatam. Cùm enim summa quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium æqualis sit summa extremorum, continebitur hac summa extremorum toties in summa omnium terminorum, quoties vnitas in dimidiato numero terminorum continetur, semel nimirum in summa quorumlibet duorum ab extremis distantium æqualiter: atque idcirco summa omnium terminorum ad summam extremorum proportionem habebit multiplicem à dimidiato numero terminorum denominatam. Vt in hac serie 10. terminorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33.

Summa omnium terminorum summam extremorum 6. & 33. quæ est 39. continebit quinquies, hoc est, summa omnium terminorum ad 38. summam extremorum habebit proportionem quintuplam. Et sic de alijs.

SVMMAM ergo omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus par est, obtinebimus, si summam extremorum in dimidiatum numerum terminorum (qui terminorum numerus dimidium habebit sine fractione vnitatis, cùm par ponatur) ducamus. Vt in hac serie 10. terminorum.

6. 11. 16. 21. 26. 31. 36. 41. 46. 51.

Summa extremorum est 57. quæ in 5. semissem numeri terminorum ducta efficit 285. summam omnium terminorum. Hac ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est impar: sed semissis numeri terminorum semper erit integer cum $\frac{1}{2}$. *numerus terminorum ponatur impar.*

VIDES igitur satis esse, vt summa inueniatur, si extremi termini, vnà cum terminorum numero cogniti sint. Quo facto autem ex cognito altero extremorum terminorum numero, atq; differentia, in cognitionem alterius extremi peruenire possimus, iamiam docebimus.

Si in

III.

SI in proportionalitate Arithmetica quotuis terminorum alterum extremorum, numerum terminorum, & differentiam cognoscamus, reperiemus alterum extremum, hoc modo. Numerum proximè minorem numero terminorum in differentiam datam ducemus, & productum minori extremo cognito adijciemus, vel eundem numerum productum ex maiore extremo noto detrahemus. Nam ubi conficiemus maius extremum, quod quæritur, hic autem reliquum fiet minus extremum ignotum. Exempli causa. Si proponatur minus extremum notum 4. numerus terminorum 12. & differentia 5. multiplicabimus 11. nimirum numerum proximè minorem terminorum numero, per differentiam datum 5. productoq; 55. minus extremum 4. adijciemus. Summa enim 59. erit extremum maius. Vt in his 12. terminis manifestum est, quorum differentia est 5.

4. 9. 14. 19. 24. 29. 34. 39. 44. 49. 54. 59.

Si verò proponatur maius extremum notum 59. & idem terminorum numerus 12. cum differentia eadem 5. auferemus numerum 55. productum ex 11. numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam 5. ex noto maiore extremo 59. Reliquus enim numerus 4. erit minus extremum. Vt in eodem exemplo perspicuum est.

NECESSE autem est, si minus extremum inquiratur, numerum productum ex numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam, maiorem esse maiore extremo cognito, vt subtractio fieri possit. Alioquin quæstio erit impossibilis: hoc est, fieri non poterit, vt datus numerus possit esse maius extremum in progressione illa, cuius differentia, & numerus terminorum ita se habeant, vt proponuntur. Vt si quis daret maius extremum 20. numerum terminorum 6. & differentiam 5. non posset inueniri minus extremum; propterea quòd numerus 25. productus ex 5. qui proximè minor est terminorum numero 5, in differentiam 5. maior est dato maiore extremo 20. Quod si quando contingat, productum illum numerum maiori extremo esse æqualem, ita vt subtractione facta, relinquatur 0. erit quidem quæstio possibilis, sed minus extremum erit 0. Vt si in posteriori hoc exemplo maius extremum proponeretur 25. fieret hæc proportionalitas Arithmetica.

0. 5. 10. 15. 20. 25.

IV.

SI extremi termini noti sint, vna cum numero terminorum, reperiemus differentiam numerorum hoc pacto. Dempto minore extremo a maiore, diuidemus reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Nam Quotiens erit differentia quæsita. Vt si quis dicat, esse 10. terminos proportionalitatis cuiusplam Arithmeticæ, cuius numeri extremi sint 7. & 52 Dempto minore extremo 7 ex ma-

ex maiore 52. reliquum numerum 45. partiemur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 5. erit differentia, qua quæritur, vt hic apparet.

7. 12. 17. 22. 27. 32. 37. 42. 47. 52.

VERVM vt fractiones vitentur, progressioq; propositæ locum habeat in numeris integris, necesse est, minore extremo detracto ex maiore, vt reliquum numerus possit numerari à numero, qui terminorum numero proximè minor est. Si enim non numeretur, differentia inuenta erit vel fractio, vel numerus integer cum fractione: quæstio tamen erit possibilis. Vt si quis proponat extremos terminos 2. & 38. & numerum terminorum 9. Demptis 2. ex 38. & reliquo numero 36. diuiso per 8. reperitur differentia $4\frac{1}{2}$. vt patet in hoc exemplo.

2. $6\frac{1}{2}$. 11. $15\frac{1}{2}$. 20. $24\frac{1}{2}$. 29. $33\frac{1}{2}$. 38.

V.

SI duo termini extremi, vnà cum differentia, noti sint, elicietur numerus terminorum hac ratione. Detracto minore extremo à maiore, partiemur reliquum numerum per differentiam. Nam si Quotienti adijciamus 1. conflabimus numerum terminorum quæsitum. Vt datis duobus extremis 10. & 40. cum differentia 3. Ablatis 10 ex 40. & reliquo numero 30 diuiso per 3. fit Quotiens 10. Additis ergo 1. fit numerus terminorum 11. vt hic videre licet.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34. 37. 40.

SED vt quæstio proposita sit possibilis, hoc est, vt verè in rerum natura existat progressio aliqua, quæ habeat omnes conditiones propositas, necesse est, maiore extremo subducto ex maiore, reliquum numerum à differentia numerari. Si enim non numeretur, Quotiens non erit numerus integer, ac proinde indicare non poterit numerum terminorum, etiamsi addatur 1. Fieri enim non potest, vt detur progressio aliqua, cuius terminorum numerus non sit integer.

VI.

SI duo extremi termini, vnà cum omnium terminorum summa, noti sint, explorabimus, & numerum terminorum, & differentiam, hac arte. Summam omnium terminorum per extremorum summam partiemur. Quotiens enim dabit dimidiatum numerum terminorum, & duplicatus totum numerum indicabit. Inuento autem terminorum numero, cum & duo extremi termini cogniti sint, inuenemus differentiam, vt in 4. regula traditum est; si nimirum minore extremo dempto ex maiore, reliquum numerum diuidamus per numerum

numerum proximè minorem numero terminorũ inuento. Verbi gratia. Si summa proponatur 515. & extremi termini 20 & 83. diuidemus summam 515. per 103. summam extremorum. Quotiens enim 5. duplicatus dabit numerum terminorum 10. quorum differentiam obtinebimus, si dempto minore extremo 20. ex maiore 83. reliquum numerum 63. partiamur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum inuento. Nam Quotiens 7. erit differentia, vt hic cernis.

20. 27. 34. 41. 48. 55. 62. 69. 76. 83.

Vides ergo, vt quæstio sit possibilis, hoc est, vt re vera existat aliqua progressio, in qua omnium terminorum summa, & duo extremi ita se habeant, vt proponitur, necesse esse, vt summa omnium terminorum data à summa extremorum numeretur. Alioquin terminorum numerus erui non poterit, si Quotiens non sit numerus integer: Vel certè, si summa omnium terminorum data à summa extremorum non numeretur, necesse esse, vt diuisa summa omnium terminorum per extremorum summam, Quotiens sit numerus integer cum $\frac{1}{2}$. vt nimirum duplicatus efficere possit numerum terminorum integrum.

VII.

SI trium terminorum extremi habeant proportionem duplam, medius ad differentiam habebit triplam proportionem. Si verò extremorum propertio maior sit quàm dupla, proportio medij ad differentiam minor erit quàm tripla: Si denique minor sit extremorum proportio quàm dupla, maior erit proportio medij ad differentiam, quàm tripla. Vt hic, 8. 12. 16. proportio extremorum 16. & 8. est dupla: & medij 12. ad differentiam 4. tripla. Hic autem, 8. 14. 20. proportio inter extremos 20. & 8. est dupla sesquialtera, nimirum maior quàm dupla: & medij 14. ad differentiam 6. dupla sesquitertia, minor videlicet, quàm tripla. Hic denique 8. 11. 14. extremi 14. & 8 proportionem habent supertripartientem quartas, qua minor est quàm dupla: & medius 11. ad differentiam 3. triplam superbipartientem tertias, hoc est, maiorem quàm triplam.

VIII.

INTER quosuis duos numeros constitues medium proportionalem Arithmeticè, si eorum summa accipias semissem. Vt datis duobus numeris 6. & 30. summa eorum est 36. Huius ergo semissis 18. medio loco proportionalis est Arithmeticè inter 6. & 30. Vt hic manifestum est. 6. 18. 30. Itaque si medius terminus constituendus sit numerus integer, necesse est, vtrumque numerorum datorum esse vel parem, vel imparem, vt videlicet summa extremorum semper sit par, hoc est, vt possit habere dimidiũ sine fractione vnitatis. Nam quando sum-

ma extremorum impar est: quod accidit cùm alter extremorũ par est, & alter impar, erit medius terminus integer numerus cum semisse vnitatis. Vt datis numeris duobus 8. 25. summa eorum est 33. Huius ergo dimidium $16\frac{1}{2}$. medius terminus erit hoc modo, 8. $16\frac{1}{2}$. 25.

IX.

INTER quosuis autem duos numeros constitues, quotquot quis iusserit, medios proportionales Arithmeticè, hoc modo. Minorem detrahe ex maiore: Reliquum deinde numerum partire per numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum. Quotiens enim erit differentia proportionalitatis Arithmeticæ, quam si minori numero proposito adijcias, constabit primum medium. Huic si eandem differentiam addas, conficies secundum, & sic deinceps. Vel si eam differentiam à maiori numero proposito subtrahas, relinquetur vltimus medius. A quo si eandem differentiam demas, remanebit penultimus, & sic deinceps. Veluti si inter 6. & 114. constituendi sint 11. termini medij, detrahemus 6. ex 114. Reliquum numerum 108. per 12. (qui numerus proximè maior est numero mediorum constituendorum) partiemur. Quotiens enim 9. erit differentia terminorum proportionalitatis. Sic ergo se habebunt 11. termini medij inter 6. & 114.

6. 15. 24. 33. 42. 51. 60. 69. 78. 87. 96. 105. 114.

SED quoniam plerunque tales duo numeri proponuntur, inter quos nõ possunt cadere numeri integri medij proportionales, propterea quòd inuentus Quotiens pro differentia non semper numerus integer est; si fractiones vitare velis, necesse est, duos propositos numeros esse eiusmodi, vt dempto minore ex maiore, reliquus à numero, qui proximè maior est numero mediorum constituendorum, numeretur: quos ita facilè reperies. Accipe pro minore extremo quemcunque numerum, eumque adde cuicunque alij numero, quem numerus proximè maior numero mediorum inuestigandorum metitur. Conflatus enim numerus maius extremum proportionalitatis erit. Vt si velis duos numeros, inter quos cadant 8. numeri proportionales Arithmeticè primus autem sit, verbi gratia 7. Adde hunc numerum 7. ad quemuis numerum, quem nouenarius, (qui proximè maior est numero mediorum constituendorum) metitur, nimirum ad 72. conficiesque maius extremum 79. Differentiam autem inuenies, vt dictum est, detrahendo 7. ex 79. & reliquum numerum 72. per 9. diuidendo. Quotiens enim 8. erit differentia, vt hic vides.

7. 15. 23. 31. 39. 47. 55. 63. 71. 79.

QVOD

QVOD si quis proponat & minus extremum, & differentiam proportionalitatis, inuenies maius extremum, ita vt inter minus, & maius cadant quotus medij numeri habentes illam differentiam, si numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum per datum differentiam multiplices, numeroq; producto minus extremum addas. Vt si quis velit inter 5. & quempiam maiorem numerum constituere 9. terminos medios, quorum differentia sit 4. Multiplicanda erunt 10. per 4 & producto numero 40. addendum minus extremum 5. Nam inter conflatum numerum 45. & datum minus extremum 5. intercipiuntur 9. medij termini cum differentia data 4. Vt hic manifestum est.

5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45.

HAC alia etiam iucunda operatione constitues quotus medios proportionales inter datos duos numeros. Vtrumque datorum numerorum partire per numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum: Quotientes sub illis colloca, quemque sub suo, & ab eisdem Quotientibus ascende per continuam eorum additionem addendo primo quemque ad seipsum, deinde ad numerum conflatum, atque ita deinceps, ita vt duas proportionalitates Arithmeticas instituas à Quotientibus incipientes, & per eosdem progredientes: tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini desiderantur. Postremo adde singulos terminos vnius ordinis singulis terminis aduersis alterius ordinis, id est, maximum vnius minimo alterius; proximum deinde sub illo, proximo supra hunc, &c. Numeri enim conflati dabunt medios optatos. Exempli gratia. Sint inter 15. & 100. constituendi 4. medij termini Arithmeticè proportionales. Vtroque diuiso per 5. hoc est, per numerum proximè maiorem numero mediorum, fiunt Quotientes 3. & 20. Constitues ergo hos ordines 4. terminorum sub 15. & 100. Arithmeticè proportionalium per eandem Quotientum continuam additionem, addendo primùm 3. ad 3. vt fiant 6. Item 3. ad 6. vt fiant 9. Item 3. ad 9. vt fiant 12. Rursus addendo 20. ad 20. vt fiant 40. Item 20. ad 40. vt fiant 60. Item 20. ad 60. vt fiant 80. vt hic vides.

15	32	49	66	83	100
12					80
9					60
6					40
3					20

EX 12. supremo primi ordinis, & ipsimo 20. secundi ordinis fiunt

32. pro primo medio. Ex 9. & 40. fiunt 49. pro secundo medio. Ex 6. & 60 fiunt 66. pro tertio medio. Deniq; ex 3. & 80. fiunt 83. pro quarto medio. Itaq; in primo ordine semper descendendum est à supremo ad infimũ & sq; in secundo verò ab infimo ad supremũ & sq; ascendendum.

EST autem dignum consideratione, differentiam Quotientum, qui sunt minimi numeri duorum ordinum constitutorum, esse quoq; differentiam proportionalitatis constituendæ. Ita vides differentiam in proposito exemplo esse 17. quæ differentia etiam est inter Quotientes 3. & 20. Quocirca, inuentis Quotientibus, si minor à maiore subtrahatur, & reliquum numerus minori extremo dato adijciatur, & huic composito numero idem ille numerus reliquus addatur, & ita deinceps, constituentur ijdem termini medij, etiamsi duo illi ordines non instituantur.

VIDES ergo, vtrumque numerum propositum numerari debere à numero, qui numerum mediorum vna vnitate superat, si fractiones euitandæ sint: Vel certè inueniendos esse duos extremos, vt in prioris parte huius regulæ præcepimus. In ijs enim fractiones quoque vitantur, etiamsi eos numerus numero mediorum proximè maior non numeret: quia minore Quotiente detracto ex maiore, semper numerus integer relinquitur; vt ex exemplis prioris illius regulæ apparet. Nam in tertio eorum verbi gratia, inter 5. & 45. constituendi sunt 9. termini medij. Si igitur 5 terque per 10. diuidatur, fiunt Quotientes $\frac{5}{10}$. & $\frac{45}{10}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. quorum differentia est 4. numerus integer, ex cuius continua additione ad minus extremum datum medij termini aptati conficiuntur: qui ijdem reperientur, si per Quotientes $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. duo ordines instituantur ascendentes, vt dictum est, per ipsorum Quotientum additionem continuam, &c.

X.

NVMERVM quemlibet propositum distribuemus in partes, quotquot quis iusserit, proportionalitatem Arithmeticam seruantes, hac ratione. Diuiso dato numero per semissem numeri terminorum, secabimus Quotientem in duas partes inæquales vtcunque, pro extremis terminis proportionalitatis. Deinde quia iam dati sunt duo termini extremi, cum numero terminorum, detrahemus minus extremum ex maiore, partiemurque reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Ita namque prodibit in Quotiente differentia, vt ex 4. regula patet. Si igitur hac differentia addatur minori extremo assumpto, deinde ad numerum conflatum, atque ita deinceps, constituetur numerus terminorum datus, quorum summa proposito numero æqualis est: ac proinde datus numerus in numerum partium Arithmeticè proportionalium sectus erit. Exempli causa, si numerus 830. distribuendus sit in 10. partes proportionales Arithmeticè; partiemur eum per 5. semissem terminorum, Quotien-

tientemque 166. secabimus in 20. & 146. terminos extremos proportionalitatis constituenda. Deinde deductis 20 ex 146. numerum reliquum 126. dividemus per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 14. (vt in 4. regula dictum est) differentia erit proportionalitatis. Vt hic vides.

20. 34. 48. 62. 76. 90. 104. 118. 132. 146.

Rursus si numerus 10. dividendus sit in 10. partes proportionales Arithmeticè, dividemus eum per 5 semissem terminorum: Quotientem verò 2. in duas partes inaequales secabimus $\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{2}$. pro extremis terminis proportionalitatis. Dempto deinde minore extremo $\frac{1}{2}$. ex maiore $1\frac{1}{2}$. partiemur reliquum 1 per 9. numerum proximè minorem numero partium constituendarum Quotiens enim $\frac{1}{9}$ differentia erit continuè addenda minori extremo $\frac{1}{2}$. & numero conflato, &c. Quae additio, vt facilior fiat, reducemus minus extremum $\frac{1}{2}$ & differentiam $\frac{1}{9}$. ad eandem denominationem, vt ad $\frac{9}{18}$. & $\frac{2}{18}$. Sic ergo divisus erit numerus 10. in 10. partes Arithmeticè proportionales, quarum prima est $\frac{1}{2}$. sive $\frac{9}{18}$. Ultima verò $1\frac{1}{2}$. sive $1\frac{9}{18}$. & differentia $\frac{2}{18}$.

$\frac{9}{18}$. $\frac{11}{18}$. $\frac{13}{18}$. $\frac{15}{18}$. $\frac{17}{18}$. $1\frac{1}{18}$. $1\frac{7}{18}$. $1\frac{5}{18}$. $1\frac{7}{18}$. $1\frac{9}{18}$.

Certum autem est, hac ratione variis modis datum numerum dividi posse in propositum numerum partium proportionalium, prout videlicet, diviso dato numero per semissem numeri terminorum, Quotiens in alias partes binas inaequales pro terminis extremis sectus fuerit.

IDEM efficiemus hac ratione. Numero dato, ac si esset summa omnium terminorū constituendorum, diviso per numerum terminorum datū, dabit Quotiens duplicatus summam extremorū: propterea quod huius extremorum summa semissis, id est, Quotiens inventus ductus in numerum terminorum, hoc est, in divisorem, producit summam omnium terminorum, nimirum datum numerum, vt in secunda regula dictum est. Quare si Quotientem duplicatum in duos numeros inaequales secemus pro terminis extremis: & minore detracto ex maiore, reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum dato dividamus, dabit Quotiens differentiam, vt in 4. regula diximus. Quam si ad minus extremum factum adiiciamus, & iterum ad conflatum numerum, & sic deinceps, constituta erit proportionalitas Arithmetica, qua imperatur. Veluti, si numerus 198. secandus proponatur in 9. partes Arithmeticè proportionales, partiemur eum per 9. terminorum numerum, vt fiat Quotiens 22. qui duplicatus dabit 44. summā extremorū. Constituto igitur

minore extremo 10. ac proinde maiore 34. si detrahamus 10. ex 34. & reliquum numerum 24. per 8. numerum proximè minorem numero terminorum partiamur, gignetur differentia 3. Sic ergo stabunt 9. termini proportionalitatis Arithmeticæ conficientes summam 198.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

Hic etiam manifestum est, cuiuis medijs datum numerum distribui posse in datum numerum partium, prout videlicet Quotiens primus duplicatus, quem summam esse diximus extremorum, in alias atq; alias partes binas sectus fuerit pro extremis duobus terminis.

SED fortasse facilius (quanquam operatio aliquantò longior sit) idem hoc absolues hac ratione: Cape tot numeros Arithmeticè quotcunq; proportionales, in quot partes datus numerus distribuendus est, & singulos in datum numerum duc, procreatosq; numeros per summam omnium terminorum sumptorum ex 2. regula inuentam, partire. Quotientes enim dabunt partes, quas quæris. Verbi gratia. Sit dividendus numerus 525. in 10. partes proportionales Arithmeticè. Sume 10. numeros Arithmeticè proportionales quoscunque, 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. quorum summa est 175. Ductis autem singulis in datum numerum 525. creabuntur hi 10. numeri, 2100. 3675. 5250. 6825. 8400. 9975. 11550. 13125. 14700. 16275. quibus singulis diuisis per summam 175. tuorum numerorum in proportionalitate Arithmetica acceptorum, gignentur ha 10. partes, quas quæris.

12. 21. 30. 39. 48. 57. 66. 75. 84. 93.

IDEM obtinebit, si datum numerum per assumptorum numerorum summam partiaris, Quotientemq; in singulos assumptos numeros ducas. Producti enim numeri dabunt partes, quas quæris. Vt in dato exemplo, si datus numerus 525 diuidatur per 175. summam assumptorum numerorum, fit Quotiens 3. quo ducto in singulos numeros assumptos, 4. 7. 10. &c. gignetur eadē partes, quas prius, 12. 21. 30. &c.

Vt autem operatio fiat facilior, ac brevior, satis est, priores duos numeros proportionalitatis acceptā multiplicare per datum numerū, productosque numeros per summam omnium terminorum eiusdem accepta proportionalitatis partiri. Vel satis est, dato numero per summam assumptorum numerorum diuiso, Quotientem in duos priores assumptos numeros ducere. Ita enim reperientur prima dua partes numeri dati, quarum differentia addita maiori, fiet tertia, & eadem differentia addita tertiæ faciet quartam, & sic deinceps. Liquidò autem hic quoque constare puto, datum numerum cuiuis modu distribui posse in partes, quotquot quis imperauerit, proportionales: prout scilicet alij atq; alij numeri eiusdem proportionalitatis Arith-

Arithmetica fuerint assumpti, vel quorum alia atque alia sit differentia.

HAC via partes inuenta habent ordinatim eadem proportiones inter se, qua inter terminos proportionalitatis assumptos eodem ordine reperiuntur. Perpetuo autem singuli numeri accepta proportionalitatis ad singulas partes inuentas, primus ad primam, secundus ad secundam, &c. eandem omnino habent proportionem. Sic vides, inter primas partes inuentas 12. 21. esse proportionem supertripartientem quartas, qualis est inter primos numeros acceptos 4. 7. &c. Item 4. ad 12. & 7. ad 21. & 10. ad 30. &c. habere eandem prorsus proportionem, nimirum subtriplam.

ITAQVE, si accipiatur proportionalitas Arithmetica, cuius primi duo numeri habeant proportionem duplam, ita vt primus sit differentia omnium terminorū, habebunt prima partes duplam quoq; proportionem, atque ideo prima erit quoque differentia, ex cuius additione alia partes coaceruentur. Vt si in superiore exemplo accepisses hos 10. terminos, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. quorum summa est 55. Vel hos 10. numeros, 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. quorum summa est 165. multiplicassesque primum quemque in datum numerum 525. & productos numeros 525. 1575. per summam quemlibet propriam, vt priorem per 55. & posteriorem per 165. diuisisses, inuenisses primam partem $9\frac{6}{11}$. qua eadem esset differentia. Quare partes omnes 10. constituentes proportionalitatem Arithmeticam fuissent ha.

$9\frac{6}{11}$. $19\frac{1}{11}$. $28\frac{7}{11}$. $38\frac{2}{11}$. $47\frac{8}{11}$. $57\frac{3}{11}$.
$66\frac{9}{11}$. $76\frac{4}{11}$. $85\frac{10}{11}$. $95\frac{5}{11}$.

DE PROPORTIONALITATE Geometrica.

I.

DATIS quibusuis duobus numeris, si denominatorem proportionis, quam habent, conferendo maiorem cum minore, hoc est, si diuisso maiore per minorem, Quotientem ducas in maiorem, gignes tertium terminum in proportionalitate Geometrica vtroque dato maiorem. Et si eundem denominatorem, siue Quotientem in hunc tertium ducas, produces quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps constitues infinitos alios semper maiores, si denominatorem, Quotientemue per vltimum inuentum semper multiplices. Vt datis duobus numeris 4. 12. denominator proportionis 12. ad 4. est 3. quod diuisis 12. per 4. Quotiens fiat 3. Si igitur ducas 3. in 12. & iterum in productum, & sic in infinitum, constitues hanc proportionalitatem Geometricam, qua in infinitum potest extendi.

4. 12. 36. 108. 324. 972. 2916. 8748. &c.

Quod si minorem cum maiore conferas, & denominatorem proportionis, quam habent, id est, diuiso minore per maiorem, Quotientem ducas in minorem: Vel, quod idem est, per denominatorem proportionis, quam maior ad minorem habet, diuidas minorem, creabitur tertius numerus proportionalis vtroque minor. Ex quo eadem via reperies quartum adhuc minorem, & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 8. 16. denominator proportionis 8. ad 16. est $\frac{1}{2}$. quod diuisis 8. per 16. Quotiens fiat $\frac{1}{2}$. Denominator autem proportionis 16. ad 8. est 2. quod diuisis 16. per 8. Quotiens fiat 2. Si igitur ducas $\frac{1}{2}$. in 8. Vel diuisis 8. per 2. idemque cum producto numero facias, constituetur hac proportionalitas Geometrica, progrediens quoque in infinitum versus minores numeros, sicut illa in infinitum versus maiores numeros progrediebatur.

16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{64}$. &c.

EXTENDETVR quoq; eadem proportionalitas in infinitum, etiamsi denominator proportionis ignotus sit, hoc modo. Datis duobus numeris, duc maiorem in se, & productum per minorem diuide. Quotiens enim erit tertius terminus vtroque maior. Hunc si iterum in se ducas, productumque per proximè precedentem terminum diuidas, dabit Quotiens quartum terminum, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris, 3. 6. Ducto 6 in se, fit 36. quo diuiso per 3. fit 12. tertius terminus. Rursus ducto 12. in se, fit 144. quo diuiso per 6. fit 24. quartus terminus, atque ita in infinitum, vt hic vides, 3. 6. 12. 24. 48. &c.

RVRSVS datis duobus numeris, si minorem in se duxeris, productumq; per maiorem diuiseris, dabit Quotiens tertium terminum vtroque minorem. Quem si rursus in se duxeris, productumque per proximè precedentem terminum diuiseris, dabit Quotiens quartum terminum adhuc minorem, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris 6. 18. Ducto 6. in se, fit 36. quo diuiso per 18. fit 2. tertius terminus. Rursus ducto 2. in se fit 4. quo diuiso per 6. fit $\frac{4}{6}$ sive $\frac{2}{3}$. in minimis numeris, pro quarto termino: atque ita in infinitum, vt hic apparet.

18. 6. 2. $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{9}$. $\frac{2}{27}$. &c.

IAM verò si quamcunq; proportionem non multiplicem (in multiplici enim, si regulam præscriptam sequaris, nulla est difficultas) extendere velis in numeris integris ad quotlibet terminos maiores, efficies id iucunda hac & facili operatione. Cape tot terminos continuè proportionales eius proportionis multiplicis ab 1. incipientis, cuius denominator denominat partem, vel partes aliquotas, cuius, vel quarum in data proportione fit mentio; tot, inquam, cape terminos, quot in propositæ proportionalitate non multiplici terminos desideras. Vlti-

mus enim

mus enim eorum erit primus terminus tua proportionis non multiplicis. Eum ergo si multiplices per denominatorem datæ proportionis, & iterum numerum productum in eundem denominatorem ducas, atque ita deinceps, constitues terminos optatos. Vbi hoc est mirabile, si termini imperati hac via reperiantur, non posse vltra terminos propositos proportionalitatem extendi sine fractione. Verbi gratia, si inueniendi sint 7. termini proportionis sesquialteræ: Quoniam denominator fractionis ½. cuius mentio fit, est 2. sumendi sunt 7. termini proportionis duplæ, videlicet, 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. Si ergo à 64. incipias, constitues 7. terminos proportionalitatis sesquialteræ, & non plures, hos nimirum.

64. 96. 144. 216. 324. 486. 729.

Inuenientur autem facilè hi termini, si ad primum 64. adiicias eius dimidium, & ad secundum 96. iam factum, eius quoque dimidium, &c. Sic quoque si desiderentur 6. termini proportionis duplæ superbipartientis quintas, accipiendi sunt 6. termini proportionis quintuplæ, propter denominatorem partium quinturum, qui est 5. videlicet, 1. 5. 25. 125. 625. 3125. Nam si ab vltimo 3125. incipias, reperies hos 6. terminos in proportione duplæ superbipartientis quintas.

3125. 7500. 18000. 43200. 103680. 248832.

Qui termini facilè reperientur, si duas quintas partes primi ad eundem primum duplicatum adiicias, & rursus ⅖. secundi iam facti ad eundem secundum duplicatum, &c. Atque numeri hac via inuenti semper minimi sunt in sua proportione, ita vt alij totidem termini in eadem proportione continua reperiri, qui minores illis sint, fit prorsus impossibile: nisi fractiones admittere velimus. Facilius iidem termini reperientur, si inuentis duobus minimis terminis in data proportione, per maiorem multiplicetur primus ex illa proportione multiplici inuentus, & productus per minorem diuidatur. Ita enim secundus terminus repertetur. Qui si rursus ducatur in maiorem minimorum terminorum, & productus per minorem diuidatur, inuenietur tertius terminus; & sic deinceps. Vt in posteriori exemplo, minimi termini proportionis duplæ superbipartientis quintas sunt 5. & 12. Si igitur sextum 3125. proportionis quintuplæ, qui debet esse primus sex terminorum quæsitorum, ducatur in 12. & productus 37500. per 5. diuidatur, prodibit secundus terminus 7500. qui si rursus in 12. ducatur, & productus 90000. per 5. diuidatur, producetur tertius terminus 18000. &c. In proportione porrò multiplici quacunque minimi termini quotcunque perpetuo incipiunt ab 1. Vt tres minimi termini in proportione continua quadruplæ sunt hi, 1. 4. 16.

QVAN-

II.

QVANDO numerus terminorum continuè proportionalium impar eſt, numerus genitus ex multiplicatione extremorum inter ſe, æqualis eſt numero, qui ex quorumlibet duorum ab extremis æqualiter diſtantium multiplicatione inter ſe creatur, & ei quoque qui ex medio in ſe ipſum ducto producitur. Vt in his 5. numeris proportionis ſeſquialteræ,

16. 24. 36. 54. 81.

tum ex 16. in 81. quàm ex 24. in 54. & ex 36. in ſe, procreatur numerus 1296.

QVANDO autem proportionalium terminorum numerus eſt par, etiamſi non continuè ſint proportionales, dum modo bini continuam proportionem interrumpentes habeant ℌnam eandemque inter ſe proportionem, hoc eſt, dum modo ſecundus & tertius; item quartus & quintus; nec non ſextus & ſeptimus, &c. (quibus in locis proportio interrumpitur) ſint quoque non continuè proportionales, in diuerſa tamen proportione ab ea, quam primus habet ad ſecundum, & tertius ad quartum, & quintus ad ſextum, &c. Quando, inquam, terminorum numerus eſt par, numerus ex ductu extremorum ℌnius in alterum productus ſemper æqualis eſt numero, qui ex multiplicatione quorumlibet duorum ab extremis æqualiter diſtantium inter ſe gignitur. Vt hic in 6. numeris dupla proportionis continua.

3. 6. 12. 24. 48. 96.

Ex 3. in 96. & ex 6. in 48. & ex 12. in 24. producitur idem ſemper numerus 288.

Item in hac ſeſquitertia non continua 8. terminorum, ℌbi bini proportionem continuam interrumpentes habent ℌnam eandemque proportionem, videlicet triplam, quæ à ſeſquitertia diuerſa eſt.

3. 4. 12. 16. 48. 64. 192. 256.

idem omnino numerus 768. fit ex 3. in 256. & ex 4. in 192. & ex 12. in 64. & ex 16. in 48.

HINC ſequitur, quando terminorum numerus impar eſt, numerum ex ductu extremorum ℌnius in alterum, vel ex duorum quorumlibet æqualiter ab extremis, vel à medio diſtantium multiplicatione inter ſe procreatum, eſſe quadratum, (Dicitur quadratus numerus is, qui ex multiplicatione alicuius numeri in ſeipſum producitur; numerusque ipſum producens latus eius, ſiue radix appellatur) cuius radix, ſiue latus eſt medius numerus: quia nimirum idem numerus gignitur ex medio in ſeipſum; ac proinde medius eius radix quadrati eſt. Nu-

est. Numerum verò ex tribus inter se multiplicatis productum, quorum duo sunt vel extremi, vel ab extremis aqualiter remoti, tertius autem, medius, esse cubum, (Numerus ille dicitur cubus, qui producitur ex numero aliquo in seipsum ducto, & iterum in productum numerum: & numerus ille, qui in se ductus, & iterum in productum, cubum producit, latus eius cubicum, sive radix cubica appellatur) cuius latus, sive radix est medius numerus: quia videlicet gignitur ex medio in se cubice ducto, hoc est, primum in se, deinde in productum ex aliis duobus inter se multiplicatis. In se enim facit productum ex aliis duobus: ac proinde in hunc procreatum iterum ductus producit cubum.

SEQVITVR quoque, quando sunt 4. numeri sive continuè, sive non continuè proportionales, numerum ex mutua omnium multiplicatione productum, (Dicuntur tres, vel plures numeri se mutuo multiplicare continuè, quando unus ducitur in alium, & productus numerus in tertium, & hic productus numerus in quartum, & sic deinceps, donec omnes numeri sint multiplicati) esse quadratum, cuius latus, sive radix est numerus ex primo in quartum, vel ex secundo in tertium genitus. Nam ex multiplicatione mutua omnium 4 numerorum inter se idem procreatur numerus, quem producit numerus factus ex primo in quartum, si in productum ex secundo in tertium (qui producto ex primo in quartum aqualis est) multiplicetur. Quando autem sunt 6. numeri sive continuè, sive non continuè proportionales, dum modo bini numeri proportionem continuam interrumpentes sint quoque non continuè proportionales, fiet cubus ex mutua multiplicatione omnium 6. numerorum inter se, cuius radix, latusve est numerus ex multiplicatione extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis aqualiter distantium, productos: qui videlicet gignitur ex numero, qui fit ex duobus extremis inter se multiplicatis, in se cubice multiplicato: hoc est, semel in se, nimirum in productum ex duobus, qui sunt extremis proximi, & iterum in productum, quando videlicet hic productus numerus ducitur in productum ex duobus mediis: quippe cum tres hi numeri producti sint inter se aquales.

III.

SI, propositis quotcunque terminis continuè proportionalibus, minimus extremum a maiore subtrahatur, & reliquus numerus per numerum unitate minorem denominatore proportionis, (quam quilibet propositorum numerorum ad minorem habet, qui illi proximus est) dividatur, Quotiens demq; maiori extremo adiiciatur, conflabitur summa omnium terminorū. Vt hic in proportione continua tripla.

1. 6. 18. 54. 162. 486. 1458. 4374. 13122.

Dempto minore extremo 2. ex maiore 13122. & reliquo numero 13120. di-

13120. *diuiso per* 2. *per numerum scilicet vna vnitate minorem denominatore* 3. *proportionis tripla, quam quilibet eorum numerorum ad proximè antecedentem minorem habet, fit Quotiens* 6560. *cui si addatur maius extremum* 13122. *fit summa omnium* 19682. *Item in hac sesquitertia continua.*

243. 324. 432. 576. 768. 1024.

Subducto minore extremo 243. *ex maiore* 1024. *& reliquo numero* 781. *diuiso per* $\frac{1}{3}$. *(qui numerus vna vnitate minor est denominatore* $1\frac{1}{3}$*) fit Quotiens* 2343. *Addito ergo maiore extremo* 1024. *fit omnium terminorum summa* 3367.

ITAQVE vt vides, ad explorandam summam quotcunque terminorum proportionalitatis Geometricæ satis est, si duo extremi cognoscantur, vna cum proportionis denominatore. Quo verò artificio inuestigandus sit vltimus terminus cuiusuis proportionalitatis Geometricæ quotcunque terminorum, etiamsi medios numeros ignoremus, copiosè tradidimus in progressionibus in nostra Arithmetica practica, vt superuacaneum sit, ea hoc loco repetere.

I V.

PROPOSITIS quotlibet numeris se mutuo æqualiter superantibus id est, Arithmeticè proportionalibus; si totidem alij numeri sumantur habentes easdem proportiones, quas illi eodem ordine sumpti; superabunt se quoque posteriores hi numeri æqualiter, hoc est, erunt Arithmeticè proportionales, sicut illi. Vt si sex hi numeri, 4. 7. 10. 13. 16. 19. *Arithmeticè proportionales proponantur, sumanturque alij sex cum isdem proportionibus, cuiusmodi sunt hi,* 20. 35. 50. 65. 80. 95. *comperies ipsos quoque Arithmeticè esse proportionales; quippe cum habeant differentiam* 15. *Sed cauе putes, hanc proprietatem posse conuerti: Neque enim si dentur quotuis numeri Arithmeticè proportionales, & totidem alij Arithmeticè quoque proportionales sumantur, etiamsi vtrobique eadem sit differentia, necessario hi illis proportionales erunt. Id quod perspicuum est in hisce duabus proportionalitatibus Arithmeticis.*

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21.

Vbi prioris duo primi numeri 2. 4. *habent proportionem duplam, at posterioris duo primi* 3. 5. *superbipartientem tertias. Item primus numerus* 3. *in posteriore ordine ad primum numerum* 2. *in ordine priore habet sesquialteram proportionem, secundus autem* 5. *ad secundum* 4. *sesquiquartam, &c.*

DVOBVS

V.

DVOBVS quibuſuis numeris datis, ſi eorum alterutro in quotlibet partes diſtributo, ſingula partes in alterum ducantur, & ſinguli numeri producti per priorem numerum diuidantur, conſtituent omnes Quotientes ſimul ſumpti poſteriorem numerum, habebuntque ordine eaſdem omnino proportiones inter ſe, quas partes prioris numeri inter ſe eodem ordine habent: at ſinguli Quotientes, ſiue partes poſterioris numeri ad ſingulas partes prioris, & prima ad primam, ſecunda ad ſecundam, &c. & eandemque prorſus habebunt proportionem. Veluti, datis duobus numeris 57. 285 ſi prior ſecetur in partes, quæ ſimul addita ipſum conficiant, 2. 5. 10. 40. & earum qualibet in poſteriorem numerum 285. ducatur, gignentur hi numeri, 570. 1425. 2850. 11400. quibus ſigillatim per numerum priorem 57. diuiſis, fiunt Quotientes, 10. 25. 50 200. qui in vnam collecti ſummam conſtituunt poſteriorem numerum 285. habentque eaſdem proportiones, quas habent partes 2. 5. 10 40. nimirum duplam ſeſquialteram, duplam, & quadruplam: ſinguli verò ad ſingulas partes, vt 10. ad 2. & 25. ad 5. & 50. ad 10. & 200. ad 40. eandem omnino proportionem habent, nimirum quintuplam.

EASDEM partes numeri poſterioris obtinebis, ſi eum per priorem, qui in partes diſtributus eſt, partiaris, Quotientemque factum in ſingulas partes eiuſdem prioris numeri ducas. Vt in eodem exemplo, diuiſo numero 285. per 57. fit Quotiens 5. quo ducto in 2. 5. 10. 40. partes numeri 57. fiunt partes numeri 285. hæ, 10. 25. 50. 200. vt prius.

HINC facilè elicitur, quo pacto duo quilibet numeri ſecandi ſint in partes componentes ipſis numeris æquales, ita vt partes vnius ſint partibus alterius proportionales, collatio tum partibus vtriuſque numeri inter ſe, tum & partibus vnius cum partibus alterius. Atque hac proprietate nititur tertia ratio diſtribuendi numerum propoſitum in quotuis partes Arithmeticè proportionales, quam in regula 10 proportionalitatis Arithmeticæ præſcripſimus. Nam ſumptis totidem numeris Arithmeticè proportionalibus, erit eorum ſumma, numerus in illos, tanquam in partes ipſum componentes, diuiſus. Quare ſi ſingulæ hæ partes in datum numerum ducantur, & producti numeri per ſummam illam diuidantur; Vel ſi per aſſumptorum numerorum ſummam datus numerus diuidatur, ac Quotiens in ſingulos eos numeros ducatur; producentur partes totidem numeri propoſiti in eiſdem proportionibus. Quare Arithmeticè quoque proportionales erunt, vt ex antecedente regula 4. manifeſtum eſt.

VI.

QVOTLIBET numeri continuè proportionalibus datis, erunt horum differentiæ continuè quoq; in eadem proportione proportionales.

Vt in

Vt in appoſito exemplo tum numeri, quàm eorum differentia, habeant continuam proportionem ſeſquialteram.

Differentia.	32	48	72	108	162	243	
	64	96	144	216	324	486	729

Eadem ratione in hoc altero exemplo, quod ſequitur, habent & numeri, & eorum differentia, duplam proportionem. Vbi videndum differentias non differre à numeris duplæ proportionis, quorum ſunt differentiæ. Id quod ſoli proportioni duplæ cuicunque accidit: quia in ea quilibet numerus maior proximè precedentem minorem ſuperat ipſomet numero proximè antecedente, cuius duplus eſt, hoc eſt, quem bis continet.

Differentia.	7	14	28	56	112	224	448	896	
	7	14	28	56	112	224	448	896	1792

VII.

DATIS quotcunque numeris continuè proportionalibus, ſi eorum ſumma per eos ſigillatim dividatur, erunt Quotientes converſo ordine in eadem proportione continuè proportionales. Et ſi Quotientium ſumma per ipſos Quotientes ſigillatim dividatur, creabuntur iidem priores Quotientes ordine converſo: atque ita in infinitum. Summa autem eorum Quotientium æqualis erit numero, qui fit ex primo Quotiente in vltimum, vel ex multiplicatione duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique, ſi terminorum numerus eſt impar, ex medio in ſeipſum ducto. Quod ſane incredibile videri poſſit. Exempli cauſa. Si dentur hi 4. numeri continuè proportionales in proportione dupla, 3. 6. 12. 24. ſi eorum ſumma 45. per ſingulos dividatur, erunt Quotientes 15. 7 $\frac{1}{2}$. 3 $\frac{3}{4}$ 1 $\frac{7}{8}$. converſo ordine in eadem proportione dupla continuè proportionales. Et ſi per hoſce Quotientes dividatur eorum ſumma 28 $\frac{1}{8}$. prodibunt ordine converſo iidem omnino Quotientes, & ſta deinceps in infinitum. Ipſa verò ſumma 28 $\frac{1}{8}$. æqualis eſt numero, qui fit ex 15. in 1 $\frac{7}{8}$ vel ex 7 $\frac{1}{2}$. in 3 $\frac{3}{4}$. Sic etiam datis his 5. terminis in continua proportione tripla, 2. 6. 18. 54. 162. ſi eorum ſummam partiemur per eos ſigillatim, efficiemus hos 5. Quotientes, 121. 40 $\frac{1}{3}$. 13 $\frac{4}{9}$. 4 $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{7}$. 1 $\frac{40}{81}$. in eadem continua proportione tripla. Quorum ſumma 180 $\frac{61}{81}$ producitur vel ex 121. in 1 $\frac{40}{81}$. vel ex 40 $\frac{1}{3}$. in 4 $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{7}$. vel denique ex 13 $\frac{4}{9}$. in ſeipſum. Vbi duo conſideratione ſunt digna. Primum, quando terminorum numerus eſt impar, ſummam Quotientum eſſe numerum quadratum, cuius radix eſt medius terminus: quippe qui ex medio termino in ſeipſum ductus procreet.

procreetur, & dictum est. Deinde, eosdem semper Quotientes gigni ex diuisione summa quotcunque terminorum proportionis eiusdem continua, quantumuis termini illi sint magni, aut parui, dummodo terminorum numerus idem semper sit. Veluti, si sint tres termini continuè dupli, siue magni, siue parui, erunt perpetuo hi Quotientes, 7. 3 1/2. 1 3/4. Si sint quatuor, hi Quotientes erunt, 15. 7 1/2. 3 3/4. 1 7/8. In quinque numeris continuè triplis, erunt hi semper Quotientes, 121. 40 1/3. 13 4/9. 4 1/27. 1 40/81. Ac denique in quinque numeris continuam proportionem sesquialteram habentibus reperientur hi Quotientes. 13 7/16. 8 1/2 0/4. 5 7/16. 3 4/5 0/4. 2 40/81.

EX hac proprietate inueniemus quotcunq; terminos in data proportione continuè proportionales, quorum summa aqualis sit numero, qui fit ab extremis inter se multiplicatis, vel ex duobus mediis quibuslibet aqualiter distantibus ab extremis, vel etiam ex termino medio in seipsum ducto, si numerus terminorum fuerit impar. Nam si sumantur tot termini in data proportione continuè proportionales, quot inueniendi sunt, siue magni, siue parui, eorumque summa per eosdem seorsum diuidatur, erunt Quotientes numeri, qui desiderantur. Quòd si summa debeat esse numerus quadratus, accipiendi erunt termini, quorum numerus impar sit, & dato numero terminorum impari aqualis, &c. Qua res miraculi instar quodammodo censeri possit, dari posse in data proportione, quotquot quis iusserit, terminos continuè proportionales, quorum summa ex multiplicatione primi termini in vltimum gignatur: cum contrarium huius experiamur in omnibus proportionibus continuis inaqualitatis, quarum termini sint numeri integri; & in alijs etiam omnibus, quarum numeri fractiones habent admixtas, nisi hi numeri Quotientes sint producti ex diuisione summa alicuius quotcunque terminorum continuè proportionalium, per ipsos terminos proportionales, vt diximus.

EODEM modo satisfaciemus quæstioni, si quis petat duos numeros datum habentes proportionem, quorum summa aqualis sit numero ex eorum multiplicatione vnius in alterum protracto. Nam si sumantur quilibet duo numeri in proportione data, atque eorum summa per eosdem sigillatim diuidatur, satisfiet quæstioni proposita per Quotientes inuentos. Vt si cupiat quis duos numeros, inter quos reperiatur proportio tripla superbipartiens nonas, accipiemus vel hos duos numeros 29. 9. vel 87. 27. proportionem datum habentes, vel alios quosuis. Summa etenim priorum 38. diuisa per 29. & 9. vel posteriorum summa 114. per 87. & 27. diuisa dabit Quotientes, 1 20/29 & 4 2/9. proportionem eandem habentes, quam 29. & 9. vel 87. & 27. ordine tamen conuerso, & quorum aggregatum est 5 1/2 7/16 0/1. qui videlicet numerus ex ductu etiam 1 20/29 in 4 2/9. gignitur.

VIII.

INTER duos quoscunque numeros constituemus medium Geo-

metricè proportionalem, si eos inter se multiplicemus, & procreati numeri radicem quadratam accipiamus. Vt datis duobus numeris 6. & 96. ex uno in alterum fit numerus 576. cuius radix quadrata 24. erit medio loco proportionalis inter datos numeros hoc modo, 6. 24. 96. Nam 96. ad 24. habent proportionem quadruplam, qualem etiam habent 24. ad 6. Itaque si inter datos duos numeros constituendus sit numerus medius rationalis, qui videlicet exprimi possit, necesse est, vt numerus ex uno in alterum productus sit quadratus. Nisi enim quadratus sit, non habebit radicem in numeris, sed eius radix erit numerus, quem Arithmetici surdum, vel irrationalem vocant, explicantque hoc modo, radix quadrata talis numeri. Veluti, datis duobus numeris 7. & 9. fiet ex uno in alterum numerus 63. qui radicem non habet. Dicemus ergo radicem quadratam numeri 63. qua quidem numeris exprimi nequit, esse medio loco proportionalem inter numeros datos 7. & 9. hoc modo, qua quidem radix maior est, quam 7. cum huius quadratum sit 49. minor verò quam 8. cum huius quadratum sit 64. Neque verò numerum 7. cum aliqua fractione, qui medius est inter 7. & 8. radix esse potest, etiamsi vnitas in infinitum cogitetur esse diuisa: quia omnis talis numerus cum fractione producit numerum cum fractione, vt ad defin. 8. demonstrabimus, cuiusmodi non est numerus 63.

7.	R. q. 63.	9.

IX.

SI quis inuenire velit tres numeros in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos singuli cadant medij Geometricè proportionales, assequetur id hac ratione. Sumantur tres numeri quicunque, quorum secundus primi sit quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus. Quadrati enim numeri eorum erunt Arithmeticè proportionales, & primus numerus acceptus in secundum ductus producet medium proportionalem Geometricè inter primum quadratum, & secundum, in proportione primi assumpti numeri ad secundum, secundus verò numerus assumptus in tertium ductus gignet medium proportionalem inter secundum quadratum, & tertium, in proportione, quam inter se habent secundus ac tertius numerus assumptus. Id quod perspicuè in hoc exemplo apparet.

Tres num. assumpt.	*Primus* 8.	*quintup. pri.* 40.	*Septup. prim.* 56.
Quad. Arith. pro.	64	1600	3136.
Medij Geometr.	320	2240	

Differentia enim trium quadratorum est 1536. *& medij proportionales inter eos,* 320. *&* 2240. *producti ex* 8. *in* 40. *& ex* 40. *in* 56.

HINC

HINC facile reperies tres numeros quadratos, qui se æqualibus differentijs mutuo superent, si pro radicibus eorum sumes tres numeros, quorum secundus sit primi quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus, vt diximus.

PARI ratione, dato quouis quadrato, reperientur alij duo maiores cum illo constituentes proportionalitatem Arithmeticam. Si enim radix dati quadrati statuatur primus numerus, & alij duo numeri sumantur, quorum alter illius radicis sit quintuplus, & septuplus alter, erunt quadrati numeri horum duorum numerorum, quos quærimus. Vt si detur quadratus numerus 64. erit eius radix 8 primus numerus, secundus, 40. & tertius, 56. &c.

INVENTIS autem tribus quadratis Arithmeticè proportionalibus, si eos per quemuis numerum eundem multiplices, vel per quamuis partem aliquotam si quam habent, diuidas, erunt producti quoque numeri, aut Quotientes Arithmeticè proportionales, inter quorum binos singuli etiam medij in Geometrica proportionalitate interciptuntur; qui medij reperientur eodem modo, si nimirum medij inter quadratos inuentos per eundem illum numerum multiplicentur, vel per eandem illam partem aliquotam diuidantur. Vt si superiores quadrati, vna cum medijs proportionalibus duplicentur, creabuntur hi numeri.

Arithmet. proportio.	128		3200		6272.
Medij Geometr.		640		4480	

Si verò diuidantur iidem per 8. partem aliquotam communem quadratorum, (sunt autem qualibet partes aliquotæ quadratorum, partes etiam aliquotæ mediorum) prodibunt hi numeri.

Arith. proportio.	8		200		392.
Medij Geometr.		40		280	

Habebunt autem hi numeri hoc modo inuenti easdem semper proportiones, quas quadrati, eorumque medij inter se habent. Quod si hos 8. 200. 392. diuidas per 4. inuenies alios 2. 50. 98. Arithmeticè proportionales, inter quos cadunt Geometricè medij, 10. & 70. Et si denique hos 2. 50. 98. partiaris per 2. habebis alios, 1. 25. 49. inter quos medij Geometricè sunt, 5. & 35.

VBI hoc etiam admiratione videtur dignum, quandocunque inter tres numeros Arithmeticè proportionales, siue quadrati sint, siue non, cadunt duo medij Geometricè proportionales, vnus inter primum & secundum, & inter secundum ac tertium alter, quadratum prioris medij, & quadratum secundi numeri Arithmetica proportionali-

tatis, & quadratum posterioris medij constituere proportionalitatem Arithmeticam. Vt in posteriore exemplo, quadrati numeri horum trium numerorum 40. 200. 280. *sunt* 1600. 40000. 78400. *Arithmeticè proportionales, habentes differentiam eandem communem* 30400. *& sic de cæteris.*

X.

INTER quoscunque duos numeros reperiemus quotcunque medios continuè proportionales, iucunda sane, & artificiosa operatione: quam vt planius explicem, dicenda pauca sunt de radicum generibus, & quo pacto numeri ex suis radicibus gignantur. In omni ergo proportione continua, qua ab 1. *incipit, secundus terminus radix est omnium numerorum insequentium. Ea enim radix bis posita, atq; in se ipsam ducta producit tertium terminum, qui est numerus quadratus, radix q. ipsa quadrata dicitur. Eadem radix ter posita, & primum in se, & iterum in productum multiplicata gignit quartum terminum, qui cubus est, & propterea radix eius cubica appellatur. Denique si eadem radix ponatur quater, & fiant tres multiplicationes, primum in se, deinde in productum, tertio iterum in vltimum productum, fiet quintus terminus: Et si ponatur quinquies, fiant q. quatuor ordine multiplicationes, orietur sextus terminus, atque ita in infinitum: Quo pacto autem omnes hæ radices nominari debeant, & signari, non est huius loci declarare, sed ad Algebram totam hæc res spectat, vbi etiam docebimus, qua arte ex dato numero eruenda sint. Nunc, vt intelligatur res, de qua agimus, notanda sunt tres infrascriptæ proportionalitates continuæ, quarum duæ primæ sunt Arithmetica, numerum dua series naturales numerorum ab* 1. *incipientes, tertia verò Geometrica ab* 1. *quoq; initio ducens. Vbi perspicuè apparebit, quàm egregium vsum habeat series numerorum naturalis in re proposita.*

Numerus mediorum.			1	2	3	4	5	6	&c.
Numeri significantes radices.		1	2	3	4	5	6	7	&c.
Numeri Geometr. propor.	1	2	4	8	16	32	64	128	&c.

Prima complectitur numeros mediorum constituendorum, secunda numeros, qui significant genera radicum, hoc est, quoties terminus secundus tertiæ proportionalitatis, quem radicem omnium insequentium diximus, ordine poni debeat, vt multiplicatos numeros proportionalitatis Geometricæ illis respondentes procreet. Verbi gratia, vnitas mediij ordinis significat, numerum 2. *tertij ordinis, qui radix est omnium aliorum, semel positum non esse multiplicandum, sed ipsummet esse radicem omnium ex nulla sui multiplicatione productum. At numerus* 2. *eiusdem secundi ordinis indicat, eandem radicem* 2. *tertij*

ordinis

ordinis positam bis hoc modo, 2. 2. & ita in se multiplicatum gignere 4. tertium terminum eiusdem tertij ordinis. Sic numerus 3. medij ordinis denotat, radicem eandem 2. infimi ordinis positam ter hoc modo, 2. 2. 2. atque ita multiplicatam producere 8. quartum terminum infimi ordinis. Nam ex radice 2. primo loco posita in eandem 2. positam secundo loco fit numerus 4. & ex hoc producto in radicem 2. tertio positam loco gignitur numerus 8. quartus nimirum proportionalitatis Geometricæ sub numero 3. ordinis secundi. Idem dices de aliis. Vt verbi gratia numerus 7. secundæ proportionalitatis monstrat, radicem eandem 2. tertij ordinis positam septies, hoc pacto. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. & in se continuè sexies multiplicatam producere 128. octauum numerum Geometricæ proportionalitatis illi numero 7. suppositum. Nam ex 2. primi loci in 2. secundi loci fiunt 4. & ex 4. in 2. tertij loci fiunt 8. & ex 8. in 2. quarti loci fiunt 16. & ex 16. in 2. quinti loci fiunt 32. & ex 32. in 2. sexti loci fiunt 64. & denique ex 64. in 2. septimi loci fiunt 128. &c. Atque hoc non solum verum est in proposita proportione continua dupla, sed in omnibus aliis ab vnitate incipientibus, quicunque numerus secundum locum occupet tanquam radix aliorum, & qui proportionem denominat.

ITAQVE si constituere vis quotlibet medios inter duos propositos numeros, cape numerum mediorum constituendorum in primo ordine. Nam ex vtroque numero dato extrahenda est radix, qua toties ordine posita, & continuè multiplicata vtrumque producat, quot vnitates continentur in numero secundi ordinis, qui infra numerum mediorum constituendorum in supremo ordine acceptum scriptus est. Radices inuentas sub datis numeris colloca, quamque sub suo, & ab eisdem ascende per continuam vtriusque multiplicationem, (ducendo primum quamque radicem in se, deinde in numerum productum, & sic deinceps) ita vt duas proportionalitates Geometricas multiplices instituas à radicibus incipientes, & ab eisdem denominatas, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini quaruntur. Post hæc singulos terminos vnius ordinis duc in singulos terminos alterius ordinis aduersos, & oppositos, hoc est, maximum vnius in minimum alterius: proximum deinde sub illo in proximum supra hunc, &c. Ita vt in vno ordine semper descendas à supremo ad infimum vsque, in altero verò ab infimo vsque ad supremum ascendas, vt in exemplis patebit. Numeri enim procreati dabunt medios terminos, quos quærimus. Exempli causa, si inter 9. & 144. inueniendus sit vnus terminus medio loco proportionalis, sumemus in primo ordine 1. & sub hoc termino in secundo ordine numerum 2. qui indicat, ex vtroque numero dato eruendam esse radicem quadratam, quæ videlicet bis posita, per eius multiplicationem vtrumque producat, vt declarauimus. Radices autem quadratæ inuentæ sunt 3. & 12. Et quia vnus tantum medius terminus desideratur, non sunt in-

ſtituenda proportionalitates Geometricæ à radicibus incipientes, quæ plures terminos habeant, ſed ipſæ radices inter ſe multiplicandæ. Numerus enim procreatus 36. erit medio loco proportionalis inter 9 & 144. Vt hic vides, 9. 36. 144. Sic etiam ſi inter 18. & 288. conſtituendus ſit vnus terminus medius: quoniam hi numeri radices quadratas non habent, ſignabimus priorem hoc modo, R. q. 18. poſteriorem autem ſic. R. q. 288. Ha autem radices inter ſe multiplicatæ faciunt 72. terminum medium proportionalem inter 18. & 288. hoc modo 18. 72. 288. Vbi etiam admiratione dignum eſt, duos numeros, quorum neuter poteſt efferri, inter ſe multiplicatos gignere numerum rationalem: cuius rei demonſtratio ex lib. 10. petenda eſt. Quo pacto autem inter ſe multiplicandi ſint duo numeri ſurdi, qui nimirum efferri non poſſunt, quales ſunt R. q. 18. & R. q. 288. docebimus in Algebra.

RVRSVS ſi dati ſint duo numeri 16. & 625. inter quos tres medij conſtituendi ſint, accipiemus in primo ordine numerum medium 3. cui in ordine ſecundo ſubſcribatur numerus 4. Igitur ex vtroque dato numero extrahenda eſt radix, qua quater poſita, & continuè multiplicata vtrumque producat, qua quadrati quadrata, vel zenſizenſica dici ſolet, cuiuſmodi in dato exemplo ſunt 2. & 5. Conſtitues ergo hos ordines trium terminorum ſub 16. & 625. Geometricè proportionalium in proportione multiplici, incipientes ab eiſdem radicibus 2. & 5. à quibus proportiones horum ordinum denominantur, vt hic apparet.

16	40	100	250	625
8				125
4				25
2				5

Ex 8. ſupremo primi ordinis in 5. infimum ſecundi ordinis fiunt 40. pro primo medio. Ex 4. in 25. fiunt 100. pro medio ſecundo. Denique ex 2. in 125 fiunt 250. pro tertio medio.

SCITV autem dignum eſt, medios terminos inuentos cum duobus extremis datis continere proportionem continuam eam, quæ inter radices datorum numerorum reperitur. Sic enim in dato exemplo vides ita eſſe 625. ad 250. & 250. ad 100. & 100. ad 40. & 40. ad 16. vt 5. ad 2. Quapropter, inuentis radicibus, ſi maior per minorem diuidatur, & per Quotientem, qui denominator eſt proportionis radicum inuentarum, multiplicetur minor numerus datus, & productus numerus rurſum per eundem Quotientem multiplicetur, atque ita deinceps, conſtituentur inter duos extremos datos medij termini iidem, etiamſi duo illi ordines proportionum multiplicium à radicibus denominatarum non inſtituantur. Vt in exemplo dato. Diuiſa radice 5. per ra-

dicem

decem 2. fit Quotiens $2\frac{1}{2}$. *denominator videlicet proportionis 5. ad 2. Si igitur ducas minorem numerum datum 16. in* $2\frac{1}{2}$. *gignes 40. primum medium: Et si rursus ducas 40. in* $2\frac{1}{2}$. *procreabu 100. secundum medium: Et denique si 100. ducas in* $2\frac{1}{2}$. *produces 250. tertium medium.*

PERSPICVVM autem est, inter datos quoslibet numeros non semper constitui posse numerum terminorum propositum, qui sint rationales: propterea quod dats numeri non habent semper illas radices, quæ extrahenda sunt: aut certè non habent eam proportionem, quam aliqui duo numeri, ex quibus ea radices possunt extrahi, quod etiam satis esset. Sicut enim inter 16. & 625. qui habent radices quadrati quadratas, hoc est, quæ quater posita eos suis multiplicationibus producunt, tres medij termini incidunt: item quoque inter 48. & 1875. qui illis 16 & 625. proportionales sunt, licet non habeant similes radices, cadunt tres medij termini, vt hic patet 48. 120. 300. 750. 1875.

QVAMOBREM si quis desideret duos numeros, inter quos cadant, quotquot voles, termini medij rationales in data proportione, accipiendi sunt duo numeri quomodocunque datam habentes proportionem. Eorum enim vterque si toties ponatur, quot termini medij quærendi sunt, & adhuc semel, & continuè multiplicetur, erunt vltimi duo numeri producti, quos quærimus: Inter eos enim medij termini constituentur eo modo, quem exposuimus; hoc est, vel instituendo sub illis duos ordines proportionum multiplicium, quas assumpti numeri denominent, tot terminorum, quot medij termini quærentur; vel multiplicando minorem eorum per denominaterem proportionis datæ, quæ est inter acceptos duos numeros, &c. Verbi gratia, si quis velit duos numeros, inter quos constitui possint quatuor termini medij rationales in proportione superbipartiente tertias, cuius denominator est $1\frac{2}{3}$. *sumemus duos numeros 6. & 10. habentes datam proportionem superbipartientem tertias, & vtrumque quinquies ponemus hoc modo, 6 6. 6. 6. 6. & 10. 10. 10. 10. 10. Ex multiplicatione enim continua vtriusque existent hi numeri 7776. & 100000. inter quos constitues quatuor medios numeros proportionales, vt hic vides.*

7776	12960	21600	36000	60000	100000
1296					10000
216					1000
36					100
6					10

Qui quidem medij termini inueniuntur vel ex 1296. *in* 10. *&* ex 216. *in* 100. *&* ex 36. *in* 1000. *&* ex 6. *in* 10000. *vel ex denominatore* $1\frac{2}{3}$. *proportionis ſuperbipartientis tertias in minorem numerum inuentum* 7776. *&* iterum *in numerum productum, &c.*

XI.

NVMERVM quemcunq; datum diſtribuemus in quotuis partes proportionales Geometricè in data proportione hoc modo. Cape tot numeros continuè proportionales in data proportione ſiue minimos, ſiue non minimos, in quot partes datus numerus diſtribuendus eſt, & per eorum ſummam datum numerum partire. Quotiens namque per ſingulos terminos in data proportione acceptos multiplicatus procreabit partes dati numeri ſeruantes datam proportionem inter ſe. Veluti ſi datus numerus 756. *ſecandus ſit in* 6. *partes continuè proportionales in proportione dupla; ſi ſumantur* 6. *termini continue dupli,* 3. 6. 12. 24. 48. 96. *quorum ſumma eſt* 189. *& per hanc ſummam datus numerus* 756. *diuidatur, Quotiens autem* 4. *per ſingulos acceptos numeros multiplicetur, procreabuntur hi* 6. *numeri continue dupli, conſicienteſque ſimul in vnam ſummam collecti datum numerum* 756. *videlicet,*

12. 24. 48. 96. 192. 384.

Eadem partes inuenientur, ſi ſumantur hi alij 6. *numeri continue dupli,* $\frac{1}{100}$. $\frac{2}{100}$. $\frac{4}{100}$. $\frac{8}{100}$. $\frac{16}{100}$. $\frac{32}{100}$. *quorum ſumma eſt* $\frac{63}{100}$. *Vel hi* 6. *alij,* 100. 200. 400. 800. 1600. 3200. *quorum ſumma eſt* 6300. *Nam datus numerus* 756. *diuiſus per ſummam priorem* $\frac{63}{100}$ *facit* 1200. *qui Quotiens ductus in primum numerum acceptum* $\frac{1}{100}$. *dabit primam partem* 12. *vt prius, &c. At idem numerus datus* 756. *diuiſus per poſteriorem ſummam* 6300. *facit Quotientem* $\frac{750}{6300}$ *qui ductus in primum numerum aſſumptum* 100. *producit eandem partem primam* 12. *& ſic de cæteris.*

QVOD ſi cupias numerum, qui ſecari poſſit in quotuis partes proportionales ſine vlla fractione, (Nam niſi ſeruetur id, quod iam præcipiemus, ineidemus plerunque in fractiones) aſſequeris propoſitum, ſi ſumas quemcunque numerum multiplicem ſummæ totidem terminorum proportionalium aſſumptorum. Vt ſi quis quærat numerum, qui poſſit diſtribui in 5. *numeros integros ſeſquialteram proportionem continuam habentes; ſumptis* 5. *terminis in ſeſquialtera proportione continue quibuſcunque, vt* 64. 96. 144. 216. 324. *quorum ſumma eſt* 844. *accipiemus huius ſummæ quemcunque numerum multiplicem, nimirum decuplum* 8440. *Hic enim per præceptum traditum ſecabitur in* 5. *numeros integros proportionis ſeſquialteræ continuæ, cum eo diuiſo per ſummam acceptorum numerorum, Quotiens neceſſario ſit numerus integer.*

HINC

HINC nullo negotio ſatisfaciemus quæſtioni, qua inbeamur in data proportione continua reperire quotuis numeros, qui in unam ſummam collecti conſtituant numerum quemcunque datum. Nam ſi datus numerus ſecetur in tot partes proportionales data proportioni, & docuimus, ſolutæ erit quæſtio. Vt ſi quis inuenire velit 4. numeros tripla proportionis continua, quorum ſumma ſit 100. ſecundus erit hic numerus 100. in 4. numeros proportionis triplæ, & in $2\frac{1}{2}$. $7\frac{1}{2}$. $22\frac{1}{2}$. $67\frac{1}{2}$. Hi enim conficiunt datum numerum 100. Quòd ſi conficere debeant ſummam 400. erunt numeri quæſiti in tripla proportione continua hi 10.30.90.270. Horum enim ſumma eſt 400. Si denique ſummam conficere debeant non ſuperantem 1. erunt huiuſmodi numeri, $\frac{1}{40}$. $\frac{3}{40}$. $\frac{9}{40}$ $\frac{27}{40}$. Summa enim horum eſt $\frac{40}{40}$ hoc eſt, 1.

DE PROPORTIONALITATE Harmonica.

I.

TRES numeri in proportionalitate Harmonica inuenientur ex tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ quibuſcunque, ſi primus in ſecundum, ac tertium, & ſecundus in tertium multiplicetur. Vt ſubiecta exempla demonſtrant.

Arit.	1. 2. 3.	3. 7. 11.	4. 6. 8.	10. 60. 110.
Har.	2. 3. 6.	21. 33. 77.	24. 32. 48.	600. 1100. 6600.

In omnibus enim ex primo termino Arithmeticæ proportionalitatis in ſecundum & tertium fit primus terminus Harmonicæ, & ſecundus: ex ſecundo verò in tertium, tertius.

ALIO modo, & in idem recidit, gignitur Harmonica proportionalitas ex Arithmetica. Nam medius terminus Arithmeticæ proportionalitatis ductus in extremos gignit extremos Harmonicæ: extremi verò eiuſdem Arithmeticæ inter ſe multiplicati creant medium Harmonicæ. Vt in iiſdem exemplis manifeſtum eſt.

HINC fit, extremos terminos Harmonicæ proportionalitatis, ac proinde & differentias, eandem habere proportionem, quam extremi Arithmeticæ, ex qua orta eſt, habent: quia videlicet extremi Arithmeticæ per eundem medium multiplicati produxerunt Harmonicæ extremos.

QVAPROPTER ſi recipiendi ſint tres numeri proportionalitatis Harmonicæ, quorum extremi, atque adeò & differentia, datum habeant proportionem, ſumendi ſunt duo numeri proportionem datum habentes, & inter eos medius Arithmeticæ proportionalitatis conſtituendus: ac denique ex hiſce tribus terminis inuenienda tres in proportionalitate Harmonica, vt diximus. Vt ſi quærantur tres, quo-

rum extremi habeant proportionem ſeſquitertiam, ſumemus 3. & 4. inter quos ea proportio reperitur: ſed quia eorum ſumma 7. impar eſt, non poteſt inter eos collocari medius integer in proportionalitate Arithmetica, ducemus vtrumque per aliquem numerum parem, nimirum per 2. Inter productos enim 6. 8. cadet integer medius proportionalis Arithmeticè, 7. nimirum ſemiſſis eorum ſummæ. Ex his igitur tribus 6. 7. 8. Arithmeticè proportionalibus orientur hi tres Harmonicè proportionales, 42. 48. 56. quorum extremi, atque adeò & differentia, proportionem ſeſquitertiam datam habent.

SEQVITVR etiam, binos numeros trium terminorum proportionalitatis Harmonicæ binis Arithmeticæ, ex qua orta eſt, conuerſo ordine eſſe proportionales: hoc eſt, in Harmonica ita eſſe ſecundum ad primum, vt in Arithmetica tertius eſt ad ſecundum. Item in illa ſic eſſe tertium ad ſecundum, vt in hac eſt ſecundus ad primum: quia nimirum priores duo in Harmonica producti ſunt ex poſterioribus duobus in Arithmetica per primum eundem multiplicatis: Duo verò poſteriores Harmonica procreati ſunt ex prioribus duobus Arithmetica in tertium ductis. Vt ex ſuperioribus exemplis perſpicuum eſt.

VICISSIM ſi primus numerus Harmonica proportionalitatis ducatur in ſecundum, ac tertium, & ſecundus in tertium, procreati erunt tres numeri Arithmetica proportionalitatis. Vel (quod idem eſt) ſi medius terminus Harmonica in duos extremos ducatur, gignentur duo extremi Arithmetica; duo verò extremi Harmonica inter ſe multiplicati producent medium Arithmetica: eodem ſcilicet prorſus modo, quo ex Arithmetica proportionalitate Harmonicam eriri diximus. Ita vides ex hac Harmonica 2. 3. 6. gigni hanc Arithmeticam, 6. 12. 18. Siue enim ducas primum 2. in ſecundum 3. & tertium 6. Item ſecundum 3. in tertium 6. produces 6. 12. 18. ſiue ducas medium 3. in extremos 2. 6. facies extremos 6. 18. & ex primo 2 in tertium 6. medium 12.

HARMONICA proportionalitas dicitur continuari vltra tres terminos ſiue ad maiores numeros progrediendo, ſiue regrediendo ad minores, quando primi tres numeri ſunt proportionales Harmonicè, & tertio adiunguntur duo cum eo conſtituentes quoq; eandem proportionalitatem Harmonicam, & in eadem omnino proportione. Deinde vltimo, qui quintus eſt, adiunguntur eodem modo alij duo; atque vltimo, ſiue ſeptimo, alij duo; & ſic in infinitum. Hoc autem fit verſus maiores numeros progrediendo, ſi poſteriores duo numeri ducantur in denominatorem proportionis, quam tertius ad primum habet. Vt datis his tribus numeris 2. 3. 6. Harmonicè proportionalibus, ſi poſteriores duo, 3. 6. ducantur in 3. denominatorem proportionis 6. ad 2. fient 9. 18. atque ita erunt iam quinque termini 2. 3. 6. 9. 18. Harmonicè proportionales: Et ſi poſteriores duo 9. 18. ducantur iterum in 3. denominatorem proportionis, erunt

ſeptem

septem hi termini, 2. 3. 6. 9. 18. 27. 54. continuè proportionales Harmonicè: & sic progredi poterimus in infinitum, ita ut semper Harmonica proportionalitas continuetur per terminos locorum imparium, & per tertium, quintum, septimum, nonum, &c. Quòd si versus minores terminos progredi libeat, dividendi erunt minores duo numeri per denominatorem proportionis extremorum: Et posteriores duo minores inuenti iterum dividendi per eundem denominatorem, & sic deinceps in infinitum. Vt datis his tribus numeris, 18. 9. 6. si minores duo, 9. 6. dividantur per 3. denominatorem proportionis inter extremos 18. 6. fient 3. 2. atque ita erunt iam quinque termini, 18. 9. 6. 3. 2. Et si rursus duo posteriores inuenti 3. 2. dividantur per eundem denominatorem 3. adiunctis erunt ultimo termino 2. alij duo in Harmonica proportionalitate hoc modo. 18. 9. 6. 3. 2. 1. $\frac{2}{3}$ atq; ita deinceps progredi licebit in infinitum.

ALIO modo, & quidem magis propriè, continuatur proportionalitas Harmonica, sive ad maiores numeros progrediendo, sive ad minores, quando primi tres numeri sunt Harmonicè proportionales; Item, relicto primo, alij sequentes tres; & relictis duobus, sequentes alij tres, atque ita deinceps: Sed in hac continuatione nunquam erit eadem proportio inter extremos trium, qua inter extremos aliorum trium. Vt in his 4. numeris, 3. 4. 6. 12. continuata dicitur proportionalitas Harmonica, quoniam tam tres 3. 4. 6. quàm tres 4. 6 12. Harmonicè proportionales sunt; sed priorum extremi 3. 6. proportionem habent duplam, at extremi posteriorum 4. 12. triplam. Item continuata esse dicitur Harmonica proportionalitas in his quinque terminis, 10. 12. 15. 20. 30. quia & in tribus, 10. 12. 15. & in tribus, 12. 15. 20. & in tribus, 15. 20. 30. Harmonica proportionalitas reperitur, licet extremi quorumlibet trium non habeant easdem proportiones. Quo pacto autem in utramque partem hoc modo continuanda sit, quando continuari potest (neque enim semper ad maiores numeros progrediendo potest hoc modo extendi) aut quo pacto quotlibet numeri continuè Harmonicè proportionales, ut exposuimus, reperiri possint ex iis, qua sequuntur, constabit.

II.

INTER quosuis datos duos numeros constitues medium Harmonicè proportionalem, hac ratione. Numerum, qui fit ex datorum duorum numerorum differentia in eorum minorem, partire per eorundem summam, Quotientemque minori adde. Conflatus enim numerus erit medius, quem quaris. Veleandem differentiam datorum numerorũ duc in maiorem, & productam partire per eorundem summã. Si enim Quotientem ex maiore dato subtrahas, reliquus fiet medius terminus quasitus. Vt inter duos numeros 15. & 60. inuĕturus

medium

medium duc eorum differentiam 45. in minorem 15. & numerum productum 675. partire per eorum ſummam 75. Nam ſi Quotientem 9. minori 15. adijcias, conſtabit medium terminum 24. Vt hic patet, 15. 24. 60. Eundem medium reperies, ſi eandem differentiam 45. ducas in maiorem 60. & productum 2700. per eorum ſummam 75. diuidas. Quotiens enim 36. ex maiore 60. detractus relinquet eundem medium terminum 24.

VIDES ergo, quando ſumma datorum duorum numerorum non metitur productum ex eorundem differentia in minorem eorum, vel in maiorem, medium inuentum eſſe neceſſariò integrum cum fractione. Vt ſi inter 7. & 10. inueniendus ſit medius, duc eorum differentiam 3. in minorem 7. & productum 21. per eorundem ſummam 17. partire. Quotiens enim $1\frac{4}{17}$. additus eidem minori 7. facit medium terminum $8\frac{4}{17}$. Vt hic vides, $7.8\frac{4}{17}.10$ Quia tum 10. ad 7 habent proportionem ſupertripartientem ſeptimas, quam differentia maiorum $2\frac{3}{17}$. ad minorum differentiam $1\frac{4}{17}$. Vel eorum differentiam 3. duc in maiorem 10. productumq; numerum 30. partire per eorum ſummam 17. Quotiens enim $1\frac{13}{17}$ ſubtractus ex maiore 10. reliquum faciet eundem medium terminum $8\frac{4}{17}$.

ALII tradunt medij termini inuentionem inter duos numeros datos in proportionalitate Harmonica hoc modo. Inuentis duobus minimis numeris in proportione duorum numerorum datorum, inuenient Quotientem, qui fit ex diuiſione differentiæ datorum duorum numerorum per ſummam minimorum duorum inuentorum, duci in minorem inuentum, & productum numerum minori dato adijci: Vel eundem Quotientem duci in maiorem inuentum, & productum numerum ex maiore dato ſubtrahi. Semper enim vel ille conflatus numerus, vel hic reliquus dabit medium terminum, qui quæritur Vt ſi inter 20. & 30. ſit inueniendus medius: minimi numeri proportionis inter 20. & 30. ſunt 2. 3. Si igitur differentia datorum numerorum 10. diuidatur per inuentorum ſummam 5. fit Quotiens 2. quem ſi ducamus in minorem inuentum 2. & productum 4. minori dato 20. addamus, vel ſi eundem Quotientem 2. ducamus in maiorem inuentum 3. & productum 6. ex dato maiore 30. demamus, inuenietur ſemper medius terminus 24. Vt hic apparet. 20. 24. 30.

BREVIVS ita medius terminus reperietur. Diuidatur datorum numerorum differentia per numerum, qui denominatorem proportionis, quam dati numeri habent, vna vnitate ſuperat. Quotiens enim minori termino additus dabit medium. Vt datis numeris 10. 40. habentibus proportionem quadruplam; ſi eorum differentia 30. diuidatur per 5. qui numerus denominatorem proportionis vna vnitate ſuperat, fiet Quotiens 6. qui additus minori termino 10. conficiet medium terminum 16 hoc modo 10. 16. 40.

SED ad memoriam iuuandam inueniemus fortaſſe commodius,

(licet

(licet aliquantò longiore operatione) medium terminum inter duos extremos datos, hoc modo. Si duo extremi non ſunt impares, vel pares, ſed unus par, & alter impar, duplica illos, & inter duplicatos conſtitue medium Arithmeticè proportionalem, qui ſemper erit ſemiſſis ſumma eorum. Per eos deinde tres numeros Arithmeticè proportionales quare ex regula 1. tres Harmonicè proportionales. Ita enim inuentus erit medius terminus inter duos, qui eandem inter ſe proportionem habent, quam dati duo extremi. Quod ſi fiat, vt primus inuentus ad ſecundum, ita primus datus ad alium, hoc eſt, ſi per primum inuentum diuidatur numerus ex ſecundo inuento in primum datum factus, reperietur medius inter datos duos extremos. Vt ſi inter 7. & 10. inueniendus ſit medius, duplica eos, vt fiant 14. & 20. Summa enim horum 34. par eſt, cuius ſemiſſis 17. eſt medius Arithmeticè inter 14. & 20. hoc modo 14. 17. 20. Ex his tribus inuenientur hi tres Harmonicè proportionales, 238. 280. 340. Si ergo fiat, vt primus inuentus 238. ad ſecundum 280. ita primus datus 9. ad aliud inuenietur numerus $8\frac{4}{17}$. qui medius eſt Harmonicè inter 7. & 10. qui ab initio propoſiti fuerunt.

III.

PROPOSITIS duobus numeris, reperiemus tertium vtroque maiorem in proportionalitate Harmonica, quando id fieri poteſt, (Pulchrè autem operatio docebit, quando id fieri nequeat) hac ratione. Numerum ex vno in alterum genitum partiemur per numerum, qui relinquitur, ſubtracta amborum differentia ex minore termino dato. Quotiens enim erit tertius terminus vtroque dato maior, quem quærimus. Quod ſi quando diuiſor reperiatur eſſe 0. vel quando amborum differentia ex minore termino ſubtrahi nequit, impoſſibile eſt, datis duobus numeris poſſe adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica. Vt ſi duo termini minores dentur 12. 16. diuidemus numerum ex eis procreatum 192. per 8. qui numerus relinquitur, ſi amborum differentia 4. ex minore 12. detrahatur. Quotiens enim 24. cum datis duobus conſtituit hanc Harmonicam proportionalitatem, 12. 16. 24. Hanc extendemus, ſi ad duos terminos 16. 24. tertium adiungamus, nimirum diuidendo 384. numerum ex 16. in 24. factum, per 8. qui numerus remanet, facta ſubtractione differentiæ amborum, quæ eſt 8. ex minore 16. Inuenietur enim numerus 48. Quare ita ſtabunt 4. termini Harmonicè proportionales, 12. 16. 24. 48. Quod ſi tentemus his adiungere alium maiorem, fruſtrà laborabimus. Nam datis duobus vltimis 24. 48. repertetur diuiſor eſſe 0. Differentia enim amborum, quæ eſt 24. ſubtracta ex minore 24. relinquit 0. Quod ſi quis proponat hos duos numeros, 10. 12. adiungetur illis tertius vtroque maior, 15. Ad hos verò duos 10. 11. apponetur tertius $12\frac{2}{9}$. Et ad duos 90. 99. tertius 110. At verò ad 3. 6. nullus adiungi po-

gi poterit: quia differentia inter ambos, quæ est 3. demptus ex maiore 3. relinquit 0. Atq; eodem modo quando dati numeri habeant proportionem duplam, non potest illis adiungi tertius proportionalis, quia differentia amborum semper est minoris termino æqualis. Multò magis cùm dati numeri habent proportionem dupla maiorem, non inuenietur tertius maior illis proportionalis Harmonicè, quia differentia amborum tunc semper maior est minore termino, atq; ideircò subtractio fieri nequit. Vt si dentur numeri 3. 7. quorum proportio est dupla sesquitertia, nimirum maior, quàm dupla, vides amborum differentiam 4. maiorem esse minore termino 3. Quare illis non adiungetur illius tertius proportionalis.

ALII ita inuestigant tertium terminum. Ducunt datorum numerorum differentiam in maiorem, numerumq; productum per numerum, qui relinquitur, subtracta eadem differentia ex minore numero, diuidunt; Quotientem denique maiori adjiciunt, vt tertium conficiant. Vt datis duobus numeris, 12. 16. si eorum differentia 4. ducatur in 16. & productus numerus 64. diuidatur per 8. (qui numerus relinquitur, subtracta eadem differentia 4. ex minore 12.) fit Quotiens 8. qui additus ad minorem 16. facit tertium 24. vt prius.

ITAQVE, vt duobus numeris adiungi possit tertius maior proportionalis, necesse est, illorum proportionem esse vel superparticularem, vel superpartientem; nimirum dupla minorem. Ex quo liquidò constat, Harmonicam proportionalitatem non posse progredi in infinitum versus maiores numeros, si de continuatione secundo modo accepta loquamur, qua propria est, vt in prima regula diximus. Nam cùm primum ventum erit ad duos numeros, quorum proportio dupla est, vel maior, ibi necessariò proportionalitas consistet, & vltra non promouebitur.

SEQVITVR quoque ex priori regula, quando minor terminus superat differentiam amborum sola vnitate, tertium procreari ex primo in secundum: quia productus hic numerus diuisus per illam vnitatem facit tertium numerum, vt diximus. Constat autem numero per vnitatem diuiso, Quotientem esse eundem numerum diuisum. Vt si dentur duo numeri 6. 11. quia minor 6. superat amborum differentiam 5. sola vnitate, erit tertius proportionalis numerus 66. qui fit ex 6. in 11. veluti hic vides, 6. 11. 66. Idem cernitur in hisce numeris, 2. 3. 6. & 10. 19. 190. Semper enim tertius fit ex primo in secundum: quia primus superat differentiam priorum duorum sola vnitate.

EX posteriori verò regula sequitur, quando minor terminus superat amborum differentiam sola vnitate, tertium procreari, si productus ex amborum differentia in maiorem, maiori adjiciatur: quia productus ille diuisus per illam vnitatem, non facit diuersum Quotientem ab eo porducto, &c. Vt datis iisdem numeris 6. 11. si differentia 5. ducatur in 11. productus 55. addatur maiori 11. fiet tertius terminus 66. vt prius.

QVA-

QVARE facilè quoque reperiri possunt tres numeri Harmonicè proportionales, si pro primo sumatur quilibet numerus, pro secundo verò eius duplum, detracta prius vnitate, pro tertio denique numerus, qui ex primo fit in secundum. Vt si primus sit 8. erit secundus 15. & tertius 120. & sic de cæteris. Proportio autem tam extremorum hoc modo inuentorum, quàm differentiarum semper erit multiplex à medio, qui perpetuò impar est, denominatæ. Vt in his proximis tribus, 8.15.120. proportio est quindecupla.

VNDE si quærantur tres minimi numeri integri Harmonicè proportionales in quacunque proportione multiplici, si quidem denominator est numerus impar, statuemus eum denominatorem in medio: semissem autem numeri proximè maioris in primo loco. In tertio denique collocabimus eum, qui ex primo in secundum fit. Vt si desiderentur tres numeri integri, & minimi in proportione septupla, locabimus 7. in medio, & 4. (id est, semissem numeri 8. proximè maioris quàm 7.) in primo loco, & in tertio numerum 28. ex 4. in 7. procreatum, vt hic vides, 4. 7. 28. Si verò denominator est par, statuemus numerum proximè maiorem in primo loco: in tertio verò collocabimus numerum, qui fit ex illo proximè maiore in denominatorem: In medio denique ponemus denominatorem duplicatum. Vt si inueniendi sint tres minimi integri in proportione octupla, constituemus 9. qui numerus proximè maior est denominatore 8. in primo loco; & in tertio numerum 72. ex 9. in 8 genitum, in medio denique duplum denominatoris, nimirum 16. vt hic apparet 9.16.72.

QVOD si tres numeri Harmonicè proportionales in data proportione inueniendi sint, siue illi minimi sint & integri, siue non, agendum erit hoc modo. In medio statuemus denominatorem datæ proportionis: In primo verò semissem numeri, qui denominatorem vna vnitate superat: In tertio denique loco locabimus numerum ex multiplicatione primi per medium factum. Veluti si quærantur tres in data proportione dupla supertripartiente septimas; erit denominator huius proportionis $2\frac{3}{7}$. collocandus in medio, & in primo numerus $1\frac{5}{7}$. nimirum semissis numeri $3\frac{1}{7}$. qui denominatorem $2\frac{3}{7}$. vnitate superat. Tertius denique erit $4\frac{8}{49}$ factus ex primo $1\frac{5}{7}$. in medium $2\frac{3}{7}$. Ita igitur stabunt tres numeri inuenti, $1\frac{5}{7}$. $2\frac{3}{7}$. $4\frac{8}{49}$. qui ad hos tres eiusdem denominationis reuocabuntur, $\frac{84}{49}$. $\frac{119}{49}$. $\frac{204}{49}$. si prius quilibet ad vnicam fractionem reducatur: Numeratores autem 84. 119. 204. erunt numeri integri Harmonicè proportionales, eritq; extremorum proportio, ac proinde & differentiarum, dupla supertripartiens septimas, qua videlicet data est.

IV.

DVOBVS numeris datis, reperiemus tertium vtroq; minorem in proportionalitate Harmonica, hoc modo. Numerum ex vno in alterum

rum productum partiemur per ſummam ex maiore dato, & amborum differentia collectam. Quotiens enim erit is, qui quæritur. Vt ſi dentur duo numeri 6. 12. ſi diuidamus numerum 72. ex 6. in 12. factum, per 18. ſummam ex 12. & amborum differentia 6. collectam, reperiemus tertium 4. minorem utroque illis proportionalem, vt hic cernis, 4. 16. 12. Hanc extendemus regrediendo verſus minores numeros, ſi duobus 4. 6. minorem tertium adiungemus 3. hoc modo 3. 4 6. 12. qui numerus 3. inuenietur, diuidendo numerum 24 factum ex 4. in 6. per 8. ſummam videlicet ex 6. & amborum differentia 2. collectam. Eodem modo duobus minoribus 3. 4 adiungetur tertius minor $2\frac{2}{5}$. *Atque in hunc modum decreſcet proportionalitas qualibet Harmonica continuè in infinitum. Vbi animaduertere licet admirabilem ſanè varietatem inter has tres proportionalitates, Arithmeticam, Harmonicam, & Geometricam; qua varietas tribus hiſce propoſitionibus explicatur.*

I. ARITHMETICA augetur in infinitum, ſed in infinitum non decreſcit.

II. HARMONICA contrà, decreſcit in infinitum, ſed in infinitum augeri non poteſt. Quod intelligendum eſt, ſi ita continuari debeat, vt quilibet tres numeri habeant proportionalitatem Harmonicam; hoc eſt, vt primus, ſecundus, ac tertius ſint Harmonicè proportionales: Item ſecundus, tertius, & quartus: Item tertius, quartus, & quintus, &c. Nam alias in vtramque partem extendi poteſt in infinitum, ſicut Geometrica, vt ſuprà in regula 1. diximus.

III. GEOMETRICA denique & augetur, & decreſcit in infinitum.

EST & hoc notatu dignum, in cubo reperiri quatuor terminos in Harmonica proportionalitate continuos, qui varièinter ſe comparati præcipuas perfectaſque conſonantias Muſicas exprimunt. Nam 6. eius baſes quadratas; 8. angulos ſolidi; 12. latera; & 24. angulos plani conſtituunt hos 4. terminos 6. 8. 12. 24. continuè proportionales Harmonicè. Proportio autem 8. ad 6. eſt ſeſquitertia, qua conſonantiam Diateſſaron, ſiue Quartam, conſtituit. Proportio verò 12 ad 8. ſeſquialtera eſt, continens conſonantiam Diapenten, ſiue Quintam. Proportio deinde 12. ad 6. vel 24. ad 12. dupla eſt, explicans conſonantiam Diapaſon, ſiue Octauam. At proportio 24. ad 8. tripla eſt, efficiens conſonantiam Diapaſon & Diapenten, hoc eſt, Duodecimam. Denique proportio 24 ad 6. quadrupla exiſtit, exhibens conſonantiam Diſdiapaſon, ſiue Decimamquintam.

V.

DATIS quotlibet numeris Arithmetica proportionalitatis, ſi quicunque numerus, ſine minimus, ſine non minimus, ab eis numeratus per ſingulos dimidatur, erunt Quotientes commerſo ordine Harmoni-

monicè proportionales. Et vicissim, datis quotlibet numeris in proportionalitate Harmonica, si numerus, quem metiuntur, per singulos dividatur, erunt Quotientes ordine converso Arithmeticè proportionales. Verbi gratia: Sint Arithmeticè proportionales 1. 2. 3. 4. 5. 6. Numerus, quem metiuntur, est 720. ex eorum continua multiplicatione inter se procreatus. At minimus ab eis numeratus erit 60. quem reperies per ea, quæ in Arithmetica practica cap. 10. scripsimus. Priore ergo per singulos datos diviso, invenientur hi in proportionalitate Harmonica continua.

