Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.

Accessit liber XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMONSTRATionibus, accuratisque scholiis illustrati: nunc quartò editi, ac multarum rerum accessione post primam editionem locupletati.

Auctore
CHRISTOPHORO CLAVIO
Bambergensi è Societate IESV.



FRANCOFVRTI,
Ex Officina Typographica Nicolai Hoffmanni.
Sumptibus Jonæ Rhodii.

M. DC. VII.

CLARISSIMO AC EXCELLENTISSIMO VIRO, DN. IOHANNI HARTMANNO BEYERO,

Philosophiæ ac Medicinæ Doctori, Reipublicæ Francofordianæ ad Mœnum Physico primario,

Dn. Fautori ac Compatri suo plurimùm colendo,

JONAS RHODIVS Bibliopola Salutem.

SI quæ sunt, Clarissime ac Excellentissime Domine Doctor, compater plurimùm colende, quæ artem aliquam nobilitare, laudibúsque euehere possunt, Geometria me hercle eorum in promptu permulta habet. Præter enim anti-

Ioseph. lib. 1. quissimam originem, quam ab Abrahamo pertraxisse, ab eóque ad Hero. dot. libro 2. Ægyptios deuenisse creditur, eiúsque eximios & præstantes cultores, Diodor. lib. 2. inter quos primarii fuére Mœris, Py- Strabo lib. 17. thagoras Samius, Ptolomæus, Thales Milesius, Archytas Tarentinus, Eudoxus, Democritus Abderites, Heraclides Ponticus, Xenocrates Chalcedonius, Theophrastus Eresius, Epicurus Athenienſis, Apollonius Pergæus Geometra Magnus appellatus, Didymus Alexandrinus præsul Cæsarienſis, Paulus Florentinus, & alii permulti: tanta & tam innumerabilia etiam extant grauissimorum autorum testimonia, quæ vtilitatem & necessitatem illius prægrandem contestantur, vt impossibile sit, ea omnia recensere. Plato enim diuinus ille Philosophus, non modò Græcis oraculum apud Ægyptios acce-

acceptum nõ intelligentibus, Deum iisdem imperitiam exprobrasse, eosque, vt Geometriæ operam darent, admonere, respondit, verùm etiam adeò neminẽ, nisi huius artis peritũ, auditorio suo admisit, vt talia etiam, scilicet, εἰσιτήριον εἰσίτω, eidem non veritus fuerit affigere. Vnde de Sacerdotibus Ægyptiorum hoc inprimis commendatur, quòd liberos suos liberalibus artibus erudiendos tradẽtes voluerint præcipuè, vt Geometriæ præceptis erudirentur.

Plutarchus in commẽtario de damonio Socratis.

Thessalo quin etiam filio suo præcepit Hippocrates, vt Arithmeticam & Geometriam nõ solùm ad splendorem vitæ, sed ad Medicinæ etiam vsum studiosè perdisceret: Arithmeticam quidem, ad morborum periodos ac crises: Geometriam verò, ad membrorum situm luxationemq; cognoscendam.

Cicero. Ita etiam Diodorus Stoicus poſt viſum amiſſum, licèt multò magis aſſiduè, quàm antea in Philoſophia verſaretur, fidibúſque Pythagoreorum more vteretur, præ cæteris tamen exercitiis omnibus (quod fieri tamen poſſe vix creditur) Geometriæ munus tuebatur, eóque quamplurimùm oblectabatur.

Erasm. in adag. Philo autem Geometriam ἀρχὴν τῆς μαθήσεως appellabat omnium diſciplinarum, quòd ſcilicet rerum omnium intelligibilium imagines veríque veſtigia tanquam in politiſſimo ſpeculo demonſtret, mentémque purgatam paulatim abducat à ſenſu.

Vitruuius in proœmio libri ſeptimi. Ariſtippus Socraticus cùm naufragio facto eiectus ad Rhodienſium litus animaduertiſſet Geometrica ſchemata deſcripta, exclamauiſſe ad comites ita dicitur: *Bene ſperemus, hominum enim veſtigia video.* Archimedem

dem Syracuſanum Mathematicum inſignem tantùm huic arti deditum fuiſſe aiunt, vt cibi potúſque obliuiſceretur, corporíſque curam penitus negligeret; cúmque raperetur ſubinde inuitus ad vngendum corpus & ad balneum, in foco figuras Arithmeticas exarabat, dúmque vngeretur, digito lineas ducebat, tanta nimirum dulcedine artis non modò captus, verùm etiam omninò inflammatus. Cùm autem multa & præclara inueniſſet, dicitur ab amicis & cognatis petiiſſe, vt vita defuncti cylindrum ſphærã complectentem ſepulchro imponerent, inſcriberéntq; proportionem, quatenus ſolidum continens excedat contentũ. Plutarchus in Marcello.

Et quis dubitat, Principem ſeu Ducem Iſraëlitarum Ioſuam in diuiſione terræ promiſſæ, Carolum Metellum in diſtributione regnorum

inter filios, Carolum Magnum, quin etiam Ludouicum Pium & Lotharium Imperatores, Valdemarum, Seſoſtrim Ægyptiorum Regem, Peloponnenſes & Iones, Lycurgũ, Caium Marium, Auguſtum Cæſarem, Ferguſium I. Scotorum Regem, & multos alios in huiuſmodi negotio hac præclariſſima arte fuiſſe vſos, cùm ipſius ſolius ope & auxilio maximas ſępe lites & diſſidia ſuſtulerint. Et, vt breuibus, quod res eſt, comprehendam, ſi nihil aliud, hoc ſanè noſtrum illud ſtudiũ artemq; abundantiſſimè commendabit, laudibúſque accumulabit multifariis, quod Plato dicit, Deũ ſemper γεωμετρῆν, hoc eſt, certiſſimo motu omnia metientem gubernare hæc inferiora.

Cùm itaque huius ſummi artificis lineas non conſiderare, hacq; pulcherrima Geometria, quæ diuinitatem

tem nobis oſtendit, Deumq; monſtrat, non delectari, nec illius tam luculenta veſtigia aſpicere aut inquirere, ſumma & manifeſta ſit impietas, nemo me hercle, niſi omnino deprauati ſit iudicij, vel tibi, clariſſime Domine Compater, quòd huiuſmodi artibus tantã hactenus nauaſti operam, vitio vnquam vertet, aut me etiam, qui præſens Euclidis exemplar à Chriſtophoro Clauio Bambergenſe illuſtratum typis etiam noſtris imprimere nõ dubitauerim, atro, quod aiunt, carbone notabit. Vt itaq; ego laborem & impenſas in multorum commodũ lubèns ſuſcepi, ita tuum erit, percolende Domine Compater, illud idem, quod ad teſtandũ meum erga te amorem & obſeruantiam tibi dedico, non renuere. Dabatur

Francofurti 10. Cal. April.

Anno 1607.

CHRISTOPHORVS CLAVIVS E SOCIETATE IESV AD LECTOREM.

SCRIPSERAM *superioribus annis in elementa Geometrica Euclidis, id est, in initia disciplinarum Mathematicarum, commentarios: quorum omnibus iam distractis exemplaribus, cum alia essent recudenda, volui etiam dare operam, vt locupletiores multo, atque vberiores ederentur. quod Dei beneficio successit. Sic enim se res habet, quemadmodum nihil est simul inuentum, & perfectum, sic nemo est, qui à principio in qualibet re scribenda, aut exponenda possit omnia peruidere: multa apparent iterum*

rum ac ſæpius cogitanti, quæ aciem quamlibet acutam ante fugiebant. Recte hoc quoque Euripides, vt pleraque omnia, ſapientiores ſolent eſſe poſteriores cogitationes. cum quo congruit, & cohæret vulgatum illud prouerbium, quod Publio tribuitur, Diſcipulus eſt prioris poſterior dies. Itaque, cum priorem editionem ſumerem poſtea in manus, multa eſſe animaduerti, quæ ſi adderentur, non pauca ex Archimedis, Apollonii, Ptolemæi, aliorumq; inuentis videbantur melius explicari poſſe: ſi videlicet è pronunciatis, ac theorematis Euclideis alia quoque necterentur. Quod ipſum etſi tunc etiam præſtiti, multo tamen nunc feci copioſius: interiiciens ea ſcilicet, quæ vel vtilia, vel neceſſaria fore cenſui ad aliorum, vt dixi, auctorum cognitionem. Addidi inter cætera, vt ſpecimen dem aliquod rerũ, quæ hoc volumine acceſſerunt, demonſtra-

ſtrationem Geometricam, eamq; apertiſsimam axiomatis vndecimi, quod proponitur ab Euclide: cum ea, quam allatam ſcimus à Proclo, mutila eſſe atque imperfecta videatur. Deſcriptionem item omnium figurarum, quæ rectilineæ æqualium laterum & angulorum appellantur, in circulo. Rationem præterea & breuem, nec obſcuram circuli quadrandi: rem, vt ſcis, tum à veteribus, tum à recentioribus ſic expetitam, vt multorum in ea conatus magis apparuerit, quam effectus. Effeci autem hoc (niſi fallor) ita accurate, ac ſubtiliter, vt tam perfecte approbetur quadratum æquale circulo, quam exquiſite rectilinea figura quælibet ad quadratum æquale ab Euclide dirigitur: imò (vt loquar aliquid audacius) aliquanto perfectius: cum ad quadrandum circulum paucioribus linearum ductibus ſit opus, quam ad figuram rectili-

& lineam plurimorum angulorũ, via, & ratione quadrandam, vt aperte docebitur libro sexto. Ad nonum denique librum adieci numerorum fractorum demonstrationes clarissimas, aliaque nonnulla, quæ nunc quidem non numero, quod ea mihi volo ad ipsamet loca, quibus explicabuntur, plena atque integra reseruari. Laborem igitur hunc meum, qualiscumque sit, lector benigne suscipe eoque in commodum tuum diu feliciterque vtere.

Vale.

QVÆ

ſtrationem Geometricam, eamq; apertiſsimam axiomatis vndecimi, quod proponitur ab Euclide: cum ea, quam allatam ſcimus à Proclo, mutila eſſe atque imperfecta videatur. Deſcriptionem item omnium figurarum, quæ rectilineæ æqualium laterum & angulorum appellantur, in circulo. Rationem præterea & breuem, nec obſcuram circuli quadrandi: rem, vt ſcis, tum à veteribus, tum à recentioribus ſic expetitam, vt multorum in ea conatus magis apparuerit, quam effectus. Effeci autem hoc (niſi fallor) ita accurate, ac ſubtiliter, vt tam perfecte approbetur quadratum æquale circulo, quam exquiſite rectilinea figura qualibet ad quadratum æquale ab Euclide dirigitur: imò (vt loquar aliquid audacius) aliquanto perfectius: cum ad quadrandum circulum paucioribus linearum ductibus ſit opus, quam ad figuram rectili-

ctilineam plurimorum angulorũ, via, & ratione quadrandam, vt aperte docebitur libro sexto. Ad nonum denique librum adieci numerorum fractorum demonstrationes clarissimas, aliaque nonnulla, quæ nunc quidem non numero, quod ea mihi volo ad ipsamet loca, quibus explicabuntur, plena atque integra reseruari. Laborem igitur hunc meum, qualiscumque sit, lector benigne suscipe eoque in commodum tuum diu feliciterque vtere.

Vale.

QVÆ

QVÆ PRÆCIPVE *primæ editioni addita ſint.*

I.

DEMONSTRATIO Geometrica Axiomatis vndecimi Euclidis, [Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad eaſdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuo incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores] multo euidentior, quam ea, quam Proclus affert. *Ad propoſ. 28. lib. 1.*

II.

DIVISIO lineæ rectæ in quotuis æquales partes, perſolas priores 40. propoſ. lib. 1. abſque ope proportionum ſexti lib. *Ad propoſ. 40. lib. 1.*

III.

QVO pacto conſtruenda ſint triangula amblygonia, & oxygonia, vt in numeris apparere poſſint, quæ ab Euclide demonſtrata ſunt propoſ. 12. & 13. lib. 2. *Ad propoſ. 12. & 13. lib. 2.*

IV.

RESPONSIO ad Apologiam Iacobi Peletarij, de angulo contactus. *Ad propoſ. 16. lib. 3.*

V.

CONSIDERATIO pulcherrima de figuris planis æquilateris, atque æquiangulis intra circulum, & extra circulum deſcriptis: Num ſcili-

ſcilicet, omnis æquilatera ſit æquiangula etiam; & omnis æquiangula ſit quoque æquilatera. *Ad finem lib. 4.*

VI.

TRACTATIO copioſiſſima de proportionibus, & tribus præcipuis proportionalitatibus, Arithmetica, Geometrica, atque Harmonica. *Ad defin. 4. lib. 5.*

VII.

PVLCHRA contemplatio, cur Euclides in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æquè multiplicia definierit. *Ad defin. 8. lib. 5.*

VIII.

DESCRIPTIO inflexæ cuiuſdam lineæ facillima, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualiũ deſcribitur: circulus quadratur: angulus rectilineus in quotuis partes æquales diſtribuitur: Cuilibet arcui circuli recta æqualis exhibetur, & contrà; Et denique alia ſcitu iucundiſſima perficiuntur. *Ad finem lib. 6.*

IX.

QVO pacto pleraque theoremata libri 7. demonſtrentur quoque de numeris fractis, ſiue ipſis adhæreant numeri integri, ſiue non. *Ad propoſitiones lib. 7.*

X.

MINVTIARVM, ſiue numerorum fractorum demonſtrationes clariſſimæ. *Ad finem lib. 7.*

XI.

DE Proportionum compoſitione; quo videlicet

licet modo Additio, Subtractio, Multiplicatio ac Diuisio fieri debeat: aduersus quosdam Recentiores. *Ad finem lib. 9.*

XII.

DESCRIPTIO quinque corporum Regularium in data sphæra, ex Pappo Alexandrino, & quidem facilior, quàm ea, quam nobis tradidit Euclides. *Ad finem lib. 16.*

XIII.

COMPARATIO Soliditatum, & superficierum conuexarum, eorundem quinq; corporum Regularium inter se. *Ad finem lib. 16.*

Catera, quæ passim hisce commentariis adiecta sunt non pauca, quæ in aliis editionibus desunt, cuiusmodi est præsertim accuratior inuentio vltimorum punctorum Quadratricis per lineas perpendiculares, non autem per obliquas linearum intersectiones, &c. diligens Lector nullo negotio notabit.

PROPOSITIONES OMNIVM XVI. LIBRORVM, QVARVM EAS, QVÆ IN lib. 5. 14. 15. & 16. Euclidis non sunt, quamuis in numerum propositionum relatæ sint, alio charactere expressimus.

PRIMI LIBRI.

SVPER data recta linea terminata triangulum æquilaterum constituere.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

3 DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.

4 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumq; vtriq;, habeant verò & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt; eritque triangulum triangulo æquale, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vteique vtrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

5 ISOSCELIVM triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se æquales erunt.

6 SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: Et sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

7 SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

8 SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumq; vtrique, æqualia; habuerint verò & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

9 DATVM angulum rectilineum bifariam secare.

10 DATAM rectam lineam finitam bifariam secare.

11 DATA recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

12 SVPER datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

13 CVM recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam angulos facit: Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

14 SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ductæ eos, qui ſunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint: in directum erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

15 SI duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecuerint, angulos ad verticem æquales inter ſe efficient.

16 CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & oppoſito maior eſt.

17 CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis ſunt minores, omnifariam ſumpti.

18 OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit.

19 OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur.

20 OMNIS trianguli duo latera reliquo ſunt maiora, quomodocunque aſſumpta.

21 SI ſuper trianguli vno latere, & ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius conſtitutæ fuerint: hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt.

22 EX tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum conſtituere. Oportet autem duas reliquas eſſe maiores omnifariam ſumptas: quoniam vniuſcuiuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta reliquo ſunt maiora.

23 AD datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere.

24 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumq; vtriq;, angulum verò angulo maiorem ſub æqualibus rectis lineis contentum: Et baſin baſi maiorem habebũt.

25 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, baſin verò baſi maiorem: Et angulum ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

26 SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale; ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſeu quod vni æqualium angulorum ſubtenditur: Et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

27 SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter ſe fecerit: Parallelæ erunt inter ſe illæ rectæ lineæ.

28 SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes, æqualem fecerit, aut

tes, aut ſinternos, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales.
Parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

29 IN parallelas rectas lineas recta incidens linea: Et alternatim angulos inter ſe æquales efficit; & externum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem; & internos, & ad eaſdem partes, duobus rectis æquales facit.

30 QVÆ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ.

31 A dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

32 CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppoſitis eſt æqualis: Et trianguli tres interni anguli duobus ſunt rectis æquales.

33 RECTÆ lineæ quæ æquales, & parallelas lineas ad partes eaſdem coniungunt: Et ipſæ æquales, & parallelæ ſunt.

34 PARALLELOGRAMMORVM ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex aduerſo & latera, & anguli: Atque illa bifariam ſecat diameter.

35 PARALLELOGRAMMA ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

36 PARALLELOGRAMMA ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

37 TRIANGVLA ſuper eadem baſi conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.

38 TRIANGVLA ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.

39 TRIANGVLA æqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta: Et in eiſdem ſunt parallelis.

40 TRIANGVLA æqualia ſuper æqualibus baſibus, & ad eaſdem partes conſtituta: Et in eiſdem ſunt parallelis.

41 SI parallelogrammum cum triangulo eandem baſin habuerit, in eiſdemque fuerit parallelis: Duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli.

42 DATO triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

43 IN omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum, inter ſe ſunt æqualia.

44 AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

45 AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

46 A data recta linea quadratum deſcribere.

47 IN triangulis rectangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur, quadratis.

48 SI quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

SECVNDI LIBRI.

1 SI fuerint duæ rectæ lineæ, secetur q; ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub intecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

2 SI recta linea secta sit vtcunque; Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato.

3 SI recta linea secta sit vtcunque: Rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur, quadrato.

4 SI recta linea secta sit vtcunque; Quadratum, quod à tota describitur, æquale est & illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

5 SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vna cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod à dimidia describitur, quadrato.

6 SI recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur: Rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, vna cum quadrato à dimidia, æquale est quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.

7 SI recta linea secetur vtcunque; Quod à tota, quodque ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

8 SI recta linea secetur vtcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.

9 SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & eius, quod à dimidia, & eius quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

10 SI recta linea secetur bifariam, adiiciatur autem ei in rectum adiuncta

adiuncta quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraq; simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod à dimidia, & eius, quod à composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, descriptum sit, quadrati.

11 DATAM rectam lineam secare, vt comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod à reliquo segmento sit, quadrato.

12 IN amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

13 IN oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente, minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

14 DATO rectilineo æquale quadratum constituere.

TERTII LIBRI.

1 DATI circuli centrum reperire.

2 SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint: Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

3 SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet: Et ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

4 SI in circulo duæ rectæ lineæ seſe mutuo secent non per centrum extensæ: Seſe mutuo bifariam non secabunt.

5 SI duo circuli seſe mutuo secent, nõ erit illorum idem centrũ.

6 SI duo circuli seſe mutuo interius tangant eorum non erit idem centrum.

7 SI in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima verò reliqua; aliarum verò propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore semper maior est: Duæ autem solum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ.

8 SI extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ verò vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt: In conuexam verò peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt: Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ.

9 SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales: Acceptum punctum centrum eſt ipſius circuli.

10 CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus, punctis non ſecat.

11 SI duo circuli ſeſe intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra: Ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

12 SI duo circuli ſeſe exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum tranſibit.

13 CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, ſiue intus, ſiue extra tangat.

14 IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro: Et quæ æqualiter diſtant à centro, æquales ſunt inter ſe.

15 IN circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore ſemper maior.

16 QVÆ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locum inter ipſam rectam lineam, & peripheriam comprehenſum, altera recta linea non cadet: Et ſemicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior eſt; reliquus autem minor.

17 A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum tanget circulum.

18 SI circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipſam contingentem perpendicularis erit.

19 SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipſi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

20 IN circulo, angulus ad centrum duplex eſt anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria baſis angulorum.

21 IN circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli ſunt inter ſe æquales.

22 QVADRILATERORVM in circulis deſcriptorum anguli, qui ex aduerſo, duobus rectis ſunt æquales.

23 SVPER eadem recta linea, duo ſegmenta circulorum ſimilia, & inæqualia, non conſtituentur ad eaſdem partes.

24 SVPER æqualibus rectis lineis, ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.

25 CIRCVLI ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum.

26 IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

27 IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſunt inter ſe æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

28 IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

29 IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ ſubtendunt.

30 DATAM peripheriam bifariam ſecare.

31 IN circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in maiore ſegmento, minor recto: qui verò in minore ſegmento, maior eſt recto. Et inſuper angulus maioris ſegmenti, recto quidem maior eſt: minoris autem ſegmenti angulus, minor eſt recto.

32 SI circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum ſecans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales ſunt ijs, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis.

33 SVPER data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

34 A dato circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

35 SI in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius, æquale eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

36 SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera verò tangat: Quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam aſſumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato.

37 SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat, ſit autem, quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur quadrato; Incidens ipſa circulum tanget.

QVARTI LIBRI.

1 IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior.
2 IN dato circulo triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.
3 CIRCA datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.
4 IN dato triangulo circulum inſcribere.
5 CIRCA datum triangulum circulum deſcribere.
6 IN dato circulo quadratum deſcribere.
7 CIRCA datum circulum quadratum deſcribere.
8 IN dato quadrato circulum deſcribere.
9 CIRCA datum quadratum circulum deſcribere.
10 ISOSCELES triangulum cõſtituere, quod habeat vtrumque eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum, duplum reliqui.
11 IN dato circulo Pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.
12 CIRCA datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.
13 IN dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribere.
14 CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum deſcribere.
15 IN dato circulo hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.
16 IN dato circulo quintidecagonum, & æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

QVINTI LIBRI.

1 SI ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum, æque multiplices: quam multiplex eſt vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

2 SI pri-

4 SI prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex, atque ſexta quartæ: Erit & compoſita prima cum quinta, ſecundæ atque multiplex, atq; tertia cum ſexta, quartæ.

3 SI ſit prima ſecundæ æquè multiplex, atque tertia quartæ; ſumantur autem æquè multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo ſumptarum vtraque vtriuſque æquè multiplex; altera quidem ſecundæ, altera autem quartæ.

4 SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æquè multiplices primæ & tertiæ, ad æquè multiplices ſecundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint.

5 SI magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

6 SI duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æquè multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æquè multiplices: Et reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æquè ipſarum multiplices.

7 ÆQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

8 INÆQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem.

9 QVÆ ad eandem, eandem habent rationem, æquales ſunt inter ſe: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque ſunt inter ſe æquales.

10 AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior eſt; Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt.

11 QVÆ eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem.

12 SI ſint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum ſe habuerit vna antecedentium ad vnam conſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

13 SI prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia verò ad quartam, maiorem rationem habuerit, quàm quinta ad ſextam. Prima quoque ad ſecundam maiorem rationem habebit, quàm quinta ad ſextam.

14 SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem quàm tertia ad quartam; prima verò, quàm tertia, maior fuerit; Et tertia & ſecunda maior, quàm quarta. Quòd ſi prima fuerit æqualis tertiæ, erit & ſecunda æqualis quartæ: Si verò minor, & minor erit.

15 PARTES cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuò reſpondent, ita ſumantur.

16 SI quatuor magnitudines proportionales fuerint; Et viciſſim proportionales erunt.

17 SI compoſitæ magnitudines proportionales fuerint: hæ quoque diuiſæ proportionales erunt.

18 SI diuiſæ magnitudines ſint proportionales; hæ quoq; compoſitæ proportionales erunt.

19 SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerit ad ablatum: Et reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, ſe habebit.

20 SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur; ex æquo autem prima quàm tertia, maior fuerit; Erit & quarta quàm ſexta, maior. Quod ſi prima quàm tertia fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ; Sin illa minor, hæc quoq; minor erit.

21 SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur; fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima, quàm tertia, minor fuerit; Erit & quarta, quàm ſexta, maior. Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ: ſin illa minor, hæc quoque minor erit.

22 SI ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

23 SI ſint tres magnitudines, aliæq; ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

24 SI prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad ſecundam, eandem rationem, quam ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta, ad ſecundam, eandem habebit rationem, quam tertia cum ſexta, ad quartam.

25 SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: Maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

26 *Si prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecunda ad primam minorem proportionem, quàm quarta ad tertiam.*

27 *SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam: Habebit quoque viciſſim prima ad tertiam maiorem proportionem, quàm ſecunda ad quartam.*

28 *SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam: Habebit quoque compoſita prima cum ſecunda, ad*

da, ad ſecundam maiorem proportionem, quàm compoſita tertia cum quarta ad quartam.

29 *SI compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam maiorem habuerit proportionem, quàm compoſita tertia cum quarta ad quartam, Habebit quoq; diuidendo prima ad ſecundam, maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam.*

30 *SI compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quàm compoſita tertia cum quarta ad quartam: Habebit per conuerſionem rationis prima cum ſecunda ad primam, minorem proportionem, quàm tertia cum quarta ad tertiam.*

31 *SI ſint tres magnitudines, & alia ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio prima priorum ad ſecundam, quàm prima poſteriorum ad ſecundam: Item ſecunda priorum ad tertiam maior, quàm ſecunda poſteriorum ad tertiam: Erit quoq; ex æqualitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quàm prima poſteriorum ad tertiam.*

32 *SI ſint tres magnitudines, & alia ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio prima priorum ad ſecundam quàm ſecunda poſteriorum ad tertiam; Item ſecunda priorum ad tertiam maior, quàm prima poſteriorum ad ſecundam: Erit quoq; ex æqualitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quàm prima poſteriorum ad tertiam.*

33 *SI fuerit maior proportio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quàm totius ad totum.*

34 *SI ſint quotcunq; magnitudines, & alia ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio prima priorum ad primam poſteriorum, quàm ſecunda ad ſecundam; & hæc maior, quàm tertia ad tertiam, & ſic deinceps: Habebunt omnes priores ſimul ad omnes poſteriores ſimul, maiorem proportionem, quàm omnes priores, relicta prima ad omnes poſteriores, relicta quoq; prima; minorem autem, quàm prima priorum ad primam poſteriorum, maiorem denique etiam quàm vltima priorum ad vltimam poſteriorum.*

SEXTI LIBRI.

1 TRIANGVLA & parallelogrammà, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe, vt baſes.

2 *SI* ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea: hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera. Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint: quæ ad ſectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipſius trianguli latus parallela.

3 *SI* trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum

gulum recta linea secuerit & basin: Basis segmenta eandem habebunt rationem, quàm reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera: Recta linea, quæ à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.

4 ÆQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

5 SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

6 SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

7 SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant, reliquorum verò simul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

8 SI in triangulo rectangulo ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: Quæ ad perpendicularem triangula tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

9 A data recta linea imperatam partem auferre.

10 DATAM rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.

11 DVABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.

12 TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

13 DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

14 ÆQVALIVM, & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

15 ÆQVALIVM, & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

16 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub

sub mediis comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

17 SI tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

18 A data recta linea dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere.

19 SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

20 SIMILIA polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

21 QVÆ eidem rectilineo sunt similia; & inter se sunt similia.

22 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterq; descripta, proportionalia erũt. Et si à rectis lineis similia similiterq; descripta rectilinea, proportionalia fuerint; ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

23 ÆQVIANGVLA parallelogramma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

24 IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.

25 DATO rectilineo simile similiterq; positum, & alteri dato æquale idem constituere.

26 SI à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum: hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

27 OMNIVM parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrammis similibus similiterq; positis ei, quod à dimidia describitur: maximum id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

28 AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cùm similes fuerint defectus & ei us, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

29 AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

30 PROPOSITAM rectam lineam terminatam, extrema ac media ratione secare.

31 IN rectangulis triangulis, figura quævis à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

32 SI duo triangula, quæduo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum vnum angulum composita fuerint, ita vt homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

33 IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper verò & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SEPTIMI LIBRI.

1 SI duobus numeris inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, neq; reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad assumpta sit vnitas: qui principio propositi sunt numeri, primi inter se erunt.

2 DVOBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

3 TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

4 OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

5 SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterque vtriusque simul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

6 SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterque vtriusque simul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

7 SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

8 SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

9 SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti.

10 SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eadem partes: Et viciſſim, quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

11 SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

12 SI ſint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ità omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

13 SI quatuor numeri proportionales ſint; Et viciſſim proportionales erunt.

14 SI ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini ſumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

15 SI vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et viciſſim æquè vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

16 SI duo numeri mutuò ſeſe multiplicantes fecerint aliquos: Geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt.

17 SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

18 SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

19 SI quatuor numeri proportionales fuerint: qui ex primo, & quarto fit numerus, æqualis erit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero. Et ſi qui ex primo, & quarto fit, numerus æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero: ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

20 SI tres numeri proportionales fuerint; qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, qui à medio efficitur. Et ſi qui ſub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio deſcribitur: ipſi tres numeri proportionales erunt.

21 MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor verò minorem.

22 SI fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

23 PRIMI inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

24 MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt.

25 SI

25 SI duo numeri primi inter ſe fuerint: qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

26 SI duo numeri ad quempiam primi fuerint: etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

27 SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit.

28 SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint: Et qui ex eis gignentur, primi inter ſe erunt.

29 SI duo numeri primi inter ſe fuerint, & multiplicans vterque ſeipſum fecerit aliquem: Et geniti ex ipſis primi inter ſe erunt. Et ſi, qui in principio, genitos ipſos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter ſe erunt; Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

30 SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Etiam vterque ſimul ad quemlibet illorum primus erit. Et ſi vterque ſimul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam qui in principio, numeri primi inter ſe erunt.

31 OMNIS primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt.

32 SI duo numeri ſeſe mutuò multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.

33 OMNEM compoſitum numerum aliquis primus numerus metitur.

34 OMNIS numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur.

35 NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipſis.

36 DVOBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur numerum.

37 SI duo numeri numerum quempiam metiantur. Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

38 TRIBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

39 SI numerum quiſpiam numerus metiatur: Ille quem metitur, partem habebit à metiente denominatam.

40 SI numerus partem habuerit quamlibet: metietur illum numerus à parte denominatus.

41 NVMERVM reperire, qui minimus cùm ſit, habeat datas partes.

OCTAVI LIBRI.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi

tremi verò ipsorum primi inter se fuerint: Ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

2 NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

3 SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium: Illorum extremi sunt inter se primi.

4 RATIONIBVS datis quotcunq; in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

5 PLANI numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.

6 SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neq; alius quispiam vllum metietur.

7 SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur: is etiam metietur secundum.

8 SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri: quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medii continua proportione cadent.

9 SI duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri: quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumq; eorum, ac vnitatem medij continua proportione cadent.

10 SI inter duos numeros, & vnitatem, continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum & vnitatem deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

11 DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus. Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

12 DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri. Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

13 SI sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisq; seipsum faciat aliquos: qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primum positi multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipsi quoque proportionales erunt; & semper circa extremos hoc eueniet.

14 SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

15 SI cubus numerus cubum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi latus vnius cubi latus alterius metiatur: & cubus cubum metietur.

16 SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et ſi latus vnius quadrati non metiatur latus alterius: neque quadratus quadratum metietur.

17 SI cubus numerus cubum numerum non metiatur; neque latus vnius latus alterius metietur. Et ſi latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

18 DVORVM ſimilium planorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus. Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

19 DVORVM ſimilium ſolidorum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri. Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

20 SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus. Similes plani erunt illi numeri.

21 SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri: Similes ſolidi ſunt illi numeri.

22 SI tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus: Et tertius quadratus erit.

23 SI quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit cubus: Et quartus cubus erit.

24 SI duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem ſit quadratus; & ſecundus quadratus erit.

25 SI duo numeri rationem inter ſe habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem ſit cubus; & ſecundus cubus erit.

26 SIMILES plani numeri rationem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

27 SIMILES ſolidi numeri rationem habent inter ſe, quam cubus numerus ad cubum numerum.

NONI LIBRI.

1 SI duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuò faciant quendam: Productus quadratus erit.

2 SI duo numeri ſe mutuò multiplicantes faciant quadratum, ſimiles plani erunt.

3 SI cubus numerus ſeipſum multiplicans procreet aliquem, Productus cubus erit.

4 SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

5 SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum: Et multiplicans cubus erit.

6 SI numerus seipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

7 SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans quempiam faciat: Factus solidus erit.

8 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus verò cubus simul & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

9 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post vnitatem, sit quadratus: Et reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus: Et reliqui omnes cubi erunt.

10 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post vnitatem, non sit quadratus; neque alius vllus quadratus erit; præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem non sit cubus; neq; alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

11 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

12 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiuntur, iidem & eum, qui vnitati proximus est, metientur.

13 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post vnitatem, primus sit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

14 SI minimum numerum primi numeri metiantur; Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.

15 SI tres numeri deinceps proportionales fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

16 SI duo numeri, primi inter se fuerint: Non erit, vt primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

17 SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint; Non erit, vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam.

18 DVOBVS numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis tertius proportionalis inueniri.

19 TRIBVS numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis quartus proportionalis inueniri.

20 PRIMI numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorum numerorum.

21 SI pares numeri quotcunque componantur; Totus par erit.

22 SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit par: Totus par erit.

23 SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit impar: Et totus impar erit.

24 SI à pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

25 SI à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

26 SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

27 SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

28 SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

29 SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem: Factus impar erit.

30 SI impar numerus parem numerum metiatur: Et illius dimidium metietur.

31 SI impar numerus ad aliquem numerum primus ſit: & ad illius duplum primus erit.

32 NVMERORVM à binario duplorum, vnuſquiſque pariter par eſt tantùm.

33 SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar eſt tantùm.

34 SI par numerus neque à binario duplus ſit, neq; dimidium habeat imparem: Pariter par eſt, & pariter impar.

35 SI ſint quotcunq; numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à ſecundo, & vltimo æquales ipſi primo: Erit vt ſecundi exceſſus ad primum, ita vltimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes.

6 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit Perfectus.

DECIMI LIBRI.

DVABVS magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi à maiore

iore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc ſemper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine.

2 SI duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minimè præcedentem metiatur: Incommenſurabiles erunt ipſæ magnitudines.

3 DVABVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.

4 TRIBVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum menſuram communem inuenire.

5 COMMENSVRABILES magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.

6 SI duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerũ: Commenſurabiles erunt magnitudines.

7 INCOMMENSVRABILES magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

8 SI duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommenſurabiles erunt magnitudines.

9 QVÆ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata: inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & latera habebunt longitudine commenſurabilia. Quæ verò à rectis lineis longitudine incommenſurabilibus fiunt quadrata: inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

10 SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima verò ſecundæ fuerit commenſurabilis: Et tertia quartæ commenſurabilis erit: Et ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis: Et tertia quartæ incommenſurabilis erit.

11 PROPOSITÆ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentia.

12 QVÆ eidem magnitudini ſunt commenſurabiles: & inter ſe ſunt commenſurabiles.

13 SI ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidem ſit commenſurabilis, altera verò incommenſurabilis: Incommenſurabiles erunt magnitudines.

14 SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.

15 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima verò tantò plus possit, quàm secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; Et tertia tantò plus poterit, quàm quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tantò plus possit, quàm secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit, quàm quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

16 SI duæ magnitudines commensurabiles componantur: Et tota magnitudo vtrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum commensurabilis fuerit: Et quæ à principio magnitudines, commensurabiles erunt.

17 SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur: Et tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit: Et quæ à principio magnitudines, incommensurabiles erunt.

18 SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat: Maior tantò plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tantò plus possit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: In partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

19 SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat: Maior tantò plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tantò plus possit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata: In partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.

20 QVOD ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis ſecundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum, Rationale eſt.

21 SI rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine commenſurabilem.

22 Quod ſub Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Irrationale eſt: Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.

23 QVOD à Media fit, ad Rationalem applicatum; latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.

24 MEDIÆ commenſurabilis, Media eſt.

25 QVOD ſub Mediis longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium eſt.

26 QVOD ſub Mediis potentia tantùm commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale eſt, vel Medium.

27 MEDIVM non ſuperat Medium Rationali.

28 MEDIAS inuenire potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant.

29 MEDIAS inuenire potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineant.

30 INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commenſurabiles, ita vt maior quàm minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi commenſurabilis.

31 INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commenſurabiles, ita vt maior quàm minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

32 INVENIRE duas Medias potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus poſſit quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

33 INVENIRE duas Medias potentia ſolùm commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus poſſit, quàm minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

34 INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale: Rectangulum verò ſub ipſis contentum, Medium.

35 INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ipſarum qua-

dratis, Medium: Rectangulum verò ſub ipſis contentum, Rationale.

36 INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quę faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileq́; compoſito ex ipſarum quadratis.

37 SI duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

38 SI duæ mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima.

39 SI duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Medium contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda.

40 SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod autem ſub ipſis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

41 SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

42 SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

43 QVÆ ex binis nominibus, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

44 QVÆ ex binis Mediis prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

45 QVÆ ex binis Mediis ſecunda, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

46 MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

47 RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

48 BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

49 INVENIRE ex binis nominibus primam.

50 INVENIRE ex binis nominibus ſecundam.

51 INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

52 INVENIRE ex binis nominibus quartam.

53 INVE-

53 INVENIRE ex binis nominibus quintam.

54 INVENIRE ex binis nominibus ſextam.

55 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

56 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis prima appellatur.

57 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis ſecunda dicitur.

58 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior.

59 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

60 SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta: Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

61 QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

62 QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

63 QVADRATVM eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatũ, latitudinẽ facit ex binis nominibus tertiam.

64 QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartã.

65 QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

66 QVADRATVM eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.

67 EI, quæ eſt ex binis nominibus, longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis nominibus eſt, atque ordine eadem.

68 EI, quæ eſt ex binis Mediis, longitudine commenſurabilis, & ipſa ex binis Mediis eſt, atque ordine eadem.

69 MAIORI commenſurabilis, & ipſa Maior eſt.

70 RATIONALE ac Medium potenti commenſurabilis, & ipſa Rationale ac Medium potens eſt.

71 BINA Media potenti commenſurabilis, & ipſa bina Media potens eſt.

72 SI Rationale & Medium componantur: quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima. vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

73 SI duo Media inter se incommensurabilia componantur: duæ rel quæ Irrationales fiunt; vel ex binis Mediis secunda, vel bina Media potens.

74 SI à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

75 SI à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

76 SI à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

77 SI à recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

78 SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

79 SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

80 APOTOMÆ vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti.

81 MEDIÆ Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

82 MEDIÆ Apotomæ secundæ vna tantum congruit recta linea Media potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

83 MINORI vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium.

84 EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum

& cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

85 EI, quæ cum Medio Medium totum facit, una tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

86 INVENIRE primam Apotomen.

87 INVENIRE secundam Apotomen.

88 INVENIRE tertiam Apotomen.

89 INVENIRE quartam Apotomen.

90 INVENIRE quintam Apotomen.

91 INVENIRE sextam Apotomen.

92 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima: Recta linea spatium potens Apotome est.

93 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda: Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.

94 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia: Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.

95 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta: Recta linea spatium potens, Minor est.

96 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta: Recta linea spatium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

97 SI spatiũ contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta: Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totũ efficit.

98 QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

99 QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam.

100 QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

101 QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

102 QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

103 QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

104 RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis, & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

105 RECTA linea Mediæ Apotomæ commensurabilis, & ipsa Mediæ Apotome est, atque ordine eadem.

106 RECTA linea Minori commensurabilis, & ipsa Minor est.

107 RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum rationali Medium totum efficiens est.

108 RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum medio Medium totum efficit, & ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.

109 MEDIO à Rationali detracto: Recta linea, quæ rel quum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

110 RATIONALI à Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

111 MEDIO à Medio detracto, quod sit incommensurabile toti: reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

112 APOTOME non est eadem, quæ ex binis nominibus.

113 QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione: & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.

114 QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotome nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.

115 SI spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotome, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens est Rationalis.

116 A Media infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

117 PROPOSITVM sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

VNDECIMI LIBRI.

1 RECTÆ lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam verò in sublimi.

2 SI duæ rectæ lineæ se mutuò secent, in vno sunt plano. Atq; Triangulum omne in vno est plano.

3 SI duo plana se mutuò secent; communis eorum sectio est linea recta.

4 SI recta linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat; illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.

5 SI recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat; Illæ tres rectæ in uno sunt plano.

6 SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

7 SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta; Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

8 SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

9 QVÆ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelæ.

10 SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

11 A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

12 DATO plano à puncto, quod in illo datum est, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

13 DATO plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.

14 AD quæ plana, eadem recta linea recta est: Illa sunt parallela.

15 SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano; Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana.

16 SI duo plana parallela plano quopiam secentur; communes illorum sectiones sunt parallelæ.

17 SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; in easdem rationes secabuntur.

18 SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

19 SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos; communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

20 SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vt vt assumpti tertio sunt maiores.

21 OMNIS solidus angulus sub minoribus, quàm quatuor rectis angulis planis continetur.

22 SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet assumpti reliquo sint maiores, comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales:

æquales: fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum conſtituatur.

23 EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque aſſumpti reliquo ſunt maiores, ſolidum angulum conſtituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores eſſe.

24 SI ſolidum parallelis planis contineatur: aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt ſimilia, & æqualia.

25 SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum.

26 AD datam rectam lineam, eiuſque punctum, angulum ſolidum conſtituere ſolido angulo dato æqualem.

27 A data recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile, & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

28 SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonios aduerſorum planorũ: Bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano.

29 SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in iiſdem collocantur rectis lineis: ſunt inter ſe æqualia.

30 SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in iiſdem collocantur rectis lineis: inter ſe ſunt æqualia.

31 SOLIDA parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine: æqualia ſunt inter ſe.

32 SOLIDA parallelepipeda ſub eadem altitudine: inter ſe ſunt, vt baſes.

33 SIMILIA ſolida parallelepipeda inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.

34 ÆQVALIVM ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur. Et quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur: illa ſunt æqualia.

35 SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique, in ſublimibus autem lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primum poſiti, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis verò, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum poſitos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos comprehendent.

36 SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto a media linea ſolido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum verò prædicto.

37 SI

37 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint. Et solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

38 SI planum ad planum rectum fuerit, & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt planorum, ad alterum perpendicularis ducta fuerit. In communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

39 SI solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint, per sectiones autem plana sint extensa: Communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuo secabunt.

40 SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin parallelogrammum, illud verò triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata.

DVODECIMI LIBRI.

1 QVÆ in circulis polygona similia; inter se sunt, vt à diametris quadrata.

2 CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata.

3 OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; & in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

4 SI fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum vtraque diuisa & in duas pyramides æquales inter se & similes toti; & in duo prismata æqualia: Ac eodem modo diuisa sit vtraque pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat: Erit vt vnius pyramidis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

5 SVB eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases: inter se sunt, vt bases.

6 SVB eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases; inter se sunt, vt bases.

7 OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se triangulares bases habentes.

8 SIMILES pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorum laterum ratione.

9 ÆQVALIVM pyramidum, & triangulares baſes habentium, reciprocantur baſes, & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes habentium reciprocantur baſes, & altitudines: illæ ſunt æquales.

10 OMNIS conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem.

11 SVB eadem altitudine exiſtentes coni, & cylindri, inter ſe ſunt, vt baſes.

12 SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.

13 SI cylindrus plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

14 SVPER æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines.

15 ÆQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes, & altitudines. Et quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes, & altitudines: illi ſunt æquales.

16 DVOBVS circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribere, quod non tangat minorem circulum.

17 DVABVS ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidum polyedrum inſcribere, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem.

18 SPHÆRÆ inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum.

TERTII DECIMI LIBRI.

1 SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur: maius ſegmentum aſſumens dimidiam totius, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia totius deſcribitur, quadrati.

2 SI recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplum poſſit: Duplæ prædicti ſegmenti extrema ac media ratione ſectæ, maius ſegmentum reliqua pars eſt eius, quæ à principio, rectæ.

3 SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur: minus ſegmentũ aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati.

4 SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur: Quod à tota, quodque à minore ſegmento, ſimul vtraque quadrata; tripla ſunt eius, quod à maiore ſegmento deſcribitur, quadrati.

5 SI recta

3 SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; apponaturque ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ à principio, recta linea.

4 SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumque segmentum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

7 SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint: Æquiangulum erit ipsum pentagonum.

8 SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione se mutuo secant, & maiora ipsarum segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

9 SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

10 SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

11 SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

12 SI in circulo triangulum æquilaterum describatur: Trianguli latus potentia triplum est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

13 PYRAMIDEM constituere, & data sphæra complecti; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

14 OCTAEDRVM constituere, & sphæra complecti; qua & pyramidem, & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit dupla lateris ipsius octaedri.

15 CVBVM constituere, & sphæra complecti, qua & priores figuras, & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

16 ICOSAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras, & demonstrare, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

17 DODECAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & prædictas figuras, & demonstrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

18 LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

QVARTIDECIMI LIBRI.

1 QVÆ ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

2 SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur; ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones.

3 SI in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur: quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati.

4 *SI latus hexagoni alicuius circuli ſecetur extrema ac media ratione: maius illius ſegmentum erit latus decagoni eiuſdem circuli.*

5 IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum, eidem ſphæræ inſcriptorum.

6 SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni: Erit quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Dodecaedri ſuperficiei æquale.

7 SI ex centro circuli triangulum Icoſaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli: Erit quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Icoſaedri ſuperficiei æquale.

8 RECTANGVLVM contentum ſub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque ſextis partibus lineæ ſubtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti, æquale eſt dicto pentagono.

9 SVPERFICIES Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri.

10 SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione: Erit vt recta potens id, quod à tota, & id, quod à maiori ſegmento ad rectam potentem id, quod à tota, & id, quod à minori ſegmento, ita latus cubi ad latus Icoſaedri eidem ſphæræ cum cubo inſcripti.

11 DODECAEDRVM ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt vt cubi latus ad latus Icoſaedri, in vna eademque ſphæra.

12 *LATVS trianguli aquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppoſitum deductæ.*

13 *SI ſphæra diameter fuerit Rationalis: Erit tam ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Medias.*

14 *SI*

14 SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæra inscribantur: Erit basis Tetraedri sesquitertia basis Octaedri; superficies autem Octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri.

15 RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in sphæra descripti per centrum sphæræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, estque perpendicularis ad dictam basim.

16 OCTAEDRVM in sphæra descriptum diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis verò vtriusque est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ.

17 TETRAEDRVM sphæra impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea potente trigintiseptem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris comprehensum, ad quadratum diametri sphæræ.

Vel vt Campanus habet.

TETRAEDRVM sphæra impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquitertia trium quartarum partium lateris Tetraedri, & sub linea superquintupartiente vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris Tetraedri contentum, ad quadratum diametri sphæræ.

18 LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basim oppositam demissa, tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem basim deducitur.

19 SI Octaedrum sphæræ inscribatur: Erit semidiameter sphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphæræ in basim quamcunque Octaedri ducitur.

20 DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, æquale est superficiei cubi in illa sphæra collocati; Perpendicularis autem a centro sphæræ in aliquam basin cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi.

21 IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & Octaedri triangulum, eiusdem sphæræ.

22 SI Octaedrum, atque Tetraedrum eidem sphæræ inscribantur: Erit Octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri.

23 SI recta linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri, minus autem segmentum posterioris lineæ latus Dodecaedri eius sphæræ, cuius recta linea proposita diameter existit.

24 SI latus Octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ li-

nea extrema ac media ratione secta: Poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.

25 *SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus Octaedri eius sphæræ, in quæ dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.*

26 *SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum linea recta extrema ac media ratione secta: Latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.*

27 *CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt superficies cubi ad Octaedri superficiem: Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ.*

28 *SI sint quatuor linea recta continuè proportionales, nec non & alia quatuor, ita vt sit eadem antecedens omnium: Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.*

29 *QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.*

30 *SI Cubus, & Tetraedrum in eadem sphæra describantur: Erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.*

31 *LATVS Tetraedri potentia sesquialterum est axis, seu altitudinis ipsius; Axis verò, siue altitudo Tetraedri potentia sesquitertia est lateris cubi in eadem sphæra descripti.*

32 *CVBVS triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti.*

QVINTI DECIMI LIBRI.

1 IN dato cubo pyramidem describere.
2 IN data pyramide Octaedrum describere.
3 IN dato cubo Octaedrum describere.
4 IN dato Octaedro cubum inscribere.
5 IN dato Icosaedro Dodecaedrum inscribere.
6 *IN dato Octaedro pyramidem describere.*
7 *IN dato Dodecaedro Icosaedrum describere.*
8 *IN dato Dodecaedro cubum describere.*
9 *IN dato Dodecaedro Octaedrum describere.*

18 *IN dato Dodecaedro pyramidem deſcribere.*
19 *IN dato Icoſaedro cubum deſcribere.*
20 *IN dato Icoſaedro Pyramidem deſcribere.*
21 *IN dato cubo Dodecaedrum deſcribere.*
22 *IN dato cubo Icoſaedrum deſcribere.*
23 *IN dato Icoſaedro Octaedrum deſcribere.*
24 *IN dato Octaedro Icoſaedrum deſcribere.*
25 *IN dato Octaedro Dodecaedrum deſcribere.*
26 *IN data pyramide Cubum deſcribere.*
27 *IN data pyramide Icoſaedrum deſcribere.*
28 *IN data pyramide Dodecaedrum deſcribere.*
29 *IN dato ſolido regulari ſphæram deſcribere.*

SEXTI DECIMI LIBRI.

1 *SI in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: Erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema ac media ratione, triplicata.*

2 *LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur à recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione.*

3 *SI ab angulis trianguli pyramidis ducantur rectæ oppoſita latera ſecantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum ſit maius ſegmentum vnius lateris, & minus alterius; Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſin Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri.*

4 *MINVS ſegmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione ſecti duplum eſt potentia lateris Icoſaedri in ea Pyramide deſcripti.*

5 *LATVS cubi potentia dimidium eſt lateris pyramidis in eo deſcripta: Latus verò pyramidis duplum eſt longitudine lateris Octaedri ſibi inſcripti: Latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti Octaedri.*

6 *LATVS Dodecaedri maius ſegmentum eſt recta, quæ potentia eſt dimidia lateris pyramidis ſibi inſcriptæ.*

7 *SI in cubo deſcribatur & Icoſaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icoſaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.*

8 *LATVS pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti.*

9 *LATVS pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.*

10 *SI in Octaedro Icosaedrum describatur: Erit latus Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris Octaedri extrema ac media ratione diuisi.*

11 *LATVS Octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in seipso descripti.*

12 *LATVS Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris Octaedri in Icosaedro descripti.*

13 *LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione: Latus verò Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ.*

14 *LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscripti pyramidis.*

15 *SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.*

16 *LATVS Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti.*

17 *DIAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.*

18 *LATVS Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus sic habet, vt minus segmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, atque extrema ac media ratione diuisæ, ad partem eiusdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiusdem positæ.*

19 *SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque eius segmentum à toto latere Icosaedri sublatum; à reliqua quoque rectæ pars rursum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.*

20 *CVBVS sibi inscripta pyramidis triplus est.*

21 *PYRAMIS sibi inscripti Octaedri dupla est.*

22 *CVBVS sibi inscripti Octaedri sextuplus est.*

23 *OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.*

24 *OCTAEDRVM sibi inscripta pyramidis tredecuplum sesquialterum est.*

25 *PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.*

26 *OCTAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem ha-*

nem habet, quàm duæ baſes Octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.

17 ICOSAEDRVM ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum Icoſaedro ſphæra deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem.

18 DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis à quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, at verò altitudo ab altitudine, ſine latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, qua dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.

19 DODECAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra baſium Dodecaedri oppoſitarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum cubo deſcripti.

20 DODECAEDRVM Pyramidis, in qua deſcribitur, duas tertias partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, latitudo verò tertiæ partis minoris ſegmenti lateris eiuſdem cubi, altitudo denique à latere eiuſdem cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, qua dimidiati lateris cubi eiuſdem minus ſegmentum exiſtit: Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi productæ eſt æqualis, altitudo verò minus ſegmentum eius lineæ, qua dimidiati lateris cubi eiuſdem ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſine latere eiuſdem cubi ſint æquales.

21 OCTAEDRVM excedit ſibi deſcriptum Icoſaedrum Parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, altitudo verò maius ſegmentum ſemidiametri Octaedri extrema ac media ratione ſectæ.

INDEX PROBLEMATVM AC THEOREMATVM, QVÆ PRÆTER PROpositiones in sexdecim libris Euclidis contentas in hisce commentariis demonstrantur.

IN PRIMO LIBRO.

1 REGVLAM *pro lineis rectis ducendis examinare, num recta sit, nec ne.* Ad defin. 4.

2 ANGVLVM *rectilineum examinare, num rectus sit, an obtusus, vel acutus.* Ad defin. 12.

3 NORMAM *pro angulis rectis constituendis examinare, num accurate fabricata sit.* Ad def. 12.

4 CIRCVLVS *bifariam à diametro secatur.* Ad def. 18.

5 CIRCVLVS *à linea per centrum non transeunte secatur in partes inæquales, maiorque est ea, in qua centrum.* Ad defin. 18.

6 DVÆ *rectæ lineæ non habent* ☞num & idem *segmentum commune.* Ad Axioma 10.

7 DVÆ *rectæ in* ☞no *puncto concurrentes, si producantur amba. necessario se mutuo in eo puncto intersecabunt.* Ad Axioma 11.

8 OMNES *anguli recti sunt inter se æquales.* Ad Axioma 12.

9 DVÆ *rectæ lineæ spatium non comprehendunt.* Ad Axioma 14.

10 SVPER *data recta linea terminata triangulum Isosceles, & Scalenum constituere.* Ad propos. 1.

11 OMNE *triangulum æquilaterum est etiam æquiangulum.* Coroll. propos. 5.

12 OMNE *triangulum æquiangulum est etiam æquilaterum.* Coroll. propos. 6.

13 SI *trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basin fiant æquales: Et duo latera illa æqualia inter se erunt.* Ad propos. 6.

14 SI *duo triangula bases habuerint æquales, & angulos super bases constitutos æquales,* ☞trumque ☞trique: *Habebunt quoque reliqua latera æqualia,* ☞trumque ☞trique, *qua videlicet æqualibus angulis subtenduntur, angulosque reliquos hisce lateribus inclusos, æquales.* Ad propos. 8.

15 SI *duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus* ☞trumque ☞triq; *æqualia, habuerint vero & basim basi æqualem: æquiangula inter se erunt, & æqualia.* Coroll. propos. 8.

16 *DVÆ linea recta ſe mutuo ſecantes efficiunt ad punctum ſectionis quatuor angulos quatuor rectis æquales.* Coroll. 1. propoſ. 15.

17 *QVOTLIBET anguli circa vnum & idem punctum conſtituti, quatuor rectis ſunt æquales.* Coroll. 2. propoſ. 15.

18 *SI ad aliquam rectam lineam, ad eiuſque ſignum, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ſumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint: ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi inuicem erunt.* Ad propoſ. 15.

19 *SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppoſitos inter ſe æquales fecerint: Erunt qualibet duæ lineæ aduerſæ in rectum ſibi, & continuum coniunctæ.* Ad propoſ. 15.

20 *AB vno puncto ad eandem lineam rectam non poſſunt duci plures lineæ rectæ, quàm duæ inter ſe æquales.* Ad propoſ. 16.

21 *AB vno puncto ad eandem lineam rectam non poſſunt duci plures lineæ perpendiculares, quàm vna.* Ad propoſ. 17.

22 *IN omni triangulo, cuius vnum angulum fuerit rectum, aut obtuſum, reliqui ſunt acuti.* Coroll. 1. propoſ. 17.

23 *SI linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum obtuſum, & acutum alterum: Linea perpendicularis ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demiſſa cadit ad partes anguli acuti.* Coroll. 2. propoſ. 17.

24 *OMNES tres anguli in triangulo æquilatero, & duo ſupra baſin in iſoſcele, ſunt acuti.* Coroll. 3. propoſ. 17.

25 *OMNES tres anguli in triangulo ſcaleno ſunt inæquales.* Coroll. propoſ. 18.

26 *OMNIVM rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcunque ductarum, ea quæ perpendicularis eſt, minima exiſtit.* Coroll. propoſ. 19.

27 *SI trianguli angulus bifariam ſectus fuerit, ſecanſq; angulum recta linea ad baſin ducta in partes inæquales ipſam dimidiat: Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori baſis ſegmento coincidit, minus verò, quod cum minori.* Ad propoſ. 19.

28 *SI trianguli duo latera inæqualia fuerint; Linea recta bifariam diuidens angulum ipſis contentum, ſecabit baſin in partes inæquales, maiuſque ſegmentum erit propè maius latus.* Ad propoſ. 19.

29 *SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, baſin bifariam quoque ſecet: Erunt duo latera angulum continentia æqualia. Quod ſi latera æqualia fuerint, baſin etiam bifariam ſecabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.* Ad propoſ. 19.

30 *IN triangulo aliquo duci poſſunt duæ rectæ, vna quidem ab extremo lateris, altera verò à puncto prope alterum extremum eiuſdem lateris, intra triangulum concurrentes, quæ maiores ſint duobus lateribus trianguli.* Ad propoſ. 21.

31 *SI duo triangula duos angulos duobus angulis aquales habuerint, utrumque utrique: unumque latus uni lateri aquale, sive quod aqualibus adiacet angulis, seu quod uni aqualium angulorum subtenditur: ipsa aqualia inter se erunt.* Coroll. propos. 26.

32 *IN triangulo aquilatero, sive Isoscele, recta linea ab angulo duobus lateribus aqualibus comprehenso ducta, dividens q; vel angulum vel basim bifariam, perpendicularis est ad basim; Et si quidem angulum bifariam dividat; secabit quoq; basim bifariā; si verò basim secet bifariam, dividet quoq; angulum bifariam. Et, contrà, Linea perpendicularis ad basim ducta dividit & basim, & angulum bifariam.* Ad propos. 26.

33 *TRIANGVLVM, in quo linea recta ab uno angulorum ducta ad basim perpendicularis dividit vel basim, vel angulum bifariam, habet duo latera dictum angulum comprehendentia aqualia. Et si quidem basis dividatur bifariam, angulus quoq; bifariam secabitur, si verò angulus bifariam secetur, basis quoq; dividetur bifariam.* Ad propos. 26.

34 *SI ab uno puncto duæ rectæ linea angulum facientes infinitè producantur, semper magis ac magis inter se distabunt, omnemq; finitam magnitudinem ipsarum distantia excedet.* Ad propos. 28.

35 *SI duarum parallelarum rectarum linearum alteram secet quædam recta linea, reliquam quoq; productā secabit.* Ad propos. 28.

36 *SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se aquales; quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur: Erit perpendicularis ex quouis puncto huius recta ad priorem rectam demissa, utrilibet priorum perpendicularium aqualis.* Ad propos. 28.

37 *SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se aquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur: Efficiet hæc recta cum utraq; perpendiculari angulum rectum.* Ad propos. 28.

38 *SI in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum una earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum: duæ illa rectæ minus semper inter se distabunt ad eas partes, ubi est angulus acutus; ex altera verò parte semper inter se magis distabunt.* Ad propos. 28.

39 *SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat: Duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.* Ad propos 28. Estq; axioma 13. Hæ porrò quatuor vltimæ propositiones demonstrantur ex solis 28. propositionibus Euclidis, nulla adhibita proprietate parallelarum.

40 *PARALLELOGRAMMVM constituere, cuius unus angu-*

angulorum aqualis ſit dato angulo rectilineo, laterag; angulum illum comprehendentia datis duabus rectis lineis aqualia. Ad propoſ. 31.

41 *A dato puncto extra datam rectam lineam, rectam lineam ducere, qua cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo aqualem.* Ad propoſ. 31.

42 *A dato puncto in extremo linea recta, ad ipſam, licet non producatur, aut produci non poſſit, perpendicularem lineam excitare.* Ad propoſ. 31.

43 *A dato puncto in extremo fere plani, & extra lineam rectam, ad ipſam rectam lineam perpendicularem demittere.* Ad propoſ. 31.

44 *SI ab vno angulo trianguli linea recta extra triangulum ducatur faciens externum angulum aqualem duobus internis, & oppoſitis: illa linea erit in directũ ipſi lateri conſtituta.* Ad propoſ. 32.

45 *OMNES anguli figura cuiuſuis rectilinea, ſunt aquales bis tot rectis, quotu ipſa eſt inter figuras rectilineas.* Ad propoſ. 32.

46 *OMNES anguli figura rectilinea cuiuſuis aquales ſunt bis tot rectis, demptis quatuor, quot ipſa continet latera, ſeu angulos.* Ad propoſ. 32.

47 *SI ſingula latera figura cuiuſuis rectilinea producantur verſus eandem partem; omnes anguli externi aquales ſunt quatuor tantum rectis.* Ad propoſ. 32.

48 *SI pentagoni ſingula latera producantur in vtramque partem, ita vt qualibet duo extra pentagonum coeant: efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus aquales duobus ſolum rectis.* Ad propoſ. 32.

49 *TRES anguli cuiuslibet trianguli ſimul ſumpti aquales ſunt tribus angulis cuiuſuis alterius trianguli ſimul ſumpti.* Coroll. 1. propoſ. 32.

50 *IN triangulo Iſoſcele, ſi angulus à lateribus aqualibus comprehenſus fuerit rectus, erit vterque aqualium angulorum ſupra baſim ſemirectus; ſi verò obtuſus, minor ſemirecto, ſi denique acutus, maior ſemirecto.* Coroll. 2. propoſ. 32.

51 *QVILIBET angulus trianguli aquilateri continet duas tertias partes vnius recti, vel vnam tertiam partem duorum rectorum.* Coroll 3. propoſ. 32.

52 *SI ab vno angulo trianguli aquilateri perpendicularis ad latus oppoſitum ducatur, conſtituentur duo triangula ſcalena, quorum vnumquodq; habet vnum angulum rectum prope perpendicularem, alium verò perpendiculari oppoſitum aqualem duabus tertijs partibus vnius recti, reliquum denique aqualem tertia parti vnius recti.* Coroll 4. propoſ. 32.

53 *ANGVLVM rectum in tres angulos aquales dividere.* Ad propoſ. 32.

54 OMNE

54 *OMNE quadrilaterum habens latera oppoſita æqualia, eſt parallelogrammum.* Ad propoſ. 34.

55 *OMNE quadrilaterum habens angulos oppoſitos æquales, eſt parallelogrammum.* Ad propoſ. 34.

56 *OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum.* Ad propoſ. 34.

57 *IN quadrato & Rhombo anguli oppoſiti bifariam ſecantur à diametro* Ad propoſ. 34.

58 *IN altera parte longiori, & Rhomboide, anguli oppoſiti non bifariam ſecantur à diametro.* Ad propoſ. 34.

59 *IN quadrato, & altera parte longiori, duæ diametri ſunt inter ſe æquales.* Ad propoſ. 34.

60 *IN Rhombo, & Rhomboide, duæ diametri non ſunt inter ſe æquales.* Ad propoſ. 34.

61 *IN omni parallelogrammo diametri ſe mutuò bifariam diuidunt.* Ad propoſ. 34.

62 *OMNE quadrilaterum, in quo diametri ſe mutuò bifariam diuidunt, parallelogrammum eſt.* Ad propoſ. 34.

63 *RECTA linea ſecans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum quoq; bifariam. Et recta linea diuidens parallelogrammum bifariam quouis modo, ſecat quoque diametrum bifariam.* Ad propoſ. 34.

64 *A quouis dato puncto lineam rectam ducere, quæ parallelogrammum datum ſecet bifariam.* Ad propoſ. 34.

65 *INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam data linea æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum, & eum, qui lineis datis continetur, minores eſſe duobus rectis.* Ad propoſ. 34.

66 *IN aliquo triangulo conſtitui poſſunt intra ipſum duæ rectæ à duobus punctis baſis, æquales duobus lateribus.* Ad propoſ. 34.

67 *IN omni figura rectilinea latera habente numero paria, ſi quidem fuerit æquilatera & æquiangula, duo qualibet latera oppoſita parallela inter ſe ſunt.* Ad propoſ. 34.

68 *PARALLELOGRAMMA æqualia ſuper eandem baſin, ad eaſdemq; partes conſtituta, inter eaſdem ſunt parallelas.* Ad propoſ. 35.

69 *PARALLELOGRAMMA æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdem partes conſtituta, inter eaſdem ſunt parallelas. Et parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta.* Ad propoſ. 35.

70 *SI duo parallelogramma inter eaſdem parallelas habeant baſes inæquales, illud, cuius baſis maior eſt, maius erit. Et contrà, ſi duo paral-*

parallelogramma ſunt inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis maioris maior erit. Ad propoſ. 36.

71 *TRIANGVLA, quorum duo latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus vnius illis lateribus contentus maior angulo alterius, ſi quidem ambo ſimul duobus ſint rectis æquales, æqualia ſunt: Si verò duobus ſint rectis maiores, minus illud eſt, quod maiorem habet angulum; ſi deniq; ſint minores duobus rectis, maius illud erit, quod maiorem angulum habet.* Ad propoſ 37.

72 *SI à quouis angulo trianguli linea recta ducatur diuidens latus oppoſitum bifariam, triangulum quoque bifariam ſecabit.* Ad propoſ. 38.

73 *A puncto quouis dato in vno latere trianguli propoſiti lineam rectam ducere, quæ bifariam ſecet triangulum datum.* Ad propoſ. 38.

74 *LINEA recta ſecans duo trianguli latera bifariam; reliquo lateri eſt parallela.* Ad propoſ. 39.

75 *OMNE quadrilaterum, quod ab vtraque diametro bifariam diuidatur, parallelogrammum eſt.* Ad propoſ. 39.

76 *TRIANGVLA æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſim, ſuper æquales baſes erunt conſtituta.* Ad propoſ. 40.

77 *SI duo triangula inter eaſdem parallelas habeant baſes inæquales, illud, cuius baſis maior eſt, maius erit. Et contrà, ſi duo triangula ſint inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis maioris maior erit.* Ad propoſ. 40.

78 *TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſita baſes æquales ſint, ſunt inter ſe æqualia. Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas æquales.* Ad propoſ. 40.

79 *TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſita baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiuſque eſt illud, cuius baſis maior eſt. Et trapezia inæqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas inæquales, maior q; eſt illa, cuius trapezium maius eſt.* Ad propoſ. 40.

80 *TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſita baſes ſint æquales, æqualia ſunt. Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent baſes oppoſitas æquales.* Ad propoſ. 40.

81 *TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſita baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiuſq; eſt illud, cuius baſis maior eſt. Et trapezia inæqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent oppoſitas baſes inæquales, maior q; eſt illa, cuius trapezium maius eſt.* Ad propoſ. 40.