720. 360. 240. 180. 144. 120.

Posteriore autem per eosdem datos diviso, reperientur hi:

60. 30. 20. 15. 12. 10.

Atque hi numeri inventi easdem proportiones habent, quas dati numeri Arithmetica proportionalitate, bini ac bini, converso tamen ordine: nimirum ut in Harmonica primus ad secundum, ita in Arithmetica secundus ad primum: Et ut in Harmonica secundus ad tertium, ita in Arithmetica tertius ad secundum, &c. Numeri quoque per minimum numeratum inventi, sunt minimi in suis proportionibus. Quòd si vicissim numerus ab inventis numeratus dividatur per singulos inventos, gignentur totidem numeri Arithmeticè proportionales: & si quidem minimus, quem metiuntur, dividatur, prodibunt iidem numeri Arithmeticè proportionales, per quos Harmonicè proportionales inventi sunt, & eodem quidem ordine, quo dati sunt, sed ordine converso, si cum inventis in Harmonica proportionalitate conferantur. Semper enim si in una proportionalitate progrediantur numeri à minoribus ad maiores, in altera à maioribus ad minores progressus fit, & contrà.

IGITVR si quis cupiat quotcunque terminos continuè Harmonicè proportionales, sumendi sunt totidem termini Arithmeticè quomodolibet proportionales, & numerus ab eis numeratus (& minimus quidem, si minimi desiderentur) per singulos dividendus, ut diximus.

VI.

DATIS tribus numeris in proportionalitate Harmonica, tantum fit ex priorum differentia in tertium, quantum ex differentia posteriorum in primum. Vt hic cernis. Nam tum ex 2. in 12. tum ex 4. in 6. fit numerus 24. Ratio huiusce rei est: quia cùm sit, ut 12. primus ad 6. secundum, sic 4. tertius ad 2. quartum; erit numerus ex primo 12. in quartum 2. factus, æqualis numero, qui ex secundo 6. fit in

Differentia.	2	4	
Propor. Har.	6	8	12

tertium 4. & ex 2. regula proportionalitatis Geometrica manifestum est. Idem constat in pluribus terminis, si terni ac terni sumantur cum suis differentijs, & in his 6. terminis apparet.

Differentia.	30	10	5	3	2	
Propor. Harm.	60	30	20	15	12	10

Nam ex 30. in 20. & ex 10. in 60. fiunt 600. Item ex 10. in 15. & ex 5. in 30. fiunt 150. Rursus ex 5. in 12. & ex 3. in 20. fiunt 60. Ac denique ex 3. in 10. & ex 2. in 15. fiunt 30. Atq; ita, & vides, tu cunda operatione probare potes, num dati quotcunque termini, aut inuenti, seruent continuam proportionalitatem Harmonicam, nec ne. Nam sumptis ternis, ac ternis, cum suis differentijs, si differentia commutato ordine ducantur in primum terminum ac secundum, producantque vtrobique numeros aquales, erunt termini omnes continue proportionales Harmonice, sin minus, nequaquam.

VII.

QVOD si quis reperire velit quinque minimos numeros, in quibus omnes tres proportionalitates existant: ita vt primi tres numeri habeant proportionalitatem Arithmeticam: Relicto autem primo, tres insequentes, proportionalitatem Geometricam, & tres postremi proportionalitatem Harmonicam: ac deinde primus, tertius, & quintus habeant datam proportionem continuam Geometricam. Vel si reperire quis velit tres numeros in data proportione continuè proportionales, ita vt inter primum, ac secundum cadat medius Arithmeticè proportionalis, & inter secundum ac tertium medius Harmonicè proportionalis, medius denique trium datorum numerorum sit inter medios inuentos medius proportionalis Geometricè, atq; quinque numeri ita inuenti sint minimi omnium, in quibus ea contingant; efficiendum id erit hac ratione.

9.	6.	3.	1$\frac{1}{2}$.	1.
9.	6.	3.	1$\frac{1}{2}$.	1.
18.	12.	6.	3.	2.

Sit data proportio tripla, in qua tres minimi sumantur termini, 9. 3. 1. Inter primos duos statuatur medius Arithmeticè, 6. Per hunc diuidatur quadratus medij numeri 3. assumpti, & Quotiens 1$\frac{1}{2}$. inter 3. & 1. statuatur, & in primo ordine hic posito apparet. Sed quia hic quotiens integer est cum fractione, reuocabimus eum ad vnicam fractionem hanc $\frac{3}{2}$. & in secundo ordine vides. Quod si eius numeratorem 3. accipiamus, relicto denominatore, & alios numeros secundi ordinis per denominatorem 2. multiplicemus, procreabimus quinque minimos numeros quaesitos, & in tertio ordine cernis. Nam 18. 12. 6. Arithmeticam habent

bent proportionalitatem: 12. 6. 3. Geometricam: & 6. 3. 2. Harmonicam: ac denique 18. 6. 2. triplam datam. Quod si non inueniendi sint minimi quinque termini in his tribus proportionalitatibus continuatis, accipi possunt quicunque tres numeri datam proportionem habentes continuam, & cum eis duo medij, nimirum secundus, & quartus, inuestigandi, vt dictum est.

Si minores termini cum maioribus conferendi sint, & data sit proportio subtripla, inueniemus eodem artificio ex his tribus minimis, 1. 3. 9. subtriplis hos quinque 2. 4. 6. 9. 18. Nam 2. 4. 6. seruant proportionalitatem Arithmeticam: 4. 6. 9. Geometricam: 6. 9. 18. Harmonicam; & 2. 6. 18. subtriplam propositam. Inueniendi modum conspicis in hisce tribus ordinibus appositis.

1.	2.	3.	$4\frac{1}{2}$.	9.	
1.	2.	3.	$\frac{9}{2}$.	9.	
2.	4.	6.	9.	18.	

RVRSVS sit data proportio sesquialtera, in qua tres minimi termini sint, 9. 6. 4. Inter 9. & 6. medium est Arithmeticè $7\frac{1}{2}$. Vt in primo ordine, Reuocetur ad vnicam hanc fractionem $\frac{15}{2}$. vt in secundo ordine. Sumpto autem numeratore 15. pro secundo numero, relicto denominatore, ducantur alij in secundo ordine in denominatorem, 2. Vt in tertio ordine factum est: Et quadratus numerus numeri 12. nimirum 144. diuidatur per 15. ac Quotiens $9\frac{3}{5}$. in minimis terminis, statuatur medius inter 12. & 8. eiusdem tertij ordinis. Hunc numerum $9\frac{3}{5}$ reuocabimus ad hanc vnicam fractionem, $\frac{48}{5}$. vt in quarto ordine. Sumpto denique numeratore 48. pro penultimo numero, relicto denominatore, ducemus alios quarti ordinis in denominatorem 5. inuentique erunt quinque minimi numeri quæsiti, vt in quinto ordine apparet.

9.	$7\frac{1}{2}$.	6.	4.		
9.	$\frac{15}{2}$.	6.	4.		
18.	15.	12.	$9\frac{3}{5}$.	8.	
18.	15.	12.	$\frac{48}{5}$.	8.	
90.	75.	60.	48.	40.	

Si minores numeri cum maioribus comparandi sint, inuenientur in proportione data sesquialtera quinque termini minimi, vt hic videre in quarto ordine. Eadem in cæteris est ratio.

POTES quoque, si placet, in primo ordine omnes quinque numeros constituere, & fractiones, si quæ sint, ad vnicam denominationem minimam reuocare, & deinde quamlibet ad vnicam fractionem; Nam si numeratores pro illis substituas, denominatore communi relicto, & reliquos numeros integros per communem denominatorem multiplices, efficies quinque numeros minimos integros quæsitos. Vt si sub quadrupla proportio proponatur, erunt minimi tres termini, 1. 4. 16. Additis simul 1. 4. erit summa dimidiū $2\frac{1}{2}$. medius Arithmeticè inter eos. Et si diuidatur quadratus numerus numeri 4.

4.	1	6.	1	9
4.	5.	6.	$7\frac{1}{2}$.	9.
4.	5.	6.	$\frac{72}{5}$	9.
20.	25.	30.	36.	45.

1.	$2\frac{1}{2}$.	4	$6\frac{2}{5}$.	16.
1.	$2\frac{5}{10}$	4.	$6\frac{4}{10}$	16.
1.	$2\frac{25}{10}$	4.	$6\frac{4}{10}$	16.
10.	25	40.	64.	16.

per 2 1. *fit Quotiens* $6\frac{2}{5}$. *medius Harmonicè inter* 4. *&* 16. *Duæ autem fractiones reducentur ad eandem denominationem, & in secundo ordine. Et fractionibus singulis ad vnicam fractionem reuocatis, constituentur tertius ordo. Sumptis autem numeratoribus, relinquendo denominatorem communem, & numeris integris per denominatorem communem multiplicatis, constituentur quinque minimi numeri quæsiti, & in quinto ordine vides. Atque in hunc modum quotcunque terminos proportionem aliquam seruantes, in quibus permista sunt fractiones, ad eosdem terminos integros reduces, quando res exigit.*

VIII.

QVANDO quatuor numeri ita ordinantur, vt ipsi sint Geometricè proportionales non continuè, & num autem mediorum cum extremis seruet proportionalitatem Arithmeticam, alter verò Harmonicam, ita vt in quatuor illis numeris tres proportionalitates, quas diximus, reperiantur, dicuntur quatuor illi numeri constituere Harmoniam maximam. Quando autem quatuor numeri ita ordinantur, vt in ipsis reperiantur duæ duntaxat proportionalitates, vt vel Geometrica, & Arithmetica: vel Geometrica, & Harmonica, vel Harmonica, & Arithmetica, dicuntur illi quatuor numeri Harmoniam minorem constituere.

MAXIMAM Harmoniam, in qua extremi termini habeant etiam proportionem datam, ita constitues. Sit data proportio qua 6. ad 1. quam extremi termini habere debent. Quoniam summa eorum est impar, accipio eorum duplos 12. & 2. inter quos medium Arithmeticè constituatur 7. hoc modo 12. 7. 2. Quòd si eorum summa fuisset par, accepissem statim medium inter eos in proportionalitate Arithmetica. Ex his tribus Arithmeticè proportionalibus inueniantur tres Harmonicè proportionales per primam regulam, 84. 24. 14. quorum extremi habent proportionem datam, nimirum eandem quam 12. ad 2. vel 6. ad 1. Si igitur inter extremos 84. 14. quæ semper ita inuenti pares erunt, statuatur etiam medius Arithmeticè, 49. erunt quatuor quæsiti numeri, 84. 49. 24. 14. Nam extremi habent datum proportionem, quam 6. ad 1. Deinde in eis reperiuntur omnes tres proportionalitates. Inter ipsos enim quatuor existit Geometrica proportionalitas non continua, cùm eadem sit proportio 84. ad 49. quæ 24. ad 14. vel 84. ad 24. quæ 49. ad 14. vt liquidò constat ex 7. proprietate trium harum proportionalitatum. At inter 84. 49. 14. Arithmetica. Ac denique inter 84. 24. 14. Harmonica ex constructione, vt hic vides.

Tres

Tres proportio-	84.	49.	24.	14.	*nalitates simul.*
Geometricè prop.	84.	42.	24.	14.	*Vel* 84. 24. 49. 14
Arithmet prop.	84.	49	14.		
Harmonicè prop.	84.	24.	14.		

Rursus sit data proportio, qua 3. ad 2. Quoniam iterum eorum summa est impar, sint eorum dupli 6.4. inter quos statuatur medius in Arithmetica proportionalitate, 4. hoc modo, 6. 5. 4. Ex his per primam regulam inuenio Harmonicè proportionales 30. 24. 20. Constituto autem medio Arithmeticè 25. inter 30. & 20. erunt eadem ratione quatuor numeri quæsiti, 30. 25. 24. 20. cùm habeant omnes tres proportionalitates, vt hic apparet.

Geometricè proport.	30	25	24	20	*Vel* 30	24	25	20
Arithmetic. proport.	30.		25.		20.			
Harmon. proport.	30.		24.		20.			

EOSDEM 4. numeros maxima Harmonia reperiemus, si pro extremis sumamus quosuis duos numeros datam proportionem habentes, pares, vel impares. Si enim inter hos statuatur medius Arithmeticè: fiat autem, vt inuentus ad primum extremum, ita alter extremus ad aliud, erit hic inuentus Harmonica proportionalitate medius inter eosdem extremos. Quando enim in 4. numeris Geometricè proportionalibus, quales sunt 4. inuenti, vnus mediorum est medius in proportionalitate Arithmetica, alter mediorum medius est in Harmonica inter eosdem extremos, vt diximus in 7. proprietate harum trium proportionalitatum. Quando igitur hi 4. numeri inuenti sunt integri, factum erit, quod proponitur: si verò admista sint fractiones, reducemus eos ad integros, vt ad finem antecedentis regula 7. scripsimus. Vt si proportio data sit dupla, statuemus extremos, 12. & 6. Dimidium summæ eorum 9. erit medius terminus inter eos Arithmeticè proportionalis, hoc modo, 12. 9. 6. Si igitur fiat, vt 9 ad 6. ita 12. ad aliud: Vel vt 9 ad 12. ita 6. ad aliud, inuenietur semper numerus 8. inter 12. & 6. in Harmonica proportionalitate medius. Quare sic stabunt 4. numeri maxima Harmonia, 12. 9. 8. 6. Postremò si in eadem proportione dupla extremorum sumamus pro extremis, 20. & 10. inueniemus medium Arithmeticè, 15. & Harmonicè 13 $\frac{1}{3}$ in minimis numeris, hoc modo, 20. 15. 13 $\frac{1}{3}$. 10. Si ergo tertium numerum ad vnicam fractionem $\frac{4}{3}$ 9. renocemus, & eius numeratorem 40. denominatore relicto, tertium statuamus, inuenientur alij, si inuentos per denominatorem 3. multiplicemus, vt hic vides: 60. 45. 40. 30.

MINOREM autem Harmoniam sic reperiemus. Si in 4. numeris debet reperiri sola proportionalitas Geometrica cum Arithmetica, cape tres numeros continuè proportionales Geometricè, quorum extremi pares ambo sint, vel impares. Si enim inter extremos statuas medium in proportionalitate Arithmetica, habebis 4. numeros quæsitos. Vt si sumantur hi tres numeri sesquialteri, 16. 24. 36. & inter extremos inueniatur medius Arithmeticè proportionalis, 26. erunt 4 quæsiti numeri, 16. 24. 26. 36. quorum tres 16. 24. 36. Geometricè, & tres 16. 26. 36. Arithmeticè proportionales sunt, ex constructione.

SI verò sola Geometrica cum Harmonica desideretur, cape quoque tres numeros quoscunque continuè proportionales Geometricè. Si enim inter extremos inuenias medium in Harmonica proportionalitate, habebis 4. numeros, qui quæruntur. Vt si sumantur iidem tres sesquialteri, 16. 24. 36. inuenietur inter extremos medius in Harmonica proportionalitate, 22 $\frac{2}{13}$. Sic ergo stabunt 4. numeri inuenti, 16. 22 $\frac{2}{13}$. 24. 36. qui reducentur ad hos integros, 208. 286. 312. 468. Si accepisses hos numeros tres duplos, 20. 10. 5. inuenisses inter extremos medium Harmonicum 8. hoc modo, 20. 10. 8. 5.

SI denique optes solam Harmonicam cum Arithmetica proportionalitate, accipe tres quoslibet Harmonicè proportionales. Si namq; inter medium, & alterutrum extremorum statuas medium Arithmeticum, inuenti erunt quatuor numeri, quos quærimus. Vt si sumãtur hi tres 6. 8. 12. erit inter priores duos medius Arithmetice proportionalis 7. Quare 4. inuenti numeri erunt hi, 6. 7. 8. 12. At inter posteriores duos erit medius in Arithmetica proportionalitate, 10. Sic ergo stabunt 4. inuenti numeri, 6. 8. 10. 12. qui omnes (quod casu quodam fortuito in hoc exemplo accidit) sunt Arithmeticè proportionales, & non solum tres 8. 10. 12. ex constructione: at soli tres accepti 6. 8. 12. habent proportionalitatem Harmonicam.

IX.

SI inueniendi sint quotcunque numeri Arithmeticè proportionales continuè, inter quorum binos ac binos cadant singuli medij Harmonicè proportionales integri, efficietur id hac ratione. Sumantur tot termini Arithmeticè proportionales, quot quæruntur; & bini in proportione binorum proximorum minimi. Si enim accipiatur minimus numerus numeratus à summis binorum minimorum acceptorum, atque hic in singulos acceptos numeros Arithmeticè proportionales ducatur, procreabuntur numeri, qui quæruntur. Sint enim verbi gratia inueniendi quatuor. Cape quatuor quoscunque numeros Arithmeticè proportionales, 3. 6. 9. 12. & 1. 2. minimos terminos proportionis 3. ad 6. & 2. 3. minimos proportionis 6. ad 9. & 3. 4. minimos in proportione 9. ad 12. eruntq; tres summa binorum minimorum 3. 5. 7. atq; ab his minimum numeratus, 105. Si igitur hunc ducas

cas seorsum in singulos acceptos, 3. 6 9. 12. procreabis 4. numeros Arithmeticè proportionales, quos desideras, 315. 630. 945. 1260. Nam inter primum & secundum in Harmonica proportionalitate medium est, 420. inter secundum & tertium, 756. Inter tertium & quartum, 1080. Vt hic cernis.

Arith. proport.	315	630	945	1260
Medij Harm.	420	756	1080	

ITAQVE si vis duos in data proportione duorum numerorum, inter quos cadat vnus integer medius Harmonicè, sume duos minimos in data proportione, & eorum summam duc in duos data proportionis. Vt si data sit proportio tripla inter 4. & 12. erunt minimi termini, 1. 3. quorum summam 4. si duxeris in 4. & 12. efficies 16. & 48. numeros quæsitos. Medium Harmonicum inter eos erit 24. Vt hic vides, 16. 24. 48. Si data proportionis numeri fuissent minimi 1. 3. duxissemus vtrumq; in eorum summam 4. factiq; essent hi duo numeri. 4. 12. inter quos cadit Harmonicè medius 6.

X.

SI autem volueris quotcunque terminos in continua proportione Geometrica data, inter quorum binos, ac binos, bini medij integri cadant, vnus in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica, assequeris id hoc artificio. Sume tot minimos numeros continuè proportionales Geometricè, quot desiderantur, & singulos multiplica per summam duorum in eadem proportione minimorum: Et si quidem producti fuerint omnes pares, ipsi erunt, quos quærimus; sin minus, eorum dupli dabunt quæsitos numeros. Sint enim inuenendi verbi gratia tres in proportione sesquialtera. Cape totidem minimos in data proportione, 4. 6. 9. & duos minimos in eadem, 2. 3. Horum summam 5. duc in singulos acceptos, & productos numeros, quoniam non omnes pares sunt, dupla, habebisque propositos numeros 40. 60. 90. Nam inter 40. 60. medium Harmonicum est, 48. Arithmeticum, 50. Et inter 60. 90. Harmonicum medium est, 72. Arithmeticum 75. Vt hic vides.

Geom. proportio.	40	60	90	
Medij Harmo.	48	72		
Medij Arithm.		50	75	

HINC facilè reperies duos numeros in data proportione, inter quos intercipiantur duo medij, alter secundùm proportionalitatē Arithmeti-

eam, & ſecundum Harmonicam alter. Sumptis enim minimis terminis data proportionis, ſi eorum ſummam vel in duos illos minimos terminos, vel in duos quoſcunque alios numeros datam habentes proportionem duxeris, erunt numeri producti, ſi pares ſunt, quæſiti: ſi verò vterque non eſt par, erunt eorum dupli, quos quærimus. Vt ſi data ſit proportio ſeſquitertia, cuius minimi numeri ſunt 3. 4. eorumque ſumma, 7. Si ergo duces 7. in 3. & 4. vel in 12. & 16. datam quoque habentes proportionem, produces vel 21. 28. vel 84. & 112. Et quia priores duo non ſunt pares, erunt eorum dupli, 42. 56. ij, quos quærimus. Poſteriores autem duo, quia pares ſunt, erunt quæſiti. Tam enim inter illos, quàm inter hos cadunt duo medij, quos quærimus, vt hic manifeſtum eſt.

Numeri inuenti.	1	4	2	1	1	5	6	1	1	1	8	4	1	1	1	1	2
Medij Harmon.	1		1	8	4	1	1	*Vel*	1	1		1	9	6	1	1	
Medij Arithm.	1	1	1	4	9	1	1		1	1	1	1	9	8	1		

XI.

Si verò quis petat ſibi dari tres numeros in proportionalitate Harmonica, inter quorum binos binos cadant medij, alter in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alter, exequemur id hac methodo. Inueniantur, per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmeticè proportionales 2. 50. 98. inter quorum priores binos ſit medius Geometricè, 10. & inter binos poſteriores, 70. ſtatuanturq; ordine ſic 2. 10. 50. 70. 98. Minimus autem numerus ab his quinque numeratus ſit 2450. Quo diuiſo per eoſdem quinque numeros, Quotientes ſint, 1225. 245. 49. 35. 25. Si igitur omnes Quotientes ſint pares, vel impares, erunt primus, tertius, & quintus; vt 1225. 49. 25. ij numeri, qui quæruntur. Sunt enim Harmonicè proportionales, vt conſtat ex 5. regula, cùm ſint Quotientes producti ex diuiſione numeri 2450. quem numeri 2. 50. 98. Arithmeticè proportionales numerant, per eoſdem numeros 2. 50. 98. Inter binos autem cadunt Geometricè proportionales, 245. ſecundus Quotiens; & 35. tertius Quotiens. Habent enim 1225. 245. 49. eaſdem proportiones conuerſo ordine, quas continuè proportionales 2. 10. 50. habent, vt conſtat ex 7. regula proportionalitatis Geometricæ. Eodemq; modo 49. 35. 25. eaſdem habebunt proportiones, quas conuerſo ordine habent continuè proportionales 50. 70. 98. cùm tam illi, quàm hi, ſint Quotientes producti per diuiſionem eiuſdem numeri 2450. per 2. 10. 50. & per 50. 70. 98. Certum autem eſt, inter binos eoſdem 1225. 49. & inter 49. 25. cadere quoque ſingulos Arithmeticè proportionales, cùm omnes pares ponantur, vel impares. Quod ſi non omnes ſint pares, duplicandi erunt omnes 5.

Quotien-

Quotientes, & paves numeri fiant, qui idem omnino præstabunt, quod quærimus. Habebunt enim easdem proportiones, quas eorum subdupli habent, ac proinde tam inter primum ac tertium secundus, quam inter tertium & quintum quartus medio loco erit Geometricè proportionalis. Cum ergo inter eosdem cadant medij Arithmeticè, constat propositum. Exemplum superius ob oculos hic positū esse vides.

Tres Har. prop. inuenti.	1225			49			25	
Medij Arith.		637			37			
Medij Geometr.			245			35		

XII.

RVRSVS si quarantur tres numeri in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos cadant bini proportionales, Geometricè vnus, & alter Harmonicè, satisfaciemus quæstioni hoc modo. Reperiantur iterum, per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmeticè proportionales, 2. 50. 98. inter quorum binos singuli medij cadant in proportionalitate Geometrica; sumanturque duo minimi 1. 25. in proportione priorum duorum: Item duo minimi 25. 49. in proportione duorum posteriorum; & horum summa 26. 74. numerent minimum numerum 692. in quem tres illi inuenti 2. 50. 98. ducantur. Producti enim numeri 1924. 48100. 94276. erunt, quos inquirimus. Cum namque easdem proportiones habeant, quas eorum submultiplices, 2. 50. 98. fit & quemadmodum inter binos horum singuli cadunt medij Geometricè, ita quoque inter binos illorum singuli intercipiantur medij in eadem proportionalitate Geometrica. Deinde quia summa minimorum numerorum 1. 25. & 25. 49. in proportionibus 2. ad 50. & 50. ad 98. (qui tres, 2. 50. 98. Arithmeticè sunt proportionales) numerant minimum numerum 962. qui in eos tres, 2. 50. 98. ductus produxit 1924. 48100. 94276. cadent inter binos horum trium singuli medij Harmonicè proportionales, & in 9. regula traditum est. Exemplum ergo cum medijs sic stabit.

Arith. prop. nu.	1924			48100			94276	
Medij Harm.		3700			63700			
Medij Geom.			9620			67340		

XIII.

EX his, qua diximus, inuenire quis poterit tres numeros proportionales sive Arithmeticè, sive Geometricè, sive Harmonicè, inter quorum bi-

rum binos cadant terni medij, unus Arithmetice, alter Geometrice, & reliquus Harmonice. Sint enim primum inueniendi tres Arithmetica proportionalitatis. Per antecedentem regulam 12. reperiantur tres numeri Arithmetica proportionalitatis, inter quorum binos cadant bini medij, unus in Geometrica proportionalitate, & in Harmonica alter. Qui tres numeri si fuerint omnes pares, vel impares, cadent quoque inter binos singulis Arithmeticè proportionales, atq; adeo quæstioni satisfacient. Si verò non omnes pares sint, aut impares, eorum dupli erunt, quos quærimus. Exemplum hic habes in tribus numeris antecedentis regulæ, qui omnes pares sunt, vt hic apparet.

Arith. prop.	1924				48100				94276		
Medij Har.		3700				65700					
Med. Geo.			9620				67340				
Med. Arith.				25012				71188			

DEINDE inueniendi sint tres numeri in Geometrica proportionalitate, inter quorum binos cadant terni medij, in singulis proportionalitatibus singuli, sitque proportio data, quam medij Geometrica proportionalitatis efficere debent, nimirum sesquialtera. Cape quinque numeros minimos datæ proportionis continuè proportionales, 16. 24. 36. 54. 81. *& duos minimos* 4 9. *in proportione primi* 16. *ad tertium* 36. *& tertij* 36. *ad quintum* 81. *Horum minimorum summam* 13. *duc in eundem primum* 16. *tertium* 36. *& quintum* 81. *Producti enim numeri* 208. 468. 1053. *duplicati, (quoniam ipsi non omnes pares sunt, aut impares; alias non essent duplicandi) nimirum* 416. 936. 2106. *(vt inter binos cadere possint singuli medij Arithmeticè) sunt ij quos quærimus. Nam inter binos cadunt bini medij, alter Harmonice, & Arithmetice alter, vt ex* 10. *regula patet: Et inter eosdem cadunt medij Geometrice, nimirum dupli eorum, qui fiunt ex eadem summa* 13. *duorum minimorum in secundum* 24. *& tertium* 54. *ab initio acceptos: quemadmodum hic manifestum est.*

Geom. prop.	1416				1936				2106		
Med. Harm.		1576				12096					
Med Geom.			1624				14044				
Med. Arith.				16761				15211			

POSTREMO sint inueniendi tres in Harmonica proportionalitate. Inuentis tribus in Harmonica proportionalitate, 1225. 49. 25. *inter quorum binos cadant bini Medij, unus Arithmetice & alter Geome-*

Geometricè, & in 11. regula docuimus, sint proportionis priorum duorum minimi duo numeri 25. 1. & proportionis duorum posteriorum minimi duo numeri 49. 25. quorum summa 26. 74. numerent minimum numerum 962. Hunc si in tres inuentos duxeris, gignes tres quaesitos 1178450. 47138. 24050. Nam inter binos cadent, bini medij, & unus Arithmetice, & alter Geometrice, quemadmodum inter eorum subduplicatas 1225. 49. 25. numerum numeri, qui fiunt ex eodem 962. in medios supra inuentos. Item inter eosdem binos cadent singuli medij Harmonice, & ex 12. regula constat, cum producti sint ex minimo numerato à summis minimorum terminorum, in omnes tres. Exemplum hic habes.

Har prop.	1178450	1	1	471381	1	1	24050	
Med. Ar.	1	6127941	1	1	355941	1	1	
Med. Geo.	1	1	2356901	1	1	131670	1	
Med. Har.	1	1	1	906501	1	1	131850	

XIV.

PARI ratione comperiemus duos numeros proportionem habentes duplicatam data proportionis, inter quos cadant tres medij, unus in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alius, & tertius in Harmonica. Sit enim data proportio 6. ad 3. & tres minimi in ea numeri, 4. 2. 1 erit q. ex defin. 10. huius lib proportio 4. ad 1. duplicata proportionis 2. ad 1. vel 6. ad 3. data. Ducatur summa 5 ex 4. & 1. collecta in duos quosuis numeros habentes eandem proportionē, quam 4. ad 1. hoc est, duplicatam data proportionis, & in 12. & 3. Producti autem numeri 60. 15. duplicentur, si ambo non sint pares, vel impares. Dupli enim 120. 30. sunt quos quaerimus. Et si vterque esset par, aut impar, ipsi essent quaesiti, & duplicatio non foret necessaria. Ita autem se habent tres medij inter 120. & 30. vt hic apparet.

Duo numeri inuenti.	1	120	1	1	1	30		
Medius Arith.	1	1	75	1	1	1		
Medius Geometr.	1	1	1	60	1	1		
Medius Harmon.	1	1	1	1	48	1		

XV.

POSTREMO si lubeat numerum quemcunq. propositum distribuere in quotuis partes Harmonicam proportionalitatem seruantes, efficies id hac ratione. Cape per 5. regulam tot numeros Harmonice propor-

rum binos cadant terni medij, vnus Arithmetice, alter Geometrice, & reliquus Harmonice. Sint enim primum inueniendi tres Arithmetica proportionalitatis. Per antecedentem regulam 12. reperiantur tres numeri Arithmetica proportionalitatis, inter quorum binos cadant bini medij, vnus in Geometrica proportionalitate, & in Harmonica alter. Qui tres numeri si fuerint omnes pares, vel impares, cadent quoque inter binos singuli Arithmeticè proportionales, atq; adeo quæstioni satisfacient. Si verò non omnes pares sint, aut impares, eorum dupli erunt, quos quærimus. Exemplum hic habes in tribus numeris antecedentis regulæ, qui omnes pares sunt, vt hic apparet.

Arith. prop.	1924				48100				94276		
Medij Har.		3700				63700					
Med. Geo.			9620				67340				
Med. Arith.				25012				71188			

DEINDE inueniendi sint tres numeri in Geometrica proportionalitate, inter quorum binos cadant terni medij, in singulis proportionalitatibus singuli, sitque proportio data, quam medij Geometrica proportionalitatis efficere debent, nimirum sesquialtera. Cape quinque numeros minimos datæ proportionis continuè proportionales, 16. 24. 36. 54. 81. & duos minimos 4 9. in proportione primi 16. ad tertium 36. & tertij 36. ad quintum 81. Horum minimorum summam 13. duc in eundem primum 16. tertium 36. & quintum 81. Producti enim numeri 208. 468. 1053. duplicati, (quoniam ipsi non omnes pares sunt, aut impares; alias non essent duplicandi) nimirum 416. 936. 2106. (vt inter binos cadere possint singuli medij Arithmeticè) sunt ij quos quærimus. Nam inter binos cadunt bini medij, alter Harmonice, & Arithmetice alter, vt ex 10. regula patet: Et inter eosdem cadunt medij Geometrice, nimirum dupli eorum, qui sunt ex eadem summa 13. duorum minimorum in secundum 24. & tertium 54. ab initio acceptos: quemadmodum hic manifestum est.

Geom. prop.	1416				1936				2106		
Med. Harm.		1576				11296					
Med Geom.			1624				11404				
Med. Arith.				1676				11521			

POSTREMO sint inueniendi tres in Harmonica proportionalitate. Inuentis tribus in Harmonica proportionalitate, 1225. 49. 25. inter quorum binos cadant bini Medij, vnus Arithmetice & alter Geome-

Geometricè, & in 11. *regula docuimus, sint proportionis priorum duorum minimi duo numeri* 25. 1. *& proportionis duorum posteriorum minimi duo numeri* 49. 25. *quorum summa* 26. 74. *numerent minimum numerum* 962. *Hunc si in tres inuentos duxeris, gignes tres quasitos* 1178450. 47138. 24050. *Nam inter binos cadent, bini medij, & unus Arithmetice, & alter Geometrice, quemadmodum inter eorum subsummisplices* 1225. 49. 25. *numerum numeri, qui fiunt ex eodem* 962. *in medios supra inuentos. Item inter eosdem binos cadent singuli medij Harmonice, & ex* 12. *regula constat, cum producti sint ex minimo numerato à summis minimorum terminorum, in omnes tres. Exemplum hic habes.*

Har prop.	1178450	1	1	471381	1	1	124050
Med. Ar.	1	612794	1	1	355941	1	1
Med. Geo.	1	1	235690	1	1	131670	1
Med. Har.	1	1	190650	1	1	131850	

XIV.

PARI ratione comperiemus duos numeros proportionem habentes duplicatam data proportionis, inter quos cadant tres medij, unus in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alius, & tertius in Harmonica. Sit enim data proportio 6. *ad* 3. *& tres minimi in ea numeri,* 4. 2. 1 *erit q. ex defin.* 10. *huius lib proportio* 4. *ad* 1. *duplicata proportionis* 2. *ad* 1. *vel* 6. *ad* 3. *data. Ducatur summa* 5 *ex* 4. *& 1. collecta in duos quosuis numeros habentes eandem proportionē, quam* 4. *ad* 1. *hoc est, duplicatam data proportionis, & in* 12. *& 3. Producti autem numeri* 60. 15. *duplicentur, si ambo non sint pares, vel impares. Dupli enim* 120. 30. *sunt quos quarimus. Et si vterque esset par, aut impar, ipsi essent quasiti, & duplicatio non foret necessaria. Ita autem se habent tres medij inter* 120. *& 30. ut hic apparet.*

Duo numeri inuenti.	1	120	1	1	1	30	
Medius Arith.	1	1	75	1	1	1	
Medius Geometr.	1	1	1	60	1	1	
Medius Harmon.	1	1	1	1	48	1	

XV.

POSTREMO si lubeat numerum quemcunq. propositum distribuere in quotuis partes Harmonicam proportionalitatem seruantes, efficies id hac ratione. Cape per 5. *regulam tot numeros Harmonice propor-*

proportionales, in quot partes numerus eſt diſtribuendus. Si enim per eorum ſummam diuides numeros, qui ex dato numero in numeros acceptos fiunt, erunt Quotientes partes, quas quæris, eruntque accepti numeris eodem ordine proportionales. Vel ſi per ſummam acceptorum numerorum partiaris datum numerum, & Quotientem in ſingulos numeros acceptos ducas, erunt numeri procreati, quos quæris. Vt ſi numerus 130. diſtribuendus ſit in tres partes Harmonice proportionales; ſi ſumantur tres numeri 6. 8. 12. ex 5. regula inuenti, & per eorum ſummam 26 diuidantur numeri 780. 1040. 1560. qui ex dato numero 130. in aſſumptos numeros 6. 8. 12. gignuntur, erunt Quotientes 30. 40. 60. partes, quas inquirimus. Vel ſi datum numerum 130. per 26. ſummam acceptorum numerorum diuidas, & Quotientem 5. ducas in ſingulos acceptos, 6. 8. 12. erunt procreati numeri 30. 40. 60. eadem partes, quas inquirimus. Conſtituunt enim datum numerum 130. ſuntque Harmonice proportionales, ſicuti aſſumpti numeri, 6. 8. 12. Eodem modo diuidetur numerus 10. in has tres partes $2\frac{4}{7}$. $3\frac{1}{7}$. $4\frac{8}{7}$. eadem modo proportionales. Eademque ratio eſt de pluribus partibus.

QVO PACTO EX PROPORTIONE æqualitatis omnes inæqualitatis proportiones rationales oriantur.

POSITIS tribus terminis æqualibus, ſine vnitatibus, ſine numeris, mirabile dictu eſt, quam facili, & iucunda ratione, ex varia illorum inter ſe additione, omnes proportiones rationales inæqualitatis in tribus terminis gignantur, hoc ordine.

ÆQVALES termini, ſiue numeri, procreant numeros duplos: DVPLI triplos: TRIPLI quadruplos: QVADRVPLI quintuplos; & ſic in infinitum.

DEINDE ex multiplicibus terminis inuentis, ſi ordinem inuertant, gignentur omnes ſuperparticulares, hoc ſeruato ordine. DVPLI inuerſi producunt ſeſquialteros: TRIPLI inuerſi ſeſquitertios: QVADRVPLI inuerſi ſeſquiquartos: atque ita deinceps.

TERTIO ex terminis ſuperparticularibus inuentis, ſi inuertant quoque ordinem, producentur omnes ſuperpartientes, hac ſerie. SESQVIALTERI inuerſi exhibent ſuperbipartientes. SESQVITERTII inuerſi ſupertripartientes: SESQVIQVARTI inuerſi ſuperquadrupartientes, &c.

QVARTO ex iiſdem terminis ſuperparticularibus eo ordine, quo inuenti ſunt, naſcentur omnes multiplices ſuperparticulares, hoc ordine.

SESQVIALTERI dant duplos ſeſquialteros: DVPLI ſeſquialteri triplos ſeſquialteros: TRIPLI ſeſquialteri quadruplos ſeſquialteros, &c. SESQVITERTII item gignunt duplos ſeſquiter-

quintertios: DVPLI ſeſquitertij triplos ſeſquitertios: TRIPLI ſeſquitertij quadruplos ſeſquitertios, &c. SESQVIQVARTI rurſus efficiunt duplos ſeſquiquartos: DVPLI ſeſquiquarti triplos ſeſquiquartos: TRIPLI ſeſquiquarti quadruplos ſeſquiquartos, &c.

QVINTO ex terminis ſuperpartientibus innatis elicientur omnes multiplices ſuperpartientes, hoc ordine.

SVPERBIPARTIENTES generãt duplos ſuperbipartientes: DVPLI ſuperbipartientes triplos ſuperbipartientes: TRIPLI ſuperbipartientes quadruplos ſuperbipartientes, &c. SVPERTRIPARTIENTES quoq; pariunt duplos ſupertripartientes; DVPLI ſupertripartientes, triplos ſupertripartientes: TRIPLI ſupertripartientes, quadruplos ſupertripartientes, &c. SVPERQVADRVPARTIENTES item gignunt duplos ſuperquadrupartientes: DVPLI ſuperquadrupartientes, triplos ſuperquadrupartientes: TRIPLI ſuperquadrupartientes, quadruplos ſuperquadrupartientes: atque ſic de cæteris.

MODVS autem, quo omnes hæ proportiones ex tribus terminis æqualibus generantur eo ordine, quem expoſuimus, eſt vnicus, iſque facillimus, nimirum hic.

SVMMA collecta ex primo termino datæ proportionalitatis, ex qua alia generari debet, ſemel ſumpto, & ſecundo bis, & tertio ſemel exhibet primum terminum proportionalitatis Geometricæ conſtituendæ.

SECVNDVS terminus Geometricæ proportionalitatis conſtituendæ oritur ex ſecundo, & tertio termino datæ proportionalitatis, ex qua alia oriri debet, ſemel ſumpto.

TERTIVM terminum proportionalitatis Geometricæ conſtituendæ offert tertius terminus datæ proportionalitatis, ex qua alia erui debet, ſumptus ſemel.

ATQVE hoc præceptum triplex ſub oculos ponitur hoc appoſite typo, vbi liquido conſtat, qui termini datæ proportionalitatis ſumendi ſint vel ſemel, vel bis, vel omittendi, vt termini alterius proportionalitatis conſtituantur.

TYPVS PROCREATIONIS VNIVS proportionis Geometricæ ex alia Geometrica.

Ordo termin. datæ proportionalitatis.	1 Primus	1 Secundus	1 Tertius
Primus cõſtituitur, ſi dati term. ita ſumantur.	1 Semel.	1 Bis.	1 Semel.
Secũdus conſtituitur, ſi term. dati ita ſumãtur.	1	1 Semel.	1 Semel.
Tertius conſtituitur, ſi ita ſumãtur dati term.	1	1	1 Semel.

SEQVVN-

SEQVVNTVR iam exempla generationis omnium proportionum ex æqualitatis proportione. Proponimus autem duas æqualitatis proportiones, vnam in vnitatibus, alteram verò in binarijs. Vbi hoc notatione dignum videtur, ex vnitatibus procreari semper minimos terminos cuiusque proportionalitatis trium terminorum.

GENERATIO MVLTIPLICIVM.

Æqualitatis proportio.	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
Dupli ex æqualibus creati.	1	4	2	2	1	8	4	2	2	2	2
Tripli ex duplis.	1	9	3	1	1	18	6	2	2	2	2
Quadrupli ex triplis.	1	16	4	1	1	32	8	2	2	2	2
Quintupli ex quadruplis.	1	25	5	1	1	50	10	2	2	2	2

GENERATIO SVPERPARTICVLARIVM.

Dupli inuerso ordine.	1	1	2	4	1	2	4	8	2	2	2
Sesquialt. ex duplis inuersis	1	9	6	4	1	18	12	8	2	2	2
Tripli ordine conuerso.	1	2	3	9	1	2	6	18	2	2	2
Sesquiter. ex triplis inuersis.	1	16	12	9	1	32	24	18	2	2	2
Quadrupli ordine conuerso.	1	2	4	16	1	2	8	32	2	2	2
Sesquiquar. ex quad. conuersis.	1	25	20	16	1	50	40	32	2	2	2

GENERATIO SVPERPARTIENTIVM.

Sesquialteri inuersi.	1	4	6	9	1	8	12	18	2	2	2
Superb. ex sesquial. inuersis.	1	25	15	9	1	50	30	18	2	2	2
Sesquiter. ordine inuerso.	1	9	12	16	1	18	24	32	2	2	2
Supertr. ex sesquit. inuersis.	1	49	28	16	1	98	56	32	2	2	2
Setquiquart. conuerso ordine.	1	16	20	25	1	32	40	50	2	2	2
Superquadr. ex sesquip. cõuersis.	1	81	45	25	1	162	90	50	2	2	2

GENERATIO MVLTIPLICIVM Superparticularium.

Sesquialteri directo ordine.	1	6	9	4	1	18	12	8	2	2	2
Dupli sesquialteri ex sesquialt.	1	25	10	4	1	50	20	8	2	2	2
Tripli sesquial. ex dupl. sesquial.	1	49	14	4	1	98	28	8	2	2	2
Quadrupl. sesquial. ex tripl. sesquial.	1	81	18	4	1	162	36	8	2	2	2

Sesqui-

Seſquitertij ordine recto.	1	16	12	1	9	1	3	2	1	24	1	18
Dupli ſeſquiter. ex ſeſquit.	1	49	21	1	9	1	9	8	1	42	1	18
Tripli ſeſquit. ex dup. ſeſquit.	1	100	30	1	9	1	20	0	1	60	1	18
Quadr. ſeſquit. ex trip. ſeſquit.	1	169	39	1	9	1	33	8	1	78	1	18
Seſquiquarti ordine recto.	1	25	20	1	16	1	5	0	1	40	1	32
Dupli ſeſquiquar. ex ſeſquiqua.	1	81	36	1	16	1	16	2	1	72	1	32
Tripli ſeſquiq. ex dup. ſeſquiq.	1	169	52	1	16	1	33	8	1	104	1	32
Quadr. ſeſquiq. ex trip. ſeſquiq.	1	289	68	1	16	1	57	8	1	136	1	32

GENERATIO MVLTIPLICIVM Superpartientium.

Superbipart. ordine recto.	1	25	1	5	1	9	1	5	0	1	30	1	18
Dupli ſuperbip. ex ſuperbip.	1	64	1	24	1	9	1	12	8	1	48	1	18
Tripli ſuperbi. ex dup. ſuperbip.	1	121	1	33	1	9	1	24	2	1	66	1	18
Quadr. ſuperb. ex trip. ſuperbip.	1	196	1	42	1	9	1	39	2	1	84	1	18
Supertripart. directo ordine.	1	49	1	28	1	16	1	9	8	1	56	1	32
Dupli ſupertrip. ex ſupertrip.	1	121	1	44	1	16	1	24	2	1	88	1	32
Trip. ſupertri. ex dup. ſupertrip.	1	225	1	60	1	16	1	45	0	1	120	1	32
Quadr. ſupertri. ex trip. ſupertr.	1	361	1	76	1	16	1	72	2	1	152	1	32
Superquadrup. recto ordine.	1	81	1	45	1	25	1	16	2	1	90	1	50
Dupli ſuperquad. ex ſuperq.	1	196	1	70	1	25	1	39	2	1	140	1	50
Trip. ſuperq. ex dup. ſuperq.	1	361	1	95	1	25	1	72	2	1	190	1	50
Quad. ſuperq. ex trip. ſuperq.	1	576	1	120	1	25	1	115	2	1	240	1	50

HIC enim perſpicuè cernis, quoslibet tres terminos ex tribus proximè antecedentibus procreatos eſſe ex præſcripto triplicis præcepti ſuperioris. Vt verbi gratia poſtremi hi tres, 576. 120. 25. ita producti ſunt ex tribus antecedentibus 361. 95. 25. Primus 576. coaceruatus eſt ex primo 361. ſemel, & ex ſecundo 95. bis, & ex tertio 25. ſemel. Secundus autem 120. conflatus eſt ex ſecundo 95. ſemel, & ex tertio 25 ſemel. Tertius denique 25. eſt tertius 25. ſemel ſumptus. Vt hac appoſita formula demonſtrat. Atque hoc eodem modo omnes alij geniti ſunt, initio facto à terminis aqualibus, 1. 1. 1. vel 2. 2. 2.

361		
95		
95	95	
25	25	25
576	120	25

QVO

QVO PACTO VICISSIM OMNIS proportio inæqualitatis ad æqualitatis proportionem reuocetur.

PROPOSITIS rursus tribus terminis inæqualibus in quacunque proportione, restituetur vicissim proportio æqualitatis, non minus iucunda, quam facili ratione, per variam subtractionem terminorum inæqualium, vnius ab altero. Ita autem res expedietur tripli hoc præcepto.

MINIMVS trium terminorum inæqualium datorum statuatur vnum extremum proportionis, ad quam reductio fit.

MINIMO eodem subtracto ex medio, reliquus numerus constituatur in medio loco proportionis, ad quam fit reductio.

SVMMA collecta ex constituto iam extremo semel, & medio termino bis sumpto, subtrahatur ex maximo datorum trium numerorum, & reliquus numerus alterum extremum nouæ proportionis fiat.

HAC ratione quauis proportio trium terminorum inæqualium reuocatur ad aliam proportionem, conferendo semper maiores numeros cum minoribus; & hac rursus eodem modo ad aliam, atque ita deinceps, donec tres termini æquales occurrant. Quod si tres dati termini habeant continuam proportionem duplam, reducentur ij prima statim operatione ad æqualitatem. Id quod exempla, quæ sequuntur, planum facient.

Quintupla proportio.	150	30	6
Quadrupla.	96	24	6
Tripla.	54	18	6
Dupla.	24	12	6
Æqualitatis proportio.	6	6	6

HOC enim exemplum monstrat, quintuplam proportionem reuocatam esse ad quadruplam, quadruplam ad triplam, triplam ad duplam, & denique duplam ad æqualitatem. In hoc altero verè exemplo videsis proportionem supertripartientem quartas reduci ad sesquitertiam, sesquitertiam ad triplam, triplam ad duplam, ac duplam tandem ad æqualitatem.

Propor-

Proportio ſupertripartiens quartas.	49	28	16
Seſquitertia.	9	12	16
Tripla.	9	3	1
Dupla.	4	2	1
Proportio æqualitatis.	1	1	1

VIDES ergo vltimam proportionem inæqualitatis ſemper eſſe duplam, hanc verò ſtatim ad æqualitatem reduci.

EST autem animadverſione dignum, ſi tres numeri dati fuerint in ſua proportione minimi, proportionem æqualitatis, ad quam fit reductio, conſiſtere in tribus vnitatibus: Si verò non fuerint minimi, proportionem illam æqualitatis conſiſtere in tribus numeris æqualibus, quorum quilibet tot vnitates continet, quotum locum occupant tres termini dati inter omnes tres terminos eiuſdem generis proportionis. Item vides in poſteriori exemplo tres datos numeros 49. 28. 16. minimos eſſe in proportione ſupertripartiente quartas, atque reductionem factam eſſe ad hanc æqualitatem, 1. 1. 1. At in priori exemplo occupant tres numeri dati, 150. 30. 6. ſextum locum inter omnes tres numeros continua proportionis quintupla, propterea quæ æqualitas inuenta eſt inter hos tres ſenarios, 6. 6. 6. Minimi enim ſiue primi numeri quintuplæ proportionis ſunt, 25. 5. 1. Secundi, 50. 10. 2. Tertij, 75. 15. 3. Quarti, 100. 20. 4. Quinti 125. 25. 5. Sexti autem, 150. 30. 6. vt manifeſtum eſt. Idem experiri licebit in omnibus aliis proportionibus.

SED & hoc obſeruatione non indignum videtur, quamlibet proportionem primo loco ad eam reduci, ex qua ortum habuit. Vt in priori exemplo quintupla reducta eſt ad quadruplam, ex qua orta eſt: quadrupla ad triplam. Hæc enim illam genuit, & ſic de cæteris, vſque ad æqualitatem. In exemplo verò poſteriori, Supertripartiens reuocata eſt ad ſeſquitertiam ordine inuerſo. Conſtat autem, numeros ſeſquitertios conuerſo ordine gignere ſupertripartientes, vt ſupra diximus. Item ſeſquitertia hæc, conferendo maiores numeros cum minoribus, reducta eſt ad triplam ordine inuerſo, quemadmodum tripla inuerſa generat ſeſquitertiam. Deinde tripla, conferendo maiores item numeros cum minoribus, redacta eſt ad duplam, & hæc ad æqualitatem, &c.

NEQVE verò ſilentio prætereundum cenſeo, ex tribus terminis cuiuſcunq; proportionalitatis Geometricæ, ſiue ea æqualitatis ſit, ſiue inæqualitatis, gigni poſſe quamlibet trium proportionalitatum, quas ſupra explicauimus, ſi ipſi termini variis modis inter ſe coagmententur. Proportionem enim trium terminorum Geometricam procreare aliam Geometricam trium terminorum, ſi primus terminus ſemel, ſecundus bis, & tertius ſemel pro primo termino ſumatur; pro ſecundo

autem secundus, & tertius semel, pro tertio denique, ipse tertius semel, perspicuè constat ex iis, quæ paulo ante scripsimus de ortu omnium proportionum inæqualitatis ex æqualitate proportionis.

AT verò vt ex eadem Geometrica proportionalitate signatur Arithmetica trium terminorum, seruabis hoc præceptum triplex.

SVMMAM ex primo, & secundo termino bis, & tertio semel collectam fac primum terminum Arithmeticæ proportionalitatis.

SVMMAM verò ex primo, secundo, & tertio semel confectam, statue secundo loco.

TERTIVM denique terminum constitue tertium.

Cuius quidem productionis typum hic vides.

TYPVS PROCREATIONIS PROportionis Arithmeticæ ex Geometrica.

Ordo terminorum datæ proportionalitatis.	1 Primus	1 Secundus	1 Tertius
Primus fit ex datis term. ita coacernatis.	1 Bis.	1 Bis.	1 Semel.
Secundus vero fit.	1 Semel.	1 Semel.	1 Semel.
Tertius denique hoc modo.	1	1	1 Semel.

NIHIL porrò interest, vtrum minimum numerum proportionalitatis Geometricæ facias primum terminum, an verò maximum, vt ex sequentibus exemplis apparebit.

GENERATIO ARITHMETICÆ PROportionalitatis ex Geometrica.

Geomet. prop.	1	1	1	1	1	1	1	4	1	4	4	1	4	1	1	9	1	6	1	4	1	1	4	1	1	6	1	9
Arith. propor.	1	5	1	3	1	1	1	20	1	12	1	4	1	1	34	1	19	1	4	1	1	29	1	19	1	9		

CONSIDERATIONE autem dignissimum est, differentiam constitutæ proportionalitatis Arithmeticæ semper æqualem esse summæ primorum duorum terminorum Geometricæ proportionalitatis, per quam constituitur. Sic vides in primo exemplo differentiam esse 2. summam ex 1. 1. In secundo, 8. summam scilicet ex 4. 4. In tertio 15. quæ summa conficitur ex 9. 6. In quarto denique, 10. minimam summam ex 4. 6. collectam, atque ita in aliis.

ITAQVE si Arithmetica proportionalitas constituatur ex proportione æqualitatis, erit differentia dupla vnius termini æqualis: vt perspicuum est in prioribus duobus exemplis.

DENI-

DENIQVE Harmonicam proportionalitatem oriri quoque ex Geometrica, hoc alio præcepto triplici planum fiet.

SVMMAM collectam ex primo bis, & secundo ter, & tertio semel sumpto, statue in primo loco proportionalitatis Harmonicæ.

SVMMAM vero confectam ex secundo bis, & tertio semel sumpto, in secundo loco.

SVMMAM deniq; secundi & tertij, in tertio loco.

VBI etiam nihil interest, Vtrum minimum terminum dicatur primum, vel maximus. Typum porrò huius generationis hic expressum vides.

TYPVS PROCREATIONIS HARmonicæ proportionalitatis ex Geometrica.

Ordo terminorum proportionalitatis.	1	Primus	1	Secundus	1	Tertius
Primus fit ex ter. datis sic in vnum collect.	1	Bis	1	Ter	1	Semel
Secundus vero sic.	1		1	Bis	1	Semel
Tertius deniq; hoc modo.	1		1	Semel	1	Semel

GENERATIO PROPORTIONALItatis Harmonicæ ex Geometrica.

Geomet. propor.	1	1	1	1	1	1	4	1	4	1	4	1	9	1	6	1	4	1	4	1	6	1	9
Harmo. propor.	1	6	1	3	1	2	1	1	2	4	1	1	2	1	8	1	1	4	0	1	1	6	1	1	0	1	1	3	5	1	2	1	1	5

IAM verò è contrario reducetur Harmonica proportionalitas quacunque ad æqualitatem hoc pacto.

DETRAHE minimum terminum ex medio, & quod relinquitur, fac medium terminum proportionalitatis constituendæ.

HOC medio inuento sublato ex minimo datæ proportionalitatis Harmonicæ, erit reliquus numerus, vnum extremorum proportionalitatis.

DENIQVE minimus datus semel, & medius inuentus bis in vnam summam collecti, & ex maximo dato subtracti, dabunt duplum alterius extremi. Semissis ergo huius erit ipsum alterum extremum.

HAC ratione reuocabitur Harmonica proportionalitas vel ad æqualitatem, vel ad proportionalitatem aliquam Geometricam, quæ ad æqualitatem redigetur, vt supra docuimus. Semper autem Harmonica proportionalitas propositi oritur ex illa Geometrica, si superius præceptum adhibeatur, ad quam per hoc præceptum reuocata est. Exempla hic vides.

Harm. propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15
Geom. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9

ALIA EXEMPLA.

Harmon. propor.	1	3	4	6	11	60	40	30	11	24	16	12
Geomety. propor.	1	2	1	1 ½	11	5	10	20	11	2	4	8
Æqualitas.	1 ½	1 ½	1 ½	11	5	5	5	11	2	2	2	

AT proportionalitas Arithmetica reuocabitur ad æqualitatem, vel ad Geometricam proportionalitatem, per quam constituitur, hoc modo.

MINIMVM terminum fac vnum extremorum. Subducto deinde eodem minimo ex medio, erit reliquus numerus conflatus ex medio constituendæ proportionalitatis, & altero extremo. Igitur si hic numerus reliquus duplus est minimi, secto eo bifariam, erit dimidiata pars tam medius terminus, quam alterum extremorum; reductaque erit data proportionalitas Arithmetica ad æqualitatem, ex qua ortum traxit.

3	9	15
3	3	3

VT detur Arithmetica proportionalitas, 3. 9. 15. si in Geometrica constituenda facias vnum extremum 3. ex minimo proportionalitatis Arithmetica data, & hunc eundem numerum demas ex dato medio 9 supererunt 6. qui numerus duplus est minimi 3. Redigitur ergo data proportionalitas ad æqualitatem hanc 3. 3. 3. ex qua oritur secundum superius præceptum.

SI verò reliquus ille numerus non est duplus minimi, secandus erit in duas partes, quæ cum minimo constituant proportionalitatem Geometricam continuam. Ad hanc enim illa reuocata erit.

34	19	4
9	6	4

VT si data sit Arithmetica proportionalitas, 34. 19. 4. Facto in Geometrica extremo vno, 4. minimo data Arithmetica proportionalitatis, eoque subducto ex medio 19.

die 19. relinquitur numerus 15. qui non eſt duplus minimi. Quare ſecto eo in 6. & 9. reducetur illa Arithmetica ad hanc Geometricam 9. 6. 4. ex qua rurſus ortum ducet, ex præſcripto ſuperioris præcepti.

SED quoniam reliquus ille numerus non poteſt ſemper diuidi in tales duas partes, qua cum minimo conſtituant continuam proportionalitatem Geometricam, (quo pacto autem ea diuiſio facienda ſit, & quando fieri in numeris nequeat, docebimus ad propoſ. 17. lib. 6.) niſi numeri ſurdi, irrationaleſue adſciſcantur; reuocabimus quamcunque proportionalitatem Arithmeticam ſtatim ad æqualitatem, ex qua, ſi termini æquales cum differentia propoſita concrementur, ortum duxit; hoc pacto.

MINIMVS terminus datus fiat vnus ex duobus extremis. Differentia autem proportionalitatis ſubducta ex medio, reliquus numerus fiat medius: & eadem differentia duplicata, atque ex maximo termino ſublata, fiat reliquus numerus alter extremorum.

VT ſi data ſit Arithmetica proportionalitas, 20. 27. 34. cuius differentia eſt 7. ſi 20. fiat vnum extremorum, & differentia 7. dematur ex 27. & eadem duplicata ex 34. reliqui erunt alij duo termini æquales, 20. 20. Ex hac æqualitate, cognita differentia 7. quam termini Arithmetica proportionalitatis habere debent, conficietur ipſa proportionalitas Arithmetica, hac ratione.

20	27	34
20	20	20

VNVS terminorum æqualium fiat minus extremum. Huic addatur differentia data, vt fiat ſecundus terminus. Eidem deniq; minori extremo adiiciatur data differentia duplicata, vt efficiatur maius extremum.

VT in dato exemplo, minus extremum erit 30. cui ſi differentia 7. addatur, fiet medius terminus 27. Et ſi eadem differentia 7. duplicata adiiciatur eidem minimo extremo 20. conflabitur maius extremum 34. Eodem pacto data hac æqualitate 15. 15. 15. ſi ex ea conſtitui debeat proportionalitas Arithmetica, cuius differentia ſit 20. addatur hac differentia ad 15. vnum terminorum æqualium, vt habeas ſecundum terminum 35. Quòd ſi eadem differentia duplicata, hoc eſt, numerus 40. ad eundem terminum æqualem adiiciatur, fiet tertius terminus, 55. Primus autem eſt 15. vnus terminorum æqualium, vt hic vides.

Differentia 20.

15	15	15
15	35	55

ATQVE pauca hæc prælibasse hoc loco sufficiat ex infinitis, quæ de immensa proportionum, proportionalitatumque vi ac natura, innumerabilibusque proprietatibus dici possent. Plura enim & quidem scitu pertucunda in plenione nostra Arithmetica, Deo annuente, explicabimus. Nunc ad Euclidem interpretandum revertamur.

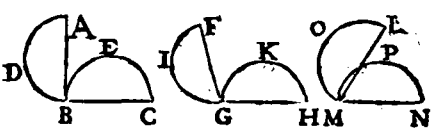
V.

RATIONEM habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se se mutuo superare.

QVONIAM Euclides in tertia definitione habitudinem duarum magnitudinum eiusdem generis, vocauerat rationem, quam nos eum aliis auctoribus proportionem dicimus; explicat nunc definitione hac 5. quidnam requirant duæ quantitates eiusdem generis, vt proportionem dicantur habere. Neque enim omnes lineæ, neque etiam omnes anguli plani, quamuis sint eiusdem generis quantitatis, proportionem habent inter se, vt mox dicemus. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quarum vtrauis multiplicata ita augetur, vt alteram tandem superet, adeo vt si alterutra quantumuis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiusdem quadrati, dicentur habere proportionem; (licet irrationalem, qua nullo possit numero exprimi) quia latus multiplicatum per 2. hoc est, bis sumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter constituant triangulum Isosceles, 2 erunt duo latera quadrati 120. primi. *diametro eiusdem maiora. Ita quoque circumferentia circuli, & diameter eiusdem, proportionem habent, (quamuis nondum sit nobis explorata, atq; cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc est, sumpta quater, circumferentiam superat, cum omnis circumferentia circuli, vt ab Archimede demonstratur, ter duntaxat comprehendat diametrum eiusdem, & particulam adhuc paulo minorem septima parte diametri. Eodem modo multæ curuilineæ cum rectilineis proportionem habebunt, quia & æqualitas & inæqualitas inter ea reperitur, cum & Hippocrates Chius Lunulam quandam, qua figura est contenta duobus arcubus circulorum instar Lunæ nouæ, quando falcata esse cernitur; & Archimedes parabolam quadrarit; hoc est, ille cuidam lunulæ, hic verò parabolæ quadratum inuenerit æquale. Hinc enim fit, vt & quadratum detur maius ea lunula, ac parabola; Atque è contrario lunula & parabola maior eo quadrato. Huc accedit, quod Archimedes in lib. de Spiralibus demonstrauit, lineam aliquam rectam esse circumferentiæ circuli æqualem, & aliam duplam, triplam aliam, &c. ac proinde & quadratum aliquod circulo esse æquale, vt in libello de dimensione circuli demonstrauit. De æqualitate porrò lineæ rectæ, & circularis; quadrati, & circuli, ad calcem*

lib. 6.

lib. 6. agemus. Adde, à Proclo quoque inter angulos rectilineos, ac curvilineos æqualitatem demonstrari. Ostendit enim lib. 3. in primum Euclidis, ad 12. Axioma, quod ipsi est 4. Postulatum, tam recto angulo, quam obtuso, & acuto, exhiberi posse angulum curvilineum æqualem. Sit enim angulus rectus A B C, contentus rectis æqualibus A B, B C, circa quas semicirculi describantur A D B, B E C. Quoniam igitur anguli semicirculorum A B D, C B E, sunt æquales; addito communi angulo mixto A B E, fiet angulus totus curvilineus D B E, toti angulo recto A B C, æqualis. Similiter ostendes, angulum curvilineum I G K, æqualem esse obtuso F G H; nec non



curvilineum O M P, acuto L M N, dummodo hic ab angulis semicircularum L M O, N M P, auferas communem angulum mixtum, qui continetur recta linea L M, & curva M P. Ex quibus constat, alterutrum angularum multiplicatum posse alterum excedere; quare proportionem inter se habebunt. At vero linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomodocunque multiplicata, infinitam nequit superare. Sic neque linea cum superficie, neque superficies cum corpore, eandem ob causam, vllam habebit proportionem. Denique non censebitur habere proportionem angulus contactus cum angulo rectilineo, quia angulus contactus, quantumvis multiplicatus, minor adhuc semper existit quovis angulo rectilineo, etiam minimo, vt propos. 16. lib. 3. demonstrauimus. Itaque vt apertius Euclides explicaret, quanam magnitudines eiusdem generis proportionem dicantur habere, hoc est, quas magnitudines eiusdem generis in definitione 3. intellexerit, voluit hac definitione eas intelligi, quæ hanc conditionem habeant, vt alterutra multiplicata alteram possit superare, alias vero non, etiamsi in eodem quantitatis genere videantur comprehendi, quales sunt linea finita, & infinita, angulus rectilineus, & angulus contactus, &c. Hanc ob causam in plerisque demonstrationibus proportionum, iubet toties multiplicare vnam propositarum magnitudinum, quæ proportionem ponuntur habere inter se, donec alteram excedat. Quod etiam facit propos. 1. lib. 10. & in plerisque aliis propositionibus. Taceant igitur, qui putant, per magnitudines eiusdem generis in definitione Proportionis, quam Euclides Rationem dixit, intelligendas esse, quæ sub eodem genere proximo, siue infimo continentur. Hac enim ratione non esset proportio inter angulos rectilineos, & curvilineos, aut inter figuras rectilineas, curvilineasque, cum non sub eodem contineantur genere proximo: quod falsum esse diximus. Stent quoque, qui existimant, intelligendas esse magnitudines

in eodem genere quantitatis, siue in eodem genere subalterno, & Logici loquuntur; ita & satis sit, & dua quantitates dicantur habere proportionem, si sint vel linea, vel superficies, vel corpora, vel anguli, vel numeri. Ita enim proportio esset inter angulum rectilineum, & angulum contactus, cum in genere anguli contineantur: Item proportionem haberent inter se, linea finita, & linea infinita, cum in genere linea existant: quorum vtrumque falsum esse, liquido ex hac definitione constat.

PERSPICVVM est ex his, quam ineptè, & quàm falsò, hanc definitionem exposuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, seu docere, quanam magnitudines proportionem dicantur habere, sed qualem proportionem dua quacunq; proposita quantitates habeant. Itaque, inquit, vult Euclides, si magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & amba multiplicentur aqualiter, hoc est, ambarum sumantur quacunque aque multiplicia, nempe C, tam multiplex ipsius A, quam multiplex D, ipsius B; habere magnitudines A, & B, eam inter se proportionem, quam earum aque multiplicia C, & D. Non aduertit autem, hoc, quod ait, non esse definitionem, sed Theorema decimumquintum huius 5. lib. vbi demonstratur ab Euclide, Partes cum pariter multiplicibus in eadem proportione esse, hoc est, A, B, magnitudines eandem habere proportionem, quam earũ aque multiplicia C, & D. Non ergo ita est intelligenda hæc definitio, præsertim cum tam ignota sit hæc proportio inter C, & D, quam illa inter A, & B; quandoquidem semper eadem est. Quare non rectè nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B. Est ergo seu sua huius definitionis illa, quem exposuimus, & liquido constat ex verbis Euclidis.

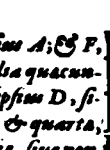


VI.

IN eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, à secundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, vtrumque ab vtroque vel vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, vel vna exeedunt; si ea sumantur, quæ inter se respondent.

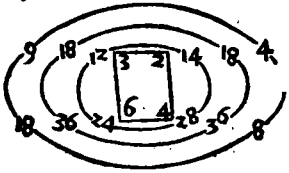
EXPLICAT hoc loco Euclides, quasnam conditiones requirant, apud Geometras, magnitudines, & eandem dicantur habere proportionem. Quod & vt exequatur, cogitur confugere ad earum aque multiplicia, & vt complectatur omnes proportiones magnitudinum, tam rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B, secunda; C, tertia; & D, quarta, sumanturq; prima, & tertiæ

tertia aquè multiplicia quacunque; E, quidem ipsius A; & F, ipsius C: Item sumantur secunda, & quarta alia quacunque aquè multiplicia; G, quidem ipsius B; & H, ipsius D, sive hæc duo posteriora sint ijdem multiplicia secunda & quarta, sicut priora duo multiplicia sunt prima, & tertia, sive non. Quòd si iam inter se conferantur sumpta aquè multiplicia ea, quæ inter se respondent, vt multiplex prima, & multiplex secunda inter se, hoc est, E, & G; Item multiplex tertia, & multiplex quarta inter se, hoc est, F, & H; deprehensum fuerit perpetuò, ea inter se habere, vt si E, multiplex prima magnitudinis A, minus fuerit, quàm G, multiplex secunda magnitudinis B; etiam F, multiplex tertia magnitudinis C, minus sit quàm H, multiplex quarta magnitudinis D: Aut si E, æquale fuerit ipsi G; etiam F, æquale sit ipsi H: Aut denique si E, maius fuerit quàm G; etiam F, maius sit quàm H: (quod est vtrumque ab vtroque vel vnà deficere, vel vna æqualia esse, vel vnà excedere) ita vt in nullo genere multiplicium contrarium possit reperiri, id est, vt nunquam E, minus sit quàm G, quin & F, minus sit quàm H; & vt nunquam E, æquale sit ipsi G, quin & F, ipsi H, sit æquale. Denique vt nunquam E, maius sit quàm G, quin & F, maius sit quam H. Si, inquam, deprehensum fuerit, aquè multiplicia quæuis accepta, perpetuò sese ita habere, vt dictum est; dicetur eadem esse proportio prima magnitudinis A, ad secundam magnitudinem B, quæ est proportio tertia magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quod si deprehenderetur aliquando, etiam in solo vno genere multiplicium, multiplex D, deficere à multiplici G, non autem multiplex E, deficere à multiplici H; Aut E, æquale esse ipsi G, at F, non æquale ipsi H; Aut denique E, excedere ipsum G, at F, non excedere ipsum H, quamuis in infinitis alijs multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates propositæ eandem habere proportionem, sed diuersas, vt ex defin. 8. fiet perspicuum.



ITAQVE vt demonstratione aliqua, per hanc 6. definitionem, concludantur quatuor quantitates eandem habere proportionem, ostendendum erit, (quod quidem diligenter ab Euclide & hoc 5. lib. & in alijs seruatur) quæcunque aquè multiplicia prima, & tertia collata cum quibuscunque aquè multiplicibus secunda, & quarta, habere semper conditionem prædictam defectus, æqualitatis aut excessus; ita vt nunquam contrarium eius inuenire possit. Similiter si quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedatur quoq; necesse est, qualibet aquè multiplicia prima, & tertia collata cum quibuslibet aquè multiplicibus secunda, & quarta, habere eandem defectus, æqualitatis, aut excessus conditionem. Debent enim definitio & definitum reciprocari. Vt autem perspiciatur, quonam pacto, propositis quatuor magnitudinibus eandem proportionem

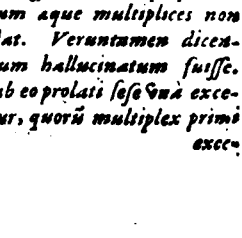
habentibus: quadam aquè multiplicia prima, & tertia magnitudinis, à quibusdam aquè multiplicibus secunda & quarta magnitudinis, vtrumque ab vtroque vnà deficiant; alia verò vnà aqualia sint; alia denique vnà excedant, si ea sumantur, quæ inter se respondent; placet vnum exemplum proferre in numeris. Sint igitur quatuor numeri 3. 2. 6. 4. sumanturq; primi & tertij aquè multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item secundi & quarti sumantur alij aquè multiplices, vt septupli 14. & 28. Vides igitur tum 12. multiplicem primi deficere à 14. multiplice secundi, quam 24. multiplicem tertij à 28. multiplice quarti. Rursus primi, & tertij sumantur alij aquè multiplices, nimirùm sextupli, 18. & 36. Item secundi, & quarti sumantur alij aquè multiplices, vt noncupli 18. & 36. Vides ergo, tum 18. multiplicem primi aqualem esse 18. multiplici secundi, quam 36. multiplicem tertij, 36. multiplici quarti. Postremò primi, & tertij sumantur alij aquè multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item secundi, & quarti alij aquè multiplices, vt dupli 4. & 8. Vides igitur tum 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem secundi, quam 18. multiplicem tertij, superare 8. multiplicem quarti. Si igitur in omnibus aquè multiplicibus, in quacunque sumantur multiplicatione, semper deprehendatur, vnum trium horum verum esse, dicetur eadem esse proportio 3. ad 2. quæ est 6. ad 4. aliàs non.



CAMPANVS verò atque Orontius, longè aliter definitionem hanc exponunt. Dicunt enim Euclidem velle, tum demum quatuor magnitudines eandem habere proportionem, cùm prima, & tertia aquè multiplicia, à secunda & quarta aquè multiplicibus, vtrumque ab vtroque, vel vnà deficiunt proportionaliter, hoc est, in eadem proportione, vel vnà aqualia sunt, vel vnà excedunt proportionaliter, si ea sumantur, quæ inter se respondent. Glarius, vt ait Campanus, quando earum aquè multiplicia proportionalia sunt, id est, cùm eandem proportionem habet multiplex prima ad multiplicem secundæ, quam multiplex tertia ad multiplex quarta. Sed quis non videt, si ita intelligatur definitio, Euclidem idem per idem definire? Quod sanè absurdum est. Præterea si Euclides vult, eas magnitudines in eadem esse proportione, quarum aquè multiplicia (si sumantur, & inter se conferantur eo ordine, quo dictum est) in eadem proportione existunt; cur, obsecro, in 4. Theoremate huius libri demonstrat, si fuerint quatuor magnitudines in eadem proportione, earum aquè multiplicia eo ordine, quem diximus, sumpta, eandem quoque habere proportionem? Immò cùm illud Theorema per hanc definitionem ostendatur, perspicuum est, idem per idem demonstrari, quod ridiculum

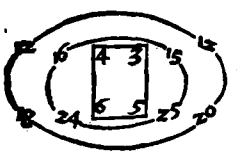
lum eſt, Geluti eo loco admonebimus. Accedit etiam, ſi ita interpretemur definitionem, plurima Theoremata quinti huius lib non poſſe demonſtrari, & propriis locis monebimus. Intelligenda eſt igitur definitio, & expoſuimus; nimirum propoſitis quatuor magnitudinibus, ſi quotieſcunque multiplex prima deficit à multiplici ſecunda, Gel aquale eſt, Gel excedit; neceſſariò etiam multiplex tertia tunc deficiat à multiplici quarta, Gel aquale ſit, Gel excedat, quicunque ſit ille defectus, exceſſuſve, non conſiderando, an proportionalis ſit, an non; ita & nunquam contingat, multiplicem prima à multiplici ſecunda deficere, multiplicem verò tertia non deficere à multiplici quarta: aut multiplicem prima aqualem eſſe multiplici ſecunda, multiplicem verò & tertia multiplici quarta non aqualem: aut denique multiplicem prima maiorem eſſe multiplice ſecunda, at multiplicem tertia multiplici quarta non maiorem. Propoſitis, inquam, quatuor magnitudinibus, quarum aque multiplicia ſumpta, & dictum eſt, perpetuò eam conditionem in defectu, aqualitate, & exceſſu ſeruant, dicuntur quatuor illa magnitudines eandem habere proportionem; quicquid ſit de earum aque multiplicium proportione, qua nunc non conſideratur: ſed quarto poſtea Theoremate demonſtrabitur, eum defectum, exceſſumve eſſe proportionalem.

PORRO Campanus conatur oſtendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & exceſſu. Nam ſi de quocunque intelligeretur, eſſent, ait, quatuor hi numeri 4. 3. 6. 5. in eadem proportione. Si enim primi & tertij, Gipote 4. & 6. ſumantur aque multiplices numeri, & dupli, 8 & 12. Item ſecundi & quarti nempe 3. & 5. aque multiplices, dupli quoque, 6. & 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplicem ſecundi, quam 12. multiplex tertij 10. multiplicem quarti. Idemque cernitur, ſi primi, & tertij ſumantur quadrupli 16. & 24. ſecundi verò, ac quarti capiantur tripli 9. & 15. Si igitur ſufficit, & aque multiplicia accepta ſua excedant ſeſe quomodocunque, & non requiritur, & proportionaliter ſe mutuò ſuperent, erit eadem proportio 4. ad 3. qua eſt 6. ad 5. quod falſum eſt, cùm proportio 4. ad 3. ſit ſeſquitertia, proportio verò 6. ad 5. ſeſquiquinta. Intelligendum igitur eſt defectus, aut exceſſus aque multiplicium, proportionalis: ita enim fiet, non eſſe eandem proportionem 4. ad 3. qua eſt 6. ad 5. quod eorum aque multiplices non ſeſe excedant proportionaliter, & conſtat. Veruntamen dicendum eſt, Campanum mirum in modum hallucinatum fuiſſe. Quamuis enim numeri aque multiplices ab eo prolati ſeſe ſua excedant, tamen quàm plurimi alij reperiuntur, quorum multiplex primi



exce-

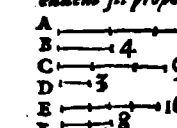
excedet quidem multiplicem secundi, vel aqualis erit; at multiplex tertij deficiet à multiplice quarti. Si enim in eius exemplo, primi & tertij sumantur quadruplices 16. & 24. At secundi & quarti, quintuplices sumantur, 15. & 25. excedet quidem 16. multiplex primi, 15. multiplicem secundi; At 24. multiplex tertij non excedet 25. multiplicem quarti; , sed deficiet. Quod si primi , & tertij sumantur tripli 12. & 18. At secundi, & quarti sumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi aqualis 12. multiplici secundi ; At verò 18. multiplex tertij, aqualis non erit 20. multiplici quarti, sed ab eo deficiet. Cùm igitur non deprehendantur qualibet aquè multiplicia dictorum numerorum sic se habere, vt si multiplex primi excedit multiplex secundi, multiplex tertij excedat quoque necessariò multiplex quarti; quamuis id in nonnullis aquè multiplicibus ita esse contingat: non dicentur, iuxta hanc definitionem 6. dicti numeri eandem habere proportionem, vt adhuc clariùs ex 8. definitione constabit.



CÆTERVM definitio ista complectitur etiam tres magnitudines eandem habentes proportionem, si modò secunda bis ponatur, vt quatuor habeantur. Exempli causa; Eadem dicetur proportio 9 ad 6. qua 6. ad 4. quoniam aquè multiplicia quacunque sumpta ad 9. & 6. vel vnà deficiunt ab aquè multiplicibus sumptis ad 6. & 4. vel aqualia sunt, vel vnà excedunt, &c.

VII.

EANDEM autem habentes rationem magnitudines, Proportionales vocentur.



VT si magnitudinum A, B, C, D, eadem sit proportio A, ad B, qua C, ad D; dicentur ea magnitudines proportionales. Eadem ratione, si eadem sit proportio E, ad F, qua F, ad G, dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autem quadam magnitudines proportionales continuè, inter quas reperitur proportionalitas continua, quales sunt magnitudines E, F, G: Quadam verò proportionales sunt nõ continuè, sed discretè, cuiusmodi sunt magnitudines A, B, CD. In his enim interruptio fit proportionum; in illis verò nequaquam, vt dictũ est in 4. definitione.

VIII.

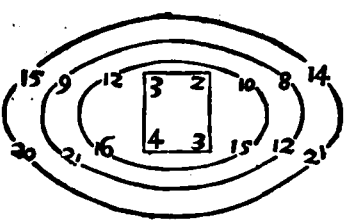
CVM verò æquè multiplicium multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicem secundæ; At multiplex

tiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ; tunc prima ad ſecundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

DECLARAT hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, vt maiorem dicatur habere proportionem prima ad ſecundam, quam tertia ad quartam, dicens. Si ſumpta ſint æquè multiplicia prima & tertia, item alia æquè multiplicia ſecunda & quarta; deprehenſumq; fuerit aliquando, (licet non ſemper) multiplex prima maius eſſe multiplice ſecunda, multiplex autem tertia non eſſe maius multiplice quarta, ſed vel minus, vel æquale; dicetur maior eſſe proportio prima magnitudinis ad ſecundam, quam tertia ad quartam; vt perſpicuum eſt in appoſito exemplo, in quo prima magnitudinis A, & tertia C, ſumptæ ſint triplicia E, & F; ſecunda verò B, & quarta D, quadruplicia G, & H. Et quoniam E, multiplex prima maius quidem eſt quàm H, multiplex ſecunda; At F, multiplex tertiæ maius non eſt quàm H, multiplex quartæ, immò minus; dicetur maior eſſe proportio A, primæ magnitudinis, ad B, ſecundam, quam C, tertia ad D, quartam.



NON eſt autem neceſſe, vt quatuor magnitudinum, prima ad ſecundam dicatur maiorem habere proportionem, quàm tertia ad quartam, æquè multiplicia ſecundum quamuis multiplicationem ſe ſe habere, vt multiplex quidem prima excedat multiplex ſecunda, at multiplex tertia non excedat multiplex quarta; ſed ſatis eſt, vt ſecundum aliquam multiplicationem ita ſe habeant. Poteſt namque interdum fieri, vt tum multiplex prima maius ſit multiplice ſecunda, quàm multiplex tertia multiplice quarta: Item vt & multiplex prima minus ſit multiplice ſecunda, & multiplex tertia multiplice quarta: Tamen quia hoc non contingit in omni multiplicatione, ſed aliquando multiplex prima ſuperat quidem multiplex ſecunda, at multiplex tertia vel minus eſt, vel æquale multiplici quartæ: propterea manet dicetur habere proportionem prima magnitudo ad ſecundam, quàm tertia ad quartam, non autem eandem, vt perſpicuum eſt in appoſito exemplo.



ITAQVE vt quatuor magnitudines dicantur proportionales, neceſſe eſt, vt æquè multiplicia earum, iuxta quaſuis multiplicationes acceptæ,

vel

Vel vnà deficiant, vel vnà æqualia sint, vel vnà excedant, vt in 6. definit. fuit expositum: Vt autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, satis est, vt secundam aliquam multiplicationem, multiplex prima excedat multiplex secunda, multiplex verò tertia non superet multiplex quarta, quamuis iuxta innumeras alias multiplicationes, æque multiplicia prima, ac tertia vnà excedant æque multiplicia secunda, & quarta.

QVOD si quando è contrario multiplex prima deficiat à multiplici secunda, non autem multiplex tertia à multiplici quarta, dicetur prima magnitudo ad secundam minorem habere proportionem, quam tertia ad quartam: quamuis secundum plurimas alias multiplicationes, æque multiplicia prima & tertia vnà deficiant ab æque multiplicibus secunda, & quarta. Vt in eisdem numeris propositi exempli, minor dicetur proportio 2. ad 3. quàm 3. ad 4. &c.

CVR EVCLIDES IN DEFIN. VI. ET VIII. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æquè multiplicia definierit.

QVONIAM mirum alicui videri possit, cur Euclides tum demum quatuor magnitudines eandem dixerit habere proportionem, hoc est, ita esse primam ad secundam, vt est tertia ad quartam, cùm æque multiplicia prima ac tertia iuxta quamcunque multiplicationem, & æque multiplicia secunda ac quarta iuxta quamcunque etiam multiplicationem accepta ita se habent, vt quotescunque multiplex prima maius est quam multiplex secunda, multiplex quoque tertia maius sit quam multiplex quarta; quotiescunque verò multiplex prima æquale est multiplici secunda, multiplex etiam tertia æquale sit multiplici quarta; quotiescunque denique multiplex prima minus est quàm multiplex secunda, multiplex etiam tertia minus sit quàm multiplex quarta: Item quare tum demum quatuor magnitudinum prima ad secundam maiorem esse proportionem voluerit, quàm tertia ad quartam, cùm aliqua æque multiplicia prima ac tertia, & alia æque multiplicia secunda ac quarta accepta ita se habent, vt multiplex prima sit maius quàm multiplex secunda, at multiplex tertia maius non sit, quàm multiplex quarta, sed vel æquale, vel minus. Quoniam, inquam, mirum alicui videri hoc possit, quòd ex illo excessu, æqualitate, & defectu æque multiplicium eo ordine sumptorum non statim appareat similis studo proportionum, dissimilis studove: aperiendum videtur hoc loco, quare ita magnitudines tum proportionales, tum non proportionales definire voluerit Euclides.

AD hanc difficultatem respondetur, Euclidem eas magnitudines voluisse appellare proportionales, quarum æque multiplicia ita se habent,

habent, vt dictum est, quia non habuit quid notius, per quod explicare potuisset magnitudines tam incommensurabiles, quàm commensurabiles eandem proportionem, vel non eandem habentes: neq; verò opus esse, vt ratio afferatur, cur res aliqua hoc aut illo modo definiatur, sed satis esse, vt nunquam res definita asseratur alicui conuenire, nisi prius, definitionem traditam eidem conuenire, demonstretur. Id quod in alijs etiam definitionibus cernitur. Nam quemadmodum Euclides defin. 10. lib. 1. angulum rectum appellauit eum, qui fit à linea super aliam lineam ad angulos æquales cadente, ita vt nunquam ei concedendum sit, angulum quempiam esse rectum, nisi prius ostenderit, eum ab eiusmodi linea effici. Item quemadmodum definitione vltima lib. 3. definiuit similia circulorum segmenta esse, in quibus anguli existentes sunt æquales, ita vt tunc solùm ei concedendum sit, segmenta esse similia, cùm probaueris angulos in eis existentes esse æquales: sic etiam defin. 6. & 8. huius lib. vocauit quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales, quarum æque multiplicia eam conditionem habent, quam explicauit, ita vt nunquam ei credendum sit, cùm quatuor magnitudines appellabit eandem habere proportionem, vel non eandem, nisi prius demonstrauerit, conditionem eam illis magnitudinibus conuenire. Sed quanquam responsio hæc vera sit, ac propria, tamen quia ex illa definitione non videtur colligi posse, vere magnitudines, quarum æque multiplicia illam conditionem habent, esse proportionales, vel non proportionales; etiamsi eas solùm Euclides velit appellare proportionales, vel non proportionales: explicabimus paulò accuratius, Euclidem recte eo modo definiuisse magnitudines proportionales, atq; adeò sine vlla dubitatione concedi posse à quouis, illas, quibus defin. 6. conuenit, vere eandem habere proportionem; illas verò, quibus definitio 8. conuenit, non eandem proportionem habere.

QVOD vt planius fiat, reuocandum ad memoriam est, duplicem esse proportionem; Rationalem, qua inter quantitates incommensurabiles existit, atque adeò omnis in numeris reperiri potest. Et irrationalem, qua inter quantitates incommensurabiles existit, & nullo modo in numeris potest reperiri. Si igitur Euclides de Rationalibus duntaxat proportionibus disputationem instituisset, potuisset quatuor magnitudines proportionales definire eo modo, quo lib. 7. defin. 20. proportionales quatuor numeros definiuit, nempe: Magnitudines proportionales sunt, cum prima secunda, & tertia quarta, æque multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe (vt nos ad eam defin. addidimus) cum prima secundam, & tertia quartam, æqualiter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes. Non proportionales verò magnitudines ita definire potuisset: Magnitudines nõ proportionales sunt, hoc est prima ad secundã habet maiorem proportionẽ, quam tertia ad quartã, cum prima secũda

magis

magis multiplex est, vel maior pars, maioresve partes, quàm tertia quarta: Vel certè cum prima secundam sæpius continet, quàm tertia quartam, sine eadem pars, aut partes vtrobique supersint, sint non; Vel cum prima secundâ toties continet, quoties tertia quartam, sed prima maiorem insuper partem, maioresve partes secunda includit, quam tertia quarta. Potuisset, inquam, Euclides ita definire magnitudines proportionales, ac non proportionales, si de solis rationalibus proportionibus ageret: quia omnes proportiones magnitudinum exhiberi possent in numeris, ac proinde definiri, vt numerorum proportiones eadem, vel diuersa, vt diximus. Nam proportio numerorum (vt ex Campano, aliisque scriptoribus, defin. 24. lib. 7. adiunximus) est habitudo quadam vnius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partesve: Vel certè secundum quod illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes. Quæ omnia perspicua sunt tum ex definitionibus quinque specierum proportionis rationalis tam maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, de quibus suprà egimus; tum ex ijs, quæ in defin. 20. & 24. lib. 7. scripsimus.

QVONIAM verò Euclides, non solum proportiones Rationales, sed Irrationales etiam complecti voluit, non potuit eo modo quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales definire: propterea quòd in proportione irrationali maior magnitudo neque multiplex esse potest minoris, neque eam semel aut aliquoties, & insuper aliquam eius partem aut partes continere: Minor item maioris neque pars esse potest, neque partes, quippe cùm magnitudines irrationalem habentes proportionem incommensurabiles sint, ita vt nullam partem aliquotam communem, quamuis minimam, possint habere. Quocirca coactus est se conuertere ad proportiones magnitudinum rationales, hoc est, ad proportiones numerorum, cùm omnis proportio rationalis, siue magnitudinum commensurabilium sit, vt proportio numeri ad numerum, vt lib. 10. propos. 5. demonstratur: Coactus, inquam, est inuestigare aliquid, quod certum sit conuenire quibuslibet quatuor numeris siue magnitudinibus commensurabilibus, eandem habentibus proportionem, vel non eandem: adeò vt, si idem illud conuenire demonstretur quatuor magnitudinibus, etiam incommensurabilibus iure optimo magnitudines illæ quatuor proportionales etiam dici possint, vel non proportionales: quandoquidem eandem habent proprietatem, quam quilibet quatuor numeri proportionales, vel non proportionales, immò quam qualibet quatuor magnitudines commensurabiles eandem habentes proportionem, vel non eandem, necessario habere demonstratur. Neque enim aliunde cognoscere, vel explicare aliter possumus magnitudines incommensurabiles proportionales esse, aut non proportionales, nisi per aliquid, quod certum sit conuenire, vt diximus, numeris quibuscunque, vel magni-

magnitudinibus commensurabilibus, eandem, vel non eandem habentibus proportionem, in quibus euidenter similitudo, dissimilitudóve proportionum cernitur. Quemadmodum quia quando in circulorum segmentis anguli aquales existentes, sunt commensurabiles quatuor rectis, hoc est, quando sunt eadẽ pars, vel eadem partes quatuor rectorum, sunt quoque ipsa segmenta eadem pars, vel eadem partes circulorum, vt ad finem lib. 6. demonstrabimus; vt merito similia appellentur, ac propterea & omnia segmenta alia, in quibus sunt anguli aquales, etiamsi non sint commensurabiles quatuor rectis, dicantur quoque similia: quandoquidem, quando anguli quatuor rectis commensurabiles sunt, verè illa segmenta similia sunt, hoc est, eadem partes circulorum, licet hoc in segmentis, quando anguli in eis existentes quatuor rectis sunt incommensurabiles, non cernatur, quòd tunc segmenta neque eadem pars, neque eadem partes possint esse circulorum, sed ipsis circulis omnino incommensurabilia existant. Neque enim aliud indicium habere possumus, segmenta similia esse aut dissimilia, nisi angulorum in eis existentium aqualitatem, vel inaqualitatem, ex qua veram similitudinem, aut dissimilitudinem segmentorum circulis commensurabilium colligimus. Quam ob rem sicut nemo similitudinem hanc segmentorum in dubium reuocat, quanquam hac similitudo in segmentis, qua circulis incommensurabilia sunt, non ita euidenter appareat, vt in segmentis, qua circulis sunt commensurabilia; ita non rectè fecerit, qui similitudinem proportionum in magnitudinibus incommensurabilibus in dubium reuocet, quando comperiet, illis conuenire, quod omnibus magnitudinibus proportionem eandem rationalem habentibus conuenire certum sit, licet hac proportionum similitudo non tam euidens sit in magnitudinibus incommensurabilibus.