82 *SI in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo opposito ducta, diuidensq; alterutram parallelarum bifariam, diuidit quoq; alteram bifariam* Ad propos. 40.

83 *DATAM rectam lineam finitam in quotlibet partes aequales secare.* Ad propos. 40.

84 *SI triangulum duplam habuerit basim, fuerintq; in eisdem parallelis cum parallelogrammo: triangulum parallelogrammo aequale est.* Ad propos. 41.

85 *SI parallelogrammum & triangulum aequales habuerint bases, in eisdemq; fuerint parallelis: duplum erit parallelogrammum trianguli.* Ad propos. 41.

86 *SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; habuerint basim, vel aequales, & ad easdem partes constituta: Erunt ipsa in eisdem parallelis. Et si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eisdemq; parallelis: Erunt bases aequales, si non sit eadem.* Ad propos. 41.

87 *SI triangulum & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij sit basis trianguli: Erit trapezium minus duplo trianguli: Si verò minor linea trapezij basis sit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.* Ad propos. 41.

88 *TRAPEZIVM habens duo latera opposita parallela, duplum est trianguli; quod basim habet vnum latus trapezij consungens duas parallelas; vertícem verò in medio puncto lateris oppositi.* Ad propos. 41.

89 *DATO parallelogrammo aequale triangulum constituere, in dato angulo rectilineo.* Ad propos. 42.

90 *SI parallelogrammũ diuisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita vt ex illis duo aduersa sint aequalia: consistent reliqua duo circa diametrum.* Ad propos. 43.

91 *AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo constituere aequale triangulum, in dato angulo rectilineo.* Ad propos. 44.

92 *DATIS duobus rectilineis inaequalibus, excessum maioris supraminus inquirere.* Ad propos. 45.

93 *LINEARVM aequalium aequalia sunt quadrata. Et quadratorum aequalium aequales sunt lineae.* Ad propos. 46.

94 *TRES numeros inuenire, ita vt quadrati numeri duorum quadrato numero reliqui sint aequales.* Ad propos. 47.

95 *SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum à diametro descriptum, duplum erit praedicti quadrati.* Ad propos. 47.

96 *QVADRATVM diametri figurae alterae parte longioris aequale est duobus quadratis laterum inaequalium.* Ad propos. 47.

97 *SI fuerint duo triangula rectangula, quorum latera recti anguli opposita sint aequalia: Erunt duo quadrata reliquorum duorum*

Vnius laterum Vnius trianguli aqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius. Ad propoſ. 47.

98 *DVOBVS quadratis inaqualibus propoſitis, inuenire alia duo quadrata, qua & aqualia ſint inter ſe, & ſimul ſumpta aqualia duobus inaqualibus propoſitis ſimul ſumptis.* Ad propoſ. 47.

99 *PROPOSITIS duabus lineis inaqualibus, inuenire id, quod plus poteſt maior, quàm minor.* Ad propoſ. 47.

100 *PROPOSITIS quotcunque quadratis, ſiue aqualibus, ſiue inaqualibus, inuenire quadratum omnibus illis aquale.* Ad propoſ. 47.

101 *PROPOSITIS duobus quadratis quibuſcunq;, alteri illorum adiungere figuram, qua reliquo quadrato ſit aqualis, ita vt totum figura compoſitum ſit etiam quadratum.* Ad propoſ. 47.

102 *COGNITIS duobus lateribus quibuſcunq; trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.* Ad propoſ. 47.

103 *SI ex angulo à duobus lateribus inaqualibus trianguli comprehenſo ad baſin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum: Secabitur baſis in partes inaquales, maiorq; pars iuxta maius latus erit. Et contrà, ſi baſis à perpendiculare ſecetur non bifariam: Erunt duo latera inaqualia, maiusq; illud erit, quod maiori baſis ſegmento adiacet.* Ad propoſ. 47.

104 *IN omnes triangulo, parallelogramma quacunq; ſuper duobus lateribus deſcripta, aqualia ſunt parallelogrammo ſuper reliquo latere conſtituto, cuius alterum latus aquale ſit, & parallelum recta ducta ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus triangulj oppoſita, ſi ad partes anguli illius producantur.* Ad propoſ. 47.

105 *TRIANGVLORVM comparationes in primo libro demonſtratas explicare.* Ad finem lib. 1.

106 *QVANDO duo latera Vnius trianguli duobus lateribus alterius trianguli aqualia ſunt, Vtrumq; Vtriq;, & Vnus angulus Vni angulo, qui Vni aqualium laterum opponitur; baſes aquales eſſe nequeunt, niſi quando angulus in Vtroq; triangulo alteri latoris aquali oppoſitus vel eſt minor recto, vel non minor recto.* Ad finem lib. 1.

107 *QVANDO duo latera Vnius trianguli duobus lateribus alterius trianguli aqualia ſunt, Vtrumq; Vtriq;, & Vnus angulus Vni angulo, ita vt Vnum Vni aqualium laterum, & alter alteri opponatur: nihil colligi poteſt.* Ad finem lib. 1.

108 *QVANDO duo latera Vnius trianguli duobus lateribus alterius trianguli aqualia ſunt, Vtrumq; Vtriq;, & angulus in Vno triangulo illis lateribus comprehenſus, aqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur Vni illorum laterum: nihil poteſt inferri.* Ad finem lib. 1.

IN

IN SECVNDO LIBRO.

1 *IN omni parallelogrammo, ſi ℞nus angulus duntaxat detur rectus, reliqui etiam tres recti erunt.* Ad defin. 1.

2 *SI fuerint duo recta linea, ſecenturq; amba in quotcunq; ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, qua ſub ſingulis ſegmentis ℞nius, & quolibet ſegmentorum alterius continentur, rectangulo.* Ad propoſ. 1.

3 *SI ſint duo recta linea, ſecenturq; amba ℞cunque: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, ℞na cum rectangulo ſub ℞na parte ℞nius, & ℞na parte alterius comprehenſo, æquale eſt eis, qua ſub totis lineis, & dictis partibus mutuò continentur, rectangulis, ℞na cum rectangulo ſub reliquis partibus comprehenſo.* Ad propoſ. 2.

4 *SI linea recta ſecetur in quotcunque ſegmenta: Quadratum, quod à toto fit, æquale eſt eis, qua ſub ſingulis ſegmentis, & quolibet ſegmento comprehenduntur, rectangulis.* Ad propoſ. 2.

5 *PARALLELOGRAMMA circa diametrum quadrati ſunt quadrata.* Ad propoſ. 4.

6 *DIAMETER cuiuſuis quadrati dimidit eius angulos bifariam.* Ad propoſ. 4.

7 *SI linea recta fuerit dupla linea recta, quadratum ex illa deſcriptum, quadruplum eſt quadrati ex hac deſcripti. Et ſi quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum eſt lateris huius.* Ad propoſ. 4.

8 *NVMERVM quadratum inuenire, cum quo datus quinis numerus quadratum quoque numerum conſtituat. Et ℞ciſſim quadratum numerum reperire, à quo datus quinis numerus ſubtractus relinquat numerum quoque quadratum.* Ad propoſ. 4. 5. 6. & 8.

9 *SI tres linea habeant proportionalitatem Arithmeticam; Rectangulum ſub extremis contentum, ℞na cum quadrato exceſſus, æquale eſt quadrato medie.* Ad propoſ. 6.

10 *SI recta linea in partes inæquales ſecetur: Earum partium quadrata æqualia ſunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, ℞na cum quadrato eius linea, qua maior pars ſuperat minorem.* Ad propoſ. 7.

11 *IN omni triangulo obtuſangulo, linea perpendicularis ducta ex quouis acutorum angulorum ad latus oppoſitum, cadit in ipſum latus ad partes anguli obtuſi protractum.* Ad propoſ. 12.

12 *SI in triangulo quadratum ℞nius lateris maius ſit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppoſitus, obtuſus eſt.* Ad propoſ. 12.

13 *SI in triangulo quadratum ℞nius lateris maius ſit quadratis reli-*

reliquorum duorum laterũ, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab oppoſito angulo demiſſa abſcindit: Demiſſa hac linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, obtuſus. Ad propoſ. 12.

14 *AMBLYGONIA triangula conſtituere laterum commenſurabilium, in quibus ſegmentum inter angulum obtuſum, & perpendicularem commenſurabile etiam ſit latus* Ad propoſ. 12.

15 *SI in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppoſitus, acutus erit.* Ad propoſ. 13.

16 *SI in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub recta linea inter angulum priori lateri oppoſitum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri oppoſito demiſſam: Linea hac demiſſa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, acutus.* Ad propoſ. 13.

17 *TRIANGVLA commenſurabilium laterum conſtituere, in quibus ſegmenta inter perpendicularem, quæ in baſim cadit, eiſdem lateribus commenſurabilia quoq; ſunt.* Ad propoſ. 13.

18 *SI in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppoſitum bifariam: erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium ſimul dupla duorum quadratorum ſimul ſumptorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum verò ex dimidiato latere deſcribitur.* Ad propoſ. 13.

19 *AREAM cuiuſque trianguli latera habentis nota inuenire.* Ad propoſ. 13.

20 *DATO exceſſu diametri alicuius quadrati ſupra latus eiuſdem: Inuenire latus ipſius quadrati.* Ad propoſ. 14.

21 *DATIS duobus exceſſibus diametri alicuius parallelogrammi rectanguli ſupra vtrumque latus: Inuenire latera ipſius rectanguli.* Ad propoſ. 14.

IN TERTIO LIBRO.

1 *SI in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos ſecet: in ſecante eſt centrum circuli.* Coroll. propoſ. 1.

2 *LINEA recta, quæ circulum tangit, ita vt eum non ſecet, in vno tantùm puncto ipſum tangit.* Coroll. propoſ. 2.

3 *IN triangulo æquilatero, vel iſoſcele, recta ſecans baſim bifa-*

riam, ad baſim perpendicularis eſt. Et perpendicularis ad baſim, ſecat baſim bifariam. Coroll. propoſ. 3.

4 DVOBVS circulis ex eodem centro deſcriptis, ſi ab aliquo puncto circumferentia exterioris recta ducatur interioris circumferentiam ſecans: Erunt eius ſegmenta inter vtramq; circumferentiam poſita, inter ſe æqualia. Ad propoſ. 3.

5 SI intra circulum punctum ſumatur, ab eoq; puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima ſit, vna verò minima; & reliquarum alia ſint inæquales, alia æquales: Maxima quidem per centrum tranſibit, minima verò erit reliquæ partis diametri; & aliarum maiores quidem erunt maximæ propinquiores; æquales autem ab eadem maximæ, vel minimæ æqualiter diſtabunt. Ad propoſ. 7.

6 SI in ſemidiametro circuli producta punctum vltra centrum ſumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum ſemidiametri punctum deſcriptus, tanget priorem circulum in dicto puncto extremo ſemidiametri, totaſque extra eundem cadet. Ad propoſ. 13.

7 RECTA linea à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducta ipſum circulum tangit. Hinc facilè per datum punctum in circumferentiam duci poterit linea circulum tangens. Coroll. propoſ. 16.

8 DIGRESSIO de angulo contactus aduerſus Iacobum Peletarium. Ad propoſ. 16.

9 QVOTLIBET anguli contactus æquales ſimul ſumpti, minores ſunt quouis angulo acuto rectilineo. Ad propoſ. 16.

10 ALIQVA quantitas poteſt continuè, & infinitè augeri, altera verò infinitè minui: & tamen augmentum illius, quantumcunq; ſit, minus ſemper erit decremento huius. Ad propoſ. 16.

11 TRANSITVS à minori ad maius, vel contrà, & per omnia media: & tamen non per æquale. Item reperitur maius hoc, & minus eodem: & tamen non æquale. Ad propoſ. 16. & 31.

12 PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterum includat, rectam lineam ducere, quæ vtrumq; tangat circulum. Ad propoſ. 17.

13 PER datum punctum deſcribere circulum, qui alium tangat ſiue interius, ſiue exterius. Ad propoſ. 17.

14 CIRCVLVM, qui duos alios circulos, quorum vnus non ſit totus intra alium, tangat, deſcribere. Ad propoſ. 17.

15 LINEÆ rectæ, quæ circulum ſecet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat. Ad propoſ. 17.

16 DVOBVS circulis ex eodem centro deſcriptis: erunt omnes rectæ lineæ interiorem circulum tangentes, & vſque ad circumfe-

rentiam

rentiam exterioris circuli extensa, inter se aquales, bifariam q; in punctis contactuum secabuntur. Ad propos. 18.

17 IN circulo spatiũ ad centrum duplex est anguli ad peripheriã, cum fuerit eadem peripheria basis spatij & anguli. Ad propos. 20.

18 SI a duobus punctis quatuor recta linea ducantur, ex singulis bina, quæ ad easdem partes contineant angulos duos aquales: Circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum descriptus, per alterum quoq; angulum transibit. Ad propos. 21.

19 SI in quadrilatero anguli qui ex aduerso duobus rectis sint aquales: circulus, qui per tres quoscunq; eius angulos describitur, transibit etiam per reliquum quartum angulum; atq; adeò circa ipsum quadrilaterum circulus describi potest. Ad propos. 22.

20 SI ex semicirculis, aut circulis, segmenta similia detrahantur; reliqua quoq; segmenta similia erunt. Ad propos. 22.

21 ANGVLI insistentes arcubus circulorum similibus sine ad centra, sine ad circumferentias, sunt inter se aquales. Et contra arcus, quibus anguli aquales sine ad centra, sine ad circumferentias insistunt, similes sunt. Ad propos. 22.

22 SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur atque ex centro duæ, aut plures recta linea ducantur: erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti, similes. Ad propos. 22.

23 SI duo aut plures circuli se mutuò tangant interius in vno puncto, à quo duæ aut plures rectæ educantur: erunt & arcus inter quascunq; duas lineas intercepti, & arcus inter quamcunq; lineam, & punctum contactus intercepti, similes. Ad propos. 22.

24 SI vnum latus quadrilateri in circulo descripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, aqualis. Ad propos. 22.

25 SEGMENTA circulorum aqualia super aquales lineas, vel super eandem constituta, sunt similia. Ad propos. 24.

26 IN aqualibus circulis inaquales anguli inaqualibus peripherijs insistunt, maior maiori, & minor minori: sine ad centra, sine ad peripherias constituti insistant. Ad propos. 26.

27 IN aqualibus circulis anguli, qui inaqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se inaquales, maior quidem maiori, & minor, qui minori, sine ad centra, sine ad peripherias constituti insistant. Ad propos. 27.

28 DVÆ recta linea, quæ in eodem circulo aquales arcus intercipiunt, se mutuò non secantes, sunt parallelæ. Et contrà, duæ lineæ parallelæ in eodẽ circulo arcus aquales intercipiunt. Ad propos. 27.

29 LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, quæ peripheriam illam subtendit. Ad propos. 27.

30 ANGVLVS rectus in centro insistit quadranti: acutus verò

arcui quadrante minori: & obtusus arcui quadrante maiori. Et contrà, angulus in centro quadranti insistens rectus est: insistens verò arcus quadrante minori, acutus: & arcui quadrante maiori, obtusus. Ad propos. 27.

31 *RECTA linea è centro circuli ducta, secans quandam aliam rectam non per centrum ductam bifariam, secabit & arcum, cui haec recta subtenditur, bifariam. Et contrà, si secet & arcum bifariam, secabit & rectam ei subtensam bifariam.* Ad propos. 27.

32 *SI in circulo, ductis duabus diametris sese ad angulos rectos secantibus, altera earum producatur, eiusque ex vna parte quotquot parallelae agantur diuidentes etiam quadrantem in partes aequales, ac deinde ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctum proximae parallelae recta ducatur conueniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum concursus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis vna cum diametro, qua producta est, simul sumptis, aequalis.* Ad propos. 27.

33 *IN aequalibus circulis inaequales rectae lineae inaequales peripherias auferunt, maior quidem maiorem, & minor minorem, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo: At verò si de segmentis circuli maioribus sermo habeatur, maior minorem, & minor maiorem.* Ad propos. 28.

34 *IN aequalibus circulis, inaequales peripherias inaequales rectae lineae subtendunt, maiorem quidem maior, & minorem minor, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo: At verò si de segmentis semicirculo maioribus loquamur, minorem maior, & maiorem minor.* Ad propos. 29.

35 *CIRCVLI, è quibus aequales rectae lineae auferunt similes circumferentias, aequales sunt.* Ad propos. 29.

36 *EX circulis inaequalibus aequales rectae lineae circumferentias dissimiles auferunt.* Ad propos. 29.

37 *EX circulis inaequalibus linea recta, quae circumferentias similes auferunt, inaequales sunt.* Ad propos. 29.

38 *RECTAE lineae, quae ex quibuscunque circulis circumferentias similes inaequales auferunt, inaequales sunt.* Ad propos. 29.

39 *SI in diametro circuli praeter centrum punctum sumatur, ab eoque in peripheriam duae rectae non in eadem partes cadentes efficiant ad diametrum angulos aequales: Rectae illae lineae aequales erunt, & arcus abscindent aequales. Et si lineae sint aequales, constituent ad diametrum angulos aequales, abscindentque aequales arcus. Si denique arcus aequales abscindant, erunt rectae illae aequales, constituentque ad diametrum angulos aequales.* Ad propos. 29.

40 *SI in diametro circuli praeter centrum sumatur punctum quodpiam, in quo ad eandem partes duo anguli aequales constituantur, insistent*

ſiſtient hi anguli arcubus inæqualibus, maiorq; erit ille, qui à minori portione diametri remotior eſt. Ad propoſ. 29.

41 *ANGVLVS trianguli, qui reliquis duobus æqualis exiſtit, rectus eſt.* Coroll. propoſ. 31.

42 *SEGMENTVM circuli, in quo angulus conſtitutus eſt rectus, eſt ſemicirculus: in quo verò angulus eſt acutus, eſt ſegmentum maius: & in quo angulus eſt obtuſus, eſt ſegmentum minus: Et ſegmentum, cuius angulus recto eſt maior, eſt ſemicirculo maius, cuius verò angulus eſt recto minor, eſt vel ſemicirculus, vel ſemicirculo minus.* Ad propoſ. 31.

43 *SI angulo recto linea recta ſubtenſa, hoc eſt, ſi in triangulo rectangulo latus recto angulo oppoſitum, bifariam ſecetur, & ex puncto diuiſionis circa illam rectam, vel latus illud circulus deſcribatur: tranſibit neceſſariò circulus ille per angulum rectum.* Ad propoſ. 31.

44 *A dato puncto extra circulum, rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.* Ad propoſ. 31.

45 *SI per centrum circuli alius circulus deſcribatur, & per vtriuſque circuli centrum recta ejiciatur, à puncto verò, vbi hæc recta à poſteriori circulo ſecatur, ducatur recta vtcunque, ſecabitur eius portio intra priorem circulum à circumferentia poſterioris biſariam.* Ad propoſ. 31.

46 *QVADRILATERVM in circulo deſcriptum, cuius duo latera oppoſita ſunt parallela, & æqualia, parallelogrammum eſt rectangulum, hoc eſt, vel quadratum, vel altera parte longius.* Ad propoſ. 31.

47 *SI linea recta ducta ad extremitatem linea circulum ſecantis fecerit cum ipſa angulos æquales iis, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis: Linea ducta circulum tanget.* Ad propoſ. 32.

48 *SI duæ rectæ ſeſe ſecent, vt rectangulum ſub vtrius ſegmentis comprehenſum, æquale ſit ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo: deſcribi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc eſt, circulus per qualibet tria puncta earum extrema deſcriptus, per quartum quodque punctum tranſibit.* Ad propoſ. 35.

49 *SI à puncto quouis extra circulum aſſumpto plurima linea rectæ circulum ſecantes ducantur: Rectangula comprehenſa ſub totis lineis, & partibus exterioribus inter ſe ſunt æqualia.* Coroll. 1. propoſ. 36.

50 *DVÆ rectæ linea ab eodem puncto ductæ, quæ circulum tangant, inter ſe ſunt æquales.* Coroll. 2. propoſ. 36.

51 *AB eodem puncto extra circulum aſſumpto, duci tantum poſſunt duæ lineæ, quæ circulum tangant.* Coroll 3. propoſ 36

51 *SI duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in connexam peripheriam*

viam incidant, & earum vna circulum tanget, altera quoq; circulum tanget. Coroll. 4. propos. 36.

52 *SI à puncto aliquo bina linea recta finita egrediantur, quæ item secentur in binas partes, & rectangula sub totis, & segmentis propè punctum comprehensa sint æqualia; describi poterit per extrema puncta aliorum segmentorum circulus, hoc est, circulus per tria puncta extrema aliorum segmentorum descriptus, per quartum etiam punctum extremum transibit.* Ad propos. 36.

53 *DATIS duabus rectis sive æqualibus, sive inæqualibus, alteri earum rectam adiungere, & rectangulum sub tota composita, & adiuncta comprehensum, quadrato alterius sit æquale.* Ad prop. 36.

54 *SI à puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum tangentes ducantur, aut duæ lineæ vsque ad connexam peripheriam inter se æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circuli ejecta angulum ab eis comprehensum diuidit bifariam. Et contrà. Linea recta angulum ab eis comprehensum diuidens bifariam, per centrum circuli transibit.* Ad propos. 37.

IN QVARTO LIBRO.

1 *IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ linea, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.* Ad propos. 1.

2 *IN omni triangulo, si circulum inscribatur, duo qualibet latera superant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ab angulo illi lateribus comprehenso in cauam peripheriam ducta, & sub eius segmento exteriore. Quod si angulus comprehensus sit rectus, superabunt illa duo latera latus recto angulo oppositum diametro circuli triangulo inscripti.* Ad propos. 4.

3 *SI circulo circa triangulum descripto, centrum intra triangulum cadat, triangulum est acutangulum: Si verò in vnum latus trianguli, rectangulum: Si deniq; extra triangulum obtusangulum.* Coroll. propos. 5.

4 *CENTRVM circuli circa triangulum acutangulum descripti intra triangulum cadit: circa rectangulum verò, in latus recto angulo oppositum: circa obtusangulum deniq;, extra triangulum.* Coroll. propos. 5.

5 *PER data tria puncta non in vna recta linea existentia circulum describere.* Ad propos. 5.

6 *SI circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo quadratum inscribatur. Erit quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum.* Ad propos. 9.

7 *IN triangulo Isoscele, cuius vterq; angulorum æqualium reliqui duplus est: Angulus æqualibus lateribus comprehensus, quin-*

ta pars eſt duorum rectorũ, vterlibet autem æqualium, duæ quintæ partes. Item ille duæ quintæ partes vnius rectæ continet, vterlibet autem horum quatuor quintæ partes. Coroll. propoſ. 10.

8 *SI recta linea ſecetur, vt propoſ. 11. lib. 2. traditum eſt: iſoſceles triangulum, cuius baſis maiori ſegmento æqualis eſt, vtrumuis verò laterum æqualium ipſi datæ lineæ æquale, habet vtrumlibet angulorum æqualium duplum reliqui.* Ad propoſ. 11.

9 *ANGVLVS pentagoni æquilateri, & æquianguli complectitur tres quintas partes duorum rectorum, vel ſex quintas vnius recti.* Coroll. propoſ. 11.

10 *SVPER datam rectam lineam terminatam Pentagonum æquilaterum, & æquiangulum conſtituere.* Ad propoſ. 11.

11 *SI in circulo quacunq; figura æquilatera, & æquiangula deſcribatur, & ad extrema ſemidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: Hæ perpendiculares conſtituent aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualiũ circulo circumſcriptam.* Coroll. propoſ. 12.

12 *IN figura æquilatera, & æquiangula, ſi quidem angulorum numerus impar eſt: Recta linea ex quouis angulo demiſſa ſecans oppoſitum latus bifariam, diuidit quoq; angulum bifariam: Et contrà, recta linea diuidens angulum bifariam ſecat quoq; latus oppoſitum bifariam. Si verò numerus angulorum eſt par, Recta linea ex quouis angulo ad oppoſitum angulum ducta, ſecat vtrumque angulum bifariam: Et contrà, Recta linea ſecans quemuis angulum bifariam cadit in oppoſitum angulum, eumque bifariam quoque diuidit.* Ad propoſ. 12.

13 *LATVS hexagoni æquale eſt ſemidiametro circuli, in quo deſcribitur.* Coroll. propoſ. 15.

14 *ISOSCELES triangulum oxygonium conſtituere, cuius tertium latus vtrouis æqualium maius ſit.* Ad propoſ. 15.

15 *SI in circulo ab eodem puncto inſcribantur duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum: Continebit arcus inter illa latera inclusus tot latera alterius figuræ inſcribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter ſe differunt denominatores eorundem laterum. Continebit autem figura inſcribenda tot latera, angulosq; æquales, quot vnitates ſunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.* Ad propoſ. 16.

16 *OMNIS figura æquilatera circulo inſcripta, æquiangula quoque eſt: at non omnis figura æquilatera circulo circumſcripta neceſſariò æquiangula quoque eſt, niſi quando numerus angulorum ipſius eſt impar, vel ſi par eſt, quando duo anguli proximi æquales ſunt, vel duo non proximi, dummodo vno eorum primo poſito, alter occupet locum parem quemcunq;, vt quartum ab eo, vel ſextum, aut ſeptimum, decimum, &c.* Ad propoſ. 16.

17 *OMNIS figura æquiangula circulo circumſcripta, eſt etiam*

æquilatera: at non omnis figura æquiangula circulo inſcripta, neceſſario æquilatera quoque eſt, niſi quando numerus laterum ipſius eſt impar; vel ſi par eſt, quando duo latera proxima æqualia ſunt, vel duo non proxima, dummodo vno eorum poſito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, vt quartum ab eo, vel ſextum, octauum, decimum, duodecimum, &c. Ad propoſ. 16.

18 *IMPARIVM laterum figura inſcribuntur in circulo beneficio Iſoſcelium triangulorum, quorum anguli æquales ad baſim multiplices ſunt eorum, qui ad verticem ſunt, angulorum. Parium verò laterum figura inſcribuntur beneficio triangulorum Iſoſcelium, quorum anguli ad baſim æquales, multiplices ſeſquialteri ſunt eorum, qui ad verticem ſunt angulorum.* Ad propoſ. 16.

19 *FIGVRAM quamcunque æquilateram, & æquiangulam in circulo practicè deſcribere, ſine ope triangulorum Iſoſcelium præductorum.* Ad propoſ. 16.

20 *FIGVRAM quamcunque æquilateram, & æquiangulam ſupra datam rectam practicè deſcribere.* Ad propoſ. 16.

21 *LATERA pentagoni, & decagoni in circulo deſcribendorum, vna eademq; operâ inuenire.* Ad propoſ. 16.

22 *SI bifaria ſectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inſcripta erit figura æquilatera quoq;, & æquiangula totidem laterum in illa figura, idem centrum habens.* Ad propoſ. 16.

23 *INTER omnes figuras æquilateras, & æquiangulas, ſolum triangulum, quadratum, & hexagonum, locum replere poſſunt.* Ad propoſ. 16.

IN QVINTO LIBRO.

1 *TRACTATVS de proportionibus, & proportionalitatibus copioſiſſimus.* Ad defin. 4.

2 *ANGVLVM curuilineum angulo rectilineo exhibere æqualem.* Ad defin. 5.

3 *CVR Euclides in defin. 6. & 8. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales, per earum æquè multiplicia definierit.* Ad defin. 8.

4 *NVMERVS integer cum fractione in ſe multiplicatus producit neceſſariò numerum integrum cum fractione.* Ad defin. 8.

5 *SI quatuor magnitudines fuerint proportionales, & conuertendo proportionales erunt.* Coroll propoſ. 4.

6 *ÆQVALE magnitudines ad æquales eandem habent rationem.* Ad propoſ. 7.

7 *QVÆ eidem ſunt eadem rationes, & inter ſe ſunt eadem.* Ad propoſ. 11.

7 *SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia verò ad quartam, minorem rationem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam, minorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.* Ad propoſ. 13.

9 *SI prima ad ſecundam maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam maiorem habuerit quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam multo magis maiorem rationem habebit quam quinta ad ſextam.* Ad propoſ. 13.

10 *SI prima ad ſecundam minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam minorem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoq; ad ſecundam multo magis minorem rationem habebit, quã quinta ad ſextam.* Ad propoſ. 13.

11 *SI compoſita magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque per Diuiſionem rationis conuerſam proportionales erunt.* Ad propoſ. 17.

12 *SI compoſita magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque per Diuiſionem rationis contrariam proportionales erunt.* Ad propoſ. 17.

13 *SI diuiſa magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque per compoſitionem rationis conuerſam proportionales erunt.* Ad propoſ. 18.

14 *SI diuiſa magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque per compoſitionem rationis contrariam proportionales erunt.* Ad propoſ. 18.

15 *SI quatuor magnitudines fuerint proportionales: Et quoque per conuerſionem rationis proportionales erunt.* Coroll. propoſ. 19.

16 *SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: Habebunt etiam æquè multiplices prima ac tertia ad ſecundam, & quartam, eandem rationem: Item æquè multiplices ſecunda & quarta ad primam, & tertiam, eandem rationem habebunt. Et contra, eandem rationem habebunt ſecunda & quarta ad æquè multiplices prima & tertia: Item prima ac tertia ad æquè multiplices ſecunda & quartæ, rationem habebunt eandem.* Ad propoſ. 22.

17 *SI duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detracta quædam habeant ad eaſdem eandem proportionem: Et reliquæ ad eaſdem eandem proportionem habebunt.* Ad propoſ. 24.

18 *SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt, quam dupla reliqua.* Ad propoſ. 25.

19 *SI prima ad ſecundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam, habebit conuertendo ſecunda ad primam maiorem proportionem, quam quarta ad tertiam.* Ad propoſ. 26.

20 *Si prima ad ſecundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit quoq; vicißim prima ad tertiam, minorem proportionem, quam ſecunda ad quartam.* Ad propoſ. 27.

21 *Si prima ad ſecundam habuerit minorem proportionem quam tertia ad quartam: habebit quoque compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam, minorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam.* Ad propoſ. 28.

22 *Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam habuerit minorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam, habebit quoque dividendo prima ad ſecundam minorem proportionem, quam tertia ad quartam.* Ad propoſ. 29.

23 *Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam habuerit minorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam: habebit per conuerſionem rationis prima cum ſecunda ad primam, maiorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.* Ad propoſ. 30.

24 *Si ſint tres magnitudines, & alia ipſis æquales numero, ſitque minor proportio prima priorum ad ſecundam, quam prima poſteriorum ad ſecundam: item ſecunda priorum ad tertiam minor, quam ſecunda poſteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate, minor proportio prima priorum ad tertiam, quam prima poſteriorum ad tertiam.* Ad propoſ. 31.

25 *Si ſint tres magnitudines, & alia ipſis æquales numero, ſitque minor proportio prima priorum ad ſecundam, quam ſecunda poſteriorum ad tertiam; item ſecunda priorum ad tertiam minor, quam prima poſteriorum ad ſecundam: Erit quoque ex æqualitate, minor proportio prima priorum ad tertiam, quam prima poſteriorum ad tertiam.* Ad propoſ. 32.

26 *Si fuerit minor proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum minor proportio quam totius ad totum.* Ad propoſ. 33.

IN SEXTO LIBRO.

1 *PROPOSITIS quotcunque quantitatibus, proportio prima ad vltimam componitur ex proportionibus omnibus intermediis.* Ad defin. 5.

2 *TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt baſes, æquales habent altitudines, vel eandem.* Ad propoſ. 1.

3 *TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum æquales ſunt baſes, vel eadem, ita ſe habent inter ſe, vt altitudines.* Ad propoſ. 1.

4 *TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt altitudines: æquales habent baſes, ſi vnam & eandem non habeant.* Ad propoſ.1.

5 *LINEA recta, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, aufert triangulum toti triangulo ſimile.* Coroll.propoſ.4.

6 *SI ex duobus punctis cuiuſuis recta, quorum alterum ſit extremum, alterum verò intra lineam, duæ parallelæ inter ſe ad eaſdem partes educantur, ita vt proportionem habeant eandem, quam recta inter ipſas, & alterum extremum punctum inclusa: Recta coniungens extremum vnius earum cum extremo prioris lineæ, tranſibis per extremum alterius lineæ.* Ad propoſ. 4.

7 *SI ex duobus punctis cuiuſuis recta duæ parallelæ educantur in diuerſas partes, habentes eandem proportionem, quam ſegmenta rectæ inter parallelas conterminæ, & aliquod idem punctum intra datam rectam: Recta coniungens extrema puncta parallelarum tranſibit per dictum punctum intra rectam.* Ad propoſ. 4.

8 *SI in triangulo quouis vni lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppoſitum recta educatur linea: dividentur linea parallela, & latus illud in eaſdem rationes.* Ad propoſ.4.

9 *RECTA perpendicularis, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in baſim demittitur, eſt media proportionalis inter duo baſis ſegmenta: Item latus vtrumlibet angulum rectum ambiens, medium proportionale eſt inter totam baſim, & illud ſegmentum baſis, quod dicto lateri adiacet.* Coroll.propoſ.8.

10 *DATAM rectam lineam in partes quotcunque æquales dividere.* Ad propoſ.10.

11 *DATAM rectam ſecare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunque datam.* Ad propoſ.10.

12 *SI duæ rectæ lineæ ſecentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ ſectiones in eadem proportione cum quibuslibet ſegmentis duobus.* Ad propoſ.10.

13 *SI lineæ rectæ ſit ſecta in quotcunque partes Arithmeticæ proportionales, & alia recta ſecetur in totidem partes, quæ eaſdem inter ſe, quas illa, proportiones habeant: Erunt quoque partes huius lineæ Arithmeticæ proportionales.* Ad propoſ.10.

14 *SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem: Erit quoque exceſſus priorum ad exceſſum poſteriorum, vt priorum linearum vna ad vnam poſteriorum.* Ad propoſ. 10.

15 *LINEAM rectam datam, vel numerum, in quotuis partes Arithmeticæ proportionales ſecare.* Ad propoſ. 10.

16 *QVOTLIBET lineas continuè proportionales in data ratione inuenire.* Ad propoſ.11.

17 *IN-*

17 *INTER duas rectas, duas medias proportionales practice inuenire.* Ad propoſ. 11.

18 *DATIS duabus rectis lineis, duas alias in eadem cum illis proportione inuenire.* Ad propoſ 12.

19 *TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ ſit ad tertiam, & prima ad ſecundam.* Ad propoſ. 12.

20 *RECTA linea, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipſi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam & ſque, media eſt proportionalis inter duo diametri ſegmenta, quæ à perpendiculari facta ſunt.* Ad propoſ. 13.

21 *DATA recta linea, aliam rectam (quæ minor non ſit, quam dupla illius) ita ſecare, & vt data recta ſit media proportionalis inter ſegmenta huius.* Ad propoſ. 13.

22 *RECTA linea qualibet eſt media proportionalis inter quaſuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale.* Ad propoſ. 17.

23 *SECTA linea recta in duas partes vtcunque, alterutram earum ita rurſus partiri in duas partes, & omnes tres partes ſint continuè proportionales.* Ad propoſ. 17.

24 *DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Arithmetica proportionalitate inuenire.* Ad propoſ. 17.

25 *DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire.* Ad propoſ. 17.

26 *DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire.* Ad propoſ. 17.

27 *DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire, aliter, quam propoſ. 13. factum eſt.* Ad propoſ 17.

28 *DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire, aliter, quam propoſ. 11. factum eſt.* Ad propoſ. 17.

29 *DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire, aliter, quam propoſ. 11. factum eſt.* Ad propoſ. 17.

30 *DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.* Ad propoſ. 17.

31 *DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Harmonica Medietate inuenire.* Ad propoſ. 17.

32 *DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire.* Ad propoſ. 17.

33 *QVANDO duo numeri proportionem habent dupla maiorem, non poteſt illis adiungi tertius maior in proportionalitate Harmonica.* Ad propoſ. 17.

34 *EX datis quibuſuis duobus numeris, tres numeros Harmonice proper-*

proportionales, quorum extremi eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri, reperire. Ad propoſ. 17.

35 *TRES numeros Harmonice proportionales inuenire, quorum extremi proportionem habeant datam, & medius ſit dato numero æqualis.* Ad propoſ. 17.

36 *DATIS duobus numeris, medium Harmonice proportionalem inuenire.* Ad propoſ. 17.

37 *DATIS duobus numeris, minorem extremum in proportionalitate Harmonica inuenire.* Ad propoſ. 17.

38 *DATIS duobus numeris, maiorem extremum in Harmonica proportionalitate inuenire.* Ad propoſ. 17.

39 *PROPOSITIS tribus terminis Geometrice proportionalibus ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus: Summa ex primo ſemel, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta; ac ſumma conflata ex ſecundo & tertio ſemel; ac tertium ſemel, ſunt Geometrice proportionales.* Ad propoſ. 17.

40 *PROPOSITIS tribus terminis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa ex primo bis, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta; ac ſumma ex primo, ſecundo, & tertio ſemel conflata; ac denique tertium ſemel, ſunt Arithmetice proportionales.* Ad propoſ. 17.

41 *PROPOSITIS tribus terminis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa collecta ex primo bis, ex ſecundo ter, & tertio ſemel; ac ſumma conflata ex ſecundo bis, & tertio ſemel; & denique ſumma ex ſecundo ſemel, & tertio ſemel coacernata, Harmonice proportionales ſunt.* Ad propoſ. 17.

42 *A data recta linea dato rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere, expeditius, quam ab Euclide factum eſt.* Ad propoſ. 18.

43 *SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: erit vt prima ad tertiam, ita triangulum ſuper primam deſcriptum ad triangulum ſuper ſecundam ſimile, ſimiliterque deſcriptum: Item ita triangulum ſuper ſecundam ad triangulum ſuper tertiam ſimile, ſimiliterque deſcriptum.* Coroll. propoſ. 19.

44 *SI fuerint tres rectæ lineæ proportionales: erit vt prima ad tertiam, ita polygonum ſuper primam deſcriptum ad polygonum ſuper ſecundam ſimiliterque deſcriptum: Item ita polygonum ſuper ſecundam ad polygonum ſuper tertiam ſimile, ſimiliterque deſcriptum.* Coroll propoſ. 20.

45 *POLYGONA ſimilia, æquilatera & æquiangula diuiduntur in ſimilia triangula, & numero æqualia, ductis à centris circulorum ipſa circumſcribentium ad omnes angulos rectis lineis.* Ad propoſ. 20.

46 *SI lineæ rectæ duplæ fuerit linea recta, quadratum illius quadruplum eris*

plum erit quadrati huius. Et contra, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius. Ad propoſ. 20.

47 *ÆQVALIA rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta, compoſita ſunt ſuper æquales rectas lineas.* Ad propoſ. 22.

48 *SI fuerint tres rectæ lineæ proportionales: erunt & rectilineæ ſimilia, ſimiliterque deſcripta ab eis, proportionalia. Et ſi à tribus rectis lineis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea proportionalia fuerint: ipſæ etiam rectæ proportionales erunt.* Ad propoſ. 22.

49 *TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent: proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compoſitam.* Ad propoſ. 23.

50 *PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, vel pluribus componere.* Ad propoſ. 23.

51 *PROPORTIONEM minorem ex minore auferre.* Ad propoſ. 23.

52 *TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ ſub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.* Ad propoſ. 23.

53 *PARALLELOGRAMMA inter ſe æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula ſub lateribus ipſorum æqualem angulum continentibus comprehenſa.* Ad propoſ. 23.

54 *TRIANGVLA & parallelogramma in ſe proportionem habent compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum.* Ad propoſ. 23.

55 *DATIS duobus parallelogrammis æquiangulis, ſed non ſimilibus: ex quorum illorum alteri ſimile reſecare.* Ad propoſ. 24.

56 *DATO parallelogrammo, deſcribere aliud maius, aut minus ſimile illi, ſimiliterque deſcriptum.* Ad propoſ. 24.

57 *SI ad rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato: ipſum applicatum æquale eſt rectangulo quod ſub ſegmentis lineæ per applicationem factis continetur.* Ad propoſ. 28.

58 *SI figura, quæ ab vno laterum trianguli deſcribitur, æqualis ſit eis, quæ à reliquis triangulis lateribus deſcribuntur, figuris ſimilibus, ſimiliterque poſitis: Angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt.* Ad propoſ. 31.

59 *SECTOR ad ſectorem eſt, vt angulus ad angulum.* Coroll. 2. propoſ. 33.

60 *ANGVLVS in centro circuli ita eſt ad quatuor rectos, vt arcus illi ſubtenſus ad totam circumferentiam. Et contra. Ita ſe habent quatuor recti ad angulum in centro, vt totum circumferentiæ ad arcum illi angulo ſubtenſum.* Coroll. 2. propoſ. 33.

61 *SIMILIA circulorum ſegmenta, hoc eſt, in quibus anguli ſunt æquales,*

æquales, eandem proportionem habent ad integras circumferentias circulorum. Ad propoſ. 33.

62 *SI duo aut plures circuli ex eodem centro deſcribantur, atque ex centro duæ, aut plures rectæ lineæ ducantur: erunt arcus inter quaſcunque duas lineas intercepti, ſimiles.* Ad propoſ. 33.

63 *ÆQVALES* rectæ lineæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maior autem eſt arcus minoris circuli, & etiam maior, quam ſit ſimilis ſit arcui circuli maioris. Ad propoſ. 33.

64 *A dato* rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, ut & ablatum, & id, quod relinquitur, ſimile ſit cuiuis rectilineo dato, ſimiliterque poſitum. Ad propoſ. 33.

65 *DVOBVS* datis rectilineis, tertium proportionale inuenire. Ad propoſ. 33.

66 *TRIBVS* datis rectilineis, quartum proportionale inuenire. Ad propoſ. 33.

67 *DVOBVS* datis rectilineis, medium proportionale inuenire. Ad propoſ. 33.

68 *DATO* rectilineo duo rectilinea æqualia conſtituere, quæ ſimilia ſint, ſimiliterque deſcripta cuicunque rectilineo, habeantque inter ſe proportionem propoſitam quamcunque. Ad propoſ. 33.

69 *DATO* rectilineo duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo ſimilia ſint, ſimiliterque deſcripta, lateraque eorum homologa habeant inter ſe proportionem datam. Ad propoſ. 33.

70 *DVOBVS* datis rectilineis æquale rectilineum conſtituere, quod ſimile ſit, ſimiliterque poſitum cuiuis rectilineo dato. Ad propoſ. 33.

71 *SI in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecuerint: Erunt ſegmenta* unius *ſegmentis alterius reciproca* Ad propoſ. 33.

72 *SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum ſecantes: Erunt totæ, & ſegmenta extra circulum reciproca. Quod ſi ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat: Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum ſecet, & eius ſegmentum exterius.* Ad propoſ. 33.

73 *SI duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecuerint, & à duobus earum terminis perpendiculares ſibi mutuò demittantur: Erunt duæ lineæ, quarum una inter unum terminorum & ſectionem, altera verò inter ſectionem, & priorus lineæ aſſumpta perpendicularis interiacitur, aliis duabus eodem modo inclusis reciproca.* Ad propoſ. 33.

74 *IN parallelogrammo* duæ rectæ lateribus parallelæ ſe mutuò ſecantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia. Ad propoſ. 33.

75 *OMNE* quadrilaterum à duabus diametris ſe mutuò ſecantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia. Ad propoſ. 33.

76 *IN triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat basem extrema ac media ratione, tria latera sunt continuè proportionalia. Et si tria latera trianguli rectanguli sunt continuè proportionalia, perpendicularis ad basem ex angulo recto demissa secat basem extrema ac media ratione.* Ad propos. 33.

77 *A dato puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, quæ triangulum dimidiat in duo segmenta secundum proportionem datam.* Ad propos. 33.

78 *IMPERATAM partem ex triangulo auferre per lineam rectam, quæ à quouis dato puncto lateris ducitur.* Ad propos. 33.

79 *DATO rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere, maius vel minus, secundum proportionem datam.* Ad propos. 33.

80 *IN dato triangulo quocunque quadratum describere.* Ad propos. 33.

81 *INTRA datum quadratum, aliud quadratum describere in data proportione. Oportet autem datam proportionem duplam non esse maiorem.* Ad propos. 33.

82 *SI ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eisdem extremis per vnum idemque punctum circumferentiæ, duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus: Erit rectangulum comprehensum sub vtralibet secantium, & eius segmento interiore, quadrato diametri æquale.* Ad propos. 33.

83 *SI in circulo duæ diametri sese ad rectos angulos secent, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque secans circumferentiam, & alteram diametrum siue productam, siue non productam: Erit rectangulum comprehensum sub duobus segmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum punctum prioris diametri, & secundam diametrum, alterum verò inter idem punctum extremum, & circumferentiam interiicitur, æquale quadrato intra circulum descripto.*

VEL VNIVERSALIVS.

SI in circulo à quouis puncto diametri ad diametrum perpendicularis excitetur, ad quam ex alterutro terminorum diametri duæ rectæ ducantur, vna ad eius intersectionem in circumferentia, altera verò vt libet, secans circumferentiam in alio puncto: Erit rectangulum sub segmentis huius posteriorus lineæ, quorum vnum sit inter prædictum terminum, & perpendicularem, alterum verò inter eundem terminum, & circumferentiam, æquale quadrato prioris rectæ inter eundem terminum, & circumferentiam, seu perpendicularem intercepta. Ad propos. 33.

84 *DATO circulo, & duobus punctis siue extra circulum, siue intra, duas*

ha, dummodo hæc rectum ſit in circumferentia: per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod unum punctum circumferentiæ, itaq; rectas conjungentes duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam ſecant, parallela ſit rectæ datæ duo puncta connectenti. Ad propoſ. 33.

35 *QVADRATRICEM lineam deſcribere.* Ad finem lib. 6.

36 *SI ex centro per quævis puncta lineæ Quadratricis rectæ ducantur uſque ad circumferentiam Quadrantis ex eodem centro deſcripti, & ex eiſdem punctis ad baſim demittantur perpendiculares, & aliæ rectæ eidem baſi parallelæ: Erunt arcus Quadrantis inter ſemidiametros interiectæ, perpendicularibus, vel ſegmentis ſemidiametri inter parallelas poſitis, proportionales.* Ad finem lib. 6.

37 *DATVM arcum circuli in datam proportionem dividere.* Ad finem lib. 6.

38 *ANGVLVM quemvis rectilineum in duos angulos datam habentes proportionem partiri: atque adeo & quemlibet arcum, & angulum in quotvis partes æquales diſtribuere.* Ad finem lib. 6.

39 *ISOSCELES triangulum conſtituere, cujus uterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam.* Ad finem lib. 6.

40 *OMNES figuras æquilateras in circulo deſcribere.* Ad finem lib. 6.

41 *SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum ſit: erunt arcus Quadrantis, ſemidiameter, & baſis Quadratricis, continuè proportionales* Ad finem lib. 6.

42 *RECTAM cuilibet arcui circuli, ex quo Quadratrix deſcripta eſt, æqualem reperire.* Ad finem lib. 6.

43 *SI baſis Quadratricis ſtatuatur ſemidiameter alicujus circuli: Erit ejus latus Quadranti ejuſdem circuli æquale.* Ad finem lib. 6.

44 *SI duæ rectæ eandem proportionem habeant, quam baſis Quadratricis ad ejus latus, minor autem fiat ſemidiameter alicujus circuli; erit major æqualis Quadranti ejuſdem circuli.* Ad finem lib. 6.

45 *DATO circulo quadratum æquale conſtituere.* Ad finem lib. 6.

46 *DATO quadrato circulum æqualem deſcribere.* Ad finem lib. 6.

47 *RECTILINEO cuicunque circulum æqualem: Et circulo figuram rectilineam æqualem conſtituere, quæ dato rectilineo cuicunque ſimilis ſit, & ſimiliter deſcripta.* Ad finem lib. 6.

48 *DATÆ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.* Ad finem lib. 6.

49 *DATIS duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in uno ejus*

rum: ex altero arcum aqualem abscindere. Oportet autem arcum in maiore circulo datum non esse maiorem circumferentia minoris circuli. Ad finem lib. 6.

IN SEPTIMO LIBRO.

1 *SI duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad assumpta sit Vnitas.* Ad propos. 1.

2 *SI propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Detractio ad Vnitatem vsque non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.* Ad propos. 1.

3 *NVMERVS duos numeros non etiens, metitur quoq; maximam eorum mensuram communem.* Coroll. propos. 2.

4 *PROPOSITIS duobus, aut pluribus numeris, explorare, an sint inter se primi, nec ne.* Ad propos. 2.

5 *NVMERVS tres numeros, vel plures metiens, metitur quoque maximam eorum mensuram communem.* Ad propos. 3.

6 *SI Vnitas numeri partes fuerit, & altera Vnitas, vel numerus alterius numeri eadem pars: Et simul vtraque Vnitas, vel Vnitas, & numerus simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit, qua Vnitas numeri.* Ad propos. 5.

7 *SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum eadem pars: Et omnes omnium simul eadem pars erunt, qua Vnus Vnius.* Ad propos. 5.

8 *SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum æquè multiplices: quam multiplex est Vnus Vnius numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.* Ad propos. 5.

9 *SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eadem partes: Et omnes omnium simul eadem partes erunt, qua Vnus Vnius.* Ad propos. 6.

10 *SI numerus numeri æquè fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.* Ad propos. 7.

11 *SI primus secundum æqualiter contineat, atq; tertius quartum, eandemque insuper partem, vel partes: Erit è contrario secundus primi eadem partes, qua quartus tertij. Et si fuerit primus secundi eadem partes qua tertius quarti: Continebit è contrario secundus primum æqualiter, atque quartus tertium, eandemque insuper partem vel partes.* Ad propos. 11.

22 *QVÆ proportiones numerorum eidem proportioni eadem sunt, inter se quoque sunt eadem.* Ad propos. 14.

23 *SI numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent: Habebunt producti numeri eaſdem rationes, quas numeri multiplicati, vel multiplicantes.* Ad propoſ. 18.

24 *SI maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum: qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero. Et ſi, qui ex primo & quarto fit numerus, maior fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: maior erit proportio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum.* Ad propoſ. 19.

25 *SI maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium: maior fiet numerus ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe. Et ſi maior numerus fiat ex primo in tertium, quam ex ſecundo in ſe: maior erit proportio primi ad ſecundum, quam ſecundi ad tertium.* Ad propoſ. 20.

26 *QVOTLIBET numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſive eadem ſint, ſive diverſæ proportiones, metiuntur æquè totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, tertius tertium, &c.* Ad propoſ. 21.

27 *SI quatuor numeri proportionales ſint: Et convertendo proportionales erunt.* Ad propoſ. 22.

28 *SI compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoque diviſi proportionales erunt.* Ad propoſ. 22.

29 *SI diviſi numeri proportionales ſint: Hi quoque compoſiti proportionales erunt.* Ad propoſ. 22.

30 *SI compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoque per conuerſionem rationis proportionales erunt.* Ad propoſ. 22.

31 *SI primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad ſecundum eandem rationem, quam ſextus ad quartum: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eandem habebit rationem, quam tertius cum ſexto ad quartum.* Ad propoſ. 22.

32 *SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detractis quibuſdam habeant ad eoſdem eandem: Et reliqui ad eoſdem eandem rationem habent.* Ad propoſ. 22.

33 *SI primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum, habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad ſextum: Etiam primus ad compoſitum ſecundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum ſexto.* Ad propoſ. 22.

34 *SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas*

alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem: Habebunt quoque illi omnes simul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales: Habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes simul. Ad propoſ. 22.

25 *QVOTCVNQVE numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi.* Ad propoſ. 24.

26 *NVMERVS, qui ex duobus compoſitus ad vnum illorum primus eſt, ad reliquum quoque eſt primus.* Ad propoſ. 30.

27 *SI duo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem, genitum autem ex ipſis metiatur aliquis non primus numerus, vel certè ad ipſum ſit compoſitus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compoſitus erit.* Ad propoſ. 32.

28 *MAXIMA menſura quotlibet numerorum metitur ipſos per numeros, qui minimi ſunt eandem proportionem cum ipſis habentium.* Coroll. propoſ 35.

29 *DVOS minimos numeros inuenire, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunque numeri dati continuè proportionales.* Ad propoſ. 35.

30 *SI duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, vel minor maiorem, producitur minimus numerus, quem illi metiantur.* Coroll. propoſ. 36.

31 *SI tres, vel plures numeri numerum quempiam metiantur: metietur quoque eundem minimus numerus, quem illi metiantur.* Coroll propoſ. 38.

32 *MINIMVS numerus, quem quotlibet numeri metiuntur, minimus eſt, habens partes à numeris metientibus denominatas.* Ad propoſ. 41.

33 *NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes. hac lege, vt qualibet pars ſubſequentem partem contineat.* Ad propoſ. 41.

IN OCTAVO LIBRO.

1 *SI tres numeri minimi ſint continuè proportionales: erunt extremi eorum quadrati: Si autem fuerint quatuor, erunt cubi, &c.* Coroll. 1. propoſ. 2.

2 *EXTREMI numeri proportionalium quotcunque ſecundum doctrinam propoſ. 2. inuentorum, in data ratione minimorum, inter ſe primi ſunt.* Coroll. 2. propoſ. 2.

3 *DVO numeri minimi in data ratione, metiuntur omnes medios quotcunque inter numeros in eadem ratione.* Coroll. 3. propos. 2.

4 *SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex: neque alius quisquam vllius multiplex erit.* Ad propos. 6.

5 *SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales primus verò secundum metiatur: & quicunque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex: & quicunque alius cuiuslibet sequentium multiplex erit.* Ad propos. 6.

6 *SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam nullum à secundo metiatur: neque primus secundum metietur. Et si primus, vel alius quisquam nullius à secundo sit multiplex: neque primus secundi multiplex erit.* Ad propos. 6.

7 *SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet à secundo metiatur: metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quisquam cuiuslibet à secundo sit multiplex: primus quoque secundi multiplex erit.* Ad propos. 7.

8 *INTER numeros dupla proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis, non potest cadere numerus medius proportionalis.* Ad propos. 8.

9 *MVSICVM intervallum, quod Diapason appellatur, bifariam secari non potest in duas proportiones aequales. quod etiam de Tono dicendum est.* Ad propos. 8.

10 *DIAMETER quadrati cuiusuis lateri eiusdem est incommensurabilis.* Ad propos. 8.

11 *SI numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit, & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: erunt omnes producti continuè proportionales ab vnitate.* Ad propos. 9.

12 *SI quotquot numeri fuerint ab vnitate continuè proportionales: secundus ab vnitate in se multiplicatus producit tertium, & ex eodem in hunc fit quartus, & ex eodem in hunc quintus, & sic de ceteris.* Ad propos. 10.

13 *SI sint ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine aequalium: habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab vnitate; quarti verò eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.* Ad propos. 10.

14 *SI sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine aequalium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti verò eiusdem triplicatam, &c.* Ad propos. 10.

15 *SI inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum,*

continuè proportionales ceciderint numeri: quot inter vtrumque ipſorum, & aſſumptum, deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. Ad propoſ. 10.

16 *INTER duos quadratos numeros cadit numerus medius proportionalis in continua proportione lateris ad latus.* Ad propoſ. 11.

17 *NVMERVS medius proportionalis inter duos quadratos, & vterque ipſorum quadratorum, compoſiti inter ſe ſunt.* Ad propoſ. 11.

18 *INTER duos cubos cadunt duo numeri medij proportionales in continua proportione lateris ad latus.* Ad propoſ. 12.

19 *DVO numeri medij proportionales inter duos cubos, & vterque ipſorum cuborum, inter ſe compoſiti ſunt.* Ad propoſ. 12.

20 *SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi ſit multiplex: & vnius lateris alterius multiplex erit. Et ſi vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex: & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si verò quadratus quadrati, & cubus cubi non ſit multiplex: neque latus lateris erit multiplex. Et ſi latus lateris non ſit multiplex: neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.* Ad propoſ. 17.

21 *INTER duos ſimiles planos cadit medius proportionalis in ratione laterum homologorum, per quæ medius proportionalis inquiritur.* Ad propoſ. 18.

22 *NVMERVS medius proportionalis inter duos planos ſimiles, & vterque ipſorum planorum, ſunt inter ſe compoſiti.* Ad propoſ. 18.

23 *INTER duos ſimiles ſolidos cadunt duo medij proportionales in proportione laterum homologorum, per quæ medij proportionales inquiruntur.* Ad propoſ. 19.

24 *DVO numeri medij proportionales inter duos ſolidos ſimiles, & vterque ipſorum ſolidorum, inter ſe ſunt compoſiti.* Ad propoſ. 19.

25 *DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem ſemper numerus, quomodocunque ordinem inter ſe permutent.* Ad propoſ. 19.

26 *PROPORTIO cuiuſuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum, exhiberi nullo modo poteſt in duobus numeris quadratis.* Coroll. propoſ. 24.

27 *NVMERI in dupla proportione vel quintupla proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum.* Coroll. propoſ. 24.

28 *PROPORTIO cuiuſuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum reperiri non poteſt in duobus numeris cubis.* Coroll. propoſ. 25.

29 *NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſimiles plani ſunt.* Ad propoſ. 26.

30 *PLANI*

30 *PLANI numeri non ſimiles, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum* Ad propoſ. 26.

31 *NVMERI, qui proportionem habent quam cubus numerus ad cubum numerum, ſunt ſolidi ſimiles* Ad propoſ. 27.

32 *NVLLI numeri habentes duplam proportionem, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartientem, ſunt ſimiles plani, vel ſolidi* Ad propoſ. 27.

33 *DVO quotus numeri primi, non ſunt ſimiles plani, vel ſolidi.* Ad propoſ. 27.

34 *DVO quicunque numeri inter ſe primi, qui quadrati non ſint, vel cubi (quamuis neuter eorum primus ſit) plani ſimiles non ſunt, vel ſolidi.* Ad propoſ. 27.

35 *DVO numeri plani, vel ſolidi ſimiles, quorum minor ſit primus, minor maiorem numerat.* Ad propoſ. 27.

36 *DVO numeri inter ſe primi, quorum minor primus ſit, non poſſunt eſſe plani, vel ſolidi ſimiles.* Ad propoſ. 27.

37 *DVOS numeros planos, vel ſolidos, non ſimiles inuenire.* Ad propoſ. 27.

IN NONO LIBRO.

1 *SI duo numeri quadrati ſe mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.* Ad propoſ. 1.

2 *SI duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum, alter autem ſit quadratus: Et reliquus quadratus erit.* Ad propoſ. 2.

3 *SI duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem ſit quadratus: Reliquus non quadratus erit.* Ad propoſ. 2.

4 *SI duo numeri, quadratus & non quadratus, ſe mutuo multiplicantes faciant aliquem, Productus non quadratus erit.* Ad propoſ. 2.

5 *SI cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem, Factus non cubus erit.* Ad propoſ 5.

6 *SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum: Et multiplicatus non cubus erit.* Ad propoſ. 5.

7 *SI ab Vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: quilibet maior numerum acceptum tantum diſtabit ab aſſumpto quotus minorem, quantum ab Vnitate abeſt is numerus, per quem minor maiorem metitur.* Ad propoſ 11.

8 *SI ab Vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: quilibet illorum ſeipſum multiplicans produxit numerum, qui tantum ab eo diſtat in numeris proportionalibus, quantum ipſe ab Vnitate. Minor vero quotus maiorem quempiam multipli-*

eam producit numerum, qui tantum à maiore distat, quantum minor ab Vnitate Ad propos. 11.

9 *NVLLVS numerus primus, qui maior sit eo, qui proximus est Vnitati, aut minor proximum Vnitati non metiens, metiri potest Vltimum, vel quemuis maiorem in proportionalibus numeris.* Coroll. propos. 12.

10 *SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi, vel certè ad alterum erit compositus.* Ad propos. 14.

12 *PRIORA* 10. *theorematis secundi libri in numeris demonstrare.* Ad propos. 15.

13 *NVLLVS numerus secari potest in duas partes ita, vt qui sit ex toto in minorem partem, quadrato maioris partis aequalis sit.* Ad propos. 14. & 29.

14 *SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes simul compositi, erunt primi.* Ad propos. 15.

15 *PROPOSITIS quotcunque numeris continuè proportionalibus, an ipsis possit alius proportionalis adiungi, considerare.* Ad propos. 19.

16 *SI sint quatuor numeri proportionales, sed non deinceps, quorum primus & tertius primi inter se sint, fieri non potest, vt detur alius, ad quem ita se habeat quartus, sicut secundus ad tertium.* Ad propos. 19.

17 *PRIMIS numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.* Ad propos. 20.

18 *IMPAR numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus, facit imparem.* Ad propos. 23.

19 *SI par numerus parem, aut seipsum multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.* Ad propos. 28.

20 *IMPAR numerus in se multiplicatus, imparem gignit.* Coroll. propos. 29.

21 *IMPAR numerus numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.* Ad propos. 29.

22 *IMPAR numerus numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.* Ad propos. 29.

23 *NVMERVS impar, qui ad aliquem numerus primus est; Primus quoque est ad eius duplum, quadruplum, octuplum, & sic deinceps per proportionem duplam progrediendo.* Coroll. propos 31.

24 *NVMEROS omnes pariter tantum pares inuenire.* Ad propos. 32.

25 *NVME-*

28 *NVMEROS omnes pariter tantùm impares inuenire.* Ad propoſ. 33.

29 *NVMEROS omnes, qui & pariter pares ſint & pariter impares inuenire.* Ad propoſ. 34.

30 *QVOTCVNQVE numerorum continuè proportionalium, quorum primus, ſecundus, & vltimus noti ſunt, ſummam inuenire.* Ad propoſ. 35.

31 *NVMEROS omnes perfectos, & eorum partes aliquotas inuenire.* Ad propoſ. 36.

32 *QVOLIBET numero per duos quoſuis numeros diuiſo; Erunt duo ho numeri Quotientibus conuerſo ordine proportionales.* Ad propoſ. 36.

33 *QVOLIBET numero per quotuis numeros diuiſo: Erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus reſpondentibus conuerſo ordine proportionales.* Ad propoſ. 36.

34 *QVOLIBET numero per quotuis numeros continuè proportionales diuiſo; Erunt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continuè proportionales.* Ad propoſ. 36.

35 *SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus: Erit vt ſumma priorum ad quemlibet eorum, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illis in poſterioribus reſpondet:* Ad propoſ. 36.

36 *SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus: Summa priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diuiſa facit.* Ad propoſ. 36.

37 *SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur, & Quotientum ſumma per ipſos Quotientes: & horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes, & ſic deinceps in infinitum: Procreabuntur alterius ſemper ijdem primi Quotientes ordine conuerſo.* Ad propoſ. 36.

38 *SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur: Erit ſumma omnium Quotientum aqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis aqualiter diſtantium, vel denique (ſi Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe.* Ad propoſ. 36.

39 *SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium, quorum numerus ſit impar, per eos ſigillatim diuidatur: Erit ſumma omnium Quotientum numerus quadratus, cuius latus, ſiue radix eſt medius terminus.* Ad propoſ. 36.

40 *NVMEROS quotcunque in data ratione continuè proportio-*

nales reperire, quorum omnium summa aqualis sit numero, quæ ex prima in vltimum gignitur, vel ex quibusuis duobus, qui ab extremis æqualiter distant. Ad propos. 36.

38 *DVOS numeros in data proportione reperire, quorum summa aqualis sit numero producto ex vno in alterum.* Ad propos. 36.

39 *MINVTIARVM, siue numerorum fractorum proprietates, operationesq; varias demonstrare.* Ad finem lib. 9.

40 *PROPORTIONVM compositionem, contra quosdam Recentiores, explicare.* Ad finem lib. 9.

IN DECIMO LIBRO.

1 *SI duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.* Ad propos. 2.

2 *SI duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quadam reliqua præcedentem.* Ad propos. 2.

3 *MAGNITVDO metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.* Coroll. propos. 3.

4 *AN quotlibet magnitudines propositæ sint commensurabiles, nosse, considerare.* Ad propos. 3.

5 *MAGNITVDO metiens quotlibet magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.* Coroll. propos. 4.

6 *SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua bina magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines, & numeri.* Ad propos. 4.

7 *MAGNITVDINES commensurabiles proportionem habent eandem, quam numeri, per quos earum communis mensuræ maxima ipsas metitur.* Ad propos. 5.

8 *LINEAM rectam inuenire, ad quam ita se habeat quauis alia data recta linea, vt numerus ad numerum: Item rectam, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum* Coroll. propos. 6.

9 *SI sint quotuis quantitates continuè proportionales, & aliæ totidem continuè quoq; proportionales, sitq; vt prima illarum ad vltimam, ita prima harum ad vltimam: Erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.* Ad propos. 8.

10 *RECTÆ linea, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt: Quæ verò potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles:*

Quæ verò potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt. Coroll. propos 9.

11 *DIAMETER quadrati cuiusuis lateri eiusdem incommensurabilis est.* Ad propos *9*.

12 *DVOS numeros planos inuenire, qui proportionẽ non habeant, quam quadratus numerus ad numerum quadratum.* Ad prop. 10.

13 *QVOTLIBET numeros inuenire, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.* Ad propos 10.

14 *RECTA media proportionalis inter duas rectas potentia tantùm commensurabiles, vtrilibet illarum incommensurabilis est longitudine & potentia.* Ad propos.11.

15 *SI sint duæ magnitudines incommensurabiles, altera verò sit cuicunque commensurabilis: erit & reliqua eidem commensurabilis.* Ad propos *12*.

16 *QVÆ incommensurabilibus sunt commensurabiles: & inter se incommensurabiles erunt.* Ad propos.14.

17 *DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, quàm minor. Item datis duabus rectis lineis æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.* Ad propos.14.

18 *SI totum magnitudo ex duabus compositus commensurabilis sit alteri ipsarum: eadem & reliqua commensurabilis est.* Coroll. propos.*16*.

19 *SI totum magnitudo ex duabus compositus, incommensurabilis sit alteri ipsarum: eadem & reliqua incommensurabilis est.* Coroll. propos. 17.

20 *DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrato ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.* Ad propos.17.

21 *DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quàm quadratum à dimidia linea descriptum.* Ad propos.17.

22 *SI sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata: Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.* Ad propos.17.

23 *QVOTCVNQVE lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles inuenire.* Ad propos. 19.

24 *RATIONALES linea non solùm expositæ Rationali, sed etiam inter se sunt commensurabiles.* Ad propos.19.

25 *SI sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratũ quod fit à prima, ad rectangulum quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.* Ad propos.*19*.

26 *SPATIVM Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt.* Ad propoſ. 19.

27 *RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt* Ad propoſ. 21.

28 *DVAS aut plures quotcunque lineas Rationales potentia tantùm inter ſe commenſurabiles inuenire.* Ad propoſ. 21.

29 *PROPOSITIS quotcunque Rationalibus lineis potentia ſolùm commenſurabilibus, inuenire adhuc aliam quæ omnibus illis commenſurabilis ſit potentia tantùm* Ad propoſ. 21.