ITAQVE quoniam propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi ac tertij aquè multiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi ac quarti aquè multiplicibus secundum quamuis etiam multiplicationem, semper verum est, vt mox demonstrabimus; si multiplex primi maior est multiplice secundi, multiplicem tertij maiorem quoque esse necessariò multiplice quarti; Et si ille aqualis est, hunc quoque esse aqualem; & si minor, minorem: Et contrà, quia propositis quatuor numeris, sumptisq; aquè multiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem; item aquè multiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem, si multiplex primi existente maiore, quàm multiplex secundi, multiplex tertij maior quoque sit, quàm multiplex quarti: Et si illo existente aquali, hic quoq; aqualis sit, & illo existente minore, hic similiter minor existat, perpetuò verum est, quatuor numeros esse proportionales: Rursus quia propositis quatuor numeris, quorum primus ad secundum maiorem proportionem habeat, quam tertius ad

quartum, ſumptiſque aquè multiplicibus primi ac tertij, item aquè multiplicibus ſecundi ac quarti, neceſſariò interdum accidit, vt multiplex primi maior ſit multiplice ſecundi, multiplex verò tertij non ſit maior multiplice quarti: Et contrà, quia quatuor propoſitis numeris, ſumptiſque aquè multiplicibus primi ac tertij, item aquè multiplicibus ſecundi ac quarti, ſi accidat nonnunquam, multiplicem primi maiorem eſſe multiplice ſecundi, at multiplicem tertij non maiorem multiplice quarti, ſine vlla dubitatione verum eſt, maiorem eſſe proportionem primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum. Quoniam, inquam, ita ſe res ſemper habet in numeris, atque adeò & in magnitudinibus commenſurabilibus, ita vt contrarium nunquam inueniatur, non immeritò dicentur quæcunque quatuor magnitudines, etiam incommenſurabiles, eandem habere proportionem, cum ſumptis aquè multiplicibus prima ac tertia iuxta quamuis multiplicationem, item aquè multiplicibus ſecunda ac quarta ſecundum quamuis etiam multiplicationem, perpetuò deprehenditur, multiplicem tertia maiorem eſſe multiplice quarta, quotieſcunque multiplex prima maior eſt multiplice ſecunda; multiplicem verò tertia aqualem eſſe multiplici quarta, quando multiplex prima aqualis eſt multiplici ſecunda; multiplicem denique tertia minorem eſſe multiplice quarta, hocipſo, quòd multiplex prima minor eſt multiplice ſecunda. Eadem ratione iure optimo dicentur quatuor quæcunq; magnitudines tam commenſurabiles, quàm incommenſurabiles, non habere eandem proportionem, ſed maiorem eſſe proportionem prima ad ſecundam, quàm tertia ad quartam, cum ſumptis aquè multiplicibus, vt dictum eſt, interdum contingit, multiplicem prima eſſe maiorem multiplice ſecunda, multiplicem verò tertia non maiorem multiplice quarta: quandoquidem prior conditio in omnibus numeris proportionalibus, poſterior autem in non proportionalibus perpetuò reperitur, vt iamiam demonſtrabimus; nullumque aliud indicium habere poſſumus, quo magnitudines incommenſurabiles cognoſcantur eſſe proportionales, vel non proportionales: præſertim cùm magnitudines incommenſurabiles alijs magnitudinibus, qua hoc modo proportionales eſſe demonſtrantur, ſæpenumero alia via oſtendantur eandem habere proportionem, quam numerus ad numerum, vt nullo modo dubitandum ſit, quin omnes magnitudines, etiam incommenſurabiles, quarum aquè multiplices ita ſe habent, vt in 6 defin. dictum eſt, ſint proportionales, &c. Niſi enim hoc verum eſſet, ſequeretur haud dubiè ex illa proportionalitate aliquando abſurdũ aliquod manifeſtum: quod tamen hactenus non accidit, ſed potiùs ea, quæ ex magnitudinibus in eo ſenſu proportionalibus demonſtrantur, veriſſima eſſe plerunque alia via, vt diximus, oſtenduntur; vt poſtea etiam demonſtrabimus. Quæ cùm ita ſint, liquidò conſtare exiſtimo, cur Euclides in duabus illis defin. adhibuerit (& quidem rectè) magnitudinum

dixerim propositurum æquè multiplices magnitudines. Sed iam id, quod pollicitis sumus, Geometricè demonstremus, adscitis nonnullis propositionibus lib. 7. quæ nullo modo ex 6. & 8. defin. aut ex demonstrationibus huius lib. 5. pendent, & commodissimè ante lib. 5. possint demonstrari; atque adeò hic assumi, & iam demonstrata. Hoc autem efficiemus quatuor propositionibus, quæ sequuntur.

I.

PROPOSITIS quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi ac tertij æquè multiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi & quarti æque multiplicibus iuxta quamcunque etiam multiplicationem; si multiplex primi maior sit multiplice secundi, erit quoque multiplex tertij maior multiplice quarti; & si multiplex primi æqualis sit multiplici secundi, erit & multiplex tertij æqualis multiplici quarti; si denique multiplex primi sit multiplice secundi minor, erit & multiplex tertij multiplice quarti minor.

HABEAT numerus primus A, ad secundum B, eandem proportionem, quam tertius C, ad quartum D; sumanturque primi A, & tertij C, æquè multiplices E, F: Item secundi B, & quarti D, æquè multiplices G, H, qualiscunque hæc multiplicatio sit. Dico si E, multiplex primi A, maior est quàm G, multiplex secundi B, maiorem quoque esse F, multiplicem tertij C, quàm H, multiplicem quarti D. Et si E, æqualis sit ipsi G, æqualem quoque esse F, ipsi H. Si denique E, minor sit quàm G, minorem quoque esse F, quàm H. Quoniam enim est, ut A, ad B, ita C, ad D; a erit permutando etiam, ut A, ad C, ita B, ad D: b Ut autem A, ad C, ita est E, ad F; quod idem numerus ipsos A, C, multiplicans produxerit ipsos E, F, quippe cùm E, & F, ipsorum A, & C, sumpti sint æquè multiplices. Et eadem de causa, ut B, ad D, ita est G, ad H.

2, 3	A, 3	C, 6.	F, 18.
G, 4	B. 2.	D, 4.	H, 8.
E, 18.	A, 3.	C, 6	F, 36.
G, 18.	B, 2.	D, 4.	H, 16.
E, 12	A, 3	C, 6	F, 24
G, 14	B, 2.	D, 4.	H, 28

a 13. septimi.
b 17. septimi.

Igitur ex lemmate propos. 14. lib. 7. erit quoq; ut E, ad F, ita G, ad H, c *Et permutando, ut E, ad G, ita F, ad H. Quocirca si E, maior est quàm G, erit quoq; F, maior quàm H, ut in primo exemplo. Si verò F, æqualis* c 13 septimi.

est ipsi G, erit quoque F, ipsi H, aqualis, & in secundo exemplo: Si denique E, minor est quàm G, erit quoq; F, minor quàm H, vt in tertio exemplo. Quod erat demonstrandum.

II.

PROPOSITIS quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum, si sumantur æquè multiplices primi ac tertij, item æquè multiplices secundi ac quarti, fieri potest, vt multiplex primi maior sit, quàm multiplex secundi, multiplex autem tertij non maior, quàm multiplex quarti.

HABEAT primus numerus A, ad secundum B, maiorem proportionem, quàm tertius C, ad quartum D. Dico fieri posse, & sumptis æquè multiplicibus primi A, & tertij C, item æquè multiplicibus secundi B, & quarti D, multiplex ipsius A, primi sit maior quàm multiplex ipsius B, secundi, at multiplex ipsius C, tertij maior non sit, quàm multiplex ipsius D, quarti. Multiplicantes enim se mutuò numeri B, D, faciant E. Et quoniã D, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur genitum ex C, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque D, eundem genitum ex C, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur D genitum ex C, in E, per F, fiet q; propterea ex D, in F, numerus, quem D, per F, metitur, ex pronũ. 9. lib. 7. hoc est, numerus idem, qui fit ex C, in E. Quia igitur idem numerus gignitur ex D, primo in F, quartum, qui ex C, secundo fit in E, tertium, a erit & D, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad F, quartum: Et conuertendo, & C, ad D, ita F, ad E.

K, 56	H, 7.		O, 21.	l, 28.
F, 8.	G, 1.		A, 3	C, 4.
	E, 6.		B, 2.	D, 3.
M, 54	N, 6.		P, 20.	L, 30.
K, 160.	H, 440.		O, 60	l, 20.
F, 8.	G, 22.		A, 3.	C, 1.
	E, 80		B, 8.	D, 10.
M, 160.	N, 80.		P, 24.	L, 39.

a 19. septimi.

RVRSVS quia B, metitur E, ex pronunc. 7 lib. 7. & E, metitur procreatum ex A, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoq; B, eundem procreatum ex A, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur B, procreatum ex A, in E, per F G fiet q; idcirco ex B, in F G, numerus, quem B, metitur per F G, ex pronunc. 9. lib. 7. hoc est, numerus idem, qui fit ex A, in E. Quia igitur idem numerus ex B, primo in F G, quartum, & ex A, secundo in E, tertium gignitur, b erit & B, primus ad A, secundum, ita E, tertius ad F G, quartum: Et conuertendo, & A, ad B,

b 19. septimi.

ita

item F G, ad E. Quoniam ergo est, vt F G, ad E, ita A, ad B; Est autem proportio A, ad B, posita maior, quàm C, ad D; erit quoque proportio F G, ad E, maior quàm C, ad D: Ostensum autem est, esse vt C, ad D, ita F, ad E. Igitur proportio F G, ad E, maior quoque erit proportione F, ad E, ac proinde numerus F G, maior erit numero F: quæ omnia ex ijs, quæ in defin. 20. lib. 7. scripsimus, perspicuè consequuntur. Superet igitur F G, ipsum F, numero G.

SVMANTVR iam ipsorum F, G, C, aquè multiplices K, H, ea lege, vt H, sit quidem maior quàm E, at I, non minor quam D, erit q; ex scholio propos. 5. lib. 7. totus K H, ita multiplex totius F G, vt est multiplex K, ipsius F, vel I, ipsius C. Sumantur rursus ipsorum D, E, aquè multiplices L, M N, ea lege, vt L, sit multiplex ipsius D, proximè maior quàm I; hoc est, tales aquè multiplices, vt subtracto numero D, ex L, reliquus numerus maior non sit, quàm I, sed vel aqualis; vt in secundo exemplo, vel minor, vt in primo exemplo contingit. Et quoniam ostensum est ita esse D, ad C, vt E, ad F; & ita est C, ad I, vt F, ad K, ex constructione, quod I, K, sumpti sint ipsorum C, F, aquè multiplices; erit quoque ex aquo, vt D, ad I, ita E, ad K.

K, 56.	H, 7	O, 21	I, 28.
F, 8.	G, 1.	A, 3.	C, 4.
	E, 6.	B, 2.	D, 3.
M, 54	N, 6.	P, 20.	L, 30.

2 14. septim.

K, 160	H, 440	O, 60	I, 20.
F, 8.	G, 22.	A, 3.	C, 1.
	E, 80	B, 8	D, 10.
M, 160.	N, 80	P, 24	L, 30.

PRÆTEREA quoniam ostensum est esse D, ad C, vt E, ad F; erit permutando quoque, D, ad E, vt C, ad F. Vt autem D, ad E, ita est L, ad M N; quòd idem numerus ipsos D, E, multiplicans fecerit L, M N, quippe cùm L, M N, sumpti sint ipsorum D, E, aquè multiplices: Et eadem de causa, vt C, ad F, ita est I, ad K. Igitur ex lemmate propos. 14. lib. 7. erit quoque, vt L, ad M N, ita I, ad K. & permutando, vt L, ad I, ita M N, ad K.

QVIA ergo est, vt totus L, ad I, ita totus M N, ad K: Et vt D, ex L, ablatus ad eundem I, ita E, ex M N, ablatus ad eundem K; erit quoque ex theor. 6. scholij propos. 22. lib. 7. vt reliquus ex L, ad I, ita reliquus ex M N, ad K. Est autem reliquus ex L, non maior, quàm I, sed vel minor, vt in priori exemplo, vel aqualis, vt in posteriori; propterea quòd reliquus ex L, cùm D, sit ipsum L, multiplicẽ ipsius D, proximè maiorem ipso I, ex constructione. Igitur & reliquus ex M N, maior non erit quàm K; atque adeò circo si ex M N, detrahatur N, ipsi E, aqualis, erit reliquus M, vel minor ipso K, vt in priori exemplo, vel aqualis, vt in posteriori. Cùm ergo H, multiplex ipsius

G, sit maior quàm E, vel N, ex constructione; erit totum K H, toto M N maior.

DENIQVE sumpto O, ita multiplici ipsius A, vt K H, multiplex est ipsius F G, vel I, ipsius C: item P, ita multiplici ipsius B, vt M N, multiplex est ipsius E, vel L, ipsius D: quoniam ostensum est, ita esse F G, ad E, vt A, ad B, sumptiq; sunt ipsorum F G, & A, primi ac tertij, aquè multiplices K H, & O; item ipsorum E, & B, secundi ac quarti aquè multiplices M N, & P, sequitur ex antecedente propos. si K H, maior est quàm M N, ipsum quoq; O, maiorem esse quàm P. Cùm ergo K H, ostensa sit maior quàm M N, erit quoq; O, maior quàm P. Quocirca cùm O, I, sint aquè multiplices ipsorum A, C, primi ac tertij; & P, L, aquè multiplices ipsorum B, D, secundi ac quarti, demonstratum q; sit, maiorem esse O, quàm P, sit autem I, minor quàm L, ex constructione; fieri potest, vt existente maiore proportione primi A, ad secundum B, quàm tertij C, ad D, quartum, sumptisque aquè multiplicibus, vt dictum est, multiplex primi, nimirum O, maior sit quàm P, multiplex secundi, multiplex autem tertij, nimirum I, maior non sit quàm L, multiplex quarti. Quod demonstrandum erat.

QVOD si minor sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum, sumanturq; aquè multiplices primi ac tertij, item aquè multiplices secundi ac quarti, fieri quoque potest, vt nonnunquam multiplex primi sit minor multiplice secundi, multiplex verò tertij non sit multiplice quarti minor.

IN eodem enim exemplo, minor est proportio C, primi ad D, secundum, quàm A, tertij ad B, quartum, demonstratum q; est, I, multiplicem primi C, minorem esse, quàm L, multiplicem secundi D, at O, multiplicē tertij A, maiorem esse quàm P, multiplicem quarti B.

III.

PROPOSITIS quatuor numeris, sumptisque æque multiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æque multiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem, si multiplice primi existente maiore, quàm multiplex secundi, multiplex tertij maior quoque sit necessariò, quàm multiplex quarti: & illo existente æquali, hic quoque semper sit æqualis; illo denique existente minore, hic quoq; perpetuò minor sit: erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, sumanturq; primi A, & tertij C, aquè multiplices qualescunq; E, F. Itē secundi B, & quarti D, aquè mul-

E, 9	A, 3.	C, 6	F, 18.
G, 4	B, 2	D, 4	H, 8
E, 18.	A, 3.	C, 6.	F, 36.
G, 18.	B, 2	D, 4	H, 36.
E, 12.	A, 3.	C, 6.	F, 24.
G, 14	B, 2	D, 4.	H, 28.

multiplices G, H, qualiscunq; etiã hæc sit multiplicatio. Dico si E, F, multiplices primi ac tertij semper sint vel maiores, quàm G, H, multiplices secundi & quarti, vel æquales, vel minores, ita esse A, primum ad B, secundum, vt C, tertium ad D, quartum. Si nam q; foret maior proportio A, ad B, vel minor, quàm C, ad D, fieri posset, veluti in antecedente propos. demonstratum est, vt E, multiplex primi esset aliquando maior, aut minor, quàm G, multiplex secundi, at F, multiplex tertij non maior, aut minor quàm H, multiplex quarti. Quod est contra hypothesin. Est ergo A, ad B, vt C, ad D. Quod erat ostendendum.

IV.

PROPOSITIS quatuor numeris, sumptisque primi ac tertij æque multiplicibus, item secundi & quarti æque multiplicibus; si quando contingat, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, multiplicem verò tertij non maiorem multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

E, 21.	A, 3.	C, 4.	F, 28.
G, 20.	B, 2.	D, 3.	H, 30.

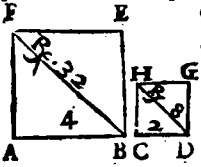
SINT quatuor numeri A, B, C, D, sumptisque ipsorum A, & C, primi ac tertij æquè multiplicibus E, & F, item ipsorum B, & D, secundi ac quarti æquè multiplicibus G, & H, sit E, multiplex primi A, maior quàm G, multiplex secundi B, at F, multiplex tertij C, non maior quàm H, multiplex quarti D. Dico maiorem esse proportionem primi A, ad B, secundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Quoniam enim maior est E, quàm G, at F, non maior quàm H, erit maior proportio E, ad G, quàm F, ad H, cùm illa sit proportio maioris inæqualitatis: hæc verò vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Igitur ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. erit quoque permutando maior proportio E, ad F, quàm G, ad H. a Est autem, vt E, ad F, ita A, ad C, quod idem numerus ipsos A, C, multiplicans procreaverit E, & F; quippe cùm E, F, æquè multiplices sint ipsorum A, C; Eadem q; de causa est, vt G, ad H, ita B, ad D. Maior igitur erit quoque proportio A, ad C, quàm B, ad D: Et permutando, ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. maior erit etiam proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod ostendendum erat. a 17. 5. primi.

QVOD si multiplex primi sit minor multiplice secundi, sed multiplex tertij non sit minor multiplice quarti; minor erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

EADEM enim omnino demonstratio est, si pro maiore proportione dicatur vbique minor proportio, nulla alia re mutata. Vt in hoc exemplo apparet, vbi quatuor numeri sunt A, B, C, D, & E, multiplex primi A, minor est quàm G, multiplex secundi B, sed F, multiplex tertij C, minor non est, quàm H, multiplex quarti, &c.

E, 28. l	l A, 4. l C, 3. l	l F, 21.
G, 30. l	l B, 3. l D, 2. l	l H, 20.

SED demonstremus iam, in magnitudinibus, quæ alijs incommensurabiles sunt, & quæ ex defin. 6. proportionales sunt, eam plerunque reperiri proportionem, quæ in numeris exhiberi possit: adeo vt vere proportionales sint magnitudines, quibus definitio 6. conuenit, quandoquidem ex magnitudinibus proportionalibus in eo sensu sumptis verum consequitur, & nihil absurdi inde inferri potest. Hoc enim paulò antè demonstraturos nos etiam recepimus. Sit ergo recta A B, verbi gratia, recta C D, dupla, & super ipsas rectas describantur quadrata A B E F, C D G H; cum diametris B F, D H. Et quia ex scholio propos. 47. lib. 1. tam quadratum diametri B F, quadrati lateris A B, hoc est, quadrats A B E F, quàm quadratum diametri D H, quadrati lateris C D, hoc est, quadrati C D G H, duplum est; si ponatur latus A E, 4. & latus C D, 2. erit quadratũ A B E F, 16. & quadratum diametri B F, eius duplum, 32. ac proinde diameter ipsa B F, erit radix quadrata numeri 32. qua numeris exprimi nequit, cùm ea maior sit quàm 5. minor autem quàm 6. nullus q; numerus inter 5. & 6. medius, hoc est, compositus ex 5. & fractione aliqua existatis, in se ductus possit numerum integrum 32. producere, vt ex Lemmate sequenti perspicuum fiet. Quadratum autem C D G H, erit 4. & quadratum diametri D H, eius duplum, 8. ac proinde diameter ipsa D H, erit radix quadrata numeri 8. qua numeris etiam exprimi nequit, cùm ea maior sit quàm 2. minor autem, quàm 3 &c. ita vt proportio tam A B, ad B F, quàm C D, ad D H, sit irrationalis, diameter q; propterea B F, lateri A B, & diameter D H, lateri C D, incommensurabilis. Vides igitur, id quod Euclides propos. vltima lib. 10. demonstrauit ex ijs, qua lib. 6. de magnitudinibus proportionalibus per defin. 6. huius 5. lib. demonstrata sunt, Diametrum nimirum quadrati lateri eiusdem quadrati esse incommensurabilem, esse re ipsa verissimum, quippe cùm idem nos alia via sine proportionibus hoc loco ostenderimus.



RVRSVS quoniam diametri B F, D H, diuidunt angulos rectos qua-

quadratorum bifariam, & in ſcholio propoſ. 34. lib. 1. & in coroll. 2. propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, erunt anguli A B F, A F B, C D H, C H D, ſemirecti, ideoque inter ſe æquales. Cum igitur & recti anguli A, C, ſint æquales, æquiangula erunt triangula A B F, C D H. Quare a erit, a 4. ſep. & A B, ad B F, ita C D, ad D H; Et permutando, & A B, ad C D, ita B F, ad D H. Eſt autem poſita recta A B, recta C D, dupla. Igitur & B F, ipſius D H, dupla erit. Itaque cum ex defin. 6. huius lib. eo deducti ſimus, & credamus diametrum B F, diametri D H, eſſe duplam, quamuis & traque diameter ad ſuum latus habeat proportionem irrationalem, (Nam propoſ. 4. lib. 6. ex qua oſtendimus, ita eſſe A B, ad B F, & C D, ad D H, pendet ex propoſ. 2. & hac ex 1. eiuſdem lib. 6. Prima autem propoſ. lib. 6. ſim ſuam accipit ex defin. 6. huius 5. lib. Item permutata proportio, qua hic etiam ſi ſumus, ſine eadem defin. 6. demonſtrari non poteſt in magnitudinibus incommenſurabilibus, & ex propoſ. 16. lib. 5. conſtat.) videamus, an aliounde cognoſcere poſſimus, diametrum B F, diametri D H, verè duplam eſſe, & ex defin. 6. concluſum eſt, hoc ipſo, quòd latus A B, lateris C D, duplum ponitur, etiamſi proportio tam lateris A B, ad diametrum B F, quàm lateris C D, ad diametrum D H, irrationalis ſit. Hoc autem ſine proportionibus facile ita cognoſcemus. Quoniam latus A B, lateris C D, duplum eſt, erit ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratum A E, quadrati C G, quadruplum. Poſito ergo quadrato A E, 4. erit quadratum C G, 1. Et quia tam quadratum diametri B F, quadrati A E, quàm quadratum diametri D H, quadrati C G, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. duplum eſt; erit quadratum diametri B F, 2. & quadratum diametri D H, 2. atque adeirco illud huius quadruplum erit. Quocirca ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. recta B F, recta D H, dupla erit. Vides ergo rurſus, ſi procedamus per ea, quæ ex defin. 6. huius lib. de magnitudinibus proportionalibus demonſtrata ſunt, nos peruenisſe ad concluſionem veram, nimirum diametros duorum quadratorum habere proportionem inter ſe duplam, ſi latus vnius ſit lateris alterius duplum: & dubium non ſit, quin magnitudines verè proportionales ſint, quarum æque multiplicia eam conditionem habent, quam definitio 6. præſcribit. Porrò ex regulis quoque numerorum irrationalium, quæ in Algebra traduntur, conſtat diametrum B F, hoc eſt, R. 32. habere duplam proportionem ad diametrum D H, id eſt, ad R. 8. Nam ſiue R. 32. dividatur per R. 8. Quotiens ſit R. 4. hoc eſt, numerus 2. qui proportionem diametri B F, ad diametrum D H, denominat; ſiue R. 8. multiplicetur per 2. producitur R. 32. Atq; hoc modo omnia, quæ de magnitudinum incommenſurabilium proportionibus demonſtrantur ex defin. 6. huius lib. explicari poterunt per regulas numerorum irrationalium. Quæ res argumento rurſum eſt, magnitudines, quibus definitio 6. huius lib. conuenit, verè eſſe proportionales; quandoquidem calculus numerorum irrationalium cum demonſtrationibus, quæ ex ea

defin. pendent, perpetuo conſentire comperitur, Vt iis, qui in Algebræ præceptis verſati ſunt, notiſſimum eſt.

LEMMA.

QVOD autem nullus numerus compoſitus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, quamuis vnitas in infinitum ſecetur, gignere poſſit integrum numerum 32. hoc modo facile demonſtrabimus. Sit enim numerus 5. cum quacunq; fractione $\frac{3}{7}$. hoc modo $5\frac{3}{7}$. reuocetur q; 3, vt in Arithmetica tradidimus, ad hanc vnicam fractionem $\frac{38}{7}$. Certum autem eſt, denominatorem 7. non metiri numeratorem 38. Alioquin diuiſis 38. per 7. fieret Quotiens numerus integer ſine fractione, quod eſt contra hypotheſin. Multiplicetur iam fractio $\frac{38}{7}$. in ſe, (quod fiet, vt in Arithmetica diximus, demonſtrabimus q; 3 ad finem lib. 9. ſi tam numerator 38. in ſe, quam denominator 7. in ſe ducatur) gignatur q; 3 fractio $\frac{1444}{49}$. ita vt numerator huius 1444. ſit quadratus numeratoris illius 38. & denominator 49. quadratus denominatoris 7. Et quia latus 7. non metitur latus 38. vt

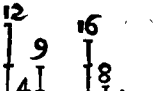
a 16. Euc. *oſtendimus, a non metietur quoque quadratus 49. quadratum 1444. Quare diuiſo quadrato 1444. per quadratum 49. Quotiens non erit numerus integer, ſed ei adhærebit fractio aliqua. Alias quadratus 49. metiretur quadratum 1444. cuius contrarium demonſtrauimus. Atque eadem ratione demonſtrabitur, quemcunque numerum integrum cum fractione qualibet in ſeipſum ductum gignere numerum integrum cum fractione. Quòd ſi fractio, cuius numerator denominatore minor ſit, in ſe ducatur, producetur ſemper fractio, cuius numerator etiam minor eſt denominatore. Nam cum numerator fractionis producta ſit numerus quadratus numeratoris datæ fractionis, denominator autem quadratus numerus denominatoris, ſit autem datæ fractionis numerator minor denominatore, erit quoque illius quadratus numerus quadrato huius minor. Ita ex $\frac{2}{3}$. in ſe gignitur fractus numerus $\frac{4}{9}$. cuius numerator denominatore minor eſt. Itaq; quacunq; fractio in ſe multiplicata gignit numerum non integrum, niſi quando numerator datæ fractionis à denominatore numeratur, ſed ea fractio numerus integer potius eſt: qualis eſt fractio $\frac{200}{25}$. quæ 4. integras vnitates conſtituit.*

PRO-

IX.

PROPORTIO autem in tribus terminis pauciſſimis conſiſtit.

QVONIAM omnis Analogia ſeu proportionalitas, quam interpres, & dictum eſt, proportionem nominat, ſimilitudo eſt duarum, vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedentem terminum, & conſequentem, neceſſe eſt, in omni proportionalitate reperiri, & minimum, duos terminos antecedentes, ac duos conſequentes. Quare ſi proportionalitas fuerit non continua, requirentur ſaltem quatuor termini, ſint magnitudines; At vero ſi fuerit continua, erunt cum minimum tres termini; quoniam terminus medius bis ſumitur, cum ſit conſequens terminus vnius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic eſt minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuſcunque ſolum proportio, non autem proportionalitas reperitur.



X.

CVM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: Et ſemper deinceps, vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

VELVTI ſi ſint magnitudines A, B, C, D, E, continuè proportionales, ita vt ea ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D; & D, ad E: proportio A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinem tertiam, dicitur duplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones reperiuntur, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B, & B, ad C, & propterea proportio A, ad C, intercipiat quodammodo proportionem A, ad B, duplicatam, id eſt, bis ordine poſitam. At proportio A, magnitudinis prima ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quia inter A, & D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B; B, ad C, & C, ad D, atque idcirco proportio A, ad D, includit quodam-



quodammodo proportionem A, ad B, triplicatam, id eſt, ter ordine poſitam: Sic quoque proportio A, ad E, dicetur quadruplicata proportionis A, ad B: propterea quod quatuor proportiones interſciuntur inter A, & E, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B, &c.

QVOD ſi è contrario ea ſit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D; At vero proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; ſic quoque proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

INTERPRETES nonnulli colligunt ex hac definitione, ſi proponantur plures quantitates continuè proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, eſſe duplam proportionis primæ quantitatis ad ſecundam, eo quod Euclides illam vocet duplicatam proportionem huius. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartam, eſſe triplam proportionis, quam habet prima quantitas ad ſecundam, &c. Quod tamen nulla eſt ratione concedendum. Neque enim Euclides hoc ſignificare voluit, ſed docuit tantummodo, proportionem primæ quantitatis ad tertiã, appellari duplicatam eius proportionis, quam habet prima quantitas ad ſecundam; propterea quod inter primam quantitatem, ac tertiam reperitur quodammodo proportio primæ quantitatis ad ſecundam duplicata; quippe cum inter primam quantitatem, ac tertiam interponantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad ſecundam, & ſic de cæteris, vt diximus. Non autem intelligit, illam duplam eſſe huius, ne Theorema proponeret, quod merito quiſpiam concedere recuſaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continuè proportionalibus 25. 5. 1. proportionem 25. ad 1. duplam eſſe proportionis 25. ad 5. cum potius eam quis dixerit eſſe quincuplam? At verò, illam dici huius duplicatam ad ſenſum expoſitum, nemo inficiabitur, eo quod bis ſit poſita, & continuè, proportio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cum illa minor ſit, hæc autem maior? Nam per propoſ. 8. huius lib. quantitas 1. ad quantitatem 5. maiorem proportionem habet, quam ad quantitatem 25. propterea quod 25. maior eſt, quam 5. Dicetur tamen illa huius duplicata, ob cauſam iam explicatam, licet ſit eius quinta pars. Quare etſi proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ, tamen decuplæ proportio eſt eiuſdem duplæ. Quemadmodum etiam proportio octuplæ duplæ eſt proportionis quadruplæ, cum tamen quadruplæ duplicatæ, ſit ſedecuplæ, vt hic patet 16. 4. 1. Denique in tribus magnitudinibus æqualibus, vel in tribus æqualibus numeris, 4. 4. 4. atque adeo continuè proportionalibus, qui fieri poteſt, vt proportio primi ad tertium duplæ ſit proportionis primi ad ſecundum, cum ſit omnino eadem? duplicata tamen dicetur illa huius, propterea quod hac ordine bis poſita eſt continuè inter primum numerum & tertium.

SED

SED auctores, qui proportionem prima quantitatis ad tertiam volunt esse duplam proportionis, quam prima quantitas habet ad secundam, (inter quos auctores est etiam Federicus Commandinus hoc loco: quod valde miror, cum alioquin Mathematicus sit præstantissimus) dicunt in hac defin. requiri terminos inæquales, primamque debere esse maiorem; ita vt definitio hæc intelligenda sit necessario de proportione continua maioris inæqualitatis, Quare mirum non est, vt aiunt, neque proportionem 1. ad 25. proportionis 1. ad 5. neque proportionem 4. ad 4. proportionis 4. ad 4. duplam esse. Verum hæc expositio non solum vera non est, sed Euclidi prorsus est contraria: quippe qui assumat plerisque in locis, triplicatam proportionem reperiri in proportione minoris inæqualitatis. Locus clarissimus est, vt alios omittam, in propos. 12. lib. 12. vbi demonstrat, similes conos, & cylindros in triplicata ratione esse diametrorum, quæ in basibus. Nam si referatur maior conus, vel cylindrus ad maiorem; necessario in secunda parte eius demonstrationis, assumit Euclides demonstratum esse propos. 8. eiusdem lib. 12. pyramides similes, etiamsi minor ad maiorem referatur, in triplicata esse homologorum laterum ratione; vt eo in loco annotauimus. Huc accedit, propositiones illas, in quibus figura aliqua demonstrantur habere rationem laterum homologorum duplicatam, vel triplicatam, cuiusmodi est 19. & 20. lib. 6. & 11. 12. 18. 19. lib. 8. & 33. lib. 11. & 12. 18. lib. 12. non fore vniuersales, si solum de proportione maioris inæqualitatis essent intelligendæ. Explicanda ergo est hæc definitio, vt nos exposuimus.

ITAQVE hoc loco Euclides explicat tantum, quidnam intelligendum sit nomine proportionis duplicatæ, triplicatæ, &c. vt demonstrationes sequentium librorum percipiantur, rebusque possint materialibus accommodari. Non autem determinat, quænam proportio sit alterius dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. Exempli gratia, quoniam ex propositione 20. lib. 6. constat, proportionem quadrati ad quadratum duplicatam esse proportionis, quam habet latus prioris quadrati ad latus posterioris, colligendum erit, si continuetur proportio laterum in tribus terminis, proportionem quadrati ad quadratum, esse eam, quæ est primi termini ad tertium; ita vt si prioris quadrati latus fuerit trium palmorum, posterioris autem vnius palmi, primi quadratum ad posterius, habeat proportionem quam 9. ad 1. ita vt illud nouies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ est nouecupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata proportionis triplæ, qualis est 9. ad 3. vel 3. ad 1. vt in his numeris 9. 3. 1. perspicuum est. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo esse maiorem proportione lateris ad latus. Sic etiam quadratum posterius ad primi proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita vt illud sit huius nonæ pars, propterea quod proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. vt in eisdem his numeris 1. 3. 9. manifestum est.

Simili

Simili ratione, quoniam lib. 12. propoſ. vltima, demonſtratur ſpharas inter ſe rationem habere ſuarum diametrorum triplicatam, colligendum erit, ſpharam illam, cuius diameter continet tres palmos, ad ſpharam, cuius diameter eſt vnius palmi tantum, proportionem habere quam 27. ad 1. Hac enim triplicata dicitur tripla proportionis, vt hic apparet, 27. 9. 3. 1. &c. Sic etiam propoſitis duabus ſpharis, quarum diametri proportionem habent decuplam, habebunt ſpharæ ipſæ proportionem millecuplam, cum hæc ſit decupla triplicata, vt hic patet, 1000. 100. 10. 1. Quis autem dixerit vnquam, millecuplam proportionem eſſe triplo tantummodo maiorem proportione decupla, & non potius trigecuplam decuplæ eſſe triplam?

CÆTERVM propoſita quacunque proportione rationali, ſi eius denominator in ſe ipſum multiplicetur, exurget denominator proportionis, quæ duplicata dicitur propoſitæ proportionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatore ſcilicet proportionis quadruplæ, in ſe, producuntur 16. ideo proportio ſedecupla dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt hic cernitur 16. 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E contrario, cum ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. denominatore videlicet proportionis ſubquadruplæ, in ſe, producatur $\frac{1}{16}$. dicetur proportio ſubſedecupla, duplicata proportionis ſubquadruplæ. Quod ſi denominator rurſus in illud productum multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicatæ; vt in priori exemplo, ex multiplicatione 4. in 16. producuntur 64. denominator proportionis quæ quadruplæ dicitur triplicata, vt hic videſ, 64. 16. 4. 1. Item hic 192. 48. 12. 4. Rurſus ſi in poſterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inuenietur denominator proportionis quadruplicatæ, atque ita de cæteris. Itaque proportionis duplicatæ denominator producitur ex denominatore propoſitæ proportionis bis poſito, atque ita multiplicato. Vt numerus denominans proportionem duplicatam proportionis triplæ, producitur ex 3. denominatore triplæ proportionis bis poſito, in hunc modum 3. 3. ac ſic multiplicato: Nam ter tria faciunt 9. denominatorem noncuplæ proportionis, quæ duplicata dicitur triplæ, vt hic cernis poteſt 9. 3. 1. Item hic 18. 6. 2. At verò denominator proportionis triplicatæ gignitur ex propoſita proportionis denominatore ter poſito, & ſic multiplicato. Vt in dato exemplo, denominator triplicatæ proportionis, nempe 27. procreatur ex 3. ter poſito ſic 3. 9. 3. atque ita multiplicato, dicendo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicata exoritur ex denominatore quater poſito: Quintuplicata ex eodem quinquies poſito, atque ita multiplicato, &c. Itaque duplicatio, triplicatio, quadruplicatio, &c. proportionis cuiuslibet, de qua in hac diſſin. agitur, nihil aliud eſt, quam multiplicatio denominatorum proportionum intermediarum inter ſe. Ex hac enim multiplicatione procreatur denominator proportionis, quam extremi termini inter ſe habent, qua propterea illius proportionis, cuius denominator multiplicatus eſt, duplicata dicitur, vel triplicata,

plicatus, vel quadruplicata, &c. prout videlicet denominator bis positus est, vel ter, vel quater, &c. atque sic multiplicatus fuit, vt exposuimus. Verbi gratia, propositis hisce quatuor numeris continuè proportionalibus in proportione quadrupla, primus 192. ad quartum 3. proportionem habet denominatam à 64. qua proportio dicitur triplicata proportionis quadruplæ: quia denominator 64. proportionis extremorum 192. & 3. producitur ex denominatore 4 proportionis quadruplæ ter posito, ob tres proportiones quadruplas inter extremos interiectas, atque ita multiplicato, dicendo, quater quatuor sunt 16. & quater 16 sunt 64. Sic etiam inuersis iisdem numeris, vt sint continuè proportionales in proportione subquadruplæ, primus 3. ad quartum 192. proportionem habet denominatam à $\frac{1}{64}$. qua proportio dicitur triplicata proportionis subquadruplæ: quia denominator $\frac{1}{64}$. proportionis primi numeri 3. ad quartum 192. producitur ex denominatore $\frac{1}{4}$. proportionis subquadruplæ ter posito, & sic multiplicato, ob tres proportiones subquadruplas inter extremos interpositas. Nam ex $\frac{1}{4}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{16}$. & ex $\frac{1}{16}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{64}$. Nihil obstat ergo, quo minus proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{64}$. denominata dici possit triplicata proportionis subquadruplæ 3. ad 12. quanquam illa minor sit, quàm hæc: quia videlicet denominator $\frac{1}{64}$. productus est ex denominatore $\frac{1}{4}$. ter posito, & sic multiplicato, vt diximus. Non tamen proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{64}$. denominata dici potest triplo maior proportione subquadruplæ 3. ad 12. quia denominator $\frac{1}{4}$. triplicatus non facit denominatorem $\frac{1}{64}$. sed $\frac{1}{4}$. atque ita proportio subsesquitertia dicetur tripla proportionis subquadruplæ: sicut etiam non proportio à 64. denominata, sed proportio duodecupla, est proportionis quadruplæ tripla; propterea quod denominator 4. triplicatus non producit denominatorem 64. sed 12. Porro continuatis quotcunque numeris proportionalibus, siue maiores cum minoribus, siue minores cum maioribus conferantur, denominatorem proportionis primi ad vltimum gigni ex denominatoribus intermediarum proportionum inter se multiplicatis, demonstrabimus ad defin. 5. lib. 6. Proportionem autem aliquam tum demum esse alterius duplam, vel triplam, &c. cum illius denominator huius denominatoris duplus est, vel triplus, &c. ita vt proportio decupla sit dupla quintuplæ, & sextupla sit tripla duplæ, &c. ostendemus ad finem lib. 9. tractatumque est hoc argumentum coposse à Rodulpho Volumnio in Disputatione de proportione proportionum. Nunc satis sit, hoc ipsum communi hominum iudicio ex sensibilibus rebus confirmare. Si igitur Agens

Denominatores	4	4	4	
Num. propor.	192	48	12	3

Denominatores	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
Num propor.	3	12	48	192

aliquod

aliquod ad Patiens proportionem habeat Verbi gratia decuplam, ita Vt Agens sit 10. & Patiens 1. quis tam mente captus erit, qui non statim intelligat, si idem Agens augeatur, Vt fiat 20. Patiens autem maneat 1. Agens tunc duplo maiorem habere potentiam respectu eiusdem Patientis, quàm prius? Quare proportio vigecupla, cuius denominator 20. duplus est denominatoris 10. dupla est proportionis decuplæ, non autem proportio centupla; Vt auctores contrariæ sententiæ volunt: sed tamen hæc proportio centupla dicetur duplicata proportionis decuplæ propter multiplicationem denominatorus 10. in se, & propter duas proportiones decuplas, quæ inter numeros centuplam proportionem habentes interiiciuntur, Vt hic apparet, 100. 10. 1. Sic etiam si è contrario, Agens aliquod ad Patiens habeat proportionem Verbi gratiâ subdecuplam, ita Vt Agens sit 1. & Patiens 10. quis tam hebes fuerit, ac rudis, qui non intelligat, Agens, quod sit 2. duplo esse potentius respectu eiusdem Patientis 10. quàm Agens 1? Cum ergo Agens 2. ad Patiens 10. habeat proportionem subquintuplam, cuius denominator $\frac{1}{5}$. vel $\frac{2}{10}$. conflatur ex denominatore $\frac{1}{10}$ bis sumpto, erit profectò proportio subquintupla proportionis subdecuplæ duplæ, non autem illa, quæ subcentupla est, Vt prædicti auctores volunt, cum hæc longè minor sit, quam subdecuplâ. Dicetur tamen proportio subcentupla proportionis subdecuplæ duplicatæ, propter causam sæpius explicatam, Vt hic patet, 1. 10. 100.

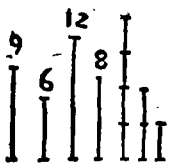
EX his, quæ diximus, non obscure colligi potest, proportionem duarum quantitatum, quibus nullum interponitur medium, sapere naturam quodammodo lineæ, cum ex nulla alia proportione producatur: Proportionem verò, cuius quantitates intercipiunt vnicum medium in continua proportionalitate, habere conditionem superficiei quadratæ, quoniâ gignitur ex duabus proportionibus æqualibus; quemadmodum & quadratum ex duabus lineis æqualibus conficitur. Denique proportionem, cuius quantitatibus duo media in continua proportionalitate interiiciuntur, obtinere naturam solidi, atque adeo cubi, cum oriatur ex tribus æqualibus proportionibus, quemadmodum etiam cubus ex tribus lineis æqualibus consurgit. Verum de his plura inuenies apud Arithmeticos, qui Algebra regulam exposuerunt.

XI.

HOMOLOGÆ, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes verò consequentibus.

DEFINIVIT supra proportionalitatem, proportionum esse similitudinem. Docet iam, non solum in proportionalitate quamus proportiones dici similes; Verum etiam terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologamus; dicens, antecedentes magnitudines appellari ho-

lari homologas, seu similes proportione inter se, nec non consequentes inter se, vt intelligeremus in quam plurimis demonstrationibus, quanam latera figurarum inter se comparata, antecedentia debeant esse proportionum, & quanam consequentia, vt in 6. lib. perspicuum fiet. Si igitur est proportio A, ad B, qua C, ad D; dicetur quantitas A, similis quantitati C; & B, similis ipsi D. Propter similitudinem enim proportionum, necesse est, vtramque magnitudinem antecedentem vel aqualem esse vtriq; consequenti, vel eodem modo maiorem, aut minorem: Alias non haberet vtraque antecedens ad vtramq; consequentem proportionem eandem.



Exemplum habes in magnitudinibus propositis, in quibus antecedentes maiores sunt eodem modo consequentibus, vtpote dimidio maiores. Aliud exemplum vides in magnitudinibus K, F, G, continuè proportionalibus, vbi tam E, & F, homologa sunt, quam F, & G, vt constat. Atque hanc ob causam Euclides in defin. 6. & 8. iussit accipi aque multiplicia prima & tertia magnitudinum, hoc est, antecedentium: Item alia aque multiplicia secunda, & quarta magnitudinum, nimirum consequentium. Ha enim similes sunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione constat: in magnitudinibus vero non proportionalibus dissimiles.

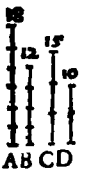
ORONTIVS, & nonnulli alij interpretes, longe aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus varie inter se conferri posse & antecedentes magnitudines, & consequentes; veluti in sequentibus definitionibus patebit. Verum si verba definitionis diligentius ponderentur, & vsus eiusdem in 6. lib. consideretur, nostram expositionem huic anteferendam esse, nemo dubitabit.

XII.

ALTERNA ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

EXPLICAT hic quosdam modos argumentandi in proportionibus, quorum frequentissimus est vsus apud Geometras. Hi autem sunt numero sex. Primus dicitur proportio alterna, siue permutata: Secundus, inuersa, seu proportio è contrario: Tertius, compositio rationis, seu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuisio rationis, vel disiuncta proportionalitas; Quintus, conuersio rationis, siue euersa proportionalitas: Sextus denique vocatur proportio ex aqualitate, seu aqua proportio. Alterna igitur seu permutata proportio, inquit, est, cum propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandem esse proportionem antecedentis prioris proportionis ad antece-

dentem posterioris, quam habet consequens illius ad consequentem huius. Vt si ponamus proportionem A, ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem esse proportionem A, ad C, quae est B, ad D, dicemur argumentari a permutata proportione. Graeci scriptores in hac argumentatione ☿ *utuntur hoc fere modo loquendo: Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, seu* ☿*ecoßtm, erit quoque A, ad C,* ☿*t B, ad D. Firmam autem esse huiusmodi illationem, demonstrabitur propos. 16. lib. huius. Caeterum in hoc modo argumentandi, necesse est, omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis,* ☿*t inter binas* ☿*t assumptas proportio esse possit. Non enim recte infertur. Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D, ergo permutando,* ☿*t linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum D; cum nulla sit proportio lineae ad numerum, aut contra,* ☿*t perspicuum est ex defin. 5. In aliis autem modis argumentandi, qui sequuntur; possunt esse priores magnitudines in* ☿*no genere magnitudinis, & posteriores in alio genere magnitudinis,* ☿*t ex demonstrationibus huius lib. 5. constabit.*



XIII.

INVERSA ratio, est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.



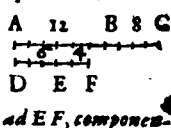
VT si ex eo, quod est A, ad B, ☿*t C, ad D, inferamus, ita esse B, ad A,* ☿*t D, ad C, hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuersa proportione. In hac argumentatione sic fere loquuntur auctores. Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur conuertendo, vel è contrario, erit quoque B, ad A,* ☿*t D, ad C; Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur in coroll. propos. 4. huius lib. Porro duae priores magnitudines possunt esse* ☿*nius generis, & posteriores alterius. Recte namque licebit inferre:* ☿*t se habet linea A, ad lineam B ita se habet triangulum, seu numerus C, ad triangulum, seu numerum D; Igitur inuertendo* ☿*t linea B, ad lineam A, ita triangulum, seu numerus D, ad triangulum, seu numerum C,* ☿*t ex coroll propos. 4. constabit.*

XIV.

COMPOSITIO rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu vnius, ad ipsam consequentem.

SIT proportio AB, ad BC, qua DE, ad EF; Si igitur ex hoc collegatur,

ligatur, eam quoque esse proportionem totius A C, nempe antecedentis cum consequente, ad B C, consequentem, quam habet tota D F, antecedens nimirum cum consequente, ad E F, consequentem; dicetur huiusmodi argumentatio compositio rationis, eo quod ex antecedente, & consequente componatur aliud nouum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos scriptores reperies in hac argumentatione; Vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, componendo ergo erit & A C, ad B C, vt D F, ad E F. Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propos. 18.



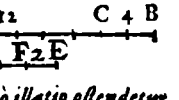
HVIC modo argumentandi per compositionem rationis addi possunt alij duo. Primus dici potest, Compositio rationis conuersa; quando nimirum sumitur antecedens, & consequens, veluti vna, quæ cum antecedente conferatur. Vt si est, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, inferimusque; Ergo vt A C, ex antecedente, & consequente conflata, ad antecedentem A B, ita est D F, ex antecedente & consequente composita, ad antecedentem D E. Quam argumentationem esse validam, demonstrabimus, ad propos. 18. huius lib. In qua quidem hoc modo dicendi vti poterimus. Ergo per compositionem rationis conuersam.

ALTER modus dici potest, Compositio rationis contraria; quando nimirum refertur eadem magnitudo antecedens ad antecedentem, & consequentem, ceu ad vnam. Vt si est, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, inferimusque per compositionem rationis contrariam; Igitur erit vt A B, antecedens ad totam A C, ex antecedente, & consequente compositam, ita D E, antecedens ad D F, ex antecedente, & consequente compositam. Atque hanc argumentandi formulam valere, ad propos. 18. huius lib. ostendemus.

XV.

DIVISIO rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam cõsequentem.

VT si dicatur, qua proportio est totius A B, ad C B, ea est totius D E, ad F E; Igitur erit & A C, excessus, quo antecedens consequentem superat, ad C B, consequentem, vt D F, excessus, quo consequentem excedit antecedens, ad F E, consequentem. In diuisione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo diuidendo, &c. Hac porrò illatio ostendetur propos. 17. huius lib.



POSSVNT etiam huic argumentandi modo adiungi alij duo. Primum Diuisionem rationis conuersam dicere possumus; quando nimirum consequens ad excessum, quo consequentem superat antece-

dens, refertur. Vt si est, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E, concludimusque per diuisionem rationis conuersam; Ergo erit, vt C B, consequens ad A C, excessum, quo antecedens consequentem superat, ita F E, consequens ad D F, excessum, quo antecedens superat consequentem. Valere autem hanc argumentationem, ostendemus ad 17. propos. huius lib.

PERSPICVVM autem est, vt vtraque harum argumentationum per Diuisionem rationis locum habeat, nimirum & illa Euclidis, & nostra, antecedentem debere esse maiorem consequente. Alias Diuisio fieri non posset.

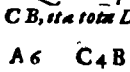
ALTER modus appellari potest Diuisio rationis contraria; quando videlicet confertur antecedens cum excessu, quo consequens antecedentem superat. Vt cum dicimus. Ita se habet A C, ad A B, vt D F, ad D E. Igitur erit quoque per diuisionem rationis contrariam vt A C, antecedens ad C B, excessum, quo consequens antecedentem superat, ita D F, antecedens ad F E, excessum, quo antecedentem superat consequens. Qui modus argumentandi demonstrabitur etiam a nobis ad propos. 17. huius lib.

PORRO manifestum est, in hac Diuisione rationis contraria consequentem debere esse maiorem antecedente, vt sumi possit excessus, quo consequens antecedentem superat.

XVI.

CONVERSIO rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

QVOD si colligamus hoc modo. Sicut est tota magnitudo A B, ad C B, ita totum D E, ad F E; Igitur ita etiam erit eadem A B, ad A C, excessum, quo consequentem superat antecedens, vt D E, ad D F; Dicemur per conuersionem rationis argumentari. Vnde sic fere loquuntur scriptores. Igitur per conuersionem rationis, &c. Confirmabitur autē hic argumentandi modus in coroll. propos. 19. huius lib.



LIQVIDO etiam constat, in hoc modo argumentandi per conuersionem rationis antecedentem debere consequentem superare, vt excessus, quo antecedens consequentem superat, sumi possit.

XVII.

EX æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad vltimam sese habuerit.

VEL

VEL aliter. Sumptio extremorum, perſubductionem mediorum.

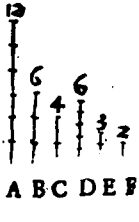
SINT plures magnitudines duabus A, B, C, & totidem D, E, F, ſintque binæ ac binæ in eadem proportione, hoc eſt, A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam eſſe proportionem A, ad C, primæ ad vltimam in primis magnitudinibus, quæ eſt D, ad F, primæ magnitudinis ad vltimam in ſecundis magnitudinibus; dicetur huiuſmodi argumentandi formula deſumpta ex æquo ſiue ex æqualitate, in qua ſcilicet extremæ magnitudines, ſub duabus medijs, colliguntur habere vnam, eandemq; inter ſe proportionem, vt in altera definitione exprimitur. Quoniam verò duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vno quidem, quando ſumimus binas ac binas magnitudines in eadem proportione, ordinate procedendo, altero verò, cum ordo inuertitur; explicat Euclides duabus ſequentibus definitionibus, quid ſit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.



XVIII.

ORDINATA proportio eſt, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem: fuerit etiam, vt conſequens ad aliud quidpiam, ita conſequens ad aliud quidpiam.

VT quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rurſus vt B, conſequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, conſequens ad F, aliud quidpiam; dicetur talis proportio, Ordinata: quia idem ordo tam in primis tribus magnitudinibus, quam in ſecundis ſeruatur; cum vtrobique conferatur primum prima cum ſecunda; deinde ſecunda cum tertia. Quando ergo in modo argumentandi ex æqualitate ſeruatur Ordinata proportio, demonſtratur propoſ. 22. huius lib. eam argumentationem eſſe bonam.



XIX.

PERTVRBATA autem proportio eſt, cum tribus poſitis magnitudinibus, & aliis, quæ ſint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus ſe habet antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: Vt autem

in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

SI autem sit, quemadmodum A, ad B, ita E, ad F; Deinde vt in primis magnitudinibus B, consequens ad C, aliud quidpiam, ita in secundis magnitudinibus aliud quidpiam D, ad E, antecedentem

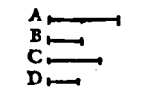


magnitudinem, nuncupabitur huiusmodi proportio, Perturbata: quòd non seruatur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe cum in primis magnitudinibus conferatur prima cum secunda, at in secundis secunda cum tertia; deinde in primis secunda cum tertia, at in secundis prima cum secunda. Quando igitur in modo argumentandi ex aequalitate seruatur Perturbata proportio, demonstratur, eam argumentationem esse bonam, propos. 23. huius lib. Porrò tam perturbata proportio, quam ordinata, semper infert ex aequalitate eandem extremorum proportionem, etiam si plures magnitudines ponantur, quam tres, vt ex propos. 22. & 23. huius lib perspicuum fiet.

VTVNTVR Euclidis interpretes hoc libro, & in alijs, vbi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate quodam, quod vt hic subiiceremus, non inutile fore iudicauimus. Illud autem eiusmodi est.

QVAM proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo proposita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamuis magnitudinem propositam.

VT, quam proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo proposita C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quapiam alia E, ad propositam C. Quamuis enim ignoremus interdum, quanam sit quarta illa magnitudo, dubitandum tamen non est, eam esse posse in rerum natura, cum id contradictionem non implicet, vt Philosophi loquuntur, neque absurdi aliquid ex eo consequatur.



1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices; quam multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudinum

tudinum E, F, æque multiplices. Dico magnitudines A B, C D, simul, tam esse multiplices magnitudinum E, F, simul, quam est multiplex A B, ipsius E, vel C D, ipsius F. Cum enim A B, C D, sint æque multiplices ipsarum E, & F, si A B, diuidatur in magnitudines A G, G H, H B, ipsi E, æquales, & C D, quoque in magnitudines C I, I K, K D, ipsi F, æquales; (Diuidi autem poterit quælibet in partes omnino æquales, cum A B, C D, sint ipsarum E, F, æque multiplices, atque ideo toties E, in A B,



perfectè contineatur, quoties F, in C D, vt ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. scripsimus, constat) erunt magnitudines A G, G H, H B, tot numero, quot sunt magnitudines C I, I K, K D. Quoniam vero A G, & E, æquales inter se sunt, si ipsis addantur æquales C I, & F, erunt A G, C I, simul, æquales ipsis E, & F, simul. a 2. pro-
Eodem modo erunt G H, & I K, simul æquales ipsis E, & F, simul, *num.*
Nec non H B, & K D, eisdem E, & F. Quoties igitur E, in A B, vel F, in C D, continetur, toties & E, F, simul, in A B, C D, simul comprehenduntur: Ideoque, quam multiplex est A B, ipsius E, tam sunt multiplices A B, C D, simul, ipsarum E, & F, simul, vt constat ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. scripsimus. Quare si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonstrandum.

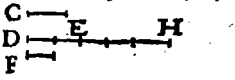
SCHOLIVM.

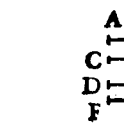
HOC idem demonstrabitur vniuersè propos. 12. in omni genere proportionis, tam rationalis, quàm irrationalis. Necessarium autem fuit, idipsum prius hoc loco in proportione multiplici demonstrare, quia ex eo aliæ propositiones demonstrandæ sunt, antequam propositio 12. possit demonstrari.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI prima secundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ; erit & composita prima cum quinta, secundæ æque multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.

SIT magnitudo prima A B, tam multiplex secundæ C, quam est multiplex D E, tertia, quartæ F; Rursus tam sit multiplex B G, quinta ipsius C, secundæ, quam multiplex est E H, sexta ipsius F, quartæ. Dico A B, primam cum B G, quinta compositam,

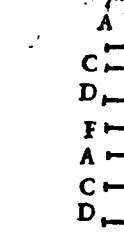




tam, tam multiplicem esse secundæ C quam multiplex est, D E, tertia composita cum sexta E H, ipsius F, quartæ. Cum enim A B, sint æque multiplices ipsarum C, F, erunt in A B, tot magnitudines ipsi C, æquales, quot sunt in D E, æquales ipsi F. Eadem ratione erunt & in B G, tot æquales ipsi C, quot sunt in E H, æquales ipsi F. Si igitur æqualibus multitudinibus A B, D E, addantur æquales multitudines B G, E H, erunt totæ multitudines A G, D H, æquales. Quare toties comprehenditur C, in A G, quoties F, in D H: Ideoque tam multiplex est A B, (prima composita cum quinta) ipsius C, secundæ, quam multiplex est D H, (tertia composita cum sexta) ipsius F, quartæ. Si prima itaque secundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD si prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint secundæ, & quartæ; Quinta vero & sexta, æque multiplices secundæ, & quartæ. Vel prima, & tertia æque multiplices fuerint secundæ, & quartæ; At quinta & sextæ, æquales secundæ, & quartæ: Erit eadem ratione,



tota A G, (prima & quinta) tam multiplex secundæ C, quam multiplex est totæ D H, (tertia ac sexta) ipsius F, quartæ. Semper enim A G, multitudo magnitudinum æqualium ipsi C, ostendetur æqualis esse ipsi D H, multitudini magnitudinum ipsi F, æqualis: Vt perspicuum est in appositis figuris. Si vero tam primæ & tertiæ, quam quintæ, & sextæ æquales ponantur secundæ, & quartæ, luce clarius est primam & quintam simul, atque tertiam & sextam simul, æque multiplices esse, nimirum duplices, secundæ & quartæ magnitudinum.

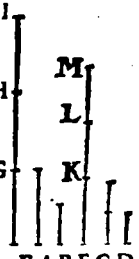
HOC quoque ab Euclide concludetur, in omni genere proportionis vniuersa propos. 24. sed operæ pretium fuit, id ipsum prius in proportione multiplici demonstrare, vt ea, quæ sequuntur, demonstrari possint.

iij. ## THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI sit prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum vtraque vtriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera autem quartæ.

SIT prima magnitudo A, tam multiplex secundæ B, quam multiplex

tiplex est C, tertia quartæ D; sumanturque E, F, æquè multiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem esse E, ipsius B, secundæ, quam est F, ipsius D, quartæ. Nam cùm E, & F, sint æquè multiplices ipsarum A, & C; si distribuantur E, & F, in magnitudines ipsis A, & C, æquales, vt in E G, G H, H I, & F K, K L, L M, erunt tot partes in E, æquales ipsi A, quot sunt in F, æquales ipsi C. Quoniam verò E G, F K, æquales sunt ipsis A, & C; sunt autem A, & C, æquè multiplices ipsarum B, & D, ex hypothesi; Erunt & E G, E K, earundem B, & D, æquè multiplices. Pari ratione erunt G H, K L. Item H I, L M, æquè multiplices earundem B, & D; Quoniam igitur E G, prima magnitudo, tam est multiplex secundæ B, quàm est multiplex F K, tertia quartæ D; item G H, quinta tam multiplex est eiusdem secundæ B, quàm multiplex est K L, sexta eiusdem quartæ D, a Erit & E H, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quàm est multiplex F L, composita ex tertia & sexta, quartæ D. Rursus cùm sit E H, prima tam multiplex secundæ B, quàm multiplex est F L, tertia quartæ D, vt proximè demonstratum est; sit autem & H I, quinta tam multiplex secundæ B, quàm est L M, sexta multiplex quartæ D; b Erit & E I, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quàm est F M, composita ex tertia ac sexta, multiplex quartæ D. Eademque est ratio, si plures fuerint partes in E, & F. Si sit ergo prima secundæ æquè multiplex, atque tertia quartæ, &c. Quod ostendendum erat.



a 2. quinti.

b 2. quinti.

SCHOLIVM.

OSTENDETVR hoc theorema, propos. 22. non solùm in magnitudinibus æquè multiplicibus, sed etiam in omnibus, quæ bina sumpta eandem habent proportionem, siue rationalem, siue irrationalem, sed necessarium fuit ipsum primùm hic in proportione multiplici demonstrare, vt insequens propos. 4. demonstrari possit.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iiij.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æquè multiplices primæ & tertiæ, ad æquè multiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

SIT proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æquè multiplices E, & F; Item secundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, iuxta quamuis multiplicationem:

sive E, F, ita multiplices sint ipsarum A, C, sicut G, H, ipsarum B, D, sive non. His positis, constat ex defin. 6. huius lib. si E, deficit à G, etiam F, deficere ab H: Et si E, æqualis est ipsi G, etiam F, æqualem esse ipsi H: Et denique si E, excedit G, etiam F, excedere H. Alioquin non esset, per defin. 6. eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, si earum æquè multiplicia non semper ita se haberent. Dico tam, multiplicia primæ ac tertiæ non solùm vnà deficere à multiplicibus secundæ ac quartæ, aut vnà æqualia esse, aut vnà excedere, vt diximus, sed eandem quoque inter se proportionem habere, nimirum ita esse E, multiplicem primæ A, ad G, multiplicem secundæ B, vt F, multiplicem tertiæ C, ad H, multiplicem quartæ D. Hoc est, si rursus E, statuatur prima magnitudo; G, secunda; F, tertia, & H, quarta; sumanturque ipsarum E, F, æquè multiplicia qualiacunque; Item ipsarum G, H, quæcunque etiam æquè multiplicia; Multiplicia ipsarum E, F, à multiplicibus ipsarum G, H, vel vnà deficere, vel vna æqualia esse, vel vnà excedere, vt vult definitio 6. Idem namque est, quatuor magnitudines eandem habere proportionem, & earum æquè multiplicia sumpta diximus, vel vnà deficere, vel vnà æqualia esse, vel vnà excedere. Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æquè multiplices; Item L, M, æquè multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, prima ipsius A, secundæ, quam F, tertia ipsius C, quartæ; sumptæ sunt autem & I, K, æquè multiplices ipsarum E, F, primæ ac tertiæ: Erunt quoque ex æquo I, K, æquè multiplices ipsarum A, C, secundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipsarum B, D, æquè multiplices. Et quia ponitur proportio A, primæ ad B, secundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam, ostensæque sunt I, K, æquè multiplices primæ & tertiæ A, C. Item L, M, æquè multiplices secundæ & quartæ B, D, & fit vt si I, multiplex primæ deficit ab L, multiplici secundæ, etiam K, multiplex tertiæ necessario deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I, æqualis est ipsi L, etiam K, ipsi M, sit necessariò æqualis: & denique si I, excedit ipsum L, etiam K, excedat necessariò ipsum M: Idemque ostendetur in quibuscunque æquè multiplicibus magnitudinum E, & F, nec non magnitudinum G, & H: quia semper hæc æquè multiplicia, quæcunque sint, æquè multiplicia quoque erunt magnitudinum A, C, & B, D. Itaque cùm I, & K, sint æquè multiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, æquè multiplices secundæ G, & quartæ H; ostensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quàm L, multiplex secundæ, multiplicem



23. quinto.

b 3. quinti.

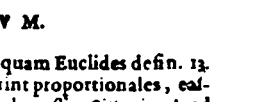
c 6. defi. quinti.

d 5. quinti.

cem tertiæ K, minorem quoque esse, quàm M, multiplicem quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione: a Erit, vt E, prima ad G, secundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum. a 6. def. quinti.

COROLLARIVM.

HINC facilè demonstrabitur Inuersa ratio, quam Euclides defin. 13. explicauit, hoc est, si quatuor magnitudines fuerint proportionales, eaidem & contra, seu inuersa ratione proportionales esse. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico esse conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, F, æquè multiplicibus ipsarum A, C, primæ ac tertiæ; Item G, H, æquè multiplicibus ipsarum B, D, secundæ & quartæ: quoniam ex eo, quod A, prima ad B, secundam se habet, vt C, tertia ad D, quartam,



b necessario sequitur, si E, multiplex primæ minor fuerit quàm G, multiplex secundæ, vel æqualis, vel maior, etiam F, multiplicem tertiæ minorem esse, vel æqualem, vel maiorem, quàm H, multiplicem quartæ; Perspicuum est, si e contrario G, maior fuerit quàm E, vel æqualis, vel maior, etiam H, maiorem fore, vel æqualem, vel maiorem, quàm F, secundum quamcunque multiplicationem sint sumpta hæc æque multiplicia. Nam si vtraque E, F, minor est, quàm vtraque G, H, erit contra vtraque G, H, maior quàm vtraque E, F, & si vtraque E, F, æqualis est vtrique G H, erit è contrario, vtraque G, H, vtrique E, F, quoque æqualis: Et denique si vtraque E, F, maior est, quàm vtraque G, H, erit vice versa, vtraque G, H, minor, quàm vtraque E, F. Itaque quoniam primæ B, & tertiæ D, sumpta sunt, æquè multiplicia G, H; Item secundæ A, & quartæ C, æque multiplicia E, F, ostensumque est, G. H, vel vnà excedere E, F, vel vnà æqualia esse, vel vna deficere, secundum quamcunque multiplicationem ea multiplicia sumantur; c erit vt B, prima ad A, secundam, ita D, tertia ad C, quartam. Quod erat demonstrandum. b 6. def. quinti. c 6. def. quinti.

SCHOLIVM.

HÆC propositio cum suo corollario vera est, siue duæ magnitudines A, B, sint eiusdem generis cum duabus magnitudinibus C, D, siue non, vt ex demonstratione liquet.

ORONTIVS quartum hoc Theorema sic conatur demonstrare. Postquam ex 3. propositione huius libri ostendit I, K, esse æquè multiplices magnitudinum A, C; item L, M, esse æquè multiplices magnitudinum B, D, infert statim per conuersum 6. definitionis, iuxta suam expositionem, ita esse I, ad L, vt K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, vt F, ad H. Qua quidem demonstratio admodum est vitiosa, tum quia secundum hunc sensum demonstratur idem per idem, nimirum datis quatuor magnitudinibus proper-

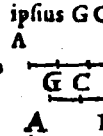


proportionalibus, aque multiplices prima ac tertia ad aquè multiplices secunda & quarta eandem habere proportionem, ex eo, quod ex 6. defin. vt ipse explicauit, aquè multiplices prima ac tertia ad aquè multiplices secunda & quarta eandem habent proportionem; quod est absurdum: tum etiam, quia eodem modo statim a principio locus esset illi inferre, sic esse, per 6 defin. E, ad G, vt F, ad H, sine acceptione nouarum magnitudinũ aquè multiplicium. Non enim est maior ratio in illis, quàm in his. Reijcienda est ergo huiusce modi demonstratio, vna cum expositione 6 definitionis, vt suprà diximus. At iuxta nostram interpretationem eiusdem definitionis constat solum, si I, minor est, quàm L, vel aqualis, vel maior, etiam K, minorem esse, vel aqualem, vel maiorem, quàm M; quemadmodum & idem constat in aquè multiplicibus E, F, G, H, & in quibuscunque alijs, si sumantur prout inter se respondent. Vnde ex 6 defin. rectè colligitur, ita esse E, primã ad G, secundam, vt est F, tertia ad H, quartam, quandoquidem illis 6. definitio conuenit.

v. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

ITA multiplex sit tota A B, totius C D, vt est multiplex A E, ablata ablatæ C F, siue A E, C F, ablatæ sint totis A B, C D, commensurabiles, vt in prima figura, siue incommensurabiles, vt in secunda figura. Item siue A E, C F, compositæ sint ex eisdem partibus, ex quibus totæ A B, C D, componuntur, vt in priori figura, siue non ex eisdem, vt in posteriori figura. Dico reliquam E B, ita esse multiplicem reliquæ F D, vt est tota A B, totius C D. Ponatur enim E B, ita multiplex cuiuspiam magnitudinis, videlicet ipsius G C, vt est A E, multiplex ipsius C F, vel tota A B, totius C D. Quoniam igitur A E, E B, æquè sunt multiplices ipsarum C F, G C; *a* erit tota A B, totius G F, ita multiplex, vt A E, ipsius C F, hoc est, omnes omnium, vt vna vnius. Sed tam multiplex etiam ponitur A B, ipsius C D, quàm est multiplex A E, ipsius C F. Igitur A B, tam est multiplex ipsius G F, quàm multiplex est ipsius C D; *b* atque ijsdem æquales sunt G F, C D. Ablata igitur communi C F, æquales erunt G C, F D. Tam multiplex igitur erit E B, ipsius F D, quàm multiplex est ipsius

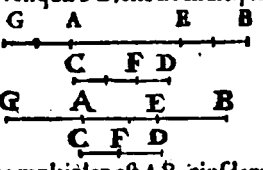


a1. quinti.

b6. prenum.

pſius G C. Sed ita multiplex poſita fuit E B, ipſius G C, vt A E, ipſius C F, hoc eſt, vt tota A B, totius C D. Quare tam multiplex eſt reliqua E B, reliquæ F D, quàm eſt tota A B, totius C D : quod eſt propoſitum.

ALITER. Sit ita multiplex tota A B, totius C D, vt ablata A E, ablatæ C F. Dico reliquam E B, reliquæ F D, eſſe ſic multiplicem, vt eſt tota totius. Poſita enim G A, ita multiplici ipſius F D, vt eſt A E, ipſius C F, vel vt tota A B, totius C D: quoniam A E, G A, æquè multiplices ſunt ipſarum C E, F D; a erit tota G E, ſic multiplex totius



a1. quia C D, vt A E, ipſius C F: Sed ita quoque multiplex eſt A B, eiuſdem C D, vt A E, ipſius C F, ex hypotheſi. Aequè multiplices ſunt igitur G E, A B, ipſius C D; b atque adeò inter ſe æquales. Quare, dempta communi A E, æquales erunt G A, E B: Ideoque æquè multiplices ipſius F D; cùm G A, ſit multiplex poſita ipſius F D. Atqui ita eſt multiplex poſita G A, ipſius F D, vt A B, ipſius C D. Igitur & E B, reliqua ſic erit multiplex ipſius F D, reliquæ, vt A B, tota totius C D; quod eſt propoſitum. Si magnitudo itaque magnitudinis æquè fuerit multiplex, &c. Quod erat demonſtrandum.

a1. quia

b 6. prot. num.

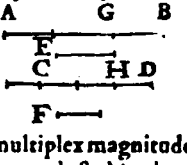
SCHOLIVM.

VNIVERSE idipſum demonſtrabitur propoſ. 19. in magnitudinibus cuiuſcunque proportionis, & non tantùm multiplicum, vt hic eſt factum.

THEOR. 6. PROPOS. 6. vj.

SI duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æquè multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æquè multiplices: & reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æquè ipſarum multiplices.

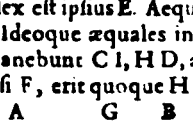
SINT magnitudines A B, C D, æquè multiplices ipſarum E, F; & detractæ A G, C H, earundem E, F, æquè multiplices. Dico reliquas G B, H D, aut eſſe æquales eiſdem E, F, aut certè earundem æquè multiplices. Cùm enim A B, ſit multiplex ipſius E, & ablata quoque A G, eiuſdem E, multiplex; erit reliqua G B, vel æqualis ipſi E, vel



eius multiplex; alias inæqualis, vel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod eſt abſurdum. Sit igitur primum G B, æqualis ipſi E. Dico etiam H D, ipſi F, eſſe æqualem. Ponatur enim C F, æqualis ipſi F. Et quia prima A G, tum eſt multiplex ſecundæ E, quàm C H, tertia multiplex eſt quar-

tæ k,

tæ F; & quinta G B, æqualis est secundæ E, sicut & C I, sexta æ-
a 2. quinti. qualis est quartæ F; a erit A B, prima cum quinta, ita multiplex secundæ E, vt H I, tertia cum sexta, multiplex est quartæ F: Atqui C D, ipsius F, erat quoque tam multiplex, quàm A B, multiplex est ipsius E. Aequè multiplices igitur sunt H I, C D, ipsius F.
b 6 pro. b Ideoque æquales inter se. Quare, dempta C H, communi, re-
manebunt C I, H D, æquales. Cùm igitur C I, posita sit æqualis ipsi F, erit quoque H D, eidem F, æqualis. Quod est propositum.



SIT deinde G B, multiplex ipsius E. Dico ita quoque esse multiplicem H D, ipsius F. Posita namq; C I, ita multiplici ipsius F,
c 2. quinti. vt est multiplex G B, ipsius E; c erit, vt priùs A B, ita multiplex ipsius E, vt H I, multiplex
d 6. pro. est ipsius F. d Quare iterum æquales erunt H I, C D; atq; adeò dempta communi C H, & reliquæ C I, H D, æquales erunt: Sed C I, est ita multiplex ipsius F, vt G B, ipsius E, multiplex est, ex hypothesi. Igitur & H D, tam multiplex erit ipsius F, quàm G B, ipsius E, multiplex est. quod est propositum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum sint æquè multiplices, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

HOC quoque ostendemus vniuersè propos. 24. in omni genere proportionis.

BREVIVS totum propos. ita demonstrabimus. Quoniam A B, C D, sunt ipsarum E, F, aquè multiplices; erunt in A B, tot magnitudines æquales ipsi E, quot sunt magnitudines in C D, æquales ipsi F. Rursus quia A G, G H, earundem E, F, aquè multiplices sunt; erunt quoque in A G, tot magnitudines ipsi E, æquales, quot sunt magnitudines in C H, ipsi F, æquales. Si igitur ex æqualibus multitudinibus A B, C D, demantur multitudines æquales A G, C H; remanebunt multitudines G B, H D, æquales. Quare totes continebitur E, in G B, quoties F, continetur in H D: ac proinde si G B, æqualis sit ipsi E, erit quoque H D, ipsi F, æqualis: Si autem G B, multiplex sit ipsius E; erit ita multiplex H D, ipsius F, vt G B, multiplex est ipsius E: quandoquidem totes E, in G B, continetur, quoties F, in H D, existit, vt ostensum est.

vij. THEOR. 7. PROPOS. 7.

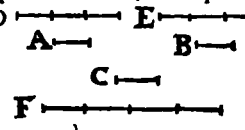
ÆQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

SINT duæ magnitudines A, B, æquales inter se, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C. Item C, vicissim ad A, & B, eandem quoque proportionem habere.

bere. Sumantur D, E, æquè multiplices ipſarum æqualium A, B; a eruntq; D, E, æquales inter ſe. Capiatur rurſus F, vtcunq; multiplex ipſius C. Quoniam igitur D, E, æquales ſunt, ſit vt vtraque vel minor ſit, quàm F, vel æqualis, vel maior, iuxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia ſumantur. Quare cùm D, E, æquè multiplices primæ A, & B, tertiæ, minores ſint ipſa F, multiplice ſecundæ & quartæ C, (eſt enim C, inſtar duarum magnitudinum, &c.) vel æquales, vel maiores; b erit ea proportio primæ A, ad C, ſecundam, quæ tertiæ B, ad C, quartam.

a 6 prænum.

b 6. def. quints.



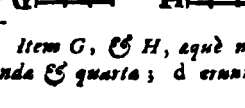
EODEM pacto oſtendemus F, vel minorem eſſe vtraque D, E, vel vtrique æqualem, vel maiorem. Igitur cùm F, multiplex primæ & tertiæ C, vnà deficiat à D, & E, æquæ multiplicibus ſecundæ A, & quartæ B; vel vnà æqualis ſit, vel maior; c Erit quoque ea proportio primæ C, ad ſecundam A, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod eſt propoſitum. Poſſet breuius ſecunda hæc pars oſtendi per coroll. 4. propoſ. ex inuerſa ratione. Cùm enim oſtenſum iam ſit, eſſe A, ad C, vt B, ad C, erit conuertendo C, ad A, vt C, ad B. Aequales ergo ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. quod erat demonſtrandum.

c 6. def. quints.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM eſt, nihil poſſe in hac propoſ. colligi ex defin. 6. iuxta expoſitionem Campani ac Orontij. Neque enim per demonſtrationem conſtat, vtramque multiplicem D, & E, eandem habere proportionem ad multiplicem F, ſed ſolum, cùm illa ſint æquales, vtramque eſſe vel minorem, vel æqualem, vel maiorem multiplici F. Idemque ceruitur in omnibus ferè propoſitionibus, quæ per 6. definitionem propoſitum colligunt: Vt meritò illa expoſitio reiecta ſit à nobis.

EODEM ferè modo oſtendemus, æquales magnitudines ad alias inter ſe æquales, eandem habere rationem, ſi loco multiplicis F, ſumantur duæ æquè multiplices: quod Euclides, ob facilitatem omiſit, vtitur tamen eo nonnunquam in iis, quæ ſequuntur, perinde ac ſi in hac propoſ. 7. eſſet demonſtratum. Sint enim tam A, & B, inter ſe æquales, quàm C, & D, inter ſe. Dico eſſe A, ad C, vt B, ad D. Sumptis enim E, & F, æquè multiplicibus ipſarum A, & B, prima & tertia. Item G, & H, æquè multiplicibus ipſarum C, & D, ſecunda & quarta; d erunt tam E, & d 6. prænum.



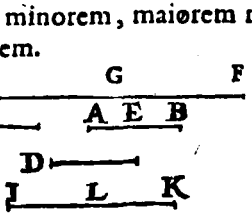
E, & F, inter se æquales, quàm G, & H, inter se. Quare si E, multiplex prima deficit à G, multiplice secunda, etiam F, multiplex tertia, ab H, multiplice quarta deficiet; & si æqualis, æqualis; & si superat, superabit. a *Eadem ergo est proportio A, prima ad C, secundam; quæ B, tertia ad D, quartam Quod est propositum.*

a 6. defin. quinti.

viij.

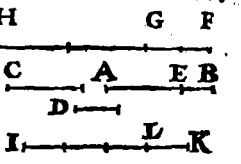
THEOR. 8. PROPOS. 8.

INÆQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem.



SINT magnitudines inæquales, A B, maior, & C, minor, Tertia autem quælibet D. Dico proportionem A B, ad D, maiorem esse proportione C, ad D. At è conuerso, maiorem esse proportionem D, ad C, quàm D, ad A B. Intelligatur enim in A B, magnitudine maiore, magnitudo A E, æqualis minori C, vt sit reliqua E B. Vtraque deinde E B, A E, æqualiter multiplicetur, hac lege, vt G F, multiplex ipsius E B, maior quidem sit, quàm D; At H G, multiplex ipsius A E, non sit minor eadem D, sed vel maior, vel æqualis. In priori figura necesse fuit sumere G F, H G, triplas ipsarum E B, A E; quia dupla ipsius A E, esset minor, quàm D. Loco triplarum potuissent accipi quæcunque aliæ æquè multiplices maiores. In posteriori autem figura satis est, sumere ipsarum E B, A E, duplas G F, H G; quia vtraque G F, H G, maior est quàm D. Possent tamen pro duplis sumi quæcunque aliæ maiores æquè multiplices. Quoniam igitur duæ F G, G H, æquè multiplices sunt duarum B E, E A; erit & tota F H, ita multiplex totius A B, vt H G, ipsius A E, hoc est, ipsius C, cùm æquales sint positæ C, & A E. Capiatur quoque ipsius D, multiplex I K, quæ proximè maior sit, quàm H G, nempe dupla, vt in priori figura. Quod si dupla maior non fuerit quàm H G, sumatur tripla, vel quadrupla, &c. In posteriori figura accepta est I K, ipsius D, quadrupla, quia tam dupla, quàm tripla minor est, quàm H G; at quadrupla iam maior est. Abscissa ergo L K, quæ æqualis sit ipsi D, non erit I L, maior, quàm H G, (aliàs I K, non esset multiplex ipsius D, proximè maior quàm H G; sed & I L, maior quoq; esset quàm H G. Quod si I K, dupla sit ipsius D, perspicuum est, I L, non esse maiorem, quàm H G, cùm H G, posita sit non minor quàm D, hoc est, quàm I L,) & idcirco H G, erit vel æqualis ipsi I L, vel maior. Et quia F G, maior est posita quàm D; L K, vero æqualis eidem D; erit quoque F G, maior quàm L K Cùm ergo H G, non

HG, non minor sit quàm IL, vt demonstratum est, sed vel æqualis, vel maior; erit tota FH, maior quàm IK. Itaque cùm FH, HG, sint æquè multiplices primæ AB, & tertiæ C; atque IK, multiplex ipsius D, quæ instar est



secundæ & quartæ: sit autem FH, multiplex primæ, maior quàm IK, multiplex secundæ; At HG, multiplex tertiæ, non sit maior quàm IK, multiplex quartæ, immò minor, ex hypothesi; (sumpta enim est IK, multiplex ipsius D, maior quàm HG,) erit maior proportio AB, primæ ad D, secundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.

QVONIAM verò è contrario IK, multiplex primæ D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertia; At C, secunda & AB, quarta) maior est quàm HG, multiplex secundæ C; At IK, multiplex tertiæ D, maior non est, quàm FH, multiplex quartæ AB, immò minor, cùm FH, maior sit, quàm IK, vt ostensum est; erit maior proportio D, primæ ad C, secundam, quam D, tertiæ ad AB, quartam: quod est propositum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

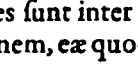
RECTE autem animaduertit Petrus Nonius in sua Algebra de Proportione agens, per hanc propos. 9. probari non posse, angulum rectum maiorem habere proportionem, ad quemuis alium angulum, quàm angulum semicirculi ad eundem illum angulum, quamquam rectus angulus maior sit angulo semicirculi: quia excessus anguli recti supra angulum semicirculi, qui est angulus contingentia, quantumuis multiplicatus superare nequit tertium illum angulum, quod tamen in huius propos. demonstratione requiritur. Nam FG, multiplex excessus EB, superare debet tertiam magnitudinem D, vt patuit. Neque hoc mirum cuipiam videatur. Nam angulus rectus ad angulum semicirculi non dicitur propriè habere proportionem, cùm eum excedat angulo contactus, qui eiusdem naturæ non est cum vtroque angulo, quòd ita multiplicari non possit, vt alterutrum illorum tandem excedat. Quemadmodum enim, si ad lineam vnius palmi adds posset punctum, vt fieret linea vno puncto lineam vnius palmi excedens, non diceretur propriè linea illa composita maior, quàm linea vnius palmi, propterea quòd excessus est indiuisibilis, & alterius naturæ; item quemadmodum si ad figuram planam quamcunque apponeretur linea vnius palmi, non diceretur hæc magnitudo ex diuersis magnitudinibus conflata ad figuram illam planam habere propriè proportionem maioris inæqualitatis: quòd excessus non sit eiusdem naturæ cum plana illa figura; ita quoque non habet angulus rectus

rectum propriè ad angulum semicirculi proportionem maioris inæqualitatis, quippe cùm angulo semicirculi adiectum sit angulum contactus, & efficiatur angulus rectus; atque adeò rectus angulus angulum semicirculi excedat quantitate diuersa natura, & dictum est. Itaque non solùm ea magnitudines proportionem proprie non habent, quarum, alterutra multiplicata alteram superare nequit, & ad defin. 5. huius lib. diximus: sed neque ea propriè dicentur habere proportionem, & idem Petrus Nonius annotauit, quarum excessus diuersam ab eis naturam habet, cuiusmodi sunt angulus rectus, & angulus semicirculi. Adeò & tunc solùm propriè magnitudines dicantur habere proportionem inter se, quando & alterutra multiplicata alteram superare potest, & excessus earum multiplicatus superare quoque potest vtramque. Fateor rem hanc esse perobscuram, & qua vix rectè intelligi possit: Verum hoc prouenit ex indiuisibilitate anguli contactus per lineam rectam. Huius generis sunt alia nonnulla in rebus Geometricis, quæ verissima quidem sunt propter demonstrationem euidentem, sed alia ex parte talem inducunt difficultatem, & ab ea non facilè intellectus se expediat. Verbi gratia, Verissimum est sphæram tangere planum in puncto, & à Theodosio demonstratur propos. 3. lib. 1. Sed qua ratione fiat, & hinc non sequatur, si globus continuè moueatur super planum, lineam rectam describi compositam ex punctis, nemo ad hunc vsque diem se explicauit, & omni ex parte difficultas sit sublata.

ix. THEOR. 9. PROPOS. 9.

QVÆ ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoq; sunt inter se æquales.

HABEANT primum A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, esse inter se æquales. Sit enim, si fieri potest, altera, nempe
a 8. quinti. A, maior, & B, minor. *a* Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quàm B, minoris ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales. Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B; Dico rursus A, & B, esse æquales. Nam si altera, nempe A, esset maior, & B, minor; *b* haberet C, ad B,
b 8. quinti. minorem, maiorem proportionem, quàm ad A, maiorem: quod est contra hypothesin. Non igitur maior erit A, quàm B, sed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat.



SCHOLIVM.

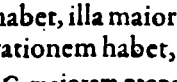
CONVERTIT hæc propositio 9. vtramque partem theorematis 7. & manifestum est.

THEOR.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

HABEAT primum A, ad C, maiorem proportionem, quàm B, ad eandem C. Dico A, maiorem esse, quàm B: Si enim A, foret ipsi B, æqualis, *a* haberent A, & B, eandem proportionem ad C: Si autem A, minor esset, quàm B, *b* haberet B, maior ad C, proportionem maiorē, quàm A, minor ad eandem C, quod est contra hypothesin. Nō est igitur A, æqualis vel minor quàm B, sed maior. Habeat secundò C, ad B, maiorem proportionem, quàm ad A. Dico B, minorem esse quàm A. Non enim æqualis erit B, ipsi A; *c* alioquin haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod est contra hypothesin. Neque verò B, maior erit quàm A, *d* aliàs haberet C, ad minorem A, maiorem proportionem quàm ad B, maiorem: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est B, quàm A, quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.



a 7. *quinti.*
b 8. *quinti.*
c 7. *quinti.*
d 8. *quinti.*

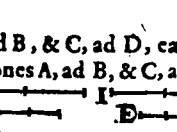
SCHOLIVM.

HÆC quoq; propositio conuertit vtramque partem theorematis 8. Vt perspicuum est.

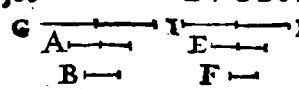
THEOR. 11. PROPOS. 11.

QVÆ eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem.

SINT proportiones A, ad B, & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, easdem esse inter se, secundum definitionem 6. hoc est, sumptis æquè multiplicibus ipsarum A, C; Item æquè multiplicibus ipsarum B, D; semper contingere, vt multiplices ipsarum A, C, à multiplicibus ipsarum B, D, vel vnà deficiant, vel vnà æquales sint, vel vnà excedant. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æquè multiplices quæcunque G, H, I, & ad omnes consequentes B, D, F, aliæ quæcunque æquè multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur esse A, prima ad B, secundam, vt E, tertia ad F, quartam; *e* fit, vt si G, multiplex primæ deficit à K, multiplex secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, mul-



e 6. *def. quinti.*



M, multiplice quartæ; Et ſi G, æqualis eſt ipſi K, vel maior, æqualis quoque ſit I, ipſi M, vel maior: *a* Sed (vt eodem modo oſtenderur) ſi I, minor eſt, quàm M, vel æqualis, vel maior eſt quoque H, minor quàm L, vel æqualis, vel maior: propterea quòd ponitur eſſe E, prima ad F, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quare ſi G, multiplex primæ A, deficit à K, multiplice ſecundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D. Et ſi G, æqualis eſt, vel maior quàm K, etiam H, æqualis erit, vel maior quàm L. Idemque oſtendetur accidere in quibuſcunque alijs æquè multiplicibus. *b* Quapropter erit A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem. Quod erat oſtendendum.

a 6. defi. quinti.

b 6 def. quinti.

SCHOLIVM.

EADEM ratione, Quæ eiſdem ſunt eadem rationes; & inter ſe ſunt eadem. Vt ſi ſit, vt A, ad B, ita C, ad D, ſit autem E, ad F, vt A, ad B, & G, ad H, vt C, ad D: erit quoque L, ad F, vt G, ad H. Quia enim proportiones E, ad F, & C, ad D, eadem ſunt proportioni A, ad B, c erit vt E, ad F, ita C, ad D. Rurſus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eadem ſunt proportioni C, ad D, d erit quoq; vt E, ad F, ita G, ad H.

A, 3. B, 1: C, 6. D, 4. E. 9. F, 6: G, 12. H, 8.

c 11. quinti.

d 11. quinti.

RVRSVS, ſi ſint proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, eadem inter ſe: ſit autem vt A, ad B, ita G, ad H; & vt C, ad D, ita I, ad K; & vt E, ad F, ita L, ad M: erunt quoque proportiones G, ad H: I, ad K; & L, ad M, eadem inter ſe. Nam vt proximè in quatuor proportionibus oſtenſum eſt, vt G, ad H, ita eſt I, ad K; propterea quòd hæ proportiones ſimiles ſunt proportionibus A, ad B, & C, ad D. Eodem modo erit, vt I, ad K, ita L, ad M; cùm proportiones I, ad K, & L, ad M, eadem ſint proportionibus C, ad D, & E, ad F, quæ æquales ſunt. Item erit, vt G, ad H, ita L, ad M; cùm hæ proportiones eadem ſint proportionibus A, ad B, & E, ad F, quæ æquales ponuntur. Eadem ratio eſt de pluribus.

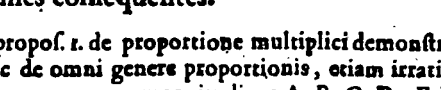
A, 3. B, 1: C, 6. D, 4: E, 9. F, 6. G, 12. H, 8. K, 12. L, 30. M, 20.

xij. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI ſint magnitudines quotcunque proportionales; quemadmodum ſe habuerit vna antecedentium ad vnam

nam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

QVOD in propos. 1. de proportione multiplici demonstrauit, ostendit hic de omni genere proportionis, etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B; C, D; E, F, proportionales, hoc est, sit A, ad B, vt C, ad D, & E, ad F. Dico vt est vna antecedentiũ ad vnam consequentium, nimirum A, ad B, ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æquè multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æquè multiplicibus consequentium, *a* erunt omnes G, H, I, simul omnium A, C, E, simul ita multiplices, vt vna vnius, nempe vt G, ipsius A; & omnes, K, L, M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, vt vna vnius, nimirum vt K, ipsius B. Quoniam verò ponitur esse A, primæ ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam, & vt alia E, tertia ad aliam F, quartam; *b* fit vt si G, multiplex primæ deficit à K, multiplice secundæ, deficiat quoque H, multiplex tertiæ ab L, multiplice quartæ, & I, ab M: Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque sit H, ipsi L, & I, ipsi M, vel maior. Ac proinde si G, minor est, vel æqualis, vel maior quàm K, & omnes G, H, I, simul omnibus K, L, M, simul minores sint, vel æquales vel maiores. *c* Quocirca vt est A, prima ad B, secundam, ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. *Si* sint itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.



a 1. quinti.

b 5. def. quinti.

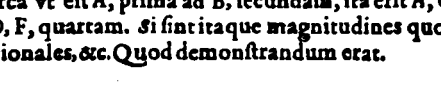
c 5. def. quinti.

xiij.