30 *LINEA media proportionalis inter duas Rationales potentia tantùm inter ſe commenſurabiles, Irrationalis eſt, quæ* ℣ocatur *Media.* Ad propoſ. 22.

31 *OMNE ſpatium Medium æquale eſt cuidam alteri rectangulo contento ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, ſi ipſum ſub talibus tam non contineatur.* Ad propoſ. 22 & 23.

32 *SPATIVM Medio ſpatio commenſurabile, Medium eſt.* Ad propoſ. 24.

33 *DVAS rectas Medias longitudine commenſurabiles: Item duas potentia tantùm commenſurabiles inuenire.* Ad propoſ. 24.

34 *RECTANGVLVM ſub duabus Mediis longitudine* & *potentia incommenſurabilibus contentum, neque Rationale eſt, neque Medium, ſed æquale alteri cuipiam rectangulo, quod continetur ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.* Ad propoſ. 26.

35 *RATIONALE ſuperat Rationale Rationali.* Ad propoſ. 27.

36 *DVOS numeros planos ſimiles inuenire.* Ad propoſ. 29.

37 *DVOS numeros quadratos inuenire, ita* ℣*t compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit.* Ad propoſ. 29.

38 *DVOS numeros quadratos inuenire, quorum exceſſus ſit numerus quadratus.* Ad propoſ. 29.

39 *DVOS numeros quadratos inuenire, quorum exceſſus non ſit numerus quadratus.* Ad propoſ. 29.

40 *DVOS numeros quadratos inuenire, ita* ℣*t compoſitus ex ipſis non ſit quadratus.* Ad propoſ. 29.

41 *DVOS numeros inuenire, ita* ℣*t ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum.* Ad propoſ. 29.

42 *SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, erit* ℣*t maior ad minorem, ita rectangulum ſub ipſis contentum, ad quadratum minoris. Et* ℣*t minor ad maiorem, ita rectangulum ſub ipſis ad quadratum maioris.* Ad propoſ. 31.

43 *SI ſint tres lineæ rectæ, erit* ℣*t prima ad tertiam, ita rectangulum ſub*

ſub prima & ſecunda contentum, ad id, quod ſub ſecunda & tertia continetur. Ad propoſ. 32.

44 *SI recta linea ſecetur in duas partes inæquales: erit vt vna pars ad alteram, ita rectangulum ſub tota & illa parte, ad rectangulum ſub tota & hac altera parte contentum.* Ad propoſ. 33.

45 *SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, vna autem ſecetur bifariam: erit rectangulum ſub ipſis contentum, duplum rectanguli, quod ſub inſecta linea, & dimidia parte lineæ ſectæ continetur.* Ad propoſ. 33.

46 *FIERI poteſt, vt duo ſpatia Irrationalia componant ſpatium Rationale.* Ad propoſ. 34.

47 *DVO ſpatia Rationalia Rationale ſpatium componunt.* Ad propoſ. 34.

48 *INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommenſurabiles* Ad propoſ. 36.

49 *QVOD ſub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale eſt* Ad propoſ. 38.

50 *SI recta linea non bifariam ſecetur, erit compoſitum ex quadratis partium maius, quam rectangulum ſub partibus bis comprehenſum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem ſuperat.* Ad propoſ. 39.

51 *SI recta linea in partes inæquales ſecetur, & rurſus in alias partes inæquales: erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul maiora quadratis partium minus inæqualium ſimul.* Ad propoſ. 42.

52 *SI recta linea ſecta ſit vtcunque: erit rectangulum ſub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum contentum ſub tota, & vna parte medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.* Ad propoſ. 54.

53 *EI, quæ eſt ex binis nominibus, potentia tantùm commenſurabilis, & ipſa ex binis nominibus eſt, ſed non ſemper ordine eadem.* Ad propoſ. 67.

54 *EI, quæ eſt ex binis Mediis, potentia tantùm commenſurabilis, & ipſa ex binis Mediis eſt, atq; ordine eadem.* Ad propoſ. 68.

55 *RECTA linea, quæ ex binis nominibus, & reliqua Irrationales per compoſitionem factæ ipſum ſubſequentes, neque ipſi Mediæ, neque inter ſe eadem ſunt.* Ad propoſ. 73.

56 *RECTA linea media proportionalis ſecundum Analogiam Arithmeticam inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, quæ per compoſitionem fit, eſt quoque Irrationalis eadem illis, inter cuius nomina media exiſtit.* Ad propoſ. 73.

57 *SI a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.* Ad propoſ. 74.

58 *SI à maiori nomine eius, qua ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Media Apotome prima.* Ad propos. 75.

59 *SI à maiori nomine eius, qua ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est: Vocetur autem Media Apotome secunda.* Ad propos. 76.

60 *SI à maiori nomine linea Maioris minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.* Ad propos. 77.

61 *SI à maiori nomine eius, qua Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.* Ad propos. 78.

62 *SI à maiori nomine eius, qua bina Media potest minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.* Ad propos. 79.

63 *SI idem excessus sit inter primam magnitudinem & secundam, qui inter tertiam magnitudinem & quartam, erit vicissim idem excessus inter primam magnitudinem & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam: Ac proinde Quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habent quoque vicissim Arithmeticam Analogiam.* Ad propos. 79.

64 *RECTA linea Apotome potentia tantum commensurabilis, & ipsa Apotome est, sed non semper ordine eadem.* Ad propos. 104.

65 *APOTOME, & cætera ipsam consequentes Irrationales lineæ per detractionem facta, neq; ipsi Mediæ, neq; inter se sunt eadem.* Coroll. propos. 112.

66 *FIERI potest, vt spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus.* Coroll. propos. 115.

67 *NON solùm linea, sed magnitudines etiam plana, ac solida incommensurabiles esse possunt.* Ad propos. 117.

IN VNDECIMO LIBRO.

1 *A puncto in sublimi ad subiectum planum duo recta linea ad angulos rectos non demittentur.* Ad propos. 13.

2 *SI fuerint duo plana parallela: Recta linea, qua ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoq; recta erit.* Ad propos. 14.

3 *DATO plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.* Ad propos. 15.

4 *QVÆ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela: Vel si concurrunt, vnum planum efficiunt.* Ad propos. 16.

5 *SI in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea vna vnius anguli, linea vni alterius anguli parallela: Erit quoq; altera linea alteri lineæ parallela, si modo ducta sint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti.* Ad prop. 16.

6 *SI duæ, aut plures lineæ rectæ in uno plano existentes secẽtur quotcunq; lineis parallelis: Segmenta illarum linearum inter parallelas proportionalia erunt.* Ad propoſ.17.

7 *DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas: parallela sunt. Et duorum planorum parallelorum, si unum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum.* Ad propoſ.18.

8 *PER rectam in plano quouis datum, planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum.* Ad propoſ.18.

9 *SI Prisma quodcunq; secetur plano aduersis planis parallelo; erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.* Ad propoſ.25.

10 *SI Prisma quodcunq; secetur plano aduersis planis parallelo: sectio erit figura aqualis, & similis planis oppositis.* Coroll. propoſ.25.

11 *SOLIDA parallelepipeda aqualia super eandem basim, siue insistentes linea in eisdem collocentur rectis, siue non: in eadem sunt altitudine.* Ad propoſ.30.

12 *SOLIDA parallelepipeda aqualia super aquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda aqualia in eadem altitudine, super aquales sunt bases, si non habuerint basim eandem.* Ad propoſ 31.

13 *SI solida parallelepipeda inter se sunt, ut bases: ipsa erunt sub eadem altitudine.* Ad propoſ.32.

14 *SI fuerint quatuor linea rectæ proportionales continuè: ut est prima ad quartam, ita erit parallelepipedum super primam descriptum, ad parallelepipedum simile, similiterq; descriptum super secundam.* Coroll propoſ 33.

15 *PRISMATA, quorum bases sunt triangula super eandem basim, uel aquales, & in eadem altitudine, sunt inter se aqualia.* Ad propoſ.34.

16 *PRISMATA, quorum bases sunt triangula, sub eadem altitudine; inter se sunt, ut bases.* Ad propoſ.34.

17 *PRISMATA similia, quorum bases sunt triangula, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.* Ad propoſ.34.

18 *PRISMATVM aqualium, quorum bases sunt triangula, bases & altitudines reciprocantur. Et quorum prismatum triangulares bases habentium bases & altitudines reciprocantur, illa sunt aqualia.* Ad propoſ.34.

19 *SI fuerint duo anguli plani aquales, quorum uerticibus sublimis recta linea aquales insistant, qua cum lineis primo positis angulos contineant aquales, utrumque utrique: Erunt à punctis extremis linearum sublimium ad plana angulorum primo positorum demissa perpendiculares inter se aquales.* Coroll. propoſ.35.

20 *SI*

20 *SI parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, aquale fuerit parallelepipedo sibi aquiangulo à media linea descripto: Erunt tres recta linea continuè proportionales.* Ad propos. 36.

21 *SI fuerint tres recta proportionales, erunt & parallelepipeda similia, similiterq; descripta ex eis, proportionalia. Et si tria solida parallelepipeda, qua & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: & ipsa tres recta linea proportionales erunt.* Ad propos. 37.

22 *SI quatuor recta linea proportionales fuerint: Et prismata triangulares bases habentia, qua ab ipsis similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si prismata triangula bases habentia, qua & similia, similiterq; describuntur, fuerint proportionalia. Et ipsa recta linea proportionales erunt.* Ad propos. 37

23 *SI fuerint tres recta proportionales, erunt & prismata triangulares bases habentia, qua ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia. Et si tria prismata triangulares bases habentia, qua & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsa tres recta linea proportionales erunt.* Ad propos. 37.

24 *IN omni parallelepipedo diametri se mutuò bifariam secant in uno puncto.* Coroll. propos. 39.

25 *SI solidum parallelepipedum plano secetur per centrum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum.* Ad propos. 39.

IN DVODECIMO LIBRO.

1. *CIRCVLVS ad circulum est, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum.* Coroll. propos. 2.

2. *SI pyramides triangulares inter se sint, vt bases: ipsæ erunt sub eadem altitudine.* Ad propos. 5.

3. *PYRAMIDES triangulares eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constitutæ: sunt inter se æquales. Et pyramides triangulares æquales super eandem, vel æquales bases: eandem habent altitudinem. Item pyramides triangulares æquales, eandemq; habentes altitudinem: bases habent æquales, si non habuerint eandem.* Coroll. propos. 5.

4. *PYRAMIDES quarumlibet basium, qua inter se sunt, vt bases: eandem habent altitudinem.* Ad propos. 6

5. *PYRAMIDES eiusdem altitudinis super æquales bases quaslibet, vel super eandem constitutæ: sunt inter se æquales. Et pyramides æquales super æquales bases quaslibet, vel super eandem constitutæ: eandem habent altitudinem. Item pyramides quarumli-*

cumlibet baſium æquales, eandemq; habentes altitudinem: æquales habent baſes, ſi non habuerint eandem. Coroll. propoſ. 6.

6 *PYRAMIS qualibet tertia pars eſt priſmatis, quod eandem habet & baſim, & altitudinem; Siue, Priſma quodlibet triplum eſt pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & baſim, & altitudinem.* Coroll 1 propoſ 7.

7 *PYRAMIS qualibet tertia pars eſt Priſmatis, quod æqualem habet & baſim, & altitudinem, licet baſis vnius plura vel pauciora latera contineat, quam baſis alterius.* Ad propoſ 7.

8 *PRISMATA ſub eadem altitudine, quæſcunque habeant baſes: inter ſe ſunt, vt baſes Et priſmata quarumcunq; baſium, ſi inter ſe ſint, vt baſes: ſub eadem ſunt altitudine* Ad propoſ. 7.

9 *PRISMATA eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes quæſcunque: inter ſe ſunt æqualia. Et Priſmata æqualia ſuper æquales baſes quæſcunque, vel ſuper eandem: in eadem ſunt altitudine.* Coroll. 2. propoſ. 7.

10 *PYRAMIDES ſimiles, quarum baſes plura latera, quàm tria, continent: proportionem habent homologorum laterum triplicatam.* Coroll. propoſ. 8.

11 *PRISMATA ſimilia quarumcunq; baſium: proportionem habent laterum homologorum triplicatam.* Ad propoſ. 8.

12 *PYRAMIDES multangula ſimiles diuiduntur in pyramides triangulares ſimiles, & numero æquales, & homologas totis.* Ad propoſ. 8.

13 *PRISMATA multangula ſimilia diuiduntur in priſmata ſimilia triangulares baſes habentia, & numero æqualia, & homologa totis.* Ad propoſ. 8.

14 *PYRAMIDVM æqualium quæſcunque baſes habentium, reciprocantur baſes, atq; altitudines. Et quarum pyramidũ quæſcunq; baſes habentium, reciprocantur baſes, atq; altitudines: illa ſunt æquales.* Ad propoſ. 9.

15 *PRISMATVM quorumlibet æqualium reciprocantur baſes, & altitudines Et quorum priſmatum baſes, atq; altitudines reciprocantur, illa inter ſe ſunt æqualia.* Ad propoſ 9.

16 *OMNIS conus ſiue rectus, ſiue ſcalenus, tertia pars eſt cuiuslibet cylindri, ſiue recti, ſiue ſcalenis, eandem cum ipſo & baſim, & altitudinem habentis, licet non ſit idem axis coni, & cylindri.* Ad propoſ. 10.

17 *CONI, & cylindri ſub eadem altitudine, ſiue ambo ſint recti, ſiue ſcaleni; ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus: inter ſe proportionem habent, quam baſes.* Ad propoſ. 11.

18 *Si coni, & cylindri inter ſe ſint, vt baſes: ipſi ſub eadem altitudine erunt.* Ad propoſ. 11

19 *CONI, & cylindri eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æqua-*

let baſes conſtituti, ſint ambo ſint recti, ſive ſcaleni, ſive unus rectus, & alter ſcalenus: inter ſe ſunt æquales. Coroll. propoſ. 11.

20 *CONI, & cylindri æquales ſuper eandem, vel æquales baſes in eadem ſunt altitudine. Et coni, ac cylindri æquales in eadem altitudine ſuper æquales baſes ſunt, ſi non habuerint eandem.* Coroll. propoſ. 11.

21 *CONI, & cylindri ſcaleni ſimiles, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.* Ad propoſ. 12.

22 *CONI, & cylindri ſcaleni ſuper æqualibus baſibus, vel etiam ſi unus ſit rectus, & alter ſcalenus: inter ſe ſunt, ut altitudines.* Ad propoſ. 14.

23 *SVPER æqualibus baſibus priſmata, parallelepipeda, & pyramides; inter ſe ſunt, ut altitudines.* Ad propoſ. 14.

24 *CONI, & cylindri tam recti, quàm ſcaleni: Item priſmata, parallelepipeda & pyramides, ſi ſint, ut altitudines, baſes habent æquales.* Ad propoſ. 14.

25 *CONORVM, & cylindrorum æqualium, ſive ambo ſcaleni ſint, ſive unus rectus, & alter ſcalenus: baſes & altitudines reciprocantur. Et quorum conorum, & cylindrorum ſive ambo ſint ſcaleni, ſive unus rectus & alter ſcalenus, baſes & altitudines reciprocantur: illi ſunt æquales.* Ad propoſ. 15.

26 *SI duobus circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maioris circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribatur minorem circulum non tangens, & ab extremitate unius lateris polygoni inſcripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum perpendicularis ducatur: hæc nullo modo circulum minorem tanget, ſed extra ipſum cadit.* Coroll. propoſ. 16.

27 *DVO polyedra ſimilia in duabus ſphæris deſcripta, proportionem habent triplicatam eius, quam habent ſphærarum diametri.* Coroll. propoſ. 17.

28 *SPHÆRA ad ſphæram eſt, ut polyedrum in illa deſcriptum, ad polyedrum in hac deſcriptum.* Coroll. propoſ. 18.

IN TERTIODECIMO LIBRO.

1 *SI recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentum aſſumens dimidium maioris ſegmenti quintuplum poſſit eius, quod à dimidio maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati: Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione.* Ad propoſ. 3.

2 *SI recta linea inæqualiter ſecetur, ſitque quadratum totius, una cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex maiore ſegmento deſcripti: Recta illa linea extrema ac media ratione ſecabitur.* Ad propoſ. 4.

3 *SI recta linea extrema ac media ratione ſecetur: tota linea aſſumens*

assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati. Et si recta linea inaqualiter secetur, totaque assumens minus segmentum possit quintuplum eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati. Recta illa linea extrema & media ratione secta est. Ad propos. 4.

4 *SI recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahatur q; ex maiori segmento segmentum minus: erit maius segmentum sectum extrema ac media ratione, & minus segmentum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat.* Ad propos. 5.

5 *SI linea secetur extrema ac media ratione, atq; ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: Erit quoq; dimidia totius diuisæ extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius linea.* Ad propos. 5.

6 *SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitq; maius segmentum linea Rationalis: Erit minus segmentum Apotome.* Ad propos. 6.

7 *RECTA, qua angulum Pentagoni aquilateri, & aquianguli subtendit, parallela est opposito lateri.* Ad propos. 8.

8 *SI latus hexagoni in quopiam circulo descripti secetur extrema & media ratione: maius illius segmentum est latus decagoni in eodem circulo descripti.* Ad propos. 9.

9 *SI linea diuisa extrema ac media ratione, maius segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli: Erit minus segmentum latus decagoni eiusdem circuli: Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli, erit maius segmentum latus hexagoni eiusdem circuli.* Ad propos. 9.

10 *LINEA recta, qua ex centro circuli ducta diuidit arcũ quempiam bifariam, diuidit quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos.* Coroll. 1. propos. 10.

11 *DIAMETER circuli ex angulo quouis pentagoni in eo descripti ducta, & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos.* Coroll. propos. 10.

12 *IN dato circulo latera pentagoni, & decagoni ỹna eademq; opera inuenire.* Ad propos. 10.

13 *DIAMETER circuli potentia est sesquitertia lateris trianguli aquilateri in eo circulo descripti.* Coroll. 1. propos. 12.

14 *SI in circulo triangulum aquilaterum describatur: Diameter ex ỹno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos: Semidiameter quoq; vicissim bifariam, & ad angulos rectos secabitur à latere opposito* Ad propos. 12.

15 *SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ sit media proportionalis inter segmenta linea: Semicirculus circa illam linea re-*

dam descriptus, transibit per extremum punctum lineæ perpendicularis. Ad propos. 13.

14 *DIAMETER sphæra potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri circuli circa basim pyramidis in ea sphæra constructa descripti.* Coroll. 1. propos. 13.

15 *LINEA perpendicularis ex centro sphæra ad planum basis pyramidis in ea sphæra constructa demissa, sexta pars est diametri sphæræ, & tertia pars semidiametri.* Coroll. 2 propos. 13.

16 *ALTITVDO pyramidis in sphæra descripta, duas tertias partes diametri sphæra continet.* Coroll. 2. propos. 13.

17 *IN Octaedro tres diametri se mutuò ad angulos rectos secant in centro sphæra: nec non & tria quadrata ex lateribus Octaedri composita se mutuò ad angulos rectos secant.* Coroll. 1. propos. 14.

18 *OCTAEDRVM dividitur in duas pyramides similes, & æquales, quarum basis commune est quadratum ex Octaedri lateribus compositum.* Coroll. 2 propos 14.

19 *SI Tetraedrum, & Octaedrum in eadem sphæra describantur; erit Tetraedri latus potentia sesquitertium lateris Octaedri.* Coroll. 3. propos 14.

20 *BASES Octaedri oppositæ, sunt parallelæ.* Coroll. 4. propos. 14.

21 *OMNES diametri cubi sunt inter se æquales, seseq; mutuò bifariam secant in centro sphæra: nec non & rectæ lineæ, quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt, bifariam in eodem centro dividuntur.* Coroll. 1 propos 15.

22 *POTENTIA diametri sphæra æqualis est potentijs laterum Tetraedri, & cubi simul sumptis.* Coroll. 2. propos. 15.

23 *DIAMETER sphæra potentia est quintupla semidiametri circuli quinq; latera Icosaedri pentagonum constituentis ambientis.* Coroll. 1 propos. 16.

24 *DIAMETER sphæra composita est ex latere hexagoni, hoc est, ex Semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli, qui circa quinq; Icosaedri latera describitur.* Coroll. 2. prop. 16.

25 *ICOSAEDRI latera opposita, sunt parallela.* Coroll. 3. propos. 16.

26 *SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum est latus Dodecaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.* Coroll. 1. propos. 17.

27 *LATVS cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadē sphæra comprehensi.* Coroll. 2. propos. 17.

28 *SI recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum est latus Dodecaedri, maius segmentum est latus cubi eiusdem sphæra.* Coroll. 2. propos 17.

29 *IN Dodecaedro sunt sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos, à tribus li-*

neis

rem rectis aqualibus ſeſe in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos ſecantibus. Coroll. 3. propoſ. 17.

30 *SI recta diuidens oppoſitæ latera Dodecaedri bifariam & ad angulos rectos, ſecetur extrema ac media ratione: maius ſegmentum eſt latus cubi, minus verò latus Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi.* Coroll. 4. propoſ. 17.

31 *PRÆTER quinq; corpora regularia, quæ Euclides hoc lib. 13. conſtruxit, nullum aliud dari poteſt.* Ad propoſ. 18.

32 *QVOTNAM latera, & angulos quoduis Regularium ſolidorum contineat.* Ad propoſ. 18.

33 *CVBVS, & Octaedrum: Item Icoſaedrum, & Dodecaedrum, reciproca ſunt, quod ad numerum baſium, & angulorum ſolidorum attinet: Solum Tetraedrum cum nullo reciprocatur, ſed tot baſes habet, quot angulos ſolidos.* Ad propoſ. 18.

IN QVARTODECIMO LIBRO.

1 *LINEA perpendicularis ducta ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, ſecat arcum, quem dicta hæc linea ſubtendit, bifariam.* Coroll. 1. propoſ. 1.

2 *LINEA perpendicularis ex centro ad latus pentagoni ducta, æqualis eſt ſimul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inſcripti ducitur, perpendiculari, & dimidio lateris decagoni.* Coroll. 2. propoſ. 1.

3 *LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum eandem proportionem habet, quam recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli ad latus ipſius pentagoni.* Ad propoſ. 2.

4 *SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo deſcripti ducta ſecetur extrema ac media ratione: maius ſegmentum æquale eſt perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ducta: minus verò æquale eſt dimidio lateris decagoni in eodem circulo deſcriptorum.* Ad propoſ. 2.

5 *SI in ſphæra eadem cubus, & Dodecaedrum inſcribantur: quadratum lateris cubi, & quadratum lateris Dodecaedri, ſimulque ſimul, quintupla ſunt quadrati ſemidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis.* Coroll. propoſ. 3.

6 *SVPERFICIES cuiuslibet Dodecaedri ad ſuperficiem cuiuſcunque Icoſaedri, etiamſi non deſcribantur amba figura in eadem ſphæra, eſt ſicut rectangulum contentum ſub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum ſub latere Icoſaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icoſaedri in dictum latus.* Coroll. propoſ. 7.

7 *SI ex centro circul triangulum Tetraedri, vel Octaedri, ſive quadratum cubi circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus. Erit, quod ſub dicto latere, & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem ſumptum ſextes, ſuperficies Tetraedri; In Octaedro verò, & cubo, duodecies ſumptum, ſuperficiei Octaedri, & cubi æquale.* Ad propoſ. 7.

8 *RECTANGVLVM comprehenſum ſub perpendiculari ab angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, & ſub quinque ſextis partibus lateris cubi eidem ſphæra, in qua Icoſaedrum, inſcripti, æquale eſt pentagono Dodecaedri in eadem ſphæra conſtituti.* Coroll. propoſ. 8.

9 *QVAM proportionem habent latera cubi, & Icoſaedri eiuſdem ſphæra, eandem habent latera cubi, & Icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum.* Ad propoſ. 10.

10 *SVPERFICIES Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri non ſolùm habet eandem proportionem, quam latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum ipſis, & vult propoſ. 6. huius lib. ſed etiam. quam obtinet latus cubi ad latus Icoſaedri in quacunque alia ſphæra.* Ad propoſ. 10.

11 *SI ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit.* Ad propoſ. 10.

12 *SI planum ſphæram ſecans tranſierit per centrum, efficietur circulus idem centrum habens, quod ſphæra: Si verò planum ſecans per ſphæra centrum non tranſierit, efficietur circulus habens aliud centrum quàm ſphæra, illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro ſphæra ad planum ſecans ducta.* Coroll. propoſ. 10.

13 *CIRCVLI in ſphæra æquales æqualiter diſtant à centro ſphæra. Et circuli æqualiter diſtantes à centro ſphæra, æquales ſunt.* Ad propoſ. 10.

14 *EADEM proportio eſt lateris cubi ad latus Icoſaedri, quæ ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri: Et linea potentiæ totum quamcunq; ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmẽtum maius, ad lineam potentem totum eandem, & minus ſegmentum illius. Et Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæra.* Coroll. propoſ. 11.

15 *LINEA perpendicularis ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppoſitum demiſſa ſecat & angulum, & latus bifariam.* Coroll. propoſ. 12.

16 *OMNE triangulum æquilaterum, cuius latus ſit Rationale, eſt ſuperficies Media.* Coroll. propoſ. 13.

17 *LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad baſim oppoſitum ducta ſeſquialtera eſt eius, quæ inter centrum trianguli, & dictum angulum interijcitur: Hæc autem in-*

ter centrum trianguli, & dictum angulum interiectæ duplæ est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli, ad basim eiusdem ducitur. Coroll. propos. 18.

17 SOLIDVM, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri, sphæra dictum cubum comprehendentis, æquale est cubo. Vel solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partē quadrati diametri sphæræ, æquale est cubo. Coroll. prop. 20.

19 SOLIDVM, quod fit ex perpendicularibus è centro cuiuscunque corporis regularis ad aliquam eius basim ductis, in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est proposito corpori regulari. Ad propos. 20.

20 LINEÆ perpendiculares, coniungentes centra circulorum, quæ bases oppositas tam cubi, quàm Octaedri in eadem sphæra circumscribunt, inter se æquales sunt. Coroll. propos. 21.

21 ALTITVDO Octaedri ad altitudinem Tetraedri eiusdem sphæræ est, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. Coroll. propos. 22.

22 DIAMETER sphæræ ad latus Tetraedri est, vt latus Octaedri ad latus cubi eiusdem sphæræ. Coroll. propos. 22.

23 SI linea quæuis recta secetur extrema ac media ratione, & alia linea potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri: maius segmentum erit latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in qua Octaedrum describitur. Coroll. propos. 25.

24 SI in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppositum: quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale est ipsi triangulo. Coroll. propos. 29.

25 DIAMETER sphæræ potentia est dupla sesquiquartæ axis Tetraedri, seu altitudinis ipsius; atque adeò diameter longitudine est sesquialtera axis, vel altitudinis Tetraedri. Coroll. 2. prop. 31.

26 AXIS, seu altitudo Tetraedri ad latus cubi eidem sphæræ inscripti est, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam. Coroll. 2. propos. 31.

27 PRISMA eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto. Coroll. propos. 32.

IN QVINTODECIMO LIBRO.

1 SI in Tetraedro Octaedrum inscribatur, dividetur Tetraedrum bifariam tribus quadratis æqualibus, quæ Octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant. Coroll. propos. 2.

2 RECTÆ lineæ centra basium cubi oppositarum connectentes se mutuo & bifariam, & ad angulos rectos secant. Coroll. propos. 3.

3 *IDEM est centrum Icosaedri, ac sibi inscripti Dodecaedri.* Coroll. propos. 5.

4 *SI Tetraedrum Octaedro inscribatur, erunt quatuor bases Tetraedri octo basibus Octaedri parallela, singula videlicet binis oppositu.* Coroll. 1. propos. 6.

5 *SI in Octaedro Tetraedrum inscribatur; recta, qua centra basium Octaedri oppositarum coniungit, sesquialtera est axis Tetraedri, hoc est, perpendicularis ab angulo Tetraedri ad basim oppositam deducta.* Coroll. 2. propos. 6.

6 *RECTA subtendens unum angulum pentagoni aequilateri, & aequianguli, parallela est opposito lateri.* Coroll. propos. 8.

7 *DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum inscribitur.* Ad prop. 13.

8 *SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est Dodecaedri in cubo descripti: Maius verò segmentum latus cubi in hoc Dodecaedro descripti.* Ad propos. 13.

9 *LATVS cubi aequale est duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.* Ad propos. 13.

10 *RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens, aequalis est lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.* Ad propos. 13.

11 *DIAMETER Icosaedri potest & latus icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.* Ad propos. 14.

12 *BIFARIÆ sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis aequalibus, sese in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.* Ad propos. 14.

13 *SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.* Ad propos. 14.

14 *ICOSAEDRI tam latera, quàm triangula opposita sunt inter se parallela.* Ad propos. 14.

15 *IDEM est centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti.* Coroll propos. 15.

16 *SI duo latera trianguli aequilateri secentur extrema ac media ratione, ita vt unius maius segmentum, alterius verò minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum: Recta connectens dictas sectiones duplum potest minoris segmenti.* Coroll. 1. propos. 16.

17 *SI in Octaedro Icosaedrum describatur, collocabuntur octo bases Icosaedri in octo basibus Octaedri, idemq; erit centrum basis Octaedri, & basis Icosaedri.* Coroll. 2. propos. 16.

18 *IDEM centrum est Octaedri, atq; sibi inscripti Icosaedri.* Coroll 3. propos. 16.

19 *IDEM est centrum pyramidis, & cubi in ea descripti.* Coroll. 1. propos. 18.

20 *RECTA coniungens bifarias ſectiones oppoſiterum laterum pyramidis, tranſit per centrum pyramidis, triplaque eſt lateris cubi in pyramide deſcripti.* Coroll. 2. propoſ. 18.

21 *IDEM eſt centrum pyramidis, & Octaedri in ea deſcripti.* Ad propoſ. 18.

IN SEXTODECIMO LIBRO.

1 *LATVS Icoſaedri Octaedro inſcripti, maius eſt ſegmentum rectæ diuiſæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo baſis Octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema quoque ac media ratione.* Coroll propoſ. 3.

2 *LATVS Icoſaedri in pyramide deſcripti, eſt Apotome.* Coroll. propoſ. 4.

3 *LATVS Octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti, vel eius rectæ extrema, ac media ratione diuiſæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri Octaedro inſcripti.* Coroll. propoſ. 11.

4 *DIAMETER Icoſaedri binas rectas poteſt, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambientis.* Coroll. propoſ. 5.

5 *IDEM centrum eſt Octaedri, atque cubi ſibi inſcripti.* Coroll. 1. propoſ. 13.

6 *OCTAEDRVM ad ſibi inſcriptum cubum eandem habet rationem, quam eorum laterum quadratæ habent.* Coroll. 2. propoſ. 13.

7 *DODECAEDRVM à duplo cubi ſibi inſcripti deficit duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateris cubi eſt æqualis latitudo autem tertiæ partis minoris ſegmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique à latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentum exiſtit: Alterius verò & longitudo & latitudo lateris cubi æqualis eſt; altitudo autem minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit; ita vt amborum altitudines ſimul altitudini ſine lateris cubi ſint æquales.* Coroll. propoſ 18.

8 *PYRAMIS excedit duplum Icoſaedri ſibi inſcripti parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, altitudo verò recta linea bifarias ſectiones oppoſiterum laterum Icoſaedri connungens.* Coroll. propoſ 31.

9 *DATIS duobus circulis in ſphæra parallelis, ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.* Ad finem lib. 6.

10 *SI in planis parallelis deſcripti ſint duo circuli, in quibus duæ*

recta parallela abscindant arcum similes: erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius rectæ cum centro, parallela duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro coniungunt. Ad finem lib. 16.

21 *SI in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad easdem partes centrorum: Rectæ harum parallelarum extrema puncta ad easdem partes coniungentes, æquales quoque, & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares.* Ad finem lib. 16.

22 *SI in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes centrorum: Rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad easdem partes coniungentes, in centro sphæræ se intersecant, ac proinde diametri sphæræ erunt, & inter se æquales: Rectæ verò earundem parallelarum extrema puncta ad easdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter se sunt, & cum parallelis rectos angulos constituunt.* Ad finem lib. 16.

23 *IN data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, eos vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera.* Ad finem lib. 16.

24 *IN data sphæra Pyramidem aliter, quam ab Euclide factum est, describere.* Ad finem lib. 16.

25 *In data sphæra Octaedrum aliter, quam ab Euclide factum est, describere.* Ad finem lib. 16.

26 *IN data sphæra cubum aliter, quam ab Euclide factum est, describere.* Ad finem lib. 16.

27 *IN data sphæra Icosaedrum aliter, quam ab Euclide factum est, describere.* Ad finem lib. 16.

28 *IN data sphæra Dodecaedrum aliter, quam ab Euclide factum est, describere.* Ad finem lib. 16.

29 *SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera: erunt viginti triangula simul maiora, quam octo quadrata simul.* Ad finem lib. 16.

30 *OCTO quadrata ex semidiametro sphæræ descriptæ, æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti.* Ad finem lib. 16.

31 *SI Octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur; erit perpendicularis è centro sphæræ ad vnam basim Icosaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basim Octaedri, & cubi ducta.* Ad finem lib. 16.

32 *SI cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur: superficies Icosaedri superficie cubi maior est.* Ad finem lib. 16.

33 *DODECAEDRVM Icosaedro in eadem sphæra maius est.* Ad finem lib. 16.

34 *ICOSAEDRVM cubo in eadem sphæra maius est.* Ad finem lib. 16.

25 *CVBVS Octaedro in eadem ſphæra maior eſt.* Ad finem lib. 16.

26 *OCTAEDRVM Tetraedro in eadem ſphæra maius eſt.* Ad finem lib. 16.

27 *SVPERFICIES conuexa Dodecaedri maior eſt ſuperficie conuexa Icoſaedri in eadem ſphæra: Et ſuperficies Icoſaedri maior ſuperficie cubi: Et ſuperficies cubi maior ſuperficie Octaedri: Superficies denique Octaedri maior ſuperficie Tetraedri.* Ad finem lib. 16.

28 *ANGVLVM inclinationis duarum baſium cuiuſcunque corporis regularis inuenire.* Ad finem lib. 16.

29 *OMNES inclinationes baſium cuiuſcunque corporis regularis, æquales inter ſe ſunt.* Ad finem lib. 16.

ITAQVE in Codicibus Græcis habentur in primo libro propoſitiones 48: *In ſecundo*, 14: *In tertio*, 37: *In quarto*, 16: *In quinto*, 25: *In ſexto*, 33: *In ſeptimo*, 41: *In octauo*, 27: *In nono*, 36: *In decimo*, 117: *In Vndecimo*, 40: *In duodecimo*, 18: *In tertiodecimo*, 18: *In quartodecimo*, 11: *In quintodecimo*, 5: *Atque in Vniuerſum*, 486.

PROPOSITIONES Verò additæ, in quinto libro, 9: *In quartodecimo*, 21: *In quintodecimo*, 16: *In ſextodecimo*, 31: *Atque omnes numero*, 77.

IN ſcholiis denique, & corollariis demonſtrantur propoſitiones in primo libro, 108: *In ſecundo*, 21: *In tertio*, 54: *In quarto*, 23: *In quinto*, 26: *In ſexto*, 99: *In ſeptimo*, 33: *In octauo*, 37: *In nono*, 40: *In decimo*, 67: *In Vndecimo*, 25: *In duodecimo*, 28: *In tertiodecimo*, 33: *In quartodecimo*, 27: *In quintodecimo*, 21: *In ſextodecimo*, 29. *Quæ omnes conficiunt numerum* 671.

IN Vniuerſum ergo 1234. *propoſitiones in noſtro Euclide demonſtrantur.*

IN EV-

IN EVCLIDIS ELEMENTA PRÆFATIO.

SI QVIS fortè miratur, cur post tot præclarissimos in Euclidis Elementa Geometrica Commentarios ab egregiis, & in primis Mathematicarum rerum peritis Scriptoribus editos, nouas adhuc ipsi commentationes conscripserimus; is facilè sibi persuadebit, nō temere id à nobis esse factum, si consilij nostri rationem cognouerit. Cum enim longa diuturnaque experientia nobis esset perspectum, atque exploratum, eam esse vtilitatem, atque adeo necessitatem horum elementorum, vt frustra quisquam se speret sine ipsorum præsidio, acutissimas, subtilissimasque Archimedis, Apollonij, Theodosij, Menelai, Ptolemæi, cæterorumque illustrium Mathematicorum demonstrationes posse percipere; vehementer dolebamus, tam insignem & illustrem auctorem à plerisque omninò negligi, à perpaucis verò pro dignitate tractari, ita vt vix hoc nostro seculo reperiantur, qui sedulam operam, ac studium in perdiscendis his elementis ponant; ob eam potissimum, vt arbitror, causam, quod difficultate rerum, quas tractant, atque obscuritate deterreantur, nullumque habeant hac in re ducem, quem sibi citra erroris periculum sequendum proponant. Extant quidem Commenta-

mentarij Campani, ac Theonis in singulos Euclidis libros sanè eruditi, qui satis esse possint cuiuis ad facilè cõsequendam horum elementorum doctrinam: Sed alter secutus in omnibus est traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinem, ac methodum peruerterunt, verbaque propositionum eiusdem locis non paucis immutarunt, vt verus germanusque auctoris sensus perdifficile possit intelligi; id quod maximè in 10. lib. perspicitur: Alter (Theonem intelligo) penè innumeris mendis, vitiisque incuria librariorum ita est deprauatus, & propter notas Græcas, quæ in eius demonstrationibus adhibentur, obscuras illas ac malè expressas adeo impeditus, vt magnam difficultatem inexercitatis ingeniis, perplexitatemque gignat. Quo fit, vt Euclidem sine maximo labore ac studio nemo percipiat. Iam si alij ad nostram vsque memoriam maius aliquod studium operamque in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerunt, hi vel sex priores tantum libros exposuerunt: vel si qui in vniuersum Euclidem Commentarios ediderunt, hi persæpe, relictis antiquorum demonstrationibus certissimis, proprias alias, ac nouas confinxerunt, quæ plerunque non tam firmæ sunt, neque rem ipsam simpliciter & absolutè conficiunt; præsertim quòd modò è propositionibus voces quasdam perperam detrahunt, modò alias ineptè apponunt, modò denique nonnullas temerè immutant, vt meritò de vero proprioque Euclidis sensu dubitare quis possit. Qua tamen in re Federicum Commandinum Vrbinatem, Geometram non vulgarem excipio, qui nuper Euclidem Latinè redditum in pristinum nitorem restituit, paucis locis exceptis, in quibus non parum à vero aberrauit, vt suo loco monebimus. Quæ cum ita sint, resque ac scientia tam præclara digna sit quæ ope, studio, industria ab ijs adiuuetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre possunt, post diuturni temporis in rebus Mathematicis operam collocatam; faciendum putauimus, vt lucubra-

cubrationes noſtras ac vigilias ſtudioſis harum rerum nonnihil (niſi fallimur) ſubſidij allaturas in publicum ederemus. Acceſſit editionis cauſa altera: Nam cum Euclides, propter ſingularem vtilitatem, inſtar enchiridij, manibus ſemper debeat circumgeſtari, neque vnquam deponi ab his, qui fructum aliquem ſerium ex hoc ſuaui Matheſeos ſtudio capere volunt, in eoque progredi; id vero in hunc diem, exemplaribus omnibus maiore forma impreſſis, necdum factum videamus; hoc noſtra editio certè, ſi nihil aliud attulerit commodi, atque emolumenti. Sunt enim hi noſtri Commentarij in vniuerſum Euclidem conſcripti commodiore nunc forma, quam vulgo cæteri, (id quod magnopere à nobis, qui nos audiesunt, efflagitabant,) volumineque editi, vt facilè iam queant, nulloque negotio, è loco in locum, cum res tulerit, ferri atque portari. Nunc quo modo, via, ac ratione res tota à nobis pertractetur, quidque in hac interpretatione præſtitum ſit, paucis accipe. Demonſtrationes aliorum, maximè Theonis, quas quidem ipſius eſſe Euclidis, non leuibus argumentis adducti cum pleriſque aſſeueramus, & Proclus etiam teſtatur, breuiores, quantum per rei difficultatem licuit, vel certè planiores, quando illud non potuimus, dilucidioresque reddere conati ſumus. Non enim illas nudè, ac totidem verbis, quot erant ſcriptæ, propoſuimus. Etenim ea eſt interdum illarum breuitas, vt illud accidat, quod ab elegantiſſimo Poeta dictum eſt: *Breuis eſſe laboro, obſcurus fio.* Interdum etiam cum breuius, atque ſuccinctius efferri poſſint, magna, ob longiorem, quàm ſatis eſt, ſermonem, affertur moleſtia legenti. Quare vtrumque vitantes, eas, velut μεσοτητας, atque ad eum ferè modum tradidimus, quem, cum publicè Euclidem interpretaremur, obſeruauimus; hac etiam re auditorum deſiderio, & voluntati, quantum eſt in nobis, ſatisfacere cupientes. Ita enim, noſtra ſententia, Euclides facilius à ſtudioſis, ijs præſertim, qui ceu tyrones, hæc Mathematica ſtudia

nunc

nunc primum auſpicantur, ac maiore voluptate, vtilitateque cognoſcetur. Præter hæc adiunximus multis in locis varia problemata, ac theoremata ſcitu non iniucunda, neque à ſcopo Geometriæ aliena, quæ partim ex Proclo, Campano, aliisque auctoribus decerpſimus, partim proprio (vt aiunt) Marte, aſſiduisque meditationibus ipſi confecimus. Data inſuper in hoc diligens opera, vt definitiones Euclidis, præſertim obſcuriores, & quæ aliquid viſæ ſunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tanquam in ſcopulos quoſdam incidentes, à recto curſu deflexerunt, & in errores varios atque abſurdos, prorſusque ab inſtituto diſciplinæ abhorrentes dilapſi ſunt) dilucidè atque perſpicuè, quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium ſtudioſi facilè iudicabunt. Quæ res cum in ampliorem magnitudinem excreſcerent, quàm vt vnius libri ſpatiis, hac præſertim forma commodè includi poſſent, in duas partes totam tractationem diuiſimus. Altera ſex prioribus libris continetur: altera nouem reliquos, vnà cum decimoſexto ad comparationes quinque corporum regularium pertinente, quem ex Franciſco Fluſſate Candalla, vt Elementa hæc Geometrica euaderent perfectiora, adiicere voluimus, complectitur.

BENI-

BENIGNO LECTORI.

QVONIAM *superiorem editionem Elementorum Euclidis non ingratam fuisse Mathematicarum disciplinarum studiosis intelleximus, exhibemus tibi benigne Lector, alteram editionem priore illa multo locupletiorem: in qua scilicet varia tum problemata, tum theoremata, quæ rebus Mathematicis magnum adiumentum allatura, longo vsu, atque experientia comprobauimus, & quæ in priore editione desunt, adiecimus, plurimaque loca subobscura clarioribus notis illustrauimus. Addidimus præterea nouam demonstrationem vndecimi axiomatis Euclidis, (quod in hisce Commentariis est tertiumdecimum) quo vult, Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duas illas rectas lineas in infinitum productas, coituras tandem ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores: addidimus, inquam, nouam demonstrationem à nobis nuper inuentam, quam non iniucundam studioso Lectori futuram speramus, quod eo principio tota doctrina de lineis parallelis, quæ immensa propemodum est, atque infinita, nitatur. Quanquam enim idem illud principium Arabes quoque olim demonstrasse iam pridem acceperam: quia tamen eorum demonstrationem diu ac diligenter quæsitam videre mihi non licuit, (nondum enim ex Arabica in Latinam linguam conuersa est) coactus sum hanc meo, vt aiunt, Marte excogitare, vt nullus in eo principio tam necessario iam dubitationi locus esset. Neque enim Procli demonstratio, quam ad propos. 28 lib. 1. Euclidis de re eadem affert, omni ex parte absoluta, ac Geometrica censeri potest; cuius*

est; cuius rei causa eodem loco à nobis explicata est. Deinde ex Pappo Alexandrino inscriptiones omnium figurarum regularium in circulo, beneficio lineæ certa quadam ratione inflexæ, perfecimus: quod ante à Mathematicis desiderabatur. Ex qua eadem linea via quædam & ratio ad circulum quadrandum (res tot seculis à doctissimis viris exagitata) conficitur: quod suo loco docebitur. In definitionibus porrò quinti libri apertè ostendimus, cur Euclides magnitudines proportionales & improportionales per æquemultiplicium habitudinem describere coactus sit. Postremo (vt alia omittam) omnes operationes fractionum vulgarium, quæ in Arithmetica practica declarari solent, Geometricè demonstrauimus. Hæc ferè præcipua sunt, quæ hac posteriore editione ad Commentarios nostros in Euclidem accesserunt. Cætera vel theoremata, vel problemata, quibus editio hæc posterior priorem superat, quæ sanè plurima sunt, & Euclidis propositionibus sparsim inserta, inter legendum facilè comperies, si vtramque editionem cum altera conferens attentius paulo considerabis. Nunc quia hæc Euclidis elementa ostium atque aditum ad omnes alias disciplinas Mathematicas reserant, ac patefaciunt, operæ pretium fore duximus, antequam ad ipsa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, vnde nam Mathematica disciplina hoc nomen acceperint: quæ sit earum diuisio: à quibus primum orta, & per quos deinde singulæ fuerint excultæ: quanta sit illarum præstantia atq; vtilitas; & si qua sunt alia rei nostræ opportuna.

IN DISCIPLINAS MATHEMATICAS PROLEGOMENA.

MATHEMATICÆ DISCIPLINÆ cur sic dictæ sunt.

DISCIPLINÆ *Mathematicæ, quæ quidem circa quantitatem versantur omnes, nomen acceperunt à dictione Græca* μάθημα, *siue* μάθησις, *quæ significat disciplinam, seu doctrinam. Cur autem hæ artes de quantitate agentes nomen disciplinæ, vel doctrinæ inter reliquas omnes sola sint adeptæ, duas potissimum causas apud probatos scriptores inuenio. Pythagorei enim, atque Platonici existimantes, animas rationales certo quodam ac determinato numero contineri, easque de corpore in corpus migrare, (quod tamen Christiana fides falsum esse perspicuè docet) testantur, eas nomen doctrinæ, siue disciplinæ obtinere, quod maximè ex ipsis nanciscamur recordationem, reminiscentiamque illius scientiæ, quæ animæ nostræ, (vt eorum est error) antequam corpus informarent, erat prædita. Quod quidem facili, ac familiari quodam exemplo comprobare nititur Plato in dialogo, qui Menon inscribitur, vbi Socratem introducit pusionem quendam interrogantem Geometrica quædam de quadratis dimensione, ad quæ licet in principio respondérit, vt puer, gradatim tamen ascendens, eo deductus est, vt responderit id, quod tandem dicturus fuisset, si diutissimè perdidicisset Geometriam. Alios autem placet, ideo has artes præ cæteris nomen scientiæ, & doctrinæ sibi vendicare, quòd solam modum rationemque scientiæ retineant. Procedunt enim semper ex præcognitis quibusdam principiis ad conclusiones demonstrandas, quod proprium est mutuis, atq; officium doctrinæ, siue disciplinæ, vt & Aristoteles 1. Posteriorum testatur; neq; vnquam aliquid non probatum assumunt Mathematici, sed quandocunque aliquid docere volunt, si quid ad eam rem pertinet eorum, quæ ante docuerunt, id sumunt pro concesso, & probato: illud verò modo explicant, de quo ante nihil scriptum est. Quod quidem aliæ artes, disciplinasve non semper obseruare videmus, cum plerunque in confirmationem eorum, quæ ostendere volunt, ea, quæ nondum sunt explicata, demonstrataue adducant.*

DISCIPLINARVM MATHEMAticarum diuisio.

PYTHAGOREI, *quos deinde secuti sunt omnes propemodum Mathematici, atque Philosophi non pauci, Mathematicas disciplinas*

Plinius Cniuerſas in quatuor partes diſtribuerunt, Arithmeticam, Muſicam, Geometriam, atq; Aſtronomiam. Cum enim omnis quantitas, circa quam verſantur, ſit vel diſcreta, ſub qua omnes numeri, vel continua, ſub qua omnes magnitudines comprehenduntur, & vtraque tam ſecundum ſe, quàm comparatione alterius poſſit conſiderari; viſum fuit illis conſentaneum quatuor prædictas facultates inſtituere, qua vtramque quantitatem pro duplici conſideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate diſcreta ſecundum ſe, inquirendo & accuratè explicando omnes numerorum proprietates, ac paſſiones. Muſica tractat eandem quantitatem diſcretam, ſiue numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum ſonorum concentus reſpicit, atque harmoniam. Geometria de magnitudine, ſiue quantitate continua, ſecundum ſe quoque, vt immobilis exiſtit, diſputat. Aſtronomia denique eandem magnitudinem, vt eſt mobilis, conſiderat; qualia ſunt cœleſtia corpora, prout continuo motu cientur. Ad has autem quatuor ſcientias Mathematicas, quarum Arithmetica & Geometria pura, Muſica verò atque Aſtronomia mixta dicuntur, omnes alia quouis modo de quantitate agentes, qualis eſt Perſpectiua, Geographia, & cætera huiuſmodi, vel facilè, vt ad capita, à quibus dependent, reduci poſſunt.

ALIA ratione à Gemino antiquo Geometra, & ab aliis, vt auctor eſt Proclus in Commentariis, quos in primum Euclidis librum edidit, Mathematica diſciplina diuiduntur. Quam quidem diuiſionem, quoniam eleganter, copioſeque docet, ad quanam ſeſe extendant Mathematica diſciplina, fermè ad verbum ex Proclo iuxta interpretationem Franciſci Barocij Patricij Veneti excerptam hic ſubiicere ſtatui. Volunt itaque prædicti auctores, ſcientiarum Mathematicarum quaſdam ſe intellectilib. duntaxat ab omni materia ſeparatis, quaſdam verò in ſenſilibus, ita vt attingant materiam ſenſibus obnoxiam, verſari. Prioris generis ſtatuunt duas longè primas, præcipuasq; ſcientias, Arithmeticam & Geometriam: In poſteriori verò genere conſtituunt ſex, Aſtrologiam, Perſpectiuam, Geodæſiam, Canonicam, ſiue Muſicam, Supputatriscem, atque Mechanicam. Aſtrologiam dicunt eſſe eam facultatem, qua de mundanis ediſſerit motibus, de corpori cæleſtium magnitudinibus, figuris & illuminationibus, à terraq; diſtantiis, ac de aliis huiuſmodi rebus. Huius rurſum tres conſtituuntur partes; Gnomonica, qua in horarii dimenſione, poſitu gnomonum exercetur: Meſheoroſcopica, qua elevationum differentias, ſiderumq; repertit diſtantias, necnon multa alia & varia Aſtrologica perdocet theoremata: & Dioptrica, qua planetarum, cæterarumq; ſtellarum diſtantias huiuſcemodi Dioptricis digneſcit inſtrumentis. Perſpectiuam aiunt à Geometria gigni, atq; vti radiis viſorijs, tanquam lineis, & angulis, quis ex hiſce conſtituuntur oculorum radius. Diuiditur autem eam, qua proprio nomine dicitur Perſpectiua, qua quidem reddit

eam ſam earum apparentiarum, qua aliter, quam ſint, ſeſe nobis offerre ſolent, ob eorum, qua ſub viſum cadunt, alios ſitus & diſtantias, & parallelarum coincidentia, vel quadratorum, tanquam circulorum, aſpectionis: Et in vniverſam ſpecularem, qua circa varias, multiplicesq; verſatur refractiones: Nec non in eam, qua Sciographice, hoc eſt, vmbrarum deſignatrix appellatur, qua oſtendit, qua ratione fieri poſſit, vt ea, qua in imaginibus apparent, haud inconcinna, vel deformia ob deſignatorum diſtantias, altitudinesq; videantur. Geodeſiam appellant eam ſcientiam, qua res quantas metitur, vt materialium rerum acervos tanquam conos; & puteos, tanquam cylindros. Quod quidem non aſſequitur intellectilibus rectis lineis, vt Geometria, ſed ſenſilibus tantum, interdum quidem certioribus quodam pacto, vt radiis Solaribus; interdum verò craſſioribus, vt ſpartis & perpendiculo. Dividitur hac, vt Geometria, in eam partem, qua plana, & in eam, qua ſolida dimetitur. Canonicam, ſive Muſicam, vocant eam ſcientiam, qua apparentes concentuum conſiderat rationes, ſenſuſque vbique vtitur adminiculo; & qua (vt Plato inquit) talus exiſtit, vt menti aures ipſas prapoſuiſſe videatur. Supputatrix eadem apud ipſos eſt, qua apud nos Arithmetica practica. Hac enim numeros conſiderat, non vt in intellectilibus, ſed vt ſunt in ſenſilibus ipſis. Mechanica denique, qua in cognitione rerum ſenſilium, materiaque coniunctarum conſiſtit, apud ipſos multiplex eſt. Quadam enim eſt inſtrumentorum effectrix, qua ὀργανοποιητικὴ vocatur, eorum, inquam, qua gerendis ſunt bellis idonea, qualia ſane Archimedes etiam fertur conſtruxiſſe, Syracuſas terra marique obſidentibus reſiſtentia. Quadam mirabilium prorſus rerum effectrix, qua θαυματοποιητικὴ, dicitur; quippe qua alia quidem ſpiritibus maximo cum artificio conſtruit, quemadmodum etiam Cteſibius, atque Heron operantur, alia autem ponderibus, quorum motus quidem inaquilibrium, ſtatus verò aquilibrium eſſe cauſam cenſendum eſt, vt Timaus etiam determinauit; alia verò neruis, ſpartiisq; animata conuolutiones, ac motus imitantibus: Quadam eſt aquilibrantium omnino, & eorum, qua centroponderantia vocantur, cognitio: Quadam denique ſphararum effectrix, qua σφαιροποιία appellatur, ad caleſtium circumuolutionum imitationem, qualem Archimedes etiam fabricatus eſt. Atque, vt vno verbo dicam, omnis, qua materiam mouendi vim habet. Ha igitur ſunt diſciplina Mathematica apud antiquos. Militarem autem artem, eam, inquam, qua ad inſtruendas, coordinandasq; pertinet acies, quam Graci τακτικὴν vocant, vnam aliquam ex Mathematices partibus dicendam eſſe non cenſent, vt quidam alij volvere, ſed vti eam volunt modo quidem arte ſupputandi, vt in enumerandis legionibus; modo verò Geodeſia, vt in diuidendis, dimetiendisque caſtrametationi ſpatiis in campo. Quemadmodum neque Hiſtoricam, neque medendi artem Mathematices partem vllam eſſe dicunt, licet ſapenumero tum

mero tum Hiſtorici, tum etiam Medici Mathematicis vtuntur theorematibus; Rerum quidem geſtarum ſcriptores, vel climatum ſitus referendo, vel orbium magnitudines, & diametros, vel ambitus, circuitusue colligendo: Medici verò quamplurimas res in arte ſua huiuſcemodi vſu dilucidando. Nam vtilitatem, quæ in Medicinam ab Aſtrologia peruenit, ipſe etiam Hippocrates oſtendit, ac fere omnes, quicunque aliquid de opportunis temporibus, locisq; dixere. Eadem ſane ratione ille etiam, qui aciebus inſtruendis operam accommodat, Mathematicis quidem vtetur theorematibus, nec tamen ob hoc erit Mathematicus, quamuis interdum quidem volens eam, quæ numeroſa eſt, pauciſſimam oſtendere multitudinem, caſtra ſuosque exercitus ad figuram circuli formet; interdum verò ad figuram quadranguli, vel quinquanguli, vel alterius cuiuſdam multanguli, vbi plurimam apparere cupit. Hæc igitur fere ſunt, quæ nobis antiqui Mathematici de harum ſcientiarum partitione reliquerunt.

INVENTORES MATHEMATICARUM diſciplinarum.

OMNES diſciplinas Mathematicas à variis & diuerſis auctoribus ortum originemque duxiſſe, perſpicuè hiſtoria teſtantur: Imò vero ſingulas nequaquam ſummam adeptas eſſe perfectionem ſtatim ab initio, ſed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora proceſſiſſe, memoriæ quoque proditum eſt. Arithmetices enim inuentores primi creduntur Phœnices, propter frequentes mercaturas, atq; commercia, vt auctor eſt Proclus. Quam mirum in modum poſtea Pythagoras, eiusque ſucceſſores, necnon Ægyptij, Graci denique atque Arabes amplificarunt, variisque problematis, atque theorematis illuſtrarunt. Muſicam deinde à Mercurio primum eſſe inuentam, multi ſcriptores tradunt, quam ipſe poſtea Orpheo inſigni Muſico commendauit, atque concredidit; Hic autem Thamyri & Lino. Linus vero Herculi, & ſic ſucceſſionibus continuis per alios Muſicos præclaros ad noſtra vſque tempora manauit. Geometria vero, auctore Proclo, ab Ægyptiis repert a eſt, ortumq; habuit ab agrorum dimenſione. Cum enim annuerſaria Nili inundatio agrorum terminos, ac limites ita confunderet, vaſtaretque vt nemo agrum dignoſcere poſſet ſuum, cœperunt Ægyptij animos ad rationem menſurandorum agrorum applicare, vt hoc modo cuilibet, quod ſuum erat, redderetur. Qua quidem ratio agros metiendi, quanquam tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipſo tamen officio Geometria eſt appellata. γεωμετρία enim, ſine γεωμετρίω idem ſignificat, quod terram metior. Cæterum paulatim deinde Geometria cœpta eſt expoliri, & non contenta ſuis finibus, ſeſe ad corpora etiam cæleſtia dimetienda conuertit, tradiditq; principia vniuerſa Aſtronomiæ, Perſpectiuæ, Coſmographiæ, & aliis diſciplinis quamplurimis, quæ ex ipſa, veluti radice,

dependent. Hanc Thales Milesius ex Ægypto in Graciam primus transtulisse fertur: Deinde eam insignes Philosophi ac Mathematici plurimis acutissimisq; demonstrationibus locupletarunt, atque exornarunt: Inter quos hi sunt præcipui ex Veteribus: Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Brito, Antipho, Theodorus, Theætetus, Aristarchus, Eratosthenes, Architas Tarentinus, Euclides, Serenus Hypsicles Alexandrinus, Archimedes Syracusius, Apollonius Pergæus, Theodosius Tripolita, Menelaus Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemæus, Eutocius Ascalonita, Pappus, Proclus, & alij penè innumeri, quos omnes longum esset recensere. Astronomiam denique non pauci ab Atlante primum inuentam esse autumant: Vnde ob eximiam, quæ primus inter mortales præditus erat, Astronomiæ cognitionem, exortam esse volunt fabulam, illum suis humeris cælum sustinere. Alij putant Chaldæos diuturna obseruatione (quod etiam Cicero affirmat in libro de Diuinatione) siderum scientiam adinuenisse. Alij Ægyptios primos huius scientiæ faciunt inuentores: Alij Assyrios: Alij denique gloriam hanc, & laudem Babylonijs esse deferendam, censent. Hæc autem in scientia, vt est præstantissima, ita quoque maximè illustres auctores claruerunt, quod non est huius loci declarare. Cæterum præcipuis hisce quatuor disciplinis Mathematicis inuentis, reliquæ omnes de quantitate quouis modo agentes, facilè ex ipsis tanquam riuuli ex fonte, deriuatæ sunt, atque deductæ.

NOBILITAS ATQVE PRÆSTANTIA Scientiarum Mathematicarum.

QVONIAM disciplinæ Mathematicæ de rebus agunt, quæ absque vlla materia sensibili considerantur, quamuis re ipsa materiæ sint immersæ; perspicuum est, eas medium inter Metaphysicam, & naturalem scientiam obtinere locum, si subiectum earum consideremus, vt rectè à Proclo probatur, Metaphysices etenim subiectum ab omni est materia seiunctum, & re, & ratione: Physices verò subiectum & re, & ratione materiæ sensibili est coniunctum: Vnde cum subiectum Mathematicarum disciplinarum extra omnem materiam consideretur, quamuis re ipsa in ea reperiatur, liquidò constat, hoc medium esse inter alia duo. Si verò nobilitas, atque præstantia scientiæ ex certitudine demonstrationum, quibus vtitur, sit iudicanda; haud dubio Mathematica disciplina inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonstrant enim omnia, de quibus suscipiunt disputationem, firmissimis rationibus, confirmantque, ita vt verè scientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorsus dubitationem tollant: Id quod aliis scientijs vix tribuere possumus, cum in eis sæpenumero intellectus multitudine opinionum, ac sententiarum varietate in veritate conclusionum iudicanda suspensus hæreat, atque incertus.

eorum. Huius rei fidem apertè faciunt tot Peripateticorum secta, (& alios interim Philosophos silentio involuam) quæ ab Aristotele, veluti rami è trunco aliquo, exorta, adeo & inter se, & nonnumquam à fonte ipso Aristotele dissident, & prorsus ignores, quidnam sibi velit Aristoteles, num de nominibus, an de rebus potius disputationem instituat. Hinc fit, & pars interpretes Græcos, pars Latinos, alij Arabes, alij Nominales, alij denique Reales, quos vocant, (qui omnes tamen Peripateticos se esse gloriantur) tanquam ductores sequantur. Quod quam longè à Mathematicis demonstrationibus absit, meminem latere existimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumque Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonstrationum robur, & firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, seu dialogo, qui de summo bono inscribitur; Eam scientiam esse digniorem, præstantioremque, quæ magis sinceritatis, veritatisque est amans. Cum igitur disciplinæ Mathematicæ veritatem adeo expetant, adament, exosculentur, & non solum nihil, quod sit falsum, verum etiam nihil, quod tantum probabile existat, nihil denique admittant, quod certissimis demonstrationibus non confirment, corroborentque, dubium esse non potest, quin eis primus locus inter alias scientias omnes sit concedendus.

VTILITATES VARIÆ MATHEmaticarum disciplinarum.

NON solum vtiles, verum etiam necessaria admodum censeri debent disciplinæ Mathematicæ cum ad alias artes perfectè perdiscendas, tum ad rem etiam publicam rectè instituendam, & administrandam. Nec enim ad Metaphysicam, vt eleganter ostendit Proclus, vllis patet aditus, nisi per Mathematicas disciplinas. Nam si à rebus sensibilibus, quas Physicus considerat, ad res ab omni materia sensibili secretas, seiunctasque, quas contemplatur Metaphysicus, vires, aciemque nostri intellectus attollere absque vllo medio tentemus, nosmetipsos exacerbimus, non secus, ac ei contigit, qui è carcere aliquo tenebricoso, in quo diu latuit, in lucem Solis clarissimam emittitur. Quam ob rem, antequam à rebus physicis, quæ materiæ sensibus obnoxiæ sunt coniunctæ, ad res Metaphysicas, quæ sunt ab eadem maximè auulsæ, intellectus ascendat, necesse est, ne harum claritate offundatur, prius eum assuefieri rebus minus abstractis, quales à Mathematicis considerantur, vt facilius illas possit comprehendere. Quocirca rectè Diuinus Plato Mathematicas disciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationem exacuere mentis aciem affirmat. Quantum verò emolumenti hæ disciplinæ ad sacras literas rectè perscipiendas, interpretandasque conferant, multo pulcherrimè nobis exponit D. Augustinus lib. 2. cap. 16. de Doctrina

Christiana, demonstrans, numerorum inscitia multa non intelligi à multis, quæ translatè, ac mysticè posita sunt in Scripturis. Cuius rei exempla non pauca in medium adducit, eandemque sententiam longè post pluribus verbis repetit eodem libro, capite 37. Hoc idem docet D. Hieronymus tomo 1. Epist. 5. asserens magnam inesse numeris vim, ad multa mysteria in Scripturis intelligenda: Quo item loco, Geometriam magnam afferre Theologis utilitatem perhibet. Rursum B. Augustinus loco iam citato, capite 16. quem paulo ante retuli, testatur, Musicam perneccessariam esse doctori Christiano, subiungens paulo post, cap. 19. Theologos debere etiam Geographia diligenter esse instructos. Quod non ignorans Diuus Gregorius Nazianzenus, summis laudibus Diuum Basilium Præceptorem suum extollit, quòd in Astrologia, Geometria, numerorum cognitione, cæterisque scientiis Mathematicis, fuerit non mediocriter versatus. Non parum etiam conducunt hæ artes ad philosophiam naturalem, moralem, Dialecticam, & ad reliquas id genus doctrinas, artesque perfectè acquirendas, vt perspicuè docet Proclus. His adde, quod omnia volumina antiquorum philosophorum, maximè Aristotelis, & Platonis, quos merito duces nobis sequendos ad bene rectèque philosophandum proponimus, eorumque ferè omnium interpretum cum Græcorum, tum Latinorum, exemplis Mathematicis sunt referta, ea potissimum de causa, vt ea, quæ alioquin multis obstructa difficultatibus videbantur esse per exempla huiusmodi clariora, magisque perspicua fierent; quà procul dubio nulla ratione percipiet is, qui scientiarum Mathematicarum omninò est expers. Quid? quod olim nemo ausus esset celeberrimum Diuini Platonis gymnasium frequentare, qui prius optimè Mathematicis disciplinis non fuisset exornatus? Vnde pro foribus Academiæ hoc symbolum diestur pinxisse, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Imo vero idem Plato in Philebo, omnes disciplinas sine Mathematicis viles esse non dubitauit asserere. Qua de causa in 7. de Rep. præcipit, Mathematicas disciplinas primo omnium esse addiscendas, propter varias, ac multiplices earum vtilitates, (vt copiosè scribit) non solum ad reliquas artes rectius percipiendas, verum etiam ad Remp. benè administrandam: Cuius ego rei multa exempla cum præteriti temporis, tum nostræ ætatis, si id necesse foret, in medium possem adducere. Ibidem clarissimis verbis affirmat, præcipuè Arithmeticos natura ad omnes doctrinas aptos esse, idoneosque, adeo vt etiamsi nullam aliam nobis hæ scientiæ afferrent vtilitatem, (cum tamen infinita propemodum alia commoda ex ipsis percipiamus) perdiscendas tamen omni studio eas esse statuat, quod ingenium, mentemque ad reliquas artes omnes capessendas aptiorem reddant, & acutiorem. Quod quidem experientia ipsa magistra facilè comprobatur. Videmus enim eos, quorum ingenium facilè, & nullo negotio hisce disciplinis accommodatur, fructus non exiguos ex aliis scientiis percipere: Contra

vero eos,

vrò eos, qui ad haſce facultates idonei minimè reperiuntur, prorſus ad cæteras eſſe ineptos. Quare sure optimo Plato tam frequenter in ſuis operibus iterum atq; iterum harum diſciplinarum vtilitatem nobis inculcat, atq; commendat, præſertim in 7. de Rep. in Epinomide, ſeu Philoſophe, in Timæo, vbi Mathematicas diſciplinas omnes eruditionis gemmas viam appellat, & pleriſq; alijs in locis, quibus nunc enumerandis breuitatis memor de induſtria ſupersedeo. Ad has omnes vtilitates accedit maxima iucunditas, atq; voluptas, qua cuiuſq; animus his artibus colendis, exercendiſq; perfunditur. Sunt enim ha præcipuæ ex ſeptem artibus liberalibus, in quibus nō ſolum ingenui adoleſcentes, verùm etiam nobiles viri, Principes, Reges, ac Imperatores ad honeſtiſſimam, maximeq; liberalem oblectationem animi, quam ſumma etiam cum vtilitate coniunctam parunt, diu multumque vſari ſolebant. Quorum exemplum multos adhuc noſtra hac ætate vſuri conſpicimus. Teſtatur, magnam animi voluptatem ex his artibus percipi, Diuinus Plato in 7. de Rep. vbi audacter dicit, & non temerè confirmat, oculum animæ, qui ab alijs ſtudijs excæcatur, defoditur q; & à Mathematicis tantùm diſciplinis recreari, excitariq; rurſum ad eius, quod eſt, contemplationem. Omitto plurima alia teſtimonia Platonis, aliorumq; grauiſſimorum Philoſophorū, quibus harum diſciplinarum vtilitas cum neceſſitate, & delectatione coniuncta, atq; præſtantia abundè poteſt comprobari.