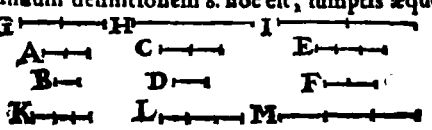
THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia verò ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

SIT prima A, ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam: sit autẽ proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quàm E, quintæ ad F, sextam. Dico & proportionem A, primæ ad B, secundam esse maiorem quàm E, quintæ ad F, sextam, se-



ſecundum definitionem 8. hoc eſt, ſumptis æquè multiplicibus ipſarum A, F; Item æquè multiplicib. ipſarum B, F, contingere poſſe, vt multiplex ipſius A, excedat multiplicem ipſius B, at multiplex ipſius E, multiplicem ipſius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, æquè multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æque multiplicibus conſequentium, cùm ſit A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam; a ſit vt ſi G, multiplex primæ exceſſerit K, multiplicem ſecundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipſam L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipſam L, b non neceſſariò I, excedit ipſam M, ſed æqualis aliquando erit, vel minor; quòd maior ponatur proportio C, primæ ad D, ſecundam, quàm E, tertiæ ad F, quartam. Igitur ſi G, excedit K, non neceſſariò I, excedit M. c Maior eſt ergo proportio A, primæ ad B, ſecundam, quàm E, tertiæ ad F, quartã. Quam ob rem ſi prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod oſtendendum erat.



a 6 def. quinti.

b 8. def. quinti.

c 8. def. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD ſi proportio C, tertia ad D, quartam minor fuerit, quàm E, quinta ad F, ſextam; erit quoque proportio A, prima ad B ſecundam minor quàm E, quinta ad F, ſextam. Si enim proportio C, ad D, minor eſt quàm E, ad F, hoc eſt, proportio E, prima ad F, ſecundam maior quàm C, tertia ad D, quartam; d *ſit vt ſi I, excedit ipſam M, non neceſſariò H, excedat ipſam L, ſed aliquando deficiat, vel ei æquale ſit.* e *Sed ſi H, deficit ab L, vel æquale eſt, etiam G, deficiet à K, vel ei erit æquale, eò quòd ponatur C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam. Quare ſi I, excedit ipſam M, non neceſſariò G, excedet ipſam K,* f *atq; idcirco maior erit proportio E, prima ad F, ſecundam, quam tertia ad B, quartam, hoc eſt, proportio A, ad B, minor erit quàm E, ad F. Quod eſt propoſitum.*

d 8. def. quinti.

e 6. def. quinti.

f 8. def. quinti.

EODEM modo. Si prima ad ſecundam, maiorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quàm quinta ad ſextam: Prima quoq; multò magis ad ſecundam, maiorem rationem habebit, quàm quinta ad ſextam.

QVOD ſi prima ad ſecundam, minorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam, tertia autem ad quartam, minorem habuerit, quàm quinta ad ſextam: Prima quoq; multò magis ad ſecundam, minorem rationem habebit, quàm quinta ad ſextam.

xiiij. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam

quam tertia ad quartam; Prima verò quàm tertia maior fuerit, erit & ſecunda maior quàm quarta. Quod ſi prima fuerit æqualis tertiæ, erit & ſecunda æqualis quartæ: Si verò minor, & minor erit.

SIT enim A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam. Dico ſi A, maior fuerit quàm C, fore quoque B, maiorem quàm D. Quod ſi A, æqualis fuerit ipſi C, æqualem quoque eſſe B, ipſi D: Si deniq; A, minor fuerit quàm C, minorem quoq; eſſe B, ipſa D. Sit primum A, maior quàm C, *a* eritq; propterea proportio A, maioris ad B, maior quàm C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecũdam, vt A, tertia ad B, quartam; Proportio autẽ A, tertiæ ad B, quartã, maior eſt, vt oſtendimus, quàm C, quintæ ad B, ſextam: *b* Maior quoq; erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quàm C, quintæ ad B, ſextam. *c* Minor eſt ergo D, quàm B; Ideoq; B, maior erit quàm D. Quod eſt propoſitum.

a 8. *quinti.*
b 13. *quinti.*
c 10. *quinti.*

SIT deinde A, æqualis ipſi C, *d* eritq; idcirco A, ad B, vt C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem ſunt proportioni A, ad B, *e* erunt quoq; inter ſe eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; *f* Ideoq; æquales erunt B, & D. Quod eſt propoſitũ.

d 7. *quinti.*
e 11. *quinti.*
f 9. *quinti.*

SIT tertiò A, minor quàm C, *g* eritq; ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quàm A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam; eſt autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quàm C, quintæ ad B, ſextam: *h* Minor quoq; erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quàm C, quintæ ad B, ſextam; *i* Ideoq; B, minor erit, quàm D, quod eſt propoſitum. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum.

g 8. *quinti.*
h 13. *quinti.*
i 10. *quinti.*

SCHOLIVM.

QVOD ſi ſecunda maior ſit, vel æqualis, vel minor, quàm quarta: erit quoque eadem ratione prima maior, vel æqualis, vel minor, quàm tertia. Sit enim primum B, maior, quàm D, vt in prima figura. Dico & A, maiorem eſſe, quàm C. Cùm enim B, maior ſit, quàm D; k erit maior proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur eſt, vt prima A, ad ſecundam B, ita tertia C, ad quartam D. Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam oſtenſa eſt maior, quàm C, quintæ ad B, ſextam; l erit quoque proportio A, primæ ad B, ſecundam maior, quàm C, quintæ ad B, ſextam: m ac proinde A, maior erit, quàm C. quod eſt propoſitum.

k 8. *quinti.*
l 13. *quinti.*
m 10. *quinti.*

DEINDE ſit B, æqualis ipſi D, vt in ſecunda figura. Dico & A, ipſi

ipsi C, esse aequalem. Cùm enim E, ipsi D, sit aequalis; erit C, ad B, vt C, ad D: Est autem quoque A, ad B, vt C, ad D. a Igitur erit quoq; vt A, ad B, vt C, ad B; b propterea A, ipsi C, aequalis erit. quod est propositum.

a 11. quinti. b 9. quinti.

TERTIO sit B, minor quàm D, vt in tertia figura. Dico & A, minorem esse, quàm C. Cùm enim B, minor sit quàm D, c erit minor proportio E, ad D, quam C, ad B. Quia igitur est, vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam: Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam ostensa est minor, quàm C, quintæ ad B, sextam, d erit quoq; proportio A, primæ ad B, secundam minor, quàm C, quintæ ad B, sextam. e Igitur maior erit C, quàm A, ac proinde A, minor erit, quàm C. quod est propositum.

c 8. quinti. d 13. quinti. e 10. quinti.

BREVIVS. Si B, maior est, quàm D, & A, dicatur non maior, quàm C, sed vel minor, vel aequalis, f erit quoque B, minor, quàm D, vel aequalis, quod est contra hypothesim. Eademque ratio est in alijs casibus.

f 14. quinti.

VEL sic. Si est A, ad B, vt C, ad D; erit conuertendo B, ad A, vt D, ad C. Ergo si B, maior est, vel minor, vel aequalis ipsi D; g erit quoque A, maior, vel minor, vel aequalis ipsi C.

g 14. quinti.

NON demonstrauit autem Euclides, si prima maior est, vel aequalis, vel minor, quàm secunda, tertiam quoque maiorem esse vel aequalem, vel minorem, quàm quartam; (quo tamen argumentandi modo plerique Geometrarum tum veterum, tum recentiorum vtuntur) quia id perspicuum est ob similitudinem proportionum. Hinc enim fit, si vtraque est proportio maioris inaequalitatis, vtramq; antecedentem magnitudinem, id est, primam ac tertiam, maiorem esse vtraque magnitudine consequente, hoc est, secunda ac quarta: Si verò vtraque proportio est aequalitatis, vtramq; magnitudinem antecedentem vtriq; consequenti aequalem esse. Si denique vtraq; proportio est minoris inaequalitatis, vtramq; antecedentem magnitudinem vtraq; consequente esse minorem.

VERBI gratia, si est vt A, ad B, ita C, ad D; erit vtraque proportio vel maioris inaequalitatis, vel aequalitatis, vel minoris inaequalitatis. Quocirca si A, prima maior est quàm B, secunda, erit & C, tertia maior quàm D, quarta; Et si aequalis, aequalis; Et si minor, minor. Quod est propositum. Quod tamen Geometricè ostendemus cum Federico Commandino, licet id non sit necessarium, ad propos. 15. huius lib.

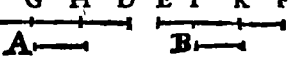


XV. THEOR. 15. PROPOS. 15.

PARTES cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuò respondent, ita sumantur.

SINT partium A, & B, æquè multiplices C D, & E F. Dico ita esse

esse CD, ad EF, vt A, ad B. Cum enim CD, & EF, sint æque multiplices ipsarum A, & B, continebitur A, toties in CD, quoties B, in EF. Diuidatur ergo CD, in partes CH, GH, HD, æquales ipsi A, & EF, in partes EI, IK, KF, æquales ipsi B, [a] eritque CG, ad EI, vt A, ad B, quod CG, & A, æquales inter se sint, nec non EI, & B. Eadem ratione erit GH, ad IK, & HD, ad KF, vt A, ad B, [b] ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionem. Quocirca vt CG, ad EI, hoc est, vt A, ad B, [c] ita erit CD, ad EF, nempe omnes CG, GH, HD, simul ad omnes EI, IK, KF, simul, quod est propositum. Partes itaque cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonstrandum.



a 7. *quinti.*

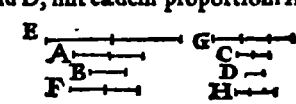
b 8. *quinti.*

c 12. *quinti.*

THEOR. 16. PROPOS. 16. xvj.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.

HIC demonstratur Alterna, siue Permutata proportio, seu ratio, quæ defin. 12. explicata est. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico vicissim, seu permutando, esse quoque A, ad C, vt B, ad D. Sumantur enim ipsarum A, B, primæ ac secundæ, æque multiplices EF; Item ipsarum C, D, tertiæ & quartæ æque multiplices G, H; [d] eritque E, ad F, vt A, ad B, cum E, & F, sint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, vt C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F, & C, ad D, sint eædem proportioni A, ad B; erunt & ipsæ [e] inter se eædem. Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem sunt proportioni C, ad D; [f] erunt & ipsæ eædem inter se; hoc est, vt est E, prima ad F, secundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. [g] Quare si E, prima maior est quam G, tertia, vel æqualis, vel minor, erit quoq; F, secunda maior quam H, quarta, vel æqualis, vel minor, in quacunque multiplicatione accepta sint æque multiplicia E, F, & æque multiplicia G, H. [h] Est igitur A, prima ad C, secundam, vt B, tertia ad D, quartam (cum E, & F, sint æque multiplices primæ A, ac tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, secundæ, & D, quartæ, & illæ ab his vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant, &c.) quod est propositum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt. Quod ostendendum erat.



d 15. *quinti.*

e 11. *quinti.*

f 11. *quinti.*

g 14. *quinti.*

h 6. *defin. quinti.*

SCHOLIVM.

PORRO demonstratio huius propos. locum solum habet quando quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Nam si duæ A, B, essent

Vnius generis, & duæ C, D, alterius; essent quoque multiplices E, F, vnius generis, in quo videlicet sunt A, B, & multiplices G, H, alterius; in quo nimirum existunt C, D. Quare non posset dici E, maior quam G, vel æqualis, vel minor; ac proinde nihil colligeretur ex defin. 6. huius lib. Vsurpanda igitur erit permutata proportio in solis quatuor magnitudinibus eiusdem generis. Quod nonnulli philosophi non aduertentes in graues errores incidunt, cum eam adhibeant in rebus diuersorum generum.

EX hoc & illud demonstrabitur, quod ad finem scholij propos. 14. ex ipsa similitudine proportionem ostendimus, recepimusque nos demonstraturos hoc loco, videlicet.

SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima vero, quam secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

QVANQVAM id, quod hic proponitur, per se notum sit, vt ad propos. 14. diximus, demonstrabimus tamen illud cum Federico Commandino, hoc modo. Sit vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, si A, prima maior est, quam B, secunda; & C, tertiam maiorem esse quarta D, & si est æqualis, æqualem; & si minor, minorem. a *Erit enim permutando, vt A, ad C, ita B, ad D.* b *Quare si A, prima maior est, quam B, tertia, erit & C, secunda maior, quam D, quarta; & si æqualis, æqualis, & si minor, minor. Quod est propositum.*

a 16. quinti.

b 14. quinti.

SED & hac demonstratio locum duntaxat habet, cum quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Quare satius est illud ex natura proportionum monstrare, vt à nobis ad propos. 14. factum est. Ita enim verum erit semper id, quod proponitur, etiamsi magnitudines A, B, in vno genere, & C, D, in alio contineantur: immò verò licet A, B, sint quantitates continuæ, & C, D, numeri, &c.

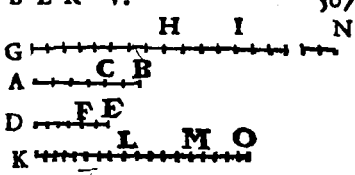
xvij. THEOR. 17. PROPOS. 17.

SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.

HOC loco demonstrat Euclides Diuisionem rationis, quam defin. 15. explicauit. Sint enim compositæ magnitudines A B, C B, & D E, F E, proportionales, hoc est, sit A B, ad C B, vt D E, ad F E. Dico & diuisas eadem proportionales esse, hoc est, vt est A C, ad C B, ita esse D F, ad F E, in eo sensu, quem definitione 6. exposuimus. Ipsarum enim A C, C B, D F, F E, æque multiplices capiantur eodem ordine G H, H I, K L, L M; & erit que G I, ita multiplex

a 1. quinti.

plex ipſius A B, vt eſt G H, ipſius A C, hoc eſt, vt K L, ipſius D F. Sed vt eſt multiplex K L, ipſius D F, *a* ita quoq; multiplex eſt K M, ipſius D E. Æque multiplices ergo ſunt G I, K M,



a 1. *quinti.*

ipſarum A B, D E. Capiantur rurſus I N, M O, æque multiplices ipſarum C B, F E. Quoniam igitur ſic eſt multiplex H I, prima ſecundæ C B, vt L M, tertia quartæ F E: Item tam eſt multiplex I N, quinta ſecundæ C B, quam multiplex eſt M O, ſexta quartæ F E; *b* erit & H N, ſic multiplex ſecundæ C B, vt L O, multiplex eſt quartæ F E. Itaque cum ſit A B, prima ad C B, ſecundam, vt D E, tertia ad F E, quartam; ſumptæque ſint æque multiplices G I, K M, primæ ac tertiæ A B, D E; Item ſecundæ & quartæ C B, F E, æque multiplices H N, L O, *c* ſit vt ſi G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplice ſecundæ C B, etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficiat ab L O, multiplice quartæ F E; & ſi æqualis, æqualis; & ſi excedit, excedat. Quod ſi deficiat tam G I, ab H N, quam K M, ab L O, ablatis communibus H I, L M, deficiet quoque G H, ab I N, & K L, ab M O. Et ſi G I, æqualis fuerit ipſi H N, & K M, ipſi L O, ablatis communibus H I, L M, erit & G H, æqualis ipſi I N, & K L, ipſi M O. Et ſi denique G I, exceſſerit ipſam H N, & K M, ipſam L O, ablatis communibus H I, L M, excedet quoque G H, ipſam I N, & K L, ipſam M O. Quam ob rem cum G H, K L, ſumptæ ſint æque multiplices primæ A C, & tertiæ D F: Item I N, M O, æque multiplices ſecundæ C B, & quartæ F E, oſtenſumq; ſit, (in quacunq; multiplicatione illæ æque multiplices fuerint acceptæ) æque multiplices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus ſecundæ & quartæ vel vna deficere, vel æquales eſſe, vel vna excedere; *d* Erit A C, prima ad C B, ſecundam, vt D E, tertia ad F E, quartam. quod eſt propoſitum. Si compoſitæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

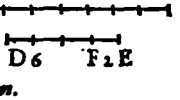
b 2. *quinti.*

c 6. *def. quinti.*

d 6. *def. quinti.*

SCHOLIVM.

EX his facile demonſtrabimus modum illum argumentandi, quem definitione 15. Diuiſionem rationis conuerſam diximus: Hoc eſt, ſi eſt, vt A B, ad C B, ita D E, ad E F; eſſe quoque vt C B, ad A C, ita F E, ad D F, quod ita patet. Quoniam eſt vt A B, ad C B, ita D E, ad F E; e erit diuidendo, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Igitur conuertendo erit quoque, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F. Quod eſt propoſitum.



e 17. *quinti.*

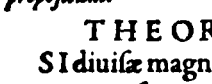
NVLLO etiam negotio demonſtrabitur modus ille argumentandi, quem ad eandem defin. 15. Diuiſionem rationis contrariam appellauimus,

Lauimus, & in quo antecedens magnitudo minor est quam consequens, non autem maior, & in Diuisione rationis, quam Euclides definiuit, & ea, quam proximè demonstrauimus. Sit enim vt A C, ad A B, ita D F, ad D E. Dico esse quoque per Diuisionem rationis contrariam, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quoniam enim est, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E; erit conuertendo, vt A B, ad A C, ita D E, a 17. quinti. *ad D F.* a *Ergo diuidendo, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F: Ac proinde conuertendo rursus, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quod est propositum.*

xviij. THEOR. 18. PROPOS. 18.

SI diuisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoque compositæ proportionales erunt.

DEMONSTRAT hoc loco Euclides compositionem rationis, quam definitione 14. descripsit. Sint enim diuisæ magnitudines A B, B C, & D E, E F, proportionales, hoc est, A B, ad B C, vt D E, ad E F. Dico & compositas proportionales esse, hoc est, vt est A C, ad B C, ita esse D F, ad E F. *Si enim non* est, vt A C, ad B C, ita D F, ad E F, habebit D F, ad aliquam magnitudinem minorem ipsa E F, vel maiorem, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Habeat primum D F, ad G F, minorem ipsa E F, si fieri potest, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur est, vt A C, ad B C, ita D F, ad G F; *b* Erit diuidendo quoque, vt A B, ad B C, ita D G, ad G F: Sed vt A B, ad B C, ita posita quoque est D E, ad E F. *c* Igitur erit etiam, vt D G, prima ad G F, secundam, ita D E, tertia ad E F, quartam. Cum ergo D G, prima maior sit, quàm D E, tertia, *d* erit quoque G F, secunda maior quàm E F, quarta, pars quàm totum. Quod est absurdum.



b 17. quinti. c 11. quinti. d 14. quinti.

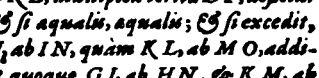
HABEAT deinde, si fieri potest, D F, ad H F, maiorem ipsa E F, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur est, vt A C, ad B C, ita D F, ad H F; *e* erit diuidendo quoque vt A B, ad B C, ita D H, ad H E. Sed vt A B, ad B C, ita posita etiam est D E, ad E F. *f* Igitur erit quoque, vt D H, prima ad H F, secundam, ita D E, tertia ad E F, quartam. Cum ergo D H, prima minor sit quàm D E, tertia, erit quoque H F, secunda minor quàm E F, quarta, totum quàm pars. quod est absurdum. Non igitur habebit D F, ad minorem ipsa E F, aut ad maiorem, eandem proportionem, quam A C, habet ad B C. Ergo D F, ad ipsam E F, erit, vt A C, ad B C, quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

e 17. quinti. f 11. quinti.

SCHOLIVM.

HANC propositionem demonstrant nonnulli cum Campano eadem fer-

dem fermè ratione, qua antecedentem propositionem Euclides demonstrauit, hoc videlicet modo. Sint diuisæ magnitudines AC, CB, DF, FE, proportionales, hoc est, AC, ad CB; & vt DF, ad FE. Dico eas etiam compositas proportionales esse, & vt AB, quidem ad CB, ita DE, ad FE. Sumantur enim, & in antecedente propositione, ipsarum AC, CB, DF, FE, æque multiplices GH, HI, KL, LM. Item ipsarum CB, FE, alia æque multiplices IN, MO, a eruntque rursus GI, KM, ipsarum AB, DE, æque multiplices. b Item HN, LO, ipsarum CB, FE, & in præcedenti Theoremate ostensum est.



a 1. quinti.

b 2. quinti.

Quoniam vero ponitur esse AC, prima ad CB, secundam, & vt DF, tertia ad FE, quartam, sumptaque sunt GH, KL, æque multiplices primæ ac tertiæ AC, DF. Item secundæ & quartæ CB, FE, æque multiplices IN, MO, c sit, & si GH, multiplex primæ AC, deficit ab IN, multiplice secundæ CB, etiam KL, multiplex tertiæ DF, deficiat ab MO, multiplice quartæ FE, & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Quod si deficiat tam GH, ab IN, quàm KL, ab MO, additis communibus HI, LM, deficiet quoque GI, ab HN, & KM, ab LO. Et si GH, æqualis fuerit ipsi IN, & KL, ipsi MO; additis communibus HI, LM, erit & GI, ipsi HN, æqualis, & KM, ipsi LO. Et denique si GH, excesserit ipsam IN, & KL, ipsam MO, additis communibus HI, LM, excedet quoque GI, ipsam HN, & KM, ipsam LO. Quoniam ergo si GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice secundæ CB, etiam KM, multiplex tertiæ DE, deficit ab LO, multiplice quartæ FE, & si æqualis, æqualis, & si excedit, excedit; d erit AB, prima ad CB, secundam, & vt DE, tertia ad FE, quartam. Quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

c 6. def. quinti.

d 6. def. quinti.

VERVM hæc demonstratio non rectè colligit propositum ex defin. 6. propterea quòd HN, LO, non sunt eæ multiplices ipsarum CB, FE, & multiplices acceptæ sunt IN, MO, earundem CB, FE. Vnde merito dubitare quis posset, an secundum quamcunque multiplicationem æque multiplices seruent eam conditionem defectus, æqualitatis, atque excessus, quam Euclides in 6. defin. postulauit; quandoquidem in hac demonstratione liberum non est assumere ipsarum CB, FE, quascunque æque multiplices, sed tales duntaxat, quales consurgunt ex HI, IN, & ex LM, MO, multiplicibus acceptis. Id quod in antecedentis propositionis demonstratione obiici non potest: quippe cum IN, MO, sumpta sint ipsarum CB, FE, æque multiplices qualescunque, ipsaque eadem remanent æque multiplices earundem CB, FE, in diuisa proportionalitate. Quam ob rem præferenda est Euclidis do-

dis demonſtratio huic demonſtrationi Campani. Libuit autem eam quoque explicare, ne eam ſtudioſus Lector, relicta illa Euclidis, arriperet, vt benam: præſertim cum oſtenſiua ſit, illa verò Euclidis ducat nos ad id, quod fieri non poteſt.

HINC facile etiam confirmabimus duos illos modos argumentandi, quos ad defin. 14. deſcripſimus. Priorem diximus compoſitionem rationis conuerſam. Sit enim vt A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compoſitionem rationis conuerſam, eſſe quoque vt A C, ad A B, ita D F, ad D E. Quoniam enim eſt, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, erit conuertendo, vt B C,



a 18. quinti. *ad B D, ita E F, ad D E.* a *Igitur & componendo erit, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E, quod eſt propoſitum.*

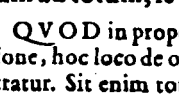
POSTERIOREM modum vocauimus compoſitionem rationis contrariam. Sit ergo rurſus, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compoſitionem rationis contrariam, eſſe quoque vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quoniam enim eſt, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F,

b 18. quinti. *erit conuertendo, vt B C, ad A B, ita E F, ad D E.* b *Igitur & componendo erit, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E: ac proinde conuertendo rurſus erit, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod eſt propoſitum.*

xix. ## THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, ſe habebit.

QVOD in propoſ. 5. demonſtratum eſt de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonſtratur. Sit enim tota A B, ad totam C D, vt ablata A E, ad ablatam C F. Dico & reliquam E B, eſſe ad reliquam F D, vt eſt tota A B, ad totam C D. Cum enim ſit A B, ad C D, vt A E, ad C F,



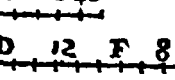
c 16. quinti. *c* erit & permutando A B, ad A E, vt C D, ad C F. *d* Diuidendo ergo erit E B, ad A E, vt F D, ad

d 17. quinti. C F. *e* Quare permutando rurſus erit E B, ad F D, vt A E, ad C F,

e 16. quinti. hoc eſt, vt tota A B, ad totam C D, cum poſita ſit A B, ad C D, vt A E, ad C F. Si igitur quemadmodum totum ad totum &c. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

HINC facile demonſtrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui ſumitur à conuerſione rationis, iuxta 16. defin.



SIT enim, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E. Dico per conuerſionem rationis eſſe quoque

quoque, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Cum enim sit, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E, *a* erit quoque diuidendo, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Igitur & conuertendo, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F: *b* ac propterea componendo quoque, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod est propositum. a 17. quinti. b 18. quinti.

SCHOLIVM.

OMNES Euclidis interpretes conuersionem rationis demonstrant hac ratione. Quoniam est, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E; c erit permutando, vt tota A B, ad totam D E, ita C B, ablatam ad ablatam F E. d Igitur vt tota A B, ad totam D E, ita erit quoque reliqua A C, ad reliquam D F. Et proinde permutando rursus, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod est propositum. c 16. quinti. d 19. quinti.

SED quis non videt, hanc demonstrationem conuenire solum magnitudinibus eiusdem generis, cum in ea vsurpetur alterna, siue permutata proportio, quæ vim tantum habet in eiusdem generis magnitudinibus, vt & in defin. 12. & in propos. 19. monuimus? Quare cum Euclides, & alij Geometræ modum hunc argumentandi à conuersione rationis adhibeant in omnibus magnitudinibus, etiam non eiusdem generis, reiecta hac communi interpretum demonstratione, nostram aliam excogitauimus, quæ omnibus magnitudinibus congruit. Ea enim locum habet, etiamsi priores duæ quantitates A B, C B, sint vnius generis, nimirum linea, posteriores verò duæ D E, F E, alterius generis, nimirum vel superficies, vel anguli, vel corpora, vel denique numeri: propterea quod in ea non assumpta fuit alterna, siue permutata proportio.

THEOR. 20. PROPOS. 20. XX.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quam tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F, sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem F, sexta. Cum enim A, maior sit quam C, *e* erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E. *f* Maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B. At vt C, ad B, ita est F, ad E. (Cum enim sit B, ad C, vt E, ad F, erit conuertendo vt C, ad B, ita F, ad E.) Maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E. *g* Quare D, maior erit, quam F. Quod est propositum.

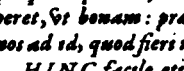


e 8. quinti. f 13. quinti. g 10. quinti.

SIT

dis demonſtratio huic demonſtrationi Campani. Libuit autem eam quoque explicare, ne eam ſtudioſus Lector, relicta illa Euclidis, arriperet, vt benam: præſertim cum oſtenſiua ſit, illa verò Euclidis ducat nos ad id, quod fieri non poteſt.

HINC facile etiam confirmabimus duos illos modos argumentandi, quos ad defin. 14. deſcripſimus. Proponem diximus compoſitionem rationis cõuerſam. Sit enim vt A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compoſitionem rationis conuerſam, eſſe quoque vt A C, ad A B, ita D F, ad D E. Quoniam enim eſt, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, erit conuertendo, vt B C,



a 18. quinti. *ad B D, ita E F, ad D E.* a *Igitur & componendo erit, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E, quod eſt propoſitum.*

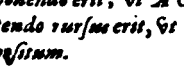
POSTEREM modum vocauimus compoſitionem rationis contrariam. Sit ergo rurſus, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compoſitionem rationis contrariam, eſſe quoque vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quoniam enim eſt, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F,

b 18. quinti. *erit conuertendo, vt B C, ad A B, ita E F, ad D E.* b *Igitur & componendo erit, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E: ac proinde conuertendo rurſus erit, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod eſt propoſitum.*

xix. THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, ſe habebit.

QVOD in propoſ. 5. demonſtratum eſt de *multiplici* proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonſtratur. Sit enim tota A B, ad totam C D, vt ablata A E, ad ablatam C F. Dico & reliquam E B, eſſe ad reliquam F D, vt eſt tota A B, ad totam C D. Cum enim ſit A B, ad C D, vt A E, ad C F,



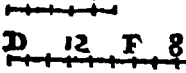
c 16. quinti. *c* erit & permutando A B, ad A E, vt C D, ad C F. *d* Diuidendo ergo erit E B, ad A E, vt F D, ad

d 17. quinti. C F. *e* Quare permutando rurſus erit E B, ad F D, vt A E, ad C F,

e 16. quinti. hoc eſt, vt tota A B, ad totam C D, cum poſita ſit A B, ad C D, vt A E, ad C F. Si igitur quemadmodum totum ad totum &c. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

HINC facile demonſtrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui ſumitur à conuerſione rationis, iuxta 16. defin.



SIT enim, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E. Dico per conuerſionem rationis eſſe quoque

quoque, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Cum enim sit, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E, *a* erit quoque diuidendo, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Igitur & conuertendo, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F: *b* ac propterea componendo quoque, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod est propositum. a 17. quinti. b 18. quinti.

SCHOLIVM.

OMNES Euclidis interpretes conuersionem rationis demonstrant hac ratione. Quoniam est, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E; c erit permutando, vt tota A B, ad totam D E, ita C B, ablata ad ablatam F E. d Igitur vt tota A B, ad totam D E, ita erit quoque reliqua A C, ad reliquam D F. Et proinde permutando rursus, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod est propositum. c 16. quinti. d 19. quinti.

SED quis non videt, hanc demonstrationem conuenire solum magnitudinibus eiusdem generis, cum in ea assumatur alterna, siue permutata proportio, quæ vim tantum habet in eiusdem generis magnitudinibus, vt & in defin. 12. & in propos. 19. monuimus? Quare cum Euclides, & alij Geometræ modum hunc argumentandi à conuersione rationis adhibeant in omnibus magnitudinibus, etiam non eiusdem generis, reiecta hac communi interpretum demonstratione, nostram aliam excogitauimus, quæ omnibus magnitudinibus congruit. Ea enim locum habet, etiamsi priores duæ quantitates A B, C B, sint cuius generis, nimirum lineæ, posteriores verò duæ D E, F E, alterius generis, nimirum vel superficies, vel anguli, vel corpora, vel denique numeri: propterea quod in ea non assumpta fuit alterna, siue permutata proportio.

THEOR. 20. PROPOS. 20. XX.

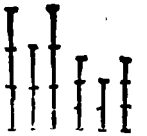
SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quam tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F, sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem F, sexta. Cum enim A, maior sit quam C, *e* erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E. *f* Maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B. At vt C, ad B, ita est F, ad E. (Cum enim sit B, ad C, vt E, ad F, erit conuertendo vt C, ad B, ita F, ad E.) Maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E. *g* Quare D, maior erit, quam F. Quod est propositum.



e 8. quinti. f 13. quinti. g 10. quinti.

SIT



SIT deinde A, æqualis ipsi C. Dico & D, æqualem esse ipsi F. Cum enim A, sit ipsi C, æqualis, *a* erit A, ad B, vt C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E. *b* Igitur erit & D, ad E, vt C, ad B: At vt C, ad B, ita est F, ad E, per inuersam rationem, vti prius. Quare erit quoque D, ad E, vt F, ad E; *c* Ideoque æquales erunt D, & F. Quod est propositum.

a 7. quinti. b 11. quinti. c 9. quinti.



SIT tertio A, minor quam C. Dico & D, minorem esse, quam F. Cum enim A, minor sit quam C, *d* erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B. Sed vt A, ad B, ita est D, ad E. *e* Minor ergo quoque proportio est D, ad E, quam C, ad B. Est autem conuertendo, vt prius, vt C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor est quoque proportio D, ad E, quam F, ad E, *f* propterea quæ D, minor erit quam F. Quod est propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c.

d 8. quinti. e 13. quinti. f 10. quinti.

SCHOLIVM.

PORRO propositione 22. ostendet Euclides, A, & D, magnitudines non solum esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & E, vt hic demonstrauit, sed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem demonstrare non poterat, nisi prius theorema hoc ostendisset, vt ex eadem propositione 22. erit perspicuum.

xxj. THEOR. 21. PROPOS. 21.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; sitque earum proportio perturbata, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E: Sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sexta, F. Cum enim A, maior sit quam C, *g* erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B: Est autem vt A, ad B, ita E, ad F: *h* Maior ergo quoque proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero vt B, ad C, ita est D, ad E, erit



g 8. quinti. h 13. quinti.

E, erit conuertendo vt C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D. *a* Ideoque maior erit D, quam F. Quod est propositum. a 10. *quinti.*

SIT deinde A, ipsi C, æqualis. Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem. Cum enim A, sit æqualis ipsi C, *b* erit A, ad B, vt C, ad B: Sed vt A, ad B, ita est E, ad F. *c* Igitur erit vt C, ad B, ita E, ad F: Est autem ex inuersa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoque vt E, ad F, ita E, ad D; *d* atque idcirco D, ipsi F, æqualis erit. Quod est propositum.



b 7. *quinti.* c 11. *quinti.* d 9. *quinti.*

SIT tertio A, minor, quam C. Dico & D, minorem esse quam F. Cum enim A, sit minor quam C, *e* erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Vt autem A, ad B, ita est E, ad F. *f* Minor est ergo proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero, vt ante, ex inuersa ratione, est vt C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; *g* ac propterea D, minor erit quam F, quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod ostendendum erat.



e 8. *quinti.* f 13. *quinti.* g 10. *quinti.*

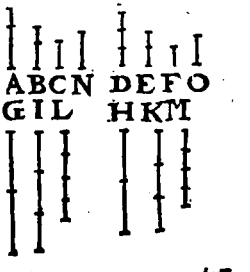
SCHOLIVM.

CÆTERVM propos. 23. ostendet Euclides duas magnitudines A, & D, non solum esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & F; sed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem sine auxilio huius theorematis demonstrare non poterat, vt ex propos. illa 23. patebit.

THEOR. 22. PROPOS. 22. xxij.

SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

IAM hic demonstrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando proportio est ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F: sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate esse A, ad C, vt D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, D, æque multiplicibus G, H: Item ipsarum B, E, æque multiplicibus I, K: Item ipsarum C, F, æque multiplicibus L, M; cum sit A, prima ad B, secundam, vt D, tertia



a 4. quinti.



b 4. quinti.

ad E, quartam, a erit quoquè G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem secundæ B, vt H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicem quartæ E. Eadem ratione, cum sit B, prima ad C, secundam, vt E, tertia ad F, quartam; b erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem secundæ C, vt K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur sunt tres magnitudines, G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione sumuntur; c fit vt

c 10. quinti.

si G, prima superat tertiam L, superet necessario quoque H, quarta sextam M; Et si æqualis, æqualis; Et si deficit, deficiat. Itaque cum G, H, æque multiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiant vna ab L, M, æque multiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vna æquales sint, vel vna excedant: in quacunque multiplicatione sumpta sint ea multiplicia; d erit A, prima ad C, secundam, vt D,

d 6. def. quinti.

tertia ad F, quartam. Quod est propositum.

DEINDE sint plures magnitudines tribus, ita vt sit etiam C, ad N, vt F, ad O. Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O. Cum enim iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt D, ad F: ponatur autem C, ad N, vt F, ad O, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione sumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, rursus erit, vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostenderetur in quinque magnitudinibus, per quatuor; sicut id in quatuor demonstratum fuit per tres; Et sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CÆTERVM non videtur hoc loco dissimulandum Theorema quoddam antiquis Mathematicis valde familiare, quanquam à nemine, quod sciam, sit adhuc demonstratum. Id autem eiusmodi est.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Habebunt etiam æque multiplices primæ ac tertiæ, ad secundam & quartam eandem rationem: Item æque multiplices secundæ & quartæ ad primam & tertiam, eandem rationem habebunt. Et contra, eandem rationem habebunt secunda & quarta ad æque multiplices primæ & tertiæ: Item prima ac

tertia

tertia ad æque multiplices secundæ & quartæ, rationem habebunt eandem.

SIT enim vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam; sumanturque E, F, ipsarum A, C, æque multiplices: Item G, H, æque multiplices ipsarum B, D. Dico ita esse E, ad B, vt F, ad D: Item ita G, ad A, vt H, ad C. Et contra, ita esse B, ad E, vt D, ad F: Item ita A, ad G, vt C, ad H. Quoniam enim est, vt E, ad A, ita F, ad C, ex constructione, cum vtrobique sit eadem proportio multiplex; ponunturque vt A, ad B, ita C, ad D; a *erit ex æquo, vt E, ad B, ita F, ad D. Rursus quia est, vt G, ad B, ita H, ad D, quod vtrobique sit eadem proportio multiplex, ex constructione; estque vt B, ad A, ita D, ad C; (Cum enim ponatur, vt A, ad B, ita C, ad D, erit conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C)* b *erit ex æquo, vt G, ad A, ita H, ad C.* a 22. quinti. b 22. quinti.

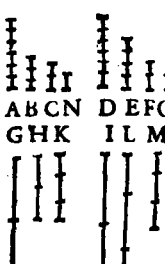
DEINDE, quia est vt B, ad A, ita D, ad C, per inuersam rationem; Et vt A, ad E, ita C, ad F, quod ex constructione vtrobique sit eadem proportio submultiplex; c *erit ex æquo, vt B, ad E, ita D, ad F. Rursus quia ponitur, vt A, ad B, ita C, ad D; estque vt B, ad G, ita D, ad H, quod ex constructione sit vtrobique eadem proportio submultiplex;* d *erit ex æquo, vt A, ad G, ita C, ad H. Quod est propositum.* c 22. quinti. d 22. quinti.

EX quo constat modus argumentandi, quo frequentissime vtuntur Geometræ, maximè Archimedes, Apollonius Pergæus, Theon, & alij. Videlicet, vt A, ad B, ita est C, ad D. Ergo vt E, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius C, ad D. Item vt A, ad B, ita est, C, ad D. Igitur vt A, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius B, nimirum ad G, ita erit quoque C, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius D, videlicet ad H.

THEOR. 23. PROPOS. 23. xxiij.

SI sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEMONSTRATVR hic ratio ex æqualitate, quando proportio est perturbata. Sint enim tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque perturbata earum proportio, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate esse vt A, ad C, ita D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, B, D, æque multiplicibus G, H, I; Item ipsarum C, E, F, æque multiplicibus K, L, M; e Erit vt A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, e 15. quinti.



sint ipsarum A,B,æque multiplices: At vt A, ad B, ita est E, ad F; *a* Igitur vt G, ad H, ita quoq; est E, ad F; *b* Sed vt E, ad F, ita est quoque L, ad M; quod L, M, sint ipsarum E, F, æque multiplices. *c* Igitur erit quoque vt G, ad H, ita L, ad M. Rursus quoniam est B, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad E, quartam; *d* erit quoque vt H, multiplex primæ B, ad K, multiplicem secundæ C, ita I, multiplex tertiæ D, ad L, multiplicem quartæ E. Quia igitur sunt tres magnitudines G, H, K, & aliæ tres I, L, M, quæ binæ in eadem ratione sumuntur, estque earum proportio perturbata; cum ostensum sit esse vt G, ad H, ita L, ad M: Et vt H, ad K, ita I, ad L; *e* fit vt si G, prima superat tertiam K, superet quoque quarta I, sextam M; & si æqualis, æqualis; & si deficit, deficiat. Itaque cum G, & I, æque multiplices primæ A, & tertiæ D, à K, & M, æque multiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant; *f* erit vt A, prima ad C, secundam, ita D, tertia ad F, quartam. quod est propositum. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod demonstrandum erat.

e 21. quinti.

f 6. def. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, fuerintque earum proportio perturbata, nimirum si fuerit A, ad B, vt F, ad O; & B, ad C, vt E, ad F; & C, ad N, vt D, ad E. Disco adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O, quanquam proportio ex aqualitate, quando proportio est perturbata, apud Geometras in vsu non sit in pluribus magnitudinibus, quàm in tribus, qua causa fuit, tur Euclides antecedentem propositionem de quotquot magnitudinibus, hanc autem de tribus duntaxat proposuerit, quamuis vera etiam sit de pluribus. quod ita probatur. Cum iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt E, ad O; Ponatur autem esse ita C, ad N, vt D, ad E, erunt tres magnitudines A, C, N, & alia tres, D, E, O, quæ bina in eadem sumuntur proportione, & earum proportio est perturbata. Ergo rursus ex aqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, erit vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, sicut id in quatuor fuit demonstratum, per tres. Et sic de pluribus. Quod est propositum.

xxiv.

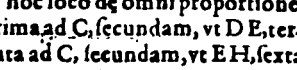
THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam:

Etiam

Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

QVOD propositione 2. demonstrauit Euclides de sola proportione multiplici, demonstrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim A B, prima ad C, secundam, vt D E, tertia ad F, quartam; Item B G, quinta ad C, secundam, vt E H, sexta ad F, quartam. Dico ita esse A G, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, vt est D H, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cum enim sit vt B G, ad C, ita E H, ad F; erit conuertendo vt C, ad B G, ita F, ad E H. Quoniam igitur est A B, ad C, vt D E, ad F; & C, ad B G, vt F, ad E H; a erit ex æquali A B, ad B G, vt D E, ad E H. b Componendo igitur erit vt tota A G, ad B G, ita tota D H, ad E H. Itaque cum rursus sit A G, ad B G, vt D H, ad E H; & B G, ad C, vt E H, ad F: c erit ex æquali A G, ad C, vt D H, ad F. quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.



a 22. quinti.
b 18. quinti.
c 22. quinti.

SCHOLIVM.

HÆC propositio vera est, sive magnitudines A B, B G, & C, sint eiusdem generis cum magnitudinibus D E, E H, & F, sive non, vt ex demonstratione constat.

EODEM fere modo ostendetur in omni genere proportionis id, quod Theoremate sexto huius lib. demonstratum est in multiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet.

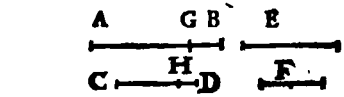
SI duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habeant ad easdem eandem proportionem: & reliquæ ad easdem eandem proportionem habebunt.

HABEANT enim A G, D H, ad C, & F, eandem proportionem, hoc est, sit A G, ad C, vt D H, ad F. Item detracta A B, D E, ad easdem C, F, eandem habeant proportionem; ita vt sit quoque A B, ad C, vt D E, ad F. Dico & reliquas B G, E H, eandem habere proportionem ad easdem C, F, hoc est, esse B G, ad C, vt E H, ad F. Cum enim sit vt A B, ad C, ita D E, ad F, erit conuertendo vt C, ad A B, ita F, ad D E. Quoniam igitur est A G, ad C, vt D H, ad F, & C, ad A B, vt F, ad D E: d erit ex æqualitate A G, ad A B, vt D H, ad D E. e Dividendo ergo erit quoque vt B G, ad A B, ita E H, ad D E. Itaque cum rursus sit B G, ad A B, vt E H, ad D E; & A B, ad C, vt D E, ad F: f erit ex æquali B G, ad C, vt E H, ad F. Quod est propositum.

d 22. quinti.
e 17. quinti.
f 22. quinti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.



SIT enim A B, ad C D, vt E, ad F, sitque A B, omnium maxima, & F, minima. Dico duas A B, & F, simul esse maiores duabus C D, & E, simul. Auferatur enim ex A B, magnitudo A G, æqualis ipsi E; & ex C D, alia C H, æqualis ipsi F. Erit igitur A G, ad C H, vt E, ad F, hoc est, vt A B, ad C D. Quare cum sit tota A B, ad totam C D, vt ablata A G, ad ablatam C H: a erit quoque vt tota A B, ad totam C D, ita reliqua G B, ad reliquam H D: Est autem A B, (cum sit omnium maxima) maior, quam C D. Igitur & G B, maior erit quam H D. Quoniam vero A G, & E, æquales sunt; si ipsis addantur æquales F, & C H, nimirum F, ipsi A G, & C H, ipsi E; fient A G, & F, simul æquales ipsis E, & C H, simul. Additis igitur inæqualibus G B, & H D, fient A B, & F, simul maiores quam E, & C D, simul, cum G B, sit maior quam H D. Quod erat propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

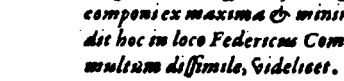
a 19. quinti.

SCHOLIVM.

NECESSARIO autem sequitur, si antecedens magnitudo cuius proportionis fuerit omnium maxima, consequentem alterius esse omnium minimam; vt in proposito exemplo cernere licet. Cum enim sit vt A B, ad C D, ita E, ad F; & A B, prima maior quam tertia E; b erit quoque C D, secunda maior quam F, quarta. Item quia maior est A B, quam C D, erit quoq; E, maior quam F, ob eandem proportionem A B, ad C D, & E, ad F, vt in scholio propos. 14. ostendimus. Quod si è contrario antecedens cuius proportionis fuerit omnium minima, erit consequens alterius omnium maxima, vt constat, si dicatur esse F, ad E, vt C D, ad A B. Debent quoque omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, alias non posset una magnitudo componi ex maxima & minima; imò neque ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non multum dissimile, videlicet.

b 14. quinti.

SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt quam dupla reliquæ.



SIT vt A, ad B, ita B, ad C, sitque A, maxima, & C, minima. Dico A, & C, simul maiores esse dupla ipsius B. Sumpta enim

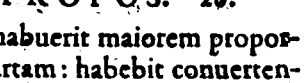
enim D, ipſi B, æquali, erit, vt A, ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, ſimul maiores erunt, quam B, & D, ſimul, a *vt proxime demonſtratum eſt, hoc eſt, quam dupla ipſius B. Quod eſt propoſitum.* a 25. quinti.

HIC finem Euclides impoſuit quinto libro. Verum quia Campanus, & nonnulli alij adiiciunt alias quaſdam propoſitiones, quibus ſæpenumero graviſſimi Scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, eaſque quaſi eſſent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, qua fieri poteſt, breuitate demonſtrare, nec non in numerum, ac ſeriem propoſitionum Euclidis referre. Omnes autem traduntur de magnitudinibus improportionalibus, quarum prima hæc eſt.

THEOR. 26. PROPOS. 26. xxvj.

SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

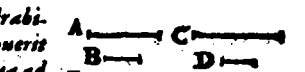
HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem eſſe proportione D, ad C. Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior quoque quam E, ad B; *b* ac propterea A, maior erit quam E. *c* Quare minor erit proportio B, ad A, maiorem, quam B, ad E, minorem: Sed vt eſt B, ad E, ita eſt conuertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor eſt quoque, quam D, ad C. Quod eſt propoſitum.



b 10. quinti. c 8. quinti.

SCHOLIVM.

EODEM fere modo demonſtrabimus, ſi prima ad ſecundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam, conuertendo maiorem eſſe proportionem ſecunda ad primam, quam quarta ad tertiam; dummodo Gœcem, *maioris, mutemus in* Gœcem, *minoris, & contra.*



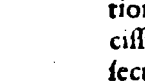
SIT enim minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico, conuertendo, B, ad A, maiorem habere proportionem, quam D, ad C. Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D; Eritque proportio A, ad B, etiam minor, quam E, ad B, d *ac propterea A, minor erit, quam E.* e *Quare maior erit proportio B, ad A, minorem, quam B, ad E, maiorem: Sed vt B, ad E, ita eſt conuertendo D, ad C. Igitur & proportio B, ad A, maior eſt, quam D, ad C. Quod eſt propoſitum.* d 10. quinti. e 8. quinti.

ALITER. Quoniam minor est proportio A; ad B, quam C, ad D; erit maior proportio C, ad D, quam A, ad B. a *Igitur conuertendo minor erit proportio D, ad C, quam B, ad A, ac proinde maior erit proportio B, ad A, quam D, ad C. Quod est propositum.*

a 26. quinti.

xxvij. THEOR. 27. PROPOS. 27.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam secunda ad quartam.



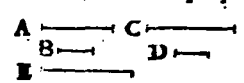
HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorem esse quoq; proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque esse E, ad B, vt C, ad D, eritque proportio A, ad B, maior etiam quam E, ad B: *b* Ideoque A, maior erit quam E. *c* Quare maior erit proportio A, ad C, quam E, ad C. *d* Quoniam vero permutando est, vt E, ad C, ita B, ad D, (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit quam B, ad D. Quod est positum.

b 10. quinti. c 8. quinti. d 16. quinti.

SCHOLIVM.

SIMILITER ostendemus, si prima ad secundam minorem habuerit proportionem, quam tertia ad quartam, & vicissim prima ad tertiam minorem esse proportionem, quam secunda ad quartam.

SIT namque minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico permutando, minorem quoque esse proportionem A, ad C, quam B, ad D.



Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritque proportio A, ad B, minor quoq; quam E, ad B; e *Ac propterea A, minor erit, quam E.* f *Quare minor erit proportio A, ad C, quam E, ad C.* g *Sed permutando, vt E, ad C, ita B, ad D (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, minor quoque erit, quam B, ad D. Quod est propositum.*

e 10. quinti. f 8. quinti. g 16. quinti.

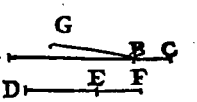
ALITER. Quoniam minor est proportio A, ad B, quam C, ad D, erit maior proportio C, ad D, quam A, ad B. h *Ergo permutando, maior etiam erit proportio C, ad A, quam D, ad B:* i *ac proinde conuertendo, minor erit proportio A, ad C, quam B, ad D. Quod est propositum.*

h 27. quinti. i 26. quinti.

xxviij. THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem,

tionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam maiorem proportionem, quàm composita tertia cum quarta, ad quartam.



SIT maior proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Dico & componendo maiorem esse proportionem A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Intelligatur enim esse G B, ad B C, vt D E, ad E F; eritque proportio A B, ad B C, maior quoque, quàm G B, ad B C; *a* Ideoque A B, maior, quàm G B. Addita ergo communi B C; fiet A C, maior quàm G C; *b* maiorque proptereà erit proportio A C, ad B C, quàm G C, ad B C. Sed componendo, *c* vt est G C, ad B C, ita est D F, ad E F. (quod posita sit G B, ad B C, vt D E, ad E F.) Maior ergo etiam erit proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Quod est propositum.

a 10. quinti. b 8. quinti. c 18. quinti.

SCHOLIVM.



EADEM ratione ostendemus, si proportio prima ad secundam minor fuerit, quàm tertia ad quartam, minorem quoque esse proportionem prima & secunda simul, ad secundam, quàm tertia & quarta simul, ad quartam.

SIT enim minor proportio A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Dico & componendo minorem esse proportionem A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Intelligatur enim esse G B, ad B C, vt D E, ad E F; eritq; proportio A B, ad B C, minor quoque, quàm G B, ad B C; d ideoq; A B, minor erit, quàm G B. Addita ergo communi B C; fiet A C, minor, quàm G C; e minorq; propterea erit proportio A C, ad B C, quàm G C, ad B C. Sed componendo, vt G C, ad B C, ita est D F, ad E F. (quod posita sit G B, ad B C, vt D E, ad E F.) Minor ergo etiam erit proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Quod est propositum.

d 10. quinti. e 8. quinti.

ALITER. Quoniam minor est proportio A B, ad B C, quàm D E, ad E F; erit maior proportio D E, ad E F, quàm A B, ad B C. f Igitur componendo, maior quoque proportio erit D F, ad E F, quàm A C, ad B C, ac propterea, minor erit proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. quod est propositum.

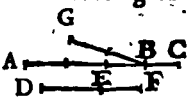
f 28. quinti.

THEOR. 29. PROPOS. 29. xxix.

SI composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quàm composita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam.

SIT maior proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Dico & diuidendo maiorem esse proportionem A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Intelligatur enim esse G C, ad B C, vt D F, ad E F, eritque proportio A C, ad B C, maior quoque proportione G C, ad B C: a ideoque maior erit A C, quàm G C. Ablata ergo communi B C; maior erit A B, quàm G B: b Ac propterea maior erit proportio A B, ad B C, quàm G B, ad B C. c Sed diuidendo, vt est G B, ad B C, ita est D E, ad E F. (Posita namque est G C, ad B C, vt D F, ad E F.) Igitur maior quoque erit proportio A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Quod est propositum.

a 10. quinti.
b 8. quinti.
c 17. quinti.

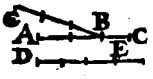


SCHOLIVM.

QVOD si prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem habuerit, quàm tertia cum quarta, ad quartam; habebit & diuidendo prima ad secundam, proportionem minorem, quàm tertia ad quartam.

SIT enim minor proportio A G, ad B C, quàm D F, ad E F. Dico diuidendo quoque minorem esse proportionem A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Intelligatur enim F esse G C, ad B C, vt D F, ad E F; erit & proportio A C, ad B C, minor quoque, quàm G C, ad B C: d ideoque minor erit A C, quàm G C. Ablata ergo communi B C; minor erit A B, quàm G B: e Ac propterea minor erit proportio A B, ad B C, quàm G B, ad B C: f Sed diuidendo est, vt G B, ad B C, sta D E, ad E F. (Posita namque est G C, ad B C, vt D F, ad E F) Igitur minor quoque proportio erit A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Quod est propositum.

d 10. quinti.
e 8. quinti.
f 17. quinti.

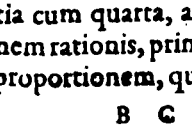


ALITER. Quoniam minor proportio est A C, ad B C, quàm D F, ad E F; erit maior proportio D F, ad E F, quàm A C, ad B C. g Igitur & diuidendo, maior erit proportio D E, ad E F, quàm A B, ad B C: atque idcirco minor erit proportio A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Quod est propositum.

g 29. quinti.

XXX. THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI composita prima cum secunda, ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quàm tertia cum quarta, ad tertiam.



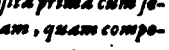
SIT maior proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Dico per conuersionem rationis, minorem esse proportionem A C, ad A B, quàm D F, ad D E. Cùm enim sit A C, ad B C, ma-

B C, maior proportio, quam D F, ad E F; *a* erit & dividendo, maior proportio A B, ad B C, quàm D E, ad E F. *b* Quare conuertendo, minor erit proportio B C, ad A B, quàm E F, ad D E; *c* Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius A C, ad A B, quam totius D F, ad D E. Quod est propositum. a 29. quinti. b 26. quinti. c 28. quinti.

SCHOLIVM.

NON dissimili ratione ostendemus, si composita prima cum secunda minorem habuerit proportionem ad secundam, quam composita tertia cum quarta ad quartam, per conuersionem rationis, maiorem esse proportionem prima & secunda ad primam, quàm tertia & quarta ad tertiam.

SIT enim minor proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Dico per conuersionem rationis maiorem esse proportionem A C, ad A B, quàm D F, ad D E. Cùm enim minor sit proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F, d *erit & dividendo minor proportio A E, ad B C, quàm D E, ad E F. Quare* e *conuertendo, erit maior proportio B C, ad A B, quàm E F, ad D E:* f *Ac proinde & componendo maior proportio erit A C, ad A B, quàm D F, ad D E. Quod est propositum.*



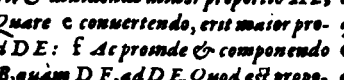
d 29. quinti. e 26. quinti. f 30. quinti.

ALITER. Quoniam minor est proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F; erit maior proportio D F, ad E F, quàm A C, ad B C. g *Ergo per conuersionem rationis minor erit proportio D F, ad D E, quàm A C, ad A B: Hoc est, maior proportio erit A C, ad A B, quàm D F, ad D E. Quod est propositum.* quinti. g 30. quinti.

THEOR. 31. PROPOS. 31. XXXI.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quàm primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quàm secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiam.

SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; maior proportio A, ad B, quàm D, ad E: Item maior B, ad C, quàm E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque esse A, ad C, quàm D, ad F.

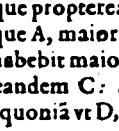


Intelligatur enim esse G, ad C, vt E, ad F; eritque propterea proportio B, ad C; maior, quàm G, ad C; *b* Ideoque B, maior erit quàm G. Quare *i* maior erit proportio A, ad G, minorem h 10. quinti. i 8. quinti.

quàm

quàm A, ad B, maiorem: Ponitur autem proportio A, ad B, maior, quàm D, ad E. Multò ergo maior erit proportio A, ad G, quàm D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; erit-
a 10. quinti. que propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G; a Ideo-
b 8. quinti. que A, maior erit, quàm H. b Quare maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quàm minor quantitas H, ad
c 22. quinti. eandem C: c Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniã vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C, quàm D, ad F. Quod est propositum.

SCHOLIVM.



EADEM ratione ostendemus, si fuerit proportio A, ad B, qua D, ad E; At B, ad C, maior quàm E, ad F, Vel contrà, si proportio A, ad B, fuerit maior quàm D, ad E; At B, ad C, eadem, qua E, ad F, ex æqualitate maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quàm D, ad F.

SIT enim primum A, ad B, vt D, ad E, sed maior proportio B, ad C, quàm E, ad F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F, eritq; propterea
d 10. quinti. *proportio B, ad C, maior, quàm G, ad C:* d *Ideoque B, maior erit*
e 8. quinti. *quàm G.* e *Quare maior erit proportio A, ad G, quàm A, ad B. Ponitur autem A, ad B, vt D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior*
f 10. quinti. *erit, quàm D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E, eritq; propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G.* f *Ideoque A, ma-*
g 8. quinti. *ior erit, quàm H.* g *Quare maior erit proportio A, ad C, quàm H, ad*
h 22. quinti. *C.* h *Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoq; erit A, ad C, quàm D, ad F. Quod est propositum.*

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quàm D, ad E, sed B, ad
i 9. quinti. *C, vt E, ad F. Intelligatur esse C, ad C, vt E, ad F, eritq; propterea eti-*
k 7. quinti. *am B, ad C, vt G, ad C:* i *Ideoque B, ipsi G, æqualis erit.* k *Quare*
l 10. quinti. *erit A, ad G, vt A, ad B. Ponitur autẽ proportio A, ad B, maior quàm*
m 8. quinti. *D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit quàm D, ad E. Intel-*
n 22. quinti. *ligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E. eritq; propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G,* l *Ideoq; A, maior erit, quam H.* m *Quare maior proportio erit A, ad C, quàm H, ad C:* n *Atqui vt H, ad C, ita est ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior erit quoq; proportio A, ad C, quàm D, ad F. Quod est propositum.*

NON dissimiliter demonstrabimus, si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam proportionem extremarum esse minorem. Idemque eueniet, si fuerit A, ad B, vt D, ad E; sed minor sit proportio B, ad C, quàm E, ad F: Aut contrà, si proportio A, ad B, fuerit

fuerit minor, quàm D, ad E, at B, ad C, sit, vt E, ad F. Eadem namq; semper erit demonstratio, si modò vocem, maiorum, vbique permutes in vocem, minorum, vt patet.

QVOD si plures fuerint magnitudines tribus, sine omnes proportiones in vno ordine magnitudinum sint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum, sine vna tantùm maior, quàm vna, vel dua, &c. ostendemus maiorem vel minorem quoque esse proportionem prima priorum ad vltimam, quam prima posteriorum ad vltimam, ea methodo, quam propos. 22 tradidimus: adhibendo propos. 12. loco huius propos. 31. quando tres magnitudines vnius ordinis proportionales sunt tribus magnitudinibus alterius ordinis. Item vsurpando hoc scholium, quando vna tantùm proportio in tribus magnitudinibus æqualis est vnitatum proportioni in tribus magnitudinibus alterius ordinis.

NAM si maior est proportio A, ad B, quàm E, ad F; & maior B, ad C, quàm F, ad G, & maior C, ad D, quàm G, ad H; a erit ex aquo maior proportio A, ad C, quàm E, ad G. Quia igitur rursus maior proportio est A, ad C, quàm E, ad G; & maior C, ad D, quàm G, ad H; b erit quoq; ex aquo maior proportio A, ad D, quàm E, ad H.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

a 31. quinti.
b 31. quinti.

QVOD si tres magnitudines A, B, C, tribus E, F, G, proportionales sint, sed maior sit proportio C, ad D, quàm G, ad H: c erit ex aquo A, ad C, vt E, ad G. Ergo ex hoc scholio, maior proportio erit A, ad D, quàm E, ad H.

c 22. quinti.

SI verò maior proportio sit A, ad B, quàm E, ad F; sed tres B, C, D, proportionales sint tribus F, G, H, erit hoc scholio, maior proportio A, ad C, quàm E, ad G; Et rursus maior A, ad D, quàm E ad H.

SI autem maior sit proportio A, ad B, quàm E, ad F: sed B, ad C, vt F, ad G; at maior proportio C, ad D, quàm G, ad H. Vel A, ad B, vt E, ad F, sed maior proportio B, ad C, quàm F, ad G; at C, ad D, vt G, ad H, erit semper ex hoc scholio, maior proportio A, ad C, quàm E, ad G: ac proinde rursus maior A, ad D, quàm E, ad H, &c.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

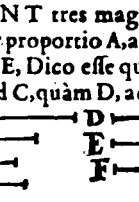
IDEM Euclides, si omnes proportiones vnius ordinis sint minores omnibus proportionibus alterius ordinis, vel vna vel dua. Item si sint plures magnitudines, vt propositione 22. diximus.

THEOR. 32. PROPOS. 32. xxxij.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quàm primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior propor-

proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

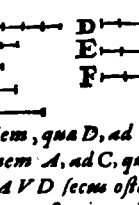
SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque maior proportio A, ad B, quàm E, ad F, Item maior B, ad C, quàm D, ad E, Dico esse quoque maiorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quàm D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt D, ad E,



eritque propterea proportio B, ad C, maior quàm G, ad C. a Ideoque maior erit B, quàm G. b Quare maior erit proportio A, ad G, minorē, quàm eiusdem A, ad B, maiorem; Est autem proportio A, ad B, maior quàm E, ad F. Multò ergo maior est proportio A, ad G, quàm E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt E, ad F; Eritq; propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G; c ideoq; maior erit A, quàm H. d Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quàm H, minor ad eandem C. e At vt H, ad C, ita est ex æqualitate, D, ad F. (Quoniam vt D, ad E, ita est G, ad C. & vt E, ad F. ita est H, ad G.) Maior ergo etiam est proportio A, ad C, quàm D, ad F. Quod est propositum.

a 10. quinti.
b 8. quinti.
c 10. quinti.
d 8. quinti.
e 23. quinti.

SCHOLIVM.



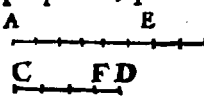
EADEM ratione, si fuerit proportio A, ad B, qua E, ad F, At B, ad C, maior quàm D, ad E. Vel contrà, proportio A, ad B, maior, quam E, ad F, At B, ad C, eadem, qua D, ad E, ostendemus, ex aqualitate maiorem esse proportionem A, ad C, quàm D, ad F, vt in propositæ figuræ perspicitur.

HAVD secus ostendemus, si proportiones priorum magnitudinū minores fuerint, etiam extremorū proportionem esse minorem, &c.

QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, demonstrabimus, maiorem quoq; vel minorem esse proportionem primæ priorum ad vltimam, quàm prima posteriorum ad vltimam, ea arte, qua vsi sumus propos. 23. &c. Quæ omnia perspicua sunt, si diligenter demonstrationes scholij præcedentis propos. considerentur.

xxiij. THEOR. 33. PROPOS. 33.

SI fuerit maior proportio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quàm totius ad totum.



SIT maior proportio totius AB, ad totam CD, quam ablatæ AE, ad ablatam CF. Dico & proportionem reliquæ EB, ad reliquam FD, maiorem esse, quàm totius AB, ad totam CD. Cùm enim maior sit propor-

proportio AB, ad CD, quàm AE, ad CF; *a* erit quoque permutando, maior proportio AB, ad AE, quàm CD, ad CF; *b* ac propterea, per conuersionem rationis, minor erit proportio AB, ad EB, quàm CD, ad FD, *c* Permutando igitur, minor quoque erit proportio AB, ad CD, quàm EB, ad FD, hoc est, EB, reliqua ad reliquam FD, maiorem habebit proportionem, quàm tota AB, ad totam CD. Quod est propositum.

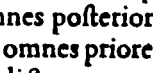
a 27. quinti. b 30. quinti. c 27. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si totæ ad totam habuerint minorem proportionem, quàm ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam maiorem proportionem, quàm tota ad totam, & ex modo demonstrandi liquet, ponendo semper vocem, minoris, pro voce maioris; & vocem, maioris, pro voce, minoris.

THEOR. 34. PROPOS. 34. xxxiiij.

SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quàm secundæ ad secundam; & hæc maior, quàm tertiæ ad tertiam; & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem; quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoq; prima; minorem autem, quàm prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quàm vltima priorum ad vltimam posteriorum.



SINT primùm tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, *Sit autem maior proportio A, ad D; quàm B, ad E; Item maior B, ad E, quàm C, ad F.* Dico proportionem ipsarum A, B, C, simul ad ipsas D, E, F, simul maiorem esse proportione ipsarum B, C, simul ad ipsas E, F; simul; minorem verò, proportione A, ad D; maiorem denique etiam proportione C, ad F Cùm enim maior sit proportio A, ad D, quàm B, ad E; *d* erit permutando maior A, ad B, quàm D, ad E, *e* Igitur componendo, maior erit proportio ipsarum A, B, simul ad B, quàm ipsarum D, E, simul ad E; *f* Permutando ergo rursus, maior erit proportio AB, simul ad D, E, simul, quam B, ad E. Itaque cùm tota AB. ad totam D, E, maiorem habeat proportionem, quàm ablata B, ad ablatam E; *g* habebit quoq; reliqua A, ad rel quam D, maiorem proportionem, quàm tota A, B, ad totã D, E. Eadem ratione, maior erit propor

d 27. quinti. e 28. quinti. f 27. quinti. g 33. quinti.

tio

tio B, ad E, quam totius B, C, ad totam E, F: Multò ergo maior erit proportio A, ad D, quam B, C, totius ad totam E, F. *a* Permutando igitur, maior erit proportio A, ad B, C, quàm D, ad E, F; *b* & componendo ergo maior est proportio totius A, B, C, ad B, C, quam totius D, E, F, ad E, F. *c* Et rursus permutando, maior proportio omnium A, B, C, simul ad omnes D, E, F, simul quàm B, C, ad E, F. quod est primum.

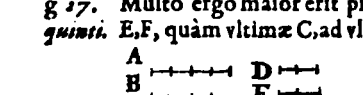
a 27. quinti. b 28. quinti. c 27. quinti.

ITAQVE cùm sit maior proportio totius A, B, C, ad totam D, E, F, quam ablatæ B, C, ad ablatam E, F, *d* erit & maior proportio reliquæ A, ad reliquam D, quàm totius A, B, C, ad totam D, E, F, quod est secundum.

d 33. quinti.

QVONIAM verò maior est proportio B, ad E, quàm C, ad F; *e* erit permutando maior quoq; B, ad C, quàm E, ad K; *f* & cõponendo, maior totius B C, ad C, quàm totius E, F, ad F; *g* & rursus permutando, maior B, C, ad E, F, quàm C, ad F. Est autem maior proportio A, B, C, ad D, E, F, vt ostendimus, quàm B, C, ad E, F; Multò ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D, E, F, quàm vltimæ C, ad vltimam F, quod est tertium.

e 27. quinti. f 27. quinti. g 27. quinti.



DEINDE sint quatuor magnitudines vtrobiq; cum eadem hypothesi, hoc est, sit quoque maior proportio tertiæ C, ad F, tertiam, quàm G, quartæ ad H, quartam. Dico eadem consequi. Vt enim iam in tribus est ostensum, maior est proportio B, ad E, quàm B, C, G, ad E, F, H. Multò ergo maior erit A, ad D, quàm B, C, G, ad E, F, H. *h* Permutando ergo minor erit A, ad B, C, G, quàm D, ad E, F, H, *i* & cõponendo maior A, B, C, G, ad B, C, G, quàm D, E, F, H, ad E, F, H, *k* & permutando A, B, C, G, ad D, E, F, H, maior quàm B, C, G, ad E, F, H. quod est primum.

h 27. quinti. i 28. quinti. k 27. quinti.

ITAQVE cùm sit maior proportio totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quàm ablatæ B, C, G, ad ablatam E, F, H, *l* erit & reliquæ A, ad reliquã D, maior proportio, quàm totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H. quod est secundum.

l 33. quinti.

QVONIAM. verò, vt in tribus est demonstratum, maior est proportio B, C, G, ad E, F, H, quàm G, ad H, & maior A, B, C, G, ad D, E, F, H, quàm B, C, G, ad E, F, H, vt fuit ostensum; multò maior erit proportio A, B, C, G, ad D, E, F, H, quàm vltimæ G, ad vltimam H; quod est tertium.

EADEM arte concludes, eadem consequi in quinque magnitudines per quatuor, & in sex, per quinque, & in septem, per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. Constat ergo totum Theorema, &c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM SEXTVM.

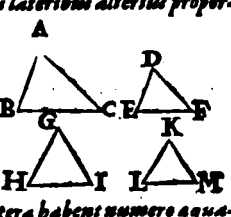
DEFINITIONES.

I.

SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

TRiangula A B C, D E F, similia dicentur, si fuerint aquiangula, ita vt angulus A, angulo D; & B, ipsi E; & C, ipsi F, aqualis sit: Item latera circa aquales angulos proportionalia, hoc est, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F; & vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, & vt A C, ad C B, ita D F, ad F E.

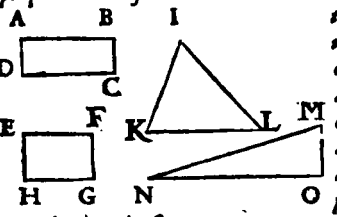
QVOD si anguli vnius aqualet fuerint angulis alterius, singuli singulis, at latera circa aquales angulos non proportionalia, aut contrà; non dicentur tales figura similes: cuiusmodi sunt quadratum, & figura altera parte longior. Ma etenim figura habent quidem angulos aquales, vtpote rectos, at latera vnius lateribus alterius proportionalia nõ sunt, quippe cùm latera quadrati circa quemuis angulum rectum habeant proportionem aqualitatis, latera verò figura altera parte longioris circa quemuis angulum rectum, proportionem inaqualitatis. Ex quibus constat, omnes figuras rectilineas aquiangulas, & aquilateras, qua & angulos & latera habent numero aqualia, esse similes, quanquam inter se maximè sint inaquales. Cuiusmodi sunt triangula aquilatera G H I, K L M. Propter laterum enim aqualitatem, erit G H, ad G I, vt K L, ad K M. Item G H, ad



H I, & K L, ad L M, & G I, ad I H, & K M, ad M L, cùm semper ſit proportio aqualitatis. Idem dicendum eſt de quadratis, pentagonis aquilateris & aquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de alijs id genus figuris rectilineis aquiangulis, atque aquilateris.

II.

RECIPROCÆ autem figuræ ſunt, cùm in vtraque figura antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint.

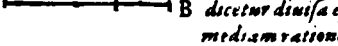


VT ſi in parallelogrammis A B C D, E F G H, latera A B, B C, ita proportionalia fuerint lateribus E F, F G, & vtrobique ſit & antecedens, & conſequens diuerſarum proportionum, hoc eſt, & ſit ea proportio A B, ad E F, qua F G, ad B C, ſeu eadem A B, ad F G, qua E F, ad B C; (vtroque enim modo A B, eſt antecedens vnius proportionis & B C, conſequens alterius, in figura A B C D, quemadmodum & primo modo E F, eſt conſequens vnius, & F G, antecedens alterius; vel ſecundo modo F G, conſequens, & E F, antecedens, in figura E F G H,) dicentur huiuſmodi parallelogramma reciproca, quamuis ſimilia non ſint. Similiter erunt triangula I K L, M N O, reciproca, ſi fuerit & I K, ad M N, ita M O, ad I L; vel & I K, ad M O, ita M N, ad I L. Neque memini me inuenisſe apud Geometras vſum reciprocarum figurarum in alijs figuris, quam in parallelogrammis, & triangulis.

III.

SECVNDVM extremam, & mediam rationem recta linea ſecta eſſe dicitur, cùm vt tota ad maius ſegmentum, ita maius ad minus ſe habuerit.

SI linea recta quauis A B, ita diuidatur in C, inaqualiter, & ſit, quemadmodum tota A B, ad maius ſegmentum A C, ita A C, maius ſegmentum ad C B, minus ſegmentum;



dicetur diuiſa eſſe ſecundum extremam, & mediam rationem. Quam quidem diuiſionem docebit Euclides propoſ. 30. huius lib. eamq; ſub alijs verbis iam docuit lib. 2. propoſ. 11. & fiet perſpicuum propoſ. 30. huius lib. Sunt autem penè innumera dignitates, atque & ſtilitates linea hoc modo diuiſa, & ex libris Stereometrie conſtabit, præſertim lib. 13. & non immeritò a quibuſdam dicta ſit diuina proportio, in quam linea eo modo eſt diuiſa.

ALTL,

IV.

ALTITVDO cuiuſque figuræ eſt linea perpendicularis à vertice ad baſin deducta.

SI à Vertice A, trianguli A B C, ad baſin B C, perpendicularis ducatur A G, dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli A B C; itaq; tantam dicatur habere altitudinem triangulum, quanta eſt perpendicularis A G. Sic etiam perpendicularis D H, ducta à D, Vertice trianguli D E F, ad baſin E F, ad partes E, protractam, appellabitur altitudo trianguli D E F. Itaque ſi duarum figurarum perpendiculares à Verticibus ad baſes, (ſiue hæ protractæ ſint, ſiue non) demiſſæ, fuerint æquales, eædem dicentur huiuſmodi figuræ habere altitudinem. Tunc autem huiuſmodi perpendiculares erunt æquales, cùm baſes figurarum, ac Vertices in eiſdem conſtituti fuerint parallelis, cuiuſmodi ſunt perpendiculares A G, D H, triangulorum A B C, D E F, in eiſdem parallelis conſtitutorum. Cùm enim anguli A G H, D H G, interni ex eadem parte ſint duobus rectis æquales, immò duo recti; a erunt recta A G, D H, parallela; Sunt autem & A D, G H, parallela, eo quòd ponantur triangula in eiſdem eſſe parallelis conſtituta. Igitur parallelogrammum erit A D H G; b ac propterea latera oppoſita A G, D H, æqualia erunt. Eandem igitur dicentur ea triangula habere altitudinem. Quod ſi in eiſdem triangulis Vertices ponantur C, & F, baſes verò A B, & D E; non habebunt ea eandem altitudinem Perpendicularis enim ducta ex F, ad baſin D E, protractam æqualis non eſt perpendiculari ex C, ad baſin A B, deducta, cùm nec triangula ipſa in eiſdem parallelis poſſint conſtitui, vt manifeſtum eſt.



a 28. primi.

b 34. primi.

RECTE verò ab Euclide altitudo figuræ cuiuſuis definita eſt per lineam perpendicularem, quæ à Vertice ad baſin deducitur: quoniam, vt ſcribit Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente Simplicio, in libro de dimenſione, menſura cuiuſcunque rei debet eſſe ſtata, determinata q, & non indefinita: Inter omnes autem rectas lineas, penes quas meritò Geometra, ſicut & Vulgus, omnia metiuntur, ſola linea perpendicularis certa eſt, determinata q longitudinis, alia autem omnes incerta indeterminata q. Quæ de re plura ſcripſimus ad initium commentariorum, quos in ſpharam Ioan. de ſacro boſco edidimus.

V.

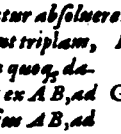
RATIO ex rationibus componi dicitur, cùm rationum quantitates inter ſe multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QVONIAM denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quantæ sit magnitudo antecedens ad consequentem; (Vt denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. ostendit, in quauis proportione quadrupla antecedentem magnitudinem quater continere consequentem; denominator verò proportionis subquadruplæ, videlicet $\frac{1}{4}$. indicat antecedentem esse partem quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominator à Geometris, quantitas proportionis; vt idem significet quantitas alicuius proportionis, quod denominator. Vult igitur hac definitio, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicata effecerint illam proportionem, seu (vt vertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, siue denominatorem. Vt proportio duodecuplæ componi dicitur ex duplæ, & sextuplæ; quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem sextuplæ, hoc est, in 6. Sic eadem proportio duodecuplæ dicitur componi ex triplæ & quadruplæ. Nam ex multiplicatione 3. in 4 producitur idem denominator 12. duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecuplæ componi dicitur ex duplæ, triplæ, & quintuplæ. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 10. denominatorem illius. Sic etiam proportio duplæ dicetur componi ex sesquialtera, & sesquitertia: quia sesquialtera denominator $1\frac{1}{2}$. ductus in $1\frac{1}{3}$. denominatorem sesquitertiæ gignit 2. denominatorem duplæ. Rursus eadem proportio duplæ componetur ex sesquiseptima, & superbipartiente quartas. Nam harum proportionum denominatores $1\frac{1}{7}$. $1\frac{1}{4}$. inter se multiplicati procreant 2. denominatorem duplæ. Item eadem duplæ proportio componi dicetur ex subsesquiquarta, & duplæ sesquialtera; propterea quòd harum denominatores $\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{2}$. inter se multiplicati producunt quoq; eundem denominatorem 2. proportionis duplæ. Atque ita ex infinitis alijs proportionibus componi dicetur duplæ proportio: quod etiam de quauis alia proportione dici potest, vt paulò pòst patebit.

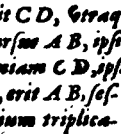
PORRO quemadmodum in magnitudinibus continuè proportionalibus, proportio prima ad vltimam componi dicitur ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. cùm illa ex his intermedijs constet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter se multiplicatis producatur, vt 5. libro defin. 10 exposuimus: ita vt si fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, ex quibus dicitur componi, dicatur proportio primæ magnitudinis ad vltimam duplicata proportionis primæ ad secundam; si tres, triplicata, &c. Sic etiam in magnitudinibus quibuscunq; ordine positis, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c

donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis prima magnitudinis ad vltimam consurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter se multiplicatis. Quod quidem primum inductione quadam Theonis Alexandrini, quam hoc loco adducit, confirmabimus: Deinde verò idem duabus demonstrationibus, quarum vna traditur ab Eutocio Ascalonita lib. 2. Archimedis de sphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1. lib. Apollonij Pergæi de conicis elementis propos. 11. Altera autem à Vitellione lib. 1. propos. 33 sua Perspectiuæ, comprobabimus.

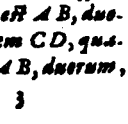
THEON igitur rem propositam ita conatur absoluere. Habeat A B, ad C D, rationem datam, velut duplam, aut triplam, aut quamlibet aliam; & C D, ad E F, eandem quoq; datam. Dico quòd ipsius A B, ad E F, ratio constat ex A B, ad C D, & ex C D, ad E F, ratione, vel quòd ipsius A B, ad C D, rationis quantitas multiplicata in ipsius C D, ad E F, rationis quantitatem efficit ipsius A B, ad E F, rationis quantitatem. Sit enim primum A B, quàm C D, maior; & C D, quàm E F: & sit quidem A B, ipsius C D, dupla, & C D, ipsius E F, tripla. Quoniam igitur C D, ipsius E F, tripla est, ipsius autem C D, dupla est A B; erit A B, ipsius E F, sextupla. Quoniam si tripluma alicuius duplicamus, fit sextuplum; hoc enim est propriè compositio. Vel sic. Quoniam A B, dupla est ipsius C D, diuidatur A B, in ipsi C D, æqualia, hoc est, A G, & G B: & quoniam C D, ipsius E F, tripla est; æqualis autem est A G, ipsi C D; & A G, igitur ipsius E F, tripla est: Id propterea & G B, ipsius E F, tripla est. Tota igitur A B, ipsius E F, sextupla est. Ipsius igitur A B, & E F, ratio connectitur per C D, medium limitem, composita ex ipsius A B, ad C D, & C D, ad E F, ratione.



SIMILITER autem, & si minor fuerit C D, vtraque ipsarum A B, & E F, idipsum colligitur. Sit enim rursus A B, ipsius C D, tripla, At C D, ipsius E F, sit dimidia. Et quoniam C D, ipsius E F, dimidia est, ipsius autem C D, tripla est A B, erit A B, sesquialtera ipsius E F. Si enim alicuius dimidium triplicamus, habebit ipsum semel, & dimidium. At quoniam A B, ipsius C D, tripla est, & C D, ipsius E F, dimidia: qualium A B, æqualium ipsi C D, trium, talium est E F, duorũ. Quare sesquialterum est A B, ipsius E F. Igitur ratio ipsius A B, ad E F, connectitur per C D, medium limitem, composita ex ipsius A B, ad C D, & C D, ad E F, ratione.



SED iam rursus sit C D, vtraque ipsarum A B, & E F, maior, & sit quidem A B, ipsius C D, dimidiũ, & C D, ipsius E F, sesquitertium. Quoniam igitur, qualium est A B, duorum, talium est C D, quatuor, qualium autem C D, quatuor, talium E F, trium. Et qualium igitur A B, duorum, talium

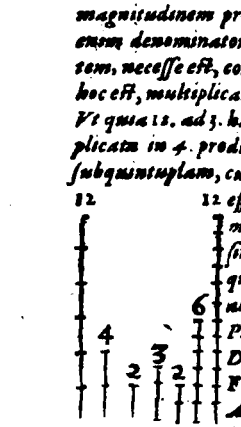


talium E F, trium. Connectitur igitur rursus ratio ipsius A B, ad E F, per C D, medium limitem, qua duorum est ad tria. Similiter quoque & in pluribus, & in reliquis casibus. Et manifestum est, quod si à composita ratione quauis vna compositarum auferatur, vno simplicium ejecto, reliqua compositarum assumetur.

Hac ad verbum desumpsimus ex Theone, iuxta interpretationem Zamberti.

EVTOCII verò demonstratio ita se habet.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Quod quidem facilè demonstrabitur, assumpto prius hoc principio. Quantitatem seu denominatorem cuiusuis proportionis multiplicatum in consequentem magnitudinem proportionis eiusdem, producere antecedentem. Cùm enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad consequentem, necesse est, consequentem sumptum secundum denominatorem, hoc est, multiplicatam in denominatorem, restituere antecedentem. Vt quia 12. ad 3. habent proportionem quadruplam, idcirco 3. multiplicata in 4. producunt 12. Item quia 4. ad 10. habent proportionem subquintuplam, cuius denominator est $\frac{2}{5}$. sit, vt $\frac{1}{5}$ in consequentem 10.



12 efficiat 4. &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D, proportionis verò B, ad C, denominator sit E, & D, multiplicans E, producat F. Dico F esse quantitatem, siue denominatorem proportionis A, ad C, hoc est, si multiplicetur F, in C, producet A, Producatur namq; G, ex multiplicatione F, in C, Dico G, ipsi A, aqualem esse, ac proinde & A, fieri ex F, in C. Cùm enim D, sit denominator proportionis A, ad B, si multiplicetur D, in B, producetur A. Eadem ratione si E, multiplicetur in C, producetur B. Quoniam igitur F, & E, multiplicantes C, producũt

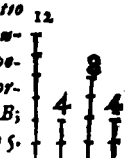
a 18. *sexti.* b 17. *primi.*

G. & B, (nam ex F, in C, fit G, & ex E, in C, fit B, vt dictum est) a erit vt F, ad E, ita G, ad B. Rursus quia D, multiplicans E, & B, producit F, & A, b erit vt E, ad B, ita F, ad A, & permutando vt E, ad F, ita B, ad A, & conuertendo rursus, vt F, ad E, ita A, ad B: Vt autem F, ad E, ita extensum est esse G, ad B. Igitur vt A, ad B, ita G, ad B; Ideoq; aquales erunt quantitates A, & G. Quam ob rem cùm G, producatur ex F, in C, producetur quoq; A, ex F, in C: propterea q; F, quantitas erit proportionis A, ad C. Quod est propositum.

A, 100. B, 20. C, 5.
D, 5. E, 4.
G, 100. F, 20.

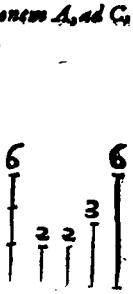
SIMILIS ratio est in pluribus magnitudinibus. Semper enim propertio prima ad vltimam componetur ex proportionibus prima ad secundam, & secunda ad tertiam, & tertia ad quartam, &c. Vt si fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, componetur propertio A, ad D,

ad D, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Nam si intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad C, & C, ad D, vt ostensum est. At vero eadem ratione proportio A, ad C, componitur ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoq; ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Quod est propositum. Idem cernes in 5. 6. 7. & quotcunq; magnitudinibus.



VITELLIO deniq; huiusmodi affert demonstrationem.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Hoc autem demonstrabitur, assumpto eodem principio Eutocij. Denominatore videlicet proportionis multiplicatum in magnitudinem consequentem proportionis producere antecedentem magnitudinem. Sit namq; D, denominator proportionis A, ad B; & E, denominator proportionis B, ad C, At F, denominator proportionis A, ad C. Demonstrandum est igitur F, produci ex D, in E, quod ita fiet. Quoniam quod ex F, prima quantitate in C, quartam producitur, aquale est ei, quod ex D, secunda in B, tertiam gignitur, cùm semper producatur A; (nam ex F, denominatore in C, consequentem producitur A, antecedens; similiter ex D, denominatore in B, consequente producitur antecedens A,) 2 erit vt F, prima ad D, secundam, ita B, tertia ad C, quartã. Cùm igitur E, sit denominator proportionis B, ad C; erit quoq; E, denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans consequentem D, producet antecedentem F. Quod est propositum. Hac Vitellio.



A, 100. B, 30. C, 5. D, 5. E, 4. F, 20. 2 19. sexti.

IDEM ostendetur in pluribus magnitudinibus, vt prius ex Eutocio. Veluti, datis 6. magnitudinibus A, B, C, D, E, F, componetur proportio A, ad F, ex proportionibus A, ad B; B, ad C, C, ad D; D, ad E; & E, ad F. Nam vt ostensum est, proportio A, ad F, componitur ex proportione A, ad B, & B, ad F. Hac autem proportio B, ad F, componitur ex proportione B, ad C, & C, ad F: Et hac proportio C, ad F, componitur ex proportione C, ad D, & D, ad F: Atq; hac tandem proportio D, ad F, componitur ex proportione D, ad E, & E, ad F. Igitur proportio A, ad F, ex omnibus proportionibus intermedijs componitur: hoc est, denominator proportionis A, ad F, gignitur ex quinque denominatoribus quinq; proportionum intermediarum inter se multiplicatis.

A.B.C.D.E.F.
12. 6. 3. 2. 1. 4.

EX his liquidò constat id, quod ad defin. 10. lib. 5. docuimus: mirum, Continuatis quotlibet quantitatibus continuè proportionalibus, proportionem primæ ad vltimam componi ex omnibus proportionibus intermedijs æqualibus, hoc est, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex denominatore proportionis, quam prima habet ad secundam, in seipsum multiplicato, & ex eodem in numerum productum, & sic deinceps, donec tot multiplicationes fiant vna minus, quot proportiones inter primam quantitatem, & vltimam sunt interpositæ: Adeò vt duplicata proportio alicuius proportionis consurgat, cùm huius proportionis denominator bis ponitur, (propter duas æquales proportiones inter primam quantitatem, & tertiam positas) atq; ita in se multiplicatur; triplicata verò, quando idem denominator ter ponitur, (propter tres proportiones æquales inter primam quantitatem, & tertiam positas) atq; ita multiplicatur, primùm in se, deinde iterum in numerum productum. Et sic de quadruplicata, quintuplicata, & de alijs dicendum est in infinitum. Est enim eadem demonstratio in magnitudinibus continuè proportionalibus, & in magnitudinibus non proportionalibus: Solùm in illis denominatores æquales erunt. Vt si A, B, C, ponantur continuè proportionales, æquales erunt denominatores D, E; & F, erit denominator proportionis duplicatæ, &c.

ETSI atem demonstratio tam Eutocij, quàm Vitellionis propriè quadret in proportiones tantùm rationales, cum vtraq; propositionibus lib. 7. Euclidis nitatur: quia tamen, quæ de numerorum proportionibus demonstrantur, conueniunt quoque magnitudinibus incommensurabilibus, hoc est, proportionibus irrationalibus, dici potest vtraque demonstratio omnibus proportionibus conuenire.

VERVM etiamsi non constaret, propositio pluribus magnitudinibus, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex multiplicatione denominatorum intermediarum proportionum inter se, vt demonstrauimus, non tamen propterea demonstrationes, in quibus compositio proportionum adhibetur, minùs certa erunt: quippe cùm in illis hac denominatorum multiplicatio nō vsurpetur. Nam quemadmodum propositio pluribus magnitudinibus continuè proportionalibus, primam ad tertiam dixit Euclides defin. 10. lib. 5. habere proportionem duplicatam eius, quam prima habet ad secundam; nimirum compositam ex duabus proportionibus intermedijs, æqualibus: primam verò ad quartam habere proportionem triplicatam eius, quam prima ad secundam habet hoc est, compositam ex tribus intermedijs proportionibus æqualibus, & sic deinceps; nulla facta mentione multiplicationis denominatorum: ita quoque, si ponantur ordine plures magnitudines, eiusdem generis non continuè proportionales, dicetur prima ad vltimam habere proportionem compositam ex omnibus proportionibus intermedijs, licet inter se non sint

omnes

omnes æquales, sive aliqua sint maioris inæqualitatis, & aliqua æqualitatis, & aliqua minoris inæqualitatis, sive omnes eiusdem generis sint, solum eam ob causam, quod illa proportiones intermediæ sint inter extremas duas magnitudines interiectæ; quemadmodum defin. 10. lib. 5. proportio prima ad tertiam dicebatur duplicata, hoc solo nomine, quia duæ proportiones æquales interpositæ sunt inter extremas duas magnitudines: Adeo vt non sit aliud discrimen inter hanc compositionem proportionum, & illam duplicationem, triplicationem, &c. quæ lib. 5. explicata est, quam quod in duplicatione, triplicatione &c. proportionum interiiciuntur proportiones omnes æquales, in compositione vero proportionum non necesse est, interpositas proportiones æquales esse. Multiplicatio tamen denominatorum vtilis est, vt sciamus, quanam sit illa proportio, quæ alterius dicitur duplicata, triplicata &c. vel quæ ex propositis proportionib. composita esse dicitur.

VERBI gratia. Vt sciamus, qua proportio sit illa, quæ dicitur duplicata proportionis decuplæ, ponemus 10. denominatorem decuplæ proportionis bis hoc modo, 10. 10. & vnum in alterum ducemus. Numerus enim genitus 100. denominator est proportionis, quæ decuplæ est duplicata. Vt autem habeamus denominatorem proportionis, quæ eiusdem decuplæ triplicata dicitur, ponemus 10. denominatorem ter hoc modo 10. 10. 10. & primum in secundum ducemus, & numerum productum 100. in tertium. Nam numerus hic procreatus 1000. denominat proportionem decuplæ triplicatam. Quod de aliis quoque proportionibus dicendum est. Sed hoc etiam discemus absque denominatorum multiplicatione. Nam si continuentur tres numeri in proportione data, vt in tractatu proportionum, cum de proportionalitate Geometrica agebamus, docuimus, habebunt duo extremi numeri proportionem datæ proportionis duplicatam: si vero continuentur quatuor numeri, habebunt extremi duo triplicatam proportionem datæ proportionis. Conferendus autem est maior cum minore, quando data proportio est maioris inæqualitatis; minor vero cum maiore, cum data proportio minor inæqualitatis est. Veluti si desideretur proportio decuplæ proportionis duplicata, continuabimus tres numeros in proportione decuplæ hoc modo, 1. 10. 100. Vel 3. 30. 300. Nam proportio 100. ad 1. vel 300. ad 3. quæ centupla est, dicetur decuplæ duplicatæ. Eodem modo proportio 1. ad 100. vel 3. ad 300. quæ subcentupla est, dicitur duplicatæ proportionis subdecuplæ 1. ad 10, vel 3. ad 30.