EVCLIDIS ATQVE GEOMETRIÆ commendatio.

QVISNAM fuerit Euclides horum elementorum inſtitutor, (vt aliquid etiam de auctore, quem nobis interpretandum propoſuimus, deq; Geometria vniuerſa, in medium proferamus) & quo tempore floruerit, non ſatis conuenit inter ſcriptores. Multi enim, vt teſtatur vulgatum elementorum Euclidis ſecundum Campanum, & Theonem editio, atq; eorundem inſcriptio, exiſtimant, eum fuiſſe Philoſophum illum Megarii natum, quod oppidum Iſthmo adiacet, Socratæq; auditorem, qui ſectam inſtituit à ſe dictam Megaricam, quæ alio nomine Dialectica appellabatur, eò quòd ſectatores illius interrogando, reſpondendoq; (quod proprium eſt munus Dialecticorum) libros conſcriberent. De quo multa ſunt in Diogene Laertio de vitis Philoſophorum: Scribit & de hoc Cicero Quæſt. Acad. lib. 2. vbi ait. Poſt Euclides Socratis diſcipulus Megarenſis, a quo ijdem illi Megarici dicti, qui id bonorum ſolum eſſe dicebant, quod eſſet vnum, & ſimile, & idem, & ſemper. Fauet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo libro ſcribit, nimirum à Platone, qui Socratis etiam diſcipulus fuit, conductores ara ſacra de modo, & forma eius ſecum ſermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iuſſos. Verum ſi Prodo nobili ſcriptori, & alijs auctoribus antiquis credendum

est, Euclides hic noster iunior fuit illo Megareo floruitq; tempore Ptolemæi primi, qui Ægypto, post Alexandri magni mortem, Olympiade 115. & ante Christum natum anno 319. cœpit imperare, vt Ioannes Eucidus refert. Quod quidem verum esse crediderim, hoc maximè adductus argumento, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius Megarici diligentissimè enumerans, nullam prorsus faciat mentionem huius celeberrimi Voluminis de Geometricis elementis conscripti, in quo perpetuam, & nunquam moriturã famam sibi compararit Euclides, & gloriam. Neq; enim putandum est, Diogenem in monumentis Philosopharum exercitatissimum, hoc tam insigne opus vel scientem voluisse præterire, vel ab Euclide suo esse compositum ignorasse. Itaq; Euclides noster, Geometra acutissimus, ab illo Megarico Philosopho longè alius est, qui cum in doctrina Academicorum esset summa cum laude versatus, animum totum ad Mathematicas disciplinas transtulit; in quibus ita excellit, vt concordi omnium iudicio principem inter Mathematicos sibi locum iure optimo vendicarit. Scripsit autem Volumina ad rem Mathematicam spectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admirandaq; doctrina facilè elucet: qualia sunt eius Optica, Catoptrica, Elementares institutiones ad Musicam capessendam pertinentes, Phænomena, atq; Datorũ liber, opus de Diuisionibus, quod nonnulli suspicantur esse libellum illum acutissimum de Superficierum diuisionibus, Machometo Bagdedino ascriptum, qui nuper Ioannis Dee Londinensis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem editus est. Conscripsit item Conica elementa, auctore Proclo, quæ tamen ad nos nondum peruenere, & alia id genus opuscula. Maximè verò hoc Volumen Elementorum Geometricorum, nunquam omnium consensione satis laudatum, tam mirabili ordine, tantaq; eruditione contexuit, vt nullum vnquam eorum, qui similia conscripserunt elementa, (conscripserunt autem, vt ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipsum superarit. In quo quidem, vt summum ingenij acumen demonstrauit, ita non omnia, quæ ad rem Geometricam pertinent, in vulgus edenda, sed ea duntaxat, quæ visa sunt esse necessaria, atq; vtilia ad communem omnium vtilitatem, argumentis & rationibus firmissimis censuit esse comprobanda. Cæterùm, quanta sit horum Euclidis Elementorum Geometricorum, ac proinde vniuersa Geometria præstantia atq; vtilitas, partim ex ijs, quæ antè scripsimus, partim ex ijs, quæ nunc dicemus, non obscurè percipi potest. Dicuntur enim Geometrica elementa, eam ob causam, quòd sine ipsis nullum opus Mathematicum possimus aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere. Omnes siquidem Mathematicarum rerum scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Theodosius, &c. in suis demonstrationibus vsurpant hæc Euclidis elementa, tanquam principia omnibus iam diu perspecta, atq; demonstrata. Quamobrem sicut is, qui legere vult, elementa literarum

discit

diſcit priùs, & illis aſſiduè repetitis ſtatim in locis omnibus exprimendis, ſic qui alias diſciplinas Mathematicas deſiderat ſibi reddere familiares, elementa hæc Geometrica plenè ac perfectè calleat prius neceſſe eſt. Ex his etenim elementis, velut fonte vberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, inſularum dimenſio, atque diuiſio, omnis in cælo per inſtrumenta ſiderum obſeruatio, omnis horologiorum ſciothericorum compoſitio, omnis machinarum vſus, & ponderum ratio, omnis apparentiarum variarum, qualis cernitur in ſpeculis, in picturis in aqua, & in aere variè illuminato, diuerſitas manat. Ex his, quæſo, elementis machina totius huius mundanæ eſt immensum medium, atque centrum; inuenti cardines, circa quos perpetuò conuertitur, orbis denique totius exploratæ figura, ac quantitas. Oſtenditur atq; demonſtratur omnis huius ſcientiæ vis cæli vniuerſi, ſiderumq; perennis conuerſio, ortus, occaſus, abitus, reditus, aſcenſus, deſcenſus, dies ac noctis, temporumq; toto anno per omnem terrarum ſitum, & mundi inclinationem, varietas. Coniunctiones item Planetarum, oppoſitiones, aſpectusq; varij tam expeditè cognoſcuntur, vt & loca illorum in cælo, & eclipſes, ſeu Solis ac Lunæ defectiones certiſſimæ, antequam fiant, in omne poſterum tempus à Mathematicis prædici queant. Hoc denique ingens Dei, & Naturæ opus, mundum, inquam, totum, mentis noſtræ oculis, munere ac beneficio Geometriæ ſubiectum conſpicimus. Adde Geometriam hominibus pluruma, quæ penitus incredibilia eſſe videntur, omniumq; fidem ſuperant, perſpicua facere, credibilia eſſe oſtendere: Quale eſt illud, quod de Archimede Syracuſio teſtantur hiſtoria. Cùm enim Hieron Syracuſanorum Rex nauem, quam Ptolemæus Ægyptiorum Rex miſſere ſtatuerat, tanta eſſet molis fabricatus, vt eam omnes vnà Syracuſij à loco dimouere minimè valerent: Archimedes Geometra peritiſſimus, vſum Geometriæ viribus fretus Regi promiſit, ſe effecturum, vt ipſam ſolus Rex abſque vllo labore ſubduceret. Quod cùm præſtitiſſet, in conſpectu omnium Rex ſtupefactus exclamaſſe perhibetur; Ab hac die, quodquod dixerit Archimedes, illi credendũ eſt. Non diſſimile huic videtur mihi eſſe pulcherrimũ illud factum, quod idem Archimedes ope Geometriæ geſſit Syracuſis, quando corona ex auro argentoq; confecta, quam Rex ſummo ſtudio fabricari iuſſerat, nõ diſſoluta, ſingula auri & argenti pondera, quæ inter ſe aurificis fraude ac dolo commiſta erant, ſubtiliſſimè offendit. Neq; ſilentio prætereundum eſt, eundem Archimedem robori ac efficacia demonſtrationũ Geometricarum innixum ſæpenumero iactitaſſe, ſi haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc noſtrã, quam incolimus, è loco ſe commouere poſſe. Parua ſanè, datis viribus quibuſcunq;, pondus quodcunq; ſe poſſe mouere. Et alia id genus, non ſolum ab Archimede, verùm etiam ab aliis præclaris, & illuſtribus Geometris patrata eſſe, memoriæ proditũ eſt.

Tantum

Tantum denique nomen una hac Geometria Archimedi peperit, vt Marcellus Romani exercitus Imperator, contra quem dira Syracusanam urbem defenderat Archimedes, machinis quibusdam per Geometricas demonstrationes adinuentis, & constructis, in expugnata urbis direptione, ac cade ciuium vnius Archimedis saluti publico edicto cauerit: quem vbi contra imperium suum & voluntatem à gregario quodam milite interfectum cognouit, vehementer doluit, auumque honorem mortuo habuit, quem viuo habere non potuit. Cuius sepulchrum Cicero à se, cùm in Sicilia Quæstoris officio fungeretur, repertum esse, mirandum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in summo semper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedat quoque ad præstantiam vtilitatemque Geometriæ, quòd cùm demonstrationes Geometricæ sint maximè illustres, nemo sine ipsis satis perspiciet, qua sit vis demonstrationum, nemoque eisdem destitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidem ingenuè fatetur Galenus insignis Philosophus, ac Medicorum Princeps, in libro, quem de libris propriis inscripsit. Is enim instructissimus rebus Dialecticis, cùm scholas Peripateticorum ac Stoicorum sui temporis percurrisset omnium; & præcepta mira cum animi ardore studioque arripuisset, nihil ferè ab ipsis audisse se testatur, quod ad demonstrationis cognitionem pertineret; quinimò pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controuersia posita, nonnulla etiam naturali rationi pugnantia reperisse. Ita vt ad Pyrrhoniorum ferè (erant Pyrrhonij Philosophi, qui nihil decernebant, sed de omnibus dubitabant) hæsitantiam deuenturus fuerit, nisi Arithmetica, Geometria, Dialecticaque (quibus artibus ab auia & patre fuerat institutus) esset cognitione scientiaque reuocatus. Vnde suadet, sequendos esse characteres illos Arithmeticos, & linearum demonstrationes. Plato etiam cùm ob alias, tum ob eam etiam causam discendam esse Geometriam dixit, quòd eius cognitio maximè sit vtilis, vt alias artes facilius & rectius percipiantur. Postremò est hæc summa laus Geometriæ, omnibusque modis prædicanda, quod non hæsit in exiguis & inferioribus hisce machinis, à quibus originem traxit, sed euolauit in cælum vsque, & humanas mentes humi abiectas in illam rursus cælestem sedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiusque administrationem & gubernationem nostro intellectui subiecit.

DIVISIO GEOMETRIÆ ET ELEmentorum Euclidis.

GEOMETRIA diuiditur in Planorum contemplationem, quæ generali vocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprio ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria vniuersè sibi hunc scopum proponit, vt plana, aut solida vel constituat, vel constituta inter se comparet, aut diuidat. Neque verò mirum alicui videri debet, quòd cùm tria

sint

sint genera magnitudinum, linea, superficies, & corpus, solùm de duobus posterioribus extent propria contemplationes, vt diximus: non autem de lineis, vel etiam punctis. Non, inquam, debet videri mirum, quoniam, vt ait Proclus, Geometria potissimùm circa figuras versatur, quæ in planis duntaxat, vel etiam solidis consistunt omnes. Nec enim puncta, vel linea figuram vllam constituunt sine planis aut solidis, ac proinde necesse non erat, propriam de punctis, & lineis scientiam instituere; Superficiebus verò, siue planis, & corporibus, solidisve maximè conuenisset, vt proprias nanciscerentur tractationes. Volens igitur summus harum rerum artifex Euclides in hisce elementis perfectam, & omnibus numeris absolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus sex libris agit de planis, in posterioribus verò quinque de solidis acutissimè disputat, eorumq; proprietates maximè illustres peruestigat. Quoniam verò cùm res omnes Geometricæ, tum præsertim solida illa quinque regularia, quæ corpora Platonica dici solent, perfectè tractari non poterant, absque linearum commensurabilium, atque incommensurabilium notitia; Immò verò quàm plurima magnitudines sub mensuram cadere nulla ratione absque earundem linearum cognitione possint, cùm earum latera sæpenumerò sint talia, vt ea communis & nota mensura datu metri nequeat, vt liquidò constat ijs, qui aliquando demonstrationes Geometricas in opus contulerunt, atque vsum: idcirco vt hisce elementis Geometricis complecteretur omnia documenta ad magnitudinum intelligentiã, dimensionemq; requisita, Stereometria sua præfixit decimũ librum, in quo subtiliter & copiosè de huiusmodi lineis differit. Intelligens rursus Euclides, neq; hanc tractationẽ linearum commensurabilium & incommensurabilium sine numerorũ cognitione posse consistere, ante decimum librum agit de numerorum passionibus, easq; copiosè & diligenter tribus libris, qui hunc antecedũt, est persecutus. Quamobrem totũ hoc volumen elementorũ Geometricorũ quindecim libris comprehensum (quorum quidem priores tredecim sine vlla controuersia Euclidi ascribuntur ab omnibus; posteriores verò duo à nonnullis Hypsiclis Alexandrini esse creduntur) secari rectè potest in quatuor partes, ita vt prima pars contenta sex prioribus libris agat de planis; Secunda tres sequentes complectens, passiones numerorum perscrutetur; Tertia, quam solus decimus constituit liber, de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusque disputet; Quarta denique reliquis quinque libris absoluta scientiam solidorũ, siue corporum complectatur. Prima pars rursum triplex est; Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis absolutè, inuestigando eorum æqualitatem & inæqualitatem: In quinto verò libro de proportionibus magnitudinum in genere disputatur: In sexto denique proportiones figurarum planarum discutiuntur. Quid verò Euclides in singulis alijs libris pertractet, propriis in locis exprimemus.

QVID

QVID PROBLEMA, QVID THEOREMA, quid Propoſitio, & quid Lemma apud Mathematicos.

DEMONSTRATIO omnis Mathematicorum diuiditur ab antiquis ſcriptoribus in Problema, & Theorema. Problema vocant eam demonſtrationem, qua iubet, ac docet aliquid conſtituere. Vt ſi quis conetur demonſtrare, ſupra lineam rectam finitam poſſe triangulum aquilaterum conſtitui, appellabitur huiuſcemodi demonſtratio problema, quoniam docet, qua ratione triangulum aquilaterum conſtitui debeat ſupra rectam lineam finitam. Dictum eſt autem hoc genus demonſtrationum Problema, ad ſimilitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos, problema dicitur quæſtio illa, cuius vtraque pars contradictionis (vt ipſi loquuntur) eſt probabilis, qualis hæc eſt quæſtio; An totum diſtinguatur realiter à ſuis partibus ſimul acceptis: Sic etiam quæſtum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent conſtruere, & cuius contrarium effici etiam poteſt, problema appellatur. Vt ſi quis proponat ſe demonſtraturum, ſupra lineam rectam finitam triangulum aquilaterum poſſe conſtitui, efficiet problema, quia & triangulum non aquilaterum, nempe iſoſceles, vel ſcalenum, ſupra eandem lineam conſtitui poteſt. Pari ratione, qui inſtituit angulum rectilineum ſecare bifariam, problema nobis exhibet, propterea quòd angulus idem diuidi poteſt in partes non æquales. Eſt tamen diſcrimen non paruum inter Dialecticorum & Mathematicorum problema. Nam in problemate Dialectico vtrauis pars contradictionis ſuſcepta confirmatur tantùm probabiliter, ita vt intellectus cuiuſque ambigat, vtranam illius pars vera ſit: In Mathematico verò, quamcunque quis partem elegerit, eam firma demonſtratione, ita vt nihil omnino dubij ſit reliquum, comprobabit. Si enim Geometra ſtatuat ex puncto quolibet lineæ rectæ propoſitæ lineam perpendicularem educere, efficiet vtiq; hoc ipſum ratione conſtanti, & euidenti: Eodem modo dicendum eſt, ſi ex eodem puncto velit educere lineam non perpendicularem. Theorema autem appellant eam demonſtrationem, qua ſolam paſſionem aliquam, proprietatemve vnius, vel plurium ſimul quantitatum perſcrutatur. Vt ſi quis optet demonſtrare, in omni triangulo tres angulos eſſe æquales duobus rectis, vocabunt talem demonſtrationem Theorema, quia non iubet, aut docet triangulum, aut quippiam aliud conſtruere, ſed contemplatur tantummodo trianguli cuiuslibet conſtituti paſſionem hanc, quòd anguli illius duobus ſint rectis æquales. Vnde à contemplatione ipſa, hæc demonſtratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione poteſt, contradictionis vtraque pars vera vt ſit. Si enim quis demonſtret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duobus eſſe rectis angulis æquales, nullo poterit modo fieri, vt inæquales quoq; ſint duobus rectis. Eadem ratio in aliis theorematibus eſt intelligenda. Itaq; vt vno verbo dicam, quæſtum illud Mathematicum conſtruere aliquid

aliquid docens, cuius etiam oppositum potest effici, Problema: illud vero, quod nihil docet construere, & cuius pars opposita perpetuò falsa existit, Theorema appellatur. Vnde si quis proponeret in modum problematis, se in semicirculo velle angulum rectum constituere, irridendum omnino esset, & Geometria prorsus ignarus iudicandus; quoniam omnes anguli in semicirculo constituti sunt recti, vt demonstratur libro 3. propositione 31. Quamobrem theorema hoc, & non problema dicendum erit. Caterùm tam problema, quàm theorema dici consueuit apud Mathematicos Propositio, propterea quòd vtrumque aliquid nobis proponit, vt in exemplis adductis constat. Hacidè dixerim, vt studiosus lector non miretur, quando reperiet in Euclide, Apollonio, & cæteris Mathematicis, propositionum alias dici problemata, alias theoremata. Elementa enim Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (vt aliorum interim volumina taceam) constant partim problematibus, partim theorematibus. Demonstrationes problematum semper concludunt his ferè verbis: Quod faciendum erat; Theorematum verò hisce: Quod ostendendum, vel demonstrandum erat; habita nimirum ratione finis vtriusque. In quolibet autem problemate, ac theoremate plures demonstrationes continentur, & non vna tantùm, quamuis vltimus syllogismus demonstrationis solùm concludat id, quod in initio demonstrandum proponitur, vt declarabimus in prima Euclidis propositione, & in cæteris omnibus manifestum erit.

QVONIAM verò ad demonstrationes problematum atq; theorematum sæpenumero requiruntur alia quædam theoremata, vel problemata minus principalia, & qua facile ex ijs, qua prius demonstrata fuere, intelligi possunt; inseruntur interdum à Geometris huiusmodi theoremata, & problemata problematibus, atq; theorematibus, de quibus præcipuè agitur, vt breuius demonstrari possint. Vocant autem illa Lemmata, propterea quòd solùm assumuntur ad alias demonstrationes; non autem de illis præcipua disputatio instituitur, quemadmodùm de alijs itaq; Lemma dici potest demonstratio, seu constructio illius, quod ad demonstrationem alicuius theorematis, vel problematis principalis assumitur, vt demonstratio expeditior fiat, ac brevior.

QVÆNAM SINT PRINCIPIA APUD Mathematicos.

CVM omnis doctrina, omnisq; disciplina ex præexistente cognitione, vt auctor est Aristoteles, atq; ex assumptis, & concessis quibusdam principijs suas demonstret conclusiones; Nulla autem scientia ex eiusdem Aristotelis, aliorumq; Philosophorum sententia sua principia demonstret; habebunt vtique & Mathematica disciplinæ sua principia, ex quibus posita, & concessis sua problemata & theoremata confirment. Horum autem tria tantummodo genera apud Mathematicos reperiuntur. In primo reperiuntur omnes

definis-

definitiones, quas nonnulli cum Aristotele suppositiones, & Gulielmus Proclus, appellant. His autem vocabula artis explicantur, ne in tractatione ipsa, nominum ambiguitate, aut obscuritate circumuenti in paralogismos incidamus. Secundum genus complectitur Petitiones, siue Postulata, quæ quidem adeò clara sunt, & perspicua in illa scientia, quæ in manibus habetur, vt nulla indigeant confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum exposcant, ne vlla sit in demonstrando hæsitatio, aut difficultas. Ad tertium genus referuntur Axiomata, seu communes animi notiones, quæ non solùm in scientia proposita, sed etiam in omnibus alijs ita manifestæ sunt, & euidentia, vt ab eis nulla ratione dissentire queat is, qui ipsa vocabula rectè perceperit. Atque his principijs rectè mihi videtur accommodari posse id, quod in Metaphysicis scribit de primis principijs Aristoteles: A tanua quis aberrabit? Vt præclarè à Cicerone, Pronunciata, siue Effata appellentur. Euclides igitur hoc in volumine Geometricorum Elementorum præmittit ante demonstrationes suarum conclusionum omnia hæc principia, vt ex ipsis, quæ quidem facilè à quouis intelliguntur, deducat admiranda theoremata, quibus nemo vnquam assensum præberet, nisi certa ac euidenti ratione confirmarentur. Vnde hoc etiam nomine summis laudibus efferenda est Geometria, omnibusque seculis prædicanda, quòd ex tam exiguis initijs cuilibet quantumuis rudi & ignaro notissimis, & quidem perfacilibus progredatur ad theoremata primo aspectu ab omni sensu humano, & intellectu remota, quæ tamen omnia miro ordine, ac methodo facili, demonstrationibusque certissimis ita confirmat, vt nihil omnino dubij in eis relinquatur. Porrò in huiusce modi principijs tradendis hic ordo ab Euclide seruatur, vt in ipso quidem introitu scientia proponat principia toti Geometriæ communia, in alijs autem deinde libris, vbi res postulat, ea exponat principia, quæ propriè, & peculiari quadam ratione, ad materiam illorum subiectam videntur spectare. Neque verò omnia principia Geometrica ab Euclide in his elementis sunt explicata, sed multa reliquit lectori disquirenda; quæ tamen ex ijs, quæ tradidit, sine magno labore ac studio percipi possunt, & intelligi. Verùm ne in hac quoque parte defuisse videamur rerum Mathematicarum studiosis, adiunximus varijs in locis ad principia ab Euclide posita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maximè cursum demonstrationum arbitrati sumus retardari posse. Sed iam ad expositionem ipsam Principiorum Euclidis accedamus.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

I.

PVNCTVM eſt, cuius pars nulla eſt.



OTVS hic primus liber in eo poſitus eſt, vt nobis tradat ortus proprietatesq; triangulorum, tum quod ad eorum angulos ſpectat, tum quod ad latera: quæ quidem inter ſe comparat interdum, interdum verò vnumquodq; per ſe inſpicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos conſiderat, aliquando verò ex angulis latera, ſecundũ æqualitatem atq; inæqualitatem rimatur. Idemq; variis rationibus inquirit in duobus quanlibet triangulis inter ſe collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumq; contemplationẽ aggreditur, tum inter ſe, tum etiam, vt cum triangulis inter eaſdem parallelas conſtitutis conferuntur. Vt autẽ hæc omnia rectius & commodius exequatur Euclides, docet diuiſionẽ anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, conſtitutionem lineæ perpẽdicularis, quo pacto angulus angulo ſit æqualis, & alia huiuſmodi. Itaque vt vno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli ſententia, rectilinearum figurarum maximè prima, ac præcipua, triangula inquam, atque parallelogramma. Ante omnia verò Euclides more Mathematicorum rem propoſitam exorditur à principiis, initio facto à definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate continua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac facilius percipietur, ſi prius intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, vnas ſecundum longitudinem, alteras ſecundum latitudinem, & ſecundum profunditatem altitudinemue alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes

habet, sed quadam vnicas tantùm secundum longitudinem; quadam duplices, ita vt illis adijciat partes etiam latitudinis; quadam denique praeter duplices has partes, tertias quoque altitudinis, siue profunditatis continet. Quantitas enim omnis continua aut longa solùm est, aut longa simul, & lata, aut longa, lata, atque profunda. Neque aliam dimensionem habere potest res vlla quanta, vt rectè demonstrauit Ptolemaeus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in pristinam dignitatem restituto, nec non, vt ait Simplicius in libello de Dimensione, qui quidem, quod sciam, adhuc nondum est excusus. Itaque quod in quantitate continua, siue magnitudine existit, intelligiturq; sine omni parte, ita vt neque longum, neque latum, neque profundum esse cogitetur (vt nimirum excludamus animam rationalem, Nunc vel Instans temporis, & vnitatem, quae etiam partes non habent) id appellatur ab Euclide, & à Geometris punctum. Huius exemplum in rebus materialibus reperiri nullum potest, nisi vetis extremitatem alicuius acus acutissimae, similitudine puncti exprimere; quod quidem omni ex parte verum non est, quoniam ea extremitas diuidi potest, & secari infinitè, punctum verò indiuiduum prorsus debet existimari. Denique in magnitudine id concipi debet esse punctum, quod in numero vnitas, quodque in tempore instans. Sunt enim & haec concipienda indiuidua. punctum

II.

LINEA verò, longitudo latitudinis expers.

DEFINIT hic lineam, primam speciem magnitudinis, quam dicit esse quantitatem longam ductaxat, non autem latam, intellige neque profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam necessariò profunditas remouetur, non autem contra. Lineam autem hanc, siue longitudinem absque latitudine, non absurdè concipere, intelligereq; poterimus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati. Finis enim, seu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quaedam est, ad longitudinem ipsiusmet luminis, & vmbra extensa, carens omni latitudine, cùm sit limes vtriusque. Mathematici quoque, vt nobis inculcent veram lineae intelligentiam, imaginantur punctum iam descriptum superiore definitione, è loco in locum moueri. Cùm enim punctum sit prorsus indiuiduum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Vt si punctum A, fluere intelligatur ex A, in B, vestigium effectum A B, linea appellabitur, cùm verò interuallum inter duo puncta. A, & B, comprehensum sit longitudo quaedam, carens omni latitudine, propterea quòd punctum A, omni priuatum



datum dimensione, eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum est, vt alij dixerint, lineam nil esse aliud, quam puncti fluxum: Alij vero, magnitudinem vno contentâ interuallo. Potest enim linea vno modo tantùm modo, vtpote secundum longitudinem secari, non diuidi.

III.

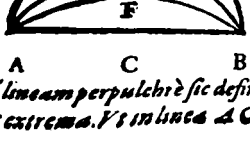
LINEÆ autem termini, sunt puncta.

DOCET, quanam sint extrema lineæ cuiusuis, seu termini, dicens lineam terminari, siue claudi vtrinque punctis; Non quòd omnis linea terminos habeat; quomodo enim lineæ infinitæ terminos assignare poterimus? quæ etiam ratione in lineâ circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quòd linea qualibet habens extrema, in suis extremitatibus puncta recipiat. Vt superior linea A B, extrema habet puncta A, & B. Idemq; in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum est, ita vt earum extremitates sola esse puncta cogitemus.

IV.

RECTA linea est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

TRIPLEX omnino est linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, siue composita ex vtraque. Ex his describit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit esse eam, quæ æqualiter inter sua puncta extenditur, hoc est, in quam nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo subsultat; in qua denique nihil flexuosum reperitur. Hanc nobis ad vnum exprimit filum aliquod tenue summa vi extentum: In eo enim omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent situm, neque vlla est alia sublimior, aut humilior, sed omnes æquabiliter inter extremos fines posita progrediuntur. Proclus hanc definitionem exponens ait, tunc demum lineam aliquam ex æquo sua interiacere puncta, quando æquale occupat spatium ei, quod inter sua situm est puncta extrema. Vt linea A C B, dicetur recta, quoniam tantum occupat præcisè spatium, quanta est distantia puncti A, à puncto B. Linea verò A D B, A E B, A F B, non dicentur rectæ, cùm maiora obtineant spatia, quàm sit distantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta lineæ A C B, inter quæ est punctum C, æqualiter inter extrema A, & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in alijs lineis, quoniam puncta D, E, F, subsultant ab extremis A, & B. Plato rectã lineam perpulchrè sic definit: Linea recta est, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea A C B, si punctũ C, aut quodvis aliud me-



dium, ſim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminandi, impedimento vtiq; eſſet C, punctum interiectum, ne B, extremum alterum ab A illuminaretur: Rurſus oculus in A, exiſtens extremo, nõ videret aliud extremũ B, ob interiectum punctũ C; q̃ quidem non contingit in lineis non rectis, vt perſpicuum eſt in lineis A D B, A E B, A F B. Archimedes verò ait, lineam rectam eſſe minimam earum, qua terminos habent eoſdem; qualis eſt A C B, comparata cum A D B, A E B, A F B. Si enim A C B, nõ eſſet minima earũ quæ eoſdem terminos A, & B, poſſident, nõ ex æquo interiaceret ſua puncta, ſed ea potiùs linea, quæ minor diceretur, quàm A C B. Cumanus denique deſcribens rectam lineam, vocat eam breuiſſimam ex vno puncto in aliud extenſionem. Quemadmodum autem Mathematici per fluxum punctis imaginarium concipiunt deſcribi lineam, ita per qualitatem fluxus punctis qualitatẽ linea deſcripta intelligunt. Si namq; punctum recta fluere concipiatur per breuiſſimum ſpatium, ita vt neq; in hanc partem, neq; in illam deflectat, ſed æquabilem quendam motũ, atq; inceſſum teneat, dicetur linea illa deſcripta, Recta: Si verò punctum fluens cogitetur in motu vacillare, atq; hinc inde titubare, appellabitur linea deſcripta, mixta: Si deniq; punctum fluens in ſuo motu non vacillet, ſed in orbem feratur vniformi quodam motu, atq; diſtantia à certo aliquo pũcto, circa quod fertur, vocabitur deſcripta illa linea, circularis. Itaq; ſi duo puncta moueantur ſimilibus prorſus motibus, ita vt ſemper æqualiter inter ſe diſtent; deſcribentur ab ipſis duæ lineæ ſimiles, hoc eſt, ſi vna earum fuerit recta, erit & altera recta: ſi verò vna fuerit curua, erit & altera eodem omnino modo curua, &c. Lineas non rectas, quæ omnes obliquæ dici poſſunt, non definit hoc loco Euclides, ſed circularem exponet definitione decimaquinta, miſtam prorſus omittens, quod ea in hiſce elementis Geometricis nullum habeat vſum. Sunt autem plurima genera linearũ miſtarum; quædam enim ſunt vniformes, quædam difformes. Vniformium rurſus alia ſunt in plano, alia in ſolido. In plano ſunt Hyperbole, Parabole, Ellipſis, de quibus agit copioſiſſimè Apollonius in conicis elementis; linea Conchoideos, de qua Nicomedes; linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis ſpiralibus tractationem inſtituit, & alia huiuſmodi. In ſolido, ſeu ſuperficie curua ſunt alterius generis linea helica, quàm ea ab Archimede deſcripta, qualis eſt illa, quæ circa cylindrum aliquem conuoluitur; nec non ea, quæ circa conum exiſtit, vel etiam quæ circa ſpharam, cuiuſmodi ſunt ſpiræ illæ, quas Sol deſcribit ab ortu in occaſum, vt in ſphæra docuimus. Difformium autem infinitus eſt numerus, quas non eſt opus hic recenſere. Ex his conſtat, duas tantùm eſſe lineas ſimplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quacunque ſunt, miſtas appellari, quod ex illis componantur. Vnde ingeniosè concludit Ariſtoteles in libro de Cœlo, iuxta triplicem lineam, tres tantùm eſſe motus, duos quidem ſimplices, rectum

dium & circularem, tertium verò mistum, siue ex illis duobus compositum.

Sed quoniam lineam rectam regula ducere solemus, doceamus, qua ratione regulam propositam examinare possimus, num linea per illam

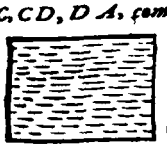


descripta recta sit, necne. Sit ergo regula A B, secundum cuius latus C D, recta C D, describatur ex puncto C, in punctum D. Deinde conuertatur regula, vt manente eadem parte superiore, punctum C, statuatur in D, & punctum D, in C: & secundum idem latus regulæ C D, recta ducatur ex eodem puncto C, in punctum D. Nam si posterior hæc linea priori omni ex parte congruet, dubitari non debet, quin regula A B, in lineis rectis ducendis fidere possimus: Si verò non congruet omni ex parte, latus illud C D, perfectè rectum non erit, sed corrigendum erit diligentius.

V.

SVPERFICIES est, quæ longitudinem, latitudinemq; tantùm habet.

POST lineam, quæ est prima quantitatis continua species, vnicamq; habet dimensionem, definit superficiem, quæ secundam magnitudinis speciem constituit, additq; prima dimensioni secundum longitudinem, alteram secundum latitudinem. Nam in superficie reperitur non solùm longitudo, vt in linea, verùm etiam latitudo, sine tamen omni profunditate. Vt quantitas A B C D, inter lineas A B, B C, C D, D A, comprehensa, consideratq; secundum longitudinem



A B, vel D C, & secundum latitudinem A D, vel B C, omnis expers profunditatis, appellatur superficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiusque corporis, si ab ea omnis soliditas intellectu auferatur. Non incongruè etiam, vt ait Proclus, imaginem quasi expressam superficies nobis exhibent vmbræ corporum. Hæ enim cùm interiorem terræ partem penetrare non possint, longæ tantùm erunt, & latæ. Mathematici verò, vt nobis eam ob oculos ponant, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri: Vestigium enim relictum ex ipso motu erit quidem longum, propter longitudinem lineæ, latum quoque propter motum, qui in transuersum est factus; nulla verò ratione profundum esse poterit, cùm linea ipsum describens omni careat profunditate; quare superficies dicetur. Vt si linea A B, fluat versus D C, efficietur superficies A B C D. Alij describente: superficiem dicunt, eam esse corporis terminum: Alij verò, magnitudinem duobus constantem interuallis.

Potest enim superficies diuidi, & secari duobus modis, & no quidem secundum longitudinem, altero verò secundum latitudinem.

VI.

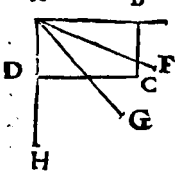
SVPERFICIEI autem extrema sunt lineæ.

NON dissimilis est hac definitio superiori, qua termini lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates superficies esse lineas, quemadmodum lineæ fines extitere puncta. Vt superioris superficiei A B C D, extrema sunt linea A B, B C, C D, D A. Eodemq; modo in quacunq; altera superficie, quæ extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in superficie infinita, vel etiam sphærica, quæ corpus sphæricum circumdat. Potest etiã superficies aliqua claudi, & terminari vnica tantùm linea, qualis est circularis superficies, vt diximus in definitione circuli.

VII.

PLANA superficies est, quæ ex æquo suas interiacet lineas.

HÆC quoque definitio similitudinem quandam descriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas suas interiacet, ita vt mediæ partes ab extremis sursum, deorsúmue subsultando, non recedant, appellabitur plana: qualis est superficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum sunt collocatæ, ita vt nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ sunt situm, nec vlla est alia sublimior, humiliórue, sed omnes æquabiliter protenduntur. Alij superficiem planam definiunt, dicentes eam esse, cuius partes mediæ obumbrant extrema: Vel esse minimam, siue breuissimam omnium, quæ eadem habent extrema: Vel cuius omnibus partibus recta linea accommodari potest, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt superficies A B C D, tum demum plana dici debet,



quando linea recta A E, circa punctũ A, immobile circumducta, ita vt nunc eadem sit, quæ A B, nunc eadem, quæ A F, nunc eadem, quæ A G, & nunc eadem, quæ A H, nihil in superficie offendit depressum, aut sublatum, sed omnia puncta superficiei à linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quod si minima superficiei particula alijs humilior à linea recta nõ tangeretur, vel ipsa linea recta liberè non posset circumduci, propter aliquem tumorem, seu eminentiam in superficie occurrentem, tam non posset nuncupari plana. Itaque vt sit plana, requiritur vt omnibus modis possit recta linea commensurari, hoc est, vt ei applicari possit recta linea secundum A B, & A F, & denique secundum omnes

partes

partes. Hæc autem superficies sola erit ea, quam imaginari, & intelligere possumus describi ex motu lineæ rectæ in transuersum, qui super duas alias lineas rectas conficitur. Vt si linea recta A B, per duas rectas A D, B C, feratur, efficietur superficies perfectè plana, iuxta omnes definitiones. Non enim difficile erit huic superficiei traditas descriptiones accommodare. Solent Mathematici superficiem planam frequenter appellare planum, ita vt quando loquuntur de plano, intelligenda semper sit superficies plana. Cætera omnes superficies, quibus non omni ex parte accommodari potest linea recta, qua-



lis est superficies interior alicuius fornicis, vel exterior alicuius globi, columnæve rotundæ, vel etiam coni, &c. appellantur curuæ, & non planæ. Quamuis enim superficies columnæ rotundæ, seu cylindri secundũ longitudinem adaptari possit linea recta, tamen secũdum latitudinem minimè potest. Idemq́ dicendũ est de aliis. Superficies autem curuæ duplex est, connexa videlicet, vt exterior superficies sphæræ, vel cylindri; & concaua, vt interior fornicis, siue arcus alicuius. Quoniam verò omnium harum contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro solùm planam nobis explicauit, de qua est disputaturus prioribus sex libris.

VIII.

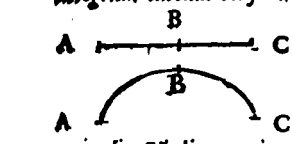
PLANVS verò angulus, est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, quidnam sit angulus planus, dicens; Quandocunque duæ lineæ in plana aliqua superficie inuicem concurrunt, & non in directum constituuntur, efficietur ex huiusmodi concursu, seu inclinatione vnius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana constituatur superficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ A B, A C, concurrunt in A, & non iacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem existentẽ superficie, in qua duæ illæ lineæ constituuntur. Dicen-



tur autem duæ lineæ non in directum iacere, quando altera earum versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eam secat, vel certe statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus, qui fit, quando duo circuli se contingunt, vel etiam, quando linea recta circulum tangit. Protracta enim recta linea post punctum contactus, quanquam non secet circulum, tamen statim post illud ab eo seiungitur. Eodem pacto circularis illa linea secundum propriam dispositionem, ac formam extensa recedit à recta tangente, quamuis eam non secet. Vnde verò est angu-

lus constitutus in illo contactu: qua de re plura scribemus in propositione 16. tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eam non esse angulum. Quod si duæ lineæ se mutuo tangant iacentes in directum; ita vt alterutra producta congruat toti alteri, non fiet vllus angulus ex illo concursu, cùm nulla sit inclinatio, sed amba vnam integram lineam constituent. Vt quia recta AB, producta conuenit cum recta BC, non efficietur angulus in B.



Sic etiam non fiet angulus in B, ex lineis curuis AB, BC, quia alterutra secundum suam inflexionem, & obliquum ductum extensa, cum altera coincidit. Quæ re in directũ dicentur iacere. Itaque vt linea recta efficiant angulum, necesse est, vt post concursum producta se mutuò secent: Curuæ autem lineæ, vel quarum altera curua, altera verò recta existit, angulum constituere verè possunt, etiamsi non se mutuo intersecent; sufficit enim, quod sese contingant, ita vt statim post contactum altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semota cernuntur. Consistit autem anguli cuiusuis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; linea etenim longiùs excurrentes non augent suam inclinationem, igitur neque anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum, quorum priùs solidos comprehendit, de quibus Euclides disserit in Stereometria, quique in corporibus existunt; Posteriùs verò sphærales, qui in superficie sphæra constituuntur ex circulorũ maximorũ circumferentijs, & de quibus copiosè agitur in sphæricis elementis Menelai. Horum autem omniũ explicatio in alium locum à nobis reijcitur, cùm hic de solis planis angulis sit futurus sermo.

IX.

CVM autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANGVLVS omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidem rectilineus dicitur, & de quo solùm hic agit Euclides: aut ex duabus curuis, quem curuilineum vocare licet; aut ex vna curua & altera recta, qui non ineptè mixtus appellatur. Ex hisce porrò lineis, possunt curuilinei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, seu habitudine linearum



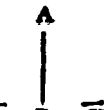
curuarum, vtpote secundum conuexum, & concauum, ceu in propositis angulis planè, & apertè perspicitur. Rectilineus verò variari non potest ratione inclinationis, habitudinis ve linearum, nisi masorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod est absurdum; cùm hoc modo augeatur tantùm angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & aliis commune est, non autem ita varietur, vt aliud constituat genus.

CVM

X.

CVM verò recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam eos, qui ſunt deinceps, angulos æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterq; æqualium angulorum: Et quæ inſiſtit recta linea, perpendicularis vocatur eius, cui inſiſtit.

VSVS frequentiſſimus reperitur in Geometria anguli recti, & linea perpendicularis, nec non anguli obtuſi, & acuti, propterea docet hoc loco Euclides, quinam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & quanam linea perpendicularis: In ſequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtuſum, & acutum. Non enim alius dari poteſt angulus rectilineus, præter rectum, obtuſum, & acutum. Igitur ſi recta linea A B, recta C D, inſiſtens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidem ideo dicuntur à Mathematicis eſſe deinceps, quod eos eadem linea C D, protracta, propè idem punctum B, efficiat) inter ſe æquales, quod tum demum fiet, quando recta A B, non magis in C, quam in D, inclinabit, ſed æquabiliter recta C D, inſiſtet, vocabitur vterque angulus B, rectus, & recta A B, perpendicularis rectæ C D, cui inſiſtit. Eadem ratione nominabitur recta C B, perpendicularis rectæ A B: quamvis enim C B, tantum faciat cum A B, vnum angulum, tamen ſi A B, extenderetur in rectum & continuum verſus punctum B, efficeretur alter angulus æqualis priori. Qua vero arte linea ducidebeat efficiens cum altera duos angulos æquales, docebit Euclides propoſitione 11. & 12. huius primi libri. Itaque vt in Geometria concludamus angulum aliquem eſſe rectum, aut lineam, quæ ipſum efficit, ad aliam eſſe perpendicularem, requiritur, & ſufficit, vt probemus angulum, qui eſt ei deinceps, æqualem illi eſſe. Pari ratione, ſi dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quæ ipſum conſtituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quoque eſſe. Quando enim anguli, qui ſunt deinceps, fuerint inter ſe æquales, nuncupatur vterque illorum rectus, & linea ipſos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definitionem: quando autem non fuerint æquales, non dicitur quiſquam illorum rectus, vt conſtabit ex ſequentibus duabus definitionibus, & propterea neque linea eos conſtituens perpendicularis appellatur. Hæc dixerim, vt videas, quidnam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quemnam vſum habeant apud Geometras deſcriptiones vocabulorum. Non enim magno labore hæc quæ diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.



XI.

OBTVSVS angulus eſt, qui recto maior eſt.



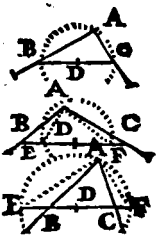
QVANDO recta A B, recta C D, insistens non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob eam causam neutrum rectum, sed unum quidem recto maiorem, alterum verò minorem, dicitur maior angulus obtusus, qualis est angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis A B, B C.

XII.

ACVTVS verò, qui minor est recto.

VT in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis A B, B D, vocatur acutus. Itaque angulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, vt unus altero maior, minórue detur, cum linea perpendicularis eum efficiens non debeat magis in unam partem inclinare, quàm in alteram: Obtusus verò, & Acutus augeri possunt, & minui infinitis modis, cum ab illa inflexibilitate linea perpendicularis infinitis etiam modis recta linea possit recedere, vt perspicuum est. Quoniam verò ad quemuis angulum planum constituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in uno puncto plures existunt anguli, solent Mathematici, vt tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo linea conficiunt angulum, extremæ verò significant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia, in superiore figura angulum obtusum intelligunt per angulum A B C, acutum verò, per angulum A B D, quod diligenter est notandum, vt facile dignoscamus angulos, quorum mentio fit in demonstrationibus.

I A M verò proposito nobis angulo aliquo rectilineo, si experiri velimus, num rectus sit, an obtusus, acutusue, efficiemus id hoc modo. Contineant duæ rectæ A B, A C, angulum A. Ducta recta B C, vtcunque, quæ angulum subtendat, & diuisa bifariam in D, describatur ex D, vt centro ad interuallum D A, circumferentia circuli;



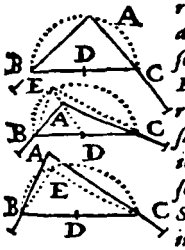
a 31. ter ej. *quæ si per puncta B, C, transeat, a erit angulus A, rectus, vtpote qui in semicirculo B A C, existat: si verò idem semicirculus rectam B C, secet in E, F, erit angulus B A C, obtusus; propterea quod, du-*

b 31. ter ej. *ctis rectis E A, F A, b angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est, qui quidem pars est anguli B A C. Si denique idem semicirculus rectam B C, productam secet in E, F, erit angulus*

c 31. ter ej. *B A C, acutus; propterea quod ductis rectis E A, F A, c angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est, qui quidem maior est angulo B A C.*

ALITER idem assequemur hoc modo. Describatur ex puncto D, quod rectam B C, dato angulo A, subtensam secat bifariam, semicirculus

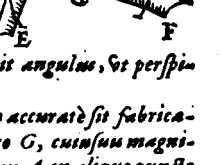
circulus ad interuallum DB, vel DC: qui si transeat per punctum A, datus angulus erit rectus, vtpote qui in semicirculo existat. Si ve-



rò idem semicirculus transeat supra punctum A, datus angulus erit obtusus. Ducta enim recta DA, secante circumferentiam in E, iungantur rectæ EB, EC; b eritq; angulus BEC, in semicirculo rectus. Cùm ergo angulus BAC, datus c maior sit angulo BEC, erit angulus datus A, recto maior, hoc est, obtusus. Si denique semicirculus idem secet rectas AB, AC, erit datus angulus acutus. Sumpto namque puncto E, inter rectas AB, AC, in circumferentiâ, iungantur recta EB, EC; d erit quę angulus BEC, rectus in semicirculo: e qui cum maior sit angulo dato A, erit datus angulus A, recto minor, id est, acutus. Non videatur autem mirum cuipiam, quod ad demonstrationem assumamus propositiones, quæ posterius demonstrantur ab Euclide; quod dicendum esse videtur à puritate demonstrationum Geometricarum: Non videatur, inquam, mirum, quia cum id, quod hoc loco ostendimus, necessarium non sit ad sequentes demonstrationes, poterit commodè differri, donec propositiones requisita sint demonstrata. Satius est, vt praxis huiusce rei hoc loco intelligatur. Idem obseruabimus in nonnullis praxibus problematum. Eas enim propriis in locis, quoad eum fieri poterit, proponemus, vt diuisionem anguli rectilinei in quotuispartes æquales eo in loco docebimus, vbi Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas æquales partes, &c. quanquam ad earum praxium demonstrationes necessaria sint propositiones posterius demonstratæ.

a 31. tertij.
b 31. tertij.
c 21. primi.
d 31. tertij.
e 21. primi.

FACILIVS idem cognoscemus beneficio normæ alicuius accuratè fabricatæ, qualem refert instrumentum ABC, constans duabus regulis AE, AF, ad angulum rectum in A, coniunctis. Nam si latus AB, huius normæ, recta AB, applicetur, cadente puncto A, in punctum A; si quidem & norma latus AC, recta AC, congruat, erit angulus A, rectus: si verò citra rectam AC, cadat norma latus AC, erit angulus A, obtusus; si denique latus norma AC, vltra rectam AC, cadat, acutus erit angulus, vt perspicuum est.



ITA autem normam examinabimus, num accuratè sit fabricata, nec ne. Descripto semicirculo BAC, ex centro G, cuiusuis magnitudinis, ductaq; diametro BC, ponatur angulus A, in aliquo puncto circumferentiæ, vt in A, latusq; vnum normæ, vt AB, per B, punctum extremum diametri transeat. Nam si alterum tunc latus AC, per alterum punctum extremum C, transeat, ritè fabricata erit norma ABC;

a 31. ter ma A B C; a quod tunc angulus B A C, in ſemicirculo B A C, rectus ſit. *ſit: ſi vero latus A C, non per C, tranſeat, emendanda erit norma; quia eius angulus A, tunc rectus non erit. Eadem ratione interiorem partem normæ examinabimus, ſi angulum D, circumferentiæ applicemus, & latera D E, D F, punctis extremis B, C, &c.*

XIII.

TERMINVS eſt, quod alicuius extremum eſt.

TRES ſunt termini iuxta hanc definitionem. Punctum enim terminus eſt, ſeu extremum lineæ: Linea ſuperficiei: & ſuperficies corporis. Corpus autem terminare amplius nihil poteſt, quod non reperiatur alia quantitas plures habens dimenſiones, quam tres. Omne ſiquidem terminatum ſuperat terminum ſuum vna dimenſione, vt perſpicuum eſt ex adductis exemplis.

XIV.

FIGVRA eſt, quæ ſub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

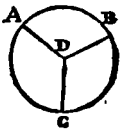
NON omnis quantitas terminos poſſidens Figura dici poteſt, ne lineam finitam figuram appellare cogamur: Sed ea ſolùm magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe ſuperficies terminata, & quæ profunditatem adepta quoque ſunt, vt ſolida finita Figura nomine appellabuntur. Ha enim proprie terminis comprehendi dicuntur. Nam linea finita non proprie dicitur punctis extremis comprehendi, cum puncta lineam non ambiant, ſed potius punctis terminari dicitur. Itaque termini debent quantitatem, quæ figura dicitur, ambire, & non tantum terminare. Superficies quoque infinita, vel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, Figura vocari nulla ratione poteſt, Figura vnico comprehenſa termino ſunt, Circulus, Ellipſis, ſphæra, ſphæroides, & alia huiuſmodi: Pluribus vero terminis incluſæ figuræ ſunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminatæ nunc pantur figuræ plana: ſolida autem circumſcriptæ, figura ſolida, ſiue corporea. Porro quia formas, ſeu typos variarum figurarum inſpicies quamplurimas in ſequentibus, planarum quidem in prioribus 10. libris, ſolidarum vero in poſterioribus quinque, propterea nulla hoc loco figura depingenda eſſe videtur.

XV.

CIRCVLVS, eſt figura plana ſub vna linea comprehenſa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

DEFI-

DEFINIT hic circulum, figuram inter planas perfectiſſimam, docens figuram illam planam, qua ſola linea circumſcribitur, ad quam lineam omnes recta linea ducta ab uno puncto, quod intra figuram exiſtit, ſint aquales, vocari circulum. Vt ſi ſuperficies, ſeu ſpatium concludatur ſola linea A B C, habuerit q; hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intus ſuſcepto, vtpote a D, omnes recta linea cadentes ad terminum A B C, quales ſunt D A, D B, D C, inter ſe ſint aquales, appellabitur talis figura plana, circulus alias non. Qua vero ratione in circulo punctum illud medium reperiri debeat, docebit Euclides propoſitione 1. tertij lib. Adiungit quoque Euclides, lineam extremam circuli, qualis eſt A B C, appellari Peripheriam, ſeu, vt Latini exponunt, circumferentiam. Poteſt circulus etiam hac ratione deſcribi. Circulus eſt figura plana, qua deſcribitur a linea recta finita circa alterum punctum extremum quieſcens circumducta, cum in eundem rurſus locum reſtituta fuerit, vnde moueri cœperat. Qua quidem deſcriptio perſimilis eſt ei, qua ab Euclide ſphæra deſcribitur lib. 11. Vt ſi intelligatur recta A D, circa punctum D, quieſcens moueri, donec ad eundem redeat locum, a quo dimoueri cœpit, deſcribet ipſa recta totum ſpatium circudare; punctum vero alterum extremum A, delineabit peripheriam A B C: Erit quoque punctum quieſcens D, illud, a quo omnes linea cadentes in peripheriam ſunt inter ſe aquales, propterea quod recta A D, circumducta, omnes lineas, qua ex D, poſſunt educi ad peripheriam, aque metiatur. Igitur Ellipſis, quamuis figura ſit plana vna linea circumſcripta, tamen quia in ea non datur punctum, a quo ad ipſam lineam terminantem omnes recta linea ſint aquales, circulus dici nequit.



XVI.

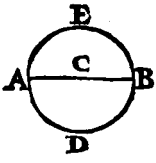
HOC vero punctum, centrum circuli appellatur.

DOCET, punctum illud intra circulum, a quo omnes linea recta ad circumferentiam ducta ſunt aquales, appellari centrum circuli; quale eſt precedentis figura punctum D. Vnde perſpicuum eſt, polum alicuius circuli in ſphæra, a quo omnes recta ad peripheriam circuli cadentes ſunt aquales, vt ait Theodoſius in ſphæricis elementis, non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, exiſtat in ſuperficie ſphæra, non autem in ſuperficie circuli; qua tamen eſt neceſſario requiſita conditio, vt punctum aliquod centrum vocetur Caterum, vt punctum aliquod circuli dicatur centrum, ſatis eſt, vt ab eo tres duntaxat linea cadentes in peripheriam ſint aquales inter ſe, vt demonſtrat Euclides propoſitione 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, vt omnes alia ab eodem puncto emiſſa inter ſe ſint aquales.

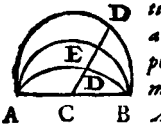
DIAME-

XVII.

DIAMETER autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat.



SI in circulo ducatur recta linea A B, per centrum C, ita vt extrema eius A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicetur, sed ea solummodo, quæ per centrum vsque ad peripheriam vtrinque extenditur. Vnde plures assignari poterunt in circulo diametri, vnum verò centrum duntaxat. Quod autem Euclides addit, circulum bifariam secari a diametro, perspicuum ex eo esse potest, quod diameter per medium circulum, vtpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, vt propter directum diametri per centrum transitum, vtrinque æquales circumferentiæ abscindantur. Quod tamen Thaletem Milesium hac ratione demonstrasse testatur Proclus. Concipiamus animo, portionem A D B, accommodari, & coaptari portioni reliquæ A E B, ita vt diameter A B, communis sit vtrique portioni: Si igitur circumferentia A D B, congruat penitus circumferentiæ A E B, manifestum est, duas illas portiones a diametro factas, esse inter se æquales, quandoquidem neutra alteram excedit: Si verò circumferentia A D B, non omni ex parte cadere dicatur super circumferentiam A E B, sed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta recta à centro C, secante circumferentiam A D B, in D, & circumferentiam A E B, in E, erunt duæ rectæ C D, C E, ductæ ex centro ad circumferentiam eiusdem circuli æquales, per circuli definitionem, cum tamen vna sit pars alterius, quod est absurdum. Non ergo cadet vna circumferentia extra aliam, vel intra, vel partim extra, partim intra, sed amba inter se aptabuntur, ideoq; æquales erunt. quod demonstrandum proponebatur.



EX hac demonstratione constat, diametrum non solùm circumferentiam, verùm etiam totam aream circuli secare bifariam. Cum enim semicircumferentiæ sibi mutuo congruant, vt ostensum est, congruent etiam superficies ipsæ inter diametrum, & vtramque circumferentiam comprehensæ, cum neutra alteram excedat. Quare æquales inter se erunt.

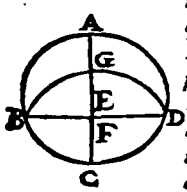
XVIII.

SEMICIRCVLVS verò est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

EXEM-

EXEMPLI gratia, in ſuperiori circulo figura A D B, contenta ſub diametro A B, & perſpheria A D B, dicitur ſemicirculus, quæ, vt in præcedenti definitione oſtendimus, ea eſt dimidiata pars circuli. Eadem ratione erit figura A E B, ſemicirculus. Idem autem punctum C diametrum ſecans bifariam, centrum eſt in circulo, & in ſemicirculo.

QVOD ſi recta linea B D, non tranſeat per centrum E, ſecabitur circulus ab ea non bifariam, ſed in duas portiones inæquales B A D, B C D, quarum ea, in qua centrum circuli exiſtit, cuiuſmodi eſt portio B A D, maior eſt, quàm alia B C D, extra quàm centrum E, reperitur. Eſſe autem portiones B A D, B C D, inæquales, ita probari poteſt. Concipiatur per centrum E, ducta diameter ad rectam B D, perpendicularis A G. Si igitur dictæ portiones dicantur eſſe æquales, & portio B C D, intelligatur moueri circa rectam B D, vt ſuper portionem B A D, cadat, congruet illa portio huic, & recta F C, rectæ F A, congruet, ob angulos rectos ad F, qui omnes inter ſe æquales ſunt ex defin. 10. cum ſint ſibi mutuo deinceps. Recta ergo F C, quæ nunc eadem eſt, quæ F A, maior erit, quàm E A, pars ipſius F A. Cùm ergo ipſi E A, ſit æqualis E C, quod amba ducantur è centro ad circumferentiam, erit quoque F C, maior quàm E C, pars quàm totum, quod eſt abſurdum. Non igitur portio B C D, portioni B A D, congruet, ſed intra eam cadet, cuiuſmodi eſt portio B G D, vt recta F G, eadem tunc exiſtens; quæ F C, minor poſſit eſſe quàm E A, vel E C. Si namque diceretur cadere extra, vt ſi circulus eſſet B C D G, cuius centrum E, & portio B C D, caderet extra B G D, qualis eſt portio B A D, eſſet rurſus F A, eadem tunc exiſtens, quæ F C, maior quàm E G, hoc eſt, quàm E C, atque ita pars F C, maior rurſum foret toto E C. quod abſurdum eſt. Ex quo patet, portionem B A D, in qua centrum E, exiſtit, maiorem eſſe reliqua portione B C D, cum hæc æqualis ſit portioni B G D, quæ pars eſt portionis B A D. Cùm enim oſtenſum ſit, portionem B C D, circa rectam B D, circumductam non poſſe congruere portioni B A D, neque cadere extra, cadet omnino intra, qualis eſt B G D.



XIX.

RECTILINEÆ figuræ ſunt, quæ ſub rectis lineis continentur.

POST definitionem circuli, traditurus iam Euclides deſcriptiones variarum figurarum, explicat prius, quanam figura dicantur rectilinea. De his enim potiſſimum ſermo futurus eſt in hiſce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ vndiq; rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perſpicuum eſt, figuras planas curuis lineis

lineis comprehensas, dici curuilineas. Eas verò, quæ partim curuis, partim rectis circumscribuntur, appellari mixtas. Varia autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclide describentur.

XX.

TRILATERÆ quidem, quæ sub tribus.

AFFIRMANS Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circumscribuntur, apertè nobis innuit, quoniam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot sint anguli, quot latera, seu recta linea, ex quibus constant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes species iam iam adducentur.

XXI.

QVADRILATERÆ verò, quæ sub quatuor.

EADEM ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius varia species mox subsequentur.

XXII.

MVLTILATERÆ autem, quæ sub pluribus, quàm quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

QVONIAM species rectilinearum figurarum sunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progressum: Nam tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam speciem, sub qua omnia triangula continentur; quatuor constituunt secundam, qua omnia quadrangula complectitur; quinque tertiam componunt speciem; sex quartam, atque ita deinceps infinitè: Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur persequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quàm quatuor, rectis lineis circumscribuntur, generali vocabulo Multilateras; contentus denominatione trilaterarum figurarum & quadrilaterarum, fortassis eam ob causam, quod præcipuè in prioribus his libris de Triangulis, atque Quadrangulis sermo habeatur, & quod facilè ad similitudinem harum duarum specierum cætera omnes à quolibet definiri possint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & sex lineis comprehensam sexilateram, atque reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterunt huiusmodi figuræ quinquangula, sexangula, septangula, &c.

XXIII.

TRILATERARVM autem figurarum, Æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

DESCENDIT iam ad singulas species triangulorum. Quia

verò

Verò triangula diuidi possunt vel habitu ratione laterum, vel angulorum, declarat prius species prioris diuisionis, quæ tres sunt duntaxat, quod tria latera tribus tantum modis sese possint habere. Aut enim omnia æqualia sunt; aut duo tantùm, tertio existente vel maiore, vel minore; aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter se æqualia sunt, dicitur triangulum Æquilaterum. Porro ex æqualitate omnium trium laterum trianguli æquilateri infertur, omnes tres eius angulos æquales quoq; esse, ceu ad quintam propositionem huius libri demonstrabimus.



XXIV.

ISOSCELES autem est, quod duo tantùm æqualia habet latera.

EX hac rursus æqualitate duorum laterum trianguli Isoscelis efficitur, duos angulos super reliquum latus etiam esse æquales, vt demonstrabit Euclides propos. 5. huius libri. Apposuimus autem duo triangula Isoscelia, quorum prius habet tertium latus vtrouis æqualium maius, alterius autem idem minus obtinet: ita vt dua sint species trianguli Isoscelis; alterum, cuius tertium latus sit vtrouis æqualium maius, & alterum, cuius tertium latus vtrouis æqualium minus sit.



XXV.

SCALENVM verò est, quod tria inæqualia habet latera.

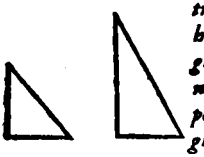
HIC denique ex inæqualitate omnium laterum trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inæqualitas, vt ostenditur propos. 18. huius 1. lib. Porro ex his constat, eodem modo potuisse diuidi triangulum in tres species, si æqualitatis angulorum ratio haberetur. Cum enim aut omnes tres anguli sint inter se æquales; aut duo tantùm, tertio maiore, vel minore existente; aut omnes tres inæquales; erit omne triangulum vel æquiangulum, habens tres omnes angulos æquales: vel duorum tantùm angulorum æqualium: vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum quidem Æquilatero, secundum verò Isoscelio, tertium denique Scaleno respondet triangulo. Cæterùm quanam arte construendæ sint triangulæ huius partitionis super quauis data recta linea finita, trademus propos. 1. huius lib.



XXVI.

AD hæc etiam, trilaterarum figurarũ, Rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

NVNC exponit triangulorum ſpecies iuxta poſteriorem diuiſionem, habita ratione lateratis angulorum. Quia verò tria tantummodò ſunt angulorum rectilineorum genera diuerſa; (Omnis enim angulus rectilineus vel eſt rectus, vel obtuſus, vel acutus, vt ſupra diximus,) fit vt tres quoque ſpecies triangulorum ſub hac conſideratione reperiantur. Nam aut vnus angulus trianguli eſt rectus, & ob eam rem reliqui acuti, vt ex 17 propoſ. 1. lib. conſtabit; aut obtuſus, & ob eandem cauſam reliqui acuti, aut denique nullus rectus, nullus q3 obtuſus, ſed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & aliis Geometris Rectangulum. Poteſt autem triangulum huiuſmodi eſſe Iſoſceles, vel ſcalenum, vt hæ figura indicant, aquilaterum autem nulla ratione. Propter æqualitatem enim laterum eſſent per ea, quæ propoſ. 5. dicemus, omnes etiam anguli æquales, ideoque, cum vnus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat cum propoſ. 17. & 32. huius libri.



XXVII.

AMBLYGONIVM autem, quod obtuſum angulum habet.



TRIANGVLVM Amblygonium, ſiue obtuſangulum eſſe quoque poteſt vel Iſoſceles, vel ſcalenum, vt in hac figura cernitur, non autem aquilaterum, alias eadem ratione eſſent omnes tres anguli per ea, quæ propoſ 5 oſtendemus, æquales, ideoque cum vnus ponatur obtuſus, omnes tres obtuſi, quod multo magis pugnat cum propoſ. 17. & 32. huius libri.

XXVIII.

OXYGONIVM verò, quod tres habet acutos angulos.

OMNE triangulum Oxygonium, ſiue acutangulum, poteſt eſſe vel æquilaterum, vel Iſoſceles, vel ſcalenum, vt cernere licet in triangulis quæ in ſpeciebus prioris diuiſionis ſpectanda exhibuimus, ne eadem hic fruſtra repetantur. Ex dictis igitur palam fit, triangulum quodcunq3 æquilaterum, eſſe neceſſario Oxygonium: At omne triangulum tam Iſoſceles, quàm Scalenum, eſſe vel Rectangulum, vel Amblygonium, vel Oxygonium; atque iſoſceles Oxygonium rurſum duplex, Iſoſceles nimirum Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium maius, atque Iſoſceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium minus: Vt vnica ſit ſpecies trianguli æquilateri, quatuor verò Iſoſceles, & tres Scaleni: atq3 in vniuerſum octo triangulorum genera; æquilaterum, quod perpetuo Oxygonium eſſe diximus, Iſo-

mum, Isosceles rectangulum, Isosceles Amblygonium, Isosceles Oxygonium habens tertium latus utrouis æqualium maius, Isosceles Oxygonium habens tertium latus utrouis æqualium minus, Scalenum rectangulum, Scalenum Amblygonium, & Scalenum Oxygonium. Quæ etiam hisce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum Isosceles, Rectangulum Scalenum, Amblygonium Isosceles, Amblygonium Scalenum, Oxygonium æquilaterum, Oxygonium Isosceles habens tertium latus utrouis æqualium maius, Oxygonium Isosceles habens tertium latus utrouis æqualium minus, & Oxygonium Scalenum. Quare perspicuum est, quamnam connexionem, siue affinitatem habeant inter se triangula utriusque partitionis. Posse autem dari triangulum Isosceles Oxygonium, cuius duorum laterum æqualium utrumuis tertio sit minus, vt rectè animaduertit Franciscus Barocius in sua Cosmographia, ostendemus ad propos. 15. lib. 4. In omni porro triangulo, cuius duo quæcunq; latera expressè nominantur, solet reliquum latus tertium à Mathematicis appellari Basis, siue illud in situ infimum occupet locum, siue supremũ, &c. Hoc te breuiter monere uolui, ne putares aliquid latere mysterij in basi triãguli, intelligeresq; quodlibet latus, omni discrimine remoto, basis nomine posse nũcupari.

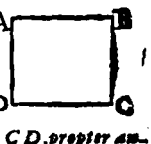
XXIX.

QVADRILATERARVM àutem figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

POST figurarum trilateratum species, exponit iam singulatim quadrilateras figuras, recensendo quinque tantummodò eorum genera, quorum quatuor priora regularia sunt, postremum autem, & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum,  *cuius quidem omnia quatuor latera inter se æqualia existunt, omnesq; anguli recti. Itaque quadrangulum æquilaterum, & non rectangulum; uel contra, rectangulum, & non æquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides propos. 46. huius lib. quonam modo construendum sit quadratum super recta linea proposita finita.*

XXX.

ALTERA verò parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.