EADEM ratione vt cognoscamus, quanam sit proportio illa, quæ verbi gratia componi dicitur ex tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia, statuemus ordine harum denominatores hoc modo, 3. 2. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{3}$. eosque inter se multiplicabimus, primum 3. in 2. deinde productum numerum 6. in $1\frac{1}{2}$. & hunc rursus numerum procreatum 9. in $1\frac{1}{3}$. & sic deinceps, si plures essent denominatores. Vltimus enim productus 12. est denominator proportionis, quæ ex datis

proportionibus componi dicitur; ita vt proportio duodecupla componi dicatur ex tripla, dupla, ſeſquialtera, & ſeſquitertia. Hoc autem intelligemus etiam ſine hac multiplicatione denominatorum. Si namque proportiones componentes continuentur in numeris, ita vt primus ad ſecundum habeat primam proportionem componentem, ſecundus ad tertium ſecundam, tertius ad quartum tertiam, quartus ad quintum quartam, & ita deinceps; erit proportio, quam primus numerus habet ad vltimum, compoſita ex datis proportionibus. Vt in proximo exemplo proportiones datæ, videlicet tripla, dupla, ſeſquialtera, & ſeſquitertia, continuantur in his numeris 36. 12. 6. 4. 3. Vel in his 108. 36. 18. 12. 9. Vel in his 12. 4. 2. 1 ½. 1. Vbiq; enim primus numerus ad ſecundum proportionem habet triplam, ſecundus ad tertium duplam, tertius ad quartum ſeſquialteram, & quartus ad quintum ſeſquitertiam. Proportio ergo primi ad vltimum, quæ duodecupla eſt, componi dicitur ex quatuor illis proportionibus, vt prius. Quo pacto autem quotuis proportiones continuanda ſint in numeris integris minimis, docet Euclides lib. 8. propoſ. 4.

ITAQVE cum Euclides demonſtrat hoc lib. propoſ. 23. æquiangula parallelogramma habere proportionem compoſitam ex duabus proportionibus, quas duo latera circa vnum angulum vnius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, nihil aliud intelligit, quàm ſi duæ illæ proportiones laterum continuentur in tribus quantitatibus, eam proportionem parallelogramma inter ſe habere, quam prima quantitas ad tertiam habet. Vt ſi proportio vnius lateris primi parallelogrammi ad vnum latus ſecundi fuerit, vt 8. ad 3. proportio verò alterius lateris ad alterum latus, vt 1. ad 2. nihil aliud eſt intelligendum, quam ſi ſumantur tres numeri, 24. 9. 18. quorum primus ad ſecundum eſt, vt 8. ad 3. & ſecundus ad tertium, vt 1. ad 1. proportionem parallelogrammi primi ad ſecundum eſſe eandem, quam habet primus numerus 24. ad tertium 18. quæ eſt ſeſquitertia. Proportio enim 24. ad 18. componitur, vt dictum eſt, ex proportionibus 24. ad 9 & 9. ad 18. hoc eſt, ex proportionibus 8. ad 3. & 1. ad 2. quas inter latera eſſe diximus.

PORRO quemadmodum interpretes nonnulli Euclidis volebant in defin. 10. lib. 5. duplicatam proportionem, & triplicatam, &c. verè eſſe maiorem illa, cuius duplicata, vel triplicata dicitur, nimirum duplam, vel triplam, &c. ac propterea eam definitionem eſſe intelligendam de magnitudinibus continuè proportionalibus in proportione maioris inæqualitatis; quod tamen falſum eſſe ibi indicauimus: ita idem voluit etiam in hac compoſitione proportionum, extremorum proportionem, quæ ex proportionibus intermedijs componi dicitur, verè eſſe maiorem qualibet intermediarum componentium, vtpotè conflatam ex additione omnium intermediarum proportionum inter ſe, ac proinde omnes intermedias proportiones debere eſſe minores extremo-

rum pro-

rum proportione. Verum hoc falsum est, & Euclidi omnino repugnans, vt ex proximo exemplo, quod ex propos. 23. huius lib. protulimus, perspicuum est. Nam propositis tribus hisce numeris, 24. 9. 18. qui habent easdem proportiones ordine inter se, quas latera vnius parallelogrammi ad latera alterius parallelogrammi habent; erit proportio parallelogrammi ad parallelogrammum eadem, quæ 24. ad 18. nimirum ex laterum proportionibus composita, vt Euclides demonstrat. Quis autem non videt, proportionem 24. ad 18. quæ sesquitertia est, multo minorem esse proportione 24. ad 9. quæ dupla est superbipartiens tertias? Sed de hac re plura scribemus ad finem lib. 9.

HÆC cum ita sint, si quis velit habere quotlibet proportiones datum proportionem componentes, id est, quarum denominatores inter se multiplicati gignant data proportionis denominatorem, statuendi erunt inter duos numeros data proportionis quoscunque, tot numeri medij quicunque, quot proportiones componentes desiderantur, minus vno. Vt si quis velit tres proportiones, ex quibus centupla proportio componatur, satisfiet quæstioni, si inter 100. & 1. duos numeros ponamus medios, hoc modo, 100. 50. 10. 1. Nam extremorum proportio 100. ad 1. componitur ex intermediis tribus, hoc est, ex dupla, quintupla, & decupla. Ita quoque si alios numeros statuas medios hoc modo, 100. 10. $\frac{1}{2}$. 1. componetur eadem proportio 100. ad 1. ex decupla, tripla sesquitertia, & tripla. Sic etiam vides hic, 2. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{10}$. 1. duplam proportionem compositam esse ex quatuor, nimirum ex subsesquialtera, tripla, subdecupla, & decupla. Quod si quis petat quotuis proportiones datam proportionem componentes, quæ etiam omnes datæ sint præter vnam, continuabimus ab vno extremo datæ proportionis omnes datas proportiones componentes ordine. Ha enim cum proportione, quam vltimus medius ad alterum extremum datæ proportionis habet, component datam proportionem. Vt si quis dicat, da mihi quinque proportiones, quarum quatuor sint, dupla, tripla, sesquialtera, & quintupla sesquitertia, componentes proportionem sesquialteram inter 9. & 6. statuemus hos quatuor numeros medios, 9. $4\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{7}{10}$. 6. ita vt 9. ad $4\frac{1}{2}$. habeant proportionem duplam, & $4\frac{1}{2}$. ad $1\frac{1}{2}$. triplam, & $1\frac{1}{2}$. ad 1. sesquialteram: & 1. ad $\frac{7}{10}$. quintuplam sesquitertiam. Ex his etenim quatuor, vna cum proportione $\frac{7}{10}$. ad 6. quæ eadem est, quæ 1. ad 32. componitur proportio sesquialtera 9. ad 6. Idem eueniet, si data quatuor proportiones continuentur à minori extremo 6 hoc modo, 6. 12. 36 54. 288. 9. ita vt 12. ad 6. habeant proportionem duplam; & 36. ad 12. triplam; & 54. ad 36. sesquialteram; & 288. ad 54. quintuplam sesquitertiam. Nam quinta proportio 9. ad 288. eadem est, quæ prima $\frac{7}{10}$. ad 6. qualis est 1. ad 32.

EX his nullo negotio satisfaciemus quæstioni, qua quispiam postulat sibi dari quotuis numeros, qui inter se multiplicati procreent datum quemcunque numerum. Si namque sumantur duo numeri habentes

bentes proportionem à dato numero denominatam, & inter eos ſtatuantur tot numeri quicunque minus vno, quot numeri deſiderantur, erunt denominatores proportionum intermediarum, qua quaruntur. Nam ij inter ſe multiplicati producunt denominatorem proportionis extremorum, vt demonſtratum eſt, hoc eſt, numerum datum. Veluti ſi quis petat tres numeros, ex quorum mutua multiplicatione gignantur 100. *ſtatuemus inter duos numeros* 500. 5. *centuplam proportionem habentes, duos medios numeros quoſcunque, hoc modo* 500. 250. 50, 5. *eruntque tres quæſiti numeri,* 2. 5. 10. *nimirum denominatores proportionum* 500. *ad* 250. *&* 250. *ad* 50. *&* 50. *ad* 5. *Nam ex* 2. *in* 5. *fiunt* 10. *& ex* 10. *in* 10. *fiunt* 100. *Quòd ſi quis poſtulet vnum numerum, qui vna cum quotlibet alijs datis, ſi inter ſe multiplicentur, producat datum quemcunq; numerum: Sumendi erunt rurſus duo numeri proportionem habentes à dato numero, qui produci debet, denominatam, & ab alterutro eorum continuanda proportiones à datis alijs numeris denominata. Denominator enim proportionis inter alterum numerum, & vltimum continuatorum erit numerus, quem quærimus. Vt ſi dentur hi quatuor numeri,* 2. 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. *quæraturque quintus alius, qui in numerum ex illorum mutua multiplicatione productum ductus gignat datum hunc numerum* $1\frac{1}{2}$. *accipiemus duos numeros* 9. *&* 6. *proportionem ſeſquialteram habentes à dato numero* $1\frac{1}{2}$. *denominatam; & à* 9. *continuabimus quatuor proportiones à* 2. 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. *denominatas, hoc modo,* 9. 4$\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{3}\frac{1}{6}$. 6. *Quintus enim numerus quæſitus erit denominator proportionis* $\frac{1}{7}\frac{1}{6}$. *ad* 6. *nimirum* $\frac{1}{7}\frac{1}{2}$. *Nam quinque hi numeri* 2. 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. $\frac{1}{7}\frac{1}{2}$. *quorum priores quatuor dati ſunt, quintus autem inuentus, inter ſe multiplicati procreant datum numerum* $1\frac{1}{2}$. *Idem quintus numerus* $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$. *inueniretur, ſi quatuor proportiones à datis numeris denominata continuentur à numero* 6. *hoc modo,* 6. 12. 36. 54. 288. 9. *Denominator enim proportionis* 9. *ad* 288. *eſt* $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$. *vt prius. Sic etiam ſi quærendi ſint quatuor numeri, qui inter ſe multiplicati procreent* 1. *ſtatuemus inter quoſuis duos numeros æquales proportionem æqualitatis ab* 1. *denominatum habentes, tres medios numeros quoslibet, vt hic vides,* 4. 2. 1. 3. 4. *Nam denominatores proportionum* 4. *ad* 2. *&* 2. *ad* 1. *&* 1. *ad* 3. *&* 3. *ad* 4. *nimirum,* 2. $2\frac{1}{3}\frac{1}{4}$. *ſunt quatuor numeri, qui quærebantur, quippe cum inter ſe multiplicati gignant* 1.

FACILIVS huiuſmodi quæſtiones ſoluuntur ſi tot numeri quicunq;, minus vno, quot petuntur, inter ſe multiplicentur. & per vltimum numerum productum, dividatur datus numerus, qui gigni debet. Quotiens enim & aſſumpti numeri, qui multiplicati inter ſe ſunt, erunt quos quærimus. Vt in proxima quæſtione, ſi hi tres numeri, verbi gratia, 4. 5. 6. *inter ſe multiplicentur, & per numerum productum* 120. *dividatur* 1. *qui produci debet, fiet Quotiens* $\frac{1}{1}\frac{1}{2}\frac{1}{0}$. *Quatuor ergo*

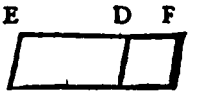
tuor ergo numeri quæsiti sunt 4. 5. 6. $\frac{7}{12}\frac{1}{0}$. Nam ex 4. in 5. fiunt 20. & ex 20 in 6. fiunt 120. & ex 120. in $\frac{7}{12}\frac{1}{0}$ fit 1.

POSTREMO neq; hoc prætermittendum est, videlicet: Quemadmodum, ordine posito quotcunque numeris, denominator proportionis extremorum producitur ex omnibus denominatoribus intermediarum proportionum, vt demonstrauimus; ita posito quotcunq; numeris ordine, ita tamen, vt quilibet insequens sit suo antecedente maior, differentia extremorum coacernatur ex omnibus differentiis intermediorum numerorum. Vt hic 3. 7. 12. 20. 30. 100. 713. differentia inter 3. & 713. est 710. At differentia inter 3. & 7. est 4. Inter 7. & 12. est 5. Inter 12. & 20. est 8. Inter 20. & 30. est 10. Inter 30. & 100. est 70. Inter 100. denique & 713. est 613. quæ omnes differentiæ 4. 5. 8. 10. 70. 613. conficiunt 710. differentiam extremorum.

ATQVE hæc dicta sint de quinque definitionibus ab Euclide hoc 6. lib. positis, quibus addendam esse censemus sequentem sextam, qua multum conducet, vt facilius intelligantur 27. 28. 29. & 30. propositiones huius libri, & quam plurima alia decimi libri. Ea autem est huiusmodi.

VI.

PARALLELOGRAMMVM secundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat maiorem lineam, quam sit ea, secundum quam applicatur: ita tamen, vt parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, constituatque cum eo totum vnum parallelogrammum.



SIT data recta linea A B, supra quam constituatur parallelogrammum A C D E, quod non occupet totam lineam A B, sed desit C B; & ducta B F, parallela ipsi C D, donec cum E D, protracta conueniat in F, compleatur totum parallelogrammum A B F E. Parallelogrammum igitur A D, applicatum secundum rectam A B, deficere dicitur parallelogrammo D B, ita vt D B, appelletur defectus.

RVRSVS sit data recta linea A C, supra quam constituatur parallelogrammum A B F E, quod habeat latus A B, maius recta data A C; & ducatur C D, ipsi B F, parallela. Parallelogrammum igitur A F, applicatum secundum rectam A C, excedere dicitur parallelogrammo D B, ita vt D B, vocetur excessus.

HIC autem defectus D B, vel excessus, in rectangulis quidem esse

potest

potest vel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem vel Rhombus, vel Rhomboides, vt perspicuum est.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.

SINT duo triangula ABC, DEF, eandem habentia altitudinem, quorum bases BC, EF. Item duo parallelogramma CG, EH, eiusdem altitudinis, quorum eædem bases BC, EF. Dico ita esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH, vt est basis BC, ad basin EF. Hoc est, si basis BC, statuatur prima magnitudo, & basis EF, secunda: At triangulum ABC, vel parallelogrammum CG, tertia, & triangulum DEF, vel parallelogrammum EH, quarta, æque multiplicia primæ ac tertiæ ab æque multiplicibus secundæ & quartæ vel vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere, vt definitio 6. lib. 5. exigit. Collocentur enim tam triangula, quam parallelogramma inter easdem parallelas GH, LN. (Nam vt in defin. 4. dictum est, triangula & parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter easdem fuerint constituta parallelas: sic enim perpendiculares à verticib. ad bases demissæ æquales erunt,) & ex BL, sumantur quotcunq; rectæ BI, IK, KL, ipsi BC, æquales; Item ex FN, abscindantur quotcunque rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ AI, AK, AL; DM, DN. *a* Erunt igitur triangula ABC, AIB, AKI, ALK, super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, inter se æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula DEF, DFM, DMN. Quam multiplex est ergo recta CL, rectæ BC, tam multiplex quoque erit triangulum ACL, trianguli ABC; & quam multiplex est recta EN, rectæ EF, tam quoque multiplex erit triangulum DEN, trianguli DEF, quia in tot triangula æqualia sunt diuisa tota triangula ACL, DEN, in quot rectas æquales sectæ fuerunt totæ rectæ CL, EN. Quoniam vero si basis CL, æqualis fuerit basi EN, *b* necessario triangulum ACL, æquale est triangulo DEN, ac proinde si CL, maior fuerit quam EN, necessario ACL, maius est quam DEN, & si minor, minus; deficient propterea vna CL, recta, & triangulum ACL, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ ABC, ab EN, recta triangulo DEN, æque multiplicibus secundæ EF, & quartæ DEF,



a 38. *primi.*

b 38. *primi.*

DEF, vel vna æqualia erunt, vel vna excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. a Quare quæ proportio est primæ BC, ad secundam EF, basis ad basim, ea est tertiæ ABC, ad quartam DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad basin, ita est triangulum ad triangulum. quod est propositum. a 6. def. quinti.

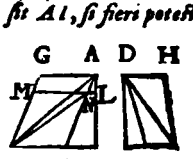
QVONIAM autem b vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est parallelogrammum CG, (c quod duplum est trianguli ABC) ad parallelogrammum EH; (d quod est duplum trianguli DEF) perspicuum est, e ita quoque esse parallelogrammum ad parallelogrammum, vt est basis ad basin. Quod tamen eodem argumento confirmari potest, quo vsi sumus in triangulis, si prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipsi BG; nec non ex punctis M, N, parallelæ ipsi FH, &c. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo; ita se habent inter se, vt bases. Quod erat demonstrandum. b 15. quinti. c 34. primi. d 34. primi. e 11. quinti.

SCHOLIVM.

SED & conuersum huius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt bases, æquales habent altitudines, vel eandem.

SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF; & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt basis BC, ad basin EF. Dico eorum altitudines, nimirum perpendiculares AI, DK, esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit AI, si fieri potest, maior, quam DK. Abscissa igitur IL, ipsi DK, æquali, ductaque LM, ipsi BC, parallela, qua latus AC, secet in N, coniunctaque recta BN; f erit NBC, triangulum ad triangulum DEF, vt basis BC, ad basin EF; cum altitudines LI, DK, ponantur æquales: Sed fuit etiam ABC, ad DEF, vt BC, ad EF. g Igitur triangula NBC, ABC, ad triangulum DEF, eandem habent proportionem; h Ac proinde æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt altitudines AI, DK, sed æquales. Eadem est ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento ostendemus parallelogramma NMBC, AGBC, æqualia esse, si altitudines AI, DK, inæquales dicantur, & LI, DK, æquales.



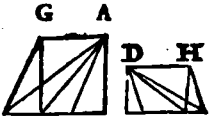
f 1. huius. g 11. quinti. h 9. quinti.

ADDIT hoc loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuitatis demonstrabimus. Videlicet.

TRIAN-

TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum æquales ſunt baſes, vel eadem, ita ſe habent inter ſe, vt altitudines.

SINT duo triangula A B C, D E F; & parallelogramma A G B C, D E F H, habentia baſes æquales B C, E F. Dico eſſe triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum A G B C, ad parallelogrammum D E F H, vt altitudo A I, eſt ad altitudinem D K. Si enim ſumantur rectæ I L, K M, baſibus B C, E F, æquales, ductæque recta L A, M D; a *erit triangulum A L I, triangulo A B C, æquale, cum ſint ſuper baſes æquales* b *L I, B C, & inter eaſdem parallelas A G, I B. Eodem modo æquale erit triangulum D K M, triangulo D E F.* b *Quare erit, vt A B C, ad D E F, ita A L I, ad D K M.* c *Eſt autem, vt A L I, ad D K M, ita A I, ad D K. (Nam ſi baſes ponantur A I, D K, erunt rectæ æquales L I, K M, altitudines.) Igitur & A B C, ad D E F, erit, vt A I, ad D K. Quod eſt propoſitum.*



a 38. primi.
b 7. quinti.
c 1. ſext.

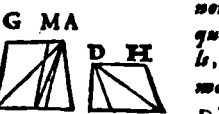
QVONIAM verò eſt, d *vt A B C, ad D E F, ita parallelogrammum A G B C,* e *quod trianguli A B C, duplum eſt, ad parallelogrammum D E F H,* f *quod trianguli D E F, eſt duplum.* g *Erit quoque A G B C, ad D E F H, vt A I, ad D K. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, ſi rectæ ducantur L G, M H. Idem ſequetur, ſi triangula, & parallelogramma eandem habuerint baſin.*

d 15. quinti.
e 34. primi.
f 34. pri.
g 11. quinti.

HOC verò conuertemus etiam, ad hunc modum.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt altitudines, æquales habent baſes, ſi vnam & eandem non habeant.

SIT triangulum A B C, ad triangulum D E F; & parallelogrammum A G B C, ad parallelogrammum D E F H, vt altitudo A I, ad altitudinem D K. Dico eorum baſes B C, E F, æquales eſſe. Si enim non ſunt æquales, ſit B C, ſi fieri poteſt, maior, quam E F. Abſciſſa igitur B L, ipſi E F, æquali, ductaque recta L A; erit, vt proximè demonſtrauimus, A B L, ad D E F, vt A I, ad D K. Sed vt A I, ad D K, ita ponitur eſſe A B C, ad D E F. h *Igitur A B L, A B C, ad D E F, eandem habent proportionem;* i *Ac proinde inter ſe æquales ſunt: pars & totum. Quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt baſes B C, E F, ſed æquales. Eademque eſt ratio de parallelogrammis. Simili enim argumento ducta L M, ipſi G B, parallela, oſtendemus, parallelogram-*



h 11. quinti.
i 9. quinti.

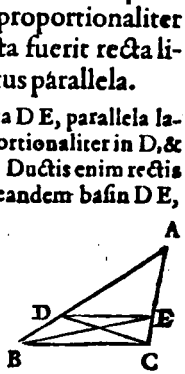
logramma MGBL, AGBC, aqualia esse, si bases BC, EF, dicantur inaquales, & BL, EF, aquales.

IN omnibus autem his non variabitur demonstratio, etiamsi triangula, & parallelogramma sint rectangula, ita vt altitudines sint ipsorum latera, vel vnum fuerit rectangulum, alterum vero non. Non assumpsimus casum difficiliorem, quando scilicet neutrum est rectangulum. Ita enim demonstratio maiore indiget nonnunquam constructione.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

IN triangulo ABC, ducatur primum recta DE, parallela lateri BC. Dico latera AB, AC, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est, esse vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. Ductis enim rectis CD, BE, *a* erunt triangula DEB, DEC, super eandem basin DE, & inter easdem parallelas DE, BC, constituta, inter se æqualia. *b* Quare vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triangulum DEC: *c* Atqui vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est basis AD, ad basin DB; (cum hæc triangula sint eiusdem altitudinis, vt constat, si per E, agatur parallela recta ipsi AB) & eadem ratione, vt triangulum ADE, ad triangulum DEC, ita est basis AE, ad basin EC. *d* Vt igitur AD, ad DB, ita est AE, ad EC, (cum hæ duæ proportiones eædem sint proportioni trianguli ADE, ad triangulum DEB, & eiusdem trianguli ADE, ad triangulum DEC) quod est propositum.



a 37. primi.
b 7. quinti.
c 1. sex.
d 11. quinti.

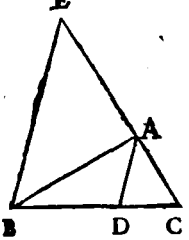
SECET deinde recta DE, latera AB, AC, proportionaliter. Dico DE, parallelam esse reliquo lateri BC. Ductis enim rursum rectis CD, BE, *e* erit vt basis AD, ad basin DB, ita triangulum ADE, ad triangulum DEB, cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autem vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. *f* Igitur erit vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita AE, ad EC: Sed rursus *g* vt basis AE, ad basin EC, ita est triangulum ADE, ad triangulum DEC, cum sint altitudinis eiusdem. *h* Igitur vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triangulum DEC. *i* Æqualia ergo sunt triangula DEB, & DEC: Ac propterea, cum eandem habeant basin DE, *k* inter

e 1. sext.
f 11. quinti.
g 1. sex.
h 11 quinti.
i 9.
k 39. primi.

eaſdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela eſt DE, ipſi BC. quod eſt propoſitum. Si itaque ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat oſtendendum.

iij. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea ſecuerit & baſin: baſis ſegmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera. Et ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad ſectionem producitur, bifariam ſecat trianguli ipſius angulum.



IN triangulo ABC, recta AD, ſecet primo angulum BAC, bifariam. Dico eſſe vt BA, ad AC, ita BD, ad DC. Agatur enim per B, recta BE, parallela ipſi AD, donec cum CA, producta conueniat in E; (coibunt autem omnino BE, CA, propterea quod anguli C, & CBE, minores ſunt duobus rectis. Cum enim C, & CDA, *a* minores duobus rectis ſint; *b* ſit autem angulus CDA, angulo CBE, externus interno, æqualis: erunt quoque C, & CBE, duobus rectis minores) *c* eritq; angulus EBA, æqualis alterno BAD; & angulus E, externo DAC. Cum igitur duo anguli BAD, DAC, æquales ponantur; erunt & anguli EBA, & E, inter ſe æquales; *d* Ideoque & recta BA, EA, inter ſe æquales. *e* Vt igitur EA, ad AC, ita BA, ad eandem AC. *f* Atqui vt EA, ad AC, ita eſt BD, ad DC, cum in triangulo BCE, recta AD, ſit parallela lateri BE. *g* Igitur vt BA, ad AC, ita eſt BD, ad DC. quod eſt propoſitum.

a 17. primi.
b 29. primi.
c 29. primi.
d 6. primi.
e 7. quinti.
f 2. ſext.
g 11. quinti.

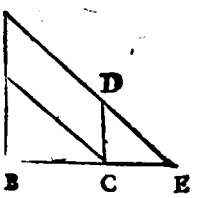
SIT deinde vt BA, ad AC, ita BD, ad DC. Dico rectam AD, bifariam ſecare angulum BAC. Agatur enim rurſus per B, recta BE, ipſi AD, parallela coiens cum CA, protracta in E. Quoniam igitur vt BA, ad AB, ita ponitur BD, ad DC. *h* Vt autem BD, ad DC, ita eſt EA, ad AC; (quod in triangulo BCE, recta AD, ſit lateri BE, parallela) *i* Erit vt BA, ad AC, ita EA, ad eandem AC. *k* Æquales igitur ſunt BA, & EB, inter ſe, *l* ac propterea anguli ABE, & E, æquales quoque erunt. *m* Cum igitur angulus ABE, æqualis ſit alterno BAD, & angulus E, externo DAC, erunt & duo anguli BAD, DAC, inter ſe æquales, quod eſt propoſitum. Itaque ſi trianguli angulus bifariam ſectus ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.

h 2. ſex.
i 11. quinti.
k 9. quinti.
l 5. primi.
m 29. primi.

THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 4. IV.

ÆQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualib. angulis subtenduntur.

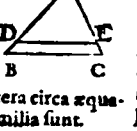


SINT æquiangula triangula ABC, DCE, sintque æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC, & BAC, CDE. Dico esse AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC, ad CA, vt CE, ad ED; & AB, denique ad AC, vt DC, ad DE: Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaq; sunt ea latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos, & consequentia similiter. Constituantur latera BC, CE, secundum lineam rectam, ita vt angulus DCE, externus sit æqualis interno ABC, pariterque externus ACB, interno DEC. Et quia duo anguli ABC, ACB, *a* minores sunt duobus rectis: est autem angulo ACB, æqualis angulus DEC, erunt & anguli B, & E, duobus rectis minores. *b* Quare rectæ BA, & ED, productæ ad partes A, D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniam vero angulus externus DCE, æqualis est interno opposito ABC; *c* parallelæ erunt CD, & BF. Eadem ratione parallelæ erunt CA, & EF: quod angulus externus ACB, sit æqualis interno DEC. Parallelogrammum est igitur ACDF, *d* propterea quæ recta AF, æqualis rectæ CD; & recta CA, rectæ DF. Quoniam igitur in triangulo BEF, recta AC, parallela est lateri EF, *e* erit AB, ad AF, hoc est, ad DC, (quæ æqualis est ipsi AF,) vt BC, ad CE. Permutando *f* igitur erit AB, ad BC, vt DC, ad CE. Rursus quia in eodem triangulo BEF, recta CD, parallela est lateri BE, *g* erit BC, ad CE, vt FD, hoc est, vt CA, (quæ æqualis est ipsi FD,) ad ED. Permutando *h* igitur erit BC, ad CA, vt CE, ad ED. Cum igitur sit AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC, ad CA, vt CE, ad ED: *i* erit & ex æquali AB, ad CA, vt DC, ad ED. Quod est propositum. Æquiangulorum ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

a 17. *primi.*
b 13. *primum.*
c 28. *primi.*
d 34. *primi.*
e 2. *sexti.*
f 16. *quinti.*
g 2. *sexti.*
h 16. *quinti.*
i 22. *quinti.*

COROLLARIVM.

HINC fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Ducatur enim in triangulo ABC, lateri BC, parallela DE. Dico triangulum ADE, toti triangulo ABC, esse simile. Æquiangula namq; sunt, *k* cum anguli ADE, AED, æquales sint angulis ABC, ACB, externis; & angulus A, communis. Quare vt demonstratum est, *l* habent latera circa æquales angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.



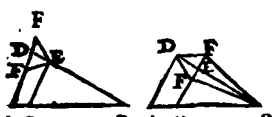
k 29. *primi.*
l 4. *sexti.*

SCHOLIVM.

NON alienum à noſtro inſtituto eſſe puto, ſi hic demonſtremus duo theoremata, quorum primum Federicus Commandinus demonſtrat in libello Archimedis de iis, qua vehuntur in aqua; Secundum verò in commentariis in Apollonij Conica. Horum primum eſt.

SI ex duobus punctis cuiuſuis rectæ, quorum alterum ſit extremum, alterum vero intra lineam, duæ parallelæ inter ſe ad eaſdem partes educantur, ita proportionem habeant eandem, quam rectæ inter ipſas, & alterum extremum punctum includſæ: Recta coniungens extremũ vniuſcarum cum extremo prioris lineæ tranſibit per extremum alterius lineæ.

SIT recta AB, & ex punctis A, & C, educantur duæ parallelæ AD, CE, proportionem habentes, quam AB, BC, ita vt ſit AD, ad CE, ſicut AB, ad BC, vel CE, ad AD, vt BC, ad AB. Dico rectam, qua coniungit extrema B, & E, tranſire per punctum D. Item rectam, qua coniungit extrema B, & D, tranſire per punctum E. Si enim recta BE, non tranſit per D, coeat cum AD, in F, puncto, quod ſit vel ſupra D, vel infra, vt in prima figura. Quoniam igitur per coroll. huius propoſ. triangula BAF, BCE, ſimilia ſunt; a erit, vt AB,

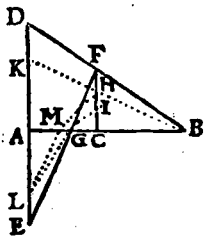


a 4. ſex. *ad AF, ita BC, ad CE: Et permutando, b vt AB, ad BC, ita AF,*
b 16. quinti. *ad CE: Vt autem AB, ad BC, ita erat quoque AD, ad CE.*
c 11. quinti. *c Igitur erit, vt AF, ad CE, ita AD, ad CE; d Ac propterea aquales erunt rectæ AF, AD, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſit*
d 9. quinti. *ergo recta BE, per punctum D. Quod eſt primum.*

RVRSVS ſi recta BD, non tranſit per E, tranſeat per F, punctum, quod ſit vel ſupra E, vel infra, vt in ſecunda figura. Quoniam ergo per coroll. huius propoſ. triangula BAD, BCF, ſimilia ſunt;
e 4. ſex. *e erit, vt AB, ad AD, ita BC, ad CF: & permutando, vt AB, ad*
f 16. quinti. *BC, ita AD, ad CF: Vt autem AB, ad BC, ita quoque erat AD, ad CE. g Igitur erit, vt AD, ad CF, ita AD, ad CE: h Ac proinde*
g 11. quinti. *æquales erunt rectæ CF, CE, pars & totum. Quod eſt abſurdum.*
h 9. quinti. *Tranſit ergo recta BD, per E. Quod eſt ſecundum.*

HOC etiam verum eſt, quando duæ parallelæ in diuerſas partes ducuntur, habentes eandem proportionem, quam ſegmenta rectæ inter parallelas conterminata, & punctum idem intra datum rectam. Vt in figura problematis 7. ſcholij propoſ. 17. ſi fuerint parallelæ AE, FC, in diuerſas partes ductæ, fuerintque vt AE, ad CF, ita AG, ad CG, tranſibit

transibit recta EF, per G, hoc est, duæ rectæ EG, FG, vnam rectam constituent. Cum enim sit, vt AE, ad CF, ita AG, ad CG; erit permutando quoque, vt AE, ad AC, ita CF, ad CG. Cum ergo anguli alterni A, C, æquales sint; a erunt quoque anguli AGE, CGF, æquales. Cum ergo AC, sit linea recta, constituent EG, FG, lineam quoque rectam ex iis, quæ ex Procle ad propos. 15. lib. 1. demonstrauimus.

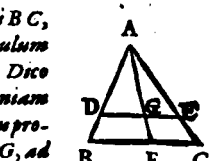


a 6. sex.

ALTERVM vero est.

SI in triangulo quouis vni lateri parallela recta agatur; & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppositum recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus illud, in easdem rationes.

IN triangulo ABC, ducta sit DE, lateri BC, parallela, & ex puncto F, quocunque ad angulum A, recta extendatur FA, secans DE, in G. Dico esse, vt BF, ad FC, ita DG, ad GE. Quoniam enim triangula AFB, AGD, ex coroll. huius propos. similia sunt; b erit vt AF, ad BF, ita AG, ad DG, c & permutando, vt AF, ad AG, ita BF, ad DG. Atque eodem argumento concludemus esse, vt AF, ad AG, ita FC, ad GE. d Igitur erit, vt BF, ad DG, ita FC, ad GE, & permutando, vt BF, ad FC, ita DG, ad GE. Quod est propositum.



b 4. sex.
c 16. quinti.
d 11. quinti.

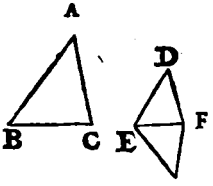
ALITER. Quoniam triangula ABF, ADG, similia sunt, nec non triangula AFC, AGE, per coroll. huius propos. e erit, vt BF, ad FA, ita DG, ad GA: Item vt FA, ad FC, ita GA, ad GE. f Ex æquo igitur, vt BF, ad FC, ita erit DG, ad GE. Quod erat demonstrandum.

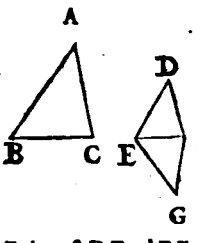
e 4. sex.
f 22. quinti.

THEOR. 5. PROPOS. 5. V.

SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

HABEANT triangula ABC, DEF, latera proportionalia, sitq; AB, ad BC, vt DE, ad EF, & BC, ad CA, vt EF, ad FD, & AB, denique ad AC, vt DE, ad DF. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D, & angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æqua-



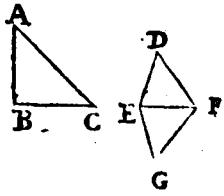


les respiciunt homologa latera. Fiat angulus F E G, æqualis angulo B; & angulus E F G, angulo C, conuenientque rectæ E G, F G, in G: a eritque reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Æquiangula igitur sunt triangula A B C, G E F. Quare b vt A B, ad B C, ita est G E, ad E F: Vt autem A B, ad B C, ita ponitur D E, ad E F. c Igitur vt G E, ad E F, ita est D E, ad E F, eandem, d propterea quæ æquales erunt G E, D E. Rursus, e quoniam vt B C, ad C A, ita est E F, ad F G: Vt autem B C, ad C A, ita ponitur E F, ad F D; f erit vt E F, ad F G, ita eadem E F, ad F D; g ideoque æquales erunt F G, F D. Itaq; cum latera E G, F G, æqualia sint lateribus D E, D F, verumque vtrique; & basis communis E F; h erunt anguli G, & D, æquales; i ac propterea & reliqui anguli G E F, G F E, reliquis angulis D E F, D F E, æquales erunt. Quamobrem cum angulus G, æqualis sit angulo A; erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis, eodemque modo angulus D E F, angulo B, & angulus D F E, angulo C, æqualis erit. quod est propositum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendum erat.

a 32. *primi.*
b 4. *sex.*
c 11. *quinti.*
d 9. *quinti.*
e 4. *sex.*
f 11. *quinti.*
g 9. *quinti.*
h 5. *pri.*
i 4. *pri.*

vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.



SIT angulus B, trianguli A B C, æqualis angulo E, trianguli D E F, sintque latera A B, B C, proportionalia lateribus D E, E F, hoc est, sit A B, ad B C, vt D E, ad E F. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulum scilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera respiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus F E G; & angulo C, angulus E F G; eritque, vt in præcedenti propos. dictum est, triangulum G E F, triangulo A B C, æquiangulum. Quare k vt A B, ad B C, ita est G E, ad E F: Sed vt A B, ad B C, ita ponitur D E, ad E F. l Igitur vt D E, ad E F, ita est G E, ad eandem E F; m atque idcirco D E, G E, æquales erunt. Itaque cum latera D E, E F æqualia sint lateribus G E, E F, & anguli ipsis contenti æquales quoque;

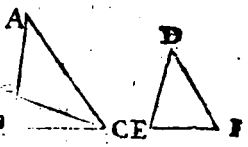
k 4 *sex.*
l 11. *quinti.*
m 9. *quinti.*

{nam

(nam angulo B, cui factus est æqualis angulus F E G, æqualis est positus angulus D E F, propterea quæ æquales ad inuicem erunt anguli D E F, G E F) a erunt reliqui anguli D, E F D, reliquis anguli G, E F G, æquales. Cum ergo angulus G, sit æqualis angulo A, & angulus E F G, angulo C; erunt etiam anguli A, C, æquales anguli D, E F D, & ob id æquiangula erunt triangula A B C, D E F, quod est propositum. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod erat demonstrandum. a 4. *pri.*

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum verò simul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.



SIT angulus A, trianguli A B C, æqualis angulo D, trianguli D E F, & latera A C, C B, circa angulum A C B, proportionalia lateribus D F, F E, circa angulum F, hoc est, sit vt A C, ad C B; ita D F, ad F E, hac tamen lege, vt quilibet reliquorum angulorum B, & E, sit vel minor recto, vel non minor. Dico æquiangula esse triangula, angulos scilicet A C B, & F, circa quos sunt latera proportionalia, & angulos B, & E, æquales esse. Sit enim primum tam B, quam E, recto minor: Quo posito, si anguli A C B, & F, non sunt æquales, sit A C B, maior, quam F: fiatque ipsi F, æqualis A C G. Cum igitur, & angulus A, angulo D, ponatur æqualis, a erit & reliquus A G C; reliquo E, æqualis; ideoque triangula A G C, D E F, æquiangula erunt. Quare b vt A C, ad C G, ita erit D F, ad F E: Sed vt D F, ad F E, ita ponitur A C, ad C B. c Vt igitur A C, ad C G, ita erit eadem A C, ad C B, d ac propterea æquales erunt C G, C B, e & anguli C B G, C G B, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & C G B, minor recto, ideoq; ei deinceps A G C, recto maior; f cum A G C, C G B, sint duobus rectis æquales: Est autem ostensus angulus A G C, angulo E, æqualis. Maior igitur recto est quoque angulus E: Sed positus est etiam recto minor. Quod est absurdum. a 32. *pri.* b 4. *sex.* c 11. *quinti.* d 9. *quinti.* e 5. *pri.* f 13. *pri.*

SIT deinde tam B, angulus, quam E, recto non minor; eritq; vt prius, angulus B, angulo C G B, æqualis, ideoque & C G B, recto non minor erit; ac propterea anguli C B G, C G B, in triangulo B C G, non minores erunt duobus rectis, sed vel maiores, vel

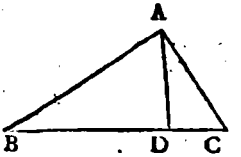
a 17. pri mi. æquales duobus rectis. quod eſt abſurdum. *a* Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales ſunt anguli A C B, & F, ſed
b 32 pri mi. æquales, atq; *b* idcirco reliqui etiam anguli B, & E, æquales erunt. quod eſt propoſitum. Si duo itaque triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

ADDIDIT Euclides, Vtrumque angulum reliquorum B, & E, debere eſſe Vel minorem recto, Vel non minorem. Nam alias, manente tota hypotheſi, non ſequeretur, triangula eſſe aquiangula. Si enim in eodem triangulo A B C, ſit C G, æqualis ipſi C B, (quod fieri poteſt,
c 19. pri mi. *quando angulus B, acutus eſt, & maior angulo A. Sic enim centro C, latere C A, latere C B, maius. Si igitur ex C, ad interuallum C B, circulus deſcribatur, ſecabit is rectam A B, priuſquam rectam A C, quæ longior eſt, quam C B, ſecet. Secabit autem ille circulus neceſſario rectam A B, propterea quod ob acutum angulum B, recta A B, intra eum circulum cadit: quippe cum infra contingentem lineam ducatur, quæ ad B, angulum rectum conſtituit cum C B, vt patet ex propoſ. 16. lib. 3.) habebunt duo triangula A B C, A G C, vnum angulum vni angulo æqualem, imò angulum A, commmunem; & circum alios an-*
d 7. quinti. *gulos A C B, A C G, latera proportionalia, hoc eſt, d vt A C, ad C B, ita erit eadem A C, ad C G, cum æquales ponantur recta C B, C G, & tamen non ſunt illo modo aquiangula triangula A B C, A G C, vt*
e 5. pri. *conſtat. Quod ideo euenit, quia non vterq; angulorum A B C, A G C,*
f 17. Vel 32. pri. *minor eſt recto, Vel non minor. Imò A B C, eſt quidem recto minor, A G C, verò recto maior. Cum enim C G, C B, latera æqualia ſint,*
g 13. pri mi. *e & ideo anguli C B G, C G B, æquales; f erit vterque eorum recto minor, g ac propterea A G C, recto maior.*

viij. ## THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt.



IN triangulo A B C, angulus B A C, ſit rectus, à quo ad baſin perpendicularis agatur A D. Dico triangula A D B, A D C, ſimilia eſſe & toti triangulo A B C, & inter ſe. Cum enim in trian-
h 32. pri mi. gulis A B C, D B A, anguli B A C, & A D B, ſint recti, & angulus B, commu-
i 4. ſex. nis; *h* erunt & reliqui anguli A C B, & D A B, æquales. Æquian-gulum eſt igitur triangulum D B A, triangulo A B C, *i* ac propterea habe-

habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, &c. hoc est, erit vt C B, ad B A, ita B A, ad B D; & vt B A, ad A C, ita B D, ad D A; & vt B C, ad C A; ita B A, ad A D. Ita enim latera homologa æqualibus angulis opponuntur, vt vult propos. 4. huius lib. Quare simile est triangulum A D B, toti triangulo A B C. Eodem modo ostendetur triangulum A D C, simile eidem triangulo A B C. Nam anguli B A C, & A D C, sunt recti, & angulus C, communis [a] ac propterea reliqui anguli A B C, & CAD, æquales. Quare [b] vt B C, ad C A, ita est C A, ad C D; & vt C A, ad A B, ita C D, ad D A; & vt C B, ad B A, ita C A, ad A D. *Sic* enim opponuntur quoque homologa latera angulis æqualibus, ex præscripto propos. 4. huius lib. Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangula A D B, & A D C, cùm anguli A D B, A D C, sint recti, & anguli A B D, C A D, ostensi æquales, nec non anguli B A D, A C D; Atq; idcirco fit [c] vt B D, ad D A, ita D A, ad D C; & vt D A, ad A B, ita D C, ad C A; & vt A B, ad B D, ita C A, ad A D. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 32. primi.
[b] 4. sexti.
[c] 4. sexti.

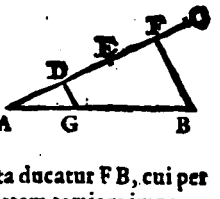
COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basin demittitur, esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta: Item vtrumlibet laterum angulum rectum ambientium, medium proportionale inter totam basin, & illud segmentum basis, quod ei lateri adiacet.

OSTENSVM est enim, esse vt B D, ad D A, ita D A, ad D C; ac propterea D A, esse mediam proportionalem inter B D, & D C; Item esse vt C B, ad B A, ita B A, ad B D: & idcirco B A, mediam esse proportionalem inter C B, & B D: Denique esse vt B C, ad C A, ita C A, ad C D; ideoque C A, esse proportionalem mediam inter B C, & C D. Quod est propositum.

PROBL. 1. PROPOS. 9. ix.

A DATA recta linea imperatam partem auferre.



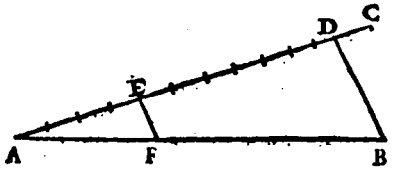
IMPERETVR, vt ex linea A B, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta A C, vtcunque faciens angulum C A B; & ex A C, abscindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda est ex A B, vt in proposito exemplo tres A D, D E, E F. Deinde ex F, ad B, recta ducatur F B, cui per D, parallela agatur D G. Dico A G, esse partem tertiam imperatam rectæ A B. Nam cùm in triangulo A B F, lateri F B, parallela sit recta D G; [d] erit vt F D, ad D A, ita B G, ad G A, [e] Componendo igitur, vt F A, ad D A, ita B A, erit ad G A: Sed F A, ipsius A D, est tripla, ex constructione. Igitur & B A, ipsius A G, erit tripla;

[d] 2. sexti.
[e] 18. quinti.

pla; ideoque A G, tertia pars erit ipsius A B, quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

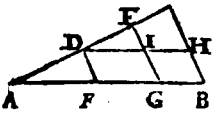
QVOD si ex A B, auferenda sit pars non aliquota, sed quæ plures aliquotas non efficientes vnam complectatur, nimirum quæ contineat quatuor vndecimas ipsius A B, sumenda erunt ex A C, vndecim partes æquales vsque ad D, punctum, ex quo ad B recta ducatur D B; *& huic parallela* E F, *ex* E, *termino quatuor partium. Nam* A F, *erit pars imperata. Erit enim rursus vt* D A, *ad* A E, *ita* B A, *ad* A F. *Quare, & componendo vt* A E, *ad* A D, *ita* A F, *ad* A B: *Est autem* A E, *pars continens quatuor vndecimas ipsius* A D, *ex constructione. Igitur &* A F, *eadem pars erit rectæ* A B. *Quod est propositum. Non aliter detrahetur ex* A B, *pars complectens quotcunque partes ipsius aliquotas non facientes vnam.*



a ij.

PROBL. 2. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.



SIT recta A B, secanda similiter, vt secta est recta A C, in D, & E, hoc est, in partes, quæ sint partibus A D, D E, E C, proportionales. Coniungantur datæ duæ lineæ ad A, facientes angulum quemcunque B A C, & connectatur recta B C. Deinde ex D, E, agantur D F, E G, parallelæ ipsi B C. Dico rectam A B, similiter esse sectam in F, & G, vt est secta A C, in D, & E. Nam

a 2. sexti. vt A D, ad D E, ita est A F, ad F G. Proportionales ergo sunt partes A F, F G, partibus A D, D E. Quod si ducatur D H, ipsi F B, pa-

b 2. sexti. rallela, secans E G, in I; b erit rursus, vt D E, ad E C, ita D I, ad I H, hoc est, ita F G, ad G B; c quòd F G, ipsi D I, & G B, ipsi I H,

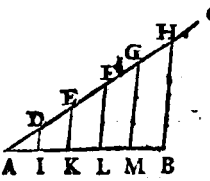
c 34. primi. æqualis sit. Quare proportionales quoq; erunt partes F G, G B, partibus D E, E C. Eademque ratio est de pluribus partibus, si ex E, & C, ipsi A B, parallelæ agantur, &c. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, vt data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

EX hoc problemate colligi potest facilis admodum via, ac ratio dividendi lineam rectam datam in partes quotcunque æquales: id,

quod

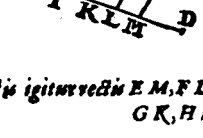
quod nos ad propoſ. 10. lib. 1. facturos recepimus, & alia iam via idem ad propoſ. 40. lib 1. demonſtrauimus. Sit enim data recta AB, diuidenda in quinq; partes æquales. Ducta recta AC, faciente cum AB, quemcunque angulum CAB, ſumantur ex ea quinque partes æquales AD, DE, EF, FG, GH. Quia igitur linea recta AH, & cum q; eſt diuiſa, ſi ex H ad B, ducatur recta HB, & huic ex punctis D, E, F, G, parallelæ agantur DI, EK, FL, GM; erit AB, ſimiliter diuiſa, & AH, & conſtat ex demonſtratione huius problematis. Cùm igitur AH, ſit diuiſa in quinque partes æquales, erit & AB, in totidem æquales partes diuiſa. Haud aliter in plures partes æquales diuidetur eadem recta AB.

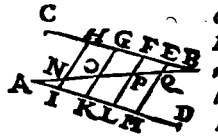


HVIC rationi diuidenda linea recta in quotcunque partes æquales, adiungi poſſunt alia non inuncunda, & propoſ. 10. lib. 1. ſæpius polliciti, atque ad propoſ. 40. lib. 1. demonſtrauimus. Sit enim rurſus data linea recta AB, diuidenda in quinq; partes æquales. Ducatur ex B, recta BC, & cum q; faciens angulum cum AB; Deinde ex aſſumpto puncto D, ſiue ſupra B, ſiue infra, agatur DE, parallela ipſi AB, ex qua abſcindantur quinque æquales partes DF, FG, GH, HI, IE, ea lege tamen, & ſi D, eſt ſupra B, recta DE, ex quinq; partibus æqualibus conſtans, minor ſit, quam AB, maior verò, ſi D, exiſtit infra B. Poſtremò ex A, per E, recta ducatur AC, occurrens ipſi BC, in G, puncto, à quo per puncta F, G, H, I, recta ducantur CK, CL, CM, CN, quæ dico diuidere rectam AB, in quinq; partes æquales. Cùm enim DE, ſit parallela ipſi AB, diuidentur EH, & AM, in triangulo CAM, proportionaliter, ex ſcholio propoſ. 4. huius lib Cùm ergo EM, ſecta ſit bifariam in I, ſecta quoq; erit AM, bifariam in N. Eadem ratione recta NL, in triangulo CNL; & recta MK, in triangulo CMK; & recta LB, in triangulo CLB, ſecta erit bifariã. Eſt ergo AN, ipſi NM; & NM, ipſi ML; & ML, ipſi LK; & LK, ipſi KB, æqualis; ac proinde AB, ſecta erit in quinq; partes æquales. Quod eſt propoſitũ.



ALITER. Ab extremis punctis A, & B, educantur duæ rectæ BC, AD, inter ſe parallelæ; hoc eſt, conſtituentes angulos AB, æquales: Et ex BC, abſcindantur quatuor partes æquales BF, EF, FG, GH, & ſint tot partes, & una minus, in quot eſt linea diuidenda; His autem ex AD, totidem æquales reſecentur Al, lK, KL, LM. Ductis igitur rectis EM, FL, GK, HI,

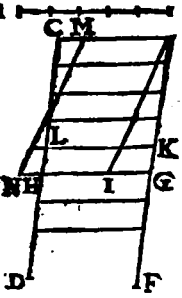




GK, HI, secantibus rectam AB, in N, O, P, Q, dico ipsam AB, sectam esse in quinque partes aequales. Cùm enim aequales sint, & parallela GH, IK, a *erunt & HI, GK, parallela; Eademque ratione parallela erunt GK, FL, EM. Quare cùm AM, secta sit in quatuor aequales partes, erit & AQ, similiter in quatuor partes aequales diuisa, & constat ex demonstratione huius* 10. *propos. Eadem ratione diuisa erit & BN, in quatuor partes aequales, eò quòd BH, in totidem est partes aequales diuisa. Quare cùm tam AN, quàm BQ, aequalis sit singulis partibus NO, OP, PQ; erunt omnes quinque partes AN, NO, OP, PQ, QB, inter se aequales. Quod est propositum.*

a 33. primi.

ALITER. Praparetur prius instrumentum huic rei accommodatum, in hunc modum: Ductis duabus rectis inter se parallelis & circumq; CD, EF, ex & transq; abscindantur partes inter se aequales quotcunq;, saltem tot, in quot partes diuidenda proponitur linea, & bina puncta correspondentia lineis rectis iungantur. Deinde beneficio circini capiatur longitudo rectae AB, diuidendae, eaq; ex aliquo puncto lineae CF, & ex E, transferatur in instrumentum ad punctum I, illum lineam transuersa, qua tot spatia terminat, in quot partes linea proponitur diuidenda, qualis in exemplo est recta GH; ea enim includit quinq; spatia. Postremò ex E, ad I, recta ducatur EI, quam dico diuisam esse in quinque aequales partes. Cùm enim GK, HL, aequales sint, & parallela; b *erunt quoq; GH, KL, parallela. Eademq; modo omnes linea inter rectas CD, EF, inter se parallela ostendentur. Quare, & ex demonstratione huius* 10. *propos. liquet, quemadmodùm EG, diuisa est in quinque partes aequales, ita similiter in totidem diuisa erit EI. Nam si punctum E, sumptum non fuerit idem quod E, vel C, producenda est IE, donec cum FE, vel DC, coeat. Tunc enim & in hac* 10. *propos. probatum est, erunt recta EI, EG, similiter diuisa. Quod si fortè IE, nec cum FE, nec cum DC, concurrat, sed utrique sit parallela,* c *erunt singula partes rectae EI, singulis partibus rectae EG, aequales, ob parallelogramma inter parallelas inclusa. Cùm ergo omnes partes rectae EG, sint aequales, erunt quoque omnes partes rectae EI, aequales. Sigitur beneficio circini singula partes linea EI, transferantur in rectam propositam AB, ipsi EI, aequalem, diuisa erit & AB, in quinque partes aequales Quod est propositum.*



b 33. primi.

c 34. primi.

EST autem nonnunquam necesse lineas parallelas extra instrumentum

mentum producere. Vt si eadem linea transferatur ab M, ℈ ad N. punctum lineæ G H, protractæ, erit quoque M N, diuisa in quinque partes æquales. Vt constat, si ducatur ex M, ipsi E G, parallela, ℈ ad rectam G H: Vel si N M, producatur, donec cum G E, producta conueniat. Quod si linea diuidenda fuerit admodum breuis, accipienda erunt partes parallelarum C D, E F, minores, &c. Si verò linea sit longiuscula, & diuidenda in paucas partes æquales; transferri poterit in duplo plura spatia, vel in triplo plura, vel quadruplo plura, &c. Nam duo, vel tria, vel quatuor spatia, &c. dabunt vnam partem. Vt si diuidenda sit in tres partes, transferatur ⅔ in sex spatia, dabunt duo spatia vnam partem: si transferatur in quindecim spatia, dabunt quinque spatia vnam partem, propterea quòd quinque spatia constituunt tertiam partem quindecim spatiorum. Sic si linea diuidenda in duas æquales partes transferatur in octodecim spatia, dabunt nouem spatia vnam partem; quippe cùm nouem spatia constituant semissem octodecim spatiorum: & sic de cæteris.

EODEM modo, ad similitudinem huius propositionis, licebit nobis facili negotio sequens problema, quod non raro à Geometris adhibetur, demonstrare quod est eiusmodi.

DATAM rectam secare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunque datam.

SIT secanda recta A B, in duas partes, quæ habeant proportionem inter se, quam recta C, & D. Ex A, ducatur linea A E, faciens angulum A, quemcunque, ex qua abscindatur recta A F, ipsi C, & F G, ipsi D, æqualis: Ducta deinde G B, ducatur ei per F, parallela F H. Dico A B, sectam esse in H, secundum proportionem C, ad D. Hoc autem manifestum est, à cùm sit, vt A F, ad F G, atque adeò, vt C, ad D, ita A H, ad H B.



a 2. sexti.

POSTREMO inseremus huic loco theorema quoddam ad linearum etiam sectiones pertinens, desumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de ijs, quæ vehuntur in aqua. Ni. mirum.

SI duæ rectæ lineæ secentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ sectiones in eadem proportione cum quibuslibet segmentis duobus.

SECENTVR rectæ A B, C D, proportionaliter in binis punctis E, F, & G, H, ita vt sit A E, ad E B, sicut C G, ad G D; Item A F, ad F B, vt C H, ad H D. Dico sectiones intermedias E F, G H, proportionales quoque esse cum duobus segmentis F B, H D; vel cum

duobus



duobus AE, CG, hoc est, esse FB, ad EF, & HD, ad GH. Item AE, ad EF, & CG, ad GH. Cùm enim sit, & AE, ad EB, ita CG, ad GD, erit componendo, & AB, ad EB, ita CD, ad GD. Item cùm sit, & AF, ad FB, ita CH, ad HD, erit componendo, & AB, ad FB, ita GD, ad HD, & conuertendo, & FB, ad AB, ita HD, ad CD. Itaq; cùm sit, & FB, ad AB, ita HD, ad CD; Et & AB, ad EB, ita CD, ad GD. a Erit ex æquo, & FB, ad EB, ita HD, ad GD. Et conuertendo, & EB, ad FB, ita GD, ad HD: Et per conuersionem rationis, & EB, ad EF, ita GD, ad GH, & diuidendo, & FB, ad EF, ita HD, ad GH. Quod est primum.

a 22. quinti.

RVRSVS, quia est, & AE, ad EB, ita CD, ad GD Et & EB, ad EF, ita GD, ad GH, & ostensum est; erit ex æquo, & AE, ad EF, ita CG, ad GH. Quod est secundum.

BREVIVS idem demonstrabitur hoc modo. Conueniant duo puncta A, & C, in vnum, & fiat angulus BCD, vel BAD, tangaturq; recta DB, HF, GE. Quia igitur ponitur, & AE, ad EB, ita CG, ad GD, b Parallela erit GE, ipsi DB Rursus, cùm ponatur, & AF, ad FB, ita CH, ad HD; c Parallela erit quoq; HF, ipsi DB. d Quare & GE, HF, inter se parallelæ erunt: Ac propterea e erit, & AE, ad EF, ita CG, ad GH. Quod est secundum.

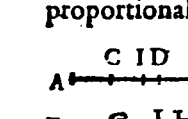
b 2. sexti.
c 2. sexti.
d 30. primi.
e 2. sexti.

EODEM modo, si puncta extrema B, D, conueniant in vnum, &c. ostendemus esse, & BF, ad EF, ita HD, ad GH, & conuertendo, & EF, ad FB, ita GH, ad HD. Quod est primum.

IDEM verum est, si magnitudines AB, CD, sint diuersæ, & g. AB, superficies, & CD, linea, vel corpus, & ex priori demonstratione constat.

SED neque omittendum videtur hoc loco theorema quod sequitur.

SI linea recta sit secta in quotcunque partes Arithmeticè proportionales, & alia recta secetur in totidem partes, quæ easdem inter se, quæ illæ proportiones habeant; erunt quoque partes huius lineæ Arithmeticè proportionales.

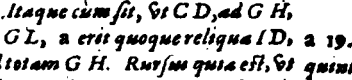


RECTA linea AB, secta sit in partes AC, CD, DB, Arithmeticè proportionales, hoc est habentes eundem excessum: e Secetur autem recta EF in partes EG, GH, HF, illis proportionales. Dico has partes eundem quoq; habere excessum, hoc est, Arithmeticè esse proportionales: Sit enim CI, ipsi

f 10. sexti.

CI, ipsi AC, & DK, ipsi CD, aequalis: vt ID, sit excessus inter CD, AC; & KB, excessus inter DB, CD, atq; adeò ipsi ID, aequalis. Sit quoque GL, ipsi EG, & HM, ipsi GH, aequalis; vt LH, excessus sit inter GH, EG, & MF, excessus inter HF, GH. Probandum est, excessus LH, MF, aequales esse. Quoniam igitur est, vt AC, ad CD, ita EG, ad GH, erit permutando quoque vt AC, ad EG, ita CD, ad GH. Item quoniam est, vt CD, ad DB, ita GH, ad HF, erit quoque permutando, vt CD, ad GH, ita DB, ad HF. Atque ita si plures fuerint partes, habebunt semper partes lineae AB, ad partes lineae EF, singula ad singulas, eandem proportionem, quamuis partes vnius lineae non sint continuè proportionales. Itaque cùm sit, vt CD, ad GH, ita AC, ad EG, hoc est, ita CI, ad GL, a erit quoque reliqua ID, ad reliquam LH, vt tota CD, ad totam GH. Rursus quia est, vt DB, ad HF, ita CD, ad GH, hoc est, ita DK, ad HM, b erit quoque reliqua KB, ad reliquam MF, vt tota DB, ad totam HF, vel vt ablata DK, ad ablatam HM, hoc est, vt CD, ad GH. Erat autem quoque ID, ad LH, vt CD, ad GH. c Igitur erit vt ID, ad LH, ita KB, ad MF. Est autem ID, ipsi KB, aequalis. d Igitur & LH, ipsi MF, aequalis erit: atque idcirco EG, GH, HF, Arithmeticè proportionales erunt, cùm excessus habeant aequales. Quod est propositum.

a 19. quinti.
b 19. quintì.
c 11. quinti.
d 14. quinti.



HOC theorema nullo modo conuerti potest. Nõ enim sequitur, si duæ lineæ sectæ sint in partes Arithmeticè proportionales, partes vnius habere easdem proportiones, quas partes alterius habent. Nam si linea EF, secunda pars statuatur GM, ita vt excessus inter EG, GM, sit LM. Deinde ipsi GM, posit M, sumatur proportio ipsi GM, aequalis, eique adijciatur idem excessus LM, fient tres partes Arithmeticè proportionales in linea EF, & tamen non habent easdem proportiones inter se, quas habent partes lineæ AB: c *quippe cùm minor sit proportio EG, ad GM, quàm EG, ad GH, hoc est, quàm AB, ad CD.*

c 8. quinti.

INFERTVR hinc aliud hoc theorema.

SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem, erit quoque excessus priorum ad excessum posteriorum, vt priorum vna ad vnam posteriorum.

VT in superiori figura, quoniam erat, vt AC, ad EG, hoc est, vt CI, ad GL, ita CD, ad GH; ostensum est, ita quoque esse excessum ID, ad excessum LH, vt CD, ad GH, Itaque si AC, CD, sint dupla, aut dimidiata partes ipsarum EG, GH, erit quoq; ID, dupla, vel pars dimidiata ipsius LH, &c.

EX hoc quoque hoc problema absolutum.

LINEAM

LINEAM rectam datam in quotuis partes Arithmeticè proportionales secare.

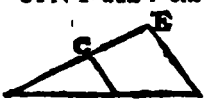
SIT enim recta EF; secanda in tres partes Arithmeticè proportionales. Sumantur tres rectæ AC, CD, DB, quomodocunque Arithmeticè proportionales componentes rectam lineam AB. Si igitur
a 10. sexti. *data recta EF, a secetur similiter in G, H, vt AB, in CD, secta erit, erunt partes EG, GH, HF, Arithmeticè proportionales, vt demonstratum est.*

HÆC omnia vera etiam sunt, in numeris, & in quibuscunque alijs magnitudinibus, cùm semper eadem sit demonstratio. Atque ex his desumpsimus in 10. regula proportionalitatis Arithmeticæ postremam rationem distribuendi datum numerum in quotuis partes Arithmeticè proportionales. Nam per eam diuiditur datus numerus in partes, quæ easdem habent proportiones, quas assumpti numeri proportionalitatis Arithmeticæ, cùm semper fiat vt summa assumptorum numerorum, ad datum numerum, ita singuli numeri assumpti ad alium. Hinc enim fit, numeros assumptos cum partibus datis numeri inuentis eandem habere proportionem. Quare vt hic ostensum est, partes inuentæ sunt Arithmeticè proportionales.

2. PROBL. 3. PROPOS. 11.

DVABVS datis rectis lineis tertiam proportionalem adinuenire.

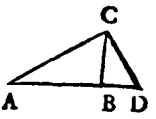
SINT duæ rectæ AB, AC, ita dispositæ, vt efficiant angulum A, quemcunque, vtcunque; inuenienda illis tertia proportionalis, sicut quidem AB, ad AC, ita AC, ad tertiam. Producatur AB, quam volumus esse antecedentem, & capiatur BD, æqualis ipsi AC, quæ consequens esse debet, siue media. Deinde ducta recta BC, agatur illi ex D, parallela DE, occurrens ipsi AC, productæ in E. Dico CE, esse tertiam proportionalem, hoc est, esse vt AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cùm enim in triangulo ADE, lateri DE, parallela



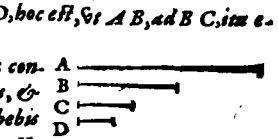
b 2. sexti. sit recta BC; *b* erit vt AB, ad BD, ita AC, ad CE. *c* Sed vt AB,
c 7. quinti. ad BD, ita eadem AB, ad AC, æqualem ipsi BD. Vt igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE: quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

ALITER idem demonstrabimus, hoc modo. Duæ rectæ datæ AB, BC, constituantur ad angulum rectum ABC, & coniungatur recta AC. Producta autem AB, antecedente, ducatur ex C, ad AC, per-

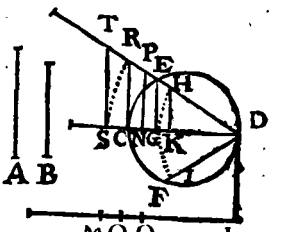


AC, perpendicularis CD, occurrens ipsi AB, producta in D. Dico BD, esse tertiam proportionalem. Cùm enim in triangulo ACD, angulus ACD, sit rectus, & ab eo ad basin AD, deducta perpendicularis CB; erit per coroll. propos. 8 huius lib. BC, media proportionalis inter AB, & BD, hoc est, ut AB, ad BC, ita erit BC, ad BD. Quod est propositum.



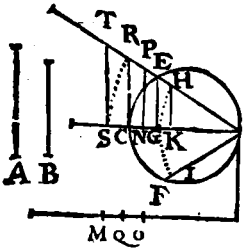
INVENTA autem tertia linea continuè proportionales, si primam omiseris, & alijs duabus tertiam inueneris, habebis quatuor lineas continuè proportionales. Vt si lineis A, & B, adinuenatur tertia proportionalis C, & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor linea A, B, C, D, continuè proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis, sexta, septima, octaua, & sic in infinitum.

EXPEDITIVS reperiemus quotlibet lineas continuè proportionales in data proportione, hoc modo. Sit primùm data proportio linea A, maioris ad minorem B. Circa rectã CD, ipsi A, æqualem describatur circulus CEDF, in quo applicentur DE, DF, ipsi B, æquales. Applicata autem regulæ punctis E, F, ducatur recta EG, quæ ad CD, perpẽdicularis erit. Cùm enim recta DC, per centrum transiens secet arcum ECF, bifariam, (ablatis enim æqualibus arcubus DE, DF, ex semicirculis æqualibus DEC, DFG, reliqui arcus CE, CF, æquales erunt) secabit eadem & rectam ductam EF, bifariam, per ea, quæ in scholio propos. 27. lib. 3. ostendimus. a Igitur & ad angulos rectos. Et quoniam, si duceretur recta EC, b angulus ad E, in semicirculo rectus esset; erit ex coroll. propos. 8. huius lib. DE, media proportionalis inter CD, DG: ac proinde DG, erit tertia proportionalis ipsis CD, DE, hoc est, datis duabus A, & B. Quòd si ex D, per G, arcus describatur secans rectas DE, DF, in H, I; applicatæq; regulæ ad puncta H, I, ducatur recta HK; erit DK, quarta proportionalis. Nam propter angulos HDG, IDG, (qui c ob æquales arcus EC, FC, æquales d sunt) arcus HG, IG, æquales erunt; ac propterea ex scholio propos. 27. lib. 3. recta ducta HI, bifariam secabitur in K; e ideoque & ad angulos rectos. f Parallela ergo sunt EG; HK. g Vt igitur recta ED, ad DG, ita erit DH, hoc est, DG, ad DK. Sunt ergo quatuor linea CD, DE, DG, DK, continuè proportionales. Quod si ex D, per K, alius arcus describatur secans rectas DE, DF, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atq; ita in infinitum.



a 3. tertij.
b 31. tertij.
c 27. tertij.
d 26. tertij.
e 3. tertij.
f 28. primi.
g 2. vel 4. sexti.

DEINDE sit data proportio linea B, minoris, ad maiorem A. Ductis duabus rectis D C, L M, ad D L, perpendicularibus, abscindantur recta D N, L O, minori B, aequales, applicatoq; regula ad
a 29. primi. *puncta O, N, ducatur recta N P, a qua ad D C, perpendicularis erit,*
b 33. primi. *b cùm sit parallela ipsi D L. Sumpta deinde recta D G, aequalis ipsi A, maiori describatur ex D, per G, arcus secans rectã N P, in P extendaturque ex D, per P, recta D P T, eritq; D P, ipsi D C, hoc est, ipsi A, aequalis. Abscissa quoque L Q, ipsi D C, aequalis, applicatoq; ad puncta Q C, regula, ducatur recta C R, quae eadem ratione ad D C,*
c 2. vel 4. sexti. *perpendicularis erit, & ipsi N P, parallela. c Et quoniam est, vt N D, ad D P, hoc est, vt B, ad A, (quod N D, D P, ipsis B, A, acceptae sint aequales) ita C D, ad D R, hoc est, ita D P, ad D R; erunt tres rectae N D, D P, D R, continuè proportionales; ideoque D R, ipsis B, A, tertia proportionalis erit. Quod si ex D, per R, arcus describatur secans D C, in S, & recta D S, aequalis auferatur L M, applicatoq; regula ad puncta M, S, recta ducatur S T, erit D T, quarta proportionalis. Nam eadem ratione erit S T, ipsi C R, parallela, & ad D C, per-*
d 2. vel 4. sexti. *pendicularis. d Quare erit, vt C D, ad D R, hoc est, vt A, ad D R, ita S D, id est, D R, ad D T. Sunt ergo quatuor linea N D, D P, D R, D T, continuè proportionales. Quod si ex D, per T, alius arcus describatur secans rectam D C, protractam, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atq; ita in infinitum.*



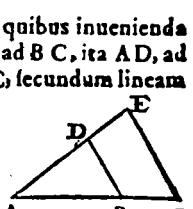
EX his sine magno labore inter duas rectas datas reperiemus duas medias proportionales, non quidem Geometricè omnino, sed quasi attentando, & praxin ipsarum iterum atq; iterum repetendo, donec id, quod quarimus, assequamur. Vt si inter C D, D K, inuenienda sint duae mediae proportionales, descripto circa maiorem C D, circulo C E D F, erigemus ex K, ad C D perpendicularem K H, ducemusq; D H, ea lege, vt ex puncto E, (vbi D H, circumferentiae occurrit) perpendicularis ad D C, demissa E G, auferat rectam D G, rectae D H, aequalem, hoc est, vt arcus ex D, per H, descriptus transeat per punctum G. Hoc enim facto, erunt D E, D H inter C D, D K, mediae proportionales. Nam vt ostendimus, est vt C D, ad D E, ita D E, ad D G, ex coroll. propos. 8.
e 2. vel huius lib. *e Et vt D E, ad D G, ita D H, hoc est, D G, ad D K. Sunt*
4. sexti. *ergo quatuor rectae C D, D E, D H, D K, continuè proportionales, ac proinde D E, D H, inter C D, D K, mediae proportionales sunt. Quod si rectae D H, D G, comperiantur non esse aequales, si quidem D H, fuerit minor, eleuanda erit D H, magis; si verò maior, magis deprimenda, donec deprehendantur aequales D H, D G.*

PROBL.

PROBL. 4. PROPOS. 12.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

SINT tres lineæ rectæ A B, B C, A D, quibus inuenienda sit quarta proportionalis; sicut quidē A B, ad B C, ita A D, ad quartam. Disponantur primæ duæ A B, B C, secundum lineam rectam, quæ sit A C: Tertia verò A D, cum prima A B, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur B D, cui per C, parallela ducatur C E, occurrens rectæ A D, productæ, in E, puncto. Dico D E, esse quartam proportionalem. Cùm enim in triangulo A C E, lateri C E, acta sit parallela B D; a erit vt A B, ad B C, ita A D, ad D E. Quare D E, quarta est proportionalis; ac propterea tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat.



a 2. sexti.

SCHOLIVM.

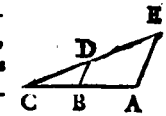
HINC facilè elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri possint. Si enim data sint duæ rectæ lineæ A, B, in quacunque proportione, si tertia qualibet accipiatur C, & ei quartæ proportionalis inueniatur D, vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur sex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarum bina semper eandem habeant proportionem.



OSTENDEMVS etiam cum Pappo sequens problema. Videlicet.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam.

SINT tres rectæ A B, B C, C D, oporteatq; inuenire quartam, quæ ad C D, tertiam sit, vt A B, prima ad B C, secundam. Disponantur prima duæ A B, B C, in directum, vt faciant rectam A C: Tertia verò C D, cum secunda B C, faciat angulum C, quemcunq;. Deinde ex B, ad D, recta ducatur B D, cui per A, parallela ducatur A E, occurrens rectæ C D, productæ in E. Dico E D, esse quartam, hoc est, esse E D, ad D C, tertiam, vt est A B, prima ad B C, secundam. Hoc autem manifestum est, b *cùm A C, E C, proportionaliter secentur in B, & D, punctis.*



b 2. sexti.

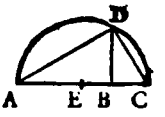
ALITER. Ex secunda C B, fiat prima, & ex prima A B, fiat secunda, c *atque inueniatur tribus C B, B A, C D, quarta proportionalis D E: Vt sit secunda C B, ad primā B A, vt tertia C D, ad quar-*

c 12. sexti.

tam D E. Erit enim & conuertendo A B, prima ad B C, ſecundam, & D E, quarta ad C D, tertiam.

ix. PROBL. 5. PROPOS. 13.

DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.



SINT duæ rectæ A B, B C, quibus media inuenienda eſt proportionalis, diſpoſitæ ſecundum lineam rectam A C. Diuiſa A C, bifariam in E, ex E, centro, & interuallo E A, vel E C, ſemicirculus deſcribatur A D C: Deinde ex B, ad A C, perpendicularis educatur B D, ad circumferentiam vſque. Dico B D, eſſe mediam proportionalem inter A B, & B C. Ductis enim rectis A D, C D; a erit angulus A D C, rectus in ſemicirculo. Cùm igitur ex angulo recto A D C, trianguli rectanguli A D C, deducta ſit ad baſin A C, perpendicularis D B; erit per corollarium propoſ. 8. huius lib. B D, media proportionalis inter A B, & B C. Duabus ergo datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenimus Quod erat faciendum.

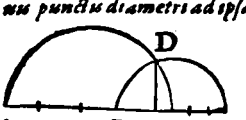
a 31. tertij.

SCHOLIVM.



PERSPICVVM hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipſi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam uſque, mediam eſſe proportionalem inter duo diametri ſegmenta, quæ à perpendiculari facta ſunt. Detur enim ſemicirculus A B C, & ex puncto D, diametri A C, ducatur ad circumferentiam recta D B, perpendicularis ipſi A C. Dico D B, eſſe proportionalem mediam inter A D, & D C: Id quod liquidò conſtat ex demonſtratione huius problematis. Si enim ducantur recta A B, C B; b *fiet angulus A B C, rectus. Quare per coroll. propoſ. 8. conſtat propoſitum. Eadem ratione erit perpendicularis E F, media proportionalis inter A E, & E C. Item G H, inter A G, & G C, atq; eodem modo de alijs quibuſcunq; dicendum eſt, quæ ex quibuſuis punctis diametri ad ipſam diametrum perpendiculares ducentur.*

b 31. tertij.



QVANDO minor data linea eſt valde exigua, ſecabit perpendicularis B D, nimis obliquè circumferentiam in D. Quare ut exquiſitius tunc punctum D, inueniatur, multiplicabimus minorem lineam B C, quoties libuerit. V.g. ſumemus B E, ipſius B C, quadruplam, maiorem verò lineam A E, in tot partes æquales ſecabimus, quotuplex eſt B E, ipſius B C: ſitque vna pars B F: ita vt eam-

eandem proportionem habeat AB, ad BF, quam BE, ad BC. Atq; eandem circa EF, circulus describatur secans BD, in D: erit q; BD, media proportionalis inter BF, BE, & in hoc scholio demonstrauimus. Dico eandem esse mediam proportionalem inter AB, BC. Cum enim sit & prima AB, ad secundam BF, ita tertia BE, ad quartam BC; a erit rectangulum sub AB, prima, & BC, quarta, aequale rectangulo sub BF, secunda, & BE, tertia. b Sed hoc aquale est quadrato BD. Igitur & illud. c Quapropter BD, media proportionalis est inter AB, BC. Non autem te moueat, quod citauerimus propos. 16. & 17. huius, quæ nondum sunt demonstrata: quia hæc demonstratio cum sua constructione differri potest post propos. 17. huius, ita & nullum periculum sit petitionis principij, & Philosophi loquuntur.

a 16. sexti.
b 17. sexti.
c 14. sexti.

EX PELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam, (quæ minor non sit, quàm dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.

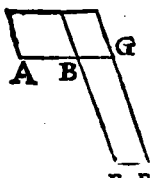


SIT data recta AC, & diuidenda proponatur recta AB, (quæ minor non sit, quàm dupla ipsius AC, sed vel dupla, vel maior) ita vt inter huius segmenta, media proportionalis sit AC. Disponantur recta AB, AC, ad angulum rectum BAC, & diuisa AB, bifariam in D, ex D, centro, interuallo autem DA, vel DB, semicirculus describatur AEB. Deinde per C, ducatur ipsi AB, parallela CE, secans, vel tangens circumferentiam in E, puncto: (Secabit autem necessariò CE, circumferentiam, vel tanget. Nam si minor sit quàm dimidium rectæ AB, hoc est, minor, quàm semidiameter ad angulos rectos erecta ex D, secabit circumferentiam; tanget autem eandem circumferentiam, si aqualis sit dimidio rectæ AB, hoc est, aqualis semidiametro ex D, ad angulos rectos educta. Cum ergo positum sit, AC, non esse maiorem dimidio rectæ AB, secabit necessariò AC, circumferentiam, aut tanget) à quo demittatur ad AB, perpendicularis EF. Dico AC, esse mediam proportionalem inter segmenta AF, FB. Ductis enim rectis AE, BE, erit & iam est demonstratum, ex coroll. propos. 8. huius lib. EF, media proportionalis inter AF, & FB. d Cum igitur EF, aqualis sit ipsi AC, eo quod parallelogrammum sit ACEF; (Est enim CE, ipsi AF, parallela per constructionem, e & AC, ipsi EF, propter angulos rectos CAF, & EFA,) erit & AC, media proportionalis inter AF, & FB. Quod est propositum.

d 37. primi
e 28 primi.

xiij. THEOR. 9. PROPOS. 14.

ÆQVALIVM & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.



SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt AB, & BG, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cùm anguli ABC, EBG, sint æquales, erunt & EB, BC, vna recta linea, vt ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur iam DC, & FG, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia sint parallelogramma DB, BF: *a* erit vt DB, ad BH, ita BF, ad idem BH: Sed vt DB, ad BH, *b* ita est AB, basis ad basin BG, quòd parallelogramma sint eiusdem altitudinis; & similiter vt BF, ad BH, ita est basis EB, ad basin BC. Igitur vt AB, ad BG, ita est EB, ad BC. Quod est propositum.

a 7. *quinti.* *b* *sexti.*

E CONTRARIO sint iam latera circa æquales angulos ABC, EBG, reciproca, hoc est, vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Dico parallelogramma DB, BF, esse æqualia. Facta enim eadem constructione; cùm sit, vt AB, ad BG, ita EB, ad BC: *c* Vt autem AB, ad BG, ita DB, ad BH; & vt EB, ad BC, ita BF, ad idem BH; erit quoque vt DB, ad BH, ita BF, ad idem BH. *d* Atque ideirco æqualia erunt parallelogramma DB, BF. Æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

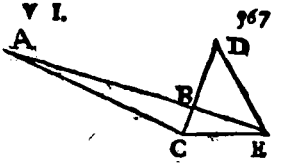
c 1. *sexti.* *d* 9. *quinti.*

xiiij. THEOR. 10. PROPOS. 15.

ÆQVALIVM, & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

SINT duo triangula æqualia ABC, DBE, habentia angulos

los, qui ad B, æquales. Dico latera circa hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt A B, ad B E, ita D B, ad B C. Coniungantur enim tr angula ad angulos æquales, ita vt A B, B E, vnam efficiant lineã rectam. Quo facto, cùm anguli A B C, D B E, sint æquales; erunt & D B, B C, vna recta linea, vt demonstratum est ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta C E, quoniam æqualia sunt triangula A B C, D B E, *a* erit vt A B C, ad B C E, ita D B E, ad idem B C E. Sed vt triangulum A B C, ad triangulum B C E, *b* ita est basis A B, ad basin B E, quòd hæc triangula eiusdem sint altitudinis; & similiter vt D B E, ad B C E, ita est basis D B, ad B C. Quare vt A B, ad B E, ita est D B, ad B C. Quod est propositum.



a 7. *quinti.*
b 1. *sexti.*

IAM verò contrà, sint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc est, vt A B, ad B E, ita D B, ad B C. Dico triangula A B C, D B E, esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cùm sit vt A B, ad B E, ita D B, ad B C; vt autem A B, ad B E, *c* ita triangulum A B C, ad triangulum B C E; & vt D B, ad B C, ita triangulum D B E, ad triangulum idem B C E; Erit vt A B C, ad B C E, ita D B E, ad idem B C E, *d* propterea q; æqualia erunt triangula A B C, D B E. Æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod ostendendum erat.

c 1. *sexti.*
d 9. *quinti.*

THEOR. 11. PROPOS. 16. XV.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

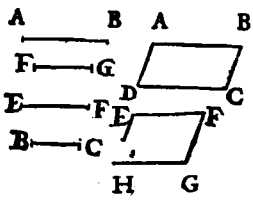
SINT quatuor rectæ proportionales A B, F G, E F, B C; vt quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C: Sitq; rectangulum A B C D, comprehensum sub extremis A B, B C; rectangulum verò E F G H, comprehensum sub medijs E F, F G: Dico rectangula A C, E G, esse æqualia. Cùm enim anguli recti B, & F, sint æquales, & sit vt A B, ad F G, ita E F, ad B C; erũt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca. *e* Quare parallelogramma A C, E G, æqualia erunt. Quod est propositũ.

e 14. *sexti.*

CONTRA verò, sint iam æqualia rectangula A C, E G. Dico quatuor rectas lineas A B, F G, E F, B C, esse proportionales, hoc est, esse vt A B, ad F G, ita E F, ad B C. Cùm enim æqualia sint rectangula A C, E G, habeantq; angulos æquales, nempe rectos B, & F, *f* erunt latera circa hosce angulos reciproca; sicut quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C. Itaq; si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

f 14. *sexti.*

SCHOLIVM.

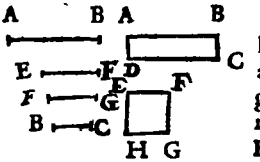


IDEM Verum est, etiamsi parallelogramma AC, EG, non sint rectangula, dummodo sint aquiangula, ita vt anguli dictis rectis lineis comprehensi sint aequales. Velut manifestum est in hac figura. Eadem enim prorsus est demonstratio.

xvj.

THEOR. 12. PROPOS. 17.

SI tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT tres lineæ rectæ AB, EF, & BC, proportionales: vt quidem AB, ad EF, ita EF, ad BC: sitque rectangulum ABCD, contentū sub extremis AB, BC, & quadratum mediæ EF, sit EFGH. Dico æqualia esse rectangulum AC, & quadratū EG. Sumpta enim recta FG, quæ æqualis sit ipsi EF, erunt quatuor lineæ AB, EF, FG, BC, proportionales; vt quidem AB, ad EF, ita FG, ad BC; etitq; quadratū EG, comprehensum sub medijs EF, FG, propter æqualitatem rectarum EF, FG. *a* Quare rectangulum AC, comprehensum sub extremis AB, BC, æquale est quadrato EG, hoc est, rectangulo sub medijs EF, FG, comprehenso. Quod est propositum.

a 16. *sexti.*

SED sint iam æqualia rectangulum AC, & quadratum EG. Dico esse vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Cùm enim æqualia sint rectangula AC, & EG, *b* erit vt AB, ad EF, ita FG, ad BC: *c* Vt autem FG, ad BC, ita est EF, ipsi FG, æqualis ad eandem BC. Quare vt AB, ad EF, ita est EF, ad BC. Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

b 16. *sexti.*

c 7. *quinti.*

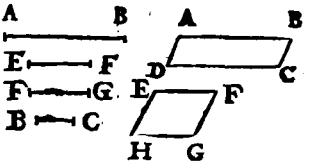
COROLLARIVM.

EX posteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem inter quasuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ AB, BC, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ EF, ostensum fuit, esse vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Quare EF, media est proportionalis inter AB, & BC.

SCHO-

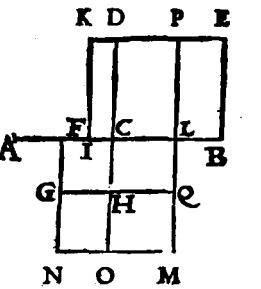
SCHOLIVM.

EADEM omnino consequuntur, etiamsi parallelogramma non sint rectangula, dummodo sint aequiangula, ita vt EG, sit Rhombus, & AC, Rhomboides. Non enim dissimilis erit in his demonstratio, vt figura indicat.



LIBET hoc loco cum Peletario demonstrare problema non inutile ad lineas proportionales spectans: quod est eiusmodi.

SECTA linea recta in duas partes vtcunque, alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continuè proportionales.

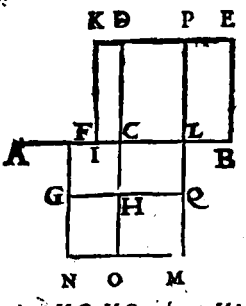


SIT recta AB, diuisa in C, vtcunque, oporteatque partem CB, ita secare in duas alias partes, vt omnes tres partes continuè proportionales sint. Secetur AC, bifariam in F, & FC, iterum bifariam in I, vt CI, quarta pars sit primae partis AC; & ex B, I, erigantur duae perpendiculares BE, IK, primae partis AC, aequales, ducaturque recta EK, ita vt rectangulum IE, comprehensum sit sub AC, primae parte, & recta IB, compositae ex altera parte BC, & ex CI, quartae parte primae partis. Et quoniam AC, diuisa est bifariam in F, eique addita in rectum CB, a erit rectangulum sub AB, BC, vna cum quadrato ex CF, aequale quadrato ex BF: Est autem rectangulum IE, minus rectangulo sub AB, BC, vna cum quadrato ex CF. (Ducta enim CD, ad AB, perpendiculari, erit rectangulum CE, contentum sub AC, CB, minus rectangulo sub AB, BC: At rectangulum CK, quadrato ex CF, aequale, cum vtrumque quarta pars sit quadrati ex AC; rectangulum quidem CK, b quia sic est rectangulum CK, ad quadratum ex AC, hoc est, ad rectangulum sub AC, CD, vt CI, ad CA; ac proinde cum CI, sit quarta pars rectae AC, erit & CK, quarta pars quadrati ex AC; At vero quadratum ex CF, quarta pars est eiusdem quadrati ex AC, ex scholio propos. 4. lib. 2.) Igitur minus quoque erit quadrato ex BF. Si igitur c fiat quadratum rectangulo IE, aequale, erit eius latus minus rectae FB, maius autem quam FC, quippe cum quadratum ex FC, aequale sit ostensum rectangulo CK, ac propterea minus rectangulo IE. Sit ergo latus illud FL. Dico partem CB, ita sectam esse in L, vt tres partes

a 6. secundi.

b 1. sexti.

c 14. secundi.



A C, C L, L B, sint continuè proportionales. Describatur enim ex F L, quadratum F M, rectaq; D C, extendatur ad O, & latus M L, ad P: sumptisq; duabus F G, I Q, ipsi C F, æqualibus, ducatur recta G Q, secans C O, in H. Eritq; C G, quadratum rectæ C F, ob æqualitatem rectarum C F, F G. Et quia ablatis æqualibus F C, F G, ex æqualibus F L, F N, reliqua C L, G N, æquales sunt; a & est C L, ipsi H Q, & G N, ipsi H O, æqualis; æquales quoque erunt H Q, H O; ideoq; H M, quadratum erit rectæ C L. Rursus quia tum rectangulum C Q, comprehenditur sub C L, & C H, sive C F, semisse ipsius A C, quàm rectangulum G O, sub G N, sive C L, & G H, b *sive C F, semisse eiusdem A C, sive C D,* b *erunt duo rectangula C Q, G O, simul æqualia rectangulo C P, comprehenso sub eadem G L, & C D, quæ ipsis C H, G H, simul æqualis est. Itaq; cum rectangulum I E, quadrato F M, æquale sit; & rectangulum C K, quadrato C G; & rectangulum C P, duobus rectangulis C Q, G O, simul: erit reliquum rectangulum L E, comprehensum sub B E, sive A C, & B L, reliquo quadrato H M, æquale. Quocirca, cum datu tribus rectis A C, C L, L B, rectangulum L E, sub extremis A C, B L, comprehensum æquale* c *sit quadrato H M, mediæ C L; erunt ipsa tres lineæ A C, C L, L B, continuè proportionales. Quod erat propositum.*

a 34. primi.

b 1. secundi.

c 17. sexti.

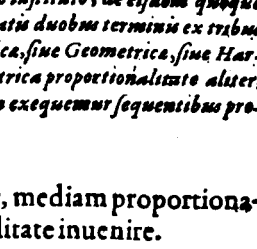
I N numeris idem problema ita perficietur. Posteriori parti numeri propositi adiiciatur prioris partis pars quarta, & conflatum numerum in priorem partem ducatur. Huius deinde producti numeri quadratæ radix eruatur. Nam si ex radice inuenta dematur semissis prioris partis, reliqua fiet secunda pars proportionalis, quam si ex posteriori parte dati numeri subtrahas, reliqua erit tertia pars. Veluti si linea A B, ponatur 76. pars autem A C, 36. & C B, 40. adiiciemus C I, hoc est, 9. quartam partem prioris partis 36. ad C B, id est, ad 40. posteriorem partem, & conflatum numerum 49. lineam scilicet I B, in priorem partem 36. sive in lineam A C, ducemus, atq; ex producto numero 1764. hoc est, ex rectangulo I E, radicem quadratam eruemus 42. pro linea F L, ex qua si detrahemus C F, semissem partis A C, nimirum 18. reliqua erit pars C L, 24. Hac ablata ex tota posteriori parte C B, 40. remanebit tertia pars L B, 16. Sunt ergo tres partes A C, C L, L B, numeri A B, 76. ha tres, 36. 24. 16. continuè proportionales. Ex quo constat, quando radix quadrata extrahi nequit ex eo producto, problema effici non posse in numeris. Atque hinc intelliguntur ea, quæ lib. 5. in tractatione proportionum prope finem scripsimus, cum de ortu proportionalitatis Geometricæ ex Arithmetica proportionalitate ageremus.

S E D quando hactenus cum Euclide de lineis proportionalibus disputa-

disputauimus, non alienum erit à nostro instituto, de eisdem quoque cum Pappo Alexandrino disserere, qui datis duobus terminis ex tribus cuiuscunque Medietatis, siue Arithmetica, siue Geometrica, siue Harmonica, tertium inquirit: Et in Geometrica proportionalitate aliter, quàm ab Euclide factum est. Hoc autem exequemur sequentibus propositionibus, quarum prima haec sit.

I.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Arithmetica proportionalitate inuenire.



SINT data duae rectae AB, & C, (quae per vnitates in longum dispositae hic repraesentantur) inter quas media proportionalitate Arithmetica sit inuenienda. Minori C, ponatur aequalis FH, & ex maiore AB, abscindatur alia aequalis AD: Diuiso autem segmento BD, bifariam in E, sumatur ipsi DE, aequalis HG. Dico FG, esse mediam Arithmeticè proportionalem inter AB, & C. Excedit enim AB, ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH, siue DE. Cum ergo duo excessus BE, DE, sint aequales, ex constructione, liquido constat rectas AB, FG, & C, Arithmeticè proportionales esse.

HINC efficitur, mediam lineam FG, esse semissem summae ex extremis conflatae. Cum enim tam AD, quam C, ipsi FH, sit aequalis, erit summa ex AD, & C, ipsius FH, dupla: Est autem & DB, ipsius HG, dupla. a Igitur & summa ex AB, & C, totius FG, dupla erit; ac proinde FG, semissis erit summae extremarum. Quod est propositum. a 1. quinti

II.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura, datae duae rectae AB, & FG, quibus inueniendae sit tertia minor in Medietate Arithmetica. Ex minore FG, detrahatur recta GH, excessui BE, quo AB, ipsam FG, superat, aequalis: & ipsi FH, ponatur aequalis C. Dico C, esse tertiam proportionalem minorem. Excedit enim AB, ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH: qui quidem duo excessus BE, GH, ex constructione, aequales sunt.

III.

DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire.

SINT in eadem figura data duae rectae C, & FG, quibus inueniendae sit tertia maior in Medietate Arithmetica. Sumatur AE, ipsi FG, aequalis, eique addatur EB, excessui GH, quo FG, ipsam C, superat, aequalis.

æqualis. Dico A B, esse tertiam proportionalem maiorem; ita vt tres A B, F G, & C, sint proportionales Arithmeticè. Nam A B, excedit ipsam F G, excessu B E; & F G, ipsam C, excessu G H. Cum ergo duo excessus B E, G H, ex constructione, sint æquales, patet propositum.

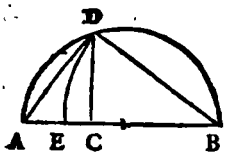
ITAQVE datis duobus numeris inæqualibus 30.16. *si semissis excessus, nimirum* 7. *minori* 16. *adiiciatur, constabitur medius proportionalis Arithmeticè,* 23. *vt hic apparet,* 30.23.16. *Vel medius terminus habebitur, si summa extremorum semissis sumatur; vt in eodem exemplo patet. Summa enim extremorum est* 46. *& eius semissis* 23. *medium terminum constituit.*

SI vero ex minore 16. *detrahatur excessus* 14. *reliquum erit minimus extremum* 2. *in Medietate Arithmetica, vt hic vides,* 30.16.2.

SI denique maiori 30. *adiiciatur excessus* 14. *conficietur maius extremũ* 44. *in proportionalitate Arithmetica, vt hic patet,* 44.30.16.

IV.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire.



SINT datæ rectæ A B, B C, eundem terminum B, habentes, inter quas inueniendæ sit media Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem A B, semicirculo A D B, excitetur ex C, ad A B, perpendicularis C D; & ex B, per D, arcus describatur secans A B, in E. Dico B E, mediam proportionalem esse inter A B, B C, in proportionalitate Geometrica: a 31. ter tij. *Ductis enim rectis A D, B D; a erit angulus A B D, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. recta B D, hoc est, ipsi æqualis B E, media proportionalis erit inter A B, B C. Quod est propositum.*

V.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire.

SINT in eadem figura datæ rectæ A B, B E, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem A B, semicirculo A D B, describatur ex B, per E, arcus secans circumferentiam A D B, in D, puncto, ex quo ad A B, perpendicularis demittatur D G. Dico B C, tertiam pro- b 21. ter tij. *portionalem esse ipsis A B, B E. Ductis enim rectis A D, B D; b erit angulus A D B, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. erit B D, hoc est, ipsi æqualis B E, media proportionalis inter A B, B C: id est, erit A B, ad B E, vt B E, ad B C. Quod est propositum.*

DATIS

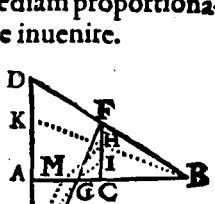
VI.

DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura data recta C B, B E, eundem terminum B, possidentes, quibus inuenienda sit maior tertia Geometricè proportionalis. Ex C, termino minoris excitetur ad E B, perpendicularis C D, quam arcus ex B, per E, descriptus secet in D. Ducta autem recta B D, excitetur ad eam in D, perpendicularis D A, secans B E, productam in A. Dico A B, tertiam proportionalem esse ipsis C B, B E. Quoniam enim angulus A D B, rectus est; erit ex coroll. propos. 8. huius lib. B D, hoc est, B E, ipsi aqualis, media proportionalis inter B C, & A B: Hoc est, erit C B, ad B E, vt B E, ad A B. Quod erat propositum.

VII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.



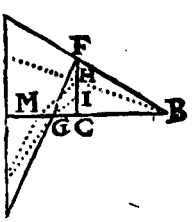
SINT datæ rectæ A B, B C, eundem terminum B, possidentes, inter quas inuenienda sit media Harmonicè proportionalis. Ducta per A, ad A B, perpendiculari D E, ponantur aquales A D, A E, quantacunq; Excitetur quoq; ex C, ad A B, perpendicularis C F, secans ductã rectã B D, in F, puncto, ex quo ad E, recta ducatur F E, secans A B, in G. Dico B G, esse mediam Harmonicè proportionalem inter A B, B C. Hoc est, esse A B, primam ad tertiam B C, vt A G, excessum inter primam A B, ac mediam B G, ad G C, excessum inter mediam B G, & tertiam B C. a *Quoniam enim C F, parallela est ipsi D E, ob rectos angulos A, C, erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum B C F, triangulo B A D, simile: hoc est, erit vt A B, ad A D, ita B C, ad C F; & permutando, vt A B, ad B C, ita A D, ad C F, hoc est, ita A E, ad C F. Rursus ob similitudinem triangulorum A E G, C F G,* b *erit vt A E, ad A G, ita C F, ad C G; & permutando vt A E, ad C F, ita A G, ad G C. Erat autem vt A E, ad C F, ita A B, ad B C. Igitur erit quoque A B, ad B C, prima linea ad tertiam, vt A G, excessus inter primam A B, & mediam B G, ad G C, excessum inter mediam B G, & tertiam B C. Quod erat propositum.*

a 12. quinti.

b 4. sexti

NON determinantur autem magnitudines rectarum A D, A E, quia vtcunque sumantur sive maiores, sive minores, eadem media B G, inuenietur. Sint enim aliæ aquales A K, A L. Ducta autem recta B K, secet perpendicularem C F, in H, iungaturque recta L H:

quam



quam dico per G, transire. Si enim transeat per aliud punctum, vt per M, inter A, & G, ostendemus eodem modo, esse vt A B, ad B C, ita A M, ad M C. Fient enim rursum triangula aquiangula A L M, M H C, si recta est H M L. Est autem vt A B, ad B C, ita A G, ad G C, vt ostensum est. Igitur erit quoque A M, ad M C, vt A G, ad A C, quod est absurdum. Nam a minor est pro-

a 8. quinti. *portio A M, ad G C, quam A G, ad G C: Sed adhuc minor est proportio A M, ad M C, quam ad G C. Multo ergo minor erit proportio A M, ad M C, quam A G, ad G C. Non ergo ita est A M, ad M C, vt A G, ad G C: ac propterea H L, non secabit A G, in M. Eodem modo non secabit G C. Transit igitur per G: atque idcirco eadem media B G, inuenietur per rectas A K, A L, aequales.*

VIII.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Harmonica Medietate inuenire.

SINT in eadem figura data recta A B, B G, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Harmonicè proportionalis. Ducta D E, ad A B, perpendicularis, ponantur aequales A D, A E, quantacunque: iuncta autem recta E D, ducatur ex E, per G, recta secans B D, in F, puncto, ex quo ad A B, perpendicularis demittatur F C. Dico B C, ipsis A B, B G, esse Harmonicè proportionalem. Hoc est, esse A B, primam ad B C, tertiam, vt est A G, excessus inter primam & secundam, ad G C, excessum inter secundam ac tertiam. Quod quidem demonstrabitur, vt in praecedenti propositione.

NON determinantur etiam hic magnitudines rectarum A D, A E, quia vtcunque sumantur sine maiores, sine minores, eadem tertia B C, reperietur. Sint enim aliae aequales A K, A L: Ducta autem recta B K, secet perpendicularem C F, in H, iungaturque recta L G, quam dico cadere in H. Si enim cadat infra, vt in I, ostendemus eodem modo, esse vt A B, ad B C, ita A K, ad C H, hoc est, ita A L, ad C H. Vt autem A B, ad B C, ita erat A G, ad G C. Erit igitur quoque vt A G, ad G C, ita A L, ad C H. Et quia si recta linea est L G I,

b 4 sex. *ob similitudinem triangulorum A L G, C I G, b est vt A L, ad A G, ita C I, ad G C, erit permutando, vt A L, ad C I, ita A G, ad G C. Cum ergo ostensum sit esse vt A G, ad G C, ita A L, ad C H, erit A L,*

c 9. quinti. *ad C H, vt ad C I. c Aequales sunt igitur C H, C I, totum & pars, quod est absurdum. Non ergo cadet L G, infra H: eodemque modo ostendemus non cadere supra. Cadit ergo in H, vbi B K, perpendicularem C F, secat; ac proinde ex H, demissa perpendicularis H C, ad A B, ex-*

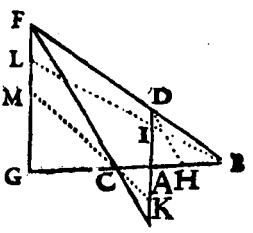
AB, exhibebit eandem tertiam minorem BC, proportionalem Harmonicè.

HINC sequitur, datis tribus rectis Harmonicè proportionalibus, minimam esse maiorem excessu, quo media minimam superat. Cum enim sit, vt AB, ad BC, ita AG, ad GC; sit autem AB, prima maior quàm AG, excessus inter primam AB, & mediam BG; a erit quoq; BC, tertia maior quàm GC, excessu inter mediam BG, & minimam BC. a 14. quinti.

IX.

DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire.

SINT data recta AB, BC, eundem habentes terminum B, quibus inuenienda sit maior tertia Harmonicè proportionalis. Ducta per A, ad BC, perpendiculari DE, ponantur æquales AD, AE, quantacunque, ducaturque recta BD, quam producta secet EG, producta in F, puncto, (quod autem conueniant BD, EC, mox demonstrabimus) ex quo ad BC, productam demittatur perpendicularis FG. Dico GB, ipsis CB, BA, Harmonicè proportionalem esse: Hoc est, esse GB, primam ad BA, tertiam, vt GC, excessum inter primam GB, & mediam BC, ad CA, excessum inter mediam CB, & tertiam BA. b *Quoniam enim GF, ipsi AD, parallela est, ob angulos rectos G, A; erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum BAD, triangulo BGF, simile: id est, erit vt GB, ad GF, ita BA, ad AD; & permutando, vt GB, ad BA, ita GF, ad AD, hoc est, ad AE. Rursus ob similitudinem triangulorum FGC, EAC,* c *erit vt FG, ad GC, ita EA, ad CA; & permutando vt FG, ad AE, ita GC, ad CA. Erat autem vt FG, ad AE, ita GB, ad BA. Igitur erit quoque vt GB, prima, ad BA, tertiam, ita GC, excessus inter primam GB, & mediam BC, ad CA, excessum inter mediam BC, & tertiam BA. Quod est propositum.*



b 12. primi.

c 4. sexti.

QVOD autem BD, EC, conueniant, sic probabitur. Quoniam BC, ponitur media, & BA, tertia, siue minima, maior erit BA, tertia quam CA, excessu, quo media BC, minimam BA, superat, vt ad finem antecedentis problematis ostendimus. Nisi enim maior esset AB, quam AC, non posset reperiri tertia maior; cum ea inuenta, semper demonstraretur tertia AB, maior excessu AC, quo media tertiam superat. Abscindatur ergo AH, ipsi AC, æqualis, connectaturque recta HD. Quoniam igitur latera AE, AC, lateribus AD, AH, æqualia sunt, angulosque comprehendunt æquales, vtpote rectos, nempe ad verticem A; d erunt & anguli ACE, AHD, æquales: quorum

d 4. primi alterius

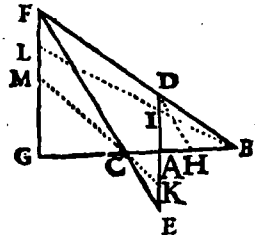
a 27. pri mi. *alterni ſint*; a *erunt recta* E C, H D, *parallela*; b *ac proinde anguli interni* D H C, H C F, *duobus rectis æquales erunt. Cum ergo* c *angulus* D H C, *maior ſit interno angulo* B, *erunt duo anguli* B C F, C B F, *duobus rectis minores.* d *Quocirca* B D, E C, *conbunt. Quod eſt propoſitum.*

b 29. pri mi.

c 16. pri mi.

d 13. pro mum.

NON determinantur quoque hic magnitudines rectarum A D, A E: *quia vtcunque ſumantur ſine maiores, ſive minores, eadem tertia* B G, *reperietur. Sint enim aliæ æquales* A I, A K: *Ducta autem recta* B I, *quæ producta ſecet perpendicularem* F G, *in* L, *ducatur* K C, *quam productam dico cadere in* L. *Si enim cadat infra, vt in* M, *oſtendemus eodem modo, eſſe vt* G B, *ad* B A, *ita* G L, *ad* A I, *id eſt, ad* A K. *Vt autem* G B, *ad* B A, *ita erat* G C, *ad* C A. *Erit igitur, vt* G C, *ad* C A, *ita* G L, *ad* A K.



Et quia, ſi recta linea eſt K C M, *ob ſimilitudinem triangulorum* G M C, A K C, e *eſt vt* G M, *ad* G C, *ita* K A, *ad* A C, *erit permutando, vt* G M, *ad* K A, *ita* G C, *ad* C A. *Cum ergo oſtenſum ſit, eſſe vt* G L, *ad* A K, *ita* G C, *ad* C A, *erit quoque* G M, *ad* A K, *vt* G L, *ad* A K. f *Æquales ſunt igitur* G M, G L, *pars & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo cadet* K C, *infra* L: *eademque ratione neque ſupra cadet. Cadit ergo in* L, *vbi* B I, *producta perpendicularem* F C, *ſecat; ac proinde ex* L, *demiſſa perpendicularis* L G, *ad* G B, *cadet in* G, *exhibebitq; eandem tertiam* G B, *maiorem, Harmonicè proportionalem.*

c 4. ſex.

f 9. quinti.

EX his perſpicuum eſt, quando duo numeri proportionem habent duplam, vel duplæ maiorem, illis non poſſe adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica, vt in tractatione proportionum in 3. regula proportionalitatis Harmonica diximus. Quia enim oſtendimus, B A, *minimam lineam eſſe maiorem exceſſu* A C, *quo media* B C, *minimam* A B, *ſuperat; erit* A B, *maior ſemiſſe ipſius* B C; *ac proinde* B C, *ad* A B, *media ad minimam, minorem proportionem habebit, quam duplam. Quod ſi* B C, *ad* A B, *eſſet dupla, vel maior quam dupla, eſſet* A B, *vel æqualis ipſi* A C, *vel minor. Quare vt oſtenſum eſt, non poſſet reperiri tertia maior in Harmonica proportionalitate: quia* E C, *cum* B D, *non coiret.*

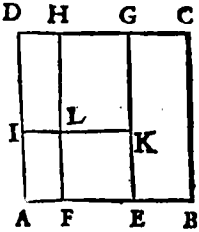
SED demonſtremus etiam cum Io. Baptiſta Benedicto, qua ratione iidem termini proportionalitatis Harmonica in numeris reperiantur. Hinc enim patebit ratio quarundam praxium, quas in tractatione proportionum in lib. 5. explicauimus. Vtemur autem nonnullis propoſitionibus libri 7. cum ea ex lib. 5. & 6. non pendeant, atque idcirco ante hos libros demonſtrari poſſint. Hinc igitur exordium ſumemus.

EX datis

X.

EX datis quibuſuis duobus numeris, tres numeros Harmonice proportionales, quorum extremi eandem proportionem habeant, quã dati duo numeri, reperire.

EX qualibet recta AB, deſcribatur quadratum ABCD, Sumptuque duabus partibus æqualibus BE, EF, in latere AB, ducantur EG, FH, ipſis AD, BC, parallela. Item ſumpta recta AI, æqualis ipſi BE, vel EF, agatur IK, ipſis AB, DC, parallela ſecans FH, in L. Erit rectangulum AG, contentum ſub AB, (id eſt, ſub ſumma rectarum AE, EB; a cum EG, ſit ipſi BC, ideoque ipſi AB, æqualis) & AE (maiore ſcilicet parte ſummæ AB,) Rectangulum verò EC, continebitur ſub AB, (hoc eſt, ſub eadem ſumma rectarum AE, EB,) & EB, (minore videlicet parte eiuſdem ſummæ AB) Tam deniq; rectangulum AK, quam & L, ſub partibus AE, EB, comprehendetur; propterea quod AI, ſumpta eſt ipſi EB æqualis; & HL, LK, ipſis AE, EB, æquales. b Cum enim FH, ipſi AD, hoc eſt, ipſi AB; & FL, ipſi AI, hoc eſt, ipſi EB, ſit æqualis: erit reliqua HL, reliquæ AE, æqualis: at c KL, ipſi EF, ſiue ipſi EB; æqualis eſt. Ex quo fit, duo rectangula AK, KH, ſimul continere duplum eius, quod ſub partibus AE, EB, continetur. Dico rectangulum AG; & ſummam duorum rectangulorum AK, KH; & rectangulum EC, conſtituere proportionalitatem Harmonicam: hoc eſt, vt eſt AG, primum, ad EC, tertium, ita eſſe IH, exceſſum inter primum AG, & ſecundum HLIAEG, ad AL, exceſſum inter ſecundum HLIAEG, & tertium EC, ſiue FG, d quod ipſi EC, æquale eſt. Nam cum HL, ipſi AE; & LF, ipſi EB, æqualis ſit, vt oſtendimus, e erit AE, ad EB, vt HL, ad LF. Vt autem AE, ad EB, f ita eſt AG, ad EC: Et vt HL, ad LF, ita eſt HI, ad AL. Igitur erit quoque AG, primum ad EC, tertium, vt HI, exceſſus inter primum ac medium, ad AL, exceſſum inter medium ac tertium. Quod eſt propoſitum.



a 34. primi.

b 34. primi.

c 34. primi.

d 36. primi.

e 7. quinti.

f 1. ſexti.

ITAQVE ſi AE, ponatur 6 & EB, 4. erit ſumma AB, 10. quam ſi ducamus in AE, & EB, fiet AG, 60. & EC, 40. Duplum autem eius, quod fit ex AE, in EB, hoc eſt, HLIAEG, fiet 48. medium Harmonicum. Tres igitur numeri Harmonicè proportionales erunt 60. 48. 40. quorum extremi eandem proportionem habent, quam dati numeri 6. 4. Cum enim eadem ſumma 10. ex 6. & 4. collecta multiplicans vtrumque 6. 4. produxerit extremos 60. 40. g erit 60. ad 40. vt 6. ad 4. Quod etiam patet ex figura. h Eſt enim AG, id eſt, 60. ad EC, id eſt, ad 40. vt AE, id eſt, 6. ad EB, id eſt, ad 4.

g 17. ſexti.

h 1. ſexti.

H A C arte, ſi ſumma quorumlibet duorum numerorum datorum ducatur in *vtrumque ſeorſum, gignentur extremi termini propòrtionalitatis Harmonicæ eandem habentes proportionem, quam dati duo numeri: Medius autem terminus erit numerus duplus eius, qui ſit ex multiplicatione datorum duorum numerorum inter ſe.*

EX hu facile etiam inuenientemus tres numeros Harmonicè proportionales, quorum extremi proportionem habeant datam, & medius ſit dato numero æqualis. Vt ſi extremi debeant habere proportionem quintuplam, mediuſque ſit 30. ſumendi ſunt 5. & 1. in data proportione, & eorum ſumma 6. in vtrumque ducenda, vt fiant 30 & 6. inter quos ſtatuatur medius 10. qui duplus eſt productî ex multiplicatione datorum numerorum 5. & 1. vnius in alterum: erunt q; 30. 10. 6. Harmonicè proportionales, vt dictum eſt. Deinde datus medius 30. dimidatur per medium inuentum 10. & Quotiens 3. per tres inuentos 30. 10. 6. multiplicetur. Ita enim fient tres numeri quæſiti 90. 30. 18.

A L I T E R.

INTER datos duos numeros 6. 4. ſtatuatur medius Arithmeticè proportionalis, 5. nimirum ſemiſſis eorum ſummæ, hoc modo, 6. 5. 4. Deinde medius 5. in extremos 6. & 4. ductus gignat 30. & 20 inter quos ſtatuatur medius 24. quem extremi inter ſe multiplicati producunt, hoc modo, 30. 24. 20. Dico hos tres eſſe Harmonicè proportionales. Quoniam enim tres numeri 60. 48. 40. qui fiunt ex ſumma 10. datorum numerorum 6. 4. in datos numeros 6. & 4. & ex 4. in 6. bis, dupli ſunt trium numerorum hic inuentorum, quòd hi producti ſint ex ſemiſſe ſummæ datorum numerorum in datos numeros, & ex 4 in 6. ſemel, vt perſpicuum eſt: erit quæ-

60. 48. 40.

30. 24. 20.

que tum exceſſus inter 60. & 48. duplus exceſſus inter 30. & 24. quam exceſſus inter 48. & 40: ipſimet exceſſui inter 24. & 20. vt ad propoſ. 10. oſtendimus. Cum ergo tres numeri 60. 48. 40. ſint Harmonicè proportionales, vt in præcedenti problemate demonſtrauimus; erunt quoque eorum ſemiſſes 30. 24. 20.

a 15. quinti. *a eaſdem habentes proportiones, Harmonicè proportionales: quandoquidem & exceſſus eandem proportionem habent, quam exceſſus numerorum, 60. 48. 40. quippe cum exceſſus numerorum 30. 24. 20. ſemiſſes ſint horum numerorum 60. 48. 40. exceſſuum, vt dictum eſt.*

XI.

DATIS duobus numeris, medium Harmonicè proportionalem inuenire.

SINT duo numeri dati A B, 15. & B C. 10. inter quos inueniendus ſit medius proportionalis Harmonicè. Dematur ex maiore A B, 15. numerus B D, minori B C, 10. æqualis, & reliquus numerus A D, 5. nimirum differentia datorum numerorum, ducatur in numerum B C, 10.

B C, 10. *productusque numerus* 50. *diuisus per A C*, 25. *summam datorum numerorum, faciat Quotientem D E*, 2. *qui additus minori B D*, 10. *faciat D E*, 12. *Dico B E, esse medium proportionalem Harmonicè inter A B,*

B C, hoc modo, 15. 12. 10. *Quoniam*

A ... E .. D ..... B C

enim numero, qui ex A D, in B C, fit, diuiso per A C, Quotiens est D E; producetur idem numerus diuisus ex D E, Quotiente in diuisorem A C, & constat ex defin. Diuisionis. Quia igitur idem numerus fit ex A C, primo, in D E, quartum, qui ex B C, vel B D, secundo, in A D, tertium; a *erit A C, primus ad B C, secundum, vt A D, tertius ad D E, quartum: Et diuidendo, A B, ad B C, primus datus ad tertium datum, & A E, excessus inter primum A B, & medium inuentum B E, vel ad D E, excessum inter medium B E, & B D, siue tertium B C. Sunt ergo A B, B E, B C, nimirum* 15. 12. 10. *Harmonicè proportionales. Quod est propositum.*

a 19. sexti. a 19. septimi. a 16. sexti.

ITAQVE si differentia datorum numerorum ducatur in minorem, numerusque productus diuidatur per datorum numerorum summam, ac denique Quotiens minori adiiciatur, constabitur medium terminus Harmonica proportionalitatis.

XII.

DATIS duobus numeris, minorem extremum in proportionalitate Harmonica inuenire.

SINT duo numeri dati A B, 15. *& A C*, 12: *quibus inueniendus est minor Harmonicè proportionalis. Addatur B D, aequalis ipsi B C, excessui inter datos numeros. Per hanc summam A D*, 18. *collectam ex maiore numero, & differentia datorum numerorum diuidatur numerus* 36. *factus ex minore dato A C, in B C, differentiam datorum numerorum; & Quotiens C E, ex minore dato A C, detrahatur. Dico reliquum A E*, 10. *esse terminum tertium minorem quaesitum, hoc modo*, 15. 12. 10. *Quoniam enim numero, qui ex A C, in B C, fit, diuiso per A D, Quotiens est C E, producetur idem numerus diuisus ex C E, Quotiente in diuisorem A D, multiplicato, & ex Diuisionis defin. manifestum est. Quia igitur idem numerus gignitur ex A D, primo, in C E, quartum, qui ex B C, secundo in A C, tertium*; b *erit A D, primus ad B C, secundum, hoc est, ad B D, & A C, tertius ad C E, primus quartum. Et diuidendo, A B, ad B D, hoc est, ad B C, & A E, ad C E: Et permutando, A B, primus datus ad A E, tertium inuentum, sexti. & B C, excessus inter primum A B, & medium A C, ad C E, ex-*

A ..... E .. C ... B ... D

b 19. septimi. 16. sexti.

ceſſum inter medium A C, & tertium A E. Sunt igitur tres numeri A B, A C, A E, id eſt, 15. 12. 10. *Harmonicè proportionales. Quod eſt propoſitum.*

ITAQVE ſi per ſummam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex minore numero in differentiam eandem datorum numerorum procreatus, Quotienſque ex minore dato detrahatur, reliquus fiet minor extremus in proportionalitate Harmonica.

ALITER.

SINT rurſum dati duo numeri A B, 15. *& A C,* 12. *quibus inueniendus ſit maior in Harmonica Medietate. Maiori A B, addatur B D, aqualis differentia B C,* 3. *datorum numerorum. Et per ſummam A D,* 18. *diuidatur numerus* 180. *ex multiplicatione datorum numerorum A B, A C, hoc eſt,* 15. 12. *inter ſe procreatus, ſitque Quotiens A E,* 10. *Dico A E, minorem extremum eſſe in Medietate Harmonica. Quoniam enim numero, qui ex A B, in A C, gignitur, diuiſo per A D, Quotiens fit A E, producetur idem numerus diuiſus ex A E, Quotiente in diuiſorem A D, multiplicato, & ex defin. Diuiſionis conſtat. Quia igitur idem numerus fit ex A D, primo in A E, quartum, qui ex A B, ſecundo in A C, tertium;* a 19. ſep. vel 16. ſexti. *erit A D, primus ad A B, ſecundum, & A C, tertius ad A E, quartum; ac proinde cum A D, maior ſit, quam A B, erit quoque A C, maior quam A E. Quare erit & diuidendo B D, id eſt, B C, ad A B, & C E, ad A E: Et conuertendo A B, ad B C, & A E, ad C E; Et permutando A B, primus ad A E, tertium inuentum, & B C, exceſſus inter primum A B, & medium A C, ad C E, exceſſum inter medium A C, & tertium A E. Sunt igitur tres numeri A B, A C, A E, hoc eſt,* 15. 12. 10. *Harmonicè proportionales. Quod eſt propoſitum.*

ITAQVE ſi per ſummam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter ſe procreatus, erit Quotiens minor terminus extremus Harmonica Medietatis.

XIII.

DATIS duobus numeris, maiorem extremum in Harmonica proportionalitate inuenire.

SINT dati duo numeri A B, 10. *& A C,* 12. *quibus inueniendus ſit tertius maior in Medietate Harmonica. Ex minore A B, detrahatur B D, aqualis differentia B C,* 2. *datorum numerorum. Et per reliquum numerum A D,* 8. *diuidatur numerus* 24. *factus ex maiore numero A C,* 12. *in differentiam datorum numerorum B C,* 2. *vel B D.*

Quo-

Quotiens autem C E, 3. maiori numero A C, 12. adiiciatur. Dico ſummam A E, 15. eſſe terminum maiorem in proportionalitate, ſine Medietate Harmonica, hoc eſt, tres numeros A E, A C, A B, nimirum 15. 12. 10. eſſe Harmonicè proportionales. Quoniam enim numero, qui ex A C, in B D,

A ..... D .. B .. C ... E

fit diuiſo per A D, Quotiens fit C E, producetur idem numerus diuiſus ex C E, Quotiente in diuiſorem A D, multiplicato. Quia igitur idem numerus gignitur ex A C, primo in B D, quartum, qui ex C E, ſecundo in A D, tertium, a erit A C, primus ad C E, ſecundum, & A D, tertium ad B D, quartum: Et componendo A E, ad C E, & A B, ad B D, hoc eſt, ad B C: Et permutando A E, primus ad A B, tertium, & C E, exceſſus inter primum A E, & medium A C, ad exceſſum B C, inter medium A C, & tertium A B. Sunt ergo tres numeri A E, A C, A B, nimirum 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod eſt propoſitum.

a 19. ſep. vel 16. ſexti.

ITAQVE datis duobus numeris, ſi eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex maiore numero in differentiam datorum numerorum procreatus, Quotienſque maiori numero adiiciatur, conflabitur maior terminus extremus Medietatis Harmonica.

ALITER.

SINT rurſum duo dati numeri A B, 10. & A C, 12. quibus inueniendus ſit maior in Harmonica Medietate. Ex minore A B, dematur B D, æqualis exceſſui B C, datorum numerorum: Et per reliquum numerum A D, 8. diuidatur numerus 120. factus ex multiplicatione datorum numerorum A B, 10. & A C, 12. procreatus, Quotienſque ſit A E, 15. Dico A E, eſſe terminum maiorem in proportionalitate Harmonica. Quoniam enim numero, qui fit ex A B, in A C, diuiſo per A D, Quotiens

A ..... D .. B .. C ... E

eſt A E, producetur idem numerus diuiſus ex A E, Quotiente in diuiſorem A D, ex defin. Diuiſionis. Quia igitur idem numerus gignitur ex A B, primo in A C, quartum, qui ex A D, ſecundo in A E, tertium; b erit A B, primus ad A D, ſecundum, & A E, tertius ad A C, quartum; ac proinde cum A B, maior ſit quam A D, erit & A E, maior quam A C. Et cum ſit, & A E, ad A C, ita A B, ad A D, erit per conuerſionem rationis A E, ad C E, & A B, ad B D, hoc eſt, ad B C: Et permutando A E, primus inuentus ad A B, tertium, & C E, exceſſus inter primum A E, & medium A C, ad B C, exceſſum inter medium A C, & tertium A B. Igitur tres numeri A E, 15. A C, 12. A B, 10. Harmonice proportionales ſunt. Quod eſt propoſitum.

b 19. ſep. vel 16. ſexti.

ITAQVE datis duobus numeris, ſi eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex multi-

plicatione datorum numerorum inter se genitus, dabit Quotiens maiorem terminum extremum Medietatis Harmonica.

POSTREMO libet quoque ex Pappo praxes illas demonstrare, quibus ad finem tractationis proportionum ex aequalitate proportionis omnes proportiones rationales, & vicissim ex inaequalitate proportionis qualibet aequalitatem, ac denique ex quauis proportionalitate Geometrica & Geometricam, & Arithmeticam, & Harmonicam oriri docuimus. Sic ergo ex proportionalitate Geometrica tum aequalium terminorum, quam inaequalium, gignitur proportionalitas alia Geometrica inaequalium terminorum.

XIV.

PROPOSITIS tribus terminis Geometricè proportionalibus siue æqualibus, siue inæqualibus: Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta: ac summa conflata ex secundo & tertio semel: ac tertius semel, sunt Geometricè proportionales.

SINT tres termini continuè proportionales Geometricè, A, B, C: sitque D, summa ex A, semel, & B, bis, & C, semel collecta: At E, summa ex B, & C, semel conflata, ac denique F, ipsi C, aequalis. Dico

A,	1.	*B*,	1.	*C*,	1.	*A*,	12.	*B*, 6. *C*, 3.
D,	4.	*E*,	2.	*F*,	1.	*D*,	27.	*E*, 6. *F*, 3.

D, E, F, Geometricè quoque proportionales esse. Cum enim sit A, ad B, vt B, ad C; erit quoque componendo A, B, simul ad B, vt B C, simul ad C. a *Igitur omnes antecedentes simul, nimirum A, E, & B, C, ad omnes consequentes simul, nimirum ad B, C, vt vna antecedens, hoc est, B, C, ad vnam consequentem C. Est autem D, aequalis ipsis A, B, & B, C: Et E, ipsis B, C: ac denique F, ipsi C. Igitur erit quoque D, ad E, vt E, ad F: ac proinde D, E, F, Geometricè sunt proportionales. Quod erat propositum.*

a 14. quinti.

HINC manifestum est, si termini A, B, C, sint aequales; D, E, F, esse duplos, Nam B, C, simul dupli erunt ipsius C; ac propterea & E, ipsius F: quòd E, ipsis B, C; & F, ipsi C, sit aequalis. Cum ergo D, E, F, sint continuè proportionales, ipsi erunt in dupla proportione. Quod si termini aequales A, B, C, sint vnitates, generabitur dupla proportionalitas D, E, F, in minimis terminis 4. 2. 1. propterea quòd F, aequalis est ipsi C, hoc est, vnitati.

A.	*B.*	*C.*			
1.	1.	1.			
D.	*E.*	*F.*			
4.	2.	1.			

SI verò

SI verò A, B, C, sint dupli, erunt geniti D, E, F, tripli. Nam si B, ipsius C, duplus est; erit summa ex B, C, collecta, id est, E, ipsius C, hoc est, ipsius F, triplus: ac proinde D, E, F, continuam proportionem triplã habebunt. At ij eodem modo ex triplis orientur quadrupli, ex quadruplis quintupli, & sic in infinitũ.

A. B. C.
4. 2. 1.
D. E. F.
9. 3. 1.

AT si termini A, B, C, sint dupli inuerso ordine, erunt D, E, F, geniti, sesquialteri. Nam cum B, sit semissis ipsius C; erit summa ex B, C, collecta, hoc est, E, ipsius C, siue ipsius F, sesquialtera. Eodem modo, si A, B, C, sint conuerso ordine tripli, erunt procreati D, E, F, sesquitertij. Nam B, erit ipsius C, tertia pars. Igitur summa ex B, C, conflata, id est, E, continebit C, siue F, semel, & insuper eius partem tertiam: ac propterea D, E, F, habebunt continuam proportionem sesquitertiam. Pari ratione ex quadruplis inuersis nascentur sesquiquarti, & ex inuersis quintuplis sesquiquinti, atque ita in infinitum. Non aliter monstrabimus, aliarum proportionum generationes ex aliis proportionibus rectè esse præscriptas in tractatione proportionum. Item rectè quamcunque proportionem inæqualitatis ad æqualitatem reuocari: quippe cum in ea reductione retexamus quodammodo operationem, qua inæqualitatis proportionem ex æqualitate gigni tradidimus.

A. B. C.
1. 2. 4.
D. E. F.
9. 6. 4.
A. B. C.
1. 3. 9.
D. E. F.
16. 12. 9.

XV.

PROPOSITIS tribus terminis siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta: ac summa ex primo, secundo, & tertio semel conflata: ac deniq; tertius semel, sunt Arithmeticè proportionales.

SINT tres termini Geometricè proportionales A, B, C: sitque D, summa collecta ex A, bis, ex B, bis, & ex C, semel: At E, summa conflata ex A, B, C, semel: Ac denique F, ipsi C, æqualis. Dico D, E, F, esse Arithmetice proportionales. Quoniam enim summa ex A, bis, & B, bis, & C, semel, hoc est, terminum D, superat summam ex A, B, C, semel, hoc est, terminum E, aggregato ex A, B, semel collecto. Item summa ex A, B, C, hoc est, terminus E, superat terminũ C, siue F, eodem aggregato ex A, B, semel collecto; erit idem excessus inter D, & E, qui inter E, & F; ac propterea D, E, F,

A. 1. B. 1. C. 1. — D. 5. E. 3. F. 1.
A. 12. B. 6. C. 3. — D. 39. E. 21. F. 3.

Arithmeticam proportionalitatem, siue Medietatem constituunt. Quod est propositum.

EADEM prorsus ratione orietur proportionalitas Arithmetica ex tribus terminis quibuscunque, etiamsi non sint proportionales: vt in hoc exemplo perspicuum est.

XVI.

PROPOSITIS tribus terminis siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa collecta ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel: ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel: & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coacernata, Harmonicè proportionales sunt.

SINT tres termini Geometrice proportionales A, B, C: sitque D, summa collecta ex A, bis, ex B, ter, & ex C, semel: At E, summa ex B, bis, & C, semel conflata: Ac denique F, summa ex B, semel, & C, semel collecta. Dico D, E, F, constituere proportionalitatem, siue Me-

A, 1.	*B*, 1.	*C*, 1.	*A*, 12.	*B*, 6.	*C*, 3.
D, 6.	*E*, 3.	*F*, 2.	*D*, 45.	*E*, 15.	*F*, 9.

dietatem Harmonicam. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita B, ad C, erunt ex scholio propos. 22. lib. 5. vt A, bis, ad B, ita B, bis, ad C. Igitur componendo, vt A, bis, & B, semel, ad B, ita B, bis, & C, semel ad C.

a 12. quinti. *a Igitur vt omnes antecedentes simul, nimirum A, bis, & B, ter, & C, semel, hoc est, terminum D, ad omnes consequentes simul, nimirum ad summam ex B, C, id est, ad F, ita vnum antecedens, nimirum A, bis, & B, semel ad B. Est autem A, bis, & B, semel excessus, quo A, bis, & B, ter, & C, semel, superant B, bis, & C, semel, hoc est, excessus inter D primum terminum, & medium E: At B, excessus, quo B, bis, & C, semel, superant summam ex B, C, hoc est, excessus inter E, medium, & F, tertium. Igitur erit vt D, primus ad F, tertium, ita excessus inter primum & medium, ad excessum inter medium ac tertium; ideoque D, E, F, Harmonicè proportionales erunt. Quod est propositum.*

SEMPER autem minimi termini procreantur D, E, F, quando dati termini A, B, C, sunt vnitates; vt in exemplis prolatis manifestum est Quando autem A, B, C, non sunt vnitates, etiamsi in sua proportione minimi sint, non semper creantur minimi termini D, E, F.

A, 9.	*B*, 6.	*C*, 4.	*A*, 1.	*B*, 4.	*C*, 16.
D, 40.	*E*, 16.	*F*, 10.	*D*, 30.	*E*, 24.	*F*, 20.

A, 9.	*B*, 12.	*C*, 16.			
D, 70.	*E*, 40.	*F*, 28.			

Id quod

Id quod liquidò constat in his exemplis. In primo enim exemplo, ex minimis terminis proportionis sesquialteræ, & in secundo ex minimis terminis subquadruplæ proportionis, & in tertio ex minimis terminis subsesquitertiæ proportionis, gignuntur tres in proportionalitate Harmonica non minimi. Quod si termini inuertantur, tum demum, (quod mirum est) minimi terminis Medietatis Harmonicæ procreabuntur, vt hæc exemplæ demonstrant.

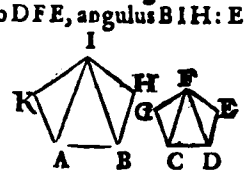
A, 4. *B*, 6. *C*, 9. | *A*, 16. *B*, 4. *C*, 1. | *A*, 16. *B*, 12. *C*, 9.

D, 35. *E*, 21. *F*, 15. | *D*, 45. *E*, 9. *F*, 5. | *D*, 77. *E*, 33. *F*, 21.

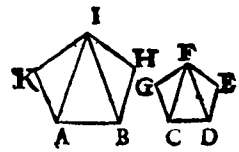
PROBL. 6. PROPOS. 18. xix.

A DATA recta linea dato rectilineo simile, similiterq; positum rectilineum describere.

SIT data recta AB, super quam describendum sit rectilineum rectilineo CDEFG, simile similiterque positum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex F, ad singulos angulos oppositos rectæ lineæ, quæ rectilineum resoluant in triangula CDF, DEF, FGC. Deinde angulo DCF, æqualis fiat angulus BAI; & angulo CDF, angulus ABI, coeantq; rectæ AI, BI, in puncto I; (coibunt enim omnino, propterea quòd duo anguli IAB, IBA, duobus rectis minores sint, cùm æquales sint duobus angulis FCD, FDC, a qui duobus rectis sunt minores.) b eritque reliquo angulo CFD, reliquus angulus AIB, æqualis; totumque triangulum AIB, toti triangulo CFD, æquiangulum. Rursus angulo FDE, æqualis fiat angulus IBH; & angulo DFE, angulus BIH: Et c quia duo anguli EDF, EFD, minores sunt duobus rectis; erunt quoq; duo anguli HBI, HIB, duobus rectis minores; ac proinde rectæ BH, IH, coibunt. Coeant ergo in puncto H, eritq; eadem ratione triangulum BHI, triangulo DEF, æquiangulum. Præterea angulo CFG, fiat æqualis angulus AIK; & angulo FCG, angulus IAK: d Et quia duo anguli GCF, GFC, minores sunt duobus rectis: erunt & duo anguli KAI, KIA, duobus rectis minores; atque idcirco rectæ AK, IK, conuenient in aliquo puncto. Conueniant ergo in K: eritque triangulum quoque AKI, triangulo CGF, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absoluantur omnia triangula rectilinei propositi, si pluta extiterint. Dico igitur, rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG, simile esse, similiterque positum. Cùm enim angulus IAB, constitutus sit æqualis angulo



a 17. primi.
b 32. primi.
c 17. primi.
d 17. primi.



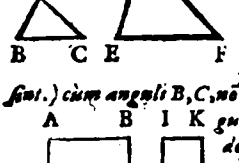
FCD; & angulus IAK, angulo FCG, erit totus angulus BAK, toti angulo DCG, æqualis: Eademque ratione angulus ABH, angulo CDE, æqualis erit; & reliqui reliquis, vt conſtat ex conſtructione; cùm ſingulæ partes vnius ſingulis partibus alterius factæ ſint æquales. Quare æquiangulum erit rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG.

a 4. ſexti. b 11. quinti. c 4. ſexti. d 4. ſexti. e 11. quinti.

Quoniam verò *a* ita eſt AB, ad BI, vt CD, ad DF: & ita BI, ad BH, vt DF, ad DE: *b* erit ex æquo ita AB, ad BH, vt CD, ad DE. Quare latera circa æquales angulos ABH, CDE, proportionalia ſunt. *c* quemadmodũ & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia ſunt, ob triangula æquiangula BHI, DEF. *d* Rurſus ita eſt HI, ad IB, vt EF, ad FD: & ita IB, ad IA, vt FD, ad FC: & ita IA, ad IK, vt FC, ad FG. *e* Igitur ex æquo erit ita HI, ad IK, vt EF, ad FG, & ideo latera quoq; circa æquales angulos HIK, EFG, proportionalia erunt, & ſic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cùm ſint æquiangula, habeantq; latera circa æquales angulos proportionalia, ſimilia ſunt, ſimiliterq; deſcripta. Adata ergo recta linea, dato rectilineo ſimile ſimiliterq; poſitum rectilineum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

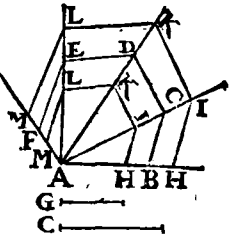
DICVNTVR autem rectilinea ſuper lineas rectas deſcripta, eſſe ſimilia & ſimiliter poſita, quando anguli æquales conſtituuntur ſuper ipſas rectas lineas, & tam reliqui æquales anguli, quàm latera proportionalia ſemper ordine ſeſe conſequuntur. Vt triangula ABC, DEF, non ſolùm erunt ſimilia, ſed etiã ſuper rectas BC, EF, ſimiliterq; deſcripta, ſi anguli B, C, æquales fuerint angulis E, F; & vt ſit AB, ad BC, ſic DE, ad EF, &c.



At ſupra rectas BC, DE, non dicentur ſimiliter eſſe deſcripta, (quanquam ſimilia ſint.) cùm anguli B, C, nõ ſint æquales angulis D, E. Similiter rectangula AC, EG, ſimilia, dicentur ſimiliter eſſe deſcripta ſuper rectas DC, HG, quoniam vt AD, ad DC, ita eſt EH, ad HG, &c. At verò rectangula AC, IG, non dicentur ſimiliter deſcripta ſuper rectas DC, HG, quamuis ſint ſimilia, vt manifeſtũ eſt. Eadem tamen ſimiliter erũt deſcripta ſuper rectas DC, IH, vel ſuper rectas AD, HG.



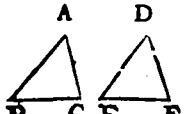
CÆTERVM omnes figuræ ſecundum conſtructionem huius problematis deſcriptæ, ſunt neceſſariò ſimiliter poſitæ, vt patet in rectilineis ABHIK, CDEFG ſuper lineas AB, & CD, deſcriptis. Item omnes æquilateræ figuræ & æquiangulæ, ſunt quæ poſitæ ſimiliter ſuper qualibet earum latera. FOR-



FORTASSIS autem expeditius Problema propositũ conficiemus ad hunc modum. Sit dato rectilineo A B C D E F, super datam rectã G, vel alium ei aqualem, describendum simile rectilineum, similiterq; positum. Productis duobus lateribus A B, A F, circa angulum A, educantur ex A, per omnes alios angulos rectæ A C, A D, A E, quantumlibet Deinde ex A B, abscindatur A H, aqualis data recta G, vel certè ex ipsa A B, vlteriùs producta, si fortè G, fuerit maior, quam A B. Posthac per H, agatur recta H I, lateri B C, parallela, & per I, recta I K, lateri C D, parallela, & sic deinceps, donec omnia latera suas habeant parallelas, demptis duobus lateribus productis A B, A F, factumq; erit, quod proponitur: hoc est, figura A H I K L M, super rectam A H, data recta G, aqualem, simili erit, similiterq; posita figura proposita A B C D E F, super rectam A B, constituta. Cùm enim angulus H A M, sit cõmunis; & anguli A B C, A F E, aquales sint anguli A H I, A M L; Item anguli A C B, A C D, aquales sint anguli A I H, A I K, hoc est, totus angulo B C D, aqualis sit angulus totus H I K; Eodemq; modo anguli C D E, D E F, aquales sint anguli I K L, K L M: Aequiangula erunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M. Sed & latera circum aquales angulos habent proportionalia. Cùm enim triangula A H I, A I K, A K L, A L M, similia sint per coroll. propos. 4. huius lib. triangulis A B C, A C D, A D E, A E F; Erit, b vt A B, ad B C, ita A H, ad H I. Rursus, vt B C, ad C A, ita H I, ad I A. Et vt C A, ad C D, ita I A, ad I K; ac proinde ex aquo, vt B C, ad C D, ita H I, ad I K, &c. Igitur ex defin. similia sunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M, atq; adeò similiter posita, per ea, quæ proximè hoc scholio scripsimus. a 29. primi. b 4. sexti.

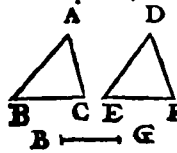
THEOR. 13. PROPOS. 19. xvij.

SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.



SINT triangula similia A B C, D E F, habentia angulos æquales B, & E: Item C, & F, &c. Et sit vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, &c. Dico triangula inter se rationem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa B C, & E F, vel A B, & D E, vel A C, & D F: Hoc est, si homologis lateribus B C, E F, inueniatur tertia proportionalis B G: ita esse triangulum A B C, ad triangulum D E F, vt rectam B C, ad rectã B G: ac proinde cùm ex defin. 10. lib. 5. proportio B C, ad B G, dicatur duplicata proportionis B C, ad E F: proportionem

tionem trianguli ad triangulum dici quoque duplicatam proportionis laterum homologorum B C, E F. Ita vt nihil aliud sit, triangula duo, vel duas quaslibet figuras similes, similiterque positas, habere proportionem duorum laterum homologorum duplicatam, quàm ita esse triangulum ad triangulum, vel figuram ad figuram, vt est prima linea ad tertiam, cùm tres lineæ fuerint continuè proportionales in proportione duorum laterum homologorum: quales hic sunt tres lineæ rectæ B C, E F, B G, continuè proportionales in proportione homologorum laterum B C, E F. Sint ergo primùm latera B C, E F, æqualia, ac proinde & tertia proportionalis B G, illis æqualis: ita vt proportio B C, ad B G, quæ duplicata dicitur proportionis lateris B C, ad latus E F, sit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula A B C, D E F, habent quoque proportionem æqualitatis, *a* quòd ipsa inter se æqualia sint, ob angulos B, C, angulis E, F, æquales, & æqualitatem laterum B C, E F, quibus adiacent: *a 26. primi.*



erit triangulum ad triangulum, vt recta B C, ad rectam B G. Cùm ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum B C, E F; dicetur quoque proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, proportionis, quam latus B C, ad latus E F, habet, duplicata. Quod etiam hinc constare potest. Quoniam, vt dictum est, triangula A B C, D E F, æqualia sunt, hoc est, proportionem æqualitatis habent, sicut & latera homologa B C, E F: Proportio autem æqualitatis duplicata solùm efficit proportionem æqualitatis: (Positis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad secundam, vt constat ex definitione 10. lib. 5. cùm tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, sicuti & prima ad secundam,) habebit triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem duplicatam eius, quam habet latus B C, ad latus E F. Quod est propositum.



SIT deinde B C, latus latere E F, maius; & ex B C, *b* abscindatur rectis B C, E F, tertia proportionalis B G, ducaturq; recta A G. Quia igitur est vt A B, ad B C, ita D E, ad E F; erit permutando vt A B, ad D E, ita B C, ad E F: Vt autem B C, ad E F, ita est per constructionem E F, ad B G. Vt ergo A B, ad D E, *c* ita erit E F, ad B G. Quare cùm triangula A B G, D E F, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, *d* ipsa inter se æqualia erunt; & propterea vt triangulum A B C, ad triangulum D E F, *e* ita erit

b 11. sexti.
c 11. quinti.
d 15. sexti.
e 7. quinti.

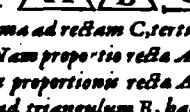
idem

idem triangulum A B C, ad triangulum A B G. Vt autem triangulum A B C, ad triangulum A B G, eiusdem altitudinis, a ita est basis B C, ad basin B G. Igitur vt triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita est B C, ad B G. Atqui cùm tres lineæ B C, E F, B G, sint continuè proportionales, proportio primæ B C, ad tertiam B G, duplicata dicitur proportionis B C, primæ ad E F, secundam. Igitur & triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem habet duplicatam proportionis lateris B C, ad latus E F. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum. a 21. sexti.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; vt est prima ad tertiam, ita esse triangulum super primam descriptum ad triangulum supra secundam simile similiterq; descriptum.

SINT enim tres recta proportionales A, B, C; & super primam A, & secundam B, constituta triangula A, & B, similia, similiterq; descripta. Dico, vt est recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita esse triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, est, per definitionem, duplicatæ proportionis rectæ A, ad rectam B. b *Cùm igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit vt recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.* b 19. sexti.



EODEM modo ostendes, ita esse triangulum supra secundam ad triangulum supra tertiam simile similiterque descriptum, vt est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B, secundam, & A, tertiam constituantur triangula similia similiterq; posita B, & A. Dico, vt est recta C, ad rectam A, ita esse triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata est proportionis C, ad B, hoc est, rectæ B, ad rectam A. c *Cùm igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa: Erit vt C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.* c 19. sexti.

SCHOLIVM.

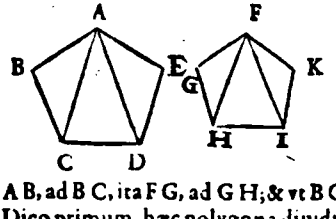
ITAQVE si proportio lateris B C, ad latus E F, notæ sit in numeris, nimirum vt 6. ad 5. cognoscemus quoque ex hac propos. 19 in numeris, quam proportionem habeat triangulum A B C, ad triangulum D E F. Si enim proportio 6. ad 5. continuetur in tribus numeris, hoc modo 36. 30. 25. erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. hoc est, habebit proportionem, cuius denominator est 1 1/5. Quæ enim proportio 36. ad 25. est duplicata proportionis 36. ad 30. sive 6. ad 5. quam latera homologa ponuntur habere: Habent autem & triangula

gula proportionem laterum homologorum duplicatum, & hoc theoremate oſtenſum eſt; erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. Eandem proportionem triangulorum cognoſcemus, ſi denominatorem proportionis laterum homologorum, nimirum $\frac{1}{5}$. in ſe multiplicemus. Productus enim numerus $\frac{36}{25}$. id eſt, $1\frac{11}{25}$. erit denominator proportionis, quæ duplicata eſt proportionis laterum, ac proinde & denominator proportionis triangulorum, quòd hæc etiam duplicata ſit eiuſdem proportionis laterum.

SIC etiam, ſi latera homologa haberent proportionem, quam 10. ad 1. haberent triangula proportionem, quam 100. ad 1. cùm hæc illius ſit duplicata, & hic apparet, 100.10. 1. Vel etiam quia denominator decupla proportionis, id eſt, 10. in ſe multiplicatus, ſignat 100. denominatorem proportionis, quæ decupla duplicata eſt.

xviij. THEOR. 14. PROPOS. 20.

SIMILIA polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter ſe rationem, quam latus homologum ad homologum latus.



SINT polygona ſimilia ABCDE, FGHIK, habentia angulos æquales BAE, GFK; Item angulos B, G, & ſic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; vt quidem AB, ad BC, ita FG, ad GH; & vt BC, ad CD, ita GH, ad HI, &c. Dico primum, hæc polygona diuidi in triangula ſimilia, quæ ſint numero æqualia. Ab angulis enim BAE, GFK, rectæ educantur ad ſingulos angulos oppoſitos, quæ ſint AC, AD, FH, FI; diuiſaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniã verò angulus B, æqualis eſt angulo G, ex hypotheſi, & circa ipſos latera proportionalia; *a* æquiangula erunt triangula ABC, FGH, habentia angulos BAC, GFH, æquales; Item angulos ACB, FHG, lateribus homologis oppoſitos: *b* Ideoq; latera habebunt circa æquos angulos proportionalia, ac propterea inter ſe ſimilia erũt: Eadem ratione erunt ſimilia triangula AED, FKI, habentia angulos EAD, KFI, & angulos ADE, FIK, æquales. Deinde *c* quia eſt vt AC, ad CB, ita FH, ad HG, ob ſimilitudinem triangulorum ABC, FGH; vt autẽ CB, ad CD, ita eſt, ex hypotheſi, HG, ad HI, ob ſimilitudinem polygonorum: *d* erit ex æquo vt AC, ad CD, ita FH, ad HI. Et quoniam angulus BCD, æqualis ponitur

a 6. ſexti.
b 4. ſexti.
c 4. ſexti.
d 22. quinti.

mitur angulo GHI; est autem & ablatus ACB, ostensus æqualis ablato FHG; erit & reliquus ACD, reliquo FHI, æqualis. Quare triangula ACD, FHI, cùm habeant latera circa æquales angulos ACD, FHI, proportionalia, æquiangula erunt, ideoque similia. Eademque ratio est de alijs omnibus triangulis, si plura fuerint. a 6. sexti.

DICO præterea, triangula hæc esse homologa totis polygonis, hoc est, ita esse quodlibet triangulum in vno polygono ad suum correspondens triangulum in altero polygono, vt polygonum ad polygonū. Quoniam enim similia sunt triangula ABC, FGH, erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum AC, FH. Atque eodem argumento proportio triangulorum ACD, FHI, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum AC, FH. Quare vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita erit triangulum ACD, ad triangulum FHI, cùm vtraque hæc proportio triangulorum sit duplicata eiusdem proportionis lateris AC, ad latus FH. Neq; dissimili ratione concludetur quoq; esse triangulum ADE, ad triangulum FIK, vt ACD, ad FHI: Atque ita deinceps, si plura fuerint triangula. Sunt igitur proportionalia triangula vnius polygoni cum triangulis alterius, ita vt triangula vnius sint antecedentia, & triangula alterius consequentia proportionum. Vt autem vnum antecedens ad vnum consequens, b ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia. Igitur vt quodlibet triangulum vnius polygoni ad sibi respondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis. b 12. quinti.

DICO postremò, polygona inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa, hoc est, si homologis lateribus, verbi gratia, AB, FG, inueniatur tertia linea proportionalis, ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK. vt est prima linea AB, ad tertiam inuentam: ac proinde, cùm proportio AB, ad illam tertiam, dicatur duplicata proportionis AB, ad FG, dici quoque proportionem polygoni ad polygonum duplicatam proportionis laterum homologorum AB, FG. Cùm enim sit, vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK; Triangulum verò ABC, ad triangulum FGH, c habeat proportionem duplicatam eius, quam habent latera homologa AB, FG, hoc est, eandem quam habet AB, ad illam tertiam inuentam; habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG, hoc est, eandem quam habet AB, ad illam tertiam inuentam. Itaque similia polygona c 19. sexti.

in si-

in similia triangula diuiduntur, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.



HINC manifestum est, si fuerint tres rectæ proportionales, vt est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum, ad polygonum super secundam simile similiterque descriptum: Vel ita esse polygonum super secundam descriptum ad polygonum super tertiam simile similiterq; descriptum.

HOC non aliter demonstrabitur ex hoc theoremate, quam ostensum fuit corollarium præcedentis theorematis ex suo theoremate. Vt perspicuum est in hac figura apposita.

SCHOLIVM.

QVANDO polygona similia sunt pentagona, vt in figura demonstrabitur etiam hoc modo triangula media ACD, FHI, similia esse. Quoniam anguli ACB, FGH, æquales sunt, ob similitudinem triangulorum ABC, FGH; si auferantur ex angulis BCD, GHI, qui æquales etiam sunt, ob similitudinem polygonorum: æquales erunt & reliqui anguli ACD, FHI. Eademque ratione

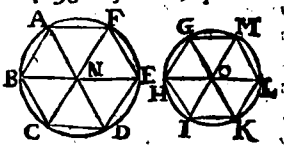
a 32. primi. *æquales ostendentur anguli ADC, FIH: ac propterea a & reliqui*

b 4. sexti. *CAD, HFI, æquales erunt. Igitur cùm æquiangula sint triangula ACD, FHI, b habebunt latera circa angulos æquales proportionalia, ac proinde similia erunt.*

AT verò quando polygona habent plures angulos, demonstrandum est, triangula media similia esse, ex æqualitate, & propos. 6 huius lib. vt in propositione factum est: quia non possunt probari anguli æquales, præter vnum, qui videlicet propè præcedens triangulum simile existit, qualis est angulus ACD, & FHI. Nam angulus ADC, ostendi non potest æqualis angulo FIH; quòd tunc alia adhuc triangula superstruenda essent ad triangula similia AED, FKI &c. Hoc ideo dixerim, ne quis existimet, frustra in propositionis dixisse, ita esse AC, ad CB, vt FH, ad HG: Et ita CB, ad CD, vt HG, ad HI; ac proinde ex æqualitate ita AC, ad CD, vt FH, ad HI; ideoque cùm anguli ACD, FHI, sint æquales, similia esse triangula ACD, FHI. Hæc enim demonstratio est omnino necessaria, connexa, omnibus polygonis quotcunque angulorum; cùm omnia triangula media eo modo ostendantur esse similia, vt perspicuum est. Nam si triangula ADE, FIK, non essent vltima, demonstrarentur similia hoc modo. Quoniam est vt AD, ad DC, ita FI, ad IH, ob similitudinem triangulorum ACD, FHI: Item vt DC, ad DE, ita IH, ad IK, ob similitudinem polygonorum; erit ex æquo, vt AD, ad DE, ita FI, ad IK: Et quia angulus CDE, æqualis permutatur angulo HIK: Est autem & ablatus ADC, ostensus ablato FIH,

FIH, aquales; erit & reliquus ADE, reliquo FIK, aequalis. 2 Quare 26. *sext.*
triangula ADE, FIK, similia erunt, cùm habeant latera circa aequales angulos ADE, FIK, proportionalia. Atq; ita deinceps, si fuerint plura triangula.

QVOD si polygona similia, fuerint aquilatera, & aequiangula, dividentur quoque in similia triangula, & numero aequalia, & homologa totis; ductis à centris circulorum ipsa circumscribentium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona similia, aquilatera, & aequiangula ABCDEF, GHIKLM, quae circumscribantur à circulis circa centra N, O, ex quibus rectae ducantur NA, NB, &c. Dico triangula NCD, OIK, similia esse, & homologa totis polygoniis. Quoniam enim anguli CND, IOK, aequales sunt; (quod aequè submultiplices sint quatuor rectorum. Nam Ꝙtruma; spatium N, & O, quatuor rectis aequalens, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. dividitur in angulos & numero, & magnitudine aequales. Cùm enim anguli in centro N, insistant aequalibus arcubus, b ipsi inter se aequales erunt: eademque ratione anguli in centro O, equales erunt.) Sunt autem & latera circum ipsos proportionalia, cùm Ꝙtrobiq; sit proportio aequalitatis; c Similia erunt triangula NCD, OIK. Eademq; est ratio de caeteris. At verò hae triangula esse homologa totis polygoniis, nullo negotio demonstrabitur. Cùm enim tota polygona sint ipsorum triangulorum aquè multiplicia, Ꝙt patet, d habebunt Ꝙtiquè eandem cum ipsis proportionem.



b 27. *tertij.*

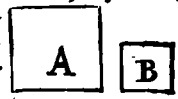
c 6. *sexti.*

d 15. *quinti.*

PORRO ex hoc theoremate facilè demonstrabimus theorema illud, quod iam aliter in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus. Nimirum.

SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius: Et contrà, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.

SIT primùm recta A, dupla rectae B. Dico quadratum A, quadruplum esse quadrati B. Cùm enim omnia quadrata sint similia, Ꝙt constat ex defin. 1. huius lib. erit, per hanc propos. proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B; quae cùm inter se proportionem habeant duplam; erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata est duplae proportionis, Ꝙt hic apparet. 1. 2. 4.



SIT deinde quadratum A, quadruplum quadrati E. Dico latus A, duplum esse lateris B. Cùm enim proportio quadratorum, quae po-

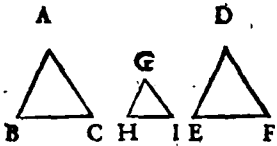
nitur quadrupla, duplicata sit proportionis laterum homologorum, & dictum est; habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata est proportionis duplæ, & in exemplo adducto superius apparet.

ITAQVE si proportio lateris A B, ad latus F G, in polygonis, quæ in propos. describimus, notæ sit in numeris, nimirum & 5. ad 4. cognoscemus quoque ex hac propos. 20. in numeris, quam proportionem habeat polygonum A B C D E, ad polygonum F G H I K. Si enim proportio 5. ad 4. continuetur in tribus numeris, hoc modo, 25. 20. 16. erit polygonum ad polygonum, & 25. ad 16. hoc est, habebit proportionem, cuius denominator est $1\frac{9}{16}$. Quia enim proportio 25. ad 16. est duplicata proportionis 25. ad 20. sive 5. ad 4. quam homologa latera A B, F G, ponuntur habere; demonstratum autem est hoc theoremate, polygona quoque habere duplicatam proportionem eius, quam latera homologa habent, erit polygonum ad polygonum, & 25 ad 16. Idem denominator proportionis polygonorum, cognoscetur, si denominator proportionis laterum homologorum, nimirum $1\frac{1}{4}$. in se multiplicetur. Productus enim numerus $\frac{25}{16}$ id est, $1\frac{9}{16}$. erit denominator proportionis, qua duplicata dicitur eius, quam latera homologa habent, ex ijs, quæ in defin. 10. lib. 5. scripsimus; ac proinde & denominator proportionis polygonorum, cùm hæc sit etiam duplicata eiusdem proportionis laterum homologorum.

SIC etiam, si latera homologa haberent proportionem decuplam, haberent polygona proportionem centuplam, cùm hæc illius sit duplicata, & hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator 10. proportionis decuplæ in se multiplicatus gignit denominatorem 100. proportionis centuplæ, quæ decuplæ duplicata dicitur.

XX. THEOR. 15. PROPOS. 21.

QVÆ eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.



SINT rectilinea A B C, D E F, rectilineo G H I, similia. Dico & ipsa inter se esse similia. Cùm enim propter similitudinem, anguli rectilinei A B C, æquales sint angulis rectilinei G H I; Item eadem de causa anguli rectilinei D E F, æquales angulis eiusdem rectilinei G H I; *a* erunt anguli rectilinei A B C, æquales angulis rectilinei D E F. Rursus cùm ob eandem similitudinem, latera rectilinei A B C, proportionalia sint lateribus rectilinei G H I, ea videlicet ijs, quæ circum æquales sunt angulos; Item eandem ob causam, latera rectilinei D E F, proportionalia lateribus eiusdem rectilinei G H I; *b* erunt quoq; latera rectilinei A B C, lateribus

a 21 *primum.*

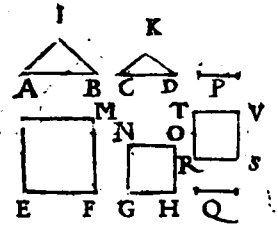
b 11. *quinti.*

recti-

rectilinei DEF, proportionalia, ea nimirum ijs, quæ angulos ambiunt æquales. Atq; adeò per definitionem, similia existent rectilinea ABC, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

THEOR. 16. PROPOS. 22. xxij.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterq; descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similiterq; descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT primum quatuor rectæ AB, CD, EF, GH, proportionales, vt quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH; Constituanturq; super AB, CD, duo quæcunq; rectilinea similia similiterq; descripta ABI, CDK; Item super EF, GH, alia duo quæcunq; rectilinea similia similiterq; descripta, EFML, GHON. Dico & hæc rectilinea esse proportionalia, vt quidem ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. *a* Inueniatur enim rectis AB, CD, tertia proportionalis P; & rectis EF, GH, tertia proportionalis Q, *b* eritq; exæquo, vt AB, ad P, ita EF, ad Q. Vt autem AB, ad P, ita est rectilineum ABI, ad rectilineum CDK, simile similiterq; descriptum, ex corollario propositionis 20. huius lib. vel si fuerint triangula, ex coroll. propos. 19. Et eadem ratione, vt EF, ad Q, ita rectilineum EM, ad rectilineum GO. *c* Igitur vt ABI, ad CDK, ita erit EM, ad GO. Quod est propositum.

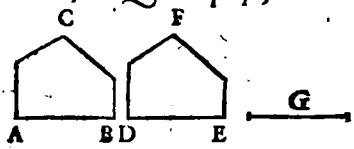
a 11. *sexti.*
xxi. b 22. *quinti.*
c 11. *quinti.*

DEINDE sint ABI, CDK, EM, GO, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas AB, CD, EF, GM, esse quoque proportionales, vt quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH. *d* Inueniatur enim tribus rectis AB, CD, EF, quarta proportionalis RS, super quam describatur rectilineum RSVT, simile rectilineo EM, similiterq; positum; *e* & ob id rectilineo GO. Quoniam igitur est, vt AB, ad CD, ita EF, ad RS; erit quoque, vt iam est ostensum, vt ABI, ad GDK, ita EM, ad RV. Vt autem ABI, ad CDK, ita quoq; ponitur EM, ad GO. *f* Igitur erit vt EM, ad RV, ita EM, ad GO; *g* Atq; idcirco æqualia erunt RV, GO. Quæ cùm sint similia similiterq; posita, consistent necessariò, vt mox ostendemus super rectas RS, GH, æquales. *h* Quare erit vt EF, ad RS, ita EF, ad GH. Ponitur autem EF, ad RS, vt AB, ad CD. *i* Igitur erit quoque vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

d 12. *sexti.*
e 21. *sexti.*
f 11. *quinti.*
g 9. *quinti.*
h 7. *quinti.*
i 11. *quinti.*

LEMMA.

QVOD autem æqualia rectilinea similia similiterque descripta, qualia sunt GO, RV, consistant super rectas æquales, ita ostendetur. Si enim inæquales sunt GH, RS; sit GH, maior. Cùm igitur ob similitudinem rectilineorum, sit vt GH, ad HO, ita RS, ad SV, ponatur autem GH, maior quàm RS, erit quoq; HO, maior quàm SV, & propterea rectilineum GO, maius rectilineo RV, cùm hoc intra ipsum posit constitui; quod est absurdum, cùm sit contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt rectæ GH, RS. Quod est propositum.



ALITER. Sint duo rectilinea ABC, DEF, æqualia, & similia similiterq; posita. Dico latera homologa, cuiusmodi sunt recta AB, DE, esse æqualia. Si enim non credantur æqualia, sit AB, maius, quàm DE, inueniaturq; rectis AB, DE, tertia proportionalis G. Quoniam ergo est, vt AB, ad DE, ita DE, ad G. Est autem AB, maior quàm DE, Erit quoq; DE, maior, quàm G, ac propterea multò maior AB, quàm G. Vt verò AB, ad G, ita est rectilineum ABC, ad rectilineum CEF, per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. Igitur cùm AB, maior sit, quàm G, erit quoq; rectilineum ABC, maius rectilineo DEF, quod est absurdum, cùm positum sit æquale. Non ergo maior est AB, recta quàm recta DE. Sed neq; maior erit eadem ratione; quia & rectilineum ABC, minus ostenderetur rectilineo DEF, quod est contra hypothesin. Quare æquales sunt rectæ AB, DE.

SCHOLIVM.

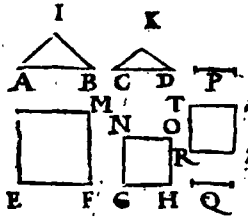


EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales; erunt & rectilinea similia similiterq; descripta ab eis, proportionalia, &c. Si enim sumatur linea media, eiusq; rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, vt hic Euclides demonstrauit. Cùm igitur id, quod à secunda est descriptum, æquale sit ei, quod à tertia, immò idem; manifestum est, quod proponitur.

BREVIVS tota hac propositio demonstrabitur, hoc modo. Ponatur primum esse vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. Dico esse quoq; vt

AB,

A B I, ad C D K, ita E M, ad G O,



a 19. vel 20. sexti.

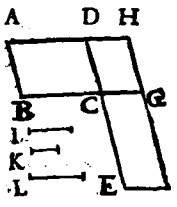
a *Cùm enim sit proportio rectilinei A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D. Item proportio rectilinei E M, ad rectilineum G O, duplicata proportionis E F, ad G H, erunt proportiones A B I, ad C D K, & E M, ad G O, æquales; quandoquidem duplicatæ sunt proportionũ æqualium A B, ad C D, & E F, ad G H. Quod est primum.*

P O N A T V R deinde esse vt A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Dico esse quoq; vt A B, ad C D, ita E F, ad G H. b *Cùm enim sit proportio A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D: Item proportio E M, ad G O, duplicatæ proportionis E F, ad G H: Erunt proportiones A B, ad C D, & E F, ad G H, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ A B I, ad C D K, & E M, ad G O, æquales ponuntur. Quod est secundum.*

b 19. vel 20. sexti.

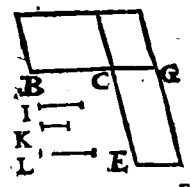
THEOR. 17. PROPOS. 23. xxiiij.

ÆQVIANGVLA parallelogramma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.



S I N T parallelogramma æquiangula A C, C F, habentia angulos B C D, E C G, æquales. Dico proportionem eorum esse compositam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera vnius circa angulũ æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita vt antecedentia proportionum sint in vno parallelogrammo, & consequentia in altero; hoc est, proportionem A C, parallelogrammi ad parallelogrammum C F, compositam esse ex proportionibus rectæ B C, ad C G, rectam, & rectæ D C, ad rectam C E; Vel etiam ex proportionibus rectæ B C, ad rectam C E, & rectæ D C, ad rectam C G. Id est, si sumantur tres lineæ I, K, L, ita vt I, ad K, sit, sicut B C, latus ad latus C G, & K, ad L, vt latus D C, ad latus C E; ita esse parallelogrammum A C, ad parallelogrammum C F, vt est recta I, ad rectam L: ac proinde cùm ex defin. 5. huius lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; proportionem quoq; parallelogrammi A C, ad paralellogrammum C F, dici compositam esse, ex eisdem proportionibus, hoc est, ex proportionibus B C, ad C G, & D C, ad C E. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt B C, C G, efficiant vnam lineam rectam: Quo posito, cùm anguli B C D, E C G, sint æquales, erunt & D C, C E, vna

C E, vna recta linea, vt ad propoſ. 15. lib. 1 ex Proclo demonſtrauimus. Producãtur deinde A D, F G, donec conueniant in H; Sumptaq; recta I, quacunque, *a* inueniatur tribus B C, C G & I, quarta proportionalis K: Itẽ tribus D C, C E, & K, quarta proportionalis L. Quoniam igitur eſt, *b* vt B C, ad C G, ita A C, ad C H. Vt autem B C, ad C G, ita poſita eſt I, ad K, *c* erit quoq; vt A C, ad C H, ita I, ad K. Eodemq; argumẽto oſtendes eſſe, vt H C, ad C F, ita K, ad L. Nam vt D C, ad C E, *d* ita eſt H C, ad C F. Cùm ergo poſita ſit K, ad L, vt D C, ad C E, erit quoq; H C, ad C F, vt K, ad L: *e* Ex æquo igitur erit vt A C, ad C F, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionib. B C, ad C G; & D C, ad C E. Ex his eiſdem ergo proportionibus componetur quoq; proportio parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F. Eademq; ratione oſtendemus, proportionem A C, ad C F, componi ex proportionibus B C, ad C E, & D C, ad C G, dummodò parallelogramma ita coniungantur ad angulos æquales, vt B C, C E, efficiant vnam rectam lineam, &c. Æquiangula itaq; parallelogramma inter ſe rationem habent, &c. Quod erat oſtendendum.



a 12. ſexti.
b 1. ſexti.
c 11. quinti.
d 1. ſexti.
e 2. quinti.

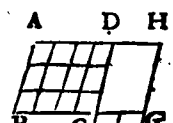
SCHOLIVM.

EXPEDITIVS idem demonſtrabitur hoc modo. Cum enim f 1. ſext. *parallelogrammis, vt prius; ſit Cùm ſit vt A C, ad C H, ita B C, ad C G, & vt C H, ad C F, ita D C, ad C E; Proportio autem A C, ad C F, componatur, per definitionem, ex intermedijs proportionibus A C, ad C H, & C H, ad C F; componetur quoq; eadem proportio A C, ad C F, ex proportionibus B C, ad C G, & D C, ad C E, quæ illis intermedijs ſunt æquales. Quod eſt propoſitum.*

HANC porro propoſ. demonſtrat Euclides in numeris lib. 8. propoſ. 5.

ITAQVE ſi proportiones laterum, nimirum B C, ad C G, & D C, ad C E, notæ ſint in numeris, veniemus quoq; ex hac propoſ. 23. in cognitionem proportionis parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F, in numeris, hoc modo. Sit proportio B C, ad C G, eadem, quæ 11. ad 5. & D C, ad C E, eadem, quæ 7. ad 11. atq; hæ duæ proportiones continuentur in tribus numeris 77. 35. 55. ita vt ſit 77. ad 35. ſicut 11. ad 5. & 35. ad 55. vt 7. ad 11. Et quia proportio 77. ad 55. componitur ex proportionibus 77. ad 35. & 35. ad 55, hoc eſt, ex proportionibus laterum, erit vt 77. ad 55. ita parallelogrammũ A C, ad parallelogrammum C F, g 23 ſexti. *quod proportio parallelogrammorũ ſit etiam compoſita ex eiſdem proportionibus laterum: hoc eſt, proportio parallelogrammorum denominabitur à 1 2/7. Continuabuntur autem duæ datæ proportiones in tribus numeris vel ex ijs, quæ propoſ. 2. lib. 8. demonſtrantur,*

tur, vel certè hoc modo. Posita prior proportione 11. ad 5 fiat vt 7. ad 11. (qua est posterior proportio) ita 5 ad aliud, inuenieturq; numerus $7\frac{6}{7}$. Ita ergo stabunt tres numeri habentes duas illas proportiones, 11. 5 $7\frac{6}{7}$. Quod si tertius remouetur ad hanc vnicã fractionem $\frac{5}{7}$. & alij duo numeri per denominatorem 7. multiplicentur, erunt duo producti numeri 77. 35. & numerator 55 tres numeri integri in eisdem proportionibus.



SIC etiam si proportiones laterum sint, vt 4. ad 2. & 3. ad 3. continuabuntur duæ hæ proportiones in hisce tribus numeris 4. 2. 2. Vel in hisce minimis 2. 1. 1. Et quia primus ad tertiũ est duplus, erit quoq; parallelogrammorum proportio dupla. Id quod ex hac figura perspicuum est. Nam si latus B C, diuidatur in 4. partes æquales, & C G, in 2. At D C, in 3. & C E, in 3. ita vt B C, ad C G, proportionem habeat duplam, at D C, ad C E, proportionem æqualitatis, vt positum est: ducantur autem per puncta diuisionum lateribus parallelæ, continebit parallelogrammum A C, 12. rhombos æquales, at C F, solùm 6. atq; adeò parallelogrammum A C, ad parallelogrammum C F, duplam proportionem habebit, vt dictum est.

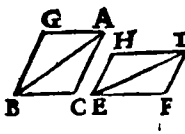
PERSPICVVM autem est, alteram proportionum componentium posse esse maiorem proportione compositi, & æqualem. In priori enim exemplo proportio Laterũ B C, ad C G, est vt 11. ad 5. hoc est, cuius denominator est $2\frac{1}{5}$. qua maior est proportione parallelogrammorum, cuius huius denominator sit $1\frac{2}{5}$. In posteriori verò exemplo proportio Laterũ B C, ad C G, est dupla, quemadmodum & proportio parallelogrammorum. Vt vel hinc etiam constare possit, hanc proportionum compositionem non esse additionem, vt nonnulli interpretes volunt: Item proportionem maioris inæqualitatis posse componi tum ex proportione minoris inæqualitatis, tum ex æqualitatis proportione, quod ijdem interpretes negant. In exemplo namq; priori proportio laterũ D C, ad C E, est minoris inæqualitatis, in posteriori verò, æqualitatis. Sed hæc de re plura scribemus ad finem libri 9.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus nonnulla alia, qua vel ad compositionem proportionum pertinent, vel ex ea demonstrantur, non inutilia, quæ nos quoq; afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonstrationibus; Sunt autem ea, quæ sequuntur.

I.

TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositam.

SINT triangula A B C, D E F, angulũ C, angulo F, habentia æqualẽ.



Dico proportionem trianguli A B C, ad triangulum D E F, compositam esse ex lateribus, hoc est, ex proportione B C, ad E F, & ex proportione A C, ad D F; Vel ex proportione B C, ad D F, & ex proportione A C, ad E F. Com-

a 23. sexti. *pletis enim parallelogrammis C G, F H, erunt ea æquiangula; a atque adeò eorum proportio ex lateribus componetur. Cùm ergo trian-*

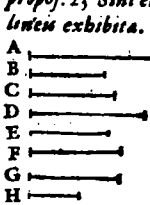
b 34. primi. *gula A B C, D E F, cum ipsis, b quorum sunt dimidia, c eandem*

c 15. quinti. *habeant proportionem; Erit quoque proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, composita ex proportionibus laterum B C, A C, ad latera E F, D F.*

II.

PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, vel pluribus componere.

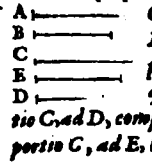
H O C, quo modo fiat, facilè colligitur ex demonstratione huius propos. 23 Sint enim tres proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, in lineis exhibita. Oportet tam ex ipsis vnam proportionem componere.



d 12. sexti. *d Fiat vt A, ad B, ita G, ad H; & vt C, ad D, ita H, ad I; & vt E, ad F, ita I, ad K. Dico proportionem G, ad K, compositam esse ex tribus datis proportionibus. Cùm enim ea composita sit ex proportionibus G, ad H: H, ad I: & I ad K, per defin. 5. huius lib. composita etiam erit ex proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F; quòd his ellæ sumptæ sint æquales.*

III.

PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.



e 12. sexti. *S I T proportio A, ad B, minor auferenda ex proportione maiore C, ad D. e Fiat, vt A, ad B, ita C, ad E; statuatur E, terminus medius inter C, & D. Dico ablatam esse proportionem A, ad B, ex proportione C, ad D, relinquamq; esse proportionem E, ad D. Cùm enim proportio C, ad D, componatur ex proportionibus C, ad E, & E, ad D: Si proportio C, ad E, hoc est, A, ad B, auferatur, relinquetur proportio E, ad D.*

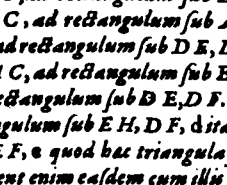
V E R V M hæc compositio, & detractio proportionum non est additio, & subtractio propriè, quia aliàs totum esset æquale parti, & minus, & maior proportio posset detrahi ex minore, vt ad finem lib. 9. ostendemus.

IV.

TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqua-

æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ ſub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.

SINT triangula ABC, DEF, angulum A, angulo D, habentia æqualem. Dico eſſe triangulum ABC, ad triangulum DEF, ſic rectangulum ſub AB, AC, ad rectangulum ſub DE, DF. Ductis enim ad AC, DF, perpendicularibus BG, EH, erunt triangula ABG, DEH, æquiangula, ſic conſtat ex coroll. 1. propoſ. 32. lib. 1. cum duo anguli A, AGB, duobus angulis D, DHE ſint æquales. a Igitur erit, ſic a 4. ſex. *GB, ad BA, ita HE, ad ED: Vt autem GB, ad BA, b ita eſt rectangulum ſub BG, AC, ad rectangulum ſub AB, AC, (Nam ſi baſes ponantur GB, BA, erit eorum eadem altitudo AC,) Et eadem ratione, ſic HE, ad ED, ita eſt rectangulum ſub EH, DF, ad rectangulum ſub DE, DF. c Rectangulum igitur ſub BG, AC, ad rectangulum ſub AB, AC, eſt ſic rectangulum ſub EH, DF, ad rectangulum ſub DE, DF; & permutando, rectangulum ſub BG, AC, ad rectangulum ſub EH, DF, ſic rectangulum ſub AB, AC, ad rectangulum ſub DE, DF. Sed ſic rectangulum ſub BG, AC, ad rectangulum ſub EH, DF, d ita eſt triangulum ABC, ad triangulum DEF, e quod hæc triangula ſint rectangulorum illorum dimidia. (Habent enim eaſdem cum illis baſes AC, DF, altitudineſque eaſdem BG, EH; ac proinde inter eaſdem cum illis parallelas ſunt conſtituta) Igitur erit quoque triangulum ABC, ad triangulum DEF, ſic rectangulum ſub AB, AC, ad rectangulum ſub DE, DF. Quod eſt propoſitum.*



b 1. ſex.

c 11. quinti.

d 11. quinti.

e 41. primi.

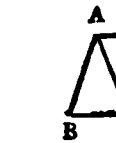
ALITER, & facilius. Ex theoremate 1. huius ſcholij, proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, compoſita eſt ex proportionibus AB, ad DE, & AC, ad DF: f Sed & proportio rectanguli ſub AB, AC, ad rectangulum ſub DE, DF, ex eiſdem proportionibus AB, ad DE, & AC, ad DF, compoſita eſt. Igitur erit triangulum ABC, ad triangulum DEF, ſic rectangulum ſub AB, AC, ad rectangulum ſub DE, DF, quod eſt propoſitum.

f 23. ſexti.

V.

PARALLELOGRAMMA inter ſe æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula ſub lateribus ipſorum æqualem angulum continentibus comprehenſa.

SINT parallelogramma ABCD, EFGH, æquiangula inter ſe, quorum anguli B, & F, ſint æquales. Dico eſſe, ſic parallelogram-



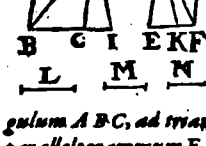
mum B D, ad parallelogrammum F H, ita rectangulum sub A B, B C, ad rectangulum sub E F, F G. Ducta enim diametros A C, E G, quæ angulos æquales B, F, subtendant; habebunt triangula A B C, E F G, angulum B, angulo F, æqualem. Quare, vt iam demonstrauimus, erit, vt triangulum A B C, ad triangulum E F G, ita rectangulum sub A B, B C, ad rectangulum sub E F, F G. a *Cum ergo parallelogramma B D, F H, eandem habeant proportionem, quam triangula A B C, E F G:* b *quòd hæc ipsorum sint dimidia,* c *Erit quoque vt parallelogrammum B D, ad F H, parallelogrammum, ita rectangulum sub A B, B C, ad rectangulum sub E F, F G. Quod erat propositum.*

a 15. quinti.
b 34. primi.
c 11. quinti.

VI.

TRIANGVLA, & parallelogramma inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

SINT triangula A B C, D E F, & parallelogramma C G, E H, quorum altitudines A I, D K. Dico eorum proportionem compositam esse ex proportione basis B C, ad basim E F, & proportione altitudinis A I, ad altitudinem D K. Sint enim primum altitudines æquales, bases verò vel æquales etiam, vel inæquales: Fiatque, vt B C, ad E F, ita L, ad M; Vt autem A I, ad D K, ita M, ad N. Quo facto erit M, ipsi N, æqualis, quòd & A I, ipsi D K, æqualis ponatur: d *Ac proinde erit L, ad N, vt L, ad M, hoc est, vt B C, ad E F.* e *At verò, vt B C, ad E F, ita est triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E M.* f *Igitur quoque erit, vt L, ad N, ita triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E H: Sed proportio L, ad N, composita est ex proportione L, ad M, hoc est, ex proportione basis B C, ad basim E F, & ex proportione M, ad N, hoc est, altitudinis A I, ad altitudinem D K. Proportio ergo trianguli A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammi C G, ad parallelogrammum E H, ex eisdem proportionibus est composita. Quod erat propositum.*



d 7. quinti.
e 1. sex.
f 11. quinti.

SINT iam altitudines A I, D K, inæquales, & A I, maior; bases verò B C, E F, vel æquales, vel etiam inæquales. Fiat, vt A I, ad D K, ita O, ad P; & vt B C, ad E F, ita P, ad Q. Abscissa deinde I L, æqualis ipsi D K; ducatur per L, ipsi B C, parallela L M, secans A C, in N, ungaturque recta B N. Quo iam igitur est triangulum

A B C,

ad B C, ad triangulum N B C; & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum C M, vt altitudo A I, ad altitudinem I L, vel ad D K, ipſi I L, æqualem, hoc eſt, vt O, ad P, per ea, quæ ad 1. propoſ. huius lib. ex Commandino oſtendimus; quòd triangulorum, & parallelogrammorum eadem ſit baſis B C: Et vt triangulum N B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum E H, a ita eſt baſis B C, ad baſin E F, (cum eadem ſit altitudo) hoc eſt, ita P, ad Q: b erit ex æquo A B C, ad D E F, & C G, ad E H, vt O, ad Q.



a 1. ſex.
b 22. quinti.

Quare cum proportio O, ad Q, componatur ex proportione O, ad P, hoc eſt, ex proportione altitudinis A I, ad altitudinem D K, & ex proportione P, ad Q, hoc eſt, ex proportione baſis B C, ad baſin E F. Ex eiſdem proportionibus componetur proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammi C G, ad parallelogrammum E H. Quod eſt propoſitum.

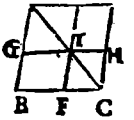
E O D E M pacto oſtendetur proportio trianguli D E F, cuius altitudo minor eſt, ad triangulum A B C, & parallelogrammi E H, ad parallelogrammum C G, compoſitæ eſſe ex proportione baſis E F, ad baſin B C, & proportione altitudinis D K, ad altitudinem A I. Si enim fiat, vt E F, ad B C, ita Q, ad P; & vt D K, ad A I, ita P, ad O, & reliqua fiant, vt prius; c erit triangulum D E F, ad triangulum N B C, & parallelogrammum E H, ad parallelogrammum C M, vt E F, ad B C, hoc eſt, vt Q, ad P. Item triangulum N B C, ad triangulum A B C, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum C G, vt L I, ſeu D K, ad A I, hoc eſt, vt P, ad O; ex iis, quæ ad propoſ. 1. huius lib. ex Commandino demonſtrauimus. d Ex æquo igitur erit, d 22. vt D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ita Q, ad O. Quocirca cum proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc eſt, ex proportione baſis E F, ad baſin B C; & ex proportione P, ad O, id eſt, ex proportione altitudinis D K, ad altitudinem A I; componetur etiam proportio D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ex eiſdem proportionibus. Quod eſt propoſitum.

c 1. ſex.
quinti.

THEOR. 18. PROPOS. 24. xxiij.

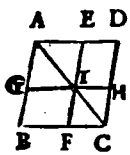
IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, parallelogramma & toti, & inter ſe ſunt ſimilia.

E S T O parallelogrammum A B C D, in quo ducatur diameter A C, & per quodlibet eius punctum I, ducantur duæ rectæ E F, G H, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma F G, F H, circa diametrum, ſimilia eſſe & toti parallelogrammo, & inter ſe ſe. Quod enim æquiangula ſint toti,



facile

facile oſtendetur. Nam angulus GAE, idem eſt, qui angulus
a 29. primi. BAD; *a* & angulus externus AEI, æqualis interno ADC; & angulus AGI, externus interno ABC, & angulus EIG, externus interno BFI; & hic externus interno BCD. Quare æquiangulum eſt EG, parallelogrammum parallelogrammo BD:

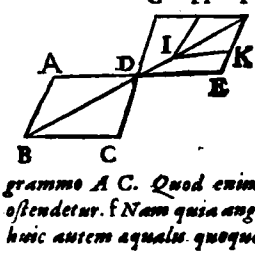


Et eadem ratione eidem BD, æquiangulum erit FH. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonſtrabimus. Cum triangulum AGI, æquiangulum ſit triangulo ABC, & triangulum AEI, triangulo ADC, vt perſpicuum eſt ex 29. propoſ. lib. 1. vel etiam ex co-
b 4. ſex. roll. propoſ. 4. huius lib. *b* erit vt AB, ad BC, ita AG, ad GI, atque ita latera circa æquales angulos B, & G, proportionalia ſunt.
c 4. ſex. Rurſus *c* erit, vt BC, ad CA, ita GI, ad IA; Item vt CA, ad CD,
d 22. quinti. ita IA, ad IE. *d* Ex æquo igitur, vt BC, ad CD, ita eſt GI, ad IE, ac propterea & latera circa æquales angulos BCD, GIE, proportionalia exiſtunt. Non aliter demonſtrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, eſſe proportionalia. Quare per definitionem, ſimile erit parallelogrammum EG, toti parallelogrammo BD. Eadem arte oſtendes parallelogrammum FH, ſimile eſſe eidem parallelogrammo BD; *e* atque adeo & ipſa inter ſe ſimilia
e 21. ſexti. erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

INTELLIGENDA autem ſunt parallelogrammia circa diametrum totius eſſe talia, quæ habeant vnum angulum cum toto parallelogrammo communem, vt manifeſtum eſt ex forma demonſtrationis.