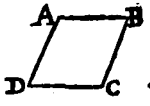
SECVNDA figura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se æqualia, quamuis bina opposita inter se æqualia existant. Vt in altera parte longiori A B C D, latera A B, D C, inter se, 

& A D, B C, inter se quoque æqualia sunt, cum A B C D, propter an-

gulorum rectitudinem, parallelogrammum sit, & in hoc lib. ad propos. 34. ostendemus.

XXXI.

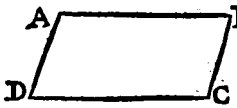
RHOMBVS autem, quæ æquilatera, sed rectangula non est



HÆC figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppositas prorsus habet conditiones, & diuersas à conditionibus figura altera parte longioris. Habet enim omnia latera æqualia, angulos verò non rectos, & inæquales, quamuis bini oppositi inter se æquales existant. Vt in Rhombo A B C D, anguli A, & C, inter se. & B, & D, quoque inter se æquales sunt, cum A B C D, propter æqualitatem laterum, parallelogrammum sit, ceu ad eandem propos. 34. huius libri demonstrabitur.

XXXII.

RHOMBOIDES verò, quæ aduersa & latera, & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula.



EST hæc figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte oppositus. Nam neque eius latera omnia æqualia sunt, neq; vllus angulus rectus, sed tamen latera bina opposita, qualia sunt A B, D C, & A D, B C, in Rhomboide A B C D, æqualia inter se, item anguli bini oppositi, quales sunt A, C, & B, D, inter se existunt æquales. Hæ igitur quatuor figuræ quadrilateræ dici possunt regulares; cætera verò omnes, quæcunque sint, irregulares.

XXXIII.

PRÆTER has autem, reliquæ quadrilateræ figuræ, trapezia appellentur.

RELIQVAS omnes figuras quadrilateras, quæ à prædictis quatuor differunt, ita vt neque latera omnia æqualia, neque omnes angulos æquales, seu rectos, neque latera bina opposita; neque angulos binos oppositos habeant inter sese æquales, generali vocabulo Trapezia nominat: quæ quidem cum infinitis modis variari queant, rectè irregulares nuncupabuntur. Possunt enim duo anguli esse recti, vel vnus obtusus, & alij acuti, vel duo obtusi, & alij acuti, &c. Eademq; fieri potest quasi diuisio penes latera: Nam vel aliqua æqualia inter se sunt, vel nullum alteri est æquale, &c. Determinatas porro trapezi-



orum

ximum ſpecies nonnullas afferemus poſt definitionem linearum parallelarum, ſeu aquidiſtantium, & parallelogrammi.

XXXIV.

PARALLELÆ rectæ lineæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, & ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram ſibi mutuo incidunt.

VT dua, vel plures recta linea dicantur parallela, ſiue aquidiſtantes, non ſatis eſt, vt in quamcunque partem, etiam ſpatio infinito, producta nunquam ad vnum punctum coeant; ſed neceſſe quoque eſt, vt omnes vna plana ſuperficie exiſtant. Multæ ſiquidem linea rectæ non exiſtantes in eadem ſuperficie plana productæ ad ſpatium infinitum, nunquam in vnum conueniunt, & tamen non ſunt parallelæ dicendæ; quales ſunt, exempli gratia, duæ rectæ linea in tranſuerſum poſitæ in medio aere, & non ſe tangentes; Hæ etenim nunquam coire poſſunt. Dicuntur autem duæ rectæ linea in eadem exiſtere plana ſuperficie, quando ſuperficies aliqua plana vni earum accommodata, ita vt omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilem circumuoluta, alteri quoque accommodari poteſt ſecundum omnia eius puncta. quamuis re ipſa in duabus ſuperficiebus diuerſis reperiantur; Vt poſitis duabus rectis lineis A B, C D, ſi ſuperficies aliqua plana recta A B, applicetur, omnia eius tangens puncta, ita vt circa illam circumducta tangat quoque omnia puncta alterius rectæ C D; dicentur huiuſmodi rectæ duæ linea in eadem ſuperficie plana exiſtere, alias non. Si igitur hæ duæ rectæ linea eidem non coeant, etiamſi infinitè producantur tam ad partes A, C, quam ad B, D, appellabuntur parallellæ, ſiue aquidiſtantes. Caterum planius, perfectiuſq; intelliges in x i. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eadem dicantur ſuperficie exiſtere: Satis ſit hic loco breuiter admoniſſe, rectè à Euclide vtramque conditionem eſſe poſitam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem exiſtere plano, & producta in vtramuis partem nunquam in vnum conuenire, quanquam hac productio continuetur ad ſpatium infinitum. Quod ſi duæ rectæ linea per immenſum aliquod ſpatium extenſa non cernantur coire, conſtet tamen, eas tandem ex vna parte longius protractas in vnum punctum conuenturas, quamuis ex altera ſemper magis ac magis inter ſe diſtent, ac diſiungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotieſcunque ergo duæ linea rectæ dicuntur à quopiam eſſe parallelæ, is neceſſe eſt concedat, illas in vna, eademq; ſuperficie iacere, & nunquam poſſe coire. Similiter, ſi quis concludere velit, duas rectas lineas eſſe parallelas, hic demonſtret prius oportet, eas in eodem exiſtere plano, & in neutram partem productas



coniungi posse. Qua in re non pauci videntur hallucinari, qui ex eo duntaxat conantur ostendere, aliquas rectas lineas esse parallelas, quod in neutram partem coeant, etiamsi infinitè producantur, nulla facta prorsus mentione alterius conditionis, qua eadem lineas in eodem requirit existere plano.

HIC finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam verò hoc eodem libro mentio fiet figura, qua Parallelogrammum, nec non earum, quæ complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duabus definitionibus adiunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & quæ sint parallelogrammi complementa, vt facilius demonstrationes percipiantur.

XXXV.

PARALLELOGRAMMVM est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.

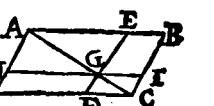


VT figura quadrilatera ABCD, si quidem latus AB, æquidistet lateri DC, & latus AD, lateri BC, nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor solum parallelogramma; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorũ priora duo rectangula, quod omnes angulos habeant rectos, posteriora verò duo non rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus existat rectus. Caterum, quatuor has figuras esse parallelogramma, ostendemus ad propos. 34. huius lib. Itaque possumus quadrilateras figuras, (vt & antiqui Geometræ) dividere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammum rursus in rectangulum, & æquilaterum, quale est Quadratum: in nec rectangulum, nec æquilaterum, quale est Rhomboides; in rectangulum, sed non æquilaterum, qualis est figura altera parte longior: & in æquilaterum, sed non rectangulum, eiusmodi est Rhombus. Trapeziorum quoque aliud quidem habet duo latera opposita parallela, alia verò minimè; aliud autem nulla opposita latera habet parallela. Præterea illud primus vel habet duo illa latera, quæ non sunt parallela, inter se æqualia, dicituráq; Trapezium Isosceles: vel inæqualia, Trapezium q; Scalenum appellatur. Itaque ex his omnibus septem genera figurarum quadrilaterarum constitui possunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Isosceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera sunt parallela.

XXXVI.

CVM verò in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæq; lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in vno

in vno eodemque puncto, ita vt parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non transit, complementa; duo verò reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur.



SIT parallelogrammum ABCD, in quo diameter AC, & linea EF, secans diametrum in G, & parallela existens lateribus AD, BC. Item linea HI, secans diametrum in eodem puncto G, parallelaque lateribus AB, DC, existens. Quæ cum ita sint, perspicuum est, parallelogrammum totum diuisum esse in quatuor parallelogramma, quorum quidem duo EBIG, GFDH, per quæ diameter AC, non transit, vocantur à Geometris complementa siue supplementa reliquorum duorum AEGH, GICF, quæ dicuntur circa diametrum consistere, quippe cum per ea diameter transeat, vt videre est in præsenti figura.

PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

I.

POSTVLETVR, vt à quouis puncto in quodvis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

PRIMVM hoc postulatum planum admodum est, si recte consideremus ea, quæ paulo ante de linea scripsimus. Nam cum linea sit fluxus quidam puncti imaginarius, atque adeò linea recta fluxus directo omnimò itinere progrediens, fit vt si punctum quodpiam ad aliud directo mouere intellexerimus, ducta sane sit à puncto ad punctum recta linea: id quod prima hac petitione postulat Euclides, quemadmodum hic vides à puncto A, ductam esse rectam lineam ad punctum B; ab eodemque aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & sic innumeras alias ab eodem puncto educi possunt ad alia atque alia puncta.



II.

ET rectam lineam terminatam in continuum recta producere.

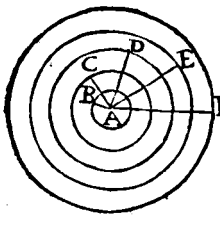
QVOD si punctum illud ferri adhuc cogitauerimus motu directo, & qui omnis inclinationis sit expers, producta erit ipsa recta linea terminata, & nunquam erit finis huius productionis, cum punctum illud intelligere possimus mouere ad infinitam distantiam. Sic linea



recta A B, producta est primo in continuum ad punctum C. Deinde ad punctum D, &c.

III.

ITEM quouis centro, & interuallo circulum describere.



IAM verò, si terminatam rectam lineam cuiuscunque quantitatis mente conceperimus applicatam esse secundum alterum extremũ ad quoduis punctum, ipsamque circa hoc punctum fixum circumduci, donec ad eum reuertatur locum, à quo dimoueri cœpit; descriptus erit circulus, effectumq́, quod tertia petitio iubet. Exemplum habes in hu quinque lineis A B, AC, A D, A E, A F, quæ singula citra centrum A, circumuoluta singulos circulos descripserunt inæta quantitatem, seu interuallum ipsarum.

PRÆTER hæc tria postulata, quibus Euclides contentus fuit, sunt multa alia æquè facilia, è quibus duntaxat in medium proferre decreui illud, quod frequentius repetendum erit in progressu totius Geometriæ. Reliqua enim prudens lector ex se vel facilè intelliget.

IV.

ITEM quacunque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.

OMNIS enim quantitas continua per additionem augeri, per diuisionem verò diminui potest infinitè: Vnde nunquam dabitur quantitas continua adeo magna, quin ea maior dari possit: neque tam parua, quin minor ea possit exhiberi. Hoc idem in numeris verum est, quod ad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionem vnitatis augeri potest infinitè: quamuis in eius diminutione ad vnitatem indiuiduam deueniatur.

COMMVNES NOTIONES SIVE Axiomata, quæ & Pronunciata dici solent, vel Dignitates.

I.

QVÆ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia. Et quod vno æqualium maius est, aut minus; maius quoq; est, aut minus altero æqualium. Et si vnum æqualium maius est, aut minus magnitudine quapiam, alterum quoque

quoque æqualium eadem magnitudine maius eſt, aut minus.

FIERI nulla ratione poteſt, vt dua quantitates inæquales, æquales ſint alteri quantitati. Si enim minor illarum propoſitæ quantitati æqualis extiterit, excedet eandem neceſſariò maior illarum. Et ſi maior æqualis fuerit propoſitæ quantitati, ſuperabitur minor ab eadem. Quare rectè colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter ſe æquales quoque eſſe. Reliqua quoq; partes axiomatis à nobis adiecta, quòd frequentem vſum habeant, clariſſima ſunt.

II.

Et ſi æqualibus æqualia adiecta ſint, tota ſunt æqualia.

SI enim quantitates conflatæ, ſiue compoſitæ, inæquales forent, proculdubio maiori plus eſſet adiectum, quàm minori, cùm antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoque æquales.

III.

ET ſi ab æqualibus æqualia ablata ſint, quæ relinquuntur, ſunt æqualia.

NAM ſi reliqua quantitates forent inæquales, à minore plus fuiſſet detractum, quàm à maiore.

IV.

ET ſi inæqualibus æqualia adiecta ſint, tota ſunt inæqualia. Et, ſi inæqualibus inæqualia adiecta ſint, maiori maius, & minori minus, tota ſunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

QVIN &, ſi æqualibus inæqualia adiecta ſint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas addita vt inæqualium, maiorem conſtituit quantitatem, quàm minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & ſi inæqualibus æqualia adijciantur, compoſita quantitas ex maiore, maior eſt, quàm compoſita ex minore. Alteram partem huius axiomatis nos adiecimus, propter frequentem eius vſum.

V.

ET ſi ab inæqualibus æqualia ablata ſint, reliqua ſunt inæqualia. Et ſi ab inæqualibus inæqualia ablata ſint, à maiori minus, & à minori maius, reliqua ſunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

SIC etiam, Si ab æqualibus inæqualia ablata ſint, reliquæ erunt inæqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quàm minor; quemadmodum reſiduum maioris maius eſt

residuo minoris, si æqualia auferantur ab inæqualibus. Cæterùm Euclides non docet, quidnam simpliciter, & absolutè gignatur ex additione quantitatum inæqualium ad quantitates inæquales, vel quid relinquatur post subtractionem inæqualium quantitatum ab inæqualibus quantitatibus; propterea quòd nihil certò colligi inde potest, nisi quando maiori maius additur, & à maiori minus detrahitur. Vt in secunda parte axiomatis dictum est, quam nos ob insignem eius vtilitatem adiecimus. Possunt enim compositæ quantitates, vel residua, esse & inæquales, & æquales. Si enim ad 7 & 5 addantur 4. & 3. efficientur 11 & 8. quæ sunt inæqualia. Sic etiam si ex 7. & 5 detrahantur 2. & 1. relinquentur 5. & 4. quæ sunt inæqualia. At verò, si ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. & 11. quæ æqualia sunt. Item si detrahantur 3. & 1. ex 7. & 5. remanebunt 4. & 4. quæ æqualia quoque existunt.

PORRO in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum intelligenda est etiam vna & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adijciatur, tota fient æqualia: Et si ab æqualibus idem commune detrahatur, residua æqualia erunt. Et si inæqualibus idem commune adijciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & si ab inæqualibus idem commune detrahatur, vel ab eodem communi inæqualia auferantur, residua existent inæqualia.

VI.

ET quæ eiusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia. Et quod vnius æqualium duplum est, duplum est & alterius æqualium.

SIMILITER, qua eiusdem sunt triplicia, vel quadruplicia, vel quintuplicia, &c. inter se sunt æqualia. Si enim inæqualia forent, & maius eorum esset duplex, vel triplex, &c. alicuius quantitatis, deficeret vtique minus à duplici vel triplici, &c. Quod si contra, minus esset duplex, vel triplex, &c. quantitatis cuiuspiam, excederet sanè maius duplex ipsum; vel triplex, &c. Hoc autem & ex secunda axiomate comprobari potest ad hunc modum. Si enim duæ quantitates æquales fuerint alicui tertiæ, & vtrique tertiæ illa addatur, o-
a2. pron *runt compositæ duplices illius tertiæ, a sed & inter se æquales, ob idem additamentum. Quod si rursum compositis eadem tertia adijciatur,*
b2. pron *erunt conflatæ triplices eiusdem tertiæ. Cùm igitur b & æquales inter se, propter idem additamentum existant; eademq; sit ratio in cæteris multiplicibus, perspicuum erit axioma propositum. Secundam porrò partem huius axiomatis nos apposuimus, quod non raro eius vsus in rebus Geometricis requiratur.*

ET

VII.

ET quæ eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe æqualia ſunt. Et contra, Quæ æqualia ſunt, eiuſdem ſunt dimidia.

PARI ratione, quæ eiuſdem ſunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter ſe æqualia ſunt.

IN his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia ſunt, vel triplicia, &c. inter ſe æqualia quoque ſunt: Item, quæ æqualium ſunt dimidia, vel tertiæ, vel quartæ, &c. & inter ſe æqualia neceſſariò exiſtunt. Partem quoque ſecundam huiuſce axiomatis nos adiunximus, propterea quòd non minùs frequenter, quàm prima, à Geometris uſurpatur.

VIII.

ET quæ ſibi mutuò congruunt, ea inter ſe ſunt æqualia.

HOC eſt, duæ quantitates, quarum una ſuperpoſita alteri, neutra alteram excedit, ſed amba inter ſe congruunt, æquales erunt. Vt duæ lineæ rectæ dicentur eſſe æquales, quando una alteri ſuperpoſita, eaqua ſuperponitur, alteri tota congruit, ita vt eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quãdo vno alteri ſuperpoſito, is qui ſuperponitur, alterum nec excedit, nec ab eo excediture, ſed linea illius cum lineis huius prorſus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamuis linea interdum inter ſe inæquales exiſtant.

E CONTRARIO, Quæ inter ſe ſunt æqualia, ſibi mutuò congruent, ſi alterum alteri ſuperponatur. Intelligendum eſt autem, quantitates ſibi mutuò congruentes, eſſe æquales, ſecundum id quantitatis, in quo ſibi congruunt. Congruit autem longitudo longitudini tantum, ſuperficies ſuperficiei, ſolidum ſolido, linearum inclinatio inclinationi linearum, &c.

IX.

ET totum ſua parte maius eſt.

CVM pars à toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipſum auferatur; perſpicuum eſt, omne totum ſua eſſe parte maius.

IN ſequentibus porrò pronunciatis interrumpitur ordo Euclidis, propterea quòd duo alia axiomata hoc loco inferenda eſſe cenſuimus valde neceſſaria, cùm ex iis axioma 12. quod Euclidi eſt decimum, demonſtrari poſſit, vt ibi dicemus. In margine tamen numeros appoſuimus ordini Euclidis reſpondentes.

X.

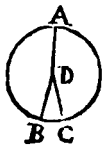
DVÆ lineæ rectæ non habent vnum & idem ſegmentum commune.

NON

NON est difficile istud axioma, si perfectè intelligatur natura rectæ lineæ. Cùm enim linea recta directo semper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione potest, vt duæ lineæ rectæ habeant vnam partem, quamuis minimam, communem, præter vnicum punctum, in quo se mutuò intersecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonstrat. Habeant, si fieri potest, duæ rectæ

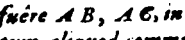
a) petit

b) 17. def



A B, A C, partem communem A D. Ex centro autem D, & intervallo D A, a describatur circulus secans duas rectas propositas in punctis B, & C; b Erunt igitur duæ circumferentiæ A B, A B C, inter se æquales, (Sunt enim circumferentiæ semicirculorum æqualium, cum A D B, A D C, ponantur esse diametri) pars & totum, quod est absurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnum & idem segmentum commune. Quod est propositum.

POSSVNT tamen duæ lineæ rectæ commune habere segmentum, quando vnam & eandem rectam lineam constituunt. Vt in hac

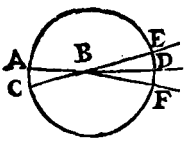


figura, rectæ A D, B C, commune habent segmentum C D, quia ambæ vnam rectam constituunt lineam A B. At verò quando duæ rectæ sunt diuersæ, quales fuêre A B, A C, in superiori exemplo, non possunt possidere segmentum aliquod commune, vt rectè à Proclo fuit demonstratum.

XI.

DVÆ rectæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessariò se mutuò in eo puncto intersecabunt.

HOC etiam axioma ex natura linea recta pendet. Quod tamen ita demonstrabimus. Coeant duæ rectæ A B, C B, in B. Dico illas productas se mutuò secare in B, nempe C B, productam cadere in E, supra rectam A B, productam. Nam si C B, producta non cadit supra A B, productam, congruet cum A B, producta, ita vt transeat per D, atq; ita duæ rectæ A B D, C B D, habebunt idem segmentum commune B D, quod in antecedenti axiomate ostensum est fieri non posse: Vel certè infra A B, productam cadet, ita vt C B, producta cadat in F, sitq; vna recta linea C B F. Centro igitur B, describatur ad quodvis interuallum circulus A C F D, secans rectas A B, C B, productas in D, F. Quia ergo vtraque recta A B D, C B F, per centrum B, ducitur, erit tam A C D, quam C F, semicirculus, per defin. 18. ac proinde æquales erunt circumferentiæ A C D, C F. Vt ad defin. 17. demonstrauimus, totum & pars. Quod est absurdum.



DVO proxima axiomata ab Euclide non ponuntur, quia tamen necessa-

neſſaria ſunt ad aliorum axiomatum probationes, ea hîc inſeruimus. Tria autem ſequentia Euclidis ſunt.

XII.

ITEM, omnes anguli recti ſunt inter ſe æquales.

Hoc axioma apertiſſimum eſſe cuilibet poteſt ex 10. definitione, quâ angulus rectus deſcribitur; propterea quòd inclinatio linearum angulum rectum conſtituentium augeri, minuíve nequit, ſed prorſus eſt immutabilis. Efficitur enim rectus angulus à linea perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ rectæ ita ſuperſtat, vt faciat vtrobique angulos æquales, neque magis in vnam partem, quàm in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter ſe eſſe, cùm ſemper ſit eadem inclinatio, quamuis lineæ ſint inæquales interdum. Conatur tamen Proclus ex 10. definitione id demonſtrare hac ratione. Sint duo anguli recti A B C, D E F, quos dico eſſe inter ſe æquales. Si enim fieri poteſt, ſint inæquales, ſitque A B C, maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectam D E, rectæ A B, cadet recta E F, inter rectas A B, B C, qualis eſt B G, propterea quòd angulus D E F, minor ponitur angulo A B C. a *Producatur C B, in rectum & continuum vſque ad H. Cùm igitur angulus A B C, ſit rectus,* b *erit angulus A B H, illi deinceps æqualis, & rectus quoque: quare maior ſit etiam angulo A B C.* c *Producta autem G B, in rectum & continuum vſque ad I, cadet portio producta B I, infra C B, producta am, vt in præcedenti axiomate eſt demonſtratum. Quare cùm angulus A B G, ponatur rectus,* d *fiet angulus A B I, illi deinceps æqualis.* e *Quapropter angulus A B H, maior quoque erit angulo A B I, pars toto, quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt duo anguli recti propoſiti, ſed æquales. Quod eſt propoſitum: eademque eſt ratio in cæteris.*



a *petiti*

b *10. de-*

b *2. pet*

c *10. de-*

RECTE autem hoc loco monet Pappus, axioma iſtud non poſſe converti; non enim omnis angulus recto angulo æqualis rectus eſt, cùm & curuilineus recto æqualis eſſe queat, vt in 5. lib. demonſtrabimus, qui tamen non dicitur rectus, cùm non ſit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus æqualis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti inter ſe æquales erunt, ſine vlla exceptione.

XIII.

ET ſi in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad eaſdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuò incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.

VT ſi



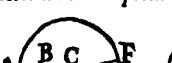
VT si in duas lineas rectas AB, CD, incidens alia recta EF, faciat duos angulos internos, & ex eadem parte BEF, DFE, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandem conuenturas esse ad aliquod punctum vnum, versus eam partem, in qua duo anguli minores existunt duobus rectis, vt appositum exemplum commonstrat. Ratio huius perspicua est, quoniam quando duo anguli interni, & ex eadem parte æquales sunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partem coire possunt, sed æquali semper spatio protendantur, vt propos. 28. huius lib. demonstrabitur. Quare si duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, necesse est ea parte dictarum linearum spatium coarctari, ex altera verò magis ac magis dilatari; ideoq; eas conuenturas tandem esse aliquando in vnum punctum. Verùm quia axioma hoc subobscurum videri solet tyronibus, imò à numero principiorum reijcitur à Gemino Geometra, Proclo, & alijs, quod non facilè quisuis ei assensum prabeat; præsertim cùm repertantur alia quadam linea, quarum spatium, licet semper magis ac magis coangustetur (quemadmodum & in duabus rectis AB, CD, accidit, vt ad propos. 28. huius lib. demonstrabimus) nunquam tamen in vnum punctum coeunt, etiamsi infinitè producantur, vt constat ex elementis conicis Apollonij Pergæi, & ex linea conchili Nicomedis. Idcirco pleniorem illius explicationem in scholium propos. 28. huius lib. differimus, vbi illud ex Procli sententia Geometricè demonstrabimus, vt firmè, ac sine vlla dubitatione, tanquam verissimũ, ad propositionis 29. huius lib. (vbi primum eius vsus incipit apparere) & ad aliarum propositionum demonstrationes possit assumi. Quod tamen nos aliter quam Proclus, & quidem magis geometricè demonstrabimus, ita vt nullus dubitationi locus relinquatur.

xij.

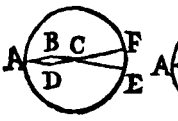
XIV.

DVÆ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

NVLLAM prorsus habet difficultatem hoc principium. Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coeant ad efficiendum angulum, necesse



sariò ex altera parte semper magis ac magis disiungentur, si producantur, vt in exemplo proposito perspicuum est. Quare vt superficies, spatiúmve quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quadam adiungenda est. Ita enim conficietur spatium triangulare, seu figurarum rectilinearum prima. Proclus tamen demonstrat hoc principium, hoc modo. Si fieri potest, vt duæ lineæ recta claudant superficiem, comprehendãt duæ rectæ AEC, ADC, superficiem AECD, ita vt duæ illæ rectæ coeant in duobus punctis, A, &



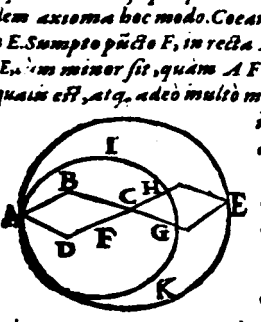
a3.petit

b2.petit

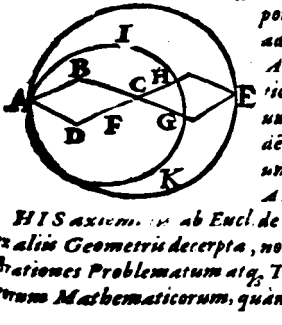
C. Facto deinde centro C, a describatur circulus intervallo CA, b & produ-

producantur recta A B C, A D C, in rectum, & continuum vsque ad circumferentiam, nempe ad puncta, E, & F. Itaq; quia recta A C E, A C F, transeunt per centrum C, a erunt semicirculi A E, A E F, inter se æquales, & idcirco circumferentia quoq; A E, circumferentiæ A E F, æqualis erit, pars toti, quod fieri non potest. Non ergo recta duæ lineæ spatium comprehendunt. Quod est propositum. a 17. def

SED quia fortassis aduersarius dicet, rectas A B C, A D C, productas coire iterum in aliquo puncto circumferentiæ, vt in E, vel F, atque adeò non sequi, partem æqualem esse toti, demonstrabimus tuno eadem axioma hoc modo. Coeant ergo duæ illæ lineæ iterũ, si fieri potest, in E. Sumpto pũcto F, in recta A D C, quocunq; erit A F, minor, quàm F E, cum minor sit, quàm A F C, hoc est quàm C H E, quæ ipsi A F C, æqualis est, atq; adeò multò minor, quam F E. Circulus igitur ex F, ad intervallum F A, descriptus secabit rectam F E, in H, atque adeò C G E, in G. Quoniam igitur A F H, diameter circuli est, erit A I H, semicirculus, vt ad defin. 17. ostendimus. Portio autem A I G, quam aufert recta A B G, & in qua centrum non est, semicirculo minor, vt ad defin. 18. demonstrauimus. Est ergo circumferentia A I G, minor quàm A I H, totum quàm pars. quod est absurdũ. Quòd autem minor sit portio A I G, semicirculo, ostendemus, vt suprà. Nam ducta ex centro F, ad rectam A B G, perpendicularis, & circumuoluta portione A I G, circa rectam A B G, cadet circumferentia A I G, intrà circumferentiam A K G, pars maior sit quàm totum, vt suprà demonstrauimus.



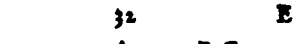
CONSTAT hoc etiam axioma ex definitione lineæ rectæ. Cùm enim recta linea sit brevissima extensio ab vno puncto ad aliud, ducì poterit vnica tantum linea ab vno pũcto ad aliud. Quare si A B C, recta est, nõ erit A D C, recta. Quod etiam patet ex definitione Platonis. Nam si A B C, est recta, obumbrabũt media illius extremitates eiusdẽ. Igitur media puncta lineæ A D C, nõ obumbrant extrema, cùm visus, per rectam A B C, feratur. Non ergo recta est A D C.



HIS axiomatis ab Eucl. de positu adiungemus nos nonnulla alia ex aliis Geometris decerpta, non minùs necessaria ad futuras demonstrationes Problematum atq; Theorematum cùm Euclidis, tum cæterorum Mathematicorum, quàm ea, quæ nobis tradidit Euclides.

XV.

SI æqualibus inæqualia adjiciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis. HOC



HOC, & sequens pronunciatum desum-
pſit Proclus ex Pappo. Aequalibus itaq; quã-
titatibus AB, CD, addantur inaequales BE,
DF, ſitq; BE, maior quàm DF. Et ex BE, au-
feratur BG, aequalis ipſi DF, ꝟt ſit GE, exceſſus, quo quantitas ad-
dita BE, ſuperat quantitatem additam DF. Quoniam igitur aequa-
a2.pron *libus AB, CD, addita ſunt aequalia BG, DF, a erunt tota AG, CF,*
aequalia. Quare conſtat, totam quantitatem AE, ſuperare totam CF,
eodem exceſſu GE, quo magnitudo DF, adiuncta à magnitudine
adiuncta BE, ſuperatur. Quod eſt propoſitum.

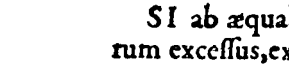
XVI.

SI inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum exceſſus, exceſſui eorum, quæ à principio erant, æqualis.

IN eadem figura, inaqualibus quantitatibus BE, DF, addan-
tur aequales AB, CD. Et ex maiore BE, auferatur BG, aequalis ipſi
DF, ꝟt GE, ſit exceſſus; quo quantitas BE, quantitatem DF, ſu-
perat. Quoniam igitur aequalibus BG, DF, addita ſunt aequalia AB,
b2.pron *CD, b erunt tota AG, CF, aequalia. Quamobrem tota quantitas*
AE, ſuperabit totam CF, eodem exceſſu GE, quo maior quantitas
propoſita BE, minorem DF, ſuperat. Quod eſt propoſitum.

XVII.

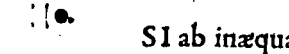
SI ab æqualibus inæqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus, exceſſui ablatorum æqualis.



AB aequalibus AB, CD, auferantur inaequa-
lia BE, DF. Sitq; EG, exceſſus, quo quantitas
BE ſuperat quantitatem DF, ita ꝟt BG, aequa-
lis ſit ipſi DF. Quia igitur ab aequalibus AB, CD, ablata ſunt a-
c3.pro. *qualia BG, DF, c remanebunt AG, CF, aequalia. Perſpicuum*
ergo eſt, reſiduum AE, ſuperari à reſiduo CF, eodem exceſſu EG,
quo magnitudo ablata BE, ablatam magnitudinem DF, ſuperat.
Quod eſt propoſitum.

XVIII.

SI ab inæqualibus æqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui totorum æqualis.



AB inaqualibus AB, CD, auferantur a-
qualia AE, CF. Sitq; BG, exceſſus, quo tota
quantitas AB, ſuperat totã quantitatem CD,
ita ꝟt AG, aequalis ſit ipſi CD. Quoniam igitur ab aqualibus AG,
CD, ablata ſunt aequalia AE, CF, remanebunt EG, FD, aequa-
lia.

lèa. Quare reſiduum E B, ſuperabit reſiduum F D, eodem exceſſu B G, quo tota quantitas A B, ſuperat totam quantitatem C D. Quod eſt propoſitum.

IN his quoque quatuor proximè poſitis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda eſt ſola etiam ſola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia adjiciantur, erit totorum exceſſus adjunctorum exceſſui æqualis. Et ſi inæqualibus idem commune adjungatur, erit totorum exceſſus, exceſſui eorum, quæ à principio erant, æqualis. Et ſi ab eodem communi inæqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui ablatorum æqualis. Et ſi ab inæqualibus idem commune dematur, erit reſiduorum exceſſus exceſſui totorum æqualis. Nam in numeris, ſi ad 6. addas 5. & 3. fiunt 11. & 9. quorum exceſſus eſt 2. idem qui ipſorum 5. & 3. Rurſus, ſi ad 5. & 3. addas 6. fiunt 11. & 9. quorum exceſſus 2. idem eſt, qui ipſorum 5. & 3. Item ſi ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum exceſſus 3. idem eſt, qui ipſorum 5. & 2. Denique ſi ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum exceſſus 3. idem eſt, qui ipſorum 10. & 7.

XIX.

OMNE totum æquale eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

QVONIAM omnes partes ſimul ſumpta conſtituunt totum, cujus ſunt partes, manifeſta eſt veritas hujus axiomatis.

XX.

SI totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

VT quia totus numerus 20. dupli eſt totius numeri 10; Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus erit eſt reliqui hujus 7. In Geometria autem hoc demonſtrabitur prop. 5. lib. 5. nimirum. Si magnitudo magnitudinis æquè multiplex ſit, atque ablata ablatæ, ut decupla, vel centupla, &c. & reliqua reliquæ æquè multiplex erit, uti totus totius.

COLLIGI poteſt ex dictis cum Proclo, & Geminò hòc diſcrimen inter poſtulata, & axiomata, quòd cùm utraque ſint per ſe nota, & indemonſtrabilia, illa naturam ſapiant Problematum; propterea quòd aliquid fieri expoſcant; hæc verò, Theoremata imitantur, cùm nihil fieri petant, ſed ſolùm ſententiam aliquam notiſſimam proponant. Differt autem poſtulatum à problemate, quòd conſtructio poſtulati non indigeat ulla demonſtratione, problematis autem conſtructionem concedat nemo ſine demonſtratione, eo quòd difficile aliquod nobis exhibeat conſtruendum. Idem diſcrimen inter Axioma, & Theorema reperitur; Illud enim demonſtrari non de-

bet, hoc verò concedendum nulla est ratione, nisi demonstretur. Nam nemo huius propositionis demonstrationem, vel etiam probationem requiret. Quæ eidem æqualia, inter se quoque æqualia sunt. Huius autem statim demonstrationem desiderabit quis. Omnis trianguli tres anguli interni æquales sunt duobus rectis. Idem iudicium habeto de reliquis axiomatis, atque Theorematis, nec non de postulatis, problematisq;.

CONSTAT quoque, Postulatorum alia propria esse Geometria, qualia sunt illa tria, qua Euclides nobis proposuit; quadam verò communia & Geometriæ, & Arithmeticæ, cuiusmodi est hoc, Quantitatem posse infinitè augeri. Tam enim numerus, quàm magnitudo, per additionem augeri potest, ita vt nunquam huius incrementi finis reperiatur. Idem dices de axiomatis, siue pronunciatis. Nam octauum, decimum, vndecimum, duodecimum, tertiumdecimum, & quartumdecimum soli Geometriæ conueniunt; Reliqua verò omnia adhibentur & ad demonstrationes Geometricas & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablatæ à magnitudinibus æqualibus, relinquunt magnitudines æquales, siue hæ magnitudines lineæ sint, siue superficies, siue corpora; ita quoque numeri æquales detracti e numeris æqualibus relinquunt numeros æquales, &c.

HAEC dicta à nobis sunt de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonstrationes accedamus, ex quibus plenius perfectiusq; principiorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima principia Mathematicorum eiusmodi, vt planè non intelligantur, nisi prius eorum vsus appareat in demonstrationibus; id quod satis te experientia docebit.

ANTEQVAM porrò ad propositiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandum est, quemnam ordinem, ac modum in ipsis demonstrationibus simus secuti. Primum cuilibet propositioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum est secutus in Euclidis propositionibus, alter verò in ipsa propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obseruari cernimus in codicibus Græcis. Id verò eo consilio à nobis est factum: quoniam cùm à quibusdam Geometris propositiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab aliis verò iuxta Theonis seriem citentur, maximeq; interdum duo hi interpretes inter se discrepent, in serie, atque ordine propositionum, id quod maximè in 6. 7 & 10. lib. perspicitur; necessarium esse duximus, vt vtriusq; interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, vt si quando numerus propositionum à Geometra quopiam citatus non respondet alteri interpreti, alteri saltem conueniat. Deinde ne cursus demonstrationum interrumperetur, citauimus principia, & propositiones Euclidis in mar-

gine

gine, præfixa cuilibet citationi semper literula aliqua alphabeti, vel alio quouis signo, qui similis literulæ, seu signum respondet in demonstratione, vt facilius cognoscatur, ad quem locum qualibet citatio sit referenda. Porrò citationes intelligendæ sunt hoc modo.

1. def.	*Prima definitio. & sic de alijs numeris, vt 4. def. 23. def. &c.*
1. pet.	*Prima petitio, vel primum Postulatum.*
1. pron.	*Primum pronunciatum, seu axioma, & ita de reliquis numeris, vt prius.*
1. primi.	*Prima propositio primi libri.*
23. Vndec.	*Vigesimatertia propositio vndecimi libri.*
6. tertiæd.	*Sexta tertiædecimi libri.*
9. sextid.	*Nona sextidecimi libri.*
13. duod.	*Decimatertia libri duodecimi.*
7. quind.	*Septima libri quindecimi.*
5. quartid.	*Quinta libri quartidecimi, &c.*

In his alia citationes à quolibet facilè poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus est ratio.

PROBLEMA I.
PROPOSITIO I.

SVPER data recta linea terminata triangulum æquilaterum constituere.

IN omni problemate duo potissimùm sunt consideranda, constructio illius, quod proponitur, & demonstratio, quâ ostenditur, constructionem rectè esse institutam. Vt quoniam primum hoc problema iubet constituere triangulum æquilaterum super data recta linea terminata quacunque, ita vt linea recta proposita sit vnum latus trianguli. (Tunc enim figura dicitur constitui super recta linea, quando ipsa linea efficitur vnum figuræ latus) idcirco primum oportet construere ex principiis concessis triangulum aliquod, deinde demonstrare, ipsum eâ ratione constructum, esse æquilaterum, hoc est, habere omnia tria latera inter se æqualia. Quod idem in alijs problematibus perspici potest. Hæc etiam duo reperiuntur ferè in omni Theoremate. Sæpenumerò enim vt demonstretur id, quod proponitur, construendum est, atque efficiendum prius aliquid, ceu manifestum erit in sequentibus. Pauca verò admodum sunt theoremata, quæ nullam requirant constructionem.

Sit igitur proposita recta linea terminata A B, super quam constituere iubemur triangulum æquilaterum. Centro A, & interuallo rectæ A B, *a* describatur circulus C B D: Item centro B, & interuallo eiusdem rectæ B A, alius circulus describatur C A D, secans priorem in punctis C, & D. Ex quorum vtrouis, nempe ex C, *b* ducantur duæ rectæ lineæ C A, C B, ad puncta A, & B; Eritque super rectam A B, constitutum triangulum A B C, hoc est, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita constructum necessariò esse æquilaterum. Quoniam rectæ A B, A C, ducuntur ex centro A, ad circumferentiam circuli C B D, *c* erit recta A C, rectæ A B, æqualis: Rursus quia rectæ B C, B A, ducuntur ex centro B, ad circumferentiam circuli C A D, erit recta B C, rectæ B A æqualis. Tam igitur A C, quàm B C, æqualis est rectæ A B. *d* Quare & A C, B C, inter se æquales erunt, atque idcirco triangulum A B C, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat.



a 3. *pet.*

b 1. *pet.*

c 15. *def.*

d 1. *pron*

SCHOLIVM.

VT autem videas, plures demonstrationes in vna propositione conti-

ueniri, placuit primam hanc propositionem resoluere in prima sua principia, instituo facto ab vltimo syllogismo demonstratiuo. Si quis igitur probare velit, triangulum A B C, constructum methodo praedicta, esse aquilaterum, vtatur hoc syllogismo demonstrante.

Omne triangulum habens tria latera aqualia, a *est aquilaterum.* a 23. def.

Triangulum A B C, tria habet aqualia latera.

Triangulum igitur A B C, est aquilaterum.

Minorem confirmabit hoc alio syllogismo.

Qua eidem aqualia sunt, b *inter se quoque sunt aqualia.* b 1. pron.

Duo latera A C, B C, aqualia sunt eidem lateri A B.

Igitur & duo latera A C, B C, inter se aqualia sunt.

Ac propterea omnia tria latera A B, B C, A C, aqualia existunt.

Minorem verò huius syllogismi hac ratione colliget.

Linea recta à centro ducta ad circumferentiam circuli, c *inter se sunt aquales.* c 15. def.

Linea A B, A C, sunt ductæ à centro A, ad circumferentiam C B D.

Sunt igitur linea A B, A C, aquales inter se.

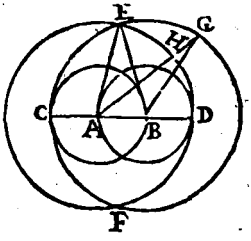
Eademq; ratione erunt linea A B, B C, aquales, cùm ducantur à centro B, ad circumferentiam C A D. Quamobrem minor praecedentis syllogismi tota confirmata erit.

Non aliter resolui poterunt omnes alia propositiones non solùm Euclidis, verùm etiam caeterorum Mathematicorum.

Negligunt tamen Mathematici resolutionem istam in suis demonstrationibus, eò quòd breuius ac facilius sine ea demonstrent id, quod proponitur, vt perspicuum esse potest ex superiori demonstratione.

SI quis autem super data recta desideret constituere triangulum quoque Isosceles, & scalenum, id cum Proclo in hunc modum efficiet.

Sit recta linea A B, circa quam ex centris A, & B, describantur duo circuli, vti prius. d *Deinde producatur A B, in vtramque partem ad circumferentias vsque ad puncta C, & D. Atque centro A, interuallo vero A D,* e *describatur circulus E D F. Item centro B, interuallo vero B C, circulus E C F, secans priorem in puncto E, & F. Ex quorum vtrolibet, nempe ex E,* f *ducantur ad puncta A, & B, duæ rectæ E A, E B. Factum q; erit super recta A B,* g *triangulum A B E; quod dico esse Isosceles, nimirum duo latera A E, B E, esse & aqualia inter se; & maiora latere A B. Cùm enim rectæ A E, A D, ducantur à centro A, ad circumferentiam E D F,* h *erit A E, aqua-*



d 2. post.

e 3. post.

f 1. post.

g 20. def.

h 15. def.

æqualis recta A D. Item cùm recta B E, B C, ducantur è centro B, ad
a 15. def *circumferentiam E C F,* a *erit B E, æqualis rectæ B C. Sunt autem re-*
ctæ A D, B C, æquales inter se (vtraque enim A C, & B D, æqualis
est rectæ A B; cum A B, A C, ex eodem centro A, ad circumferentiam
ducantur; Item B A, B D, ex eodem centro B, ad circumferentiã quoq;
b 1. pron *egrediantur.* b *Quare A C, B D, æquales inter se erunt. Addito igitur*
c 2 pron *communi rectæ A B,* c *erit tota A D, toti B C, æqualis.)* d *Igitur A E,*
d 1. pron *B E æquales quoq; inter se erunt. Quòd verò vtraq; A E, B E, maior*
sit quàm A B, perspicuum est, cum A D, æqualis ostensa ipsi A E,
e 9. pron e *maior sit quàm A B; Item B C, æqualis demonstratæ ipsi B E,* f *ma-*
f 9. pron *ior quoq; sit, quàm A B. Constitutum igitur est super rectam A B, Isosce-*
les A B E, habens duo latera A E, B E, æqualia inter se, & maiora la-
tere A B, quod faciendum erat. Atq; hæc est demonstratio Procli, a-
liorumq; interpretum Euclidis.

BREVIVS tamen videtur mihi posse demonstrari, triangulum
g 15. def *A B E, esse Isosceles, hac ratione.* g *Quoniam A E, æqualis est rectæ*
A D, & rectæ A D, est dupla rectæ A B, propterea quòd B A, B D, æ-
h 15. def *quales inter se sunt; erit & A E, dupla rectæ A B. Rursus* h *quia B E,*
æqualis est rectæ B C, & B C, dupla est ipsius A B, propterea quòd A B,
i 15. def. i *A C, æquales sunt inter se, erit & B E, dupla ipsius A B. Cùm igitur*
k 6. pro. *vtraq; A E, B E, dupla sit eiusdem A B, erunt* k *A E, B E, inter se æ-*
quales, maioresq; propterea recta A B. Isosceles ergo est triangulum
A B E.

l 1. petit. *I A M verò, si ex puncto A,* l *ducatur linea recta A G, ad cir-*
cumferentiam E G F, qua non sit eadem quæ A E, vel A D, secans
m 1. pet. *circumferentiam E H D, in puncto H, & ex G, ad B* m *ducatur alia*
n 20. def *recta G B,* n *constitutum erit triangulum A B G, super rectam A B,*
o 9. pro. *quod dico esse scalenum. Quoniam* o *A G, maior est quàm A H:*
p 15. def p *Sunt autem A H, A E, ex centro A, ducta, inter se æquales; erit &*
A G, maior quàm A E, hoc est, quàm B E, qua ostensa est æqualis
q 15. def *ipsi A E, igitur & maior erit A G, quàm B G.* q *cùm B G, sit æqua-*
r 9. pron *lis ipsi B E. Est autem & B G, maior quàm A B., propterea quòd tota*
B C, æqualis ipsi B G, r *maior est quàm A B, pars. Omnia ergo tria*
latera trianguli A B G, inæqualia sunt, ideoq; scalenum est ex defi-
nitione; quod erat faciendum.

BREVIVS quoque ostendemus, triangulum A G B, esse scale-
s 15. def *num, hac ratione. Quoniam tam* s *A H, A D, ex centro A, ducta,*
sunt æquales, quàm B G, B C, ex centro B, ducta: Sunt autem A D,
B C, ipsius A B, dupla, quod A B, vtriq; B D, A C, æqualis sit; erunt
quoq; A H, B G, ipsius A B, dupla, ac propterea maiores, quàm A B.
t 9. pron *Cùm ergo* t *A G, maior sit, quàm A H, sine quàm B G, scalenum*
erit triangulum A G B, habens latus A G, maximum, B G, me-
dium, & A B, minimum.

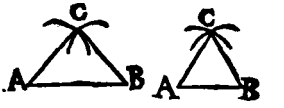
PRA-

PRAXIS.

CONABIMVR in singulis ferè problematibus Euclidis tradere praxin quandam facilem, & brevem, qua efficiposſit id, quod Euclides pluribus verbis, atque lineis contendit conſtruere; idq; in ijs præſertim obſeruabimus, quæ frequentiorem vſum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium aliquod ſecum videtur afferre.

ITAQVE triangulum æquilaterum ita facilè conſtruetur ſuper data recta AB. Ex centris A, & B, interuallo vero data recta AB, deſcribantur duo arcus circulorum ſe interſecantes in puncto C, ſiue hoc infra lineam 

contingat, ſiue ſuprà. Poſt hac ducantur duæ rectæ AC, BC, ex puncto C, ad puncta A, & B, factumq; erit, quod proponitur. Cuius rei eadem eſt demonſtratio cum ſuperiori, ſi modò circuli eſſent integri, ac perfecti. Tranſirent enim neceſſariò per puncta A, & B.

ISOSCELES ita conficietur. Ex centris A, & B, interuallo vero maiore quàm AB, ſi datum rectam eſſe velimus minus latus; vel minore, ſi eandem in latus quamuis eligamus, deſcribantur duo arcus 

ſecantes ſe in C. Poſtea ducantur rectæ AC, & BC, conſtructumq; erit Iſoſceles: quoniam AC, BC, æquales erunt, propter æquale interuallum aſſumptum, maius ſcilicet, aut minus quàm recta AB.

SCALENVM denique hoc modo fabricabitur ſuper data recta AB. Ex centro B, interuallo vero maiore, quam BA, deſcribatur arcus aliquis. Item ex centro A, interuallo vero adhuc maiore, quàm prius aſſumptum, deſcribatur alter arcus priorem ſecans in C. Deinde ducantur 

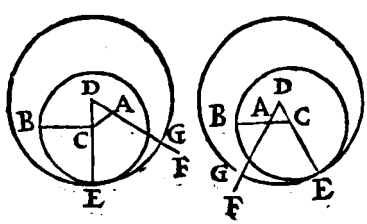
rectæ AC, BC; conſtitutumq; erit Scalenum, vt conſtat ex inæqualitate interuallorum, quæ aſſumptæ fuerunt in conſtructione.

CÆTERVM quo pacto triangulum conſtitui debeat habens tria latera æqualia tribus datis lineis quibuſcunque, ſinguli ſingulis, latiùs explicabimus propoſ. 22. huius libri.

PROBL. 2. PROPOS. 2. ij.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

SIT punctum datum A, & data recta linea BC, cui alia recta æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ BC, nempe C, centro *a* deſcribatur circulus BE, interuallo rectæ BC. Et ex A, ad centrum *a* 3. petit



a 1. petit C, a recta ducatur A C; (nisi punctum A, intra rectam B C, fuerit: Tunc enim pro linea ducta sumetur A C, vt secunda figura indicat.) Super r recta verò A C, b constru-
b 1. primi. tur triangulum æquilaterum A C D, sursum, aut deorsum versus, vt libuerit; cuius duo latera modò constituta
c 2. pet. D A, D C, versus rectam A C, c extendantur; D C, quidem oppositum puncto dato A, vsque ad circumferentiam in E; D A, vero oppositum centro C, quantumlibet in F. Deinde centro D,
d 3. pet. interuallo vero rectæ D E, per C, centrum trapseuntis, d alter circulus describatur E G, secans rectam D F, in G. Dico rectam A G, quæ posita est ad punctum datum A, æqualem esse datæ rectæ B C. Quoniam D E, D G, ductæ sunt ex centro D, ad circum-
e 15. def. ferentiam E G, e ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur D A,
f 3. pron. D C, æqualibus lateribus trianguli æquilateri A C D, f remane-
g 15. def. bit A G, æqualis rectæ C E. Sed eidem C E, g æqualis est recta B C. (cùm ambæ rectæ C B, C E, cadant ex centro C, ad circumferentiam B E.) Igitur rectæ A G, B C, quandoquidem vtra-
h 1. pron que æqualis est ostensa rectæ C E, inter se h æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum.

QVOD si punctum datum fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C, facilè absoluetur problema. Si enim centro C, & in-
i 3. petit teruallo C B, i describatur circulus, ad cuius circumferentiam
k 1. pet. recta k ducatur vtcunque C E, erit hæc posita ad punctum datum
l 15. def. C, l æqualis datæ rectæ B C, cum vtraque & B C, & C E, ex eodem centro egrediatur ad circumferentiam B E.

SCHOLIVM.

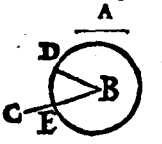
HVIVS problematis varij esse possunt casus, vt ait Proclus. Aut enim datum punctum in ipsa data recta est positum, aut extra ipsam: Si in ipsa, erit vel alterum extremorum eius, vel inter vtrumque iacebit extremum. Si verò extra ipsam, erit vel è directo data linea, ita vt producta in rectum, & continuum per ipsum punctum transeat, vel non è directo, ita vt ab ipso ad data linea extremorum quodnis recta linea ducta cum data recta angulum efficiat; quo modo vel supra datum lineam erit constitutum, vel infra, vt manifestum est. In omnibus autem istis casibus semper eadem est constructio, & demonstratio. Quod si in constructione fiat triangulum A C D, super recta A C, Isosceles, eodem modo ostendemus, rectam A G, rectæ B C, æqualem esse.

PROBL.

PROBL. 3. PROPOS. 3. iij.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.

SINT duæ rectæ inæquales A, minor, & B C, maior, oportetque ex maiore B C, detrahere lineam æqualem minori A. Ad alterutrum extremorum lineæ maioris B C, nempe ad punctum B, *a* ponatur aliqua linea, quæ sit B D, æqualis minori A. Deinde centro B, interuallo autem B D, circulus *b* describatur secans B C, in E. Dico B E, detractam esse æqualem ipsi A. Quoniam B E, *c* æqualis est rectæ B D, & eidem B D, æqualis est recta A, per constructionem; *d* erunt A, & B E, inter se æquales. Duabus igitur datis rectis, &c. quod erat faciendum.



a 2. primi.
b 3. petit.
c 15. def. primi.
d 1. pronum.

QVOD si duæ rectæ datæ coniungantur in vno extremo, quales sunt B D, & B C, coniunctæ in extremo vtriusque B; describendus erit circulus ex B, ad interuallum minoris B D. Hic enim auferet B E, æqualem ipsi B D, vt constat ex definitione circuli.

SCHOLIVM.

VARIOS etiam posse casus esse in hoc problemate, nemo ignorat, cum duæ lineæ inæquales datæ vel inter se distent, ita vt neutra alteram contingat, vel non; sed vel coniungantur ad vnum extremum, vel se mutuo secent, vel certè altera alteram suo extremo tangat duntaxat, &c. de qua re lege Proclum hoc in loco.

THEOREMA 1. PROPOS. 4. iiij.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique; habeant verò & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt: eritq; triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

SINT duo triangula A B C, D E F, & vnius vtrumque latus A B, A C, æquale sit alterius vtrique lateri D E, D F, hoc est, A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; angulusque A, contentus lateribus A B, A C, æqualis angulo D, contento lateribus D E, D F. Dico basim B C, æqualem quoq; esse basi E F;



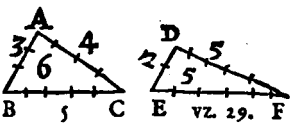
& triangulum A B C, triangulo D E F; & vtrumque angulum B, & C, vtrique angulo E, & F, id eſt, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus A C, D F, inter ſe; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus A B, D E, inter ſe quoque eſſe æquales. Quoniam enim recta A B, rectæ D E, ponitur æqualis, ſit, vt ſi altera alteri ſuperponi intelligatur, collocato puncto A,
a 8. pro. nun. in puncto D, *a* ipſæ ſibi mutuo congruant, punctumq; B, in punctum E, cadat. Neq; enim dicere quis poterit, partem rectæ A B, rectæ D E, congruere, & partem non, quia tunc duæ rectæ habe-
b 10 pro nun. rent idem ſegmentum commune, *b* quod eſt impoſſibile. Quod ſi quis dicat, poſito puncto A, in D, cadere quidem punctum B, in E, ſed rectam A B, cadere vel ad dextram, vel ad ſiniſtram D E,
c 14. pro nun. claudent duæ rectæ lineæ ſuperficiem. *c* quod fieri non poteſt. Quare recta A B, rectæ D E, congruet, vt dictum eſt. Cum ergo
d 8. pro nun. angulus A, angulo D, ponatur æqualis, *d* congruet quoque alter alteri, hoc eſt, recta A C, rectæ D F, congruet, punctumque C, in punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum A C, D F. Baſis igitur B C, baſi E F, congruet quoque: alias ſi ſupra caderet, aut infra, vt efficeretur recta E G F, vel E H F, clauderent duæ rectæ E F, E G F; vel E F, E H F, ſuperficiem, (negare enim nemo poterit, tam E G F, quàm E H F, rectam eſſe, cum vtraque ponatur eſſe
e 14. pro nun. eadem, quæ recta B C.) quod eſt abſurdum. Duæ enim rectæ ſuperficiem *e* claudere non poſſunt. Quocirca *f* baſis B C, baſi
f 8. pro nun. E F, æqualis erit, cum neutra alteram excedat; & triangulum A B C, triangulo D E F; & angulus B, angulo E; & angulus C, angulo F, æqualis, ob eandem cauſam, exiſtet. Quare ſi duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

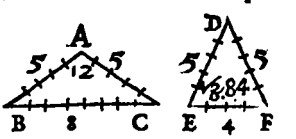
RECTE Euclides duas conditiones poſuit in antecedente huius theorematis, quarum prima eſt, vt duo latera vnius trianguli aqualia ſint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique; Secunda, vt angulus etiam vnius contentus illis lateribus aqualis ſit angulo alterius contento lateribus, qua iſtis ſunt aqualia. Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque baſes, neque reliqui anguli poterunt vnquam eſſe aquales, vt probe hoc loco à Proclo demonſtratur: Triangula verò ipſa licet poſſint eſſe aqualia, poſteriore dumtaxat conditione deficiente, vt ex ſcholio propoſ. 37. huius lib. conſtabit, tamen rarò admodum illud continget. Sint enim triangulorum A B C, D E F, anguli A, & D, aquales, nempe recti, & latera A B, A C, aqualia lateribus D E, D F, non quidem vtrumque vtrique, ſed illa ſimul ſumpta hiſce ſimul ſumptis, ſitque A B, 3. A C, 4. vt ambo ſimul efficiant 7. At verò D E, ſit 2. & D F, 5. vt ambo quoque

ſimul

simul 7. constituant. Quibus positis, erit basis B C, 5, & basis E F, radix quadrata huius numeri 29. quæ maior quidem est quam 5. minor autem, quam 6. Item area trianguli A B C, erit 6. area verò trianguli D E F, 5. Anguli denique super basim B C, inæquales erunt angulis super basim E F. Quæ quidem omnia ita esse, hic ostenderemus, nisi ad eorum demonstrationem requirerentur multa, quæ nondum sunt confirmata. Videsigitur omnia inæqualia esse, propterea quod non vtrumq; latus vtriq; lateri æquale existit in dictis triangulis A B C, D E F.

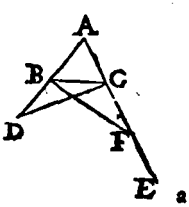


RVRSVS triangulorum A B C, D E F, latera A B, A C, æqualia sint lateribus D E, D F, vtrumque vtrique, sitq; vnumquodque 5. anguli verò A, & D, contenti dictis lateribus inæquales, sit q; A, maior quam D. Quibus concessis, erit basis B C, maior base E F, vt propos. 24. huius libri ostendetur. Quod si basim B C. ponamus esse 8. basim autem E F, 4. erit area trianguli A B C, 12. area verò trianguli D E F, radix quadrata huius numeri 84. quæ maior quidem est quam 9. minor verò, quam 10. id quod notissimum est Geometris. Vt igitur duorum triangulorum & bases, & anguli, nec non triangula ipsa æqualia inter se sint, necesse est, vt vtrumque latus vnius æquale sit vtrique lateri alterius, & anguli quoque dictis lateribus contenti æquales existant, vt optimè dixit Euclides.



THEOR. 2. PROPOS. 5.

ISOSCELIVM triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se æquales erũt.



SIT triangulum Isosceles A B C, in quo latera A B, A C, inter se sint æqualia. Dico angulos A B C, A C B, supra basim B C, æquales inter se esse: Item si latera æqualia A B, A C, producantur quantum libuerit, vsque ad puncta D, & E, angulos quoque D B C, E C B, infra basim eandem B C, esse æquales. Ex linea enim A E, producta infinitè *a* abscindatur A F, æqualis ipsi A D, *b* & ducantur rectæ B F, C D. Considerentur deinde duo triangula A B F, A C D. Quia ergo duo latera A B, A F, trianguli A B F, æqualia sunt duobus lateribus A C, A D, trianguli A C D, vtrumque vtrique, nempe A B, ipsi A C, ex hypothesi, &

a 3. *primi.*

b 2. *primi.*

theſi, & A F, ipſi A D, ex conſtructione; angulusque A, contentus lateribus A B, A F, æqualis eſt angulo A, contento lateribus A C,
a 4. primi. A D, imò angulus A, communis eſt vtrique triangulo: a Erit baſis B F, æqualis baſi C D; & angulus F, angulo D; & angulus A B F, angulo A C D; cùm & priores duo, & poſteriores opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis, vt patet. Rurſus conſiderentur duo triangula B D C, C F B. Quoniam verò rectæ A D, A F, æquales ſunt, per conſtructionem, fit vt, ſi auferantur ex
b 3. prouu. ipſis æquales A B, A C, b & reliquæ B D, & C F, ſint æquales. Quare duo latera B D, D C, trianguli B D C, æqualia ſunt duobus lateribus C F, F B, trianguli C F B, vtrumq; vtrique, videlicet B D, ipſi C F, & D C, ipſi F B, vt probatum eſt. Sunt autem & anguli D, & F, contenti dictis lateribus æqualibus æquales, vt oſtenſum
c 4. primi. etiam fuit. Igitur erit angulus c D B C, angulo F C B, æqualis; & angulus B C D, angulo C B F. Tam enim priores duo, quàm poſteriores, æqualibus opponuntur lateribus, exiſtuntq; ſupra communem baſim B C, vtriuſque trianguli B D C, C F B. Quod ſi ex totis angulis æqualibus A B F, A C D, (quos æquales eſſe iam demonſtrauimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æquales C B F, B C D, (quos itidem in poſterioribus triangulis modo
d 3. prouu. probauimus eſſe æquales) d remanebunt anguli A B C, A C B, ſupra baſim B C, æquales. Oſtenſum eſt autem in poſterioribus triangulis, & angulos D B C, F C B, qui quidem ſunt infra eandem baſim B C, eſſe æquales. Igitur & anguli ſupra baſim inter ſe, & anguli infra eandem inter ſe ſunt æquales; Ac propterea Iſoſcelium triangulorum, qui ad baſim ſunt anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

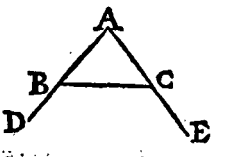
SCHOLIVM.

HÆC propoſitio vera etiam eſt in triangulis aquilateris, cum in quolibet reperiantur duo latera inter ſe æqualia, licet eam Euclides ſolu Iſoſcelibus triangulis videatur accommodaſſe. Exiſtentibus enim duobus lateribus A B, A C, trianguli A B C, æqualibus; ſiue reliquum latus B C, ipſis quoq; ſit æquale, vt contingit in triangulo aquilatero, ſiue inæquale, vt in Iſoſcele accidit, neceſſario conſequitur, & angulos ſupra baſim inter ſe, & angulos infra eandem inter ſe quoque eſſe æquales, vt conſtat ex demonſtratione prædicta. Solet autem theorema hoc tyronibus ſubdifficile, & obſcuriuſculum videri, propter multitudinem linearum, & angulorum, quibus nondum ſunt aſſueti. Verùm tamen, ſi diligenter theorematis præcedentis vis ac demonſtratio ponderetur, non multo labore hoc, quod pro manibus habemus, à quolibet percipietur, ſi modo memor ſit, illos angulos triangulorum probari æquales eſſe in antecedente theoremate, qui æqualibus lateribus opponuntur. Quod quidem, quoniam Campanus non appo-

ſuit,

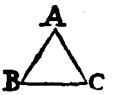
fuit, causa fuit, & confusa esse videatur, & subobscura eius demonstratio.

VERITAS porro huius theorematis, quoad vtramque partem, facile quoque demonstrari potest per superpositionem, vt demonstrata fuit propositio. 4. Sint enim rursum in triangulo A B C, duo latera aequalia A B, A C, quae producantur quantumlibet vsque ad D, & E. Dico tam angulos A B C, A C B, supra basim B C, inter se aequales esse, quàm angulos D B C, E C B, infra eandem basim. Si enim concipiamus mente triangulum A B C, triangulo A C B, (ita vt idem triangulum sit instar duorum) superponi, ita vt recta A B, recta A C, superponatur, cadet punctum B, in C, ob aequalitatem laterum A B, A C. Quo posito, cadet recta A C, super rectam A B, ob aequalitatem, siue identitatem anguli A; atque punctum C, in punctum B, incidet, propter aequalitatem laterum A C, A B. Quapropter angulus A B C, angulo A C B, & angulus D B C, angulo E C B, a congruet, ac proinde tam illi, quàm hi, inter se aequales erunt. a 8. prop. mun.



COROLLARIVM.

Ex hac propositione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum esse æquiangulum quoque: Hoc est, tres angulos cuiuslibet trianguli æquilateri esse inter se æquales. Sit enim triangulum æquilaterum A B C. Quoniam igitur duo latera A B, A C, sunt æqualia, *b* erunt duo anguli B, & C æquales. Item quia duo latera A B, B C, sunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod ostendendum erat. b 5. primi.



THEOR. 3. PROPOS. 6.

SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

IN triangulo A B C, sint duo anguli A B C, A C B, super latus B C, æquales. Dico duo latera illis opposita A B, A C, esse quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, existentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum maius altero; sit igitur A B, maius quàm A C, si fieri potest: Et ex A B, *c* abscindatur in D, recta B D, æqualis rectæ A C, quæ minor dicitur esse quàm A B, ducaturque recta C D. Considerentur iam duo triangula A C B, D B C. In quibus cum duo latera A C, C B, trianguli A C B, æqualia sint duobus lateribus D B, B C, trianguli D B C, vtrumque vtrique, nempe A C, ipsi D B, (abscidimus enim ex A B, ipsi c 3. primi.



AB, ipſi AC, conceſſu aduerſarij, æqualem DB,) & CB, ipſi BC, cum ſit vnum & idem; Sint autem & anguli ACB, DBC, contenti dictis lateribus æquales, per hypotheſin: a Erunt triangula ACB, DBC, æqualia, totum, & pars; quod fieri non poteſt. Non igitur erunt latera AB, AC, inæqualia, ſi anguli B, & C, ſuper latus BC, æquales ſunt, ne totum parti æquale eſſe concedamus: ſed æqualia exiſtent. Quare ſi trianguli duo anguli, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 4. primi.

SCHOLIVM.

CONVERTIT hoc theorema primam partem præcedentis. Nam ibi demonſtratum eſt, ſi duo latera trianguli inter ſe æqualia fuerint, angulos, qui ad baſim ſunt, eſſe quoque æquales: Hic verò, ſi anguli ad baſim ſint æquales, latera quoque angulis illis oppoſita eſſe æqualia. Non autem mirum alicui debet videri, ſi Mathematici interdum conuertunt propoſitiones, ita vt nunc ex antecedente quopiam conceſſo colligant per demonſtrationem conſequens aliquod, nunc verò rurſus ex conſequente hoc conceſſo inferant per aliam demonſtrationem antecedens illud, vt ab Euclide in hiſce duabus proximis propoſitionibus factum eſſe conſpicimus: Non debet, inquam, videri mirum, quoniam non ſemper in rebus Mathematicis reciprocantur antecedens & conſequens. Nam in propoſitionibus neceſſariis, quales ſunt propoſitiones Geometricæ, poteſt interdum prædicatum eſſe vniuerſalius ſubiecto, vt cum Dialecticis loquamur. Quare tunc non poterit conuerti propoſitio. Nam neceſſaria eſt hæc propoſitio; (Omnis homo eſt animal.) non tamen conuerti poteſt vniuerſaliter, cum non omne animal ſit homo. Ita quoque fieri poteſt in propoſitionibus Geometricis neceſſariis: Cuius ego rei vnum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonſtrat Euclides propoſ. 16. huius lib. Si trianguli cuiuſuis vnum latus producatur, angulum externum maiorem eſſe duobus internis ſibi oppoſitis; In qua quidem propoſitione nullo modo antecedens, & conſequens reciprocantur. Non enim ſequitur, ſi figura cuiuſuis rectilinea vno latere producto, angulus externus maior ſit ſingulis internis oppoſitis, figuram illam eſſe triangulum, cum poſſit etiam eſſe quadrilatera figura, vt ad propoſ. 16. huius lib. oſtendemus. Eodemque modo multæ aliæ propoſitiones conuerti nequeunt. Quam obrem neceſſe eſt, vt prius demonſtret Geometra, propoſitionem aliquam conuerti, hoc eſt, antecedens, & conſequens illius reciprocari, antequam ex conſequente conceſſo colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propoſitiones, quæ conuerti poſſunt, ſed eas duntaxat, quarum conuerſione maximè indiget: Nos tamen dabimus operam, vt fere omnes illas conuertamus, quæ aliquam videbuntur afferre vtilitatem.

COROL.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propoſitione, omne triangulum æquiangulum, id eſt, cuius omnes anguli ſunt æquales, eſſe æquilaterum. Quod quidem conuerſum eſt corollarij quintæ propoſitionis, vt liquet. Sint enim triangulí A B C, tres anguli æquales. Dico ipſum eſſe æquilaterum. Cum enim duo anguli B, & C, ſint æquales, a erunt latera A B, A C, æqualia. Rurſus cum duo anguli A, & B, ſint æquales, erunt quoque latera A C, B C, æqualia, & idcirco omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia. Quod oſtendendum erat.



a 6. primi.

EX PROCLO.

LICEBIT nobis etiam conuertere ſecundam partem quintæ propoſitionis, hoc modo.

SI trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra baſim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter ſe erunt.

Trianguli enim A B C, productis lateribus A B, A C, ad D, & E, fiant anguli D B C, E C B, infra baſim B C, æquales. Dico latera A B, A C, eſſe quoque inter ſe æqualia. Ex C E, quantumlibet producta b *abſcindatur C F, æqualis ipſi B D, & ducantur rectæ B F, F D, D C. Conſiderentur deinde triangula D B C, F C B. In quibus cum latera D B, B C, æqualia ſint lateribus F C, C B, & trumque & trique, nempe D B, ipſi F C, per conſtructionem, & B C, ipſi C B, quod ſit & num & idem: ſint autem & anguli D B C, F C B, dictis lateribus contenti æquales, per hypotheſin:* c *erunt & baſes C D, B F, & anguli B C D, C B F, ſuper has baſes, cum opponantur æqualibus lateribus B D, C F, æquales. Ablatis igitur biſce angulis æqualibus B C D, C B F, ex angulis F C B, D B C, per hypotheſin, æqualibus;* d *remanebunt anguli F C D, D B F, æquales. Conſiderentur rurſus triangula D B F, F C D. In quibus quoniam latera D B, B F, æqualia ſunt lateribus F C, C D, & trumque & trique, nempe D B, ipſi F C, per conſtructionem, & B F, ipſi C D, & modo oſtenſum eſt; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus D B F, F C D, æquales, & etiam fuit nuper demonſtratum:* e *Erit angulus B D F, ſuper baſim D F, trianguli D B F, æqualis angulo C F D, ſuper eandem baſim F D, trianguli F C D. Hi enim æqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo A D F, duo anguli A D F, A F D, ſint æquales, & nunc oſtendimus,* f *erunt latera A D, A F, æqualia. A quibus ſi rectæ B D, C F, per conſtructionem, æquales demantur,* g *remanebunt A B, A C, latera trianguli A B C, æqualia. Quod erat oſtendendum.*



b 3. primi.

c 4. primi.

d 3. poſtul.

e 4. primi.

f 6. primi.

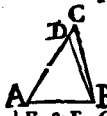
g 3. poſtul.

THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 7.

SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, non constituentur, ad aliud atq; aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

SVPER recta A B, constituantur ad punctum quoduis C, duæ rectæ lineæ A C, B C. Dico super eandem rectam A B, versus partem eandem C, non posse ad aliud punctum, vt ad D, constitui duas alias rectas lineas, quæ sint æquales lineis A C, B C, vtraque vtrique, nempe A C, ipsi A D, quæ eundem habent terminum A; & B C, ipsi B D, quæ eundem etiam terminum possident B. Sint enim, si fieri potest, rectæ A C, A D, inter se, & rectæ B C, B D, inter se etiam æquales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum A C, B C, ita vt recta A D, in ipsam rectam A C vel B D, in ipsam B C, cadat; aut intra triangulum A B C; aut extra. Sit primo punctum D, in altera rectarum A C, B C, nempe in A C, vt A D, sit pars ipsius A C. Quoniam igitur rectæ A C, A D, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales, erit pars A D, toti A C, æqualis. Quod fieri non potest. Sit deinde punctum D, intra triangulum A B C, & ducta recta C D, producantur rectæ B C, B D, vsque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo A C D, ponuntur latera A C, A D, æqualia, erunt anguli A C D, A D C, super basim C D, æquales; Est autem angulus A C D, minor angulo D C E; nempe pars toto: Igitur & angulus A D C, minor erit eodem angulo D C E. Quare angulus C D F, pars ipsius A D C, multo minor erit eodem angulo D C E. Rursus, quia in triangulo B C D, latera B C, B D, ponuntur æqualia, erunt anguli C D F, D C E, sub basi C D, æquales. Ostensum autem fuit, quod idem angulus C D F, multo sit minor angulo D C E. Idem ergo angulus C D F, & minor est angulo D C E, & eidem æqualis, quod est absurdum. Sit postremo punctum D, extra triangulum A B C. Aut igitur in tali erit loco, vt vna linea super alteram cadat, vt in priori figura, dummodo loco D, intelligas C, & loco C, ipsum D; ex quo rursus colligetur pars æqualis toti, quod est absurdum. Aut in tali erit loco, vt posteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in posteriori figura, si modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C. Quo posito, in idem absurdum incidemus, nempe angulum D C F, & minorem esse angulo C D E, & eidem æqua-



a 5. primi.

b 9. primum.



c 5. primi.

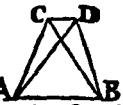


æqualem, vt perſpicuum eſt. Aut denique punctum D, ita erit extra triangulum A B C, vt altera linearum poſteriorum, nempe A D, ſecet alteram priorum, vt ipſam B C. Ducta igitur recta C D, cum in triangulo A C D, latera A C, A D, ponantur æqualia, *a* erunt anguli A C D, A D C, ſupra baſim C D, æquales: Ac proinde *b* cum angulus A D C, minor ſit angulo B D C, pars toto, erit & angulus A C D, minor eodem angulo B D C. Quare multo minor erit angulus B C D, pars anguli A C D, angulo eodem B D C. Rurſus, cum in triangulo B D C, latera B C, B D, ponantur æqualia, *c* erunt anguli B C D, B D C, ſuper baſim C D, æquales: Eſt autē iam oſtenſum, angulum B C D, multo eſſe minorem angulo B D C. Idem igitur angulus B C D, & minor eſt angulo B C D, & eidem æqualis, quod eſt abſurdum. Non ergo æquales ſunt inter ſe A C, A D, & inter ſe quoque B C, B D. Quare ſuper eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 5. primi.

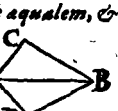
b 9. prænun.



c 5. primi.

SCHOLIVM.

FIERI poteſt, vt duæ linea A D, B D, æquales ſint duabus A C, B C, vtraque vtrique, vt A D, ipſi B C, & B D, ipſi A C. vt vltima figura indicat. Verum hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto lineæ illæ, quæ ſunt æquales inter ſe, vt conſtat. Sola enim A C, A D, eundem limitem poſſident A; item B C, B D, eundem B; optimeq; demonſtratum fuit ab Euclide, fieri non poſſe, vt A C, A D, inter ſe ſint æquales, ita vt B C, B D, quoque inter ſe æquales exiſtant. Rectè quidem in propoſitione appoſita ſunt hæc verba: eoſdemq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rurſus poſſunt eſſe duæ lineæ ſimul ſumptæ A D, B D, æquales duabus lineis A C, B C, ſimul ſumptis, vt in eadem figura perſpici poteſt: Sed hoc nō oſtendit Euclides fieri non poſſe. Dixit enim non poſſe vtramq; vtriq; eſſe æqualem, &c.



Eadem ratione poſſunt ex A, & B, infra A B, baſim trianguli A B C, hoc eſt, ad contrarias partes, duci duæ linea rectæ A D, B D, conuenientes ad aliquod punctum, ita vt A D, exiens è puncto A, æqualis ſit ipſi A C; & B D, egrediens ex B, æqualis ipſi B C, vt perſpicuum eſt in appoſita figura. Non igitur ſine cauſa adiecit Euclides: ad eaſdem partes. Denique eſſe poterunt duæ linea A C, A D, æquales inter ſe eundem terminum A, poſſidentes; Sed hoc poſito, fieri nulla ratione poterit, vt reliquæ duæ B C, B D, terminum habentes eundem B, inter ſe quoque ſint æquales, vt in hac figura apparet, & ab Euclide eſt demonſtratum. Appoſite igitur dictum eſt in propoſitione: duabus eiſ-



D

demæ-

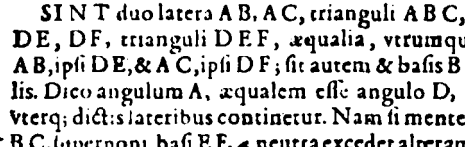
dem rectis lineis alia duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, &c

Quare vt planè scopus Euclidis in hac propositione propositus intelligatur, diligenter singula verba propositionis sunt ponderanda.

viij. THEOR. 5. PROPOS. 8.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus; vtrumque vtrique æqualia, habuerint verò & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

SINT duo latera AB, AC, trianguli ABC, duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, æqualia, vtrumque vtrique, nempe AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; sit autem & basis BC, basi EF, æqualis. Dico angulum A, æqualem esse angulo D, quorum videlicet vterq; dictis lateribus continetur. Nam si mente intelligatur basis BC, superponi basi EF, *a* neutra excedet alteram, sed punctum B, congruet puncto E, & punctum C, puncto F, cum hæ bases ponantur æquales inter se. Deinde si triangulū ABC, cogitetur cadere super triangulum DEF,



cadet punctum A, aut in ipsum punctum D, aut aliò. Si punctum A, in ipsum punctum D, cadat, congruent sibi mutuo triangulorum latera, cum ponantur æqualia; Ac propterea *b* angulus A, æqualis erit angulo D, cum neuter alterum excedat. Quod si punctum A, aliò dicatur cadere, vt ad G, quomodocunq; id contingat, hoc est, siue in latus ED, siue intra triangulum EDF, siue extra, vt in figuris apparet; erit perpetuo EG, (quæ eadem est, quæ BA,) æqualis ipsi ED; & FG, (quæ eadem est, quæ CA) æqualis ipsi FD, propterea quod latera vnius trianguli æqualia ponuntur lateribus alterius. Hoc autem fieri non posse, iamdudum *c* demonstratum est, cum tam rectæ EG, ED, terminum eundem E, quam rectæ FG, FD, eundem limitem F, possideant. Non igitur punctum A, cadet aliò quam in punctum D: ac propterea angulus A, angulo D, æqualis erit. Quare si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum.

a 8. *prounn.*

b 8. *prounn.*

c 7. *primi.*

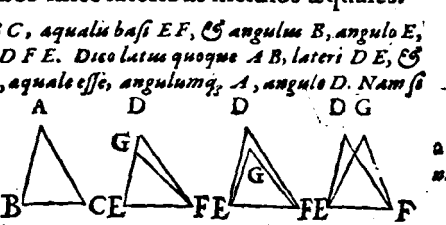
SCHOLIVM.

VT videsi, hac propositio conuertit primam partem propositionis quartæ. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, collecta fuit basium æqualitas; ita hic ex æqualitate basium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateribus æqua-

bus æqualibus comprehenduntur. Possumus eodem modo ex prima, & tertia parte conclusionis quartæ propositionis inferre totum antecedens eiusdem, sta vt theorema proponatur in hanc formam.

SI duo triangula bases habuerint æquales, & angulos super bases constitutos æquales, vtrumque vtrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, vtrumque vtrique, quæ videlicet æqualibus angulis subtenduntur, angulosque reliquos hisce lateribus inclusos æquales.

SIT enim basis BC, æqualis basi EF, & angulus B, angulo E, angulusq; C, angulo DFE. Dico latus quoque AB, lateri DE, & latus AC, lateri DF, æquale esse, angulumq; A, angulo D. Nam si basis basi superponatur, a congruent sibi mutuo extrema earum, nec non & lineæ angulorũ æqualium. Quare omnia sibi congruent, propterea q; omnia inter se æqualia erunt. Verum hoc idem theorema à nobis propositum, quod quidam magis propriè conuertere videtur quartam propositionem, quam illud Euclidis, aliter demonstrabit Euclides in prima parte propositionis 26. vt eo loco monebimus.



a 8. primum.

COROLLARIVM.

PORRO ex antecedente huius octauæ propositionis non solum colligi potest, angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, verum etiam reliquos angulos, qui ad bases constituuntur, vtrumque vtrique, vt angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F; imo totum triangulum toti triangulo, vt constat ex eadem superpositione vnius trianguli super alterum. Nam sibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula, vt perspicuum est. Quod etiam ex quarta propos. colligi potuit, postquam demonstratum fuerit, angulos æqualibus comprehensos lateribus æquales esse. Inde enim fiet, cum latera quoque sint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula esse æqualia, vt in propos. 4. demonstratum est.

EX PROCLO.

PHILONIS familiares hoc idem theorema octauum ostendunt demonstratione affirmatiua, hac ratione. Posito enim eodem antecedente, superpone intelligatur basis BC, basi EF, ita vt triangulum ABC, cadat in diuersas partes, & non super triangulum DEF, quale est triangulum AEF. Aut igitur duo latera, nempe DF, FA, constituunt vnam lineam rectã, quod quidem contingit, si duo anguli C, & F, recti extiterint; aut non. Si constituant vnã lineam rectã, veluti DA, ita propositũ concludetur. Quoniã in triangulo AED, duo latera AE, DE, ponuntur æqualia (est enim nunc AE, recta eadem, quæ AB,



a 5. primi. qua per hypothesin recta D E, æqualis est) a erunt anguli A, & D, super basin A D, æquales, quod erat ostendendum. Si verò neque D E, F A, neque D E, E A, lineam rectam conficiant, ducatur ex D, ad A, linea recta D A, quæ vel cadet intra triangula, vel extra. Cadat primum intra, quod quidem accidet, quando anguli ad E, & F, sunt acuti. Quoniam igitur in triangulo A E D, duo latera A E, D E,

b 5. primi. æqualia ponuntur, b erunt duo anguli E A D, E D A, æquales ad basin D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, D F, æqualia sint per hypothesin, erunt duo anguli F A D, F D A, super basin D A, æquales. Si igitur his æqua-

c 2. primum. les illis æqualibus addantur, c fient toti anguli E A F, E D F, æquales. Quod erat ostendendum. Cadat deinde recta D A, extra triangula, quod demum fiet, quando anguli ad F, fuerint obtusi. Quoniam igitur in

d 5. primi. triangulo A E D, duo latera A E, D E, ponuntur æqualia, d erunt anguli E A D, E D A, æquales super basin D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, D F, in triangulo

e 3. primum. A F D, sint per hypothesin æqualia, erunt anguli F A D, F D A, super basin D A, æquales. His ergo à prioribus ablatis, e remanebunt anguli E A F, E D F, æquales; Quod demonstrandum proponebatur.

ix. PROBL. 4. PROPOS. 9.

DATVM angulum rectilineum bifariam secare.

SIT diuidendus rectilineus angulus B A C, bifariam, hoc est in duos angulos æquales. In recta A B, sumatur quodcunq; punctum D, & rectæ A D, f secetur ex A C, recta A E, æqualis, ducaturque recta D E. Deinde super D E,

f 3. primi. g 1. primi. g constituatur triangulum æquilaterum D F E, & ducatur recta A F, diuidens angulum B A C, in angulos B A F, C A F. Dico hos angulos inter se esse æquales. Cum enim latera D A, A F, trianguli D A F, æqualia sint lateribus E A, A F, trianguli E A F, vtrumque vtrique, quod D A, ipsi E A, per constructionem, sit æquale, & A F, commune; Sit autem & basis D F, basi E F, æqualis, propterea quod triangulum D F E, constru-

h 8. primi. ctum est æquilaterum: h Erit angulus D A E, angulo E A F, æqualis, ideoque angulus B A C, diuisus bifariam; quod erat faciendum.

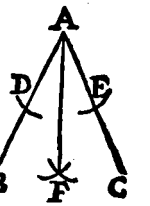
SCHOLIVM.

QVOD si loco trianguli æquilateri constituamus triangulum isosceles,

ſceles, nihilominùs idem demonſtrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propoſitionibus, quæ ſequuntur, fieri poteſt.

PRAXIS.

DICTO citius angulus quilibet rectilineus, vt B A C, bifariam ſecabitur, hoc modo. Ex centro A, circino aliquo abſcindantur recta æquales A D, A E, cuiuſcunque magnitudinis. Et circino non variato (poſſes tamen ipſum variare, ſi velles) ex centris D, & E, deſcribantur duo arcus ſecantes ſeſe in F. Recta igitur ducta A F, ſecabit angulum B A C, bifariam. Si enim ducerentur rectæ D F, E F, eſſent hæ æquales, nempe ſemidiametri circulorum æqualium. Vnde vt prius demonſtrabitur, angulum D A F, æqualem eſſe angulo E A F. Non deſcripſimus autem dictas lineas, vt nuda praxis haberetur. Id quod in aliis quoque praxibus, quoad eius fieri poterit, obſeruabimus, ne linearum multitudo tenebras nobis offundat, pariatque confuſionem.

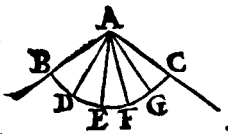


QVOD ſi quando angulus rectilineus breuiſſimis lineis contentus, & in extremo alicuius plani poſitus, diuidendus ſit bifariam, deſcribemus ex D, & E, duos arcus ſeſe mutuo interſecantes in F, ſupra angulum A, quia infra puncta D, & E, ſpatium deeſt, in quo deſcribi poſſint. Recta enim ex F, per A, vſque ad B, ducta ſecabit angulum A, bifariam, vt prius, vt in appoſita figura apparet.



SCHOLIVM.

HINC apertè colligitur, angulum rectilineum quemuis diuidi poſſe etiam in 4. angulos æquales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, ſemper procedendo per augmentum duplex. Nam poſtquam angulus quilibet rectilineus in duos æquales angulos fuerit diuiſus, ſi horum vterque iterum bifariam ſecetur, habebimus 4. angulos æquales; Quod ſi ſinguli rurſus diuidantur bifariam, obtinebimus 8. angulos æquales, & ſic deinceps; Non docuit autem Euclides vſquam, quanam ratione angulus rectilineus in quotuis partes æquales poſſit diuidi, quia id à nemine vſque ad illum diem fuerat demonſtratum. Ex Pappo tamen Alexandrino nos id docebimus, beneficio cuiuſdam lineæ curuæ, vel inflexæ, ad finem lib. 6. Interim verò, ſi quis angulum rectilineum quemcunque propoſitum in quotuis partes æquales diuidere deſideret, rudi, vt dicitur, Minerua, vti eum neceſſe erit circino, vt quaſi attentando, & ſæpius repetendo praxim ipſam ad finem deſideratum perueniat; hac nimirum ratione. Sit angulus rectilineus B A C, diuidendus in 5. angulos æquales. Ex A, centro deſcri-

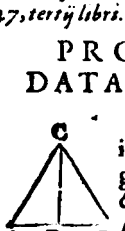


batur arcus circuli B C, ad quodcunque interuallum, secans rectas A B, A C, in E, & C. Deinde hic arcus beneficio circini (eius crura modo dilatando magis, modo restringendo, donec debitam habeant distantiam) diuidatur in tot partes aequales, in quot angulus propositus est diuidendus, & in exemplo proposito in quinque partes in punctis D, E, F, G. Si namque ad haec puncta ex A, rectae ducantur lineae, diuisus erit angulus B A C, in quinque aequales angulos. Cum enim circino sumpta sint aequalia interualla B D, D E, &c si ducantur rectae B D, D F, &c. erunt ha omnes inter se aequales. Quare erunt duo latera B A, A D, trianguli B A D, a aequalia duobus lateribus E A, A D, trianguli E A D, & trumque utrique, cum omnia ex centro egrediantur ad circumferentiam usque. Basis autem B D, basi quoque D E, & dictum fuit, aequalis est: b Angulus igitur B A D, angulo E A D, aequalis existet; Eademque ratione demonstrabitur, angulum E A D, angulo E A F, aequalem esse, & sic de caeteris. Breuius autem colligetur, omnes angulos ad A, esse inter se aequales, ex 27. propos. tertij lib. propterea quod circumferentiae B D, D E, &c. acceptae sunt omnes aequales inter sese. Nemo verò miretur, quod praxes exhibeamus interdum, quarum demonstrationes ex sequentibus propositionibus pendent. Hoc enim, ut supra ad defin. 10. diximus, eo consilio facimus, ut quoad eius fieri potest, singula proprijs in locis tractentur, diuisio nimirum angulis rectilineis cuiusuis in quotlibet partes aequales eo in loco, in quo Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas partes aequales. Et diuisio lineae rectae in quotuis partes aequales, ubi eandem diuidit Euclides bifariam, & ita de singulis. Neque enim ad praxes huiusmodi requirumtur semper sequentes demonstrationes, sed solum, ut probetur rectè esse per ipsas effectum, quod imperabatur. Quamobrem is, qui non contentus nuda praxi demonstrationem requirit, poterit regredi ad praxin quamlibet, postquam demonstrationes ad eam necessarias diligenter perceperit. Nam semper propositiones illas, quae ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonstrationibus nostrarum praxium; quemadmodum & in proxima praxi citauimus propositionem 27, tertij libri.

a 15. def. fin.

b 8. pri.

x. PROBL. 5. PROPOS. 10.
DATAM rectam lineam finitam bifariam secare.



c 1. pri.

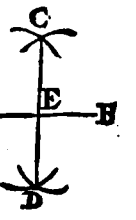
d 9. pri.

SIT recta finita A B, diuidenda bifariam, id est, in duas partes aequales. c Describatur super A B, triangulum aequilaterum A B C, cuius angulus C, per rectam C D, d diuidatur bifariam, rectaq; C D, rectam A B, secet in D. Dico rectam A B, bifariam esse diuisam in D. Quoniam duo latera A C, C D, trianguli A C D,

ACD, æqualia ſunt duobus lateribus BC, CD, trianguli BCD, vtrumque vtrique, nempe AC, ipſi BC, cum ſint ambo latera trianguli æquilateri, & CD, eſt commune; Eſt autem & angulus ACD, angulo BCD, æqualis, per conſtructionem: a Erit baſis AD, baſi BD, æqualis. Datum ergo rectam AB, bifariam ſecuimus in D, quod facere oportebat. a 4. pri.

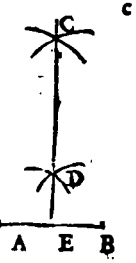
PRAXIS.

EX centro A, ad quoduis interuallum, quod tamen dimidium lineæ AB, excedat, deſcribantur duo arcus, vnus ſupernè, alter infernè; Et ex centro B, ad idem interuallum omnino alij duo arcus delineentur, qui priores ſecent in C, & D. Recta enim ducta CD, ſecabit rectam AB, in E, bifariam. Si enim ex A, & B, ad C, & D, ducantur quatuor recta, erunt hæ omnes inter ſe æquales, cum ex centris ad circumferentias æqualium circulorum cadant; Nam arcus circulorum deſcripti ſunt eodem interuallo.



Quoniam igitur latera AC, CD, æqualia ſunt lateribus BC, CD, vtrumque vtrique, & baſis AD, baſi BD, b *erit angulus ACD, angulo BCD, æqualis. Rurſus quia latera AC, CE, æqualia ſunt lateribus BC, CE, vtrumque vtrique, & anguli ACE, angulo BCE, vtroſque ſuum fuit;* c *erit baſis AE, baſi BE, æqualis.* b 8. pri. c 4. pri.

I AM verò ſi linea bifariam diuidenda poſita ſit in extremo plani cuiuſpiam, ita vt infra ipſam locus non ſit, in quo commode duo arcus ſeſe interſecantes poſſint deſcribi; deſcriptis ſupra eam duobus arcubus ſeſe interſecantibus in C, deſcribemus ad eaſdem partes alios duos arcus ſeſe interſecantes mutuo in D, ſiue hoc fiat infra punctum C, vt in appoſita figura, ſiue ſupra C. Nam recta per C, D, educta ſecabit rectam AB, bifariam in E.



SCHOLIVM.

PERSPICVVM eſt, eodem modo diuidi poſſe eandem lineam rectam AB, in 4. partes æquales, & in 8. in 16. in 32. &c. ſicuti in propoſitione præcedenti diximus de diuiſione triangulj rectilinei. Qua verò ratione quauis recta linea propoſita diuidenda ſit in quotcunque partes æquales, liberrimè trademus ad propoſ. 40. huius lib. Idemque longè facilius poſtea efficiemus ad propoſ. 10. lib. 6. vbi varias, & non injucundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur eſſe proprius huic rei locus, cum huiuſmodi praxes fere omnes per linearum proportiones facilius demonſtrentur. Neque verò vnquam diui-

ſione linea in plures, quàm in duas partes æquales, ad eum locum cùm ſæpe indigebimus.

xj. PROBL. 6. PROPOS. 11.

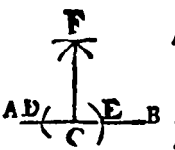
DATA recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

RECTA linea data ſit AB; & in ea punctum C, à quo iubemur erigere ſuper AB, lineam ad angulos rectos, ſeu perpendicularem. A puncto C, ſumatur recta CD, *a* cui æqualis auferatur CE. Deinde ſuper DE, *b* conſtituatur triangulum æquilaterum DEF, atque ex F, ad C, ducatur recta FC, quam dico eſſe perpendicularem ad AB. Quoniam latera DC, CF, trianguli DCF, æqualia ſunt lateribus EC, CF, trianguli ECF, vtrumque vtrique, nempe DC, ipſi EC, per conſtructionem, & CF, commune; Eſt verò & baſis DF, baſi EF, æqualis, ob triangulum æquilaterum: *c* Erunt anguli ad C, contenti dictis lateribus, æquales. *d* Quare dicetur vterque rectus, atque adeo FC, recta, ad AB, perpendicularis. Data igitur recta linea à puncto in ea dato, &c. Quod faciendum erat.



a 3. *primi.*
b 1. *primi.*
c 8. *primi.*
d 10. *def. fin.*

PRAXIS.



EX puncto C, abſcindantur vtrinq; linea æquales CD, CE, & ex D, & E, deſcribantur duo arcus ſecantes ſeſe in F. Recta namq; ducta FC, erit perpendicularis. Demonſtratio eadem eſt, qua Euclidis, ſi modo ducantur rectæ DF, EF, quæ æquales erunt, propter æquales circulos ex D, & E, deſcriptos, qui ſe interſecant in puncto F. Quod ſi punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, vt ex illo erigatur ſecundum præxim datam linea perpendicularis. Vt ſi linea data fuerit AC, & punctum datum C, extremum; protrahenda erit AC, in B, & ſumenda æquales CD, CE, &c. Si verò ad aliquam lineam conſtituenda ſit linea perpendicularis, non quidem in puncto aſſignato, ſed vtcunque, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis A, & B, quibuſcunque linea propoſita deſcribantur tam ſuperne, quàm inferne



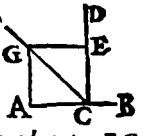
duo arcus ſeſe interſecantes in C, & D. Nam recta ducta CD, erit perpendicularis ad AB, hoc eſt, faciet duos angulos ad E, rectos, ſeu æquales. Quod non aliter probabis, quàm ſupra praxim, qua lineam in duas æquales diuiſimus partes, demonſtrauimus.

Nam per

Nam per 4. propoſ. erunt anguli ad E, æquales, quippe qui ſuper æquales baſes A E, B E, conſiſtant, opponanturq; æqualibus lateribus A C, B C, quæ ex C, ad puncta A, & B, ducerentur.

EX PROCLO.

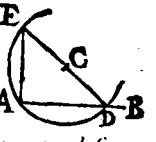
SI punctum in linea datum fuerit extremum, & linea commodè produci nequiuerit, poterimus ex puncto dato educere lineam perpendicularem, linea non producta, hac ratione. Sit recta A B, & punctum A. Ex C, puncto quolibet intra lineam educatur perpendicularis C D, vt docuit Euclides ; a & abſcindatur C E, æqualis ipſi A C: Deinde b diuidatur angulus C, biſariam, ducta recta C F: Et ex E, rurſus, vt docuit Euclides, educatur E G, perpendicularis ad C D, ſecans rectam C F, in G. Ducta enim recta G A, perpendicularis erit ad A B. Quoniam cùm latera A C, C G, trianguli A C G, æqualia ſint lateribus E C, C G, trianguli E C G, vtrumque vtrique, & anguli hiſce lateribus contenti æquales quoque, per conſtructionem : c Erunt anguli A, & E, oppoſitis communi lateri C G, æquales; Sed E, eſt rectus per conſtructionem; igitur & A, rectus erit, d ideoq; A C, ad A B, perpendicularis.



a 3 primi.
b 9. primi.
c 4 primi.
d 10. def

SCHOLIVM.

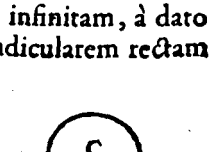
BREVIVS lineam perpendicularem erigemus ex puncto dato, ſiue extremum illud ſit, ſiue non, hoc modo. Sit data linea A B, punctumq; in ea A. Ex centro C, extra lineam aſſumpto, & vbi libuerit (dummodo recta A B, producta cum ipſo non conueniat) interuallo vero accepto vſque ad A, deſcribatur arcus circuli ſecans A B, in D. Et ex D, per C, recta ducatur ſecans arcum in E. Recta enim ducta E A, erit perpendicularis ad A B. Nam angulus A, eſt rectus, cùm ſit in ſemicirculo D A E, vt oſtendemus propoſitione 31. libri 3.



PROBL. 7. PROPOS. 12. xij.

SVPER datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam deducere.

Sit recta A B, interminatæ quantitatis, & extra ipſam punctũ C, à quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectam A B. Centro C, interuallo vero quolibet circulus deſcribatur ſecans A B, in D, & E. (quoniam interuallum aſſumptum tantum eſſe



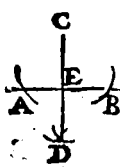
a 10. pri. debet, vt transcendat rectam A B; aliàs eam non secaret) a Diuisa autem recta D E, bifariam in F, ducatur recta C F, quam dico perpendicularem esse ad A B. Si enim ducantur C D, C E, erunt duo latera D F, F C, trianguli D F C, æqualia duobus lateribus E F, F C, trianguli E F C, vtrumque vtrique, per constructionē; est autem & basis C D, basi C E, æqualis, cùm hæ sint ex centro

b 8. pri. C, ad circumferentiam. Quare b erit angulus D F C, angulo E F C, æqualis, & propterea vterque rectus. Ducta est igitur C F, perpendicularis, quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

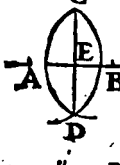
PROBE apposuit Euclides hanc particulam, infinitam. *Si enim linea esset infinita, non posset semper à puncto dato extra ipsam perpendicularis ad eam deduci. Vt si linea finita esset B E, & punctum C, non posset ex C, describi circulus secans B E, in duobus punctis, quare neque ex C, perpendicularis duci ad B E. Hac igitur de causa vult Euclides, rectam datam esse infinitam, hoc est, non habere magnitudinem determinatam, vt saltem ad ipsam productam perpendicularis possit deduci. Ita enim fiet hic, si B E, producatur, donec circulus ex C, descriptus secet totum B A, productam in D, & E, &c.*

PRAXIS.

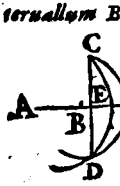


CENTRO facto C, & interuallo quouis eodem, describantur duo arcus secantes rectam datam in A, & B. Deinde ex A, & B, eodemq; interuallo, vel alio, si placuerit, alij duo arcus describantur secantes se in D. Nam ducta recta C D secans A B, in E, erit perpendicularis ad A B. Demonstratio huius operationis non differt à demonstratione traditæ in praxi propositionis

c 4. pri. 10. *Nam anguli ad E, erunt recti,* c nempe inter se æquales.



IDEM efficiemus hoc modo. Ex quouis puncto A, in linea data, & interuallo quolibet vsque ad C, assumpto, arcus circuli describatur: Deinde ex quolibet alio puncto B, interuallo q; vsq; ad idem C, alius arcus describatur priorem secans in C, & D; Eritq; recta C D, secans A E, in E, perpendicularis ad A B. Demonstratio eadem est, quæ prior. Non est autem necesse, vt interuallum B C, æquale sit interuallo A C, vt in hac figura apparet.

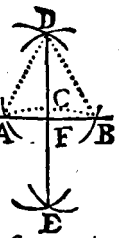


Facilior tamen erit, & brevior operatio, si idem semper interuallum accipiatur.

QVOD si punctum C, fuerit nimis vicinum rectæ A B, ita agendum erit. Centro C, ad quoduis interuallum secetur recta A B, in duobus punctis A, B, ex quibus ad maius interuallum quodcunque, quàm A C, vel A B, bini arcus

tam

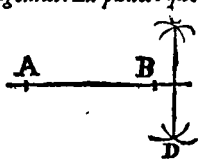
dam suprà, quàm infrà describantur, se intersecantes in D, E. Nam ducta recta D C F, qua producta necessariò per punctum E, transibit, perpendicularis erit ad rectam A B, in F. Quod ita demonstrabimus, ductis rectis A D, B D, A C, B C. Quoniam duo latera D A, D C, trianguli A C D, duobus lateribus D B, D C, trianguli B C D, æqualia sunt, nec non & bases A C, B C, æquales sunt, a erunt anguli ad D, æquales. Quare cùm duo latera D A, D F, trianguli A D F, duobus lateribus D B, D F, trianguli D B F, æqualia sint, continentq; angulos ad D, æquales, & ostendimus; b erunt anguli ad F, æquales, ac proinde recti, &c.



a 8. pri.

b 4. pri.

IAM verò si punctum datum sit iuxta extremum plani cuiusp. iam, ita ut linea data non possit produci, ita agemus. Ex puncto quouis B, quod è regione dati puncti C, videatur quasi esse positum, hoc est, ferè in extremitate lineæ datæ A B, describantur duo arcus supra, & infra lineam A B, ad interuallum B C. Deinde ex puncto A, aliquantum remoto à puncto accepto B (Quo autem magis distabunt inter se puncta A, & B, eò commodius puncta intersectionum arcuum cognoscentur) alij duo arcus ad interuallum A C, describantur, secantes priores in C, & D. Nam recta C D, perpendicularis erit ad datam rectam A B.

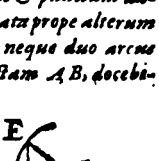


SI autem puncto non prope extremum plani, in quo linea est, dato, linea fit in extremo plani, ut duo arcus infra lineã commodè se intersecare non possint, siue punctum datum C, sit propinquum linea A B, siue non, absoluemus problema hoc modo. Ad interuallum A C, vbicunque punctum A, sumatur, describatur ex C, arcus secans rectam A B, in D; atque ex A, D, duo arcus describãtur versus punctũ C, sese intersecantes in E. Recta namq; ex E, per C, ducta secans A B, in F, perpendicularis erit ad A B, vt suprà demonstratum est, quando punctum C, erat prope lineã A B.



QVO verò modo nos gerere debeamus, quando & punctum datum est iuxta vnum extremum plani, & linea data prope alterum extremum, ita vt neque lineam producere liceat, neque duo arcus commodè se intersecare possint in D, infra datam rectam A B, docebimus in scholio propositionis 31. huius lib.

VERVM hoc etiam efficiemus hoc modo. In figura scholij propos. 11. sit ad rectam A B, ex puncto E, deducenda perpendicularis ad extremum quodammodo linea. Ducta vtcunque recta E D, a secetur bifariam in C; & centro C, per E, arcus circuli



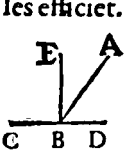
a 11. pri.

descri-

describatur secans rectam datam in A. Quod si non secet, producenda erit, donec ab arcu secetur. Recta enim E A, erit ad A B, perpen-
a 31. ter *dicularis*; b *cùm angulus A, sit in semicirculo rectus.*
tij.

THEOR. 6. PROPOS. 13.
xiij.

CVM recta linea super rectam consistens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



b 10. def RECTA linea A B, consistens super rectam C D, faciat duos angulos A B C, A B D. Si igitur A B, fuerit perpendicularis ad C D, *b* erunt dicti anguli duo recti. Si verò A B, non fuerit perpendi-
c 11. pri. cularis, faciet vnum quidem angulũ obtusum, alterum verò acutũ. Dico igitur ipsos duobus esse rectis æquales. *c* Educatur enim B E, ex B, perpendicularis ad C D, vt sint duo anguli
d 10. pro E B C, E B D, recti. Quoniam verò angulus rectus E B D, *d* æ-
e 2. pron qualis est duobus angulis D B A, A B E; *e* erunt, appositio communi angulo recto E B C, duo recti E B D, E B C, tribus angulis
f 10 pro D B A, A B E, E B C, æquales. Rursus quia *f* angulus A B C, duobus angulis A B E, E B C, æqualis est; *g* erunt appositio commu-
g 2. pro. ni angulo A B D, duo anguli A B C, A B D, tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales. Sed eisdem his tribus ostendimus, æquales etiam esse duos rectos E B D, E B C; quæ autem eidem æqua-
h 1. pron lia, *h* inter se sunt æqualia. Duo igitur anguli A B C, A B D, æquales sunt duobus rectis E B D, E B C. Cùm ergo recta linea super rectam consistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

SCHOLIVM.

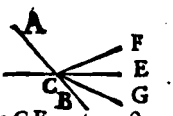
VIDETVR hæc propositio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus A B C, superat rectum angulum E B C, eo reliquus angulus A B D, superatur ab angulo recto E B D. Nam sicut ibi excessus est angulus A B E, ita hic defectus est idem angulus A B E. Quocirca anguli A B C, A B D, duobus rectis æquales esse conuincuntur: siquidem tantum vnus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

THEOR. 7. PROPOS. 14.
xiv.

SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctũ, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

Ad punctum C, lineæ rectæ A B, in diuersas partes eductæ sint duæ rectæ C D, C E, facientes cum A B, duos angulos A C D, A C E,

ACE, vel rectos, vel duobus rectis æquales.



Dico ipſas CD, CE, inter ſe eſſe cõſtitutas in directum, ita vt DCE, ſit vna linea recta. Si enim nõ eſt recta DCE; producta DC, ad partes C, in directum, & continuum cadet aut ſupra CE, vt ſit recta DCF, aut infra CE, vt ſit recta DCG. Si cadit ſupra, cum AC, conſiſtat ſuper rectam DCF, *a* fient duo anguli ACD, ACF, duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo anguli ACD, ACE, æquales duobus rectis; *b* & omnes recti ſunt inter ſe æquales. Quare duo anguli ACD, ACF, duobus angulis ACD, ACE, erunt æquales. Ablato igitur cõmuni angulo ACD, *c* remanebunt anguli ACF, ACE, inter ſe æquales, pars & totum, quod eſt abſurdum. Non igitur recta DC, producta cadet ſupra CE; Sed neq; infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli ACE, ACG, æquales. Igitur DC, producta eadem efficietur, quæ CE; propterea quæ, ſi ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 13. primi.
b 12 primi.
c 3. primi.

SCHOLIVM.

EST hæc propoſitio præcedentis conuerſa. In ea enim probatum fuit, ſi DCE, ſit recta, angulos ACD, ACE, duobus eſſe rectis æquales. In hac verò demonſtratum eſt, ſi dicti anguli ſint duobus rectis æquales, rectas DC, EC, eſſe vnam lineam rectam.

EX PROCLO.

RECTE Euclides addidit in propoſitione hac (& non ad eaſdem partes.) Quoniam, vt ait Porphyrius, fieri poteſt, vt ad punctum aliquod lineæ datæ ad eaſdem partes duæ lineæ ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis æquales, quæ tamen non conſtituant vnam lineam, eò quòd non ad diuerſas ſint ductæ partes. Sit enim punctum C, in linea AB, datum. Ducatur CD, d *perpendiculus ad AB,* e *diuidaturq; rectus angulus ACD, bifariam per rectam CE. Deinde ex D, quolibet puncto rectæ CD,* f *ducatur DE, perpendicularis ad CD, ſecans rectam CD, in E. Producta autem ED, ad partes D,* g *ſumatur DF, æqualis rectæ DE, & ducatur recta FC. Quoniam igitur latera ED, DC, trianguli EDC, æqualia ſunt lateribus FD, DC, trianguli FDC, vtrumque vtrique, & anguli D, ipſis contenti æquales, nempe recti;*



d 11. primi.
e 9. primi.
f 11. primi.
g 3. primi.

h erit baſis EC, baſi CF, æqualis, & angulus FCD, angulo FCD. h 4 primi.
Sed angulus ECD, dimidium eſt recti. (Eſt enim rectus ACD, diuiſus bifariam.) Igitur & FCD, dimidium erit recti. Quare CF, cum AC, faciet angulum ACF, conſtantem ex recto, & dimidio recti; Facit autem CE, cum eadem AC, angulum ACE, dimidium etiam recti. Duo igitur anguli ACF, ACE, quos ad eaſdem partes faciunt rectæ CF, & CB, cum AB; æquales ſunt duobus rectis: Et tamen

men CF, CE, non sunt vna linea recta, propterea quòd non sunt ducta ad diuersas partes, sed ad easdem.

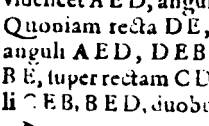
XV. THEOR. 8. PROPOS. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuò secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficient.

Secent se duæ rectæ A B, C D, in puncto E, vtcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter se esse æquales, angulum videlicet A E D, angulo B E C, & angulum A E C, angulo B E D.

a 13. pri. Quoniam recta D E, consistit super rectam A B, *a* erunt duo anguli A E D, D E B, æquales duobus rectis. Rursus quia recta B E, super rectam C D, consistit, erunt eadem ratione duo anguli C E B, B E D, duobus rectis æquales. Cùm igitur *b* omnes recti

b 12. pri.



nguli inter se sint æquales; erunt duo anguli E D, D E B, duobus angulis D E B, B E C, æ-

c 3. pri. quales. Dempto igitur communi angulo D E B, *c* remanebit angulus A E D, angulo B E C, æ-

d 13. pri. qualis. Eadem ratione confirmabitur, angulos A E C, B E D, inter se æquales esse. Nam duo anguli A E C, C E B, *d* qui duobus sunt rectis æquales, æquales erunt duobus quoq; angulis D E B, B E C, qui duobus rectis sunt æquales. Ablato igitur angulo com-

e 3. pri. muni B E C, *e* remanebunt anguli A E C, B E D, æquales inter se. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuò secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.

COROLLARIVM I.

EVCLIDES colligit ex demonstratione huius theorematis (ex sententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium non habent) duas lineas rectas se mutuo secantes efficere ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos A E D, D E B, quàm duos A E C, C E B, duobus esse rectis æquales, per 13 propos. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales existunt.

COROLLARIVM II.

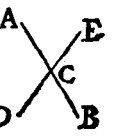
EADEM ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum constitutos, quotcunq; fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. Si enim ex E, aliæ lineæ quotlibet educantur, diuidentur

f 19. pri. solummodò illi quatuor anguli ad E, constituti in plurimas partes, *f* quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur. Cùm ergo illi quatuor anguli æquales sint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoq; omnes alij simul sumpti quatuor tantum rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circumstans, æquiualere quatuor rectis angulis, vt multi auctores asserunt: quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modo constat, quotlibet lineas rectas se inuicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales quatuor rectis.

EX

EX PROCLO.

SI ad aliquam rectam lineam, ad eiusque signum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt.

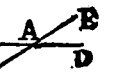


EX puncto C, recta AB, in diuersas partes egrediantur duæ rectæ CD, CE, facientes angulos ACE, BCD, inter se æquales: Vel etiam duos ACD, BCE. Dico duas CD, CE, efficere vnam lineam rectam. Quoniam enim angulus ACE, æqualis est angulo BCD; addito communi angulo BCE, a *erunt duo anguli ACE, ECB, duobus angulis DCB, BCE, æquales: Sed* b *anguli ACE, ECB, sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo DCB, BCE, duobus erunt rectis æquales. Quamobrem CD, CE,* c *erunt linea vna recta. Hoc autē, vt vides, conuersum est propositionis decimaquintæ.*

a 2. pro.
b 13. pri.
c 14. pri

EX PELETARIO.

SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi, & continuum coniunctæ.



EX puncto A, quatuor lineæ eductæ AB, AC, AD, AE, faciant duos angulos oppositos BAE, CAD, inter se æquales: item duos BAC, DAE, inter se æquales. Dico tam BA, AD, facere vnam lineam rectam, quam CA, AE. Quoniam æquales sunt anguli BAE, CAD, si æquales illis addantur anguli BAC, DAE, d *erunt duo anguli BAE, BAC, æquales duobus angulis CAD, DAE. Tam ergo illi, quàm hi, dimidium sunt quatuor angulorum circa punctum A, consistentium: At hi quatuor æquales sunt quatuor rectis, per 2. coroll. præcedentis propos. Igitur duo anguli BAE, BAC, æquales sunt duobus rectis;* e *atque adeo CA, AE, vnam efficient lineam rectam. Eodem pacto ostendetur, duas BA, AD, vnam rectam efficere lineam. Nam eadem ratione erunt duo anguli BAE, EAD, æquales duobus angulis DAC, CAB. Quare, vt primus, concludetur propositum. Peletarius autem demonstrat hoc idem ratione ducente ad id, quod fieri nequit. Nos tamen demonstrationem nostram ostensiuam eius demonstrationi iure optimo præposuimus.*

d 2. pro.
e 14. pri.

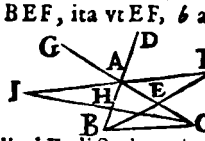
XVI.

THEOR. 9. PROPOS. 16.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito, maior est.

TRIAN-

TRIANGVLI A B C, latus B A, producatur ad D. Dico angulum externum D A C, maiorem esse interno, & opposito A C B, itemque maiorem interno, & opposito A B C. Diuidatur a enim A C, bifariam in E; & ex B, per E, extendatur recta B E F, ita vt E F, b abscissa sit æqualis rectæ E B; ducaturq; recta F A. Quoniam igitur latera C E, E B, trianguli C E B, æqualia sunt lateribus A E, E F, trianguli A E F, vtrumque vtrique, per constructionem; Sunt autem & anguli ad E, dictis lateribus comprehensi, c inter se æquales, cùm sint circa verticem E, & oppositi: Erit d basis C B, æqualis basi A F, & angulus E C B, angulo E A F; Est autem angulus D A C, externus maior angulo E A F, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus D A C, maior erit interno, & opposito angulo A C B. Quod si latus C A, producatur ad G; & A B, diuidatur bifariam in H; extendaturque recta C H I, vt H I, æqualis sit rectæ H C, & ducatur recta I A: demonstrabitur eadem prorsus ratione, angulum externum G A B, maiorem esse interno angulo, & opposito A B C; Est autem e angulus D A C, angulo G A B, æqualis, cùm lineæ B D, C G, se mutuò secent in A. Igitur & angulus D A C, maior erit interno & opposito angulo A B C. Est autem idem angulus D A C, maior quoque ostensus angulo interno & opposito A C B. Cuiuscunque ergo trianguli vno latere producto, &c. Quod demonstrandum erat.



a 10. primi.
b 3. primi.
c 15. primi.
d 4. primi.
e 15. primi.

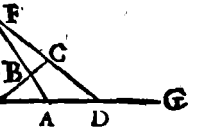
SCHOLIVM.

NON dixit Euclides, angulum externum D A C, maiorem esse angulo B A C, interno, qui sibi est deinceps; sed solùm magnitudine superare vtrumlibet A C B, A B C, internorum, sibiq; oppositorum: quoniam externus angulus aqualis potest esse angulo interno sibi deinceps, quando scilicet externus rectus est. Tunc enim necessariò is, qui sibi est deinceps, rectus quoque erit: Potest & esse minor, quando nimirum est acutus. Hoc enim posito, angulus illi deinceps obtusus erit. Solùm ergo, quando obtusus erit externus, superabit internũ sibi deinceps; Hic enim necessariò acutus existet. Quæ omnia facilè colliguntur ex propos. 13. per quam angulus externus, & internus illi deinceps, æquales sunt duobus rectis.

ID verò, quod in scholio propos. 6. huius libri nos demonstraturos recepimus, nimirum hanc propositionem non posse conuerti; cum & vno latere figuræ quadrilateræ producto, externus angulus quolibet interno, & oppositio possit esse maior; hac ratione absoluemus.

SIT figura quadrilatera A B C D, cuius angulus B A D, obtusus, & A B C, rectus constituatur, hac tamen lege, vt recta A B, D C, producta ad partes B, & C, in puncto E, necnon & recta D A, C B, ad partes

partes A & B, in punctо F, coeant. Quod quidem fiet, si cōstituatur triangulū ADE, obtusangulū, & producta D A, versus A, ducatur ex quouis punctо F, ad A E, perpendicularis FB, secans latus D E, in C. Dico, si A D, producatur ad G, angulum externum C D G, maiorem esse quolibet trium internorū B AD, A B C, B C D, sibi oppositorum. Cùm enim A D E, triangulum sit, a erit angulus externus E D G, maior interno opposito D A E. Rursus cum D A B, obtusus maior sit recto A B C, maior quoq; multo erit E D G, ipso A B C. Postremo, quia & in triangulo C D F, b angulus externus C D G, maior est interno, & opposito F C D; manifestum est, in quadrilatero A B C D, externum angulum C D G, maiorē esse internis, & oppositis B A D, A B C, B C D. Quamobrem propositio hac 16. conuerti nequit, quippe cùm eius antecedens, & consequens non reciprocentur, vt demonstratum est.

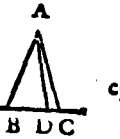


a 16. pri mi.

b 16. pri mi.

EX PROCLO.

SEQVITVR ex hac propositione, ab eodem puncto ad quamcunq; eandemq; lineam rectam non posse duci plures lineas rectas, quàm duas inter se aequales. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad lineam B C, tres lineae rectae aequales A B, A C, A D. Quoniam igitur latera A B, A C, sunt aequalia, c erunt anguli A C B, & A B C, aequales super basin B C. Rursus quia latera A B, A D, sunt aequalia, d erunt anguli A D B, & A B D, super basin B D, aequales. Quare cùm vterque angulus A C D, & A D B, aequalis sit angulo A B C, e erit angulus A D B, aequalis angulo A C D, externus interno opposito, quod est absurdum, cùm per hanc 16. propos. externus interno maior sit. Non ergo plures linea rectae, quàm duae, inter se aequales, ex A, ad B C, possunt duci. Quod est propositum.



c 5 pri.

d 5 pri.

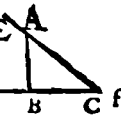
e 1. prop.

xvij.

PROBL. 10. PROPOS. 17.

CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.

Sit triangulum A B C; Dico duos angulos A B C, & A C B, minores esse duobus rectis; Itē duos C B A, & C A B; Itemque duos B A C, & B C A. Producantur enim duo quaevis latera, nempe C B, C A, ad D, & E. Quoniam igitur *f* angulus A B D, externus maior est interno & opposito angulo A C B; si addatur communis angulus A B C, *g* erunt duo anguli A B D, A B C, maiores duobus angulis A B C, A C B: *h* Sed A B D, A B C, aequales sunt duobus rectis. Igitur A B C, A C B, minores sunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli C B A, & C A B, minores duobus rectis. Nā cùm angulus externus A B D, *i* maior sit angulo C A B,



f 16. pri.

g 4 prop

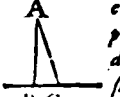
h 13. pri.

i 16. pri.

a 4. pri. interno, & oppoſito; a erunt, appoſito communi angulo A B C, duo anguli A B D, A B C, maiores duobus angulis C A B, C B A:
b 13. pri. Cùm ergo b duo illi duobus rectis ſint æquales, erunt hi alij duo duobus rectis minores. Non ſecus oſtendemus, duos B A C, B C A, duobus eſſe rectis minores. Cùm enim angulus externus B A E,
c 16. pri. c maior ſit interno & oppoſito angulo B C A; ſi apponatur communis angulus B A C,
d 4. pro. d erunt duo anguli B A E, B A C, duobus
e 13. pri. angulis B C A, B A C, maiores: ac proinde cùm illi duo e ſint duobus rectis æquales, erunt duo hi minores duobus rectis. Cuiuſcunque igitur trianguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

EX PROCLO.

HINC perſpicuum eſt, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non poſſe deduci plures lineas perpendiculares, quàm vnam. Si enim fieri poteſt, ducantur ex A, ad rectam B C, duæ perpendiculares A B, A C. Erunt igitur in triangulo A B C, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cùm ſint duo recti, quod eſt abſurdum. f *Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque oſtenſi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendiculares, quàm vna, ex A, ad B C, deduci poſſunt. Quod eſt propoſitum.*



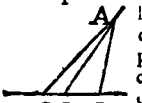
f 17. pri.

COROLLARIVM I.

CONSTAT etiam ex his, In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtuſus, reliquos eſſe acutos, ceu monuimus defin. 26. huius lib. Cùm enim per hanc propoſ. duo quilibet anguli ſint duobus rectis minores, neceſſe eſt, ſi vnus fuerit rectus, vel obtuſus, quemcunque reliquorum eſſe acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores eſſe fateamur.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR etiam ex hac propoſ. ſi linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum acutum, & obtuſum alterum, lineam perpendicularem ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demiſſam cadere ad partes acuti anguli: Faciat enim recta A B, cum recta C D, angulos inæquales, nempe A B D, acutum, & A B C, obtuſum, demittaturque ex puncto A, quocunque ad C D, perpendicularis A D. Dico A D, cadere ad partes anguli acuti A B D. Nam ſi non cadit ad partes acuti anguli A B D, cadat ſi fieri poteſt, ad partes anguli obtuſi A B C. Igitur duo anguli A B C, A C B, obtuſus & rectus, in triangulo A B C, maiores ſunt duobus rectis; g ſed & duobus rectis ſunt minores, quod eſt abſurdum. Non ergo ex A, perpendicularis ad C D, deducta cadit ad partes anguli obtuſi. Quare ad partes acuti anguli cadet.



g 17. pri

COROLLARIVM III.

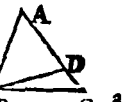
PARI ratione fit ex hac propoſ. manifeſtum omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli Iſoſcelis ſupra baſin, eſſe acutos. Nam h cum & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in Iſoſcele ſupra baſin ſint inter ſe æquales; i ſintq; ſimul tam illi duo, quàm hi duobus

h 5. pri. i 17. pri.

bus rectis minores: erit quilibet illorum recto minor, hoc est, acutus. Si enim rectus foret, aut obtusus, essent ambo vel duobus rectis æquales, aut maiores.

THEOR. 11. PROPOS. 18. XVIII.

OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

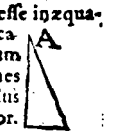


IN triangulo A B C, sit latus A C, maius latere AB. Dico angulum A B C, subtensum à maiori latere A C, maiorem esse angulo A C B, qui à minori latere A B, subtenditur. Nam ex A C, a auferatur A D, æqualis ipsi A B, & ducatur recta B D. Quoniã igitur duo latera A B, A D, æqualia sunt per constructionẽ, b erunt anguli A B D, A D B, æquales: Est autem c angulus A D B, maior angulo A C B. Igitur & angulus A B D, maior erit angulo A C B. Quamobrem cùm d angulus totus A B C, maior adhuc sit angulo A B D; erit angulus A B C, multò maior angulo A C B. Eadem ratione, si latus A C, maius ponatur latere B C, ostendens angulum A B C, maiorem esse angulo B A C; si nimirum ex C A, abscindatur linea æqualis ipsi C B, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit; Quod demonstrandum erat.

a 3. pri.
b 5. pri.
c 16 pri
d 9. pro.

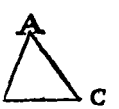
COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, omnes tres angulos trianguli scaleni esse inæquales, vt monuimus defin. 15. huius lib. Sit enim triangulum scalenum A B C, cuius maximum quidem latus A C, minimum autem B C, & medium locum habens A B. Dico eiusdem omnes angulos inæquales esse. Cum enim latus A C, ponatur maius latere A B, erit per hanc propos. angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus A B, latere B C, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimùs verò A, & C, medium locum inter vtrumque tenens.



THEOR. 21. PROPOS. 19. XIX.

OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.



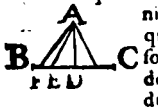
IN triangulo A B C, angulus B, maior sit angulo C. Dico latus A C, subtendens maiorem angulum B, maius esse latere A B, quod angulum minorem C, subtendit. Si enim latus A C, maius non est B latere A B, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur A C, æquale esse ipsi A B, e erit angulus B, æqualis angulo C; Est autem & maior per hypothesin, quod est absurdum. Si verò A C, minus esse dicatur latere A B, erit angulus B, subtensus à minore latere AC, minor angulo C, subtenso à maiore latere A B; Ponitur autem maior, quod magis est absurdum. Cùm igitur A C, latus

e 5. pri.

neque æquale sit lateri AB, neque minus eo, erit maius. Eadem ratione probabitur, latus AC, maius esse latere BC, si angulus B, maior esse concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli maiori angulus maiori lateri subtenditur; Quod demonstrandum proponebatur.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propos. omnium rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcunque ductarum, eam, quæ perpendicularis est, esse minimam. Ducantur enim ex puncto A, ad rectam BC, quotcunque lineæ AD, AE, AF, & aliæ, quarum AD, sola sit perpendicularis ad BC, & nulla alia, cum ex eodem puncto ad eandem rectam sola vna perpendicularis duci possit; vt ex Proclo ad propos. 16. demonstrauimus. Dico omnium minimam esse AD. Nam in triangulo AED, cum duo anguli ADE, AED, a sint duobus rectis minores, ponaturque ADE, rectus; erit AED, acutus. Quare b maius erit latus AE, latere AD. Eodem modo ostendemus, omnes alias rectas maiores esse recta AD: ac proinde perpendicularis AD, omnium erit minima.



a 17. pri.
b 19. pri.

EX PROCLO.

POSSVMVS hoc idem theorema ostendere affirmatiua demonstratione, sine admiculo precedentis, si tamen prius demonstretur hoc sequens theorema.

SI trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansque angulum recta linea ad basin ducta in partes inæquales ipsam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento coincidit, minus verò, quod cum minori.

TRIANGVLI ABC, angulus BAC, diuidatur bifariam per rectam AD, quæ secet basin BC, in partes inæquales, maiusque segmentum sit DC. Dico latus AC, maius esse latere AB. Producatur enim AD, ad E, & sit DE, æqualis ipsi AD. Deinde ex maiori segmento DC, auferatur recta DF, æqualis minori segmento DB, & per F, ex E, extendatur recta EFG. Quoniam igitur latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia sunt lateribus ED, DF, trianguli EDF, & vtrumque vtrique, per constructionem; sunt autem & anguli ADB, EDF, dictis lateribus contenti æquales: Erunt bases AB, & EF, æquales, & angulo BAD, angulus EFD, æqualis: Est vero & angulus CAD, angulo BAD, æqualis, per hypothesim: Igitur & anguli CAD, GEA, trianguli AGE, æquales erunt, ideoque & latera AG, EG, æqualia erunt. Est autem recta AC, maior quàm AG: quare & AC, maior erit, quàm EG. Et quia EG, maior est, quàm



c 3. pri.
d 15 pri.
e 4. pri.
f 11. pron.
g 6. pri.

quàm EF, erit & AC, multò maior, quàm EF. Cùm igitur demonſtratum ſit rectam EF; æqualem eſſe rectæ AB, erit AC, latus maius latere AB, quod erat oſtendendum.

HOC oſtenſo theoremate, ita propoſitio 19. demonſtrabitur. In triangulo ABC, angulus ABC, maior ſit angulo C. Dico latus AC, maius eſſe latere AB. Diuiſa enim recta BC (ſuper quam conſtituti ſunt dicti anguli inæquales) bifariam in D, ex A. per D, extendatur recta AD F, a & ſit DE æqualis ipſi AD: ducaturque recta BE. Quoniam igitur latera AD, DC, trianguli ADC, æqualia ſunt lateribus ED, DB, trianguli EDB, & utrumque utrique, per conſtructionem, b ſunt autem & anguli ADC, EDB, dicti comprehenſi lateribus æquales: c Erunt baſes AC, & BE, æquales, angulusq; ACD, angulo EBD, æqualis: Et quia angulus ACD, ponitur eſſe minor angulo ABC, erit & angulus EBD, minor eodem angulo ABC. Ideoque angulus ABE, per rectam BD, diuidetur in partes inæquales. Si igitur bifariam ſecetur per rectam BF, cadet BF, ſupra ED, eo quòd angulus ABD, maior ſit angulo EBD. Quia verò EF, d maior eſt quàm ED, & ED, poſita eſt æqualis ipſi AD, erit EF, maior quam AD. e Sed adhuc AD, maior eſt quàm AF. Multò igitur maior erit EF, quàm AF. Itaque quia recta BF, diuidens angulum ABE, bifariam, ſecat baſin AE, inæqualiter in F, eſtq; maius ſegmentum EF, minus autem AF; erit per theoremα à Proclo proximè demonſtratum, latus BE, maius latere AB. Oſtenſum eſt autem BE, æquale eſſe lateri AC. Igitur & AC, latus latere AB, maius erit. Quod erat demonſtrandum.



a 3. pri.

b 15. pri.

c 4. pri.



d 9. pri.

e 9. pron

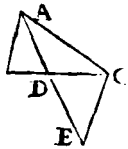
SCHOLIVM.

Hæc propoſitio 19. conuerſa eſt propoſitionis 18. & perſpicuum eſt. Campanus autem duarum iſtarum propoſitionum ordinem prorſus mutauit, ita & ea, quæ apud nos eſt 18. apud ipſum ſit 19. & contra. Quarum utramque oſtendit ducendo ad id, quod fieri nequit, cùm tamen Euclides propoſitionem 18. directè & oſtenſiuè confirmauerit, ut ex dictis liquidò conſtat.

POTERIMVS quoque theorema à Proclo demonſtratum conuertere, hoc modo.

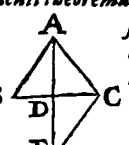
SI trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipſis contentum, ſecabit baſin in partes inæquales, maiuſque ſegmentum erit prope maius latus.

DVO latera AB, AC, trianguli ABC, ſint inæqualia; AC, maius, & AB, minus. Recta autem AD, diuidens angulum BAC,

bifariam, secet basin B C, in D. Dico segmentum D C, maius esse segmento D B. Si enim non est maius, erit vel aquale, vel minus. Si di-
a 3. pri. *catur esse aquale; producatur A D, ad E,* a *vt D E, aqualis sit ipsi D A, ducatur q; recta E C. Quoniam igitur latera A D, D B, aqualia sunt lateribus E D, D C, vtrumque vtrique; A D, videlicet ipsi E D, per constructionem, & D B, ipsi D C, per hypothesin aduersarij.*
b 15 pri. *Sunt autem &* b *anguli ad D, dictis lateribus contenti aquales:* c *erit basis A B, basi E C, aqualis & angulo B A D, angulus C E D.*
c 4. pri. *Positus autem est & angulo B A D, angulus C A D, aqualis. Igitur*
d 6. pri. *&*  *anguli C E D, C A D, aquales erunt.* d *Ideoq; latus A C, lateri E C, aquale. Cùm igitur ostensum sit, lateri E C, aquale esse q;oq; latus A B,*
e 1. prop. *erunt latera A C, A B, aqualia; quod est absurdum; quia A C, maius ponebatur, quàm A B. Nõ erit igitur segmentum D C, segmento D B, aquale. Quod si D C, dicatur esse minus, & D B, maius; erit per theorema Procli, latus A B, maius latere A C. Ponebatur autem minus; quod multò magis est absurdum. Non igitur minus erit D C, quàm D B. Quare erit necessariò maius.*

EODEM modo demonstrari poterit hoc theorema.

SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoque secet, erunt duo latera angulum continentia inter se æqualia: Quod si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.

PRIMVM recta A D, secans angulum B A C, bifariam diuidat quoque basin B C, in D, bifariam Dico latera A B, A C, inter se aqualia esse. Hoc autem demonstrabimus eadem ratione, qua in precedenti theoremate ostensum fuit, latus A C, aquale esse latert A B. si D C, segmentum segmento D B, aquale ponatur. dummodo figuram eodem modo construas. Cùm e-
f 15 pri. *nim latera A D, D B, aqualia sint lateribus E D,*  *D C,* f *& anguli ad D, dictis lateribus contenti*
g 4. pri. *aquales;* g *erunt bases A B, E C, aquales, &*
h 6. pri. *anguli C E D, angulo B A D, hoc est, angulo C A D, aqualis. Quare* h *A C, aquale erit ipsi E C, hoc est, ipsi A B.*

DEINDE sint latera A B, A C, aqualia, & recta A D, secans basin B C, in D, diuidat angulum B A C, bifariam. Dico segmentum D C, aquale esse segmento D B. Cùm enim latera A D, A B,
i 4. pri. *aqualia sint lateribus, A D, A C, vtrumque vtrique, & anguli quoque ad A, contenti dictis lateribus aquales per hypothesin,* i *erunt bases B D, D C, aquales.*

THEOR.

THEOR. 13. PROPOS. 20. xx.

OMNIS trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.

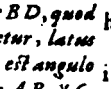
SIT triangulum A B C. Dico quælibet eius duo latera, nempe A B, A C, simul maiora esse reliquo latere B C. Producatur vnum ex illis, vt C A, vsque ad D, *a* sitque recta A D, æqualis alteri lateri non producto A B, & ducatur recta D B. Quoniam igitur duo latera A B, A D, æqualia inter se sunt, per constructionem, *b* erunt anguli A B D, A D B, æquales inter se: Est autem angulo A B D, *c* maior angulus C B D. Igitur & angulus C B D, maior erit angulo A D B In triangulo ergo C B D, latus C D, oppositum maiori angulo C D B, *d* maius erit latere B C, quod minori angulo C D B, opponitur. Cùm igitur duo latera A B, A C, simul æqualia sint ipsi C D, (si enim æqualibus A B, A D, commune addatur A C, *e* fient tota æqualia; nimirum linea composita ex A B, A C, & linea composita ex A D, A C) erunt quoque latera A B, A C, simul maiora latere B C. Eodem modo demonstrabitur, quælibet alia duo latera maiora esse reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, &c. Quod demonstrandum erat.



a 3. pri.
b 5. pri.
c 9. prom
d 19. pri.
e 2. prom

EX PROCLO.

ALITER hoc theorema à familiaribus Heronis, & Porphyrij demonstratur, nullo latere producto, hac ratione. Sit probandum duo latera A B, A C, trianguli A B C, maiora esse latere B C. Diuidatur angulus B A C, illu lateribus contentus f *bifariam per rectam A D. Quoniam igitur trianguli C D A, latus C D, protractum est ad B,* g *erit angulus externus B D A, maior interno & opposito C A D. Igitur & maior angulo B A D Quare in triangulo A B D, latus A B, maiori angulo A D B, opposito* h *maius erit latere B D, quod minori angulo B A D, opponitur. Eadem ratione ostendetur, latus A C, maius esse quàm C D, quia angulus C D A,* i *maior est angulo B A D, hoc est, angulo C A D, &c. Quamobrem duo latera A B, A C, maiora erunt latere B C. Eademq; est ratio quorumcunque duorum laterum, si angulus ipsis comprehensus bifariam secetur.*



f 9. pri
g 16. pri.
h 19. pri.
i 16. pri.