QVOD ſi circa diametrum alicuius parallelogrammi producta conſiſtat parallelogrammum aliud, ita vt duo huius latera recta duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, vel certe illa his ſint parallela, iiſdem fere mediis oſtendetur, hoc illis eſſe ſimile. Pa-



rallelogrammi enim ABCD, diameter BD ſit producta ad F, circa quam conſiſtat parallelogrammum DEFG, cuius duo latera DE, DG, rectas lineas efficiant cum AD, DC, lateribus parallelogrammi AC. Dico parallelogrammum GE, ſimile eſſe parallelogrammo AC. Quod enim ambo inter ſe ſint aquiangula, facile
f 29. primi. *oſtendetur.* f *Nam quia angulus A, aqualis eſt angulo alterno ADG, huic autem aqualis quoque eſt alternus angulus G; erunt aquales*

anguli

anguli A, & G. a Quare his oppositi C, & E, æquales quoque erunt. b Rursus quia anguli A D C, G D E, ad vertícem, sunt æquales, c erunt his quoque oppositi A B C, G F E, æquales. Igitur æquiangula sunt G E, A C, parallelogramma. Quod autem latera habeant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perspicuum. Cum triangulum B A D, æquiangulum sit triangulo D G F, & triangulum B C D, triangulo D E F, vt constat ex propos. 29. lib. 1. d Erit vt B A, ad A D, ita D G, ad G F. Rursus vt A D, ad D B, ita G F, ad F D, & vt D B, ad D C, ita F D, ad F E, e ac propterea ex æquo vt A D, ad D C, ita G F, ad F E. Sunt igitur latera circa angulos A, A D C, proportionalia lateribus circa angulos G, G F E, quis illis æquales sunt. Non secus ostendes, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia esse. Quare similia sunt parallelogramma A C, G E.

a 34. pri mi. b 15. pri mi. c 34. pri mi. d 4. sex. e 22. quinti.

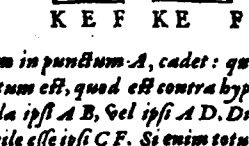
QVOD si circa eandem diametrum consistat parallelogrammum H I K F, habens latera parallela lateribus parallelogrammi A C, idem demonstrabitur. Nam productis A D, G D, donec occurrant rectis F K, F H, productis in E, & G; erit H K, simile ipsi G E, f vt Euclides demonstrauit: Atqui eidem G E, simile est quoque A C, vt nunc ostendimus. g Igitur & H K, A C, inter se similia sunt. Quod erat propositum.

f 24. sexti. g 21. sexti.

SED & absoluemus cum Polotario sequens problema.

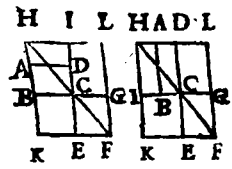
DATIS duobus parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus: ex quouis illorum alteri simile resecare.

DVO parallelogramma æquiangula, sed non similia, sint A B C D, C E F G, & ex A B C D, abscindendum sit parallelogrammum ipsi C E F G, simile. Coniungantur ambo ad angulos æquales B C D, E C G, ita vt sit vna linea recta B C G, & propterea, vt ad propos. 15. lib. 1. demonstratum est, E C D, quoque vna recta linea. Deinde ducta diameter F C, producatur, donec in H, secet vel latus A D, vel latus A B, (Neque enim in punctum A, cadet: quia A C, esset simile ipsi C F, vt demonstratum est, quod est contra hypothesim) & per H, ducatur H I, parallela ipsi A B, vel ipsi A D. Dico parallelogrammum abscissum H C, simile esse ipsi C F. Si enim totum parallelogrammum K L, compleatur, erunt H C, C F, circa diametrum. Quare inter se similia erunt, vt Euclides demonstrauit in hac propositione.



EADEM autem arte fere alterutrum ipsorum augeri poterit, vt fiat simile alteri. Sit enim augendum A B C D, vt fiat ipsi C E F G, simile. Coniungantur vti prius, & diameter F C, extendatur, donec in H, secet vel latus B A, protractum, vel latus D A, protractum.

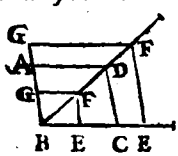
Neque



Neque enim in punctum A, cadet: quia AC, esset ipsi CF, simile, & demonstratum est, quod non ponitur. Deinde per H, ducatur H1, parallela ipsi AD, vel ipsi AB, donec secet vel latus CD, protractum, vel CB, protractum in I. Dico parallelogrammum auctum HC, simile esse parallelogrammo CF. Nam si compleatur totum parallelogrammum KL, consistent HC, CF, circa diametrum; a *Quare similia inter se erunt.*

a 24. *sexti.*

PERSPICVVM autem est ex demonstratione huius theorematis facta ab Euclide, & ex probatione theorematis à nobis propositi in hoc scholio, parallelogramma circa eandem diametrum non solum esse similia, verum etiam similiter posita. Vnde proposito quouis parallelogrammo ABCD, si mauis debeat describi illi simile similiterque positum, producendum erit latus vnum, nempe BC; Atque ex E, quolibet puncto vltra C, ipsi CD, parallela EF, ducenda, secans diametrum BD, productam in F, & per F, ducenda FG, parallela ipsi AD, occurrens rectæ BA, productæ in G. b *Erit enim parallelogrammum GE, simile similiterq; positum ipsi AC, & maius eodem. Quod si minus debeat describi, sumendum erit punctum E, citra C, & reliqua peragenda, vt prius, vt figura indicat.*



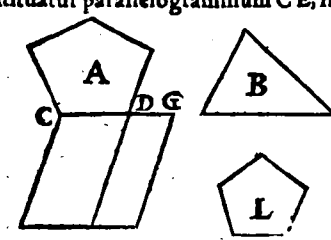
b 24. *sexti.*

XXV. PROBL. 7. PROPOS. 25.

DATO rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituere.

SINT data duo rectilinea A, & B; sitq; constituendum aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A, æquale vero ipsi B. Super CD, vnum latus rectilinei, cum simile debeat constitui, *e* constituatur parallelogrammum CE, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam DE, in angulo EDG, qui æqualis sit angulo DCF, parallelogrammum DH, æquale ipsi B, eritque tam CDG, quam FEH, linea vna recta, vt demonstratum est propos. 45. lib. I. *d* Inueniatur iam inter rectas CD, DG, media proportionalis IK; *e* super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi A, similiterq; positum. Dico L, æquale esse alteri rectilineo B.

c 44. vel 45. *primi.*



d 13. *sexti.*

e 18. *sexti.*

Cum

Cum enim ſint proportionales tres rectæ C D, I K, D G; erit per coroll. propoſ. 19. vel 20. huius lib. vt C D, prima ad D G, tertiam, ita A, rectilineum ſuper primam C D, ad rectilineum L, ſuper I K, ſecundam ſimile ſimiliterq; deſcriptum: *a* Vt autem C D, ad D G, ita eſt parallelogrammum C E, ad parallelogrammum D H, eiuſdem altitudinis. *b* Igitur erit vt C E, ad D H, ita A, ad L. *c* Vt autem C E, ad D H, ita eſt A, ad B: propterea quod parallelogrammum C E, rectilineo A; & parallelogrammum D H, rectilineo B, conſtructum eſt æquale. *d* Quare erit vt A, ad B, ita A, ad L; *e* propterea æqualia erunt rectilinea B, & L: Eſt autem & L, ſimile ipſi A, ſimiliterque poſitum per conſtructionem. Dato igitur rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum, & alteri dato æquale idem conſtituimus. Quod erat faciendum.

a 1. ſexti
b 11. quinti.
c 7. quinti.
d 11. quinti.
e 9. quinti.

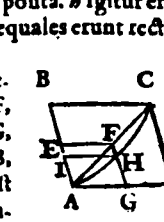
THEOR. 19. PROPOS. 26. xxiij.

SI à parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit, & ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum conſiſtit.



EX parallelogrammo B D, abſciſſum ſit parallelogrammum E G, ſimile ei ſimiliterq; poſitum, habens cum ipſo angulum communem E A G. Dico E G, conſiſtere circa diametrum totius B D. Ducantur enim rectæ A F, C F, quæ ſi fuerint vna linea recta, perſpicuum eſt, cum A F, ſit diameter ipſius E G, & A C, diameter ipſius B D, parallelogrammum E G, conſiſtere circa diametrum A F C, totius parallelogrammi. Quod ſi A F, C F, non dicantur efficere lineam rectam, ducatur totius parallelogrammi diameter A C, ſecans latus E F, in H, puncto, per quod ipſi F G, parallela agatur H I. Quoniam igitur parallelogramma B D, E I, ſunt circa eandem diametrum A H C; *f* ipſa erunt ſimilia, ſimiliterque poſita. *g* Quare erit vt B A, ad A D, ita E A, ad A I. Sed vt B A, ad A D, ita quoque eſt E A, ad A G, quod parallelogramma B D, E G, ponantur etiam ſimilia, ſimiliterque poſita. *h* Igitur erit vt E A, ad A I, ita E A, ad A G. *i* Ac propterea æquales erunt rectæ A I, A G, pars, & totum: quod eſt abſurdum.

f 24. ſexti.
g 1. def. ſexti.
h 11. quinti.
i 9. quinti.

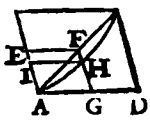


QVOD ſi dicatur recta A H C, ſecare alterum latus F G. Tunc ducta H I, parallela ipſi E F, *k* erunt rurſus ſimilia parallelogramma B D, I G, ſimiliterque poſita. *l* Quare erit vt D A, ad A B, ita G A, ad A I: Sed vt D A, ad A B, ita quoq; eſt C A, ad A E, ob ſimilitudinem parallelogram-

k 24. ſexti.
l 2. def. ſexti.

morum

a 11. quinti.



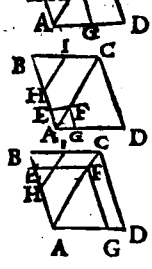
b 9. quinti.

morum BD, EG. *a* Igitur erit vt GA, ad AI, ita GA, ad AE, *b* ideoque æquales erunt rectæ AI, AE; pars & totum: Quod est absurdum. Constituunt ergo rectæ AF, FC, vnam rectam lineam; hoc est, ducta diameter AC, transit per punctum F; & ducta diameter AF, cadit in punctum C. Itaque si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

ALITER idem theorema demonstrabimus ostensiue, hoc modo. Diuisis lateribus AB, BC, bifariam in punctis H, I, siue punctum H, cadat in punctum E, siue supra siue infra, ducantur rectæ HI, AF. Quoniam igitur, propter similitudinem parallelogrammorum, est ℣t *AB, ad BC, ita AE, ad EF; Vt autem totum AB, ad totum BC, ita est dimidia HB, ad dimidiam BI; d Erit* ℣t *HB, ad BI, ita AE, ad EF. Triangula igitur HBI, AEF, cum habeant circa angulos B, E, (qui æquales sunt, ob similitudinem parallelogrammorum BD, EG: Vel quia* ℣num *est internum, & alter externum in parallelis BC, EF, e quæ parallelæ sunt, cum* ℣traque parallela *sit ipsi AD,) latera proportionalia, f erunt æquiangula, habebuntq; æquales angulos BHI, EAF, externum, & internum inter rectas HI, AF. g Quare parallelæ erunt rectæ HI, AF. Quoniam* ℣erò *recta, quæ ex puncto A, ad punctum C, duci concipitur, h parallela quoque est rectæ HI, propterea quod latera AB, BC, trianguli tunc constituti ABC, proportionaliter essent secta in H, & I,* ℣tpote *bifariam; efficitur,* ℣t *ducta recta AC, eadem fiat quæ AF, transeatq; per punctum F, cum ex puncto A, solum* ℣na *linea parallela rectæ HI, possit duci,* ℣t *manifestum est. Consistunt ergo BD, EG, parallelogramma similia, similiterque posita circa eandem diametrum AFC. Quod est propositum.*

c 15. quinti. d 11. quinti. e 30. primi. f 6. sex. g 28. primi. h 2. sex.



QVOD si duo parallelogramma similia similiterque posita non habeant angulum communem, sed ℣num *sit extra aliud, hæc tamen lege,* ℣t *ita sint connexa inter se secundum duos eorum angulos æquales,* ℣t *duo latera* ℣nius *cum duobus lateribus alterius duas rectas lineas constituant: demonstrabimus iisdem fere mediis, ea circa eandem consistere diametrum. Sint enim duo parallelogramma similia similiterque posita BD, EG, quæ ad angulos æquales BCD, GCE, ita coniungantur,* ℣t *lineæ BC, CG, in directum iaceant, & ob id, per ea, quæ ad propos. 15. lib. 1. ostendimus, lineæ DC, CE,* ℣nam *quamque lineam*

lineam rectam componant. Dico parallelogramma B D, E G, circa eandem consistere diametrum, hoc est, diametrum A C, cum diametro F C, & unam rectam lineam conficere. Si enim A C, F C, non faciunt & unam lineam rectam, ducatur ex A, ad F, linea recta secans B C, in H, puncto, per quod agatur H I, parallela ipsi C D, occurrens rectæ F E, productæ in K. Quoniam igitur parallelogramma B I, K G, circa eandem diametrum A H F, productæ consistunt, efficiuntque duo rectia B H, H I, cum duabus rectis H G, H K, duas lineas rectas, ipsæ erunt similia similiterque positæ, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Quare erit & H B, ad B A, ita F K, ad K H. a Habet autem C B, maior ad B A, proportionem maiorem, quam H B, minor ad eandem B A; & est & C B, ad B A, ita F E, ad E C, eo quod parallelogramma B D, E G, ponuntur similia similiterque descripta. Igitur & F E, ad E C, hoc est, ad sibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quam H B, ad B A, hoc est, quam F K, ad K H. Quam ob rem si F E, ad K H, maiorem habeat proportionem, quam F K, ad eandem K H; b erit E F, maior quam F K; pars quam totum. Quod est absurdum.

a 8. quinti.

b 10. quinti.

QVOD si quis dicat, rectam A H F, secare latus C D. Tunc per H, ducta recta B C, parallela H I, quæ occurrat rectæ F G, protractæ in K; erunt rursus similia similiterque posita parallelogramma I D, E K, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. ostendimus. Quare erit & H D, ad D A, ita F K, ad K H. c Habet autem C D, ad D A, maiorem proportionem, quam H D, ad D A; Et est & C D, ad D A, ita F G, ad G C; propterea quod parallelogramma B D, E G, similia similiterque posita sunt concessa. Igitur & F G, ad G C, hoc est, ad sibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quam F K, ad K H; d ideoque F G, maior erit, quam F K; pars quam totum: Quod est absurdum.

c 8. quinti.

d 1. quinti.

OSTENSIVE idem hac ratione ostendetur. Quoniam propter similitudinem parallelogrammorum B D, F G, anguli, B, E, sunt æquales, estque & A B, ad B C, ita C E, ad E F; habebunt triangula A B C, C E F, circa angulos æquales B, & E, latera proportionalia; e atque idcirco æquiangula erunt, habebuntque angulos B C A, E F C, æquales. Addito ergo communi angulo B C F, erunt duo anguli B C A, B C F, duobus angulis E F C, B C F, æquales: f Sed hi inter parallelas B C, E F, æquales sunt duobus rectis. Igitur & B C A, B C F, duobus erunt rectis æquales; g At propterea

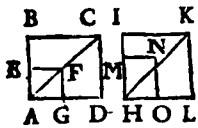
e 6 sex.

f 29 primi.

g 14. primi.

propterea A C, F C, vnam componunt rectam lineam. Quod est propositum.

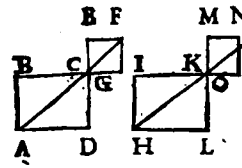
RECTE autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum à toto ablatum non solum esse toti simile, verum etiam similiter positum, vt ostendatur circa eandem esse cum toto diametrum. Nam si ex altera parte longiori B D, abscindatur altera parte longior E G, circa eandem cum toto diametrum consistens,



a 24. sexti.

a erit E G, simile similiterque positum. At verò si in rectangulo I L, quod sit aequilaterum, & aequiangulum ipsi B D, sumatur H M, aequalis ipsi E F, & M N, aequalis ipsi A E, &c. erit quidem rectangulum M O, aequale & simile rectangulo E G, propter aequalitatem laterum, & angulorũ, qui sunt recti; & ob id simile rectangulo I L; sed tamen quia non est similiter positum, non consistit circa eandem cum toto I L, diametrum.

IDEM quoque hic perspicitur in rectangulis similibus, quorum vnum est extra alterum, secundum tamen angulos eorum ita inter se connexa, vt duo latera vnius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualia sunt parallelogramma rectangula B D, E G; & I L, M O; in quibus E G, quidem consistit circa eandem diametrum cum rectangulo B D, quoniam est similiter positum: At verò M O, minime consistit circa eandem diametrum cum rectangulo I L, quia non est similiter positum, quamuis simile sit, cum prorsus sit aequale ipsi E G. Nam K M, aequalis est ipsi E F, & M N, ipsi F C, &c.

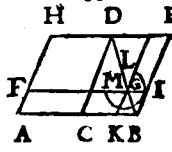


xxvj. THEOR. 20. PROPOS. 27.

OMNIVM parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus similiterque positis, ei, quod à dimidia describitur; maximum id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

DETVR recta A B, diuisa bifariam in C, superque eius dimidiam B C, constituatur quodcunq; parallelogrammum C D E B, cuius diameter B D. Si igitur compleatur totum parallelogrammum A B E H, erit parallelogrammum A D, super dimidiam A C, consistens, applicatum secundum A B, deficiens parallelogrammo C E, & existens simile defectui C E. Dico parallelogrammum A D, ad dimidiam A C, applicatum deficiensq; parallelogrammo C E, maximum esse omnium, quæ secundum A B, rectam applicantur,

cantur, deficiuntq; parallelogrammis similibus similiterque positis ipsi C E. Sumpto enim puncto G, vtcunque in diametro B D, & ductis per G, rectis F G I, K G, quæ sint parallelæ rectis A B, B E; erit parallelogrammum F K, secundum rectam A B, applicatum, deficiens parallelogrammo K I, *a* quod ipsi C E, simile est, similiterque positum, cum sit circa eandem cum C E, diametrum. *b* Quoniam vero complementa C G, G E, æqualia sunt; si addatur commune K I, erunt quoq; æqualia C I, K E: *c* Est autem C I, æquale ipsi C F, propter bases æquales A C, C B. Igitur & C F, K E, æqualia erunt; additoq; communi C G, æqualia erunt parallelogrammum A G, & gnomon L M. Quare cum C E, maius sit gnomone L M, (continet enim C E, propter gnomonem, parallelogrammũ adhuc D G,) erit quoque A D, *d* æquale existens ipsi C E, propter bases æquales A C, C B, maius quam parallelogrammũ A G; eodem parallelogrammo D G. Eodemque modo ostenderur A D, maius esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum rectam A B, applicantur, vt punctum G, sit inter puncta B, & D, hoc est, quæ occupant maiorem lineam semisse A C, habentque minorem altitudinem, quam A D; dummodo defectus similes sint ipsi C E.

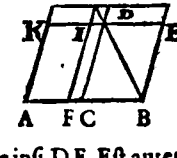


a 24. *sexti.*
b 43. *primi.*
c 36. *primi.*

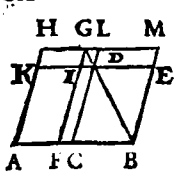
ALITER demonstrabitur A D, maius esse parallelogrammo A G, hoc modo. *e* Parallelogramma F D, D I, sunt æqualia, cum bases H D, D E, sint æquales: Est autem D I, maius quam G E, hoc est, quam complementum C G, (*f* quod ipsi G E, æquale est,) parallelogrammo D G. Igitur & F D, maius erit, quam C G, parallelogrammo eodem D G. Atq; idcirco addito communi C F; maius erit A D, quam A G, parallelogrammo eodem D G.

e 36. *primi.*
f 43. *primi.*

QVOD si punctum G, sumatur in diametro B D, producta extra parallelogrammum C E. Tunc ducta per G, recta H M, quæ sit parallela ipsi A B, occurratque rectis A K, B E, protractis in H, & M. Item ducta G F, parallela ipsi A H, erit parallelogrammum A G, applicatũ secundum rectam A B, deficiens parallelogrammo F M, *g* quod ipsi C E, est simile similiterque positum, cum sit circa eandem diametrum cum C E. Dico adhuc maius esse A D, ipso A G. Protracta enim C D, ad L, erunt æquales rectæ H L, L M, *h* cum æquales sint æqualibus A C, C B; *i* ideoque æqualia parallelogramma H D, D M. *k* Cum igitur D M, sit æquale complemento D F; erit & H D, æquale ipsi D F. Est autem H D, maius quã H I, parallelogrammo I L. Quare & D F, maius erit quam H I, eodem parallelogrammo I L. Ac propterea communi addito A I, maius erit A D, quam A G, eodem parallelogrammo



g 4. *sext.*
h 34. *primi.*
i 36. *primi.*
k 43. *primi.*



IL. Iisdem argumentis concludes A D, maius esse quocunq; parallelogrammo, ita applicato secundum rectam A B, vt punctum G, sit vltra D, in diametro B D, producta; hoc est, quod occupat minorem lineam semissi A C, habetque maiorem altitudinem, quam A D, dummodo defectus similis existat parallelogrammo C E. Itaque omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, &c. Quod erat demonstrandum.

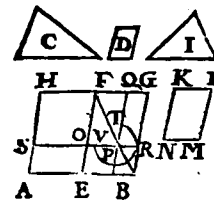
SCHOLIVM.

MANIFESTVM autem est, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, esse vel maiorem dimidiata A C; qualis est A K, in priori figura, vel minorem; cuiusmodi est A F, in figura posteriori: prout punctum G, sumitur vel in diametro B D, vel in ea producta ad partes D.

xxvi). ## PROBL. 8. PROPOS. 28.

A D datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus, & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

A D datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo, quod sit simile dato alteri parallelogrammo D. Secta A B, bifariam in E, super medietatem E B, a describatur parallelogram-
a 18. sexti. mum E F G B, simile ipsi D, similiterque positum; & compleatur totum parallelogrammum A H G B. Si igitur A F, æquale est ipsi C; cum sit applicatū ad A B, deficiens parallelogrammo E G, simili ipsi D; factum erit, quod iubetur. Si autem A F, maius est quam C. (Neque enim minus esse debet. Nam cum per propos. præcedentem, ipsum sit omnium applicatorum maximū, dummodo defectus sint similes, non posset applicari vllum ad A B, quod esset ipsi C, æquale, sed omnia essent minora. Propterea adiunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoque sibi æquale E G, maius quam C. Sit,



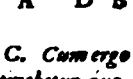
igitur

igitur maius rectilineo I. (Qua vero ratione excessus duorum rectilineorum sit inquirendus, docuimus ad propos. 45. lib. 1.) *a* & constituatur parallelogrammum K L M N, simile quidem simi- a 25. *sexti.*
literque positum ipsi D, seu ipsi E G, æquale vero excessui inuento I; vt sit E G, æquale rectilineo C, & parallelogrammo K M, simul; & ob id maius quam K M. Cum igitur ob similitudinem sit vt E F, ad F G, ita N K, ad K L; erunt quoque latera E F, F G, maiora lateribus N K, K L. Si enim his illa forent æqualia, vel minora, esset etiam E G, æquale ipsi N L, vel minus, vt constat. Quare abscissis rectis F O, F Q, quæ sint æquales ipsis K N, K L, & completo parallelogrammo F Q P O; erit hoc ipsi L N, æquale, & eidem simile similiterque positum, & propterea ipsi E G: *b* atque adeo b 26.
circa eandem diametrum cum E G, consistet, quæ sit B F. Produ- *sexti.*
ctis iam rectis Q P, O P, erit parallelogrammum A P, ad rectam A B, applicatum deficiens parallelogrammo P B, *c* quod simile c 24.
est ipsi E G, similiterque positum, & propterea ipsi D. Dico igitur *sexti.*
A P, æquale esse ipsi C, rectilineo. *d* Nam cum P G, æquale sit com- d 43.
plemento P E; si addatur commune P B, erit & B Q, æquale ipsi *primi.*
E R, hoc est, ipsi E S, *e* quod æquale est ipsi E R, propter bases e 36.
æquales E A, E B. Quare si æqualibus A O, B Q, commune adda- *primi.*
tur E P, erit A P, æquale gnomoni T V. Sed gnomon T V, æqualis est rectilineo C. (Nam cum E G, parallelogrammum æquale sit ipsi C, vna cum L N; si auferantur æqualia Q O, L N, remanebit gnomon T V, ipsi C, æqualis.) Igitur & A P, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo A B, applicatum est parallelogrammum A P, deficiens parallelogrammo P B, quod simile est dato parallelogrammo D, & æquale existens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

MOVENT hoc loco dubium quoddam Iacobum Peletarium, & Nicolaum Tartalea, quod iuxta nostram constructionem locum non habet, cum super E B, constituerimus E G, parallelogrammum non solum simile ipsi D, verum etiam similiter positum; quod ipsi minimè fecerunt. Qua de re, si placeat, consule eorum commentarios.

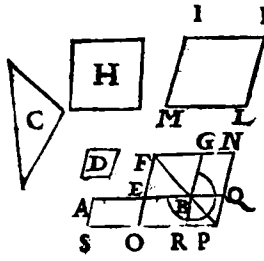
PERSPICVVM autem est, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipsum applicatum æquale esse rectangulo, quod sub segmentis lineæ per applicationem factis continetur. Vt si ad D B, applicetur A C, deficiens quadrato C B, erit A C, applicatum, rectangulum contentum sub A D, & D C. Cum ergo D C, æqualis sit ipsi D B, propter quadratum C B; continebitur quoque A C, sub segmentis A D, D B, per applicationem factis. Quod est propositum.



xxviij. PROBL. 9. PROPOS. 29.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Diuisa AB, bifariam in E; *a* super dimidiam EB, constituatur parallelogrammum EFGB, simile ipsi D, similiterque positum. *b* Deinde rectilineo C, & parallelogrammo EG, constituatur quadratum H, æquale; *c* cui quidem fiat parallelogrammum IKLM, æquale, simile vero ipsi EG, similiterque positum; erito; propterea IKLM, maius quam EFGB, quandoquidem æquale est quadrato H, quod constructum est rectilineo C, vna cum parallelogrâmo EG, æquale. Cum igitur ob similitudinem MK, EG, sit vt MI, ad IK, ita EF, ad FG, erunt quoque latera MI, IK, lateribus EF, FG, maiora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, esset quoque MK, vel æquale ipsi EG, vel minus, vt perspicuum est. Productis igitur FE, FG, vt rectæ FO, FN, æquales sint rectis IM, IK, & completo parallelogrammo ON; erit hoc simile, similiterque positum ipsi EG, cum sit æquale ipsi MK, & simile, similiterque positum. *d* Quare ON, EG, circa eandem diametrum consistent, quæ sit FP. Productis iam AB, GB, ad Q, R; & PO, donec cum AS, ipsi FO, parallela conueniat in S, erit parallelogrammum AP, applicatum ad rectam AB, excedens parallelogrammo QR, *e* quod simile est ipsi EG, ac propterea ipsi D. Dico igitur AP, æquale esse rectilineo C. *f* Nam cum AO, ER, sint æqualia, *g* & ER, æquale complemento BN, erit & AO, ipsi BN, æquale. Addito ergo communi OQ, fiet AP, æquale gnomoni EPG. Atqui gnomon EPG, æqualis est rectilineo C. (Nam cum MK, hoc est, ON, æquale sit rectilineo C, vna cum EG; si auferatur commune EG, remanebunt æqualia gnomon EPG, & rectilineum C.) Igitur & AP, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est AP, excedens parallelogrammo RQ, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.



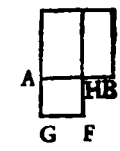
a 18. *sexti.*
b 14. *secund.*
c 25. *sexti.*
d 26. *sexti.*
e 24. *sexti.*
f 36. *primi.*
g 43. *primi.*

PROBL.

PROPOSITAM rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.

SIT recta AB, secanda extrema ac media ratione. Descripto super eam quadrato ABCD; *a* ad latus DA, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC, & excedens parallelogrammo AF, simili ipsi quadrato, ita vt sit AF, quoque quadratum, cum quadrato solum quadratum sit simile. Secet autem recta EF, rectam AB, in H. Dico AB, in H, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint DF, & AC, si demantur commune AE, remanebunt æqualia GH, HC, quæ cum habeant angulos æquales AHF, BHE, vtpote rectos, *b* erunt latera circa illos reciproca, hoc est, erit vt EH, hoc est, vt AB, ipsi EH, æqualis, ad HE, hoc est, ad AH, ipsi HF, æqualem, vt AH, ad HB. Quare cum sit, vt tota AB, ad segmentum AH, ita segmentum AH, ad segmentum HB, secta est AB, extrema ac media ratione, per definitionem. Propositam ergo rectam lineam terminatam, &c. Quod erat faciendum.

a 29. *sexti.*



b 14. *sexti.*

ALITER quoque ostendemus AB, esse sectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur AB, AH, HB, sitque rectangulum HC, comprehensum sub prima AB, & tertia HB, æquale quadrato mediæ AH; *c* erunt ipsæ proportionales: vt AB, quidem prima ad AH, secundam, ita AH, secunda ad HB, tertiam. Quare per definitionem secta est AB, in H, extrema ac media ratione.

c 17. *sexti.*

ALITER totum problema conficiemus. *d* Diuidatur AB, in C, ita vt rectangulum sub tota AB, & segmento CB, æquale sit quadrato alterius segmenti AC. Dico AB, in C, esse sectam extrema ac media ratione. *e* Erunt enim rursus, vt prius, tres lineæ AB, AC, CB, continuè proportionales. Constat ergo propositum.



d 11. *secundo.*

e 17. *sexti.*

SCHOLIVM.

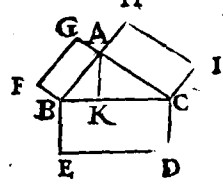
PRAXIS diuisionis lineæ rectæ extrema ac media ratione instituenda est, vt ad propos. 11. lib. 2. tradidimus.

HABET autem admiranda hæc sectio lineæ extrema ac media ratione insignes vtilitates, proprietatesque, vt in libris Stereometria manifestum erit, vt non sine causa à plerisque Mathematicis linea ita diuisa diuinam quodammodo, ob admirabilem eius vim, ac naturam, dicatur habere proportionem: Ab aliis verò simpliciter vocetur diuisa proportionaliter.

THEOR. 21. PROPOS. 31.

IN rectangulis triangulis, figura quæuis à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

TRIANGVLVM rectangulum sit A B C, habens angulum B A C, rectum; describaturque super B C, quæcunque figura rectilinea B C D E, a cui similes similiterque positæ super A B, A C, constituantur A B F G, A C I H. Dico figuram B D, æqualem esse duabus figuris A F, A I. Demissa enim A, ad B C, perpendiculari A K, erit per corollarium propos. 8. huius lib. vt B C, ad C A, ita C A, ad C K. Quare vt B C, ad C K, prima linea ad tertiam, ita figura B D, super primam, ad figuram C H, super secundam similem similiterque positam, per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. & conuertendo vt C K, ad B C, ita figura C H, ad figuram B D. Non secus ostendetur, esse quoque vt B K, ad B C, ita figuram B G, ad figuram B D; cum tres lineæ B C, B A, B K, sint quoque proportionales, &c. Quoniam igitur est vt C K, prima quantitas ad B C, secundam, ita C H, tertia ad B D, quartam; Item vt B K, quinta quantitas ad B C, secundam, ita B G, sexta ad B D, quartam; b erit vt prima C K, cum quinta B K, ad B C, secundam, ita tertia C H, cum sexta B G, ad B D, quartam: Sunt autē prima C K, & quinta B K, simul æquales secundæ B C. Igitur tertia C H, & sexta B G, simul æquales quoq; erūt quartæ B D. Quod est propositū.



a 18. sexti.

b 24. quinti.

ALITER. c Cum triangulo A B C, simile sit triangulum K A C, sintque homologa latera ipsorum B C, C A; (Nam est vt B C, ad C A, in triangulo A B C, ita C A, ad C K, in triangulo K A C,) d habebit triangulum K A C, ad triangulum A B C, duplicatam proportionem eius, quam habet C A, ad B C. e Habet autem & figura C H, ad figuram B D, proportionem duplicatam proportionis C A, ad B C. f Quare erit vt triangulum K A C, ad triangulum A B C, ita figura C H, ad figuram B D. Eadem ratione ostendetur esse, vt triangulum K B A, ad triangulum A B C, ita figuram B G, ad figuram B D. Quoniam ergo rursus est, vt K A C, prima quantitas ad A B C, secundam, ita C H, tertia ad B D, quartam; Item vt K B A, quinta ad A B C, secundam, ita B G, sexta ad B D, quartam; g erit & prima K A C, composita cum quinta K B A, ad secundam A B C, ita composita tertia C H, cum sexta B G, ad quartam B D: Sunt autem K A C, K B A, prima & quinta

c 8. sex.

d 19. sexti.

e 19. & 20 sex.

f 11. quinti.

g 24. quinti.

quinta simul, æquales secundæ A B C. Igitur C H, B G, tertia & sexta simul, æquales quoque erunt quartæ B D. Quod est propositum.

ALITER. Vt quadratum rectæ A C, prima quantitas, ad quadratum rectæ B C, secundam quantitatem, ita est figura C H, tertia quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem; *a* cùm vtraque proportio sit duplicata proportionis A C, ad B C. Similiter erit vt quadratum rectæ A B, quinta quantitas, ad quadratum rectæ B C, secundam quantitatem, ita figura B G, sexta quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem. *b* Quocirca erit, vt prima quantitas cum quinta, nimirum quadratum rectæ A C, cum quadrato rectæ A B, ad secundam, hoc est, ad quadratum rectæ B C, ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura C H, cum figura B G, ad quartam, videlicet ad figuram B D: *c* Sunt autem quadrata rectarum A C, A B, simul æqualia quadrato rectæ B C. Igitur & figuræ C H, B G, figuræ B D, æquales erunt. Quod est propositum. In rectangulis igitur triangulis, figura quæuis, &c. quod erat ostendendum.

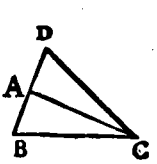
a 19. vel 20. sexti.
b 24. quinti.
c 47. primi.

SCHOLIVM.

VIDES igitur, longè esse vniuersalius theorema hoc Euclidis, quod sese ad omnes figuras similes similiterque descriptas extendit, quàm illud Pythagoræ inuentum, quod sola quadrata includit, vt propos. 47 primi lib. monuimus. Videtur tamen & theorema illud, quod ibi ex Pappo demonstrauimus, aliqua ex parte adhuc esse vniuersalius quàm hoc, cùm illud de omni triangulo, parallelogrammis etiam non similibus; Hoc verò de triangulo tantummodò rectangulo, figuris similibus, & similiter positis proponatur.

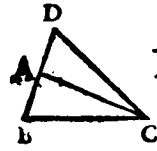
CONVERTEMVS etiam theorema hoc ex Campano non aliter, quàm 47 propositionem primi lib. in hunc modum.

SI figura, quæ ab vno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, figuris similibus similiterque positis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.



DETVR triangulum A B C, sitque figura quæuis super latus B C, descripta æqualis duabus figuris sibi similibus similiterque descriptis super reliqua latera A B, A C. Dico angulum B A C, esse rectum. Ducatur enim A D, ad A C, perpendicularis, quæ sit ipsi A B, æqualis, & connectatur recta C D. Quoniam igitur angulus C A D, rectus est, d erit figura super C D, (quæ similis sit ei,

d 31. sexti.



quæ ſuper B C, ſimiliterq; poſita) deſcripto æqualis figuræ ſuper A D, A C, deſcriptæ, quæ ei ſimiles ſint, ſimiliterque poſitæ. Eſt autem figura ſuper A D, æqualis figuræ ſuper A B, ob æqualitatem laterum. Igitur figura ſuper C D, æqualis erit figuræ ſuper A B, A C. Cùm igitur figura ſuper B C, eiſdem figuræ ſuper A B, A C, æqualis ponatur, erunt figura ſuper C D, E C, inter ſe æquales, ac propterea recta C D, B C, æquales erunt, & conſtat ex lemmate propoſ. 32. huius lib. Quoniam igitur latera A D, A C, trianguli A D C, æqualia ſunt lateribus A B, A C, trianguli A B C; & baſis D C, oſtenſa eſt quoque æqualis baſi B C; erunt anguli D A C, B A C, æquales. Quare cùm D A C, rectus ſit, ex conſtructione, rectus quoque erit B A C. Quod eſt propoſitum.

a 8 primi.

XXX. THEOR. 22. PROPOS. 31.

SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundum vnum angulum cõpoſita fuerint, ita vt homologa eorum latera ſint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.



HABEANT triangula A B C, D C E, latera A B, A C, lateribus D C, D E, proportionalia, vt quidem A B, ad A C, ita D C, ad D E, componanturq; ad angulum A C D, ita vt latera homologa A B, D C; Item A C, D E, inter ſe ſint parallela. Dico duo latera reliqua B C, C E, rectam componere lineam. Cùm enim parallelæ ſint A B, D C, *b* erit angulus A, alterno A C D, æqualis: Eademq; ratione angulus D, eidem A C D, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter ſe quoque exiſtent æquales. Quoniam igitur triangula A B C, D C E, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipſa *c* erunt inter ſe æquiangula, habebuntque æquales angulos B, & D C E. Additis ergo æqualibus A, & A C D, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis D C E, A C D, hoc eſt, angulo A C E, æquales. Rurſus addito communi A C B, fient tres anguli trianguli A B C, duobus angulis A C E, A C B, æquales: *d* Sed illi tres æquales ſunt duobus rectis. Ergo & duo A C E, A C B, duobus erunt rectis æquales: *e* Atq; idcirco B C, C E, vnam rectam lineam conſtituent. Itaq; ſi duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 29. primi.

c 6 ſext.

d 32. primi.

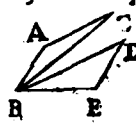
e 14. primi.

SCHOLIVM.

DEBENT autem prædicta duo triangula ita ſecundum vnum angulum eſſe compoſita, vt vterq; angulorum à lateribus proportionali-

malibus comprehensum, alterum sit illis angulo, secundum quem triangula componuntur; & uti in figura theorematis factum esse uides. Nam angulo A C D, secundum quem triangula sunt composita, alternus est tam angulus A, quàm angulus D, quorum uterq; lateribus proportionalibus continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, esse æquales, & propterea triangula esse æquiangula; atq; adeò ex B C, C E, unam rectã lineam componi, ut ex demonstratione liquet.

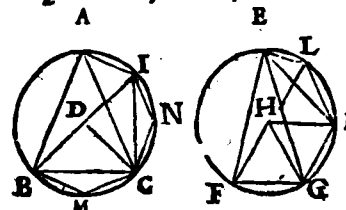
QVOD si uterque angulorum lateribus proportionalibus comprehensum non fuerit alternus angulo, secundum quem triangula componuntur, licet reliqua hypotheses theorematis seruentur, non colligitur necessariò conclusio. Nam duo triangula A B C, D B E, habent duo latera A B, A C, duobus lateribus D E, D B, proportionalia, ut quidem A B, ad A C, ita D E, ad D B; compositæq; sunt ad angulum C B D; ita ut tam homologa latera A B, D E, quàm A C, D E, sint parallela: Nihilominus reliqua duo latera C B, B E, non constituunt unam lineam rectam; propterea quòd angulo C B D, non sit alternus uterq; angulorum A, & D, imò neuter eorum, ut perspicuum est. Quamobrem demonstratio theorematis locum non habet.



THEOR. 23. PROPOS. 33. xxxij.

IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper verò & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SINT duo circuli æquales A B C, E F G, quorum centra D, H; sumanturq; ex circulis duo arcus quicunque B C, F G, quibus ad centra quidem insistant anguli B D C, F H G; ad circumferentias verò anguli B A C, E F G. Dico esse ex sententia defin. 6. lib. 5. ut arcum B C, ad arcum F G, ita angulum B D C, ad angulum F H G, & angulum B A C, ad angulum E F G; & sectorem insuper B D C, qui rectis B D, D C, & arcu B C, continetur ad sectorem F H G; quem comprehendunt rectæ F H, H G, & arcus F G. Ductis enim rectis B C, F G, *a* applicentur ipsis in circulis æquales rectæ; C I, quidem ipsi B C, At verò G K, K L, ipsi F G: ducanturque rectæ I D, K H, L H. Quoniam igitur æquales sunt rectæ B C, C I, *b* erunt quoque æquales arcus B C, C I,



a 1. *quarti.* *b* 28. *tertij.*

a ac pro-



27. tert. *a* ac propterea & anguli BDC, CDI, æquales erũt. Eadem ratione æquales erũt & arcus FG, GK, KL, & anguli KFHG, GHK, KHL. Quàm multiplex ergo est arcus BCI, ipsius arcus BC, tam multiplex erit angulus [illegible] seu aggregatum angulorum prope centrum D, insistentium arcui BCI, anguli BDC: Et quàm multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG, tam multiplex erit angulus FHL, seu aggregatum angulorum prope centrum H, arcui FGKL, insistentium, anguli FHG, quia in tot angulos æquales diuisi sunt anguli BDI, FHL, in quot arcus æquales secti sunt arcus BCI, FGKL. Quoniam verò si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, *b* necessariò angulus BDI, b 27. tert. angulo FHL, æqualis est: Ac proinde si arcus BCI, maior fuerit arcu FGKL, necessariò angulus BDI, maior est angulo FHL, & si minor, minor: Deficient propterea vna arcus BCI, & angulus BDI, æquè multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab FGKL, arcu, & angulo FHL, æquè multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG, vel vnà æqualia erunt, vel vnà excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. *c* Quare quæ c 6. def. quinti. proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit anguli BDC, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem.

ATQVE hoc verum etiam est de spatijs circa centra, hoc est, ita erit arcus BAC, ad arcum FEG, vt spatium ad centrum D, insistens arcui BAC, ad spatiũ ad centrum H, insistens arcui FEG, vt ex demonstratione patet. Nam & hæc spatia, si æqualia sunt, insistunt æqualibus arcubus, & si inæqualia, inæqualibus, &c.

d 15. quinti. e 20. tert. f 11. quinti. QVONIAM verò vt angulus BDC, ad angulum FHG, *d* ita est angulus BAC, ad angulum FEG, *e* cùm illi horum sint dupli, perspicuum est, *f* ita esse quoque angulum BAC, ad angulum FEG, vt est arcus FG. Quod tamen eisdem argumentis demonstrari potest, quibus vsi sumus in angulis ad centra constitutis, si priùs ducantur rectæ IA, KE, LE, &c.

QVOD si ad circumferentias constituti sint anguli eiusmodi BAC, FEG, vt rectæ ductæ BD, CD; FH, GH, non constituant angulos in centris versus arcus BMC, FG; sumenda erunt spatia BDC, FHG, quæ dupla etiam sunt angulorum ad circumferentias, ex scholio propos. 20. lib. 3.

g 27. tert. h 14. tert. CONSTITVANTVR iam in segmentis BC, CI, anguli BMC, CNI, *g* qui æquales erunt, cùm insistant arcubus æqualibus BAC, CBAI. Quare similia erunt segmenta BMC, CNI, *h* atque

adeò

adeò inter se æqualia, propterea quòd sunt super rectas B C, C I, æquales. Additis igitur triangulis B D C; C D I, a quæ æqualia quoque sunt, fient sectores B D C, C D I, æquales. Quapropter tam multiplex erit sector B D I, sectoris B D C, quàm est multiplex arcus B C I, ipsius arcus B C. Similiter ostendemus, sectorem F H L, tam multiplicem esse sectoris F H G, quàm multiplex est arcus F G K L, ipsius arcus F G. Quoniam verò si arcus B C I, æqualis fuerit arcui F G K L, sector quoque B D I, sectori F H L, æqualis est; (vt in sectoribus B D C, C D I, ostensum fuit,) & si maior, maior; & si minor, minor: Deficient propterea vna arcus B C I, & sector B D I, æque multiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ B D C, ab arcu F G K L, & sectore F H L, æquè multiplicibus secundæ magnitudinis F G, & quartæ F H G; vel vna æqualia erunt: vel vnà excedent; si ea sumantur, quæ inter se respondent. b Quamobrem quæ proportio est arcus B C, primæ magnitudinis, ad arcum F G, secundam magnitudinem, ea erit sectoris B D C, tertiæ magnitudinis, ad sectorem F H G, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, &c. Quod demonstrandum erat.

a 4. pri mi.

b 6. def. quinti.

COMMODIVS fortasse instituetur demonstratio hoc modo. Sumantur (saltem cogitatione) quotuis circuli æquales circulo A B C, atque in singulis capiantur singuli arcus arcui B C, æquales, quibus insistant anguli tam ad centra, quàm ad circumferentias. Erunt enim omnes hi anguli æquales angulis B D C, B A C, ob æqualitatem arcuum, quibus insistunt: ac proinde eorum aggregata ita multiplicia erunt angulorũ B D C, B A C, vt est multiplex aggregatum omnium arcuum ipsius arcus B C. Deinde sumantur etiam quotuis circuli æquales circulo E F G, & in singulis accipiantur singuli arcus arcui F G, æquales, &c. Hac enim ratione vitabitur confusio linearum, & angulorum in circulis A B C, E F G, quæ necessariò oritur, quando arcus B C, F G, sunt magni, & eorum multiplices accipiendi sunt, vt perspicuum est. Nam si arcus essent B C I, F G L, quibus insistunt anguli B D I, F H L, ad centra, & B A I, F E L, ad circumferentias; non poterunt eorum multiplices sumi sine confusione, vt patet. Hæc autem confusio vitatur, si plures circuli æquales adhibeantur, vt diximus.

COROLLARIVM I.

HINC manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, vt est angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem est proportioni arcus ad arcum. c Quare & inter se eædem erunt.

c 11. quinti.

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque est, vt est angulus in centro ad quatuor rectos, ita esse arcum subtensum illi angulo ad totam circumferentiam.

Et con-

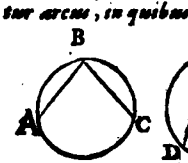
Et contrà, vt sunt quatuor recti ad angulum in centro, ita esse totam circumferentiam ad arcum illi angulo subtensum.

NAM vt est angulus in centro ad angulum rectum in centro,
a 33. sexti. *ita est arcus illi angulo subtensus ad quadrantem angulo recto subtensum. Quamobrem erit vt angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circumferentiam, per ea, quæ ad 22. propos. lib. 5. demonstrauimus. Quod est primum. Quoniam igitur est vt angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad totam circumferentiam; erit & conuertendo, vt quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circumferentia ad arcum angulo in centro subtensum. Quod est secundum. Verum*
b 33. sexti. *hoc etiam ita demonstrabitur.* b *Cùm sit, vt angulus rectus in centro ad angulum in centro, ita quadrans angulo recto subtensus ad arcum illi angulo subtensum; erit quoq; per ea, quæ ad propos. 22. lib. 5. ostendimus, vt quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita quadruplum quadrantis, nimirum tota circumferentia, ad arcum illi angulo subtensum. Quod est propositum.*

IDEM Verum est de *spatio in centro: hoc est, vt est spatium in centro ad quatuor rectos, ita est arcus subtensus illi spatio ad totam circumferentiam, &c. Vt ex demonstratione patet.*

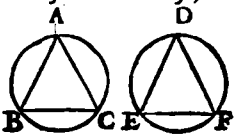
SCHOLIVM.

CÆTERVM ex theoremate hoc luce clarius colligitur, angulum qui circumferentia alicui insistit, referendum esse ad arcum, qui basis est ipsius anguli, non autem ad arcum, in quo existit. Non enim eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcũ, si sumantur arcus, in quibus anguli existunt, vt vult Euclides in proposito hoc theoremate. Sint enim circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentiam constituti sint B, E; maior quidem B, minor autem E. Quo posito, erit arcus AC, maior arcu DF, ex scholio propos. 26. lib. 3. ac propterea reliquum arcus ABC, minor reliquo arcu DEF. Quare proportio anguli B, ad angulum E, est maioris inæqualitatis, proportio verò arcus ABC, ad arcum DEF, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum. Quod si sumamus arcus super quos anguli ascenderunt, quales sunt arcus AC, DF, tum demum erit angulus B, ad angulum E, vt arcus AC, ad arcũ DF, vt rectè demonstrauit Euclides. Quocirca cùm dicimus angulum esse in segmento, aliud intelligere debemus, quàm cùm dicimus, angulum insistere segmento seu arcui. Id quod in expositione definitionis 8. lib. 3. monuimus.



NON

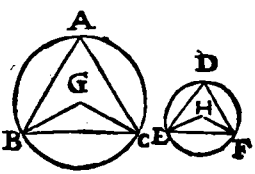
NON obscurè quoq; ex hoc theoremate demonstrari potest, similitudinem segmentorum in circulis similium, qua Euclides definitione 10. lib. 3. definiuit per angulos aquales in ipsis segmentis existentes, consistere in eo, quòd segmenta, seu circumferentia similes, ad integras circumferentias circulorum eandem habeant proportionem, & propterea quando segmenta totis circulis commensurabilia sunt, quotis pars est vna circumferentia totius sua circumferentia, talis quoq; sit alia circumferentia similis totius sua circumferentia; veluti in expositione praedicta definitionis docuimus. Sint enim primùm duo circuli aquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circumferentias constituantur aquales B A C, E D F. Quo posito, segmenta B A C, E D F, iuxta Euclidis definitionem praefatam dicentur similia. Manifestum autem est, eorum circumferentias habere eandem proportionem ad integras circulorum circumferentias. Cùm enim ob circulorũ aqualitatem, a arcus B C, E F, quibus anguli aquales insistunt, sint aquales; efficitur reliquas circumferentias B A C, E D F, esse quoq; aquales. Quare ad totas circumferentias, quae aquales etiam ponuntur, b eandem proportionem habebunt; Atq; idcirco, qua pars est arcus B A C, totius circumferentia A B C A, eadem pars erit arcus E D F, totius circumferentia D E F D.



a 26 tertij.

b 7. quinti.

SINT deinde duo circuli inaquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circumferentias constituantur aquales B A C, E D F: Quo posito, dicentur segmenta B A C, E D F, ex Euclidis sententia, similia. Dico rursus arcus B A C, E D F, eandem habere proportionem ad integras suas circumferentias. Ducantur enim ad centra G, H, radia B G, C G, E H, F H. Quoniam igitur anguli A, & D, aquales ponuntur, erunt quoq; ad centra anguli G, & H, aquales, c cùm hi illorum dupli existant: Vel erunt spatia ad centra aqualia, cùm hac quoque sint angulorum ad circumferentias dupla, ex scholio propos. 20. lib. 3. d Quare quatuor recti ad angulum, vel spatium G, eandem habebunt rationem, quam ad angulum, vel spatium H. Atqui vt quatuor recti ad angulum, vel spatium G, ita est tota circumferentia A B C A, ad arcum B C: Et vt quatuor recti ad angulum, vel spatium H, ita est tota circumferentia D E F D, ad arcum E F, ex coroll. 2. huius propos. 33. e Igitur vt tota circumferentia A B C A, ad arcũ B C, ita erit tota circumferentia D E F D, ad arcum E F. Per conuersionẽ ergo rationis erit quoq;, vt tota circumferẽtia A B C A, ad arcũ B A C, ita tota circumferentia D E F D, ad arcũ E D F. Et conuertendo, vt arcus B A C, ad to-



c 20. tertij.

d 7. quinti.

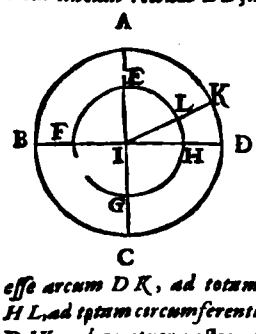
e 11. quinti.

ad totum circumferentiam A B C A, ita arcus E D F, ad totum circumferentiam D E F D. Quocirca qua pars est arcus B A C, totius circumferentiæ A B C A, eadem pars erit arcus E D F, totius circumferentiæ D E F D. Quod est propositum.

CONSTAT igitur, recte Euclidem vocasse ea circulorum segmenta similia, in quibus anguli existentes inter se sunt æquales: quandoquidem huiusmodi segmenta eandem habent proportionem ad circulos suos integros.

FACILE ex his demonstrabitur theorema illud, quod & ad calcem cap. 1. in sphæram, & ad propos. 22. lib. 3. sine proportionibus ostendimus, videlicet.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duæ aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti similes.



SINT duo circuli A B C D, E F G H, circa idem centrum I, descripti. Si igitur egrediantur è centro I, duæ rectæ I B, I D, efficientes vnam lineam rectam B D, manifestum est, arcus E A D, F E H, similes esse, cùm sint semicirculi, Rursus si ex I, egrediantur duæ rectæ I A, I D, constituentes angulum rectum A I D, perspicuum quoq; est, arcus A D, E H, similes esse, cùm ex scholio propos. 27. lib. 3. sint Quadrantes suorum circulorum.

EMITTANTVR iam ex I, duæ rectæ I D, I K, facientes quemcunq; angulum non rectum D I K. Dico adhuc arcus D K, H L, similes esse, hoc est, ut esse arcum D K, ad totum circumferentiam A B C D, vt est arcus H L, ad totam circumferentiam E F G H. Quoniam enim vt angulus D I K, ad quatuor rectos, ita est ex coroll. huius propos. tam arcus D K, ad totam circumferentiam A B C D, quam arcus H L, ad totam circumferentiam E F G H; a *erit vt arcus D K, ad totum circumferentiam A B C D, ita arcus H L, ad totam circumferentiam E F G H, ac proinde arcus D K, H L, similes erunt. Quod est propositum.*

a 11. quinti.

BREVIVS idem confirmabitur hoc modo. Quoniam arcubus D K, H L, insistunt in centro I, anguli æquales, immò iidem; erunt ex scholio propos. 22. lib. 3. arcus D K, H L, similes: ac proinde ad totas circumferentias eandem proportionem habebunt, vt paulò antè ostensum est.

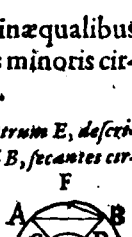
EADEM ratione ostendemus, arcus B A K, F E L, similes esse, id est, habere ad totas circumferentias eandem proportionem.

SED

SED placet etiam hic demonstrare lemma, quod ad propos. 6. lib. 3. Theodosij proposuimus, cùm ad multa alia conducat. Illud autem est eiusmodi.

ÆQVALES rectæ lineæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maiorq; est arcus minoris circuli, quàm vt similis sit arcui circuli maioris.

SINT circuli inæquales AB, CD, circa idem centrum E, descripti ducantur autem ex E, duæ rectæ vtcunq; EA, EB, secantes circulos in A, B, & C, D, punctis; eruntq; arcus AB, CD, similes, vt proximè demonstrauimus. Et quoniam rectæ EA, EB, sectæ sunt in C, D, proportionaliter, quòd tam EA, EB, quàm EC, ED, inter se aequales sint; a erunt duæ rectæ AB, CD, parallelæ; atq; ideo triangula EAB, ECD, ex coroll. propos. 4. huius lib. similia erunt. b Erit igitur vt EA, ad AB, ita EC, ad CD. Est autem EA, maior quàm EC. c Igitur & AB, maior erit quàm CD. Accommodetur ergo ipsi CD, in circulo AB, aequalis BF; eritq; ex scholio propos. 28. lib. 3. arcus AB, maior arcu FB. Quare cùm arcus CD, arcui AB, similis sit; erit arcus CD, maior, quàm vt similis sit ipsi FB. Aequales igitur rectæ CD, BF, ex circulis inaequalibus AB, CD, arcus inæquales auferunt, maiorq; est arcus CD, circuli minoris, quàm vt similis sit arcui FB, circuli maioris. Quod est propositum.



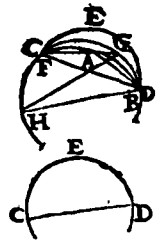
a 2. sexti. b 4. sexti. c 14. quinti.

HINC perspicuum est, multò magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem, quàm vt similis sit ei, quem ex circulo maiore aufert linea minor. Cùm enim recta CD, aqualis ipsi BF, auferat arcum CD, maiorem, quàm vt similis sit arcui FB; multò magis linea maior quàm CD, auferet maiorem arcum, quàm vt similis sit arcui FB, cùm illa maiorem arcum abscindat, quàm CD, vt in scholio propos. 28. lib. 3. ostendimus.

HÆC autem demonstratio propositum tantum colligit, quando arcus abscissi sunt semicirculo minores, quales sunt BF, CD, vt ex ipsa demonstratione constat. Nam alias non constitueretur angulus in E, centro communi: quod tamen ad demonstrationē requiritur. Verum nihilominus erit, si arcus semicirculo minor circuli minoris maior est, quàm vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris, multò maiorem esse arcum semicirculo maiorē circuli minoris, quàm vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris. Quod si quando contingat, rectam CD, ex minori circulo auferre semicirculum, vt quando est diameter circuli; liquidò constat, semicirculum minoris circuli maiorem esse, quàm vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris; neq; opus tunc erit alia demonstratione.

HINC etiam nullo negotio oſtendemus, æquales rectas lineas ex circulis inæqualibus auferre arcus ſimpliciter, & abſolutè inæquales, ita vt arcus minoris circuli ſimpliciter maior ſit arcu circuli maioris, & non ſolùm maior, quàm vt ſimilis ſit. Sint enim rectæ lineæ CD, BF, *æquales, auferatq; ipſa* CD, *arcum minoris circuli* CED, *& ipſa* FB, *arcum circuli maioris* FGB. *Dico ſimpliciter arcum* CED, *maiorem eſſe arcu* FGB. *Congruente enim recta* CD, *rectæ* FB, *cadet neceſſariò arcus* CED, *extra arcum* FGB; *atq; idcirco arcus* CED, *maior erit arcu* FGB, *cùm ille hunc totum intra ſe contineat, ſintq; ambo arcus in eandem partem cavi, atq; eadem extrema puncta habeant, vt vult Archimedes in ſuppoſitionibus ante lib. 1. de ſphæra & cylindro. Neq; verò arcus* CED, *arcui* FGB, *congruet, aut intra ipſum cadet. Nam ſi dicatur congruere, congruet etiam tota circumferentia circuli* CED, *toti circumferentia circuli* FGB, *atq; adeò æquales erunt circuli. quod eſt abſurdum, cùm inæquales ponantur. Si verò arcus* CED, *dicatur cadere intra arcum* FCB, *cuiuſmodi eſt arcus* CAD; *quoniam vt paulò antè oſtendimus, arcus* CED, *id eſt,* CAD, *maior eſt, quàm vt ſimilis ſit arcui* FGB; *ſumatur arcus* BFH, *arcui* CAD, *ſimilis, atq; ideo maior arcu* FGB: *Aſſumpto autem in arcu* CAD *puncto* A, *& tetuncq;, ducantur rectæ* AF, AB, *productæq; rectæ* FA, *donec arcum* FGB *ſecet in* G, *ducantur rectæ* GH, GB. *(In figura per incuriã recta* GE, *ducta non eſt: Igitur ſtudioſus lector eam ducat, oportet.) Itaq; quoniam arcus* CAD, HFB, *ſimiles ſunt; erunt anguli* CAD, HGB, *in illis ſegmentis exiſtentes æquales.* 2 *Quia verò angulus* CAD, *angulo* CGB, *maior eſt, externus interno; & angulus* CGB, *angulo* HGB, *maior quoq;, totum parte; erit multò maior angulus* CAD, *angulo* HGB, *quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt æquales. Non ergo arcus* CED, *cadet intra arcum* FGB; *ſed neq; ei congruet, vt demonſtratum eſt. Cadet ergo extra; atq; ideo maior erit arcus* CED, *arcu* FGB, *vt dictum eſt. Quod eſt propoſitum.*

2 16. primi.



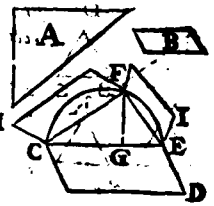
EX quo liquidò conſtat, multò magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem ſimpliciter eo, quem minor linea ex circulo maiore abſcindit.

QVONIAM verò Euclides multa dixit de inuentione linearum proportionalium, nihil verò de ſuperficierum, vel planorum proportionalium inueſtigatione nobis præſcripſit; non abs re me facturum exiſtimo, ſi nonnulla problemata, atq; theoremata, quorũ multa circa inuentionem ſuperficierum proportionalium verſantur, ſcitu nõ iucunda, loco appendicis, partim ex peritis Geometris, partim ex inuentis propriis huic ſexto libro annectam: quippe quæ ex demonſtratis ab Euclide factis negotio deducantur. Hinc autem exordiũ capiemus.

A DA-

I.

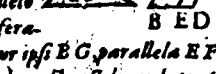
A DATO rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, vt & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterq; positum.



SIT ex rectilineo A, auferenda tertia pars, quæ similis sit, similiterq; positum rectilineo B, relinquatq; rectilineum eidem B, simile, & similiter positū. a *Constituatur rectilineum CD, æquale quidem ipsi A, simile verò, & similiter positum ipsi B; superq; vnum eius latus CE, semicirculus describatur CFE.* b *Deinde ablata parte tertia GE, imperata videlicet, ex CE, agatur GF, ad CE, perpendicularis, connectanturq; rectæ CF, EF.* c *super quas constituantur rectilinea FM, FI, similia similiterq; posita ipsi CD. Dico igitur factum esse, quod inbetur.* d *Cùm enim angulus CFE, rectus sit, quippe qui in semicirculo existat;* e *erit rectilineum CD, æquale rectilineo HF, FI, atq; adeò, si auferatur rectilineū FI, simile similiterq; positū ipsi B, ex rectilineo CD, hoc est, ex æquali A, relinquetur rectilineū HF, simile vnoq; ipsi B, similiterq; positum. Quòd autem rectilineū ablatum FI, sit tertia pars rectilinei CD, ita ostendetur.* f *Quoniam est, vt recta CG, ad GF, ita recta CF, ad FE;* g *quòd triangula CGF, CFE, sint similia: Habet autem CG, ad GE, proportionem duplicatam proportionis CG, ad GF, propterea quòd proportionales sunt tres rectæ CG, GF, GE, ex coroll. propos. 8. huius lib.* h *Item rectilineum HF, ad rectilineum FI, proportionem quoq; habet duplicatam proportionis laterum homologorum CF, FE; Erit vt recta CG, ad GE, ita rectilineum HF, ad rectilineū FI; quandoquidem hæ proportiones duarum æqualium proportionum duplicatæ sunt. Componendo igitur erit, vt CE, ad GE, ita duo rectilinea HF, FI, simul, hoc est, rectilineum CD, quod est illis æquale, ad rectilineum FI: Est autem CE, ipsius GE, tripla, per constructionem. Igitur & rectilineum CD, triplum erit rectilinei FI: Ac propterea hoc illius tertia pars existet. Quod est propositum.*

a 25. sexti.
b 6. sexti.
c 18. sexti.
d 31. tertij.
e 31. sexti.
f 4. sexti.
g 8. sexti.
h 19. vel 20. sexti.

QVOD si pars imperata, nempe tertia, simpliciter sit auferenda fiet id breuissimè, hac arte.



i *Rectilineum datum A, reuocetur ad parallelogrammum GD, æquale; & ex latere BD, auferatur DE, tertia pars imperata: & per E, agatur ipsi EG, parallela EF. Dico DF, tertiam esse partem ipsius DG, hoc est, rectilineæ datæ A.* k *Cùm enim sit vt DE, ad DB, ita DF, ad DG. Sit autem per constructionem DE, ipsius DB, pars tertia; erit & DF, ipsius DG, tertia pars Quod est propositum.*

i 45 primi.
k 1. sexti.

II.

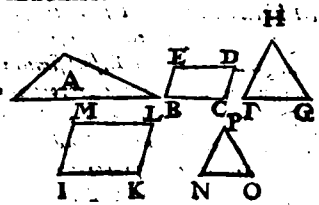
DVOBVS datis rectilineis, tertium proportionale inuenire.

SINT data duæ rectilineæ *A*, & *BCD*, quibus inueniendum sit tertium proportionale. a Constituatur ipsi *A*, rectilineum æquale *EFG*, simile verò similiterq; positum ipsi *BCD*. Deinde lateribus homologis *EF*, *BC*, b inueniatur tertia linea proportionalis *HI*; c super quam constituatur rectilineum *HIK*, simile similiterque positum ipsis *EFG*, *BCD*. Dico *HIK*, esse tertium proportionale. Cum enim proportionales sint rectæ *EF*, *BC*, *HI*; d erunt & rectilineæ *EFG*, *BCD*, *HIK*, ab illis descriptæ (cum sint similia, similiterq; posita) proportionales. Cum ergo *EFG*, per constructionem, æquale sit ipsi *A*; erunt & rectilineæ *A*, *BCD*, *HIK*, proportionales. Quod erat propositum.

a 25. sexti.
b 11. sexti.
c 18. sexti.
d 22. sexti.

III.

TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire.



TRIA rectilinea data sint *A*, *BCDE*, *FGH*; quibus quartum sit inueniendum proportionale. e Constituatur rectilineum *KLM*, æquale quidem ipsi *A*, simile verò similiterque positum ipsi *BCDE*. Tribus deinde rectis *IK*, *BC*, *FG*, f inuenta quarta proportionali *NO*; g constituatur super *NO*, rectilineum *NOP*, ipsi *FGH* simile similiterq; positum. Dico *NOP*, rectilineum esse quartum proportionale. Cum enim quatuor rectæ *IK*, *BC*, *FG*, *NO*, sint proportionales; h erunt & rectilineæ similes similiterq; positæ ab ipsis descriptæ *IL*, *BD*, *FGH*, *NOP*, proportionales. Cum igitur *IL*, constructum sit æquale ipsi *A*; erunt & quatuor rectilineæ *A*, *BD*, *FGH*, *NOP*, proportionales. Quod erat propositum.

e 25. sexti.
f 12. sexti.
g 18. sexti.
h 22. sexti.

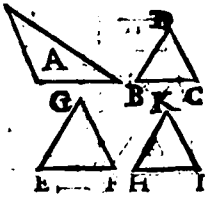
IIII.

DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire.

SINT duo rectilineæ *A*, *BCD*, quibus medium inueniendum est proportionale. i Constituatur rectilineum *EFG*, æquale ipsi *A*, & simile similiterq; positum ipsi *BCD*. Deinde rectis *EF*, *BG*, k inuenta media proportionali *HI*; l constituatur super *HI*, re-

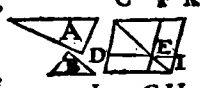
i 25. sexti.
k 13. sexti.
l 22. sexti.

ctilineum H I K, simile similiterq; positum ipsis E F G, B C D. Dico H I K, medium esse proportionale quæsitum. Cùm enim proportionales sint tres rectæ E F, H I, B C, a *erunt quoque rectilinea ab ipsis descripta E F G, H I K, B C D, proportionalia, cùm sint similia similiterq; posita. Cùm ergo E F G, constructum sit æquale ipsi A; erunt quoq; rectilinea A, H I K, B C D, proportionalia; hoc est, erit* ut *A, ad H I K, ita H I K, ad B C D: ac proinde H I K, medium proportionale erit inter A, & B C D. Quod est propositum.*



a 22. sexti.

A LITER. Sit rursus inter rectilinea A, & B, perquirendum medium proportionale. b *Constituatur ipsi A, æquale parallelogrammum quodcunq; C D E F,* c *ipsi verò B, æquale parallelogrammum E G H I, simile verò similiterq; positum ipsi C D E F, Connectanturq; hæc parallelogramma ad angulos æquales, ut D E, E I, efficiant* ὐναμ *lineam rectam, ac propterea per ea, quæ ad propos. 15. lib. 1. demonstrauimus, & una quoq; linea recta componatur ex F E, E G; perficiaturq; totum parallelogrammum K L. Dico* ὅτι *vtrumlibet E K, vel E L, medium esse proportionale inter D F, G I, hoc est, inter A, & B. Cùm enim similia sint similiterq; posita D F, G I; erit* ut *D E, ad E F, ita G H, ad H I, hoc est, ita E I, ad E G,* d *quòd rectæ E I, E G, rectis G H, H I, æquales sint. Permutando ergo* ut *D E, ad E I, ita F E, ad E G,* e *Vt autem D E, ad E I, ita est D F, ad E K, & ut F E, ad E G, ita E K, ad G I. Igitur* ut *D F, ad E K, ita E K, ad G E; ac proinde E K, medium proportionale erit inter D F, G I, hoc est, inter A & B. Quod est propositum.*



b 45. primi.
c 25. sexti.
d 34. primi.
e 1. sext.

Q V O D etiam in hunc modum confirmari potest. Cùm D E, G I, similia sint, similiterq; posita, f *consistunt ea circa eandem diametrum. Quare complementa E K, E L, æqualia erunt. Vt autem D F, ad E K, ita est E L, ad G I,* g *quod* ὐναμ *proportio addita proportioni D E, ad E I. Igitur erit, ut D F, ad E K, ita E K, ad G I. Quod est propositum.*

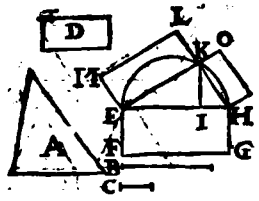
f 26. sexti.
g 1. sext.

V.

DATO rectilineo duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterq; descripta cuicunq; rectilineo, habeantq; inter se proportionem propositam quamcunque.

SIT datum rectilineum A, datáq; proportio recta B, ad C, oporteatq; constituere duo rectilinea, quæ ipsi A, æqualia sint, habeantq; proportionem, quam B, & C; ac similia similiterq; posita sint rectilineo cuiuis D. h *Constituatur rectilineum E F G H, æquale ipsi A, & simile similiterq; positum ipsi D. Diuisa deinde latere eius E H, in I,*

h 25. sexti.



ſecundum proportionem B, ad C, ex quæ ad propoſ. 10. huius lib. demonſtrauimus: deſcribatur circa E H. ſemicirculus E K H, & ex I, ducatur ad E H, perpendicularis I K, connectantur q̄z recta E K, H K. a *Deſcribantur iam ſuper E K, K H, rectilinea E K L M, K H N O, ipſi E G, vel ipſi D, ſimilia, ſimiliterq; poſita; qua dico æqualia etiam eſſe*

a 18. ſexti.

b 31. ſexti. *ipſi E G, ſeu ipſi A. habereq; proportionem datam B, ad C.* b *Cùm enim angulus E K H, in ſemicirculo exiſtens rectus ſit;* c *erunt rectilinea E L, H O, æqualia rectilineo E G, cùm ſint ſimilia inter ſe, ſimiliterq; deſcripta.* d *Quoniam verò eſt, vt E I, ad I K, ita E K, ad K H, cum triangula E I K, E K H, ſimilia ſint; Eſt autem E I, ad I H, in*

c 31. ſexti.

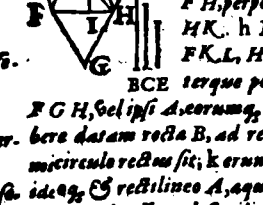
d 4. ſexti. *proportione duplicata proportionis E I, ad I K, quod tres E I, I K, I H, ſint, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. proportionales.* e *Item E L, ad H O, in proportione duplicata eius, quam habet latus E K, ad latus homologum K H; erit vt E I, ad I H, hoc eſt, vt B, ad C, ita E L, ad H O. Dato ergo rectilineo A, exhibuimus duo ſimul æqualia E L, H O, qua ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita dato rectilineo D, habentaq; proportionem inter ſe datam B, ad C. Quod eſt propoſitum.*

e 19. vel 20. ſexti.

VI.

DATO rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo ſimilia ſint ſimiliterq; deſcripta, lateraq; eorũ homologa habeãt inter ſe proportionẽ datã

DETVR rectilineum A, & proportio recta B, ad rectam C; oporteat q̄z conſtituere duo rectilinea ipſi A, æqualia, & ſimilia ipſi D. propoſito, ſimiliterq; poſita, quorũ latera homologa proportionem habeãt, quam B, ad C. f *Inuenta ipſis B, C, tertia proportionali E,* g *fiat rectilineum F G H, æquale ipſi A, & ſimile ſimiliterq; poſitum ipſi D. Diuiſaq; latere F H, in I, ſecundum proportionem B, ad E, vt ad propoſ. 10. huius lib. oſtendimus; deſcribatur circa F H, ſemicirculus F K H; & ex I, ducatur ad F H, perpendicularis I K, connectanturq; recta F K, H K.* h *Deſcribatur iam ſuper F K, H K, rectilinea F K L, H K M, ipſi F G H, vel ipſi D ſimilia, ſimiliterque poſita. Dico hæc rectilinea æqualia eſſe ipſi F G H, vel ipſi A, eorumq; latera homologa F K, H K, proportionẽ habere datam rectæ B, ad rectam C.* i *Cùm enim angulus F K H, in ſemicirculo rectus ſit;* k *erunt rectilinea F K L, H K M, rectilineo F G H, ideoq; & rectilineo A, æqualia.* l *Quoniam verò eſt, vt E I, ad I K, ita F K, ad H K,* q *b ſimilitudinem triangulorum E I K, F K, Eſt au-*



f 11. ſexti.

g 25. ſexti.

h 18. ſexti.

i 31. ſexti.

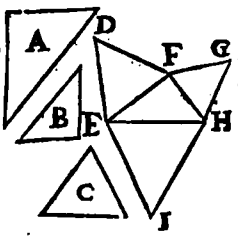
k 31. ſexti.

l 4. ſext.

tem F K ad I H, in proportione duplicata proportionis F K ad I K, (quòd tres F I, I K, I H, proportionales sint, ex coroll. propos. 8. huius lib.) ac propterea in proportione duplicata proportionis laterum homologorum F K, H K. Item & proportio B, ad E, (aequalis proportioni F I, ad I H, ex constructione) in duplicata est proportione proportionis B, ad C, ex defin. Igitur eadem erit proportio F K, ad H K, quæ B, ad C, quando quidem ipsarum duplicatæ proportiones F I, ad I H, & B, ad E, aequales sunt. Constat ergo propositum.

VII.

DVOBVS datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuiuis rectilineo dato.



DVO rectilinea data sint A, & B, quibus aequale sit construendum, simile simili terq; positum ipsi C. a Fiat ipsi A, aequale D E F, simile autem similiterq; positū ipsi C. Item ipsi B, aequale constituatur G F H, simile verò eidem C, similiterq; positū. Deinde rectilinea D E F, G F H, sita inter se connectantur, ut latera eorum homologa E F, F H, constituant angulum E F H, rectum, cui subtendantur recta E H, b super quam describatur rectilineum I H E, simile similiterq; positum ipsis D E F, G F H, hoc est, ipsi C. c Perspicuum autem est E H I, aequale esse duobus D E F, G F H, atq; idcirco duobus A, & B. Quod est propositum.

a 25. sexti.

b 18. sexti.

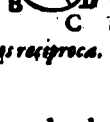
c 31. sexti.

BREVIVS. Constituatur parallelogrammum aequale duobus rectilineis A, & B, per ea, quæ ad propos. 45. lib. 1 docuimus. d Si enim huic parallelogrammo constituxerimus aequale rectilineum E H I, quod simile sit similiterq; positum alteri dato rectilineo C; Constitutum erit rectilineum E H I, aequale duobus rectilineis A, B, & simile, similiterq; positum rectilineo C. Quod erat faciendum.

d 25. sexti.

VIII.

SI in circulo duæ rectæ lineæ seſe mutuò secuerint: erunt segmenta vnius segmentis alterius reciproca.



IN circulo A B C D, se mutuò secent rectæ A C, B D, in E. Dico segmenta A E, E C, esse reciproca segmentis B E, E D: Hoc est, esse ut A E, ad B E, ita E D, ad E C: Vel ut A E, ad E D, ita B E, ad E C. e Cùm enim rectangulum sub A E, E C, comprehensum æquale sit rectangulo sub B E, E D, contento; f erunt latera circa æquales angulos reciproca. Quod est propositum.

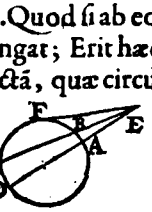
e 35. tertij.

f 14. sexti.

IX.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab

eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum secantes: Erunt totæ,& segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodẽ puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectã, quæ circulum secet,& eius segmentum exterius.

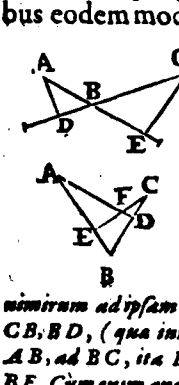


EXTRA circulum ABCD, sumatur punctum E, à quo cadant rectæ EC, ED, secantes circulum in A, & B. Dico rectas EC, EB, esse reciprocas rectis ED, EA: Hoc est, esse, vt EC, ad ED, ita EA, ad EB Vel vt EC, ad EA, ita ED, ad EB. Ducta enim EF, tangente circulum in F, a *erit rectangulum sub EC, EB, quadrato rectæ EF, æquale; Item rectangulum sub ED, EA, eidem quadrato rectæ EF, æquale. Quare & rectangula sub EC, EB, & sub ED, EA, æqualia erunt.* b *Ac propterea latera eorũ circa angulos æquales reciproca.* c *Quoniam autem quadratò rectæ EF, æquale est tam rectangulum sub EC, EB, quam rectangulum sub ED, EA,* d *erunt tam tres rectæ EC, EF, EB, quam tres ED, EF, EA, proportionales, atq; adeò EF, media proportionalis inter quamlibet lineam, quæ circulum secet, & segmentum eius exterius. Quod est propositum.*

a 36. tertij.
b 14. sexti.
c 36. tertij.
d 17. sexti.

X.

SI duæ rectæ lineæ sese mutuò secuerint,& à duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuò demittantur: erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum & sectionem, altera verò inter sectionem,& prioris lineæ assumptæ perpendicularem intercipitur, alijs duabus eodem modo inclusis reciprocæ.



DVÆ rectæ AB, CB, sese mutuò secent in B, & ex terminis A, C, ad ipsas demittantur perpendiculares; AD, quidẽ ad CB, at verò CE, ad AB; quæ perpendiculares cadent in AB, CB, protractas vltra B, si angulus ABC, fuerit obtusus; in ipsas verò introrsum, si idem angulus acutus fuerit, vt figura indicant. Dico rectas AB, BE, (quarum prior intercipitur inter terminum A, & sectionem B; posterior verò inter sectionẽ B, & perpendicularem CE, quæ nimirum ad ipsam AB, assumptam ducitur) reciprocas esse duabus CB, BD, (quæ inter similes terminos includuntur) hoc est, esse vt AB, ad BC, ita BD, ad BE: Vel vt AB, ad BD, ita BC, ad BE. Cum enim anguli ABD, ADB, trianguli ABD, æquales sint angulis CBE, CEB, trianguli CBE. (Nam ADB, CEB, rectæ sunt;

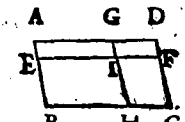
a *& ABD,*

& ABD, CBE, ad verticem in priori figura æquales; in posteriori autem vnus & idem angulus) erunt triangula ABD, CBE, æquiangula. b *Quare erit vt AB, ad BD, ita CB, ad BE: Ac propterea permutando quoque, vt AB, ad BC, ita BD, ad BE. Quod est propositum.* a 15. pri. b 4. sex.

PORRO eadem ratione segmenta perpendicularium AD, CE, in posteriori figura se mutuo secantium in F, erunt reciproca. Cum enim triangula AFE, CFD, sint æquiangula; c *erit vt AF, ad FE, ita CF, ad FD: Et permutando quoque, vt AF, ad CF, ita FE, ad FD. Quod est propositum.* c 4. sex.

XI.

IN parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelæ se mutuo secantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.



IN parallelogrammo ABCD, duæ rectæ EF, GH, lateribus AD, DC, parallelæ se mutuo secent in I. Dico quatuor parallelogramma EG, GF, BI, IC, esse proportionalia. d *Cum enim sit vt EI, ad IF, ita EG, ad GF: Item vt EI, ad IF, ita BI, ad IC;* e *erit quoque vt EG, ad GF, ita BI, ad IC. Quod est propositum.* d 1. sex. e 11. quinti.

XII.

OMNE quadrilaterum à duabus diametris se mutuo secantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.



DIVIDANT diametri AC, BD, se mutuo secantes in E, quadrilaterum ABCD. Dico quatuor triangula AED, CED, AEB, CEB, esse proportionalia. f *Erit enim vt AE, ad EC, ita triangulum AED, ad triangulum CED, & triangulum AEB, ad triangulum CEB.* g *Quare vt triangulum AED, ad triangulum CED, ita triangulum AEB, ad triangulum CEB. Eadem ratione ostendes esse, vt BEA, ad DEA, ita BEC, ad DEC;* h *cum vtraque proportio eadem sit proportioni BE, ad ED. Constat ergo propositum.* f 1. sex. g 11. quinti. h 1. sex.

XIII.

IN triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione, tria latera sunt continuè proportionalia. Et si tria latera trianguli rectanguli sunt continuè proportionalia, per-

lia, perpendicularis ad basim ex angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione.

IN rectangulo triangulo A B C, ex angulo recto A, demissa perpendicularis A D, secet basim B C, in D, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum B D: ac propterea ex theoremate 9. ad propos. 47. lib. 1. latus A B, latere A C, maius. Dico tria latera B C, B A, A C, esse continuè proportionalia. Quoniam enim per hypothesim est, vt B C, ad B D, ita B D, ad D C: a erit quadratum ex B D, rectangulo sub B C, C D, aequale. Rursus quia ex coroll. propos. 8. huius lib. A C, media proportionalis est inter B C, & C D: b erit quoque quadratum ex A C, eodem rectangulo, sub B C, C D, aequale. Quare quadrata ex B D, A C, aequalia inter se erunt, ac proinde & rectae ipsae aequales erunt. Est autem ex coroll. propos. 8. huius lib. A B, inter B C, B D, media proportionalis. Igitur eadem A B, media proportionalis erit inter B C, A C, hoc est, erit, vt B C, ad A B, ita A B, ad A C. Quod est propositum.



a 17. sexti.

b 17. sexti.

SINT deinde tria latera B C, A B, A C, in triangulo rectangulo A B C, continuè proportionalia, hoc est, sit B C, ad A B, vt A B, ad A C, demittaturque perpendicularis A D, ad basim B C. Dico B C, sectam esse in D, extrema ac media ratione. Quoniam enim est, vt B C, ad A B, ita A B, ad A C: Est autem vt B C, ad A B, ita quoque A B, ad B D: quod A B, media proportionalis sit inter B C, B D, ex coroll. propos. 8. huius lib. c erit vt A B, ad A C, ita A B, ad B D: d ac proinde aequales erunt A C, & B D. e Vt igitur A C, ad C D, ita B D, ad C D. Sed vt A C, ad C D, ita est B C, ad A C, quod ex coroll. propos. 8. huius lib. A C, sit media proportionalis inter B C, & C D. f Igitur erit quoque B C, ad A C, hoc est, ad B D, vt A C, hoc est, vt B D, ad C D: ac propterea B C, in D, secta erit extrema ac media ratione. Quod est propositum.

c 11. quinti.

d 9. quinti.

e 7. quinti.

f 11. quinti.

IT A QVE si super datam rectam B C, construendum sit triangulum rectangulum, cuius tria latera continuè proportionalia sint, secanda erit data recta B C, extrema ac media ratione in D. Descripto deinde semicirculo B A C, circa eandem datam B C, erigenda erit ad B C, perpendicularis D A, iungendaque recta B A, C A. Triangulum enim A B C, rectangulum erit, g cum angulus B A C, in semicirculo rectus sit; ac proinde cum perpendicularis A D, secet basim extrema ac media ratione; tria latera continuè proportionalia erunt, vt proximè demonstratum est.

g 31. tertij.

XIV.

A DATO puncto in latere trianguli lineam rectam ducere,

ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta secundum proportionem datam.

SIT triangulum A B C, oporteatque à dato puncto D, in eius latere B C, lineam rectam ducere, quæ triangulum secet in duo segmenta secundum proportionem datam E, ad F. Diuidatur B C, in G, secundum proportionem E, ad F, cadatq; primò punctum G, in datum punctum D, vt in prima figura, ducaturq; recta D A. a *Quoniam igitur est vt B D, ad D C, ita triangulum B D A, ad triangulum C D A, secabit recta D A, triangulum datum secundum proportionem datam B G, ad G C, hoc est, E, ad F. Quod erat faciendum.*



a 1. *sex.*

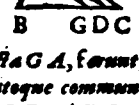
CAD AT deinde punctum G, inter C, & D, vt in secunda figura. Ducatur ergo recta D A, cui per G, parallela agatur G H, coniungaturque recta D H. Dico rectam D H, secare triangulum datum secundum proportionem datam, hoc est, esse trapezium B D H A, ad triangulum C D H, vt E, ad F, seu vt B G, ad G C. Ducta enim recta G A, b *erunt triangula H G A, G H D, aequalia, cum sint super eandem basin G H, & inter easdem parallelas G H, D A. Addito igitur communi triangulo C G H, fient aequalia triangula C G A, C D H:* c *Ac proinde triangulum A B C, eandem habebit proportionem ad C G A, & ad C D H.* d *Diuidendo igitur, erit vt triangulum B G A, quinti. ad triangulum C G A, ita trapezium B D H A, ad triangulum C D H.* e *Est autem B G A, ad C G A; vt B G, ad G C. Igitur erit & trapezium B D H A, ad triangulum C D H, vt B G, ad G E, hoc est, vt* c 1. *sex. E, ad F. Quod est propositum.*

b 37. *primi.*

c 7. *quinti.*

d 17. *quinti.*

CAD AT tertio punctum G, inter B, & D, ducatur q; recta D A, cui rursus per G, agatur parallela G H. Dico igitur rursus, rectam ductam D H, secare triangulum A B C, secundum proportionem datam E, ad F, hoc est, esse triangulum cum B D H, ad trapezium C D H A, vt E, ad F. Ducta enim recta G A, f *erunt, vt prius, triangula H G A, G H D, aequalia; additoque communi B G H, aequalia fient B G A, B D H.* g *Quare erit A B C, ad B G A, vt ad B D H.* h *Diuidendo ergo erit vt C G A, ad B G A, ita trapezium C D H A, ad triangulum B D H, & conuertendo, vt B G A, ad C G A, ita B D H, ad trapezium C D H A.* i *Est autem B G A, ad C G A, vt B G, ad G C. Igitur & B D H, ad trapezium C D H A, erit vt B G, ad G C, hoc est, vt E, ad F. Quod est propositum.*



f 37. *primi.*

g 7. *quinti.*

h 17. *quinti.*

i 1. *sex.*

HINC perspicuum est, quomodo imperata pars ex triangulo sit auferenda per lineam rectam, quæ à quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam à dato puncto ductam diuidatur triangulum secundum proportionem multiplicem, cuius denominator vnitate

Vnitate minor sit denominatore partis imperatæ, (vt secundum proportionem triplam, si quarta pars imperetur, &c.) factum erit, quod iubetur, vt manifestum est. Habebit enim tunc totum triangulum ad segmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator æqualis est denominatori partis propositæ, cum priori denominatori proportionis multiplicis assumpta addatur Vnitas, quæ ante decrat.

XV.

DATO rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere, maius, vel minus, secundum proportionem datam.



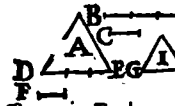
SIT rectilineum datum A, cui simile similiterque positum sit describendum maius, secundum proportionem datam B, ad C. Tribus rectis B, C, & D E, (sit autem D E, vnum latus rectilinei dati quodcunque) a inueniatur

a 12. sexti.

quarta proportionalis F. Deinde duabus D E, & F, b inueniatur media proportionalis G H; c super quam ipsi A, describatur rectilineum I, simile, similiterque positum. Dico I, maius esse quam A, secundum proportionem datam B, ad C. Cum enim proportionales sint tres rectæ D E, G H, & F, erit per coroll. propos. 19. vel 20. libri huius, vt D E, prima ad F, tertiam, hoc est, per constructionem, vt B, ad C, ita rectilineum A, super primam ad rectilineum I, super secundam, illi simile similiterque positum. Quod erat faciendum.

b 13. sexti.

c 18. sexti.



NON secus dato rectilineo A, minus rectilineum I, describemus, illi simile similiterque positum, secundum proportionem datam B, ad C. Velut in hac figura factum esse cernis. Eadem enim prorsus est constructio, atque demonstratio.

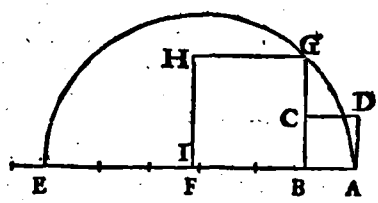
FACILE igitur ex hu quadratum quodcunque, vel aliud rectilineum duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus, &c. Atque aliud constituemus, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, vel quinta, &c. seruata nihilominus semper eadem rectilineorum similitudine, quemadmodum quadratorum eadem remanet similitudo. Si namque proportio B, ad C, sumatur vt 1. ad 2. vel 1. ad 3. vel 1. ad 4. &c. Item vt 2. ad 1. vel 3. ad 1. vel 4. ad 1. &c. reliqua verò perficiantur, vt prius; habebitur rectilineum simile similiterque descriptum, quod propositi rectilinei duplum existat, vel triplum, vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertia pars, vel quarta, &c. cuius quod proponitur.

c

NON videtur autem omittenda praxis Alberti Dureri, qua ipse facile duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, seu parallelogrammum quodcunque oblatum. Ex hac enim constructione quoque rectili-

rectilineum ſimile, ſimiliterque deſcriptum cuicunque rectilineo dato, maius, aut minus, ſecundum datam proportionem quamcunque. Tametſi autem Albertus huius praxis nullam affert rationem, ſed eam ſimpliciter proponit; non multum tamen eius demonſtratio à precedenti differt, vt mox oſtendemus.

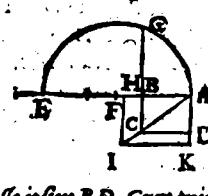
SIT igitur quadratum A B C D, quintuplicandum. Producto latere A B, ad partes B, quantumlibet, ſumantur quinque partes ipſi A B, aquales, à puncto B, incipiendo, vſque ad E, vt ſit B E, quintupla



ipſius A B. Diuiſa deinde tota A E, bifariam in F, deſcribatur ex F, ad interuallum F A, vel F E, ſemicirculus A G E, producaturque latus B C, ad circumferentiam vſque in G. Dico quadratum B G H I, ex B G, deſcriptum, quintuplum eſſe quadrati A B C D. Erit enim per coroll. propoſ. 13. huius lib. B G, media proportionalis inter E B, B A. Igitur erit vt E B, prima ad B A, tertiam, ita B H, quadratum ſecunda, ad A C, quadratum tertiæ, ex coroll. propoſ. 20. huius lib. Eſt autem E B, per conſtructionem, ipſius A B, quintupla. Igitur & quadratum B H, quadrati A C, quintuplum erit. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi recta B E, ſumatur ſextupla lateris A B, erit & quadratum rectæ B G, quadrati A B C D, ſextuplum: Si autem B E, fuerit tertia pars ipſius A B, erit & quadratum B H, tertia pars quadrati A C. Denique, in quacunque proportione ſumatur B E, ad A B, eandem habebit quadratum B H, ad quadratum A C.