THEOR. 14. PROPOS. 21. xxj.

SI super trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt.

IN triangulo A B C, ſuper extremitates B, & C, lateris B C, intra triangulum conſtituantur duæ rectæ lineæ B D, C D, in puncto D, concurrentes. Dico B D, C D, ſimul minores eſſe duobus lateribus B A, C A, ſimul; At verò angulum B D C, maiorem angulo B A C. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe B D, ad punctum E, lateris C A. Quoniam igitur in trian-



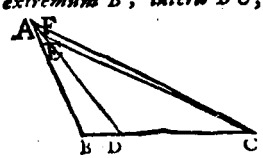
a 20. pri. gulo B A E, duo latera B A, A E, *a* maiora ſunt latere B E, ſi ad-
b 4. pro. datur commune E C, *b* erunt B A, A C, maiora quàm B E, E C.
c 20. pri Rurſus quia in triangulo C E D, duo latera C E, E D, *c* maiora
d 4. pron ſunt latere C D; ſi commune apponatur D B, *d* erunt C E, E B, maiora quàm C D, D B. Oſtenſum iam verò fuit, A B, C A, maiora eſſe quàm B E, E C. Multò igitur maiora erunt B A, C A, quàm B D, C D, quod primò proponebatur. Præterea, quoniam
e 16. pri. angulus B D C, *e* maior eſt angulo D E C, externus interno; & angulus D E C, angulo B A C, maior quoque eſt, eandem ob cauſam: Erit angulus B D C, multò maior angulo B A C; quod ſecundò proponebatur. Si igitur ſuper trianguli vno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

QVAM rectè Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum conſtitutas, duci debere ab extremitatibus vnius lateris, aperiè intelliget poteſt ex eo, quod mox ex Proclo demonſtrabimus; in triangulis videlicet rectangulis, vel etiam amblygonijs, intra triangulum conſtitui poſſe duas lineas ſuper vnum latus circà angulum rectum, vel obtuſum, quarum quidem vna ab extremitate dicti lateris, altera verò à quouis puncto prope aliud extremum lateris eiuſdem educitur, quæ maiores ſint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulis ſcalenis eodem modo ſuper maximum latus duas rectas intra triangulum conſtitui poſſe, quæ minorẽ comprehendant angulum, &c.

EX PROCLO.

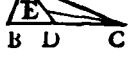
SIT triangulum habens exempli gratia angulum A B C, obtuſum. Dico ab extremo C, & à quouis puncto, nempe à D, prope aliud extremum B, lateris B C, duci poſſe duas lineas intra triangulum ad aliquod punctum, quæ maiores ſint duobus lateribus B A, A C. Ducatur enim recta D A: Et quoniam in triangulo A B D, duo anguli A B D, A D B,



f 16. pri. *f minores ſunt duobus rectis. Ponitur autem A B D, maior recto, nempe obtuſus; erit A D B minor recto,*
g 19. pri *ideoque minor angulo A B D. Quare latus A D, g maius erit late-*
h 3. pri. *re A B. Ex D A, h abſcindatur recta D E, æqualis rectæ A B. Et re-*
i 10. pri. *liqua linea A E, i biſariã diuidatur in F. Si igitur ab extremo C, ad F, re-*

F, recta ducatur C F, erunt duæ lineæ rectæ constitutæ C F, D F, intra triangulum maiores duobus lateribus B A, A C. Quoniã enim in triangulo A F C, duo latera A F, F C, a maiora sunt latere A C. Est autem recta A F, ipsi F E, æqualis, per constructionẽ; erunt C F, F E, maiores quoq; latere C A. Si igitur æqualia addantur E D, & A B, fient b *recta C F, F D, b maiores lateribus C A, A B. Quod est propositum. Quod si ad F, ex B, extremo rectæ duceretur, essent duæ rectæ constitutæ C F, B F, minores duobus laterib. C A, A B, vt Euclides demonstrauit.* a 20. primi. b 4. primi.

RVRSVS sit triangulum scalenum A B C, cuius latus maximum B C, minimum A B. Ex B C, c *auferatur B D, æqualis rectæ A B, & ducatur A D, recta, ad cuius punctum quodlibet, vt ad E, ab extremo C, recta ducatur C E. Constituta igitur erunt intra triangulum duæ lineæ C E, D E, quæ minorem angulum comprehendunt eo, quem efficiunt duo latera A B, A C. Cum enim duo latera B A, B D, æqualia sint,* d *erunt duo anguli B A D, B D A, æquales: Sed B D A, anguli* e *maior est angulo C E D. Maior igitur erit & anguli B A D, angulo C E D. Quare multo maior erit totus anguli B A C, angulo C E D. Quod est propositum. Rectè igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum constitutas educi debere, ab extremis punctis vnius lateris, vt minores quidem sint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem verò complectantur angulum. Alias enim propositio vera non esset, vt iam est demonstratum.*



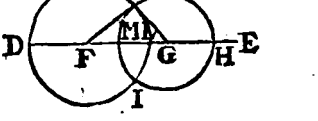
c 3. primi. d 5. primi. e 16. primi.

VERVM de constitutione duarum linearum intra triangulum, quæ maiores sint, vel æquales duobus lateribus, plura ostendemus ex Pappo ad propos. 34. huius lib.

PROBL. 8. PROPOS. 22. xxij.

EX tribus rectis lineis, quæ sint tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua esse maiores omnifariam sumptas: quoniam vniuscuiusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt maiora.

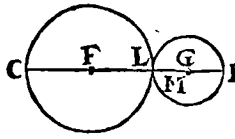
TRES lineæ rectæ datæ sint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua sint maiores, (Alias ex ipsis non posset constitui triangulum, vt constat ex propos. 20. in qua ostensum fuit, duo quæuis latera trianguli reliquo esse maiora.) oporteat q; constituere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex assumpta recta quauis D E, infinitæ magnitudinis, f abscindatur recta D F, æqualis rectæ A, Et ex reliqua F E, recta F G,



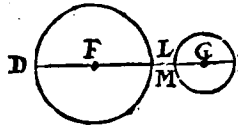
f 3. primi.

E 5 æqualis

æqualis rectæ B; & ex reliqua G E, recta G H, æqualis rectæ C. Deinde centro F, interuallo verò F D, circulus describatur D I K. Item centro G, interuallo autem G H, alius circulus describatur H I K, qui necessario priorem secabit in punctis I, & K, (eum enim duæ F D, G H, maiores ponantur recta F G; si ex F E, sumatur recta F L, æqualis ipsi F D: & ex G D, recta G M, æqualis ipsi G H, cadet punctum M, inter L, & D. Si namque M, caderet in



L, punctum, essent G L, F L, hoc est, G H, & F D, æquales rectæ F G, Si verò M, caderet inter G, & L, essent eædem duæ F L, G M, hoc est, D F, G H, minores recta F G, quorum vtrumque est contra hypothesin. Id quod ex appositis figuris apparet) ex quorum quolibet, nimirum ex K, ducantur ad puncta, F, G, rectæ K F, K G, factumq; erit triangulum F G K, cuius latera dico æqualia esse datis rectis A B, & C. Cum enim recta F K, *a* æqualis sit rectæ F D, & recta A, per constructionem eidem F D, æqualis; *b* erit latus F K, rectæ A, æquale. Rursus quia G K, æqualis est ipsi G H, & recta C, eidem G H; erit quoque latus G K, rectæ C, æquale: Positum autem fuit per constructionem, reliquum latus F G, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera F K, F G, G K, tribus datis rectis A, B, C, æqualia sunt. Constituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.



a 15 *defin.*

b 1. *prop.*

P R A X I S.

SVMATVR recta D E, æqualis cuicunque rectarum datarum, nempe ipsi B, quam nunc volumus esse basin. Deinde ex D, ad interuallum rectæ A, arcus describatur: Item ex E, ad interuallum rectæ C, alter arcus secans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ D F, E F, factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis. Erit enim



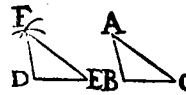
latus D F, æquale rectæ A, propter interuallum ipsius A, assumptum: & latus E F, ipsi C, propter assumptum interuallum C: D E, verò latus, acceptum est rectæ B, æquale, ab initio.

S C H O L I V M.

HAC arte cuicunque triangulo proposito alterum prorsus æquale & quoad latera, angulosq; & quoad aream ipsius, constituemus. Sit namque triangulum quodcunque A B C, cui æquale omni ex

parte

parte est construendum. Intelligo enim latera, tanquam tres lineas rectas datas A B, B C, C A, quarum qualibet duæ a maiores sunt reliqua. Deinde sumo rectam D E, æqualem vni lateri, nempe B C; & ex D, interuallo lateris A B, arcum describo, item alium ex E, interuallo reliqui lateris C A, qui priorem secet in F, &c.



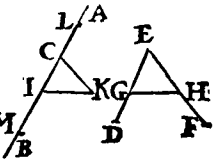
a 20. *primi.*

PROBL. 9. PROPOS. 23. xxiij.

AD datam rectam lineam, datumq; in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

DATA recta sit A B, datumque in ea punctum C, & datus angulus D E F. Oportet igitur ad rectam A B, in puncto C, angulum constituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis E D, E F, duo puncta vtcunque G, H, quæ recta G H, connectantur: Deinde *b* constituatur triangulum C I K, habens tria latera æqualia tribus rectis E G, G H, H E, ita vt C I, æquale sit ipsi E G; & C K, ipsi E H; & I K, ipsi G H. (Quod facile fiet, si C I, sumatur æqualis ipsi E G, & C L, ipsi E H, & I M, ipsi G H. Deinde ex centris C, & I, interuallis verò C L, & I M, circuli describantur secantes sese in K, &c.) Dico angulum C, æqualem esse angulo E. Quoniam enim duo latera C I, C K, æqualia sunt duobus lateribus E G, E H, vtrumque vtrique, & basis I K, basi G H, per constructionem; *c* erit angulus C, angulo E, æqualis: Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo F, &c. Quod facere oportebat.

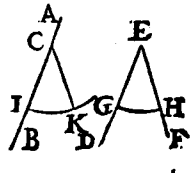
b 22. *primi.*



c 8. *primi*

PRAXIS.

NON differt huius problematis praxis ab illa, quam in præcedente problemate tradidimus; propterea quod triangulum constituere oportet æquale alteri triangulo, & angulus dato angulo æqualis exhibeatur, & perspicuum est. Facilius tamen hac arte problema efficies. Sit linea data A B, punctumque in ea C, & angulus datus E. Centro igitur E, & interuallo quouis arcus describatur G H: Eodemque interuallo ex centro C, arcus describatur I K, sumaturque beneficio circini arcus I K, arcui G H, æqualis. Recta enim ducta C K, faciet angulum ad C,



æqualem

æqualem angulo E. Nam ſi ducerentur rectæ I K, G H, eſſent ipſæ æquales, propterea quod circino non variato ſtramq; diſtantiam I K, G H, accepimus. Cum ergo & duo latera I C, C K, æqualia ſint duobus G E, E H, ob æqualia interualla, quibus arcus ſunt deſcripti,

a 8. *primi.* *a erunt anguli I C K, G E H, æquales.*

CÆTERVM qua ratione ex puncto extra datam rectam propoſito recta ducis poſſit, qua cum data recta angulum conſtituat dato angulo rectilineo æqualem, docebimus ad propoſ. 31. huius lib.

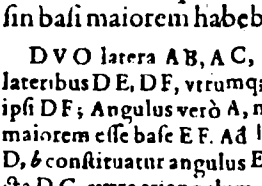
xxiiij. THEOR. 15. PROPOS. 24.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum verò angulo maiorem ſub æqualibus rectis lineis contentum: Et baſin baſi maiorem habebunt.

DVO latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia ſint duobus lateribus D E, D F, vtrumq; vtrique, nempe A B, ipſi D E, & A C, ipſi D F; Angulus verò A, maior ſit angulo E D F. Dico baſiu B C, maiorem eſſe baſe E F. Ad lineam enim D E, ad eiusque punctum

b 23. *primi.* D, *b* conſtituatur angulus E D G, æqualis angulo A; (cadetque recta D G, extra triangulum D E F, cum angulus E D F, minor po-

c 3. *pri.*



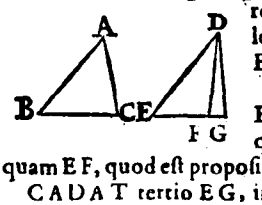
natur angulo A) *c* ponaturque D G, æqualis ipſi D F, hoc eſt, ipſi A C. Ducta deinde recta E G, cadet ea aut ſupra rectam E F; aut in ipſam, aut infra ipſam. Cadat primum ſupra E F, ducaturque recta F G. Quia ergo latera A B, A C, æqualia ſunt lateribus D E, D G, vtrumque vtrique, & angulus A, æqualis angu-

d 4. *primi.* lo E D G, per conſtructionem: *d* Erit baſis B C, baſi E G, æqualis. Rurſus quia duo latera D F, D G, inter ſe ſunt æqualia; *e* erunt

e 5 *pri.* anguli D F G, D G F, æquales: Eſt autem angulus D G F, *f* maior

f 9. *pro num.* angulo E G F. Igitur & angulus D F G, eodem angulo E G F, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus E F G, eodem an-

g 19. *pri mi.* gulo E G F. In triangulo igitur E F G, *g* maius erit latus E G, latere E F. Eſt autem oſtenſum E G, æquale eſſe ipſi B C. Maior igitur erit quoq; B C, quam E F. Quod eſt propoſitum.



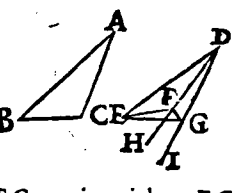
CADAT deinde E G, in ipſam E F.

h 4. *pri.* Et quia rurſus, vt prius baſis E G, *b* æ-

c 9 *pro nun.* qualis eſt baſi B C: & E G, *i* maior quam E F, quod eſt propoſitum.

CADAT tertio E G, infra E F, producanturque rectæ D F, D G, vſque ad H, & I, & ducatur recta F G. Erit autem rurſus, vt

k 4. *pri.* prius *k* baſis E G, baſi B C, æqualis. Deinde quia duo latera D F, D G, æqua-



DG, æqualia sunt inter se, per constructionem, *a* erunt anguli GFH, FGI, infra basin FG, æquales: Est autem angulus FGI, *b* maior angulo FGE Igitur & angulus GFH, eodem angulo FGE, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodem angulo FGE. In triangulo ergo EFG, *c* maius erit latus EG, latere EF. Est autem ostensum EG, æquale esse ipsi BC. Maior igitur erit quoque BC, basis basi EF. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat ostendendum.

a 5. pri.
b 9. prænum.
c 19. primi.

SCHOLIVM.

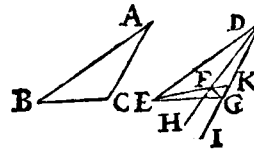
Si quis fortè roget, cur in 4. propositione Euclides ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, & anguli contenti dictis lateribus æquales, concluserit non solum æqualitatem basium, verùm etiam triangulorum, & reliquorum angulorum; hic autem ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, anguli verò lateribus illis comprehensi inæqualet, colligat tantùm inæqualitatem basium, non autem triangulorum, & reliquorum angulorum: Huic respondendum est, necessario id ab Euclide peritissimo Geometra esse factum. Nam ex antecedente huius theorematis semper consequitur basium inæqualitas, ita vt basis illius trianguli, cuius angulus contentus lateribus assumptis est maior, superet basin alterius, cuius angulus minor existit, vt demonstratum est; non autem necesse est, triangulum illud maius hoc esse. Vt enim clarissimè ex Proclo demonstrabimus ad propos. 37. huius primi libri, Triangulum maiorem habens angulum aliquando æquale est triangulo minorem habenti angulum, aliquando verò minus eodem, & aliquando maius. Non igitur potuit in vniversum inferri, ex eo, quod angulus vnius trianguli maior est angulo alterius, triangulum etiam maius esse, cum modo æquale sit, modo minus, & modo maius. Idem dici potest de angulis reliquis. Num in prima figura huius theorematis angulus ABC, minor est semper angulo DEF; cum angulus DEG, (qui æqualis est per 4. propos. angulo ABC,) d minor sit eodem angulo DEF, pars toto. In secunda autem figura, existit quidem angulus ABC, angulo DEF, æqualis, per 4. propos. At verò angulus ACB, minor est angulo DFE, cum angulus DFE, e maior sit angulo DGF, externus interno, & opposito; & angulus DGF, æqualis sit angulo ACB. In tertia denique figura angulus ABC, maior quidem est angulo DEF, propterea quod angulus DEG, (æqualis existens per 4. propos. angulo ABC,) f maior est eodem angulo DEF, totum parte. Sed angulus ACB, minor est angulo DFE.

d 9. prænum.
e 16. pri.
f 9. prænum.

Nam si

Nam si recta E F, producatur secans rectam D G, in K, fiet angulus a *D F E, a maior angulo D K E, externus interno; Est autem & angulus D K E, maior adhuc angulo D G E, externus quoque interno, & opposito. Multo igitur maior erit angulus D F E, angulo D G E, qui per 4. propos. aqualis est angulo A C B. Quod etiam constat ex 2. parte propos. 21. Nam interiores linea D F, E F, continent angulum maiorem angulo D G E, quem exteriores linea D G, E G, continent. Quare neque certi quicquam colligi potuit de inaqualitate reliquorum angulorum, cum modo vnus altero sit maior, modo minor, & modo aqualis.*

a 16. *primi.*

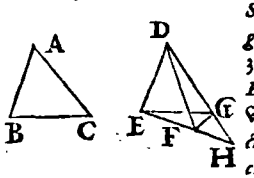


QVONIAM verò in triangulo D E F, duo anguli E, F, b semper minores sunt duobus rectis, erit necessario saltem alter eorum acutus. Si igitur ad partes acuti anguli (vt in 1. figura ad partes anguli D F E, in 2. verò & 3. ad partes anguli D E F.) fiat angulus E D G, aqualis angulo A, & reliqua fiant, vt in propos. dictum est, cadet semper ducta recta E G, supra punctum F. Nam cum angulus D F E, acutus sit, c erit ei deinceps, producto latere E F, obtusus. Producta ergo recta D G, secante latus E F, productum in H, d maior erit recta D H, latere D F, cum opponatur angulo obtuso in triangulo D F G; ac proinde recta E G, auferens D G, aqualem ipsi D F, cadet necessario supra F. Si namque vel per F, transiret, vel infra caderet, abscinderet ex D G, maiorem lineam latere D F; nimirum vel D H, vel maiorem, quam D H. Hoc si obseruetur, satis erit primus casus propositionis, qua fortassis causa fuit, vt Euclides apud Theonem primo casu contentus fuerit.

b 17. *primi.*

c 11. *primi.*

d 19. *primi.*



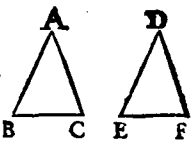
XXV.

THEOR. 16. PROPOS. 25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, basin verò basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

DVO latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia sint duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, vtrumque vtrique, hoc est, A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; Basis autem B C, maior sit

for ſit baſe E F. Dico angulum A, maiorem eſſe angulo D. Si enim non eſt angulus A, maior angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur eſſe æqualis, cum etiam duo latera circa A, æqualia ſint duobus circa D, vtrumque vtrique, per hypotheſin; a erit & baſis B C, æqualis baſi B F; quod eſt abſurdum; Ponitur enim baſis B C, baſe E F, maior: Si verò angulus A, dicatur eſſe minor angulo D; erit, propter æqualitatem laterum circa iſtos angulos, baſis E F, b maior baſe B C; quod magis eſt abſurdum, cum E F, ponatur eſſe minor quam B C. Quare angulus A, cum neque poſſit æqualis eſſe angulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat oſtendendum.



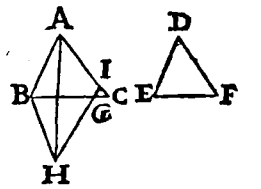
a 4. pri.

b 24 primi.

SCHOLIVM.

THEOREMA hoc conuerſum eſt præcedentis. In eo enim ex maiori angulo demonſtratum eſt, baſim illi reſpondentem eſſe maiorem: In hoc autem ex maiori baſi oſtenſum fuit, angulum illi reſpondentem maiorem eſſe. Differunt autem plurimum hæc duo theoremata, nempe Vigeſimum quartum, & Vigeſimum quintum, ab illis, qua explicata ſunt propoſition. decima octaua, & decima nona. Nam in decima nona demonſtratum eſt, in vno eodemque triangulo maiori angulo maius latus reſpondere: At in Vigeſima quarta, idem oſtenſum fuit in duobus diuerſis triangulis, quorum duo latera vnius æqualia ſunt duobus lateribus alterius &c. Idemque diſcrimen reperies inter propoſitiones decimam octauam, & Vigeſimam quintam.

MENELAVS Alexandrinus, vt ait Proclus, demonſtrat hoc idem theorema oſtenſiue, hac ratione. Poſitis eiſdem triangulis, ex baſe maiore B C, c abſcindatur recta B G, æqualis baſi minori E F. Fiat quoque angulus G B H, d æqualis angulo D E F, e & ſit B H, æqualis ipſi B A, atque adeo ipſi D E. Ducta autem recta linea A H, ducatur quoque recta per G, ex H, ſecans A C, in I. Quoniam igitur duo latera B A, B H, æqualia ſunt, f erunt anguli B A H, B H A, æquales. Rurſus quia latera B G, B H, æqualia ſunt lateribus E F, E D, vtrumque vtrique, & angulus G B H, æqualis, angulo



c 3. pri.

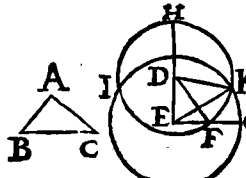
d 23. primi.

e 3. pri.

f 5. pri.

a 4.primi. angulo D E F, per conſtructionem: a erit baſis H G, baſi D F, atq; adb 9.prounn. eo ipſi A C, æqualis, angulusq; G H B, angulo E D F. Et quoniam rec c 9 prounn. ta H I, b maior eſt quam H G, quæ eſt oſtenſa æqualis ipſi A C, erit quoque maior H I, quam A C: Sed A G, c maior eſt adhuc, quam d 18.pri. A I. Multo ergo maior erit H I, quam A I. Quare angulus I A H, e 4.prounn. d maior erit angulo I H A. Additis igitur duobus angulis B A H, B H A, qui oſtenſi ſunt æquales, fiet e totus angulus B A C, toto angulo B H G, maior: Sed angulus B H G, demonſtratus fuit æqualis angulo D. Maior igitur etiam erit angulus B A C, angulo D, quod eſt propoſitum. Quod ſi quando contingat, rectam A H, cadere extra triangulum, auferendi erunt anguli æquales B A H, B H A, &c. Vt reliquus fiat angulus B A C, maior reliquo angulo B H G. Quando autem recta A H, per punctum B, tranſit, nihil addendum erit, aut demendum, vt perſpicuum eſt.

HERON autem idem ex eodem Proclo hoc modo demonſtrat. Poſitis eiſdem triangulis, producatur baſis minor E F, ad G, vt ſit E G, f 3.pri. *f æqualis baſi maiori B C. Deinde centro D, interuallo autem D F, deſcribatur circulus, producaturq; E D, ad H, in circumferentiam. Quoniam igitur*



g 15 def. *D H, g eſt æqualis ipſi D F, erit quoque* h 2.prounn. *D H, æqualis ipſi A C. Additis igitur* i 20.primi. *æqualibus D E, A B, h fient A C, A B, ſimul æquales toti H E: Sed A C, A B, i ſimul maiores ſunt, quam B C, atque adeo quam E G. Igitur & H E, maior erit, quam E G. Quare circulus deſcriptus ex centro E, & interuallo E G, interſecabit rectam E H, atque adeo circumferentiam prioris circuli in I, & K, punctis: ad K, autem ducantur rectæ D K, E K. Et quoniam duo latera A B, A C, æqualia ſunt duobus lateribus D E, D K, vtrumque vtrique, (eſt enim D K, æquale ipſi D F, per definitionem circuli: D F, autem poſitum eſt æquale lateri A C.) & baſis B C, baſi E K, æqualis: (eum E K, æqualis ſit ipſi E G, per definitionem circuli: E G, verò recta per conſtructionem facta ſit æqualis* k 8.pri. *baſi B C.) k Erit angulus B A C, angulo E D K, æqualis: Sed angu-* l 9.prounn. *lus E D K, maior eſt l angulo E D F. Quare & angulus A, angulo E D F, maior exiſtet. Quod eſt propoſitum. Atque hac demonſtratio generalior eſt priore, cum omnibus caſibus conueniat.*

THEOR. 17. PROPOS. 26.

xxvj. SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtruinque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſeu quod vni æqualium angulorum ſubtenditur: & reliqua latera

latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

SINT duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales duobus angulis E, & E F D, trianguli D E F, vterque vtrique, hoc est, B, ipsi E, & C, ipsi E F D; Sitque primo latus B C, quod angulis B, & C, adiacet, lateri E F, quod angulis E, & E F D, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera A B, A C, reliquis lateribus D E, D F, æqualia esse, vtrumque vtrique, hoc est, A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F, ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus A B, non est æquale lateri D E, sit D E, maius, à quo *a* abscindatur recta linea E G, æqualis rectæ lineæ A B, ducaturque recta G F. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus G E, E F, vtrumque vtrique, & anguli B, & E, æquales per hypothesin: *b* Erit angulus C, æqualis angulo E F G. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo E F D. Quare & angulus E F G, eidem angulo E F D, æqualis erit, pars toti; Quod est absurdum. Non est igitur latus A B, inæquale lateri D E, sed æquale. Quamobrem, cum latera A B, B C, æqualia sint lateribus D E, E F, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales; *c* erunt & bases A C, D F, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum.



a 3. pri.

b 4. pri.

c 4. pri.

SINT deinde latera A B, D E, subtendentia æquales angulos C, & E F D, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera B C, C A, reliquis lateribus E F, F D, esse æqualia, vtrumque vtrique, hoc est, B C, ipsi E F, & C A, ipsi F D; reliquumque angulum A, reliquo angulo D, æqualem. Si enim latus B C, non est æquale lateri E F, sit E F, maius; *d* ex quo sumatur recta E G, æqualis ipsi B C, ducaturque recta D G. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus D E, E G, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E æquales, per hypothesin; *e* Erit angulus C, angulo E G D, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo E F D, æqualis; Igitur & angulus E G D, angulo eidem E F D, æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum. *f* Est enim maior. Non ergo est latus B C, lateri E F, inæquale. Quocirca, vt prius, colligetur institutum ex 4. propos huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat.



d 3. pri.

e 4. pri.

f 16. pri.

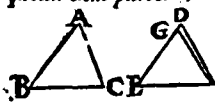
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonstratione huius theorematis, tota etiam

triangula, quoad areas, esse æqualia. Nam si latera A B, B C, lateribus D E, E F, æqualia sint, vt ostensum fuit, contineantque ex hypothesi angulos
a 4. pri. æquales B, E, a erunt tota quoque triangula æqualia inter se.

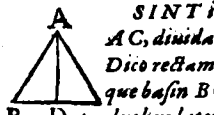
SCHOLIVM.

PRIOR huius theorematis pars conuersa est 4. propositionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulorum ipsis contentorum, collecta fuit æqualitas basium, & angulorum super bases. Nam in priori parte huius theorematis ex æqualitate basium BC, EF, & angulorum super has bases, demonstratum est, reliqua latera vnius trianguli reliquis lateribus æqualia esse, reliquumque angulum reliquo angulo, &c. Quod quidem alias nos ratione iam demonstrauimus ad propositionem octauam huius lib. quem modum eo loco monuimus.



HOC loco demonstrandum est theorema quoddam admodum necessarium, & perutile rebus Geometricis, videlicet.

IN triangulo æquilatero, siue Isoscele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenso ducta, diuidensque vel angulum, vel basin bifariam, perpendicularis est ad basim, & si quidem angulum bifariam diuidat, secabit quoque basin bifariam. Si verò basim secet bifariam, diuidet quoque angulum bifariam. Et contra; linea perpendicularis ad basin ducta diuidit & basin, & angulum bifariam.



SINT in triangulo A B C, duo latera æqualia A B, A C, diuidatq; primum recta A D, angulum A, bifariam. Dico rectam A D, esse ad B C, perpendicularem, secareque basin B C, bifariam. Cum enim duo latera A B, A D, duobus lateribus A C, A D, sint æqualia, angulosq; aqua-
b 4. pri. *les contineant, ex hypothesi, b erunt & bases B D, C D, æquales, & anguli ad D, atque adeo recti.*

DIVIDAT deinde recta A D, basin B C, bifariam. Dico rectam A D, ad B C, perpendicularem esse, & angulum A, secare bifariam. Cum enim duo latera B D, D A, duobus lateribus C D, D A, aqua-
c 8. pri. *lia sint, & basis A B, basi A C, ex hypothesi, c erunt quoque anguli ad D, æquales, atque adeo recti, ac proinde ex coroll. propos. 8. huius lib. & anguli ad A, æquales erunt.*

SED iam recta A D, sit ad B C, perpendicularis. Dico & basim
d 5. pri. *B C, & angulum A, secari bifariam. d Erunt enim anguli B, C, supra basin B C, æquales. Itaque quoniam duo anguli D, B, trianguli A B D, duobus angulis D, C, trianguli A C D, æquales sunt, vterque vtrique*

Vtrique, latumq; AD, æqualibus oppositum angulis B, C, commune; a *erunt & reliqua latera BD, CD, æqualia, & reliqui anguli ad A, æquales. Quod erat demonstrandum.* a 26. primi.

SED & hoc theorema verum est.

TRIANGVLVM, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad basim perpendicularis diuidit vel basim, vel angulum bifariam, habet duo latera dictum angulum comprehendentia æqualia: Et si quidem basis diuidatur bifariam, angulus quoq; bifariam secabitur: si verò angulus bifariam secetur, basis quoque diuidetur bifariam.

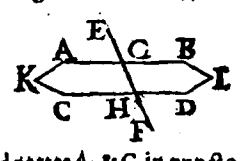
IN eodem triangulo ABC, sit AD, ad BC, perpendicularis, diuidatq; primum basin BC, bifariam. Dico & latera AB, AC, esse æqualia, & angulos ad A, æquales. Quoniam enim duo latera BD, DA, duobus lateribus CD, DA, æqualia sunt, angulosq; comprehendunt æquales, nempe rectos; b *erunt quoque & bases AB, AC, & anguli ad A, æquales. Quod est primum.* b 4. primi.

SECET deinde perpendicularis AD angulum A, bifariam. Dico & latera AB, AC, æqualia esse, & rectas BD, CD. Quoniam enim duo anguli D, A, trianguli ABD, duobus angulis D, A, trianguli ACD, æquales sunt, latumq; AD, illi adiacens, commune; c *erunt quoq; & latera AB, AC, & latera BD, CD, æqualia. Quod est secundum.* c 26. primi.

THEOR. 18. PROPOS. 27. xxvij.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ lineæ.

IN duas rectas AB, CD, incidens recta EF, faciat angulos alternatim AGH, DHG, inter se æquales. Dico lineas AB, CD, esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, coibunt tandem, si producantur infinitè. Si namque non coirent vnquam, parallelæ essent, ex parallelarum definitione. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum est GIH, (cum AB, recta cõtinuata sit, item recta CD, vsq; ad punctum I;) & angulus AGH, positus est æqualis angulo DHG; erit externus angulus AGH, æqualis interno, & opposito DHG, quod est absurdum; d quoniã externus interno maior est. Quod si AB, CD, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rursus eadem ratione angulus externus DHG, æqualis

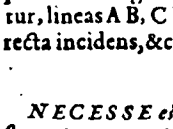


d 16. primi.

interno, & oppoſito A G H, quod eſt abſurdum. Non igitur coibunt lineæ A B, C D. Quare parallelæ erunt. Eodem modo, ſi ponantur anguli alterni B G H, C H G, æquales, demonſtrabitur, lineas A B, C D, eſſe parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

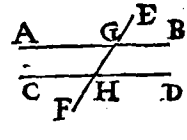
NECESSE eſt, vt linea, quæ dicuntur parallelæ, in eodem exiſtant plano, vt ex definitione conſtat: Quare non ſatis eſt, duos angulos alternos æquales inter ſe eſſe, vt duæ lineæ probentur eſſe parallelæ, niſi ponatur, eas in vno, eodemq; exiſtere plano. Fieri enim poteſt, vt linea recta incidens in duas rectas non in eodem plano exiſtentes, faciat alternos angulos æquales. Sit enim C D, perpendicularis ad A B, rectam, quæ in ſubiecto plano exiſtit; & ex C, in alio plano, ad C D, ducatur alia perpendicularis C E, ita vt punctum E, intelligatur in ſublimi. Quo poſito, perſpicuum eſt, rectam C D, incidentem in rectas C E, A B, facere duos angulos E C D, A D C, alternos æquales, cum ſint recti; & tamen C E, A B, non ſunt parallelæ, quod non in eodem exiſtant plano. Non appoſuit autem Euclides in propoſitione hanc conditionem; in eodem plano exiſtentes: ſicut neque in ſubſequentibus; quoniam cum in prioribus ſex libris agatur de planis duntaxat, vt ſupra diximus, omnia intelligenda ſunt neceſſario in eodem plano exiſtere. In vndecimo verò libro, & aliis, qui ipſum ſequuntur, monebit ſemper, lineas aliquas in eodem eſſe plano, vel in diuerſis planis, quia in illis libris diſſeritur de ſolidis, in quibus diuerſa plana conſiderari poſſunt. Quod idem dicendum eſt de punctis extra lineas, & ſuperficies, &c.



xxviij. THEOR. 19. PROPOS. 28.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulũ interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.

IN duas rectas A B, C D, recta incidens E F, faciat primo externum angulum E G A, æqualem angulo interno, & oppoſito ad eaſdem partes G H C. Dico rectas A B, C D, eſſe parallelas. Quoniam enim angulo E G A, æqualis ponitur angulus G H C; & eidem angulo E G A, *a* æqualis eſt angulus H G B; *b* erunt anguli alterni G H C, H G B, æquales. Quare lineæ A B, C D, *c* parallelæ erũt. Idem oſtenderur, ſi angulus externus E G B, æqualis ponatur interno G H D.



a 15. pri.
b 1. prænum.
c 27. primi.

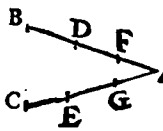
DEINDE

DEINDE faciat recta EF; angulos internos ex eadem parte, nempe A G H, C H G, duobus rectis æquales. Dico rursus rectas A B, C D, esse parallelas. Quoniam enim anguli A G H, C H G, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt autem & anguli A G E, A G H, a duobus rectis æquales; Erunt duo anguli A G H, C H G, a 13. pri duobus angulis A G E, A G H, æquales. Ablato igitur communi angulo A G H, remanebit angulus A G E, externus angulo C H G, interno, & opposito ad easdem partes æqualis. Quare vt iam ostensum est, erunt rectæ A B, C D, parallelæ. Idem ostendetur, si duo anguli B G H, D H G, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

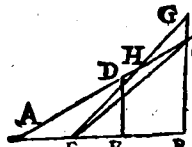
IAMDVDVM pronunciatum tertium decimum à Principiorum numero reiecimus. Cum igitur sequens propos. 29. eum multis aliis illi ita innitatur, vt sine eius auxilio demonstrari nequeat, operæpretium erit illud hoc loco, ex hactenus demonstratis theorematibus, atque problematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, Geometrica demonstratione confirmare, vt in expositione dicti Axiomatis polliciti sumus. Primo autem loco demonstrationem Procli afferemus. Deinde idem nos pronunciatum magis accurate, atque euidentius demonstrabimus. Proclus igitur, antequam illud demonstret, duo præmittit. Primum est.

SI ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinitè producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.



EXEANT à puncto A, duæ rectæ A B, A C, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quam F, & G. Item puncta B, & C, plus quam D, & E, & ita deinceps, si producantur vltra rectalineæ A B, A C, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinitè ipsa producantur. Si enim nõn infinito spatio distarent, augeri posset eorum distantia; igitur & linea ipsa vltra produci, quod est absurdum, cum ponantur infinitè iam esse producta. Quare si dictæ lineæ A B, A C, producantur infinitè, ipsarum distantia excedet omnem finitam distantiam. Hoc pronunciato vsus est & Aristoteles lib. 1. de cœlo, vbi demonstrauit, mundum non esse infinitum.

QVOD autem rectæ A B, A C, quo longius protrahantur, eo magis inter se distent, (Hoc enim Proclus sine demonstratione assumpsit, cum dixit puncta D, & E, in proxima figura plus inter se distare,

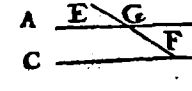


quam F, & G. Item B, & C, plus quam D, & E, &c.) hac ratione demonſtrabimus. Demittuntur ex punctis C, D, vtcunque in recta A C, accepta, ad A B, perpendiculares C B, D E, quæ diſtantias punctorum C, D, à recta A B, metiuntur, cum ſint minimæ omnium rectarum ex C, D, ad A B, ductarum, vt in coroll. propoſ. 19. oſtendimus. Dico C B, maiorem eſſe, quam D E; ac proinde plus diſtare rectam A C, à recta A B, in puncto C, remotiore, quam in puncto propinquiore D. Si enim C B, non eſt maior, quam D E, erit vel æqualis, vel minor: Sit primum æqualis & recta A E, abſcindatur æqualis B F, ita vt punctum F, cadat vel inter A, & E, vel in E, vel denique inter E, & B, ducaturq; recta F C. Quoniam igitur duo latera A E, B D, trianguli A E D, duobus lateribus F B, B C, trianguli F B C, æqualia ſunt, vtrumque vtrique, angulosq; continent æquales, vtpote re-
a 4. pri. *ctos: a erunt & baſes A D, F G, & anguli D A E, C F B, inter ſe æquales. Igitur externus angulus G F B, interno D A E, æqualis erit;*
b 16. pri. *b quod eſt abſurdum. Vel cum externus angulus C F B, interno*
c 27 pri mi. *D A E, æqualis ſit, c parallelæ erunt A C, F C, quod etiam abſurdum eſt, cum in C, concurrant.*

SIT deinde C B, minor quam D E, ſi fieri poteſt, & producta B C, fiat B G, ipſi D E, æqualis, jungaturq; recta F G. Quia igitur duo latera A E, E D, trianguli A E D, duobus lateribus F B, B G, æqualia ſunt, vtrumque vtrique, angulosq; continent æquales, puta rectos;
d 4. pri. *d erunt & baſes A D, F G, & anguli E A D, B F G, inter ſe æquales. Igitur externus angulus B F G, interno E A D, æqualis erit, quod eſt abſurdum. Vel cum externus angulus B F G, interno E A D, æqualis*
e 27. pri mi. *ſit, e erunt A C, F G, inter ſe parallelæ, quod abſurdum eſt, cum ſe mutuo ſecent in H. Quocirca B C, ipſa E D, maior erit, cum neque æqualis, neque minor eſſe poſſit, vt demonſtratum eſt.*

SECVNDVM, quod Proclus præmittit, huiuſmodi eſt.

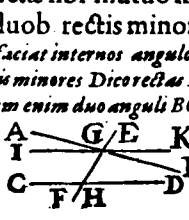
SI duarum parallelarum rectarum linearum alteram ſecet quædam recta linea, reliquam quoque productam ſecabit.



SINT duæ parallelæ A B, C D, & recta E F, ſecet ipſam A B, in G. Dico rectam E F, ſi producatur, ſecturam eſſe quoque ipſam C D. Quoniam duæ rectæ G B, G F, in puncto G, angulum faciunt, ſi producantur infinitè, excedent omnem finitam diſtantiam; igitur & diſtantiam, qua parallelæ A B, à parallela C D, diſtat, cum hæc diſtantia ſit finita, alias enim non eſſent lineæ parallelæ. Quare quando diſtantia G B, à G F, maior iam fuerit ea, quæ inter parallelas eſt, neceſſe eſt rectam G F, productam ſe-

dam secuisse rectam C D. Nam quamdiu G F, continebitur inter duas parallelas, minori distantia a G B, remouebitur, quam C D, ab eadem G B, & constat. His igitur ita expositis, facile demõstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidem, tertium decimum pronunciatum.

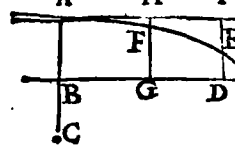
SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq; partes, angulos duob. rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinitè productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duob rectis minores.

IN rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat internos angulos ad partes B, & D, & B G H, D H G, duobus rectis minores Dico rectas A B, C D, esse ad eadem partes B, & D. Quoniam enim duo anguli B G H, D H G, minores ponuntur esse duobus rectis:  *Sunt autem duo anguli D H G, D H F, a duobus rectis æquales: Erunt duo anguli D H G, D H F, maiores duobus angulis D H G, B G H.* a 13. pri.

Ablato ergo communi angulo D H G, remanebit angulus D H F, maior angulo B G H. Si igitur ad rectam F G, & ad punctum, G, b 5. pro. num. *constituatur angulus K G H, æqualis angulo D H F, cadet G K, supra G B, & secabit, producta rectam A B. Quoniam igitur in duas* c 23. pri. mi. *rectas I K, C D, recta incidens E F, facit angulum externum D H F, æqualem interno, & oppositè K G H. Erunt recta I K, C D, parallela. Secat autem recta A B, ipsam I K, in G. Producta igitur secabit* d 11. pre num. *quoque ipsam C D, & demonstratum est. Quare A B, cum C D, conuenient ad partes B, & D, nimirum in puncto L. quod est propositum.* e 28. pri mi.

HAC ergo ratione conatur Proclus Axioma tertiumdecimum demonstrare. Sed quoniam principium, quod primo loco præmisit, æquè dubium, & obscurum esse videtur, atq; illud Axioma, afferemus nos demonstrationem magis accuratam, si prius doceamus, in quo difficultas, siue obscuritas principij illius a Proclo assumpti consistat. Quemadmodum igitur ex Procli, & aliorum Geometrarum sententia, sine demonstratione concedendum non est, duas rectas, quæ semper sibi mutuo fiunt propinquiores, tandem aliquando concurrere, licet sit verissimum, cuiusmodi sunt duæ rectæ, in quas recta incidens facit internos duos angulos ex eadem parte duobus rectis minores, quorum vnus rectus sit, & alter acutus: Hæ enim sibi mutuo appropinquant ad eas partes, vbi duo illi anguli duobus rectis minores existunt, vt mox demonstrabimus. Quemadmodum, inquam, concedendum hoc sine probatione non est, propterea quod dari possunt in eodem plano duæ lineæ, vna recta, & altera inflexa, nimirum vel Hyperbole, vel lineæ conchoideos, sibi semper mutuo magis ac magis appropinquantes, quæ tamen nunquam coeant, licet in infinitum vtraq; producantur. quorum illud ab Apollonio Pergæo, hoc verò a Nicomede demonstratum est: Ita quoque non videtur sine demonstratione admitten-

mittendum esse, (quamquam ueriſſimum ſit) duas rectas lineas angulum efficientes omnem finitam magnitudinem excedere, ſi in infinitum producantur amba, licet ſemper magis ac magis inter ſe diſtent, ut nos ſupra demonſtrauimus. Nam exhiberi poſſunt duæ lineæ in eodem plano angulum comprehendentes, recta una, & altera inflexa, quæ conchoideos appellatur à Nicomede, ſemper magis ac magis inter ſe diſtantes, quarum tamen diſtantia datam quamcunque rectam lineam nunquam ſuperet, aut exæquet, licet amba extendantur in infinitum. Data namque ſit recta AB. Dico deſcribi poſſe lineam rectam, & inflexam, quarum una ab altera ſemper magis recedat, diſtantiam tamen earum nunquam æqualem eſſe rectæ AB, aut maiorem, quantumuis producantur amba. Producta enim recta AB, quantumlibet uſque ad C, ducatur per B, ad AC, perpendicularis BD; & polo C, interuallo autem AB, deſcribatur linea conchoideos AE, inflexa nimirum linea, quæ recta BD, fiat quidem ſemper propinquior, nunquam tamen cum ea conueniat, ut à Nicomede traditur. Deinde per



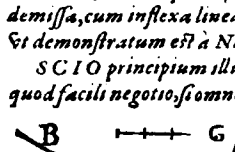
a 28. primi. *A, excitetur recta AI, ad AC, perpendicularis, a quæ ipſi BD, parallela erit. Poſtremo ex duobus punctis HI, utcunq; in recta AI, ac-*

b 28 primi. *ceptis demittantur ad BD, perpendiculares HG, ID, b quæ parallela, c atque adeo æquales inter ſe erunt, angulo ſque d conſtituent ad*

c 34. primi. *H, I, rectos. Admittantur enim nunc, ut propoſitum oſtendamus,*

d 29. primi. *omnes demonſtrationes Euclidis, ac ſi ex axiomate 13. non penderent, aut etiamſi pendeant ex eo, concedantur tamen, perinde ac ſi axioma illud iam ſit demonſtratum ante propoſ. 29. huius lib. ubi primum uſus illius apparere incipit, uti uerè à nobis mox ante propoſ. 29. demonſtrabitur. Itaq; quoniam FG, maior eſt, quam ED, ut Nicomedes demonſtrauit, erit FH, reliqua minor, quam reliqua EI. Magis ergo inter ſe diſtant linea AI, AE, in punctis I, E, quam in punctis H, F; atque ita ſemper eas probabimus magis ac magis diſtare, ſi longius protendantur. Diſtantia nihilominus ſemper minor erit, quam recta AB, hoc eſt, quam perpendicularis ex recta AI, ad rectam BD, demiſſa, cum inflexa linea AE, ad rectam BD, numquam perueniat, ut demonſtratum eſt à Nicomede.*

SCIO principium illud Procli in lineis rectis eſſe ueriſſimum, & quod facili negotio, ſi omnes demonſtrationes Euclidis, quæ ex axiomate 13. pendent, concedantur, demonſtrari poſſit hoc modo. Contineant duæ rectæ AB, AC, angulum A, & data ſit recta D, cuiuſuis magnitudinis. Dico diſtantiam rectarum AB, AC, in infinitum productarum excedere magnitudinem D. Nam ex



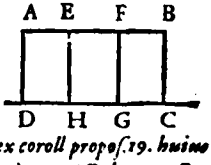
quouis

quouis puncto E, in recta AB, sumpto demittatur ad AC, perpendicularis EF, qua si maior fuerit, quam D, constat propositum: si verò non est maior, sumatur eius multiplex proximè maior, quam D, nempe G. Sumpta autem AB, ipsius AE, ita multiplici, vt multiplex est G, ipsius EF, demittatur ex B, ad AC, perpendicularis BC, quam dico maiorem esse data recta D. Quoniam enim a est, vt AB, ad BC, ita AE, ad EF. (quod ex coroll propos. 4. lib. 6. Euclid. triangula ABC, AEF, similia sint, ob rectas BC, EF, a 24. sexti. quæ b parallelæ sunt.) Et permutando, vt AB, ad AE, ita BC, ad b 18. pri EF: erit ita multiplex BC, ipsius EF, vt multiplex est AB, ipsius AE, hoc est, vt multiplex est G, ipsius EF. Cùm ergo BC, & G, aquè multiplices sint ipsius EF, ipsa erunt inter se æquales. Est autem ex constructione, maior G, quàm D. Igitur & BC, distantia puncti B, à puncto C, maior erit, quàm recta D, data. Quod est propositum.

VERVM demonstratio hac sine proprietatibus linearum parallelarum, qua axiomate illo 13. nituntur, vim nullam habet, ac proinde principium illud Procli assumi non potest ad illud axioma 13. demonstrandum, ne principium in eo demonstrando petatur. Quæ cùm ita sint, sedulò dedimus operam, vt illud ipsum Euclidis axioma demonstraremus ex ijs solùm, quæ ante propos. 29. primi libri demonstrata sunt. Ante eam propos. 29. vsus illius axiomatis apud Euclidem nullus est. Id quod in Euclide quodam Arabico factum etiam esse accepi, sed nunquam facta mihi est copia demonstrationem illam legendi, etsi obnixè illud iterum atque iterum ab eo, qui eum Euclidem Arabicum possidet, flagitauimus. Quare hanc, quæ sequitur, excogitauimus. Primum autem præmittenda quoque sunt nonnulla, qua licet ad id, quod proponimus, demonstrandum requirantur necessariò, multo tamen euidentiora sunt ac faciliora axiomate illo Euclidis, ita vt omni dubitatione exclusa, firmum eis assensum præbere possimus. Primum sit huiusmodi.

I.

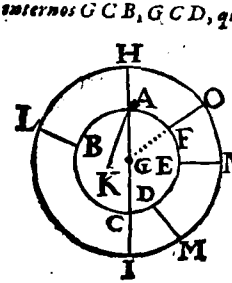
LINEA, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est.



VT si omnia puncta linea AB, à recta DC, æqualiter distent, hoc est, omnes perpendiculares, quales sunt AD, EH, FG, BC, ad DC, demissa æquales sint (perpendicularis enim qualibet, cùm sit omnium ex eodem puncto ad rectam DC, ductarum minima, ex coroll propos. 19. huius lib distantiam puncti, à quo ducta est, metitur.) erit AB, linea recta. Hoc autem ex desin linea recta liquidò constare potest. Nam si omnia puncta linea AB, æqualiter distant à recta DC, ex æquo sua intersecabit puncta, hoc est, nullum in ea punctum intermedium ab extremis sur-

mis ſurſum, aut deorſum, vel huc atq; illuc deflectendo ſubſultabit, nihilq; in ea flexuoſum reperietur, ſed æquabiliter ſemper inter ſua puncta extendetur, quemadmodum recta D C. Alioquin non omnia eius puncta æqualem à recta D C, diſtantiam haberent, quod eſt contra hypotheſin. Neq; verò cogitatione apprehendi poteſt, aliam lineam præter rectã poſſe habere omnia ſua puncta à recta linea, qua in eodem cum illa plano exiſtat, æqualiter diſtantia. Eſt ſanè principium hoc, ex quo ſolo conceſſo, vna cum ijs, qua uſq; ad propoſ. 29. huius lib. oſtenſa ſunt, axioma 13. demonſtrabimus, adeò clarum, vt lumine naturali cognitum ſit, nemoq; ſana mentis illud negare poſſit. Aut certè citra omnem controuerſiam eſt eiuſmodi, vt longè facilius ea quilibet aſſentiatur, quàm illi axiomati 13. Euclidis.

IDEM prorſus in linea circulari contingit. Nam etiam linea inflexa circularem lineã ambiens, cuius omnia puncta æqualiter à circulari diſtant, id eſt, à qua omnes rectæ in circularem lineã ad æquales angulos incidentes æquales ſunt, circularis quoque eſt; ita vt naturam circularis linea, à qua æquali ſemper diſtantia abeſt, induat: quemadmodum linea æqualiter ſemper à recta linea diſtans, naturã lineæ rectæ, cui ſemper æquidiſtat, induit, propterea q; recta eſt, vt diximus. Quod autem inflexa illa linea circa lineam circularem ſit quoq; perfectè circularis, facilè oſtendemus, ſi prius demonſtremus, rectam ex centro circuli ductam efficere cum circumferentia angulos binis æquales; & contra, rectam, quæ æquales cum circumferentia angulos conſtituat, per centrum tranſire. Sit igitur circulus A B C D E F, cuius centrum G. Dico rectam G C, ex centro ductam efficere tam angulos internos G C B, G C D, quàm externos I C B, I C D, inter ſe æquales.



Producta enim I G, vſq; ad A, ſi ſemicirculus A B C, circa diametrum A C, intelligatur circumuerti, congruet is ſemicirculo A E C, cùm ſemicirculi eiuſdem circuli ſint inter ſe æquales. Quod ſi quis dicat, & num ſemicirculum alterum interſecare, ducenda erit recta linea ex centro G, ſecans & tramq; circumferentiam, colligendumq; partem toti eſſe æqualem, nimirum ſemidiametrum vſque ad interiorem circumferentiam, ſemidiametro ad exteriorem vſque circumferentiam ducta, quod abſurdum eſt. Anguli igitur ad C, tam interni, quàm externi inter ſe congruent, ac proinde æquales erunt. Efficiat iam recta H A K, æquales angulos ad A. Dico eam per centrum tranſire. Si enim non tranſeat, ducatur ex centro G, ad A, recta G A, qua ex proximè demonſtratis angulos G A B, G A F, conſtituet æquales. Nõ ergo æquales ſunt K A B, K A F. Quod eſt contra hypotheſin.

HOC oſtenſo, ambiat inflexa linea H L I M N O, circularem lineam

neam A B C D E F, omniaq; eius puncta ab hac æqualiter absint, id est, omnes rectæ ab ea linea in circularem lineam cadentes, efficentesq; angulos æquales, sint inter se æquales, cuiusmodi sunt H A, L B, I C, M D, N E, O F. Hæ enim cùm, vt demonstratum est, per centrum transeunt, erunt omnium ex punctis H, L, I, M, N, O, in conuexam peripheriam cadentiũ, minimæ; (Hoc enim demonstratum est ab Eucl. propos 8. lib. 3. quæ solum ex propositionibus, quæ 29. huius lib. antecedunt, pendet, vt iure optimo huc transferri possit) atq; adeò eorum distantiæ à subiecta linea circulari metientur. Dico lineã H L I M N O, esse circularem. Cùm enim omnes illæ, vt proximè ostendimus, per centrum G transeant: si æqualibus H A, O F, addantur æquales A G, F G, erunt totæ H G, O G, æquales; eademq; ratione omnes aliæ ex linea inflexa H L I M N O, ad G, ductæ æquales erunt & rectis H G, O G, & inter se. Ex defin. circuli igitur linea inflexa circularis est. Quod erat demonstrandum. Ex hoc primo, quod præmisimus, sequitur secundum: videlicet.

II.

SI recta linea super aliam rectam in transuersum moueatur, constituens in suo extremo cum ea angulos semper rectos, describet alterum illius extremum lineam quoque rectam.

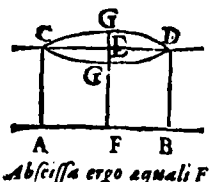
V T si in priore figura recta A D, ad D C, perpendicularis moueatur in transuersum super rectam D C, constituens cum ea in D, semper rectos angulos, hoc est, non titubans, aut vacillans, sed æquabiliter semper incedens, describet extremum A, rectam quoq; lineam, nempe A B. Constat hoc ex eo, quod primo loco præmisimus; propterea quòd omnia puncta linea A B, descripta æqualiter à recta D C, distant, nimirum per rectam A D. Ex quæ fit, ipsam lineam rectam esse, cùm, vt ibi dictum est, eius media ab extremis non subsultent, sed æqualiter inter ipsa iaceant, quippe cùm nullum eorum magis aut minus à recta C D, abscedat sursum, aut deorsum vergendo, quàm aliud. Patet hoc etiam ex ijs, quæ ad definitionem lineæ rectæ scripsimus. Cùm enim duo puncta D, A, similibus prorsus motibus ferantur (quòd recta A D, in suo motu non titubet, aut vacillet, sed puncta D, A, æquè velociter incedant, æqualiterq; semper inter se distent) describent vtiq; lineas similes, vt in eadem definitione docuimus. Cùm ergo punctum D, rectam D C, describat, erit quoq; linea A B, quam punctum A, describit, recta. Neq; verò imaginari quis poterit, si linea recta in transuersum moueatur vniformiter sine vlla titubatione huc atq; illuc, duo puncta eius extrema describere duas differentes inter se lineas; sed qualem vnum extremum describit, talem quoque ab altero extremo describi necesse est, propter vniformem illum, æquabilemq; motum vtriusque puncti extremi. Est principium hoc æquè clarum, & euidens, atque antecedens.

CON-

CONTINGIT autem idem semper in circulari linea. Nam cum recta linea super unum circulorum in transversum fluens æquabiliter, cum termino semper in extremo cum circulari æqualis semper angulos, non faciendo, aut deficiendo hinc atque illinc, circulorum lineam altero suo extremo describit, cum ut naturam circularis lineæ à recta, à qua æqualiter semper distat, linea illa describere habeat: quemadmodum linea recta A D, super rectam D C, in transversum fluens æquabiliter, cum termino semper cum ea in suo extremo D, angulos semper rectos cum ea nunquam declinet, hinc atque illinc deflectendo, aut inhibendo, lineam rectam A B, altero extremo A, delineat: adeo ut linea descripta A B, naturam habeat rectæ lineæ subtensæ D C, a qua æqualiter semper recedit. Rectam autem, quæ super lineam circularem in transversum fluat æquabiliter, describere altero suo extremo lineam quoque circularem, facile demonstrabimus. Moueatur enim in figura posteriore recta H A, in transversum super peripheriam A B C D E F, æquabiliter, faciens semper in extremo A, cum ea angulos æquales. Dico lineam H L I M N O, ab altero extremo H, descriptam esse quoque circularem. Cum enim recta H A, in omni situ motus illius imaginarij faciat æquales angulos cum peripheria A B C D E F, sit ut ea producta in centrum G, cadat, ut suprà ostendimus. Quare additis rectis æqualibus H A, O F, ad rectas æquales A G, F G, fient totæ rectæ H G, O G, & omnes aliæ, inter se æquales: ac propterea ex defin. circuli H L I M N O, circumferentia circuli erit. Quod ostendendum erat. Hinc sequitur tertium.

III.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demissa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis.



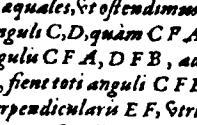
SINT ad rectam A B, erecta duæ perpendiculares A C, B D, inter se æquales: Et ducta recta C D, demittatur ex quolibet eius puncto E, ad A B, perpendicularis E F. Dico E F, vtrique A C, B D, esse æqualem. Si namque non est, erit vel maior, vel minor. Abscissa ergo æquali F G, si intelligatur recta A C, moueri in transversum per rectam A B, faciens cum ea angulos semper rectos, describet punctum C, lineam rectam per G, transeuntem, ut suprà ostensum est, qualis est C G D. Duæ ergo rectæ C E D, C G D, superficiem claudent. Quod est absurdum. Æqualis igitur est E F, vtrique A C, B D. Quod erat ostendendum. Ex hoc quartum, quod sequitur, demonstrabimus.

SI ad

IV.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter sè æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum.

SINT ad rectam AB, erecta duæ perpendiculares AC, BD, æquales inter se, ducaturq́; recta CD. Dico vtrumque angulum C, D, rectum esse. Secta namque recta AB, bifariam in E, excitetur in E, ad AB, perpendicularis EF, iungaturq́; recta AF, BF. Quoniam igitur duo latera AE, EF, trianguli AEF, duobus lateribus BE, EF, trianguli BEF, æqualia sunt, & vtrumque vtrique, angulosq́; continent æquales, puta rectos, a erunt quoque & bases AF, BF, & tam anguli FAE, FBE, quàm AFE, BFE, inter se æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis FAE, FBE, ex rectis æqualibus CAE, DBE, reliqui erunt æquales anguli CAF, DBF. Itaque cùm duo latera CA, AF, trianguli CAF, duobus lateribus DB, BF, trianguli DBF, æqualia sint, angulosq́; complectantur æquales, & ostendimus, b erunt quoque & bases CF, DF, & tam anguli C, D, quàm CFA, DFB, inter se æquales. Si ergo æqualibus angulis CFA, DFB, addantur anguli AFE, BFE, ostensi æquales, fient toti anguli CFE, DFE, æquales, ac proinde recti. Quia verò perpendicularis EF, vtrique AC, BD, æqualis est, & proximo theoremate ostendimus, erunt duæ rectæ AC, EF, ad AE, perpendiculares, inter se æquales. Quare, & de angulis C, D, proximè probatum est, anguli C, & EFC, æquales inter se erunt. Est autem EFC, ostensus rectus. Igitur & C, rectus erit, ac proinde & angulus D, qui ostensus est ipsi C, æqualis.



a 4. pri.

b 4. pri.

CAETERVM angulos C, D, rectos esse, demonstrabimus alio modo, hoc prius theoremate præmisso.

SI in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera eadem parte acutum, duæ illæ rectæ minùs semper inter se distabunt ad eas partes, vbi est angulus acutus, ex altera verò parte semper inter se magis distabunt.

RECTA linea AB, in rectas AC, BD, incidens faciat angulum ABD, rectum, & BAC, acutum. Dico rectas AC, BD, minùs semper inter se distare versus C, D, productas, magis verò, si versus E, F, producantur. c Ducatur a-



c 12. pri.

tur enim ex B, ad A C, perpendicularis B G, quæ ex coroll. 2. propoſ. 17. huius lib. ad partes acuti anguli B A C, cadet: ac propterea angulus G B D, pars recti anguli A B D, acutus erit. Demiſſa ergo ex G, ad B D, perpendicularis G H, cadet quoq; ad partes anguli acuti G B D, ex eodem coroll. angulusq; propterea H G C, pars recti anguli B G C, acutus erit. Rurſus ergo ducta perpendicularis H I, ad A C, per eadem coroll. ad partes acuti anguli H G C, cadet, ideoq; angulus I H D, pars recti anguli G H D, acutus erit. Atq; ita deinceps in infinitum, ſi ex I, ad B D, perpendicularis I K, ducatur, & ex K, perpendicularis K C, ad A C, & ex C, ad B D, perpendicularis C D, &c. cadent omnes ad partes angulorum acutorum, una poſt aliam. Quoniam igitur in tri-

a19 primi. *angulo A B G, angulus B A G, acutus eſt, & A G B, rectus, a erit recta A B, maior quam G B: & in triangulo B G H, recta B G, angulo recto G H B, oppoſita, maior quam G H; & in triangulo G H I, recta G H, maior quam H I: Atq; ita deinceps erunt ſemper rectæ, quæ ipſi A B, propiores ſunt, maiores iis, quæ remotiores ſunt, & nunquam finis erit huius decrementi perpendicularium. Quapropter recta A C, in G, minus diſtabit à recta B D, quam in A, & in I, minus quàm in G, & in C, minus quàm in I, &c. quandoquidem perpendiculares A B, G H, I K, C D, &c. quæ ordinatim deſcribuntur, vt oſtendimus, minimæ ſunt omnium à punctis A, G, I, C, in rectam B D, cadentium, & ex coroll. propoſ. 19. huius lib. liquet, ac proinde eorundem punctorum diſtantiæ ab eadem recta B D, metiuntur. Conſtat ergo, rectas A C, B D, ad partes C, D, productas continenter fieri minus inter ſe diſtantes. quod eſt primum.*

b11. primi. *Ducatur rurſus b ex A, ad A C, perpendicularis A L, quæ angulum obtuſum B A E, partietur in rectum E A L, & acutum L A B, hoc eſt, cadet inter A B, & A E; eritq; angulus A L B, acutus, cùm*

c17 primi. *ambo A B L, A L B, c ſint duobus rectis minores, atq; A B L, rectus ſit: ac proinde angulus A L F, obtuſus erit. Eadem ratione perpendicularis L M, ex L, ad B F, ducta cadet inter L A, L F, faciet q; angulum L M A, acutum, & L M E, obtuſum: Item perpendicularis M N, ex M, ad A E, erecta cadet inter M L, M E, angulumq; M N B, acutum, & M N F, obtuſum conſtituet. Atq; ita deinceps in infinitum, ſi ex N, ad B F, perpendicularis erigantur M O, & ex O, ad A E, perpendicularis O P, & ex P, ad B F, perpendicularis P E, & ex E, ad A E, perpendicularis E F, &c. diuident omnes ſigillatim angulos obtuſos, vna poſt aliam. Quoniam igitur in triangulo A B L, angulus A B L, rectus eſt,*

d19. primi. *& A L B, acutus d erit A L, recta maior, quàm A B, & in triangulo A L M, recta L M, angulo recto L A M, oppoſita, maior quàm A L; atq; in triangulo L M N, recta M N, recto angulo M L N, oppoſita, maior quàm M L: atq; ita deinceps erunt ſemper rectæ, quæ ab A B, longius abſunt, maiores iis, quæ propinquiores ſunt, in infinitum. Quamobrem recta A E, in M, magis à recta B F, diſtabit, quàm in A, & in O, ma-*

O, magis quàm in M, & in E, magis quàm in O, &c. quandoquidem perpendicularis AB, ML, ON, EP, &c. quæ ordinatim ungeri oſtenſum fuit, minima ſunt omnium ex punctis A, M, O, E, in rectam BF, cadentium, &c. Liquidò ergo conſtat, rectas AC, BD, ad partes E, F, productas continenter fieri magis inter ſe diſtantes. quod eſt ſecundùm. Quod ſi proterua quiſpiam velit contendere, rectam AL, quæ ad AC, perpendicularis eſt, non concurrere cum DB, productæ, conſtabit multo magis id, quod demonſtrandum proponitur. Nam linea DB, vltra punctum B, multò magis à rectæ CA, diſtabit, quàm in puncto B, quandoquidem AL, ad AC, perpendicularis in infinitum producta non concurrit cum DB, cùm tamen GB, ad eandem AC, perpendicularis cum DB, concurrat in B, &c.

HÆC cùm ita ſint, nullo negotio demonſtrabimus, in ſuperiori figura angulos C, D, eſſe rectos. Nam ſi angulus C, verbi gratia, non dicatur eſſe rectus, erit vel acutus, vel obtuſus. Sit primum acutus. Quoniam ergo recta CA, in rectas AB, CD, incidens efficit angulum CAB, rectum, & C, acutum, minùs ſemper inter ſe diſtabunt rectæ CD, AB, ad partes D, B, productæ, hoc eſt, perpendiculares ex CD, in AB, demiſſæ ordinatim minores fient, quàm CA, vt proximè demonſtratum eſt. Minor ergo eſt perpendicularis DB, quàm CA, quod eſt abſurdum, cùm ponatur æqualis. Non igitur acutus eſt angulus C. Eademq; ratione neq; angulus D, acutus erit. Sit deinde angulus C, obtuſus. Quia igitur recta CA, in rectas CD, AB, incidens facit angulum CAB, rectum, & B, obtuſum, magis ſemper inter ſe diſtabunt rectæ CD, AB, ad partes D, B, productæ, hoc eſt, perpendiculares ex CD, in AB, demiſſæ continenter augebuntur, vt proximè oſtendimus. Maior ergo eſt perpendicularis DB, quàm CA, quod eſt abſurdum, cùm æqualis ponatur. Non igitur obtuſus eſt angulus C. Eademq; ratione neque angulus D, obtuſus erit. Sed neq; acutus eſt oſtenſus. Rectus igitur vterq; eſt, quod erat oſtendendum.

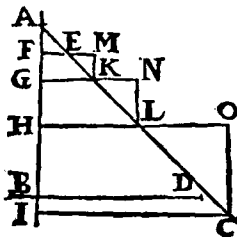
EX his demonſtratis facile iam axioma 13. demonſtrabimus hoc modo.

V.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad eaſdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuò incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.

HOC eſt axioma 13. apud Euclidem in noſtris commentarijs, apud alios eſt vndecimum, quod demonſtrandum ſuſcepimus. Incidens ergo recta AB, in rectas AC, BD, faciat internos, ad eaſdemq; partes angulos ABD, BAC, duobus rectis minores. Dico rectas AC, BD, ad

BD, ad partes C, D, productas coire. Sit enim primum alter angulorum, nempe ABD, rectus, & alter BAC, acutus. Sumpto in recta
212.pri. *AC, puncto quolibet E, a ducatur ex eo ad rectam AB perpendicularis EF, & recta AF, aqualis accipiatur FG, & GH, aqualis ipsi AG, & HI, ipsi AH, ita vt AG, ipsius AF, & AH, ipsius AG, & AI, ipsius AH, dupla sit. Et quoniam si recta AF, abscindantur continuè aquales rectæ ex AB, aliqua tandem pars vltra B, punctum cadet, quod finita recta AB, per continuam abiationem vnius eiusdemq; quantitatis absumatur tandem, quandoquidem linea AF, ita multiplicari potest (quod fit, sumendo ipsi in AB, continenter partes aquales) vt tandem aliquando finitam lineam AB, superet. Id quod Euclides frequenter assumit in lib. 5. & alijs sequentibus, vbi datis duabus magnitudinibus inaqualibus proportionem inter se habentibus, iubet plerunque minorem ita multiplicari, donec maiorem superet. Fit, vt multò magis, si ipsi AF, aqualis abscindatur FG, & toti deinde AG, non autem soli AF, aqualis auferatur GH: Item toti AH, non autem soli AF, vel AG, aqualis dematur HI, & sic deinceps, cadat tandem pars aliqua vltra punctum B. Statuatur ergo punctum I, terminans tertiam duplam in dato exemplo, existere vltra punctum B. Accipiatur quoque in recta AC, recta EK, ipsi AE, & KL, ipsi AK, & LC, ipsi AL, aqualis, ita vt tot sint partes in recta AC, quot in recta AI; ducanturq; recta KG, LH, CI, producanturq; vnà cum EF, vt EM, KN, LO, ipsis EF, KG, LH, fiant aquales, ac tandem recta iungantur MK, NL, OC. Itaque quoniam duo latera KE, EM, trianguli KEM, duobus lateribus AE, EF, trianguli AEF, per constructionem aqualia sunt, vtrum-*

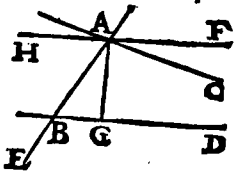


b15.pri. *que vtrique, b angulos q; ad verticem E, continent aquales, c erit*
c 4.pri. *& basis MK, basi AF, & angulus M, angulo F, aqualis. Est autem*
& FG, eidem AF, aqualis, & angulus F, rectus, ex constructione.
d 1.pri. *Igitur & MK, FG, d aquales inter se erunt, & angulus M, quoque rectus. Quare cùm ad FM, excitata sint duæ perpendiculares aquales FG, MK, erit per antecedens theorema, angulus G, rectus. Rursus ergo, quia duo latera LK, KN, trianguli LKN, duobus lateribus AK, KG, trianguli AKG, aqualia sunt, ex constructione,*
e 15.pri. c *angulos q; comprehendunt aquales ad K, verticem, f erit & basis*
f 4.pri. *NL, basi AG, & angulus N, angulo G, aqualis. Est autem & GH, ex constructione, eidem AG, aqualis, & angulus G, rectus, vt proxi-*
g 1.pron *mè demonstratum est. Igitur & NL, GH, inter se g erunt aquales, & anguius N, quoque rectus. Quocirca per præcedens theorema, erit etiam angulus H, rectus. Eadem ratione ostendemus angulum I, re-*

ctum

ctum esse: atque ita deinceps, si plures essent partes rectæ A B. Est autem & angulus B, per hypothesin rectus. Igitur rectæ I C, B D, a parallelæ sunt: ac propterea B D, productæ rectam A C, secabit supra punctum C; atque adeò in puncto illo sectionis rectæ A C, B D, coibunt. Quod erat demonstrandum. a 28. pri

SIT deinde neuter angulorum A B D, B A C, rectus; sed A B D, quidem acutus, & B A C, vel acutus etiam, vel obtusus. Quia igitur duo anguli A B D, B A C, duobus rectis ponuntur minores; b sunt autem duo anguli A B D, D B E, duobus rectis æquales: erunt hi duo illis duobus maiores. Ablato ergo communi A B D, maior erit reliquus D B E, reliquo B A C. c Cōstituatur in A, ad rectam A B, angulus B A F, angulo D B E, æqualis: Cadet q; recta A F, supra rectā A C, cum A F, maiorem angulū cum A B, constituat, quàm A C. Quia igitur externus angulus D B E, interno B A F, ex eadem parte oppositio æqualis est, d erunt rectæ A F, B D, inter se parallelæ. Demittatur quoque ex A, ad B D, e perpendicularis A G, qua ex coroll. 2. propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli A B D, cadet: Erit q; angulus quoq; G A F, rectus. Nam si acutus esse dicatur, efficiet recta A G, in rectas A F, B D, incidens angulum A G D, rectum, & G A F, acutum, ac proinde, & proximè demonstrauimus, rectæ A F, B D, ad partes F, D, productæ coibunt tandem: Quod est absurdum. Ostensa enim sunt parallelæ. Si autem angulus G A F, dicatur esse obtusus, erit G A H, acutus. Quare ex proximè demonstratis, coibunt rectæ A F, B D, ad partes H B, productæ, quod est absurdum, cùm parallelæ sint ostensæ. Non est ergo angulus G A F, acutus, aut obtusus. Igitur rectus, ac proinde eius pars G A C, acutus. Quoniam igitur recta A G, in rectas A C, B D, incidens facit angulum G, rectum, & G A C, acutum, concurrent rectæ A C, B D, ad partes, C, D, productæ, & proximè demonstrauimus. Si igitur recta A B, in rectas A C, B D, incidens faciat duos angulos minores duobus rectis, neutrum tamen angulorum A B D, B A C, rectum, ipsæ rectæ A C, B D, ad partes C, D, productæ conuenient. Quod erat ostendendum. Quòd si quando accidat, rectam A C, existere inter A B, & perpendicularem A G, liquidò constat, rectas A C, B D, coire, quòd tunc A C, basin B G, trianguli A B G, secaret. Quod & facilius capias, ducere poteris rectam A C, inter A B, A G.



b 13. pri.

c 23. pri.

d 28. pri

e 12. pri.

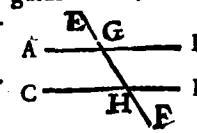
QVAMVIS autem, concesso principio nostro, optimè à nobis demonstratum sit tertiumdecimum hoc axioma, & a Proclo etiam, si eius principium difficilius quidem, quàm nostrum, admittatur, & iure optimo inter theoremata, & non inter principia possit connumerari; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, & temur

eo in omnibus propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendent, tanquam pronunciato. Sed iam ad seriem propositionum Euclidis reuertamur.

EXIX. THEOR. 20. PROPOS. 29.

IN parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

IN parallelas A B, C D, recta incidat E F. Dico primum, angulos alternos A G H, D H G, inter se esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit alter, nempe A G H, maior. Quoniam igitur angulus A G H, maior est angulo D H G, si addatur communis angulus B G H; *a* erunt duo A G H, B G H, maiores duobus D H G, B G H: At duo A G H, B G H, *b* æquales sunt duobus rectis. Igitur duo D H G, B G H, minores sunt duobus rectis. Quare cùm sint interni, & ad easdem partes, B, & D, *c* coibunt lineæ A B, C D, ad eas partes, quod est absurdum, cùm ponantur esse parallelæ. Non est igitur angulus A G H, maior angulo D H G: Sed neque minor. Eadem enim ratione ostenderetur, rectas coire ad partes A, & C. Igitur æquales erunt anguli alterni A G H, D H G. Eademq; est ratio de angulis alternis B G H, C H G.



a 4 *pronun.* b 13 *pri.* c 13 *pronun.*

DICO secundò, angulum externum A G E, æqualem esse interno, & ad easdem partes opposito C H G. Quoniam enim angulo B G H, æqualis est alternus C H G, vt ostensum est; & eidem B G H, *d* æqualis est angulus A G E. Erunt anguli A G E, C H G, *e* inter se quoque æquales. Eodem modo demonstrabitur, angulum B G E, æqualem esse angulo D H G.

d 15 *pri.* e 1 *pronun.*

DICO tertiò, angulos internos ad easdem partes, A G H, C H G, æquales esse duobus rectis. Quoniam enim ostensum fuit, angulum externum A G E, æqualem esse angulo C H E, interno; si addatur communis A G H, *f* erunt duo A G E, A G H, duobus C H G, A G H, æquales: Sed duo A G E, A G H, *g* æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo anguli C H G, A G H, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli B G H, D H G, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos, &c. Quod erat demonstrandũ.

f 2. *pronun.* g 13 *pri.*

SCHOLIVM.

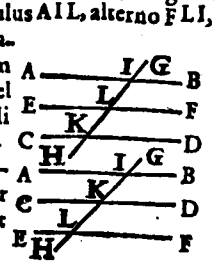
CONVERTIT autem hoc præsens theorema duo præcedentia theoremata, vt perspicuum est.

THEOR.

THEOR. 21. PROPOS. 30. xxx.

QVÆ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, eidem rectæ EF, parallelæ. Dico & ipsas AB, CD, esse inter se parallelas. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse plano. (Nam propos. 9. vndecimi libri agetur de lineis in diuersis planis) ducta recta GH, secabit omnes, nimirum AB, in I; CD, in K; & EF, in L. Quia igitur AB, ponitur parallela ipsi EF, a erit angulus AIL, alterno FLI, a 29. primi. æqualis. Rursus quia CD, ponitur etiam parallela ipsi EF, b erit angulus DKI, eidem angulo FLI, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli AIL, DKI, c æquales inter se quoque erunt. Cùm igitur sint alterni, d erunt rectæ AB, CD, parallelæ inter se. Quæ igitur eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat.



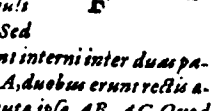
b 29. primi.
c 1. pronun.
d 27. primi.

SCHOLIVM.

QVOD si quis dicat, duas rectas AI, BI, parallelas esse rectæ CD, & tamen ipsas non esse parallelas; Occurrendum est, duas AI, BI, non esse duas lineas, sed partes tantùm vnius lineæ. Concipiendum enim est animo, quaslibet parallelas infinitè esse productas; Constat autem AI, productam coincidere cum BI. Quamobrem propositio hæc generalius ita poterat proponi.

QVÆ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ: vel certè, quando inter se coeunt, vnam eandemq; lineam constituunt.

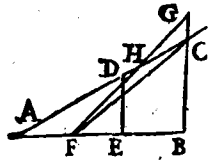
SINT enim duæ rectæ AB, AC, coeuntes in A, parallelæ ipsi DE. Dico illas in rectum esse constitutas. Ex puncto enim A, ducatur recta AF, secans DE, in F, vtcunq;. Quoniam igitur AB, DE, sunt parallelæ, c erunt anguli alterni BAF, AFE, æquales. Addito ergo communi angulo CAF, f erunt duo anguli ad A, æquales duobus angulis CAF, AFE. Sed hi duo g æquales sunt duobus rectis, cùm sint interni inter duas parallelas AC, DE. Igitur & duo anguli ad A, duobus erunt rectis æquales; ac propterea h in rectum erunt constituta ipsæ AB, AC. Quod est propositum.



c 29. primi.
f 2. pron.
g 29. primi.
h 14. primi.

ROBL. 10. PROPOS. 31. xxxj.

A dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.



quam F, & G. Item B, & C, plus quam D, & E, &c.) hac ratione demonſtrabimus. Demittantur ex punctis C, D, vtcunque in recta A C, accepta, ad A B, perpendiculares C B, D E, qua diſtantias punctorum C, D, à recta A B, metientur, cum ſint minimæ omnium rectarum ex C, D, ad A B, ductarum, vt in coroll. propoſ 19. oſtendimus. Dico C B, maiorem eſſe, quam D E; ac proinde plus diſtare rectam A C, à recta A B, in puncto C, remotiore, quam in puncto propinquiore D. Si enim C B, non eſt maior, quam D E, erit vel æqualis, vel minor: Sit primum æqualis & recta A E, abſcindatur æqualis B F, ita vt punctum F, cadat vel inter A, & E, vel in E, vel denique inter E, & B, ducaturq; recta F C. Quoniam igitur duo latera A E, B D, trianguli A E D, duobus lateribus F B, B C, trianguli F B C, æqualia ſunt, vtrumque vtrique, angulosq; continent æquales, vtpote re-

a 4. pri. *ctos: a erunt & baſes A D, F G, & anguli D A E, C F B, inter ſe æquales. Igitur externus angulus G F B, interno D A E, æqualis erit;*

b 16. pri. *b quod eſt abſurdum. Vel cum externus angulus C F B, interno*

c 27 pri mi. *D A E, æqualis ſit, c parallelæ erunt A C, F C, quod etiam abſurdum eſt, cum in C, concurrant.*

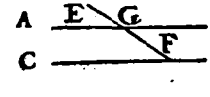
SIT deinde C B, minor quam D E, ſi fieri poteſt, & producta B C, fiat B G, ipſi D E, æqualis, iungatq; recta F G. Quia igitur duo latera A E, E D, trianguli A E D, duobus lateribus F B, B G, æqualia ſunt, vtrumque vtrique, angulosq; continent æquales, puta rectos;

d 4. pri. *d erunt & baſes A D, F G, & anguli E A D, B F G, inter ſe æquales. Igitur externus angulus B F G, interno E A D, æqualis erit, quod eſt abſurdum. Vel cum externus angulus B F G, interno E A D, æqualis*

e 27. pri mi. *ſit, e erunt A C, F G, inter ſe parallelæ, quod abſurdum eſt, cum ſe mutuo ſecent in H. Quocirca B C, ipſa E D, maior erit, cum neque æqualis, neque minor eſſe poſſit, vt demonſtratum eſt.*

SECVNDVM, quod Proclus præmittit, huiuſmodi eſt.

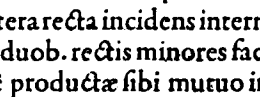
SI duarum parallelarum rectarum linearum alteram ſecet quædam recta linea, reliquam quoque productam ſecabit.



SINT duæ parallelæ A B, C D, & recta E F, ſecet ipſam A B, in G. Dico rectam E F, ſi producatur, ſecturam eſſe quoque ipſam C D. Quoniam duæ rectæ G B, G F, in puncto G, angulum faciunt, ſi producantur infinitè, excedent omnem finitam diſtantiam; igitur & diſtantiam, qua parallelæ A E, à parallela C D, diſtat, cum hæc diſtantia ſit finita, alias enim non eſſent lineæ parallelæ. Quare quando diſtantia G B, à G F, maior iam fuerit ea, qua inter parallelas eſt, neceſſe eſt rectam G F, productam ſe-

Nam secuisse rectam C D. Nam quamdiu G F, continebitur inter duas parallelas, minori distantia a G B, remouebitur, quam C D, ab eadem G B, & constat. His igitur ita expositis, facile demõstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidem, tertium decimum pronunciatum.

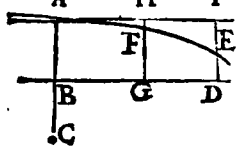
SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq; partes, angulos duob. rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinitè productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duob rectis minores.

IN rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat internos angulos ad partes B, & D, & B G H, D H G, duobus rectis minores Dico rectas A B, C D, coire ad eas dem partes B, & D. Quoniam enim duo anguli B G H, D H G, minores ponuntur esse duobus rectis:  *Sunt autem duo anguli D H G, D H F, a duobus rectis æquales: Erunt duo anguli D H G, D H F, maiores duobus angulis D H G, B G H.* a 13. pri.

Ablato ergo communi angulo D H G, remanebit angulus D H F, b maior angulo B G H. Si igitur ad rectam F G, & ad punctum, G, c constituatur angulus K G H, æqualis angulo D H F, cadet G K, super G B, & secabit, d producta rectam A B. Quoniam igitur in duas rectas I K, C D, recta incidens E F, facit angulum externum D H F, æqualem interno, & opposito K G H. e Erunt rectæ I K, C D, parallelæ. Secat autem recta A B, ipsam I K, in G. Producta igitur secabit quoque ipsam C D, & demonstratum est. Quare A B, cum C D, conuenient ad partes B, & D, nimirum in puncto L. quod est propositum. b 5. prop. num. c 23. pri mi. d 11. pro num. e 28. pri mi.

HAC ergo ratione conatur Proclus Axioma tertiumdecimum demonstrare. Sed quoniam principium, quod primo loco præmisit, æquè dubium, & obscurum esse videtur, atq; illud Axioma, afferemus nos demonstrationem magis accuratam, seriem docemus, in quo difficultas, siue obscuritas principij illius a Proclo assumpti consistat. Quemadmodum igitur ex Procli, & aliorum Geometrarum sententia, sine demonstratione concedendum non est, duas rectas, quæ semper sibi mutuo fiunt propinquiores, tandem aliquando concurrere, licet sit verissimum, cuiusmodi sunt duæ rectæ, in quas recta incidens facit internos duos angulos ex eadem parte duobus rectis minores, quorum vnus rectus sit, & alter acutus: Hæ enim sibi mutuo appropinquant ad eas partes, vbi duo illi anguli duobus rectis minores existunt, vt mox demonstrabimus. Quemadmodum, inquam, concedendum hoc sine probatione non est, propterea quod dari possunt in eodem plano duæ lineæ, vna recta, & altera inflexa, nimirum vel Hyperbole, vel linea conchoideos, sibi semper mutuo magis ac magis appropinquantes, quæ tamen nunquam coeant, licet in infinitum ambæ producantur. quorum illud ab Apollonio Pergæo, hoc verò a Nicomede demonstratum est: Ita quoque non videtur sine demonstratione ad-

mittendum esse, (quamquam veriſſimum ſit) duas rectas lineas angulum efficientes omnem finitam magnitudinem excedere, ſi in infinitum producantur amba, licet ſemper magis ac magis inter ſe diſtent, vt nos ſupra demonſtrauimus. Nam exhiberi poſſunt duæ linea in eodem plano angulum comprehendentes, recta vna, & altera inflexa, quæ conchoideos appellatur à Nicomede, ſemper magis ac magis inter ſe diſtantes, quarum tamen diſtantia datam quamcunque rectam lineam nunquam ſuperet, aut exæquet, licet amba extendantur in infinitum. Datarnamque ſit recta AB. Dico deſcribi poſſe lineam rectam, & inflexam, quarum vna ab altera ſemper magis recedat, diſtantiam tamen earum nunquam æqualem eſſe rectæ AB, aut maiorem, quantumuis producantur amba. Producta enim recta AB, quantumlibet vſque ad C, ducatur per B, ad AC, perpendicularis BD; & polo C, interuallo autem AB, deſcribatur linea conchoideos AE, inflexa nimirum linea, quæ recta BD, fiat quidem ſemper propinquior, nunquam tamen cum ea conueniat, vt à Nicomede traditur. Deinde per



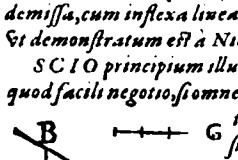
a 28. pri mi. *A, excitetur recta AI, ad AC, perpendicularis, a qua ipſi BD, parallela erit. Poſtremo ex duobus punctis HI, vtcunq; in recta AI, ac-*

b 28 pri mi. *ceptis demittantur ad BD, perpendiculares HG, ID, b quæ parallelæ,*

c 34. pri mi. *c atque adeo æquales inter ſe erunt, angulo ſque d conſtituent ad*

d 29. pri mi. *H, I, rectos. Admittantur enim nunc, vt propoſitum oſtendamus, omnes demonſtrationes Euclidis, ac ſi ex axiomate 13. non penderent, aut etiamſi pendeant ex eo, concedantur tamen, perinde ac ſi axioma illud iam ſit demonſtratum ante propoſ. 29. huius lib. vbi primum vſus illius apparere incipit, vti verè à nobis mox ante propoſ. 29. demonſtrabitur. Itaq; quoniam FG, maior eſt, quam ED, vt Nicomedes demonſtrauit, erit FH, reliqua minor, quam reliqua EI. Magis ergo inter ſe diſtant linea AI, AE, in punctis I, E, quam in punctis H, F; atque ita ſemper eas probabimus magis ac magis diſtare, ſi longius protendantur Diſtantia nihilominus ſemper minor erit, quam recta AB, hoc eſt, quam perpendicularis ex recta AI, ad rectam BD, demiſſa, cum inflexa linea AE, ad rectam BD, numquam perueniat, vt demonſtratum eſt à Nicomede.*

SCIO principium illud Procli in lineis rectis eſſe veriſſimum, & quod facili negotio, ſi omnes demonſtrationes Euclidis, quæ ex axiomate 13. pendent, concedantur, demonſtrari poſſit hoc modo. Contineant duæ rectæ AB, AC, angulum A, & data ſit recta D, cuiuſuis magnitudinis. Dico diſtantiam rectarum AB, AC, in infinitum productarum excedere magnitudinem D. Nam ex



quouis

quouis puncto E, in recta AB, sumpto demittatur ad AC, perpendicularis EF, qua si maior fuerit, quam D, constat propositum: si verò non est maior, sumatur eius multiplex proximè maior, quam D, nempe G. Sumpta autem AB, ipsius AE, ita multiplex, vt multiplex est G, ipsius EF, demittatur ex B, ad AC, perpendicularis BC, quam dico maiorem esse data recta D. Quoniam enim a est, vt AB, ad BC, ita AE, ad EF. (quod ex coroll propos. 4. lib. 6. Euclid. triangula ABC, AEF, similia sint, ob rectas BC, EF, quæ b parallelæ sunt.) Et permutando, vt AB, ad AE, ita BC, ad EF: erit ita multiplex BC, ipsius EF, vt multiplex est AB, ipsius AE, hoc est, vt multiplex est G, ipsius EF. Cùm ergo BC, & G, aquè multiplices sint ipsius EF, ipsa erunt inter se æquales. Est autem ex constructione, maior G, quàm D. Igitur & BC, distantia puncti B, à puncto C, maior erit, quam recta D, data. Quod est propositum.

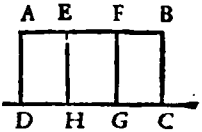
a 4. sexti.

b 28. primi

VERVM demonstratio hac sine proprietatibus linearum parallelarum, qua axiomate illo 13. nituntur, vim nullam habet, ac proinde principium illud Procli assumi non potest ad illud axioma 13. demonstrandum, ne principium in eo demonstrando petatur. Qua cùm ita sint, sedulò dedimus operam, vt illud ipsum Euclidis axioma demonstraremus ex ijs solum, qua ante propos. 29. primi libri demonstrata sunt. Ante eam enim propos. 29. vsus illius axiomatis apud Euclidem nullus est. Id quod in Euclide quodam Arabico factum etiam esse accepi, sed nunquam facta mihi est copia demonstrationem illam legendi, etsi obnixè illud iterum atque iterum ab eo, qui eum Euclidem Arabicum possidet, flagitaui. Quare hanc, qua sequitur, excogitauimus. Primùm autem præmittenda quoque sunt nonnulla, qua lucet ad id, quod proponimus, demonstrandum requirantur necessariò, multo tamen euidentiora sunt ac faciliora axiomate illo Euclidis, ita vt omni dubitatione exclusa, firmum eis assensum præbere possimus. Primum sit huiusmodi.

I.

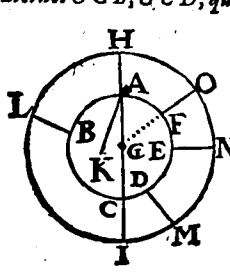
LINEA, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est.



VT si omnia puncta linea AB, à recta DC, æqualiter distent, hoc est, omnes perpendiculares, quales sunt AD, EH, FG, BC, ad DC, demissæ æquales sint (perpendicularis enim qualibet, cùm sit omnium ex eodem puncto ad rectam DC, ductarum minima, ex coroll propos. 19. huius lib distantiam puncti, à quo ducta est, metitur.) erit AB, linea recta. Hoc autem ex defin linea recta liquidò constare potest. Nam si omnia puncta linea AB, æqualiter distant à recta DC, ex aquo sua intertacebit puncta, hoc est, nullum in ea punctum intermedium ab extre-

mis ſurſum, aut deorſum, vel huc atq; illuc deflectendo ſubſultabit, nihilq; in ea flexuoſum reperietur, ſed aquabiliter ſemper inter ſua puncta extendetur, quemadmodum recta D C. Alioquin non omnia eius puncta æqualem à recta D C, diſtantiam haberent, quod eſt contra hypotheſin. Neq; verò cogitatione apprehendi poteſt, aliam lineam præter rectã poſſe habere omnia ſua puncta à recta linea, qua in eodem cum illa plano exiſtat, æqualiter diſtantia. Eſt ſanè principium hoc, ex quo ſolo conceſſo, vna cum ijs, quæ vſq; ad propoſ. 29. huius lib. oſtenſa ſunt, axioma 13. demonſtrabimus, adeò clarum, vt lumine naturali cognitum ſit, nemoq; ſanæ mentis illud negare poſſit. Aut certè citra omnem controuerſiam eſt eiuſmodi, vt longè facilius ei quilibet aſſentiatur, quam illi axiomati 13. Euclidis.

IDEM prorſus in linea circulari contingit. Nam etiam linea inflexa circularem lineã ambiens, cuius omnia puncta æqualiter à circulari diſtant, id eſt, à qua omnes rectæ in circularem lineã ad æquales angulos incidentes æquales ſunt, circularis quoque eſt; ita vt naturam circularis linea, à qua æquali ſemper diſtantia abeſt, induat: quemadmodum linea æqualiter ſemper à recta linea diſtans, naturã lineæ rectæ, cui ſemper æquidiſtat, induit, propterea q; recta eſt, vt diximus. Quod autem inflexa illa linea circa lineam circularem ſit quoq; perfectè circularis, facilè oſtendemus, ſi prius demonſtremus, rectam ex centro circuli ductam efficere cum circumferentia angulos binos æquales; & contra, rectam, quæ æquales cum circumferentia angulos conſtituat, per centrum tranſire. Sit igitur circulus A B C D E F, cuius centrum G. Dico rectam G C, ex centro ductam efficere tam angulos internos G C B, G C D, quàm externos I C B, I C D, inter ſe æquales.



Producta enim I G, vſq; ad A, ſi ſemicirculus A B C, circa diametrum A C, intelligatur circumuerti, congruet is ſemicirculo A E C, cùm ſemicirculi eiuſdem circuli ſint inter ſe æquales. Quod ſi quis dicat, vnum ſemicirculum alterum interſecare, ducenda erit recta linea ex centro G, ſecans vtramq; circumferentiam, colligendumq; partem totis eſſe æqualem, nimirum ſemidiametrum vſque ad interiorem circumferentiam, ſemidiametro ad exteriorem vſque circumferentiam ducta, quod abſurdum eſt. Anguli igitur ad C, tam interni, quàm externi inter ſe congruent, ac proinde æquales erunt. Efficiat iam recta H A K, æquales angulos ad A. Dico eam per centrum tranſire. Si enim non tranſeat, ducatur ex centro G, ad A, recta G A, quæ ex proximè demonſtratis angulos G A B, G A F, conſtituet æquales. Nõ ergo æquales ſunt K A B, K A F. Quod eſt contra hypotheſin.

HOC oſtenſo, ambiat inflexa linea H L I M N O, circularem lineam

neam A B C D E F, omniaq; eius puncta ab hac aqualiter abſint, id eſt, omnes recta ab ea linea in circularem lineam cadentes, efficientesq; angulos aquales, ſint inter ſe aquales, cuiuſmodi ſunt H A, L B, I C, M D, N E, O F. Ha enim cum, & demonſtratum ſit, per centrum tranſeunt, erunt omnium ex punctis H, L, I, M, N, O, in conuexam peripheriam cadentiũ, minima; (Hoc enim demonſtratum eſt ab Eucl. propoſ 8. lib. 3. qua ſolùm ex propoſitionibus, qua 29. huius lib. antecedunt, pendet, & iure optimo huc transferri poſſit) atq; adeò eorum diſtantiæ à ſubiecta linea circulari metientur. Dico lineã H L I M N O, eſſe circularem. Cum enim omnes illæ, & proximè oſtenſimus, per centrum G tranſeant; ſi aqualibus H A, O F, addantur aquales A G, F G, erunt tota H G, O G, æquales; eademq; ratione omnes aliæ ex linea inflexa H L I M N O, ad G, ducta aquales erunt & rectis H G, O G, & inter ſe. Ex defin. circuli igitur linea inflexa circularis eſt. Quod erat demonſtrandum. Ex hoc primo, quod præmiſimus, ſequitur ſecundum: videlicet,

II.

SI recta linea ſuper aliam rectam in tranſuerſum moueatur, conſtituens in ſuo extremo cum ea angulos ſemper rectos, deſcribet alterum illius extremum lineam quoque rectam.

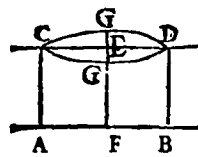
VT ſi in priore figura recta A D, ad D C, perpendicularis moueatur in tranſuerſum ſuper rectam D C, conſtituens cum ea in D, ſemper rectos angulos, hoc eſt, non titubans, aut vacillans, ſed aquabiliter ſemper incedens, deſcribet extremum A, rectam quoq; lineam, nempe A B. Conſtat hoc ex eo, quod primo loco præmiſimus; propterea quòd omnia puncta linea A B, deſcripta aqualiter à recta D C, diſtant, ni-mirum per rectam A D. Ex qua fit, ipſam lineam rectam eſſe, cùm, & ibi dictum eſt, eius media ab extremis non ſubſultent, ſed aqualiter inter ipſa iaceant, quippe cùm nullum eorum magis aut minus à recta C D, abſcedat ſurſum, aut deorſum vergendo, quàm aliud. Patet hoc etiam ex ijs, qua ad definitionem linea recta ſcripſimus. Cùm enim duo puncta D, A, ſimilibus prorſus motibus ferantur (quòd recta A D, in ſuo motu non titubet, aut vacillet, ſed puncta D, A, æquè velociter ſuccedant, aqualiterq; ſemper inter ſe diſtent) deſcribent etiã lineas ſimiles, & in eadem definitione docuimus. Cùm ergo punctum D, rectam D C, deſcribat, erit quoq; linea A B, quam punctum A, deſcribit, recta. Neq; verò imaginari quis poterit, ſi linea recta in tranſuerſum moueatur vniformiter ſine vlla titubatione huc atq; illuc, duo puncta eius extrema deſcribere duas differentes inter ſe lineas; ſed qualem vnum extremum deſcribit, talem quoque ab altero extremo deſcribi neceſſe eſt, propter vniformem illum, aquabilemq; motum vtriuſque puncti extremi. Eſt principium hoc æquè clarum, & evidens, atque antecedens.

CON-

CONTINGIT autem idem omninò in circulari linea. Nam eodem pacto recta linea ſuper lineâ circularem in tranſuerſum fluens aquabiliter, conſtituens nimirum in ſuo extremo cum circulari aquales ſemper angulos, non ſcacillando, aut deflectendo huc atque illuc, circularem lineam altero ſuo extremo deſcribit, ita ſt naturam circularis linea ſubiecta, à qua aqualiter ſemper diſtat, linea illa deſcripta induat: quemadmodum linea recta A D, ſuper rectam D C, in tranſuerſum fluens aquabiliter, conſtituens nimirum cum ea in ſuo extremo D, angulos ſemper rectos, ita ſt nuſquam declinet, huc atque illuc deflectendo, aut titubando, lineam rectam A B, altero extremo A, delineat: adeò ſt linea deſcripta A B, naturam induat recta linea ſubiecta D C, à qua aqualiter ſemper recedit. Rectam autem, qua ſuper lineam circularem in tranſuerſum fluit aquabiliter, deſcribere altero ſuo extremo lineam quoque circularem, facilè demonſtrabimus. Moneatur enim in figura poſteriore recta H A, in tranſuerſum ſuper peripheriam A B C D E F, aquabiliter, faciens ſemper in extremo A, cum ea angulos aquales. Dico lineam H L I M N O, ab altero extremo H deſcriptam eſſe quoque circularem. Cum enim recta H A, in omni ſitu motus illius imaginarij faciat aquales angulos cum peripheria A B C D E F, fit ſt ea producta in centrum G, cadat, ſt ſuprà oſtendimus. Quare additis rectis aqualibus H A, O F, ad rectas aquales A G, F G, fient tota recta H G, O G, & omnes aliæ, inter ſe aquales: ac propterea ex defin. circuli H L I M N O, circumferentia circuli erit. Quod oſtendendum erat. Hinc ſequitur tertium.

III.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demiſſa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis.



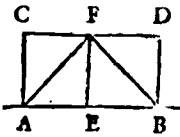
SINT ad rectam A B, erecta duæ perpendiculares A C, B D, inter ſe aquales: Et ducta recta C D, demittatur ex quolibet eius puncto E, ad A B, perpendicularis E F. Dico E F, vtriq; A C, B D, eſſe æqualem. Si nam ꝙ aqualis non eſt, erit ſvel maior, ſvel minor. Abſciſſa ergo aquali F G, ſi intelligatur recta A C, moueri in tranſuerſum per rectam A B, faciens cum ea angulos ſemper rectos, deſcribet punctum C, lineam rectam per G, tranſeuntem, ſt ſuprà oſtenſum eſt, qualis eſt C G D. Dua ergo recta C E D, C G D, ſuperficiem claudent. Quod eſt abſurdum. Aequalis igitur eſt E F, vtrique A C, B D. Quod erat oſtendendum. Ex hoc quartum, quod ſequitur, demonſtrabimus.

SI ad

IV.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum.

SINT ad rectam AB, erecta duæ perpendiculares AC, BD, æquales inter se, ducaturq; recta CD. Dico vtrumque angulum C, D, rectum esse. Secta namque recta AB, bifariam in E, excitetur in E, ad AB, perpendicularis EF, sungunturq; rectæ AF, BF. Quoniam igitur duo latera AE, EF, trianguli AEF, duobus lateribus BE, EF, trianguli BEF, æqualia sunt, & vtrumque vtrique, angulos q; continent æquales, puta rectos, a erunt quoque & bases AF, BF, & tam anguli FAE, FBE, quàm AFE, BFE, inter se æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis FAE, FBE, ex rectis æqualibus CAE, DBE, reliqui erunt æquales anguli CAF, DBF. Itaque cùm duo latera CA, AF, trianguli CAF, duobus lateribus DB, BF, trianguli DBF, æqualia sint, angulos q; complectantur æquales, & ostendimus, b erunt quoque & bases CF, DF, & tam anguli C, D, quàm CFA, DFB, inter se æquales. Si ergo æqualibus angulis CFA, DFB, addantur anguli AFE, BFE, ostensi æquales, fient toti anguli CFE, DFE, æquales, ac proinde recti. Quia verò perpendicularis EF, vtrique AC, BD, æqualis est, & proximo theoremate ostendimus, erunt duæ rectæ AC, EF, ad AE, perpendiculares, inter se æquales. Quare, & de angulis C, D, proximè probatum est, anguli C, & EFC, æquales inter se erunt. Est autem EFC, ostensus rectus. Igitur & C, rectus erit, ac proinde & angulus D, qui ostensus est ipsi C, æqualis.



a 4. pri.

b 4. pri.

CAETERVM angulos C, D, rectos esse, demonstrabimus alio modo, hoc priùs theoremate præmisso.

SI in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum, duæ illæ rectæ minùs semper inter se distabunt ad eas partes, vbi est angulus acutus, ex altera verò parte semper inter se magis distabunt.

RECTA linea AB, in rectas AC, BD, incidens faciat angulum ABD, rectum, & BAC, acutum. Dico rectas AC, BD, minùs semper inter se distare versus C, D, productas, magis verò, si versus E, F, producantur. c Duca-



c 12. pri.

tur e-

tur enim ex B, ad A C, perpendicularis B G, qua ex coroll. 2. propoſ. 17. huius lib. ad partes acuti anguli B A C, cadet: ac propterea angulus G B D, pars recti anguli A B D, acutus erit. Demiſſa ergo ex G, ad B D, perpendicularis G H, cadet quoq; ad partes anguli acuti G B D, ex eodem coroll. angulusq; propterea H G C, pars recti anguli B G C, acutus erit. Rurſus ergo ducta perpendicularis H I, ad A C, per eadem coroll. ad partes acuti anguli H G C, cadet, ideoq; angulus I H D, pars recti anguli G H D, acutus erit. Atq; ita deinceps in infinitum, ſi ex I, ad B D, perpendicularis I K, ducatur, & ex K perpendicularis K C, ad A C, & ex C, ad B D, perpendicularis C D, &c. cadent omnes ad partes angulorum acutorum, & una poſit aliam. Quoniam igitur in triangulo A B G, angulus B A G, acutus eſt, & A G B, rectus, a erit recta A B, maior quam G B: & in triangulo B G H, recta B G, angulo recto G H B, oppoſita, maior quàm G H; & in triangulo G H I, recta G H, maior quam H I: Atq; ita deinceps erunt ſemper rectæ, quæ ipſi A B, propiores ſunt, maiores iis, quæ remotiores ſunt, & nunquam finis erit huius decrementi perpendicularium. Quapropter recta A C, in G, minus diſtabit à recta B D, quam in A, & in I, minus quàm in G, & in C, minus quam in I, &c. quandoquidem perpendiculares A B, G H, I K, C D, &c. quæ ordinatim deciderunt, vt oſtendimus, minimæ ſunt omnium à punctis A, G, I, C, in rectam B D, cadentium, & vt ex coroll. propoſ. 19. huius lib. liquet, ac proinde eorundem punctorum diſtantias ab eadem recta B D, metiuntur. Conſtat ergo, rectas A C, B D, ad partes C, D, productas continenter fieri minus inter ſe diſtantes. quod eſt primum.

a 19. primi.

b 11. primi. Ducatur rurſus b ex A, ad A E, perpendicularis A L, qua angulum obtuſum B A E, partietur in rectum E A L, & acutum L A B, hoc eſt, cadet inter A B, & A E; eritq; angulus A L B, acutus, cùm

c 17 primi. ambo A B L, A L B, c ſint duobus rectis minores, atq; A B L, rectus ſit: ac proinde angulus A L F, obtuſus erit. Eadem ratione perpendicularis L M, ex L, ad B F, ducta cadet inter L A, L F, facietq; angulum L M A, acutum, & L M E, obtuſum: Item perpendicularis M N, ex M, ad A E, erecta cadet inter M L, M E, angulumq; M N B, acutum, & M N F, obtuſum conſtituet. Atq; ita deinceps in infinitum, ſi ex N, ad B F, perpendicularis erigitur M O, & ex O, ad A E, perpendicularis O P, & ex P, ad B F, perpendicularis P E, & ex E, ad A E, perpendicularis E F, &c. diuident omnes ſigillatim angulos obtuſos, & una poſit aliam. Quoniam igitur in triangulo A B L, angulus A B L, rectus eſt,

d 19. primi. & A L B, acutus d erit A L, recta maior, quàm A B, & in triangulo A L M, recta L M, angulo recto L A M, oppoſita, maior quàm A L; atq; in triangulo L M N, recta M N, recto angulo M L N, oppoſita, maior quàm M L: atq; ita deinceps erunt ſemper rectæ, quæ ab A B, longius abſunt, maiores iis, quæ propinquiores ſunt, in infinitum. Quamobrem recta A E, in M, magis a recta B F, diſtabit, quàm in A, & in O, ma-

O, magis quàm in M, & in E magis quàm in O, &c. quandoquidem perpendiculares AB, ML, ON, EP, &c. quas ordinatim augeri ostensum fuit, minima sunt omnium ex punctis A, M, O, E, in rectam BF, cadentium, &c. Liquidò ergo constat, rectas AC, BD, ad partes E, F, productas continenter fieri magis inter se distantes. quod est secundò. Quod si præterea quispiam vellet contendere, rectam AL, quæ ad AC, perpendicularis est, non concurrere cum DB, producta, constabit multò magis id, quod demonstrandum proponitur. Nam linea DB, vltra punctum B, multò magis à recta CA, distabit, quàm in puncto B, quandoquidem AL, ad AC, perpendicularis in infinitum producta non concurrit cum DB, cùm tamen GB, ad eandem AC, perpendicularis cum DB, concurrat in B, &c.

HÆC cùm ita sint, nullo negotio demonstrabimus, in superiori figura angulos C, D, esse rectos. Nam si angulus C, verbi gratia, non dicatur esse rectus, erit vel acutus, vel obtusus. Sit primum acutus. Quoniam ergo recta CA, in rectas AB, CD, incidens efficit angulum CAB, rectum, & C, acutum, minùs semper inter se distabunt rectæ CD, AB, ad partes D, B, productæ, hoc est, perpendiculares ex CD, in AB, demissæ ordinatim minores fient, quàm CA, vt proximè demonstratum est. Minor ergo est perpendicularis DB, quàm CA, quod est absurdum, cùm ponatur æqualis. Non igitur acutus est angulus C. Eademq; ratione neq; angulus D, acutus erit. Sit deinde angulus C, obtusus. Quia igitur recta CA, in rectas CD, AB, incidens facit angulum CAB, rectum, & B, obtusum, magis semper inter se distabunt rectæ CD, AB, ad partes D, B, productæ, hoc est, perpendiculares ex CD, in AB, demissæ continenter augebuntur, vt proximè ostendimus. Maior ergo est perpendicularis DB, quàm CA, quod est absurdum, cùm æqualis ponatur. Non igitur obtusus est angulus C. Eademq; ratione neque angulus D, obtusus erit. Sed neq; acutus est ostensus. Rectus igitur vterq; est, quod erat ostendendum.

EX his demonstratis facile iam axioma 13. demonstrabimus hoc modo.

V.

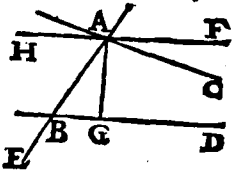
SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.

HOC est axioma 13. apud Euclidem in nostris commentarijs apud alios est undecimum, quod demonstrandum suscepimus. Incidens ergo recta AB, in rectas AC, BD, faciat internos, ad easdemq; partes angulos ABD, BAC, duobus rectis minores. Dico rectas AC, BD, ad

BD, ad partes C, D, productas coire. Sit enim primum alter angulorum, nempe ABD, rectus, & alter BAC, acutus. Sumpto in recta
a 12. pri. *AC, puncto quolibet E,* a *ducatur ex eo ad rectam AB perpendicularis EF, & recta AF, aqualis accipiatur FG, & GH, aqualis ipsi AG, & HI, ipsi AH, ita vt AG, ipsius AF, & AH, ipsius AG, & AI, ipsius AH, dupla sit. Et quoniam si recta AF, abscindantur continuè aquales rectæ ex AB, aliqua tandem pars vltra B, punctum cadet, quod finita recta AB, per continuam abscissionem vnius eiusdemq; quantitatis absumatur tandem, quandoquidem linea AF, ita multiplicari potest (quod fit, sumendo ipsi in AB, continenter partes aquales) vt tandem aliquando finitam lineam AB, superet. Id quod Euclides frequenter assumit in lib. 5. & alijs sequentibus, vbi datis duabus magnitudinibus inaqualibus proportionem inter se habentibus, iubet pleruncque minorem ita multiplicari, donec maiorem superet. Fit, vt multò magis, si ipsi AF, aqualis abscindatur FG, & toti deinde AG, non autem soli AF, aqualis auferatur GH: Item toti AH, non autem soli AF, vel AG, aqualis dematur HI, & sic deinceps, cadat tandem pars aliqua vltra punctum B. Statuatur ergo punctum I, terminans tertiam duplam in dato exemplo, existere vltra punctum B. Accipiatur quoque in recta AC, recta EK, ipsi AE, & KL, ipsi AK, & LC, ipsi AL, aqualis, ita vt tot sint partes in recta AC, quot in recta AI; ducanturq; recta KG, LH, CI, producanturq; vnà cum EF, vt EM, KN, LO, ipsis EF, KG, LH, fiant aquales, ac tandem recta iungantur MK, NL, OC. Itaque quoniam duo latera KE, EM, trianguli KEM, duobus lateribus AE, EF, trianguli AEF, per constructionem aqualia sunt, vtrumque vtrique,* b 15. pri. b *angulosq; ad verticem E, continent aquales,* c *erit*
c 4. pri. *& basis MK, basi AF, & angulus M, angulo F, aqualis. Est autem & FG, eidem AF, aqualis, & angulus F, rectus, ex constructione.*
d 1. pri. *Igitur & MK, FG,* d *aquales inter se erunt, & angulus M, quoque rectus. Quare cùm ad FM, excitata sint duæ perpendiculares aquales FG, MK, erit per antecedens theorema, angulus G, rectus. Rursus ergo, quia duo latera LK, KN, trianguli LKN, duobus lateribus AK, KG, trianguli AKG, aqualia sunt, ex constructione,*
e 15. pri. e *angulosq; comprehendunt aquales ad K, verticem,* f *erit & basis*
f 4. pri. *NL, basi AG, & angulus N, angulo G, aqualis. Est autem & GH, ex constructione, eidem AG, aqualis, & angulus G, rectus, vt proxi-*
g 1. prom *mè demonstratum est. Igitur & NL, GH, inter se* g *erunt aquales, & angulus N, quoque rectus. Quocirca per præcedens theorema, erit etiam angulus H, rectus. Eadem ratione ostendemus angulum I, rectum*

cum esse: atque ita deinceps, si plures essent partes rectæ A B. Est autem & angulus B, per hypothesin rectus. Igitur rectæ I C, B D, a parallelæ sunt: ac propterea B D, producta rectam A C, secabit supra punctum C; atque adeò in puncto illo sectionis rectæ A C, B D, coibunt. Quod erat demonstrandum. a 28. pri

SIT deinde neuter angulorum A B D, B A C, rectus; sed A B D, quidem acutus, & B A C, vel acutus etiam, vel obtusus. Quia igitur duo anguli A B D, B A C, duobus rectis ponuntur minores; b sunt autem duo anguli A B D, D B E, duobus rectis æquales: erunt hi duo illis duobus maiores. Ablato ergo communi A B D, maior erit reliquus B E, reliquo B A C. c Constituatur in A, ad rectam A B, angulus B A F, angulo D B E, æqualis: Cadetq; recta A F, supra rectã A C, cum A F, maiorem angulũ cum A B, constituat, quàm A C. Quia igitur externus angulus D B E, interno B A F, ex eadem parte oppositio æqualis est, d erunt rectæ A F, B D, inter se parallelæ. Demittatur quoque ex A, ad B D, e perpendicularis A G, qua ex coroll. 2. propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli A B D, cadet: Eritq; angulus quoq; G A F, rectus. Nam si acutus esse dicatur, efficiet recta A G, in rectas A F, B D, incidens angulum A G D, rectum, & G A F, acutum, ac proinde, vt proximè demonstrauimus, recta A F, B D, ad partes F, D, productæ coibunt tandem: Quod est absurdum. Ostensa enim sunt parallela. Si autem angulus G A F, dicatur esse obtusus, erit G A H, acutus. Quare ex proximè demonstratis, coibunt rectæ A F, B D, ad partes H B, productæ, quod est absurdum, cùm parallelæ sint ostensæ. Non est ergo angulus G A F, acutus, aut obtusus. Igitur rectus, ac proinde eius pars G A C, acutus. Quoniam igitur recta A G, in rectas A C, B D, incidens facit angulum G, rectum, & G A C, acutum, concurrent rectæ A C, B D, ad partes, C, D, productæ, vt proximè demonstrauimus. Si igitur recta A B, in rectas A C, B D, incidens faciat duos angulos minores duobus rectis, neutrum tamen angulorum A B D, B A C, rectum, ipsæ rectæ A C, B D, ad partes C, D, productæ conuenient. Quod erat ostendendum. Quòd si quando accidat, rectam A C, existere inter A B, & perpendicularem A G, liquidò constat, rectas A C, B D, coire, quòd tunc A C, basin B G, triangulæ A B G, secaret. Quod vt facilius capias, ducere poteris rectam A C, inter A B, A G.



b 13. pri.
c 23. pri.
d 28. pri
e 12. pri.

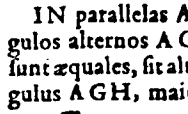
QVAMVIS autem, concesso principio nostro, optimè à nobis demonstratum sit tertiumdecimum hoc axioma, & a Proclo etiam, si eius principium difficilius quidem, quàm nostrum, admittatur, vt iure optimo inter theoremata, & non inter principia possit connumerari; tamen me ordinem Euclidis in quoquam immutemus, vtemur

eo in omnibus propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendent, tanquam pronunciato. Sed iam ad seriem propositionum Euclidis reuertamur.

XXIX. THEOR. 20. PROPOS. 29.

IN parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

IN parallelas A B, C D, recta incidat E F. Dico primum, angulos alternos A G H, D H G, inter se esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit alter, nempe A G H, maior. Quoniam igitur angulus A G H, maior est angulo D H G, si addatur communis angulus B G H; *a* erunt duo A G H, B G H, maiores duobus D H G, B G H: At duo A G H, B G H, *b* æquales sunt duobus rectis. Igitur duo D H G, B G H, minores sunt duobus rectis. Quare cùm sint interni, & ad easdem partes, B, & D, *c* coibunt lineæ A B, C D, ad eas partes, quod est absurdum, cùm ponantur esse parallelæ. Non est igitur angulus A G H, maior angulo D H G: Sed neque minor. Eadem enim ratione ostenderetur, rectas coire ad partes A, & C. Igitur æquales erunt anguli alterni A G H, D H G. Eademq; est ratio de angulis alternis B G H, C H G.



a 4 *pronun.* b 13 *pri.* c 13 *pronun.*

DICO secundò, angulum externum A G E, æqualem esse interno, & ad easdem partes opposito C H G. Quoniam enim angulo B G H, æqualis est alternus C H G, vt ostensum est; & eidem B G H, *d* æqualis est angulus A G E. Erunt anguli A G E, C H G, *e* inter se quoque æquales. Eodem modo demonstrabitur, angulum B G E, æqualem esse angulo D H G.

d 15 *pri.* e 1 *pronun.*

DICO tertiò, angulos internos ad easdem partes, A G H, C H G, æquales esse duobus rectis. Quoniam enim ostensum fuit, angulum externum A G E, æqualem esse angulo C H E, interno; si addatur communis A G H, *f* erunt duo A G E, A G H, duobus C H G, A G H, æquales: Sed duo A G E, A G H, *g* æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo anguli C H G, A G H, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli B G H, D H G, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos, &c. Quod erat demonstrandũ.

f 2 *pronun.* g 13 *pri.*

SCHOLIVM.

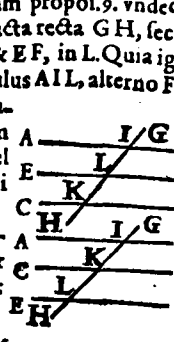
CONVERTIT autem hoc præsens theorema duo præcedentia theoremata, vt perspicuum est.

THEOR.

THEOR. 21. PROPOS. 30. xxx.

QVÆ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, eidem rectæ EF, parallelæ. Dico & ipsas AB, CD, esse inter se parallelas. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse plano. (Nam propos. 9. vndecimi libri agetur de lineis in diuersis planis) ducta recta GH, secabit omnes, nimirum AB, in I; CD, in K; & EF, in L. Quia igitur AB, ponitur parallela ipsi EF, a erit angulus AIL, alterno FLI, æqualis. Rursus quia CD, ponitur etiam parallela ipsi EF, b erit angulus DKI, eidem angulo FLI, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli AIL, DKI, c æquales inter se quoque erunt. Cùm igitur sint alterni, d erunt rectæ AB, CD, parallelæ inter se. Quæ igitur eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat.



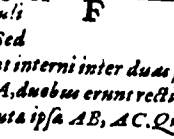
a 29. primi.
b 29. primi.
c 1. primi.
d 27. primi.

SCHOLIVM.

QVOD si quis dicat, duas rectas AI, BI, parallelas esse rectæ CD, & tamen ipsas non esse parallelas; Occurrendum est, duas AI, BI, non esse duas lineas, sed partes tantùm vnius lineæ. Concipiendum enim est animo, quaslibet parallelas infinitè esse productas; Constat autem AI, productam coincidere cum BI. Quamobrem propositio hæc generalius ita poterat proponi.

QVÆ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ: vel certè, quando inter se coeunt, vnam eandemq; lineam constituunt.

SINT enim duæ rectæ AB, AC, coeuntes in A, parallelæ ipsi DE. Dico illas in rectum esse constitutas. Ex puncto enim A, ducatur recta AF, secans DE, in F, vtcunq;. Quoniam igitur AB, DE, sunt parallelæ, c *erunt anguli alterni BAF, AFE, æquales. Addito ergo communi angulo CAF,* f *erunt duo anguli ad A, æquales duobus angulis CAF, AFE. Sed hi duo* g *æquales sunt duobus rectis, cùm sint interni inter duas parallelas AC, DE. Igitur & duo anguli ad A, duobus erunt rectis æquales; ac propterea* h *in rectum erunt constituta ipsæ AB, AC. Quod est propositum.*

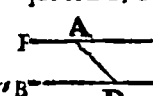


c 29. primi.
f 2. prop.
g 29. primi.
h 14. primi.

ROBL. 10. PROPOS. 31. xxxj.

A dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

EX puncto A, ducenda sit linea parallela lineæ B C. Ducatur ex A, ad B C, linea A D, vtcunque, faciens angulum quemcun-
a23.pri. que A D B; Cui ad A, a æqualis constituatur E A D. Dico rectam



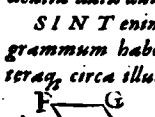
E A, extensam ad F, quantumlibet, parallelam esse ipsi B C. Cùm enim anguli alterni A B D,
b27.pri D A E, æquales sint, per constructionem, b erunt rectæ B C, E F, parallelæ. A dato igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

DEBET autem punctum datum in tali esse loco situm extra lineam datam, vt hæc producta cum illo non conueniat. Quod quidem apertè colligitur ex ipsa constructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda est linea faciens angulum aliquem cum linea data, qui fieri non posset, si punctum in directum iaceret cum ipsa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq; puncto ad eandem rectam non plures perpendiculares, quàm vna, ducuntur, vt ostendimus propos. 17. ex Proclo; ita etiam per idem punctum, data recta plures parallelæ, quàm vna, duci nequeunt. Si enim duæ ducerentur,
c30.pri. *conuenirent ipsæ in puncto illo eodem, quod est absurdum, c cùm sint parallelæ inter se, propterea quòd vni & eidem, cui parallelæ ducuntur, sunt parallelæ.*

EX hoc porrò problemate, & illo, quod propos. 23. continetur, facili negotio constituemus parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraq; angulum illum comprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia.

SINT enim data recta A B, oporteatq; constituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C, lateraq; circa illum angulum rectis A B, æqualia. Sumpta recta D E,
d23.pri. *qua recta A, sit æqualis, d fiat angulus E D F,*
e3.pri. *angulo C, e & recta D F, rectæ B, æqualis. Deinde per E,*
f31.pri. *f agatur recta E G, ipsi D F, parallela, & per F, recta F G, ipsi D E, parallela secans E G, in G. Quoniam ergo & latera D F, E G, & D E,*

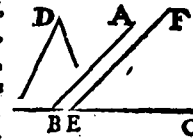


g35.def. *F G, parallela sunt, ex constructione; g parallelogrammum erit D E G F. Quod cùm ex constructione, habeat angulum D, angulo dato C, æqualem, & latera D E, D F, circa dictum angulum D, datis rectis A, B, æqualia; factum erit, quod proponitur.*

PARI ratione ex hoc problemate, & propos. 23. ducemus à puncto extra datam rectam lineam proposito lineæ rectam, quæ cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem, vt ad propos. 23. pollicitis sumus.

SIT enim datum punctum A, extra rectam B C, & datus angulus rectilineus D, oporteatq; ex A, ad rectam B C, ducere lineam rectam.

ſtam, quæ cum ea angulum dato angulo D, æqualem comprehendat. Sumpto quolibet puncto E, in linea B C, a conſtituatur in eo angulus C E F, angulo D, æqualis. Si igitur recta E F, per datum punctum A, tranſeat, factum erit, quod iubetur. Si verò non tranſeat per A, b ducatur per A, recta A B, ipſi E F, parallela ſecans B C, in B. Dico angulum A B C, angulo D, æqualem eſſe. Cùm enim parallelæ ſint, A B, E F, c erit angulus C E F, externus interno A B C, ex eadem parte oppoſito æqualis. Cùm ergo & angulus D, angulo E, per conſtructionem ſit æqualis, d æquales inter ſe erunt anguli A B C, & D, quod eſt propoſitum.



a 23. primi.

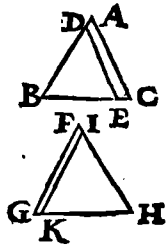
b 31. primi.

c 29. primi.

d 1. primi.

NON videtur autem alienum oſtendere hoc loco, rectè Euclidem propoſ. 26. & demonſtraret æqualitatem laterum in duobus triangulis, ex æqualitate duorum angulorum, & unius lateris, præcepiſſe, latus illud vel adiacere debere angulis æqualibus, vel certè ſubtendere angulum æqualem. Nam niſi altera harum conditionum adſit, nihil colligetur.

SIT enim triangulum A B C, ſintq; latera A B, A C, latere B C, maiora. Abſcindatur B D, æqualis ipſi B C, e ducaturq; D E, ipſi A C, parallela, f eritq; angulus B E D, angulo C, æqualis. Quare duo anguli B, C, trianguli A B C, duobus angulis B, E, trianguli D B E, æquales ſunt, & uterque utrique, latus q; B C, lateri D B, æquale; cùm tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non ſint. Eſt enim B E, minus, quàm B C, atque adeo neque lateri A C, neque lateri A B, æquale eſſe poteſt; quòd hæc latera maiora ponantur latere B C. Cauſa huius rei eſt, quod latus B C, in triangulo A B C, adiacet angulis dictis, at latus D B, in triangulo D B E, opponitur uni angulorum dictorum, nimirum angulo D E B, qui angulo C, æqualis eſt.



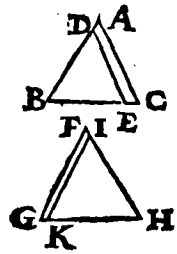
e 31. primi.

f 29. primi.

SIT rurſus triangulum F G H, ſintq; iterum latera F G, F H, latere G H, maiora, & F H, maius quàm F G. Abſcindatur H I, ipſi F G, æqualis, g ducaturq; I K, ipſi F G, parallela: h eritq; angulus H K I, angulo G, æqualis. Sunt ergo duo anguli H, G, trianguli F G H, duobus angulis H, K, trianguli I K H, æquales, & uterque utrique, latus q; F G, lateri I H, æquale; cùm tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non ſint. Eſt enim H K, minus, quàm H G, atque adeò neque lateri H G, neq; lateri F H, æquale eſſe poteſt; quod latus F H, maius etiam ponitur, quàm G H. Ratio huius rei eſt, quod latus F G, in triangulo F G H, opponitur angulo H, at latus I H, opponi-

g 31. primi.

h 29. primi.

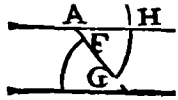


tur angulo K, in triangulo IKH, qui non ponitur aqualis angulo H, sed angulo G, est aqualis, a qui maior est angulo H, propterea quòd latus FH, maius posuimus latere FG. Distulimus hanc demonstrationem hunc in locum, propter linearum parallelarum proprietates, ex quibus pendet.

a 18. primi.

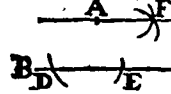
PRAXIS.

SIT ducenda parallela ipsi BC, per punctum A. Ducatur recta AD, circunq; ad BC, & ex D, & A, ad idem interuallum quodlibet describantur duo arcus ad diuersas partes, unus ad partes B, alter ad partes C. Deinde beneficio circini arcui EF, abscindatur ex arcu altero arcus GH, aqualis. Si igitur ex A, per H, recta ducatur, b erit hac parallela ipsi BC. Nã alterni anguli EDF, HAG, sunt aquales, & cõstat ex praxi propos. 23. &c.

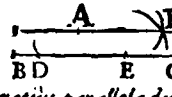


b 27. primi.

ALIO modo ducetur per idem punctum A, datum linea parallela linea data BC, hac arte. Ex centro A, ad quoduis interuallum describatur arcus secans BC, in puncto D; & eodem interuallo ex D, sumatur punctum E, in eadem recta BC. Deinde eodem interuallo ex A, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Nam ducta recta AF, erit parallela recta BC. Quoniam enim propter idem interuallum assumptum recta AF, aqualis est recta DE; & recta AD, recta EF, si ducerentur ha lineæ; erit AF, oppositæ DE, parallela, & postea demonstrabimus propos. 34.



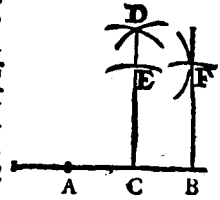
QVOD si punctum A, vicinum fuerit recta BC, commodius hac lege parallela optata ducetur. Ex A, sumatur punctum D, in BC, ad quoduis interuallum; Et ex quouis puncto eiusdem rectæ BC, nempe E, quod tamen aliquantulum distet à puncto D (Quò enim maior fuerit distantia inter D, & E, eò facilius & accuratius parallela ducetur) eodem interuallo arcus describatur ad partes A. Deinde ex A, interuallo DE, alter arcus descriptus secet priorem arcum in F. Recta namq; ducta AF, erit parallela recta BC, & primo; quia recta AF, aqualis est rectæ DE, ob idem interuallum; & rectæ AD, rectæ EF, si ha rectæ ductæ essent, &c.



SED longè facillimam rationẽ ducendi parallelam alicui linea per datum punctũ tradidimus in nostro Astrolabio lib. 1. lemmate 4.

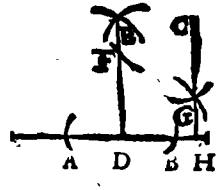
EX his facilè ducemus ex puncto extremo alicuius linea perpendicularem lineam ad ipsam datam lineam, etiamsi linea produci non possit, quod in scholio propos. 11. promisimus. Sit enim recta AB, ex cu-

ex cuius extremo puncto B, educenda sit ad eam perpendicularis. Sumpto puncto quouis C, abscindatur recta C B, aqualis C A, & ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus describantur secantes sese in D, ducaturq; recta D C, qua ad A B, perpendicularis erit, vt ad propos. 11. scripsimus. Deinde per B, ducatur ipsi C D, parallela, hoc modo, secundum praxin huius 31. propositionis proximè explicatam. Ex C D, abscissa recta quantacunq; C E, describatur ex B, ad interuallum C E, arcus, quem in F, secet alius arcus ex E, ad interuallum C B, descriptus, ducaturq; recta B F. Hac namque ipsi C D, parallela erit, vt ex praxi huius propos. 31. liquet. Igitur cùm angulus A C D, a aqualis sit interno C B F; sit autem A C D, rectus, erit & C B F, rectus, ac proinde B F, ad A B, perpendicularis erit.



a 29 primi.

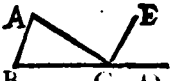
SIMILITER si data sit recta A B, & punctum extra ipsam C, in extremo ferè plani, in quo recta illa iacet, ducemus ex C, ad A B, perpendicularem, neq; producta linea, neq; extenso plano infra rectam A B, vt polliciti sumus ad propos. 12. hoc modo. Sumpto puncto D, vtcunq; in linea A B, abscindatur vtrinq; inter se aquales D A, D B, & ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus describantur secantes sese in E, ducaturq; recta E D, qua ex praxi propos. 11. ad A B, perpendicularis erit. Deinde per C, ducatur ipsi D E, parallela, hoc modo, secundum praxin huius propos. 31. Ex dato puncto C, ad quoduis interuallum describatur arcus secans rectam D E, in F: eodemq; interuallo ex D, versus C, alius arcus describatur, quem in G, intersecet alius arcus ex C, ad interuallũ D F, delineatus. Recta namq; ducta ex C, per G, secans A B, in H, parallela erit recta D E, ex praxi huius propos. 31. Quare, vt proximè scripsimus, C H, ad A B, perpendicularis erit, sicuti & E D, ad eandem perpendicularis est.



THEOR. 22. PROPOS. 32. xxxij

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

PRODVCATVR in triangulo A B C, latus B C, ad D. Dico primò, angulum externum A C D, æqualem esse duobus internis, & oppositis simul A, & B. *b* Ducatur enim ex C, linea C E, parallela rectæ A B. Quoniam igitur recta A C, incidit in parallelas A B, C E, *c* erunt anguli interni A, & A C E, æquales. b 31 pri. c 29 pri.



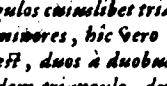
a 29. primi. b 2. prop. Rursus, quia recta B D, in easdem parallelas incidit, *a* erit angulus externus D C E, æqualis interno B. Additis igitur æqualibus A C E, & A, *b* fiet totus A C D (qui ex duobus D C E, A C E, componitur) duobus A, & B, simul æqualis. Quod est propositum.

c 2. prop. d 13. primi. DICO secundò, tres angulos internos eiusdem trianguli A, B, & A C B, duobus esse rectis æquales. Cùm enim externus angulus A C D, vt ostensum fuit, æqualis sit duobus internis A, & B; si addatur communis A C B, *c* erunt duo anguli A C D, A C B, æquales tribus A, B, & A C B; Sed duo A C D, A C B, *d* æquales sunt duobus rectis. Igitur & tres interni, A, B, A C B, duobus sunt rectis æquales. Quare cuiuscunq; trianguli vno latere producto, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CVM demonstratum sit propos. 16. angulum externum cuiusuis trianguli maiorem esse vtrolibet interno, & opposito, hic autem, eundem externum eisdem internis simul esse æqualem, perspicuum est, alterutrum internorum, & oppositorum superari ab externo, reliquo interno angulo opposito. Vt in triangulo proposito angulus A, internus superatur ab angulo externo A C D, angulo B, interno: Et angulus B, internus superatur ab eodē externo angulo A C D, angulo A, interno, quandoquidem angulus A C D, duobus angulis A, & B, est ostensus hoc loco æqualis. Rursum, quia demonstratum est propos. 17. duos angulos cuiuslibet trianguli quomodocunque sumptos, duobus esse rectis minores, hic vero omnes tres duobus rectis æquales esse; manifestum est, duos à duobus rectis deficere, reliquo angulo triangulj. Vt in eodem triangulo, duo anguli A, & B, à duobus rectis deficiunt angulo A C B, &c.

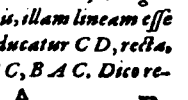
e 31. primi. f 29. primi. g 2. prop. h 2. primi. *OMNE porrò triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, vt refert Eudemus, Pythagorei demonstrârunt hac ratione. Sit triangulum A B C, & per punctum A,* e *ducatur recta B C, parallela D E. Quoniam igitur* f *anguli alterni D A B, & A B C, æquales sunt; si addantur æquales E A C, & A C B (sunt enim & hi alterni)* g *erunt duo anguli D A B, E A C, duobus A B C, A C B, æquales. Addito ergo communi angulo B A C,* h