SIT rurſus rectangulum A B C D, cui inueniendum ſit ſimile ſimiliterque poſitum, quod duplum ſit ipſius. Ex latere A B, producta ſumatur B E, dupla ipſius A B. Diuiſa deinde tota A E, bifariam in F; & ex F, deſcripto ſemicirculo, vt prius, & producta C B, ad G; erit B G, vnum latus rectanguli quæſiti. Quare ſi abſcindatur A H, æqualis ipſi B G, & per H, agatur ipſi B C, parallela H I, occurrens diametro A C, protracta in I, perficiaturque parallelogrammum H K; erit H K, ipſi B D, ſimile ſimiliterque poſitum; quod etiam eius duplum eſſe ipſius B D. Cum enim proportionales ſint tres rectæ E B, B G, B A, ex corollario propoſ. 13. huius lib. Erit vt prima, ſicut E B, prima ad B A, tertiam, ita rectangulum H K, ſupra A H, ſecundum (ſumpta enim fuit A H, ipſi B G, ſecunda æqualis) ad rectangulum B D, ſupra tertiam A B, quod eſt ſimile ſimiliterque deſcriptum. Quod eſt propoſitum.



a 24. ſexti.

EODEM

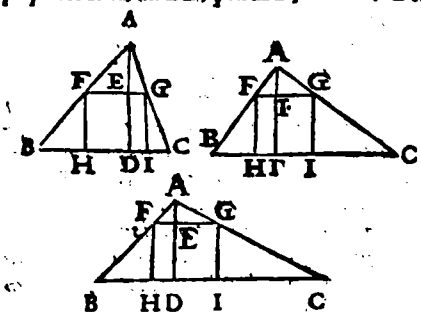
EODEM modo, si supra AB, constitutum fuerit quodcunq; rectilineum, erit quod ex BG, illi simile, similiterque positum describitur, ipsius duplum. Atque in hunc modum semper eam proportionem habebit rectilineum ex BG, ad rectilineum simile ex AB, quam habere ponetur recta EB, ad rectam BA, ex constructione.

PERSPICVVM autem est, hanc praxim una cum eius demonstratione à nostra antea tradita non differre, nisi quod hac simul tradit inuentionem lineæ mediæ proportionalis. Hanc enim ob causam Albertus coniungit in rectum, & continuum lineas EB, BA, quæ proportionem habent datam, vt statim, una operatione, mediam proportionalem obtineat, &c.

XVI.

IN dato triangulo quocunque quadratum describere.

SIT datum triangulum ABC, acutangulum. Ex angulo quocunque A, ad BC, perpendicularis demittatur AD, quæ intra triangulum cadet, ex scholio propos. 13. lib. 2. Hac autem in E, ita secetur, per ea, quæ in scholio propos. 10. huius libri docuimus, vt eadem sit proportio AE, ad ED, quæ AD, ad BC. Deinde per E, agatur FG, ipsi BC, parallela. Postremo ex F, & G, ipsi DE, parallelæ ducantur FH, GI. Dico FGIH rectilineũ triangulo ABC, inscriptum esse quadratum. Cum enim FG, ipsi BC, sit parallela; erit vt BD, ad DC, ita FE, ad FG, ex scholio propos. 4. huius lib. & componendo, vt BC, ad DC, ita FG, ad EG.

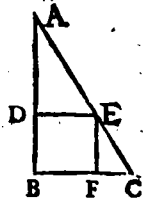


a 24 *sex.* *Sed vt DC, ad AD, ita est FG, ad AE, quod per coroll. propos. 4.*
b 22. *huius lib. triangula ADC, AEG, sunt similia. b Igitur erit ex æquo,*
quinti. *vt BC, ad AD: ita FG, ad AE. Quia vero per constructionem est vt*
c 22. *AD, ad BC, ita AE, ad ED, c erit rursus ex æquo, vt BC, ad BG,*
quinti. *ita FG, ad ED: Est autem BC, ipsi BC, æqualis, imò eadem. Æ-*
d 34. *qualis igitur est & FG, ipsi ED, d Quare cum latera ipsi HI, &*
primi. *ED, ipsis EH, GI, æqualia existant; Erunt quatuor latera FG, GI,*
e 29. *IH, HF, æqualia inter se. e Et quia anguli EDH, FHD, duobus re-*
primi. *ctis æquales sunt; Est autem EDH per constructionem, rectus; erit & FHD, rectus. Quocirca per ea, quæ ad defin. 1. lib. 2. demonstrauimus, & reliqui anguli HFG, FGI, GIH, recti sunt in parallelogram-*

logrammo FGIH; Ac proptereà FI, quadratum est. Quod est propositum.

NON secus idem problema absoluemus, si datum triangulum fuerit rectangulum, vel obtusangulum, dummodo ex angulo recto, vel obtuso perpendicularem demittamus, vt in posteriorsibus duobus triangulis apparet. Ita enim semper cadet perpendicularis AD, intra triangulum, ex scholio propos. 13. lib. 2.

QVOD si in triangulo rectangulo quadratum describere libeat, ita vt duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulum rectum nitantur; diuidemus perpendicularem AB, in D, ita vt eadem sit proportio AD, ad DB, qua AB, ad BC, & per D, quidem ipsi BC, parallelam ducemus DE; per E, vero ipsi AB, aliam parallelam EF. a *Quoniam igitur est, vt BC, ad AB, ita DE, ad AD, quod triangula ABC, ADE, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. Est autem per constructionem, vt AB, ad BC, ita AD, ad DB,* b *erit ex æquo, vt BC, ad BC, ita DE, ad DB: Est autem BC, sibi ipsi æqualis, imò eadem. Æqualis igitur est & DE, ipsi DB. Quare vt prius, DEFB, quadratum est. Quod est propositum.*



a 4. sext.

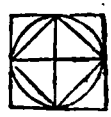
b 22. quinti.

VERVM hoc problemate Commandini multo ingeniosius est id, quod sequitur.

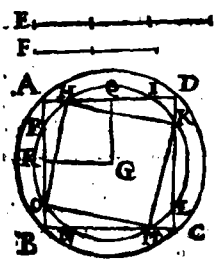
XVII.

INTRA datum quadratum, aliud quadratū describere in data proportione maioris inæqualitatis. Oportet autem datam proportionem dupla non esse maiorem.

SIT quadratum ABCD, intra quod describendum sit quadratum, ad quod habeat quadratū ABCD, proportionem eandem maioris inæqualitatis, quam recta E, ad rectam F, quacunq; ea sit, dummodo maior non sit, quam dupla. Nam si latera quadrati secentur bifariam, punctaque diuisionum rectis iungantur lineæ, inscriptum erit quadratum intra aliud, vt ad finem lib. 4. demonstrauimus, idem cum eo centrum habens. Et quia circulus intra quadratum ABCD, describitur est quadrato illi inscripto circumscriptus, vt in hac figura perspicuum est, erit quadratum ABCD, illius quadrati inscripti duplum, ex scholio propos. 9. lib. 4. Cum ergo minus quadratum intra quadratum ABCD, describi nequeat, quam illud, cuius circulus circumscriptus latera quadrati ABCD, tangit, vt patet: liquido constat quadratum ABCD, ad nullum quadratum inscriptum proportionem posse habere dupla maiorem. Sit igitur data proportio E, ad F, minor quam dupla; nimirum sesquialtera. Inueniatur ex



propos.



propoſ. 15. huius ſcholij quadratum, ad quod habeat datum quadratum A B C D, proportionem datam E, ad F. Erítque eius ſemidiameter maior, quam ſemidiameter quadrati, cuius circulus circumſcriptus latera quadrati A B C D, tangit, quod nimirum quadratis A B C D, ſubduplum eſt, vt diximus, minor vero ſemidiametro quadrati A B C D. Igitur ſi ex centro G, quadrati dati deſcribatur circulus aqualis ei, qui circa inuentum quadratum deſcribitur, ſecabit is latera quadrati A B C D, in punctis H, I, K, L, M, N, O, P. Iungantur rectæ H K, K M, M O, O H, relictis quatuor punctis I, L, N, P, in medio. Dico H K M O, eſſe quadratum in circulo H I K L M N O P, deſcriptum, atque adeo aquale ei, quod inuentum eſt, ita vt quadratum A B C D, ad quadratum H K M O, habeat datum proportionem, E ad F. Deſcripto enim circulo circa datum quadratum A B C D, ex centro G, ductiſque ex G, ad latera A D, A B,

a 3. tertij. *perpendicularibus G Q, G R, a ſecta erunt tam recta A D, A B, quam recta H I, O P, biſariam in Q, R. Et quia A D, A B, aquales ſunt,*

b 14. tertij. *b aqualiter diſtabunt a centro G, propterea que & H I, O P, aqualiter ab eodem centro diſtabunt.* c *Quare aquales erunt H I, O P, ideoque & earum ſemiſſes Q H, Q I, R O, R P, inter ſe erunt aquales. Sunt*

c 14. tertij. *autem & ſemiſſes Q A, Q D, R A, R B, aqualium laterum aquales. Igitur ſi illa ab his demantur, reliquæ erunt aquales H A, I D, P A, O B. Eademque ratione, ſi ducantur aliæ perpendiculares ad latera B C, C D, oſtendentur aquales N B, M C, L C, K D, & inter ſe, & illis quatuor H A, I D, P A, O B. Item quia aquales ſunt H I, O P, ſi addantur aquales I D, P A, fient tota aquales H D, A O. Atque eadem de cauſa aquales erunt B M, K C, & inter ſe, & illis duabus H D, A O. Itaque quia duo latera A O, A H, duobus lateribus D H, D K, aqualia ſunt, angulóſque continent aquales, nimirum rectos;*

d 4 pri. *d erunt & baſes H K, H O, aquales. Eodemq; modo demonſtrabuntur K M, M O, aquales & inter ſe, & duabus H K, H O. Æquilatera ergo eſt figura H K M O. Dico & rectangulam eſſe. Cum enim late-*

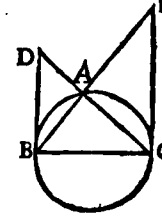
e 28. tertij. f 31. ter. *ra H K, K M, M O, O H, aqualia ſint, e erunt & quatuor anguli quos ſubtendunt, aquales, ac proinde Quadrantes erunt. Semicirculi ergo ſunt O H K, H K M, K M O, M O H, f ac proinde quatuor anguli H, K, M, O, in illis ſemicirculis recti erunt. Igitur H K M O, quadratum eſt, atque adeo inuento quadrato aquale, cum idem circulus vtrumque circumſcribat. Circulus enim H K M O, deſcriptus eſt ad interuallum ſemidiametri circuli inuento quadrato circumſcripti. Quod eſt propoſitum.*

SI ad

XVIII.

SI ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eisdem extremis per vnum idemque punctum circumferentiæ duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus: erit rectangulum comprehensum sub vtralibet secantium, & eius segmento interiore, quadrato diametri æquale.

HÆC propositio est Cardani lib. 16. de Subtilitate cap. 1. sicut & quæ sequitur. Vtramque autem demonstrauit Io. Baptista Benedictus. Sit ergo circulus A B C, cuius diameter B C, ad quam in B, C, excitentur duæ perpendiculares B D, C E, ac per assumptum quodvis punctum A, in circumferentia ex eisdem punctis B, C, eductæ rectæ B A, C A, secent perpendiculares in E, D. Dico tam rectangulum sub E B, B A, quàm sub D C, C A, quadrato diametri B C, æquale esse. Quoniam enim in triangulo rectangulo B C E, ex angulo recto C, demissa est C A, ad basin B E, perpendicularis; a quod angulus B A C, in semicirculo rectus sit: erit ex coroll. propos. 8. huius lib. B C, media proportionalis inter E B, B A. Quare b rectangulum sub extremis E B, B A, æquale erit quadrato mediæ B C. Eademque ratione eidem quadrato æquale erit rectangulum sub D C, C A: ac propterea quod B C, media quoque proportionalis est inter D C, C A, ex eodem coroll. propos. 8. huius lib. Constat ergo id, quod proponitur.



a 1. 16. 8.

b 17. sexti.

XIX.

SI in circulo duæ diametri se se ad rectos angulos secent, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque secans circumferentiam, & alteram diametrum siue productam, siue non productam: erit rectangulum comprehensum sub duobus segmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum punctum prioris diametri, & secundam diametrum, alterum vero inter idem punctum extremum, & circumferentiam interiicitur, æquale quadrato intra circulum descripto.

IN circulo A B C D, cuius centrum E, secent se ad angulos rectos diametri A C, B D, ducaturque ex puncto D, recta vtcunque D F,

secans diametrum A C, in F, & circumferentiam in G. Dico rectangulum sub F D, D G, quadrato intra circulum descripto esse aequale. Ductis enim rectis D C, C G, erunt triangula D C F, D C G, aequiangula inter se. Nam angulus C D F, communis est, & angulus D C F, angulo D G C,

a 32. primi. *aequalis: a ac proinde & reliquus D F C, reliquo D C G, aequalis. Quod autem anguli D C F, D G C, aequales sint, ita ostendemus. Si punctum quidem F, est intra circulum;*

b 27. tertij. *b erunt anguli D C F, D G C, insistentes quadrantibus aequalibus A D, D C, aequales: Si verò punctum F, est extra circulum,*

c 27. tertij. *ducta recta A D, c erunt anguli D A C, D C A, insistentes quadrantibus aequales:*

d 22. tertij. *d Sed tum D A C, D G C, e quam D C A, D C F, aequales sunt duobus rectis. Igitur ablatis aequalibus D A C, D C A, reliqui D G C,*

e 13. pri. *D C F, aequales quoque erunt. Quam ob rem, cum triangula D C F,*

f 4. sex. *D C G, aequiangula sint; f erit vt D F, ad D C, ita D C, ad D G: hoc*

g 17. sexti. *est, tres lineæ D F, D C, D G, continuè proportionales erunt. g Igitur rectangulum sub extremis D F, D G, aequale est quadrato mediæ D C, hoc est, quadrato intra circulum descripto, cum D C, latus sit quadrati circulo inscripti, vt constat ex propos. 6. lib. 4. Quod est propositum.*

h 31. tertij. *A L I T E R. Ducta recta B G, h erit angulus B G D, in semicirculo rectus; atque idcirco duo triangula B G D, D E F, cum habeant*

i 32. pri. k 4. sex. l 16. sex. *angulos rectos B G D, D E F, & angulum B D G, vel E D F, communem, i aequiangula erunt. k Igitur erit, vt D F, ad D E, ita D B, ad D G. l Rectangulum ergo sub D F, D G, aequale erit rectangulo sub*

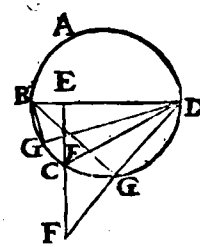
m 17. sexti. n 31. tertij. *D B, D E. m Sed rectangulo sub D B, D E, aequale est quadratum recta A D, hoc est, quadratum circulo inscriptum; propterea quod ex coroll. propos. 8. huius lib. A D, media proportionalis est inter D B, D E, vt patet, si ducatur recta A B. n Fiet enim triangulum rectangulum B A D, & ex angulo recto perpendicularis demissa erit A E. Igitur & rectangulum sub D F, D G, eidem quadrato rectæ A D, aequale erit. Quod est propositum.*

V N I V E R S A L I V S hoc item proponetur.

SI in circulo à quouis puncto diametri ad diametrum perpendicularis excitetur, ad quam ex alterutro terminorum diametri duæ rectæ ducantur, vna ad eius interfectionem in circumferentia, altera vero vt libet, secans circumferentiam in alio puncto: Erit rectangulum sub segmentis huius posterioris lineæ, quorum vnum sit inter prædictum terminum, & perpendicularem, alterum vero inter eundem terminum, & circumferentiam, æquale

quadrato

quadrato prioris rectæ inter eundem terminum, & circumferentiam, seu perpendicularem interceptæ.



IN circulo enim A B C D, ad diametrum B D, sit perpendicularis E F, secans circumferentiam in C, iungantur q; rectæ D C, D F, quarum posterior perpendicularem E F, secet in F, & circumferentiam in G. Dico rectangulum sub D F, D G, æquale esse quadrato D C. Iunctæ enim rectæ B G, erunt triangula B G D, F D E, æquiangula, propter angulos rectos G, E, & communem angulum F D E. a *Igitur erit, vt F D, ad D E, ita B D, ad D G.* b *Quare rectangulum sub F D, D G, rectangulo sub D E, B D, æquale erit:* c *Sed hoc æquale est quadrato D C; quod ex coroll. propos. 8. huius, D C, sit media proportionalis inter B D, D E: quia ducta recta B C,* d *angulus, B C D, foret rectus in semicirculo. Igitur & rectangulum sub F D, D G, quadrato D C, æquale erit. Quod est propositum.*

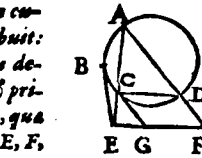
a 4. sexti.
b 16. sexti.
c 17. sexti.
d 31. tertij.

COROLLARIVM.

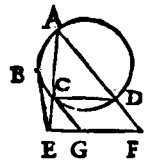
HINC fit, priorem lineam D C, esse mediam proportionalem inter posterioris segmenta F D, D G, quorum vnum est inter terminum D, & perpendicularem, alterum vero inter eundem terminum, & circumferentiam.

XX.

DATO circulo, & duobus punctis siue extra circulum, siue intra, dummodo neutrum sit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam secant, parallela sit rectæ data duo puncta connectenti.



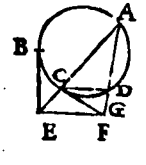
HOC problema non minus acutum quam curiosum in tres propositiones Pappus distribuit: quod nos in vnam redigentes multo clarius demonstrabimus. Sit ergo circulus A B C D, & primum duo data puncta E, F, extra circulum, quæ per rectam E F, coniungantur. Si igitur ex E, F, ducenda sint recta ad aliquod punctum concauæ circumferentiæ, &c. ita agemus. Ex E, ducatur recta E B, tangens circulum in B, & duabus E F. E B, tertia proportionalis inueniatur, cui æqualis sit E G, cadatque primum G, punctum inter E, & F, quod fit, quando E F, maior est, quam E B. Ducta igitur G C, recta circulum tange-



tangente in C, versus priorem tangentem E B, ducatur ex E, per C, recta secans concavam peripheriam in A, jungaturque recta A F, secans circumferentiam in D. Dico ductam rectam C D ipsi E F, parallelam esse. Quoniam enim tres rectæ E F, E B, E G, continuè proportionales sunt, a erit rectangulum sub E F, E G, quadrato ex E B, æquale: b Est autem eidem quadrato ex E B, æquale rectangulum sub E A, E C, igitur rectangulum sub E A, E C, æquale erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, G, F, circulus describi poterit. c Duo ergo anguli C A F, C G F, oppositi in quadrilatero A C G F, intra eum circulum descripto æquales sunt duobus rectis, ideoque duobus angulis ad G, d qui duobus etiam rectis æquales sunt, æquales. Dempto igitur communi C G F, erit reliquus C G E, reliquo A, æqualis: e Est autem & angulus D C G, angulo A, in alterno segmento æqualis. Igitur anguli D C G, C G E, inter se æquales erunt; atque ideo, cum sint alterni, f recta C D, E F, parallelæ erunt. Quod est propositum.

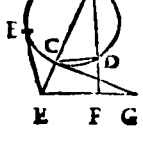
a 17. sexti. b 36. tertij. c 32. tertij. d 13. primi. e 32. tertij. f 27. primi.

C A D A T deinde punctum G, in punctum F, quod accidit, quando E F, ipsi E B, æqualis est. Ducta igitur rursus recta G C, circulum tangente in C, versus priorem tangentem E B, ducatur ex E, per C, recta concavam peripheriam secans in A, jungaturque recta A F, secans circumferentiam in D. Dico rursus ductam rectam C D, ipsi E F, esse parallelam. Quoniam enim æquales sunt E B, E F; g estque rectangulum sub A E, E C, quadrato ex E B, æquale: erit quoque idem rectangulum quadrato sub E F, æquale. Quare h si circa triangulum A C F, circulus describatur, cum eum secet recta E A, recta autem E F, eidem applicetur, i tanget recta E F, eum circulum. k Angulus ergo E F C, angulo A, in alterno segmento illius circuli æqualis erit: l Est autem & angulus F C D, eidem angulo A, in alterno segmento circuli A B C D, æqualis. Igitur æquales inter se erunt anguli E F C, F C D: qui cum sint alterni, m erunt recta C D, E F, parallela. Quod est propositum.



g 36. tertij. h 5. quarti. i 37. tertij. k 32. tertij. l 32. tertij. m 27. primi.

C A D A T tertio punctum G, ultra F, quod contingit, quando E F, minor est quam E B. Facta igitur eadem constructione, quoniam tres rectæ E F, E B, E G, continuè proportionales sunt, n erit rectangulum sub E F, E G, quadrato ex E B, æquale: o Est autem eidem quadrato ex E B, æquale rectangulum sub A E, E C. Igitur rectangulum sub E F, E G, hoc est, sub E G, E F, rectangulo sub E A, E C, æquale erit: ac

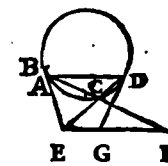


n 17. sexti. o 36. tertij.

erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, F, G, circulus describi poterit. a *Duo ergo anguli A, G, in eodem segmento C A G F, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta C F, inter se aquales erunt:* b *Est autem angulus G C D, angulo A, in alterno segmento dati circuli A B C D, aqualis. Igitur idem angulus G C D, angulo G, aqualis erit: ac proinde, cum duo hi anguli sint alterni,* c *parallela erunt C D, E F. Quod erat propositum.* a 21. tertij. b 32. tertij. c 27. primi.

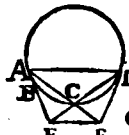
QVOD si à principio ex puncto F, ducta fuisset linea circulum tangens, & reliqua fierent, vt prius, inueniretur idem omnino punctum A: quia nullum aliud punctum absoluere potest problema. Concipiatur enim mente quodcunque aliud punctum H, prope A, inter A, & D. (In illud punctum H, atramento signaueris, facilior erit demonstratio, quod etiam de aliis punctis H, mente concipiendis intelligatur, nec non de puncto I, in vltima figura) *Igitur recta F H, secabit circulum supra D, at verò recta E H, eundem infra C, secabit; ac propterea recta coniungens puncta sectionum rectam C D, secabit. Producta ergo secabit quoque illius parallelam E F. Non igitur ipsi E F, parallela erit. Contrarium accidet, si punctum H, sumatur inter A, & C. Nam recta F H, cadet infra D, & E H, supra C, &c.*

SI verò ex eisdem punctis datis E, F, ducenda sint duo recta ad aliquod punctis connexa circumferentia, qua producta secent concauam peripheriá in duobus punctis, ita vt recta per ea transiens sit parallela recta puncta E, F, connectenti, hoc modo procedemus. Ducta recta E B, circulum tangente in B, inueniatur duabus rectis E F, E B, tertia proportionalis E G, cadatque primum G, punctum inter E, F. Ducta igitur ex G, recta G D, tangente circulum in D, non tamen versus priorem tangentem E B, ducatur E D, secans circumferentiam in C, puncto, per quod recta eiiciatur ex F, secans circumferentiam in A. Dico rectam A D, ductam esse recta E F, parallelam: Quoniam enim tres recta E F, E B, E G, continuè sunt proportionales, d *erit rectangulum sub E F, E G, quadrato ex E B, aquale:* e *Est autem & rectangulum sub D E, E C, eidem quadrato ex E B, aquale. Igitur aqualia inter se erunt rectangula sub E F, E G, & sub E D, E C: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta C, D, F, G, circulus describi potest.* f *Duo ergo anguli C D G, & F, in eodem segmento C D F G, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta C G, inter se erunt aquales.* g *Est autem angulus C D G, angulo A, in alterno segmento dati circuli A B C D, aqualis. Igitur & angulus F, angulo A, alterno aqualis erit,* h *ideoque parallela erunt A D, E F. Quod erat propositum.*



d 17. sexti. e 36. tertij. f 21. tertij. g 32. tertij. h 27. primi.

CADAT deinde punctum G, in F. Ducta igitur rursus recta GD, tangente circulum in D, non tamen versus priorem tangentem EB, ducatur recta ED, secans circumferentiam in C, puncto, per quod recta adducta ex F, secet circumferentiam in A. Dico ductam rectam AD, rectæ EF, parallelam esse. Cum enim æquales sint EB, EF, (quod sit EF, ad EB, & EB, ad



a 5. quarti. *EF, æquales sint EB, EF, (quod sit EF, ad EB, & EB, ad EF,) erunt earum quadrata æqualia: Est autem*
b 37. tertij. *rectangulum sub ED, EC, quadrato ex EB, æquale. Igitur & quadrato ex EF. Quia ergo, a si circa triangulum CDF, circulus describatur, recta*
c 32. tertij. *ED, eum secat, & EF, applicata est, b tanget EF, eum circulum. c Angulus ergo EFC, angulo FDE, in alterno*
d 32. tertij. *segmento eius circuli æqualis erit: d Est autem angulus FDE, angulo A; in alterno segmento circuli ABCD, æqualis. Igitur & an-*
e 27. primi. *gulus EFC, eidem angulo A, alterno æqualis erit. e Quare parallelæ erunt AD, EF. Quod erat propositum.*

CADAT tertio punctum G, ultra F. Facta ergo eadem constructione, cum tres rectæ EF, EB, EG, sint continuè proportionales,
f 17. sexti. *f erit rectangulum sub EF, EG, sive sub EG, EF, æquale quadrato ex EB: g Est autem eidem quadrato æquale rectangulum sub*
g 36. tertij. *ED, EC. Igitur rectangulum sub EG, EF, rectangulo sub ED, EC, æquale erit, propterea-*

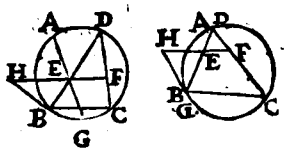


h 22. tertij. *que ex scholio propos. 36. lib. 3. circa quatuor puncta C, D, G, F, circulus potest describi. h Duo ergo anguli EDG, CFG, oppositi in quadrilatero CDGF, intra eum circulum descripto æquales*
i 13. pri. *erunt duobus rectis, ac proinde æquales duobus angulis ad F, i qui etiam duobus sunt rectis æqua-*
k 32. tertij. *les. Dempto ergo communi CFG, reliquum CDG, reliquo CFE, æqualis erit: k Est autem angulus GDC, angulo A, in alterno se-*
l 27. primi. *gmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus CFE, eidem angulo CAD, alterno æqualis erit: l atque ideireo parallelæ erunt AD, EF. Quod est propositum.*

QVOD si à principio ex F, duceretur linea circulum tangens, & alia fierent, ut prius, inveniretur idem omnino punctum C, ex quod nullum aliud possit problema conficere. Nam sit aliud punctum H, quodcunque iuxta C, mente conceptum inter A, & C. Cadet ergo recta FH, infra A, & recta EH, supra D. Recta igitur connectens puncta sectionum secabit rectam AD; ac proinde, ut supra dictum est, ipsi EF, parallela esse non potest. Si punctum H, sumptum foret inter D, & C, caderet FH, recta supra A, & recta EH, infra D, &c.

SED sint iam data puncta E, F, intra circulum ABCD. Ducta recta

data recta A G, per E, vtcunque, inueniatur tribus rectis E F, E A, E G, quarta proportionalis, cui æqualis sit E H, (cadet que necessario punctum H, extra circulum a Quoniam enim rectangulum sub A E, E G, secunda & tertia, æquale est rectangulo sub E F, E H, prima & quarta; describi poterit circulus circa 4. puncta A, F, G, H, ex scholio propos. 35. lib. 3. secans circulum A B C D, in A, G. Cum ergo eius arcus per F, transiens sit intra hunc circulum, erit alter arcus per H, transiens, extra: b quandoquidem circulus circulū in duobus tantum punctis secat, ac proinde circulus per A, F, G, descriptus post puncta A G, extra circulum cadet; ideoque punctum H, in eo circulo existens extra circulum cadet) ducaturque H B, circulum tangens in B. Ducta enim recta ex B, per E, secante circumferentiam in D, & ex D, per F, recta secante circumferentiam in C; dico ductam rectam B C, parallelam esse rectæ E F. Quia enim ita est E F, ad E A, vt E G, ad E H, c erit rectangulum sub E F, E H, æquale rectangulo sub E A, E G: d Est autem rectangulum sub E A, E G, æquale rectangulo sub E D, E B. Igitur & rectangulum sub E F, E H, eidem rectangulo sub E D, E B, æquale erit: ac propterea ex scholio propos. 35. lib. 3. circa quatuor puncta B, H, D, F, circulus poterit describi. e Quare duo anguli H B D, & D F H, in eodem segmento D F B H, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta D H, æquales erunt. f Est autem angulus H B D, angulo C, in alterno segmento dati circuli A B C D, æqualis. Igitur & angulus D F H, angulo eidem C, æqualis erit, externum interno. g Parallela ergo sunt rectæ B C, E F. Quod est propositum.



a 16. sexti.

b 16. tertij.

c 16. sexti.

d 35. tertij.

e 21. tertij.

f 32. tertij.

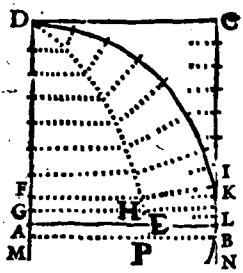
g 28. primi

QVOD si contingat, tangentem H B, cadere in punctum G, non erit ducenda alia linea B D, sed A G, qua in principio ducta est, propositum concludet, vt perspicuum est in secunda figura.

IAM si solutio problematis inciperet à puncto F, non autem ab E, reperiretur idem omnino punctum D; quod nullo alio problema confici possit. Si enim sumatur quodcunque aliud punctum I, prope D, inter D, & C, cadet recta F I, infra C, & E I, supra B. Recta ergo connectens sectionum puncta rectam B C, secabit. Igitur vt supra dictum est, recta E F, parallela non erit. Si punctum I, sumeretur inter D, & B, caderet recta F I, supra C, & E I, infra B, &c.

DE MIRABILI NATVRA LINEÆ cuiusdam inflexæ, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium inscribitur, & circulus quadratur, & plura alia scitu iucundissima perficiuntur.

FORTE superiori anno incidi in librum 4. Pappi Alexandrini, vbi lineam quandam inflexam explicat, quam, vt ait, Dinostratus, & Nicomedes, & nonnulli iuniores excogitarunt ad circuli quadraturam; ideoq; ab officio τετραγωνίζουσα ab eisdem appellata est, à nobis eadem de causa Quadratrix dicetur. Quanquam autem praedicti auctores huiusmodi lineam conentur describere per duos motus imaginarios duarum rectarum, quæ in re principium petunt, vt propterea à Pappo reiiciatur, tanquam inutilis, & quæ describi non posset; nos tamen eam sine illis motibus Geometricè describemus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat, quemadmodum in descriptionibus conicarum sectionum fieri solet. Hanc inuentionem Epilogi loco huic sexto libro adiungendam esse censuimus; propterea quòd beneficio huius lineæ problemata Geometrica scitu peruenusta, & quæ ad hunc vsque diem desiderata sunt, summa facilitate conficiuntur. Id quod ad finem lib. 4. facturos nos hoc loco recepimus, reiiciendo tamen planiorem Quadraturæ tractationem in nostram Geometriam Practicam. Sit ergo descriptio lineæ Quadratricis fiet.



IN quadrato A B C D, describatur quadrans B D. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam semidiameter A D, æquabiliter circa centrum A, quam latus supremum C D, deorsum versus æquabiliter quoque, itа vt quo tempore punctum D, circumferentiam D B, vniformi semper motu percurrit, eodem recta D C, vniformi etiam motu descendens ad latus A B, perueniat, sic tamen, vt perpetuo lateri A B, sit parallela, & cum lateribus A D, B C, angulos rectos efficiat; secabunt se continuò semidiameter in circumferentia D B, circumacta, & recta D C, deorsum lata, in punctis, quæ lineam Quadratricem describent, hoc est, per quæ linea Quadratrix transibit, cuiusmodi est linea inflexa D E. Sed quia duo isti motus vniformes, quorum vnus per circumferentiam D B, fit, & alter per lineas rectas D A, C B, effici non possunt, nisi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, merito à Pappo descriptio hæc reprehenditur: quippe cum ignotum adhuc sit ea proportio, & quæ per hanc

lineam

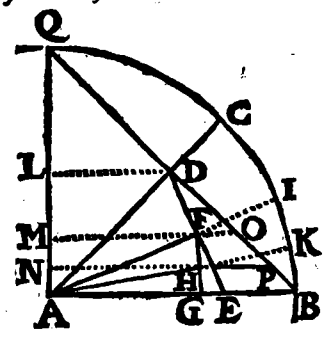
lineam inuestiganda proponatur. Quare nos Geometricè eandem lineam Quadratricem describemus hoc modo. Arcus B, D, in quotuis partes aequales diuidatur, & latus vtrumq; A D, B C, in totidem aequales partes. Facillima diuisio erit, si & arcus D B, & vtrumq; latus A D, B C, secetur primum bifariam, deinde vtraque semissis iterum bifariam, & singula rursum partes iterum bifariam, atque ita deinceps, quantum libuerit. Quo autem plures extiterint diuisiones, eò accuratius Quadratrix linea describetur. Nos autem confusionem vitandam secuimus tam arcum D B, quàm duo latera A D, B C, in 8. partes aequales.

DEINDE bina puncta laterum A D, B C, aequaliter distantia à latere D C, vel A B, coniungantur lineis rectis occultis, atque ex centro A, alia recta occulta ad singula diuisionum puncta Quadrantis D B, extendantur. Vbi enim hae rectae priores rectas interfecabunt, prima primam, secunda secundam, &c. per ea puncta Quadratricis linea congruenter ducenda est, ita vt non sit sinuosa, sed aequabiliter semper progrediatur nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis est linea inflexa D E, secans semidiametrum A B, in E.

SED quia punctum E, in latere A B, inuenire Geometricè non potest, cùm ibi omnis sectio rectarum cesset; vt illud sine notabili errore, qui scilicet subsensum cadat, reperiamus, vtemur hoc artificio. Infimam partem A F, lateris A D, si satis exigua non sit, secabimus bifariam continuè, donec infima particula sit perexigua: Eodemque modo infimam partem B I, arcus D B, bifariam continuò diuidemus, donec tot fiant subdiuisiones, quot in parte A F, factae sunt, vt particula B K, talis pars sit totius arcus D B, qualis pars est A G, totius lateris A D. Particula deinde A G, aequales abscindemus B L, B N, A M, ducemusq; rectas occultas G L, M N. Ducta verò ex A, centro recta occulta A K, qua secet G L, in H, puncto, quod accuratissimè notetur, sumemus ipsi G H, aequalem M P. Si enim Quadratricem vsque ad H, descriptam continuabimus aequabili atque vniformi extensione vsque ad P, secabit Quadratrix lineа latus A B, in E, puncto, quod quaritur. Nam propter parvam rectarum G H, A E, M P, inter se distantiam, efficitur, vt fermè sint aequales, licet Geometricè loquendo, recta A E, semper maior sit aliquanto, quantumuis parum ea recta inter se distent: sed excessus ille circino deprehendi nō potest. Id quod etiam in circumferentia circuli contingit. Rectae namque G L, A B, M N, si parum inter se distent, in circulo omnino aequales iudicabuntur, quamuis verè A B, aliquantò maior sit. Itaq; si tres illae rectae G H, A E, M P, perexiguam habeant distantiam inter se, dubitari non potest, punctum E, in quo Quadratrix linea semidiametrum A B, secat, ab eo, quod verè in Quadratrice ibi existit, non differre: dummodò puncta H, P, exquisitè, & summa adhibita diligentia, inuenta sint.

RECTAM porrò *AD*, vocabimus latus Quadratricis, & rectam *AE*, eiusdem basim, ac denique punctum *A*, centrum.

VERVM puncta Quadratricis propè basim certius inuenientur, sine intersectionibus linearum, hoc modo. Ducta chorda *BQ*, in quadrante secetur in *D*, bifariam. quod fiet, si ex *A*, ad *C*, punctum medium quadrantis recta ducatur *AC*. Hac enim ex scholio propos. 27. lib. 3. rectam *BQ*, secabit bifariam. Deinde recta *AD*, sumatur aqualis *AE*; iunctaq; recta *DE*, secetur bifariam in *F*, quod etiam fiet, si ex *A*, ad *I*, punctum medium arcus *BC*, ducatur *AI*. Hac enim chordam *BC*, (si duceretur) secaret bifariam, ex scholio propos. 27. lib. 3. ac proinde & rectam *DE*, ex



a 2. sexti. scholio propos. 4. huius, a cùm chorda *BC*, sit parallela; propterea quòd latera *AB*, *AC*, proportionaliter secantur in *D*, *E*, quippe cùm tam *AB*, *AC*, quàm *AE*, *AD*, aquales sint. Rursus recta *AF*, sumatur aqualis *AG*; iunctaq; *FG*, secetur bifariam in *H*. quod etiam fiet per rectam *AK*, ductam ad *K*, punctum medium arcus *BI*. Atque hoc modo si recta *AH*, aqualis sumatur, & reliqua fiant, vt prius, inuenietur aliud punctum inter *H*, & *G*. Et sic deinceps quotuis alia puncta reperiemus viciniora ipsi *AB*, per lineas perpendiculares, non autem per obliquas sectiones. b Est enim *AD*, ad *DB*, perpendicularis; & *AF*, ad *DE*; & *AH*, ad *FG*, &c. Omnia verò hac puncta inuenta *D*, *F*, *H*, &c. sunt in Quadratrice. quod ita ostendo. Ductis *DL*, *FM*, *HN*, ipsi *AB*, parallelis secantibus *BD*, in

b 3. tertij.

c 2. sexti. *O*, *P*; c erit vt *BD*, ad *DQ*, ita *AL*, ad *LQ*; ideoq; & *AQ*, secta erit in *L*, bifariam. Sectus autem est & arcus *BQ*, in *C*, bifariam. Igitur, vt ostensum est, punctum *D*, est in Quadratrice. Rursus quia

d 2 sexti. *DE*, secta est bifariam in *F*; d erit quoque *DB*, secta bifariam in *O*;

e 2. sexti. ideoque erit vt *EF*, ad *FD*, ita *BO*, ad *OD*. Sed vt *BO*, ad *OD*, ita est *AM*, ad *ML*: Et vt *EF*, ad *FD*, ita arcus *BI*, ad *IC*; quòd vtrobiq; proportio sit aqualitatis; erit igitur quoque vt *AM*, ad *ML*, ita *BI*, ad *IC*. Ergo, vt ostendimus, secabunt sese *AI*, *MO*, in puncto Quadratricis. Eademque ratio est de alijs punctis hac arte inuentis.

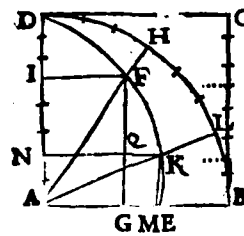
ESSE autem hanc lineam inflexam *DE*, à nobis per puncta descriptam Geometricè eandem, quam Dinostratus & Nicomedes per duos illius motus imaginarios describi concipiebant, perspicuum est. Nam

eſt. Nam ſi ſemidiameter A D, circa centrum A, per arcum D B, eodem tempore moueatur vniformi motu, quo latus D C, deorſum fertur motu quoque vniformi; fit, vt quando ſemidiameter A D, pertranſiuit quamcunque partem arcus D B, tunc latus D C, ſimilem partem laterum D A, & C B, percurrerit: Alias aut duo illi motus non eſſent vniformes, aut non eodem tempore ad latus A B, tam ſemidiameter A D, quàm latus D C, peruenirent. Cùm ergo recta ex centro A, per partes arcus D B, emiſſa, & linea parallela per partes laterum D A, C B, ducta, abſcindant ſemper ex arcu D B, & ex lateribus D A, C B, partes ſimiles, ex conſtructione, liquidò conſtat, puncta linea inflexa D E, à nobis Geometricè inuenta à punctis, quæ à duobus illis motibus reperirentur, non differre. Hac igitur eſt deſcriptio linea Quadratricis, quæ Geometrica quodammodo appellari poteſt, quemadmodum & conicarum ſectionum deſcriptiones, quæ per puncta etiam fiunt, vt ab Apollonio traditur, Geometrica dicuntur, cùm tamen magis erroribus ſint obnoxia, quàm noſtra deſcriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quæ ad earum deſcriptiones ſunt neceſſaria, quibus in Quadratricis deſcriptione opus non eſt. Quare niſi quis totum ſectionum conicarum doctrinam, quam tanto ingenij acumine Apollonius Pergæus perſecutus eſt, vt propterea Magnus Geometra appellatus ſit, reijcere velit tanquam inutilem, & non Geometricam, (quod neminem facturum exiſtimo, cùm ſectiones conicæ ad demonſtrationes adhibuerint præſtantiſſimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbolæ, ac Parabolæ vſus eſt in duarum linearum mediarum proportionalium inter quaſuis duas rectas inuentione: & Archimedes ipſe multa præclarè de eiſdem ſectionibus conicis demonſtrauit: ac denique eiuſmodi ſectiones inſignem vſum habent in re Gnomonica, vt ex noſtra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur deſcriptionem hanc noſtram Quadratricis lineæ, eſſe quodammodo Geometricam. Adde quòd linea conchois, qua Nicomedes duas medias lineas proportionales acutiſſimè inueſtigat, per puncta etiam deſcribitur, vt in libro de menſurationibus dicemus. Sed iam linea Quadratricis vſum nonnullis propoſitionibus exponamus.

I.

SI ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis rectæ ducantur vſq; ad circumferentiam Quadrantis ex eodē centro deſcripti, & ex eiſdem punctis ad baſin demittantur perpendiculares; & aliæ rectæ eidē baſi paral-

parallelæ: erunt arcus Quadrantis inter ſemidiametros interiecti perpendicularibus, vel ſegmentis ſemidiametri inter parallelas poſitis, proportionales.



EX centro A, per puncta F, K, in Quadratrice ſecunque acceptæ ducantur rectæ occurrentes arcui Quadrantis in H, L, demittanturq; ad baſin A E, perpendiculares F G, K M: & ducantur F I, K N, eidem A E, parallelæ. Dico, vt eſt totus arcus D B, ad arcũ H B, ita eſſe totum latus D A, ad perpendicularem F G, vel ad ſegmentum I A, &c. Quia enim eadem pars eſt arcus D H, totius arcus D B, quæ pars eſt rectæ D I, totius lateris D A, vt ex deſcriptione lineæ Quadratricis manifeſtum eſt, ſive ea cogitetur deſcripta duobus illis motibus proportionalibus Dinoſtrati, & Nicomedis, ſive ea ratione, quam nos præſcripſimus, cùm in ea ſemper arcus D H, tot particulas totius arcus D B, complectatur, quot partes totius rectæ D A, rectæ D I, continet, propterea quòd rectæ A H, I F, ſe interſecant in puncto F, Quadratricis: Neque hac ſimilitudo impeditur, etiamſi tam arcus D H, toti arcui D B, quàm rectæ D I, toti lateri D A, ſit incommenſurabilis, cùm perpetuò Quadratrix eadem vniformitate progrediatur per omnia ſua puncta. Si enim rectæ D I, non eſt talis pars ſine commenſurabilis, ſive incommenſurabilis, totius lateris D A, qualis pars eſt arcus D H, totius arcus D B, ſi cogitetur talis pars minor quam D I, vel maior, ſecabit parallela ex puncto eius extremo ducta rectã A H, vel ſupra F, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix deſcribenda eſt, ac proinde ea non tranſibit per F. quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Quia, inquam, eadem pars eſt arcus D H, totius arcus D B, quæ pars eſt rectæ D I, totius lateris D A; erit quoque reliqua arcus H B, eadem pars totius arcus D B, quæ pars eſt reliqua rectæ I A, totius lateris D A. Quocirca erit, vt totus arcus D B, ad arcum H B, ita totum latus D A, ad rectam I A, hoc eſt, ad rectam F G,

a 34. pri. *a quæ ipſi I A, æqualis eſt, ac proinde & tam dinidendo erit, vt arcus D H, ad arcum H B, ita recta D I, ad rectam I A, vel F G, quàm conuertendo, vt arcus H B, ad arcum D B, ita recta F G, vel I A, ad rectam D A, &c.*

EADEM ratione erit, vt arcus D B, ad arcum L B, ita recta

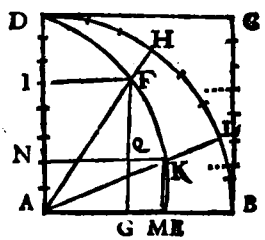
b 34. primi. *D A, ad rectam N A, ſive ad K M, b quæ ipſi N A, æqualis eſt: Et vt arcus D L, ad arcum L B, ita recta D N, ad rectam N A, ſive K M: Et vt arcus L B, ad arcum D B, ita recta K M, vel N A, ad rectam D A. Quo-*

D A. Quoniam igitur eſt, ꝙt L B, ad D B, ita K M, ad D A: Et ꝙt D B, ad H B, ita D A, ad F G, erit ex æquo, ꝙt L B, ad H B, ita K M, ad F G: Et conuertendo, ꝙt H B, ad L B, ita F G, ad K M, hoc eſt, ita I A, ad N A: Et diuidendo ꝙt H L, ad L B, ita I N, ad N A, ꝙel ita F Q, ad Q G.

RVRSVS quia eſt ꝙt D H, ad H B, ita D I, ad I A: Et ꝙt H B, ad L B, ita I A, ad N A; erit ex æquo, ꝙt D H, ad L B, ita D I, ad N A, ſiue ad K M. Semper ergo arcus inter ſemidiametros intercepti perpendicularibus, ſiue ſegmentis ſemidiametri inter parallelas poſitu proportionales ſunt. Quod eſt propoſitum.

II.

DATVM arcum circuli in datam proportionem diuidere.



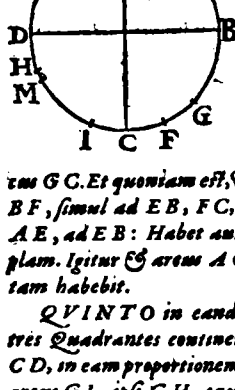
SIT primum arcus H B, in figura antecedente diuidendus in proportionem datam rectæ O, ad rectam P. Ducta ex puncto H, ad centrũ A, recta H A, ſecante Quadratricem in F, ducatur F I, baſi A F, parallela. Deinde recta I A, ita ſecetur in N, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. ꝙt ſit I N, ad N A, quemadmodum O, ad P, ductaq; N K, baſi A E, parallela ſecante Quadratricem in K, emittaturq; ex centro A, per K, recta ſecans arcum H B, in L. Dico arcum H B, in L. ſectum eſſe in proportionem datam O, ad P. Quoniam enim ꝙt propoſ. 1. oſtendimus, ꝙt H L, ad L B, ita eſt I N, ad N A: Eſt autem I N, ad N A, ex conſtructione, ꝙt O, ad P; a erit quoq; H L, ad L B, ꝙt O, ad P. a 11. quinti.

DEINDE totus quadrans D B, ſecandus ſit in proportionem R, ad S. Diuiſa ſemidiametro D A, in I, ꝙt ſit D I, ad I A, ſicuti R, ad S, ducatur I F, ipſi A F, parallela ſecãs Quadratricem in F. Ducta igitur recta A F H, erit ex propoſ. 1. D H, ad H B, ꝙt D I, ad I A, hoc eſt, ꝙt R, ad S.

O — B
P — 2
R — 3
S — 5
T — 8
V — 2

TERTIO ſit idem Quadrans D B, ſecandus in duos arcus, ita ꝙt totus Quadrans ad vnum eorum habeat proportionem datam T, ad V. Tribus rectis T, V, D A, inueniatur quarta proportionalis, cui æqualis abſcindatur A N. Ducta autem N K, ipſi

ipſi AE, parallela ſecante Quadratricem in K, ducatur ex A, per K, recta AKL. Dico Quadrantem in L, ſectum eſſe, & ut proponitur. Eſt enim ex propoſ. 1. DB, ad LB, & DA, ad NA, hoc eſt, & T, ad V.



QVARTO ſemicirculus ABC, diuidendus ſit in datam proportionem, videlicet in triplam. Secetur iterque Quadrans AB, BC, ſecundum datam proportionem triplam in E, F, & arcus AE, vel BF, aqualis abſcindatur arcus EG. Si igitur ex arcu communi ABC, aqualia demantur, nimirum duo arcus AE, BF, ſimul, & arcus AG, reliqua aqualia fient, nimirum duo arcus EB, FC, ſimul, & arcus GC. Et quoniam eſt, ut AE, ad EB, ita BF, ad FC, a *erunt AE, BF, ſimul ad EB, FC, ſimul, hoc eſt, arcus AG, ad arcum GC, ut AE, ad EB: Habet autem AE, ad EB, datam proportionem triplam. Igitur & arcus AG, ad arcum GC, eandem proportionem datam habebit.*

a 12. quinti.

QVINTO in eandem proportionem ſecandus ſit arcus ACD, tres Quadrantes continens. Diuiſis tribus Quadrantibus AB, BC, CD, in eam proportionem in E, F, H, ſumatur arcus EG, ipſi BF, & arcus GI, ipſi CH, aqualis. Si igitur ex communi arcu ACD, demantur aqualia, nimirum tres arcus AE, BF, CH, ſimul, & arcus AI, reliqua fient aqualia, nimirum tres arcus EB, FC, HD, ſimul, & arcus ID. Et quia tres arcus AE, BF, CH, ad tres arcus EB, FC, HD, eandem habent proportionem; b *habebunt omnes tres ſimul ad omnes tres ſimul, hoc eſt, arcus AI, ad arcum ID, eandem proportionem, quam vnus arcus AE, ad vnũ arcum EB, videlicet datã.*

b 12. quinti.

POSTREMO ſit eodem modo diuidendus arcus ACK. Diuiſis rurſus tribus quadrãtibus, & arcus DK, ut proponitur, in E, F, H, L: ſumatur arcus EG, arcus BF, & arcus GI, arcus CH, & arcus IM, arcus DL, aqualis. Si igitur ex communi arcu ACK, aqualia auferantur, videlicet quatuor arcus AE, BF, CH, DL, ſimul, & arcus AM, reliqua aqualia fient, quatuor ſcilicet arcus EB, FC, HD, LK, ſimul, & arcus MK. Et quia quatuor arcus AE, BF, CH, DL, ad quatuor arcus EB, FC, HD, LK, eandem proportionem habent: c *habebunt omnes quatuor ſimul ad omnes quatuor ſimul, id eſt, arcus AM, ad arcum MK, eandem proportionem, quam vnus AE, ad vnum EB, eam videlicet, qua data eſt. Conſtat ergo id, quod propõnitur.*

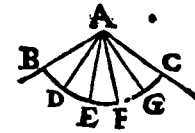
c 12. quinti.

COROLLARIVM.

EX his facilè quemuis angulum rectilineum in duos angulos datam habentes proportionem partiemur, atq; adeò & quemlibet arcum, & angulum in quotuis partes æquales.

DESCRI-

DESCRIPTO namq; arcu ex angulo dato, eoq; arcu diuiso, & subtenſa, ſi ex angulo ad punctum diuiſionis recta ducatur, erit angulus diuiſus, & arcus: a cum ſit vt arcus ad arcum, ita angulus ad angulum in centro. a 33. ſexti.

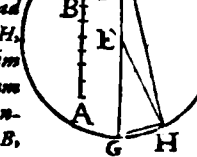


QVOD ſi arcus, vel angulus ſecandus ſit in quotuis æquales partes, diuidendus erit in duas partes proportionem habentes multiplicem denominatam à numero, qui vna vnitate minor ſit numero partium propoſitarum. Vt ſi arcus B C, vel angulus B A C, diuidendus ſit in quinque partes æquales, ſecandus erit arcus B C, in G, in proportione quadruplam. Nam G C, arcus erit quinta pars arcus B C, cui ſi quatuor æquales abſcindantur G F, F E, E D, D B, diuiſus erit arcus B C, in quinque partes æquales. Et ſi ex A, ducantur rectæ A G, A F, A E, A D, ſectus quoque erit angulus B A C, in quinque angulos æquales. Quod eſt propoſitum.

III.

ISOSCELES triangulum conſtituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam.

SIT data proportio recta A B, ad rectam B C. Diuiſa B C, in D, bifariam, & deſcripto ex centro E, circulo quantocunq; F G H, ducaq; in eo diametro F G; ſecetur ita ſemicircumferentia F H G, in H, vt eadem ſit proportio arcus F H, ad arcum H G, quæ recta A B, ad rectam B D, iungaturque recta H E, H G. Dico iſoſceles trianguli E G H, vtrumque angulorum æqualium ad baſim G H, habere ad reliquũ angulum G E H, proportionem datam A B, ad B C. Cùm enim ſit vt A B, ad B D, ita arcus F H, ad arcum H G; Et vt arcus F H, ad arcum H G, b *ita angulus F G H, ad angulum G F H;* c *erit vt A B, ad B D, ita angulus F G H, ad angulum G F H: Vt autem B D, ad B C, ipſius B D, duplam, ita eſt angulus G F H, ad angulum G E H,* d *qui duplus eſt anguli G E H. Igitur ex æquo erit, vt A B, ad B C, ita angulus E G H, ad angulum G E H. Quod eſt propoſitum.*



b 33. ſexti.
c 11. quinti.
d 10. tertij.

COROLLARIVM.

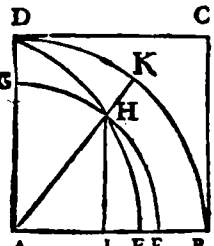
ITAQVE ſi conſtruantur triangula Iſoſcelia, in quibus anguli æquales ad baſin, ad reliquum proportiones habeant tum multiplices ſeſquialteras, tum multiplices ordine, deſcribentur per priora omnes figuræ

guræ æquilaterę parium laterum, per posteriora verò figurę æquilaterę laterum imparium in circulo, vt ad finem lib. 4. ostendimus.

IDEM efficiemus sine huiusmodi triangulis, si totam circumferentiam in tot æquales partes secemus, vt in coroll. proximè antecedente docuimus, quot latera angulosue figura inscribenda habere debet, &c.

IIII.

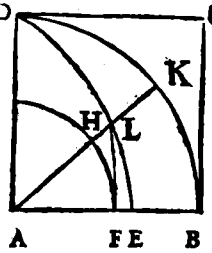
SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit, erunt arcus Quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis continuè proportionales.



SIT Quadrans & Quadratrix ex eo descripta, vt suprà. Dico arcum B D, semidiametrum D A, & Quadratricis basin A E, continuò esse proportionales, hoc est, esse B D, ad D A, vt D A, ad A E. Sin minus, sit vt B D, ad D A, ita D A, ad A F, maiorem ipsa A E, minoremue, sitq; primum A F, maior quàm A E. Descripto ex centro A, quadrante F G, per F, secante Quadratricem in H, ducatur per H. semidiameter A H K, demittaturq; perpendicularis H I. Quoniam igitur ponitur arcus B D, ad rectam D A, vt D A, hoc est, vt A B, ad A F, estque vt A B, semidiameter ad semidiametrum A F, ita arcum B D, ad arcum F G, (Cùm enim sit ex Pappi demonstrationibus, vt & nos in libro de mensurationibus ostendemus, diameter ad diametrum, vt circumferentia circuli ad circumferentiam circuli; a erit quoq; semidiameter A B, ad semidiametrum A F, vt eadem circumferentia ad eandem circumferentiam; b ac proinde etiam vt quarta pars circumferentia ad quartam partem circumferentia, hoc est, vt arcus B D, ad arcum F G.) c Erit quoq; arcus B D, ad rectam D A, vt idem arcus B D, ad arcum F G, d ac propterea æquales erunt rectæ D A, & arcus F G. Quia verò ex theor. 1. est, vt arcus B D, ad arcum B K, ita recta D A, ad rectam H I; & vt arcus B D, ad arcum B K, ita arcus F G, ad arcum F H, quod arcus B D, B K, arcubus F G, F H, similes sint, vt suprà in hoc scholio ostensum est: e Erit quoque recta D A, ad rectam H I, vt arcus F G, ad arcum F H. Cùm ergo recta D A, ostensa sit arcui F G, æqualis; f erit quoq; recta H I, arcui F H, æqualis. quod est absurdum. Est enim recta A I, minor arcu F H, cùm ea sit semissis chordæ subtendentis arcum duplum arcus F H: (Nam recta A F, g secat eam chordam bifariam, ac proinde & arcum, ex scholio propos. 27. lib. 3. chorda autem semper suo arcu minor

a 15. quinti.
b 15. quinti.
c 11. quinti.
d 9. quinti.
e 11. quinti.
f 14. quinti.
g 3. tertij.

minor sit. Non ergo est arcus B D, ad semidiametrum D A, vt D A, ad rectam maiorem basi A E, Quadratricis.



SIT deinde, si fieri potest, A F, minor quàm A E. Descripto igitur ex centro A, per F, Quadrante F G, erigatur ex F, ad A E, perpendicularis F L, secans Quadratricem in L, puncto, per quod semidiameter ducatur A L K, secans arcum F H, in H. Ostendemus ergo, vt priùs, arcum F G, rectæ D A, æqualem esse: Item item esse arcum B D, ad arcũ B K, hoc est, arcum F G, ad arcum F H, vt est recta D A, ad rectam L F. Quare cùm arcus F G, ostensus sit æqualis rectæ D A, erit quoq; arcus F H, æqualis rectæ L F. Quod est absurdum. Est enim recta L F, maior arcu F H: Nam si ex L, duceretur versus G, alia recta tangens circulum F G, sicut L F, eundem tangit in F, essent hæ tangentes æquales, vt schol. propos. 36. lib. 3. arcusq; inter eas interceptus secaretur bifariam in H, propterea quòd ex scholio propos. 37. lib 3. angulus ab eis comprehensus bifariam dimideretur, a ac proinde & angulus in centro A, si ad alterum punctum contactus recta adiungeretur: b ideoq; & arcus quibus insistunt, æquales forent. Igitur cùm ex Archimede ad initium de Sphæra & Cylindro, duæ illæ tangentes simul maiores sint arcu ab eis comprehenso, erit & earum semissis L F, maior semisse F H, illius arcus. Non est ergo arcus B D, ad semidiametrum D A, vt D A, ad rectam minorem basi A E, Quadratricis: Sed neque vt D A, ad maiorem, vt ostensum est. Igitur vt D A, ad ipsam basim A E. Quod est propositum.

a 4. Vel 8. primi.
b 26. tertij.

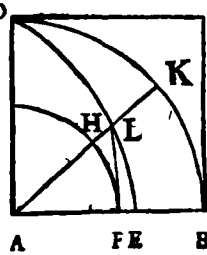
COROLLARIVM I.

HINC facilè reperiemus rectam cuilibet arcui circuli, cuius quadrans est B D, ex quo Quadratrix descripta est, æqualem.

QVONIAM enim est arcus B D, ad D A, vt D A, ad A E: erit conuertendo quoq; A E, ad D A, vt D A, ad arcum Quadrantis B D. Si igitur duabus rectis A E, A D, inueniatur tertia proportionalis; c erit A D, ad eam tertiam, vt ad arcum B D, cùm vtraq; proportio sit eadem, quæ A E, ad A D. d Quare tertia illa proportionalis arcui Quadrantis B D, æqualis erit: Et si duplicetur, fiet recta æqualis semicircumferentiæ eiusdem circuli; si verò quadruplicetur, fiet recta toti circumferentiæ æqualis. Quod si arcus B K, qui minor est Quadrante, inuenienda sit recta æqualis; fiet vt D A, ad perpendicularem L F, ex L, ad A B, demissam, ita tertia illa proportionalis ad aliud, inuentumq; erit quarta hæc recta æqualis arcui B K. Nam cùm sit ex theor. 1. vt D A, ad perpendicularem L F, ita arcus D B, ad arcum

c 11. quinti.
d 9. quinti.

a 11. quinti.



b 14. quinti.

cum B K; a erit quoque tertia illa proportionalis ad quartam lineam inuentam, & vt arcus D B, ad arcum B K: Est autem tertia illa proportionalis aqualis arcui Quadrantis D B. b Igitur & quarta linea inuenta aqualis erit arcui B K. Si verò arcus, qui maior sit quadrante, inuenienda sit recta aqualis, reperienda primùm erit recta aqualis Quadranti, vel semicirculo, vel tribus Quadrantibus, prout arcus datus includit vnum, aut duos, aut tres quadrantes: Deinde alia recta aqualis reliquo arcui, qui minor Quadrante est. Nam duæ hæ rectæ coniunctæ erunt toti arcui proposito aquales.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR quòque ex his, si basis Quadratricis A E, statuatur semidiameter alicuius circuli, eius latus A D, Quadranti eiusdem circuli esse æquale, & lineam lateris duplam esse æqualem semicircumferentiæ eiusdem circuli; & lineam quadruplam toti circumferentiæ esse æqualem.

CVM enim vt suprà ex Pappo diximus, semidiametri semicircumferentijs circulorum, atque adeò & quadrantibus sint proportionales; erit vt D A, ad A E, hoc est, vt tertia illa proportionalis ad D A, ita Quadrans B D, ad Quadrantem semidiametri A E. Est autem tertia illa proportionalis aqualis Quadranti B D, vt ostensum est: c Igitur & recta D A, Quadranti semidiametri A E, aqualis erit. Dupla linea ergo ipsius D A, semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter A E, & quadrupla toti circumferentiæ erit aqualis.

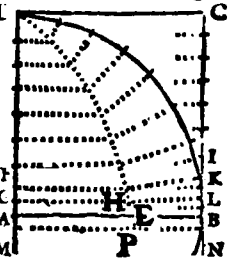
c 14. quinti.

EADEM ratione, si dua recta eandem proportionem habeant, B------ quam D A, A E, & minor ponatur semidiameter alicuius circuli, ostendetur maior aqualis quadranti illius circuli, &c. Sit enim vt D A, ad A E, ita recta aliqua B, ad rectã C. Eritque permutando, vt D A, ad B, ita A E, ad C. Vt autem A E, ad G, ita est quadrans semidiametri A E, ad quadrantem semidiametri C, vt suprà ex Pappo dictum est. Igitur erit quoque vt D A, ad B, ita quadrans semidiametri E, ad quadrantem semidiametri C. Cùm ergo D A, aqualis sit, vt ostensum est, quadranti semidiametri A E, d Erit quoque B, aqualis quadranti semidiametri C. Quod est propositum.

d 14. quinti.

SED si lubeat per numeros explorare, quamnam proportionem plus minus, habeat ex hoc præclaro inuento circumferentia circuli ad eius

ad eius diametrum, vel (quod idem est) semicircumferentia ad semidiametrum, a cùm sit vt circumferentia ad diametrum, ita semicircumferentia ad semidiametrum, efficiemus id hoc modo. Cogitemus Quadrantem DB, in figura, in qua Quadratricem descripsimus, diuisum esse in grad. 90. & singulos gradus in Min. 60. vt totus arcus DB, complectatur 5400. particulas aequales. Si igitur latus DA, concipiamus in totidem aequales particulas diuisum esse, erit parallela ex vltima particula vsque ad Quadratricem educta fermè aequalis basi AE, ob exiguam distantiam illius parallelae, & basis AE, cùm in ea figura parallela quoque GH, auferens AG, particulam sextamdecimam, quae $\frac{1}{16}$. multò maior est quàm $\frac{1}{5400}$. vix à basi AE, superetur: ita vt sine errore notabili eam parallelam pro basi accipere possimus. Quia verò vltima illa particula lateris DA, est sinus arcus Min. 1. & parallela illa sinus complementi, nimirum arcus grad. 89. Min. 59. vt constat, si ponatur AG, vltima particula, & arcus BK, vltimum Minutum, ducaturque recta AH. Nam GH, erit sinus anguli GAH, grad. 89. Min. 59. ac proinde AG, sinus anguli AHG, Min. 1. posito sinu toto AH, vt in tractatione Sinuum ostendimus. Si igitur sinus totus AH, ponatur 10000000. (Ita enim exquisitius proportio optata inuenietur, quàm si sinus totus ponatur tantùm 100000. cùm in hoc sinus grad. 89. Min. 59. à sinu toto non differat.) erit AG, 2909. & GH, 9999999. at totum latus DA, earundem partium erit 15708600. vt constat, si 5400. particula lateris DA, ducantur in vnam AG, quam diximus esse 2909. Duplum ergo lateris DA, erit 31417200. Et quoniam ex coroll. 2. huius propos. 4. duplum lateris DA, aequale est semicircumferentia, cuius semidiameter AE; erit proportio semicircumferentia illius ad semidiametrum AE, eadem ferè, qua numeri 31417200. ad 9999999. denominata à $3\frac{14172007}{99999999}$. hoc est, in minimis terminis, à $3\frac{1572467}{1111111}$. quae proportio minor est, quàm tripla sesquiseptima, siue tripla superdecupartiens septuagesimas, maior autem, quàm tripla superdecupartiens septuagesimas primas; inter quas duas proportiones vera proportio circumferentia ad diametrum consistit, vt ab Archimede demonstratum est. a 15. quinti.



ITAQVE vt recta linea circumferentia circuli inueniatur aequalis, satis est punctum E, inuenire, etiamsi totus linea Quadratrix non sit descripta. Vt autem arcus, vel angulus in datam proportionem secetur, non indigemus puncto E, vt perspicuum est.

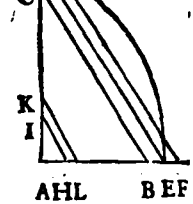
V.

DATO circulo quadratum æquale constituere.

QVONIAM Archimedes demonstrauit circulum quemcunq; æqualem esse triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum semidiametro circuli, alterum verò circumferentiæ eiusdem æquale est; atque hinc nos propos. 4. figurarum Isoperimetrarum in commentarijs in sphæram ostendimus, eundem circulum rectangulo comprehenso sub semidiametro, & semicircumferentia, æqualem esse: si ex coroll. præcedentis propos. inueniatur linea recta æqualis semicircumferentiæ dati circuli, & rectangulo contento sub illa recta, &
a 14. secundi. *semidiametro a construatur quadratum æquale, erit idem hoc quadratum dato circulo æquale.*

INVENIETVR autem recta æqualis semicircumferentiæ,
b 12. sexti. *vel Quadranti, vel toti circumferentiæ, b si fiat vt basis Quadratricis descripta ad eiusdem latus, ita semidiameter dati circuli ad aliud. Inuenta enim quarta linea æqualis erit Quadranti circuli, vt in coroll. 2. præcedentis propos. diximus, atq; adeo duplicata efficiet lineam semicircumferentiæ æqualem, quadruplicata autem rectam toti circumferentiæ æqualem exhibebit.*

VERVM vt expeditius quilibet circulum possit quadrari, construenda erunt duæ figuræ quadrandis circulis aptissimæ, hoc modo. Constituatur angulus rectus D A E, sitq; A D, æqualis semidiametro Quadrantis, ex quo Quadratrix descripta est, & A E, basi eiusdem Quadratricis æqualis; Vel ex centro A, noua Quadratrix describatur D E, cuius latus A D, & basis A E. Ducta autem recta D E, constructionis erit vnum instrumentum circulis quadrandis aptissimum. Si enim circuli quadrandi semidiameter æqualis sit rectæ A E, erit recta A D, circumferentiæ Quadrantis eiusdem circuli æqualis, vt ex coroll. 2. antecedentis propos. liquet. Si autem semidiameter minor sit, quàm A E, abscindemus ei æqualem A B, parallelamq; ipsi D E, agemus B C. Si denig; semidiameter sit maior, quàm A E,



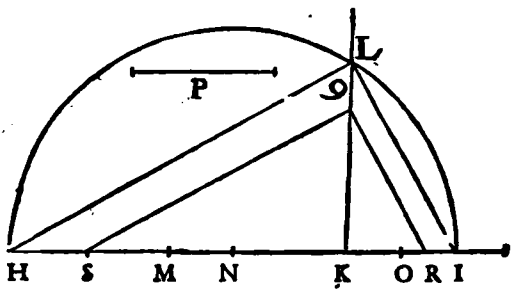
abscindemus ei æqualem A F, ex A E, productâ, & per F, ipsi D E, parallelam agemus F G. Erit enim ex coroll. 2. præcedentis propos. recta A C, æqualis circumferentiæ Quadrantis, cuius semidiameter A B: Recta verò A G, circumferentiæ Quadrantis æqualis erit, cuius semi-
c 2. vel 4. sexti. *diameter A F: c propterea quod est, vt A E, ad A D, ita tam A B, ad A C, quàm A F, ad A G.*

DEINDE ducta recta H I, cuiuscunq; longitudinis, excitetur ad

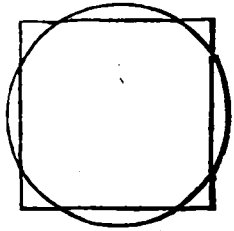
eam

quam perpendicularis quantucunque K L; paratumq; erit alterum instrumentum quadrandis circulis accommodatum.

PER duo hæc instrumenta nullo negotio quemcunq; circulum quadrabimus hac ratione. Sit quadrandus circulus, cuius semidiametro in priori instrumento æqualis sit recta A B, & per B, ipsi D E,



parallela agatur B C. In posteriori verò instrumento sumantur duæ K M, M H, ipsi A C æquales, & recta K I, semidiametro A B, æqualis. Diuisa autem tota recta H I, bifariam in N, describatur ex N, ad internallum N H, vel N I, semicirculus secans perpendicularem K L, in L. Dico quadratum ex K L, circulo dato, cuius semidiameter A B, in priori instrumento, vel K I, in posteriori, æquale esse. Quoniã enim K L, media proportionalis est inter K H, K I, ex scholio propos. 13. huius lib. 2 erit quadratum ex K L, rectangulo sub K H, K I, æquale. Cùm ergo hoc rectangulum circulo dato sit æquale, & ad initium huius propos. diximus, quòd K H, sit æqualis semicircumferentiæ, & K I, semidiametro; erit quoq; idem quadratum ex K L, dato circulo, cuius semidiameter A B, vel K I, æquale. Si igitur quadratum rectæ K L, describatur, & ex eius centro ad internallum A B, in priori instrumento, vel K I, in posteriori circulus describatur, habebitur quadratum æquale circulo, vt in apposita figura apparet. 2 17. septimi.



CÆTERVM diuisio rectæ H I, in posteriori instrumento in duas partes æquales facilè sic fiet. Diuisa semidiametro K I, bifariam in O, (hæc enim quia minor est, quàm H I, facilè bifariã secabitur.) accipiatur recta K O, æqualis M N. Nam N, punctum erit medium rectæ H L. Cùm enim æquales sint M N, O I; addita communi N O, erit N I, ipsi

ipſi M O, æqualis. Eſt autem M O, ipſi H N, æqualis. (quia enim æquales ſunt H M, M K; additis æqualibus M N, K O, tota æquales fient H N, M O) igitur & N I, ipſi H N, æqualis erit.

VI.

DATO quadrato circulum æqualem deſcribere.

SIT datum quadratum, cuius latus P. Huic in poſteriori inſtrumento antecedentis propoſ. ex perpendiculari K L, abſcindatur æqualis K Q. Propoſito autem quouis circulo, cuius ſemidiameter K I, inueniatur per antecedentem propoſ. ei quadratum æquale, cuius latus K L. Deinde ducta recta L I, agatur ei parallela Q R. Dico circulum, cuius ſemidiameter K R, æqualem eſſe quadrato, cuius latus K Q, vel P. Inuenta namque per propoſ. antecedentem recta K H, quæ ſemicircumferentiæ circuli, cuius ſemidiameter K I, ſit æqualis, ductaque recta L H, agatur ei parallela Q S. Quoniam igitur, ob triangulorum ſimilitudinem, eſt vt H K, ad K L, ita S K, ad K Q; & vt K L, ad K I, ita K Q, ad K R: erit ex æquo, vt H K, ad K I, ita S K, ad K R. Cùm ergo H K, æqualis ſit ſemicircumferentiæ circuli, cuius ſemidiameter K I, erit quoque ex coroll. 2. propoſ. 4. S K, æqualis ſemicircumferentiæ circuli, cuius ſemidiameter K R. Quæ verò K Q, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. media proportionalis eſt inter S K, K R; quòd angulus R Q S, rectus

a 29. primi. *ſit, a quippe cùm eius partes R Q K, S Q K, partibus I L K, H L K, recti anguli H L I, æquales ſint: (Nam* b *angulus H L I, rectus eſt,*

b 31. tertij. *cùm ſit in ſemicirculo, vt patet ex praxi antecedentis propoſ. quia K L, media proportionalis inter H K, K I, reperitur.)* c *erit quadratum ex*

c 17. ſexti. *K Q, æquale rectangulo ſub S K, K R, hoc eſt, circulo, cuius ſemidiameter K R, hoc eſt, circulus ſemidiametri K R, æqualis eſt quadrato lateris K R, vel P. Quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM.

EX his, quæ demonſtrata ſunt, conſtruemus circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem; & contrà, cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem conſtituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicun-

d 14. ſecundi. que ſimilis ſit. Nam ſi datæ figuræ rectilineæ *d* deſcribamus quadratum æquale, & huic quadrato circulum æqualem conſtituamus, ex propoſ. 6. erit hic idem circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis.

RVRSVS ſi per propoſ. 5. dato circulo quadratum æquale conſtruamus, huic autem quadrato

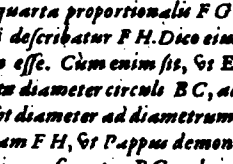
e 25. ſexti. *e* conſtituamus figuram rectilineam æqualem, & ſimilem alteri datæ rectilineæ figuræ, erit eadem hæc figura rectilinea conſtituta, dato circulo æqualis. Quod eſt propoſitum.

VII.

DATÆ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

QVO pacto recta linea reperiatur circumferentia dati circuli æqualis,

qualis, demonstratum propos. 5. nunc autem, vt vicissim recta data linea circumferentia circuli aqualis inueniatur, ita agendum erit. Sit data recta A, cui circumferentia aqualis inuenienda est. Descripto quouis circulo B C, ex centro D, inueniatur ei recta aqualis E. quod facilè ita fiet. In priori instrumento propos. 5. sumatur A H, aqualis semidiametro B D, descripti circuli, & per H, agatur ipsi D E, parallela H I. Nam A I, quadruplicata dabit rectam



E, circumferentia circuli B C, aqualem, vt propos. 5. diximus. Deinde tribus rectis E, A, B D, inueniatur quarta proportionalis F G, atque ex G, ad internallum G F, circulus describatur F H. Dico eius circumferentiam data recta A, aqualem esse. Cum enim sit, vt E, ad A, ita B D, ad F G; hoc est, a ita totus diameter circuli B C, ad totam diametrum circuli F H: Sit autem vt diameter ad diametrum, ita circumferentia B C, ad circumferentiam F H, vt Pappus demonstrauit: b erit quoque vt E, ad A, ita circumferentia B C, ad circumferentiam F H. Cum ergo E, facta sit aqualis circumferentia B C; c erit & recta A, circumferentia F H, aqualis, hoc est, circumferentia circuli F H, inuenta est data recta A, aqualis. Quod est propositum.

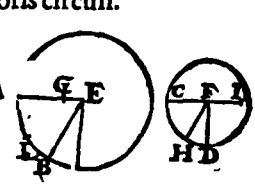
a 15. quinti.
b 11. quinti.
c 14. quinti.

ALITER, & facilius. Quarta parti rectæ datæ A, accipiatur aqualis A K, in priori instrumento propos. 5. & per K, agatur K L, ipsi D E, parallela. Nam circumferentia circuli, cuius semidiameter A L, aqualis erit datæ rectæ A; propterea quòd eius circumferentia quadrans aqualis est rectæ A K, quartæ parti datæ rectæ A, vt propos. 5. declarauimus.

VIII.

DATIS duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in vno eorum, ex altero arcum æqualem abscindere. Oportet autem arcum in maiore circulo datum non esse maiorem circumferentia minoris circuli.

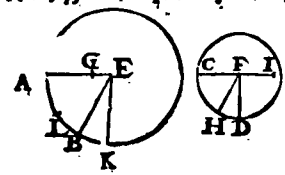
SINT duo circuli inæquales A B, C D, quorum centra E, F, & semidiametri A E, C F, sitque A B, maior, & C D, minor, Datum autem primùm sit in minori circulo arcus C D, cui aqualis abscindendus sit ex



maiore. Quoniam circulus A B, circulo C D, maior est, erit & semidiameter A E, semidiametro C F, maior. Abscindatur ergo

AG, ipsi CF, aqualis, secetur que arcus CD, ita in H, ex propos. 2. & eadem sit proportio arcus CH, ad arcum DH, qua recta AG, ad rectam GE; arcuique CH, similis auferatur arcus AB. quod facilè fiet, si ducta recta FH, angulo CFH, aqualis fiat angulus AEB. Dico arcum AB, dato arcui CD, aqualem esse. Quoniam enim est, vt AG, ad GE, ita arcus CH, ad arcum HD. Et conuertendo, vt EG, ad AG, ita arcus DH, ad arcum CH; erit componendo quoque AE, ad AG, hoc est, ad CF, ipsi AG, aqualem, vt arcus CD, ad arcum CH: Est autem, vt AE, semidiameter ad semidiametrum CF, a *hoc est, vt tota diameter ad totam diametrum, ita circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, vt Pappus demonstrauit, hoc est, ita arcus AB, ad similem arcum CH.* b *Igitur erit quoque vt arcus CD, ad arcum CH, ita arcus AB, ad eundem arcum CH; ac proinde arcus CD, AB,* c *aquales inter se erunt. Quod est propositum.*

a 15. quinti.
b 11. quinti.
c 9. quinti.



DATVS deinde sit in maiore circulo arcus AB, non maior, quàm circumferentia circuli CD, minoris, ex quo arcus AB, aqualis arcui abscindendus est. Quoniam circulus AB, maior est circulo CD, erit & semidiameter AE, semidiametro CF, maior. Producta ergo CF, ad I, vt CI, ipsi AE, sit aqualis, secetur per propos 2. arcus AB, in L, vt eadem sit proportio AB, ad BL, qua CF, ad FI; arcuique BL, sumatur aqualis arcus BK, at toti arcui AK, similis auferatur CD, quod facilè fiet, si ducta recta EK, angulo AEK, angulus CFD, aqualis fiat. Dico arcum CD, arcui dato AB, aqualem esse. Quoniam enim est, vt CF, ad FI, ita arcus AB, ad arcum BL, id est, ad arcum BK, ipsi BL, aqualem; erit componendo quoque, vt CI, ad FI, ita arcus AK, ad arcum BK: Et per conuersionem rationis, vt CI, ad CF, hoc est, vt AE, ad CF, ita arcus AK, ad arcum AB, d *Est autem, vt semidiameter AE, ad semidiametrum CF,* d *hoc est: vt tota diameter ad totam diametrum, ita, ex demonstratis à Pappo, circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, id est, ita arcus AK, ad arcum similem CD.* e *Igitur erit etiam, vt arcus AK, ad arcum AB, ita idem arcus AK, ad arcum CD, propterea que arcus AB, CD,* f *aquales erunt inter sese. Quod est propositum.*

d 15. quinti.
e 11. quinti.
f 9. quinti.

BREVIVS. Arcui CD, reperiatur aqualis recta, per coroll. 1. propos. 4. Quadratricis; & huic recta aqualis arcus AB, vt in sequentis coroll. 1. dicetur. Eodem pacto arcus AB, reperiatur recta aqualis, & huic recta aqualis arcus CD: factumque erit, quod iubetur.

COROL.

COROLLARIVM I.

EX his, quæ demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, cuiuis datæ rectæ abſcindi poſſe ex circulo quouis, cuius circumferentia minor non ſit, quam recta data, circumferentiam æqualem, quemadmodum ſupra oſtenſum eſt in coroll. 11 propoſ. 4. datæ cuilibet circumferentiæ inueniri poſſe rectam æqualem: hoc modo. Inueniatur per ea, quæ paulo ante in coroll. 1. propoſ. 4. oſtendimus, recta linea quadranti dati circuli æqualis; & ſi quidem hæc linea inuenta æqualis fuerit rectæ lineæ datæ, erit circumferentia quadrantis datæ rectæ lineæ æqualis.

SI vero illa recta quadranti circuli inuenta æqualis, fuerit maior, quam data recta linea; ſecetur quadrantis circumferentia in duas partes, ex propoſ. 2. ita vt quadrans ad vnam partem habeat eandem proportionem, quam inuenta recta linea ad lineam rectam datam. Pars enim illa quadrantis datæ rectæ lineæ erit æqualis. Nam cum ſit, vt inuenta recta ad datam rectam, ita quadrans ad illum arcum abſciſſum; ſit autem recta inuenta quadranti æqualis, a erit quoque data linea recta arcui abſciſſo æqualis. a 14. quinti.

SI denique recta illa inuenta æqualis quadranti, fuerit minor, quam recta linea data; ſumatur illius dupla, quæ nimirum circumferentiæ ſemicirculi ſit æqualis. Nam ſi hæc æqualis fuerit datæ rectæ lineæ, erit circumferentia ſemicirculi eidem datæ rectæ æqualis.

SI autem dupla illa recta linea fuerit maior, quam data linea recta, ſecetur ſemicirculi circumferentia in duos arcus, ita vt ſemicircumferentia ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam dupla illa recta linea ad datam rectam, quod quidem facile fiet, ſi datæ rectæ ex dupla illa linea recta abſcindatur æqualis, & ſemicircumferentia ſecetur, per propoſ. 2. vt ſecta eſt recta illa dupla. Erit enim componendo, vt tota illa recta dupla ad partem abſciſſam, hoc eſt, ad datam rectam, ita

tota ſemicircumferentia ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille datæ rectæ æqualis erit. Cum enim ſit, vt dupla illa recta ad rectam datam, ita ſemicircumferentia ad eum arcum; ſit autem recta illa dupla æqualis ſemicircumferentiæ; *a* erit quoq; data recta illi arcui æqualis.

a 14. quinti.

SI denique dupla illa recta linea fuerit minor, quam data linea recta, addatur ei prior linea inuenta, quæ nimirum quadranti circuli eſt æqualis, vt tota recta compoſita æqualis ſit circumferentiæ trium quadrantum, & tripla prioris lineæ inuentæ. Nam ſi hæc linea tripla fuerit datæ rectæ æqualis; erit arcus trium quadrantum eidem datæ rectæ æqualis.

SI vero tripla illa linea recta fuerit maior, quam recta linea data, ſecetur circumferentia trium quadrantum in duos arcus, ex propoſ. 2. ita vt ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam tripla illa recta ad rectam datam, quod facile etiam fiet, ſi datæ rectæ ex tripla illa linea recta abſcindatur recta æqualis, & circumferentia trium quadrantum ſecetur, per propoſ. 2. vt recta illa tripla ſecta eſt. Nam componendo erit, vt tota illa recta tripla ad partem abſciſſam, id eſt, ad datam rectam, ita tota circumferentia trium quadrantum ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille datæ rectæ lineæ erit æqualis. Quoniam enim eſt, vt tripla illa recta ad rectam datam, ita circumferentia trium quadrantum ad arcum abſciſſum; eſtque tripla illa recta circumferentiæ trium quadrantum æqualis; *b* erit quoque data linea recta æqualis illi arcui abſciſſo.

b 14. quinti.

DENIQVE ſi tripla illa linea recta fuerit minor, quam data recta linea, addatur ei rurſus prior linea inuenta quadranti æqualis, vt tota recta compoſita fiat æqualis toti circumferentiæ circuli, & prioris lineæ inuentæ quadrupla. Si namque linea hæc quadrupla fuerit æqualis datæ rectæ lineæ, erit tota circumferentia dati circuli datæ lineæ rectæ æqualis.

AT vero ſi illa linea quadrupla maior fuerit, quam

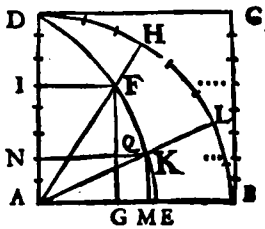
data

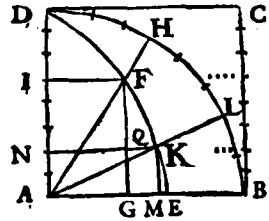
data recta linea, (minor esse non potest: alioquin data recta esset maior, quam circumferentia dati circuli, quod est contra hypothesin) secetur tota circumferentia in duos arcus, ex propos. 2. vt ad vnum eorum eandem proportionem habeat, quam quadrupla illa linea ad datam rectam. quod facile etiam fiet, si ex quadrupla illa recta auferatur recta æqualis datæ rectæ, & tota circumferentia circuli secetur, vt quadrupla illa recta est secta. Erit namque componendo, vt tota illa quadrupla recta ad partem abscissam, id est, ad datam rectam, ita tota circumferentia circuli ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ erit æqualis. Cum enim sit, vt quadrupla illa linea ad rectam lineam datam, ita tota circumferentia ad arcum abscissum; sit autem illa linea quadrupla toti circumferentiæ æqualis; *a* erit quoque data recta linea arcui abscisso æqualis. a 14. quinti,

ALITER, & breuius. Inuenta ex coroll. 1. propos. 4. Quadratricis, vel ex propos. 5. eiusdem, recta æquali circumferentiæ dati circuli, abscindatur ex ea datæ rectæ lineæ æqualis, & tota circumferentia per propos. 2. secetur, vt secta est inuenta illa recta in duas partes. Nam componendo erit, vt tota illa recta ad eius partem ablatam, hoc est, ad datam rectam, ita tota circumferentia ad arcum abscissum. Cum ergo tota illa recta sit æqualis toti circumferentiæ, *b* erit quoque data recta arcui abscisso æqualis. Quod est propositum. b 14. quinti

COROLLARIVM II.

EX iis quoque, quæ dicta sunt, inferri potest, tam arcus, quam angulos rectilineos reperiri incommensurabiles inter se. Sit enim arcus H B, & angulus rectilineus H A B. Dico tam arcum H B, secari posse in duos arcus inter se incommensurabiles, quam angulum





lum HAB, in duos angulos incommensurabiles inter se. Descripta enim Quadratrice DE, quæ rectam HA, secet in F, ducatur per F, basi AE, parallela FI. Deinde inuentis duabus rectis inter se incommensurabilibus, vt libro 10. docetur, diuidatur recta IA, in N, ex scholio propos. 10. huius lib. ita vt IN, ad NA, eandem proportionem habeat, quam duæ rectæ inuentæ; atque adeo & IN, NA, incommensurabiles quoque sint. Ducta autem recta NK, ipsi AE, parallela, quæ Quadratricem secet in K, ducatur ex centro A, per K, recta secans arcum HB, in L. Dico tam arcus HL, LB, quam angulos HAL, LAB, inter se esse incommensurabiles. Quoniam enim per propos. 1. est, vt IN, ad NA, ita arcus HL, ad arcum LB: sunt autem IN, NA, incommensurabiles; erunt & arcus HL, LB, incommensurabiles. Cum ergo sit quoque, [a] vt arcus HL, ad arcum LB, ita angulus HAL, ad angulum LAB; erunt etiam anguli HAL, LAB, incommensurabiles inter se. Quod est propositum.

[a] 33. sexti.

FINIS ELEMENTI SEXTI.

QVID



QVID IN SINGVLIS xv. Libris agat Euclides.

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN primo libro disputat de rectilineis figuris, videlicet de triangulis, ac parallelogrammis. Et primum triangulorum ortus, proprietatesque tradit, tum iuxta angulos, tum iuxta latera, ipsa inter se comparans. Deinde parallelarum proprietates interiiciens ad parallelogramma transit, eorumque ortum declarat: & symptomata, quæ in ipsis sunt, demonstrat. Postea triangulorum, parallelogrammorumque communicationem ostendit, & quonam pacto parallelogrammum fiat æquale triangulo. Denique de iis, quæ in triangulis rectangulis à lateribus describuntur, quadratis; quam habeat proportionem, quod à subtendente rectum angulum describitur, ad ea, quæ à comprehendentibus ipsum fiunt.

IN secundo libro parallelogrammum rectangulum, & gnomon definitur. Deinde parallelogrammorum rectangulorum, & quadratorum, quæ ex rectarum linearum sectionibus fiunt, proportiones declarantur. Postea de quadratis, quæ à lateribus obtusangulorum, & acutangulorum triangulorum describuntur, quam habeant proportionem, quæ à subtendentibus obtusum, & acutum

tum angulum fiunt, ad ea, quæ à comprehendentibus describuntur. Denique qua ratione dato rectilineo æquale quadratum constituatur.

IN tertio libro agitur de iis, quæ circulis accidunt, & de rectis lineis in circulo, vel ad circulum ductis: itemque de angulis, qui ad circulorum centra, vel ad circumferentias consistunt.

IN quarto libro de figurarum planarum inscriptionibus, & circumscriptionibus.

IN quinto de analogiis.

IN sexto de proportionibus figurarum inter se: de figuris similibus, & reciprocis: de rectis lineis proportionalibus: de parallelogrammorum applicationibus ad rectas lineas, quæ vel deficiant parallelogrammis similibus, vel excedant: quomodo recta linea terminata, extrema ac media ratione secetur: de proportionibus circumferentiarum, & angulorum, itemque Sectorum, in circulis æqualibus.

IN septimo agitur de numeris primis, & compositis, & quo pacto numerorum non primorum maxima communis mensura inueniatur: de numerorum parte, & partibus: de numeris multiplicibus: de proportionalibus: & quæcunque in quinto libro de magnitudinibus generatim, eadem fere & de numeris particulatim hic demonstrantur.

IN octauo de numeris deinceps proportionalibus: de numeris planis: de quadratis: de cubis, & solidis: de similibus planis, & similibus solidis.

IN nono item de similibus planis: de cubis, & solidis: & de numeris deinceps proportionalibus siue ab vnitate, siue simpliciter: de numeris primis: de numeris paribus,

ribus, de imparibus, de pariter paribus, de pariter imparibus, de pariter paribus & pariter imparibus: de numeris perfectis.

IN decimo de commensurabilibus, & incommensurabilibus magnitudinibus, itemque de rationalibus, & irrationalibus.

IN undecimo primum agitur de rectis lineis, quatenus ad solida corpora referuntur, videlicet quando sint in uno plano; quando recta, seu perpendiculares ad planum; quando parallela: quomodo à puncto in sublimi dato ad planum perpendicularis ducatur. Deinde vero de planis simul disserit, tum de solidis angulis. Postremo de solidis parallelepipedis, & nonnulla de Prismatibus.

IN duodecimo de pyramidibus, & prismatibus: postea de conis, & cylindris: demum de sphæris.

IN tertiodecimo de constitutione quinque figurarum mundanarum, quas corpora regularia appellant: videlicet tetraedri vel pyramidis, hexaedri vel cubi, octaedri, dodecaedri, & icosaedri; ad quorum euidentiam præmittit nonnulla de iis, quæ accidunt rectæ lineæ extremæ ac mediæ ratione sectæ: de pentagono æquilatero, de hexagoni, & decagoni lateribus, & de triangulo æquilatero.

IN quartodecimo de dodecaedri; & icosaedri in eadem sphæra descriptorum comparatione.

IN quintodecimo & vltimo de inscriptione quinque figurarum iam dictarum, & de earundem lateribus, & angulis.

EVCLI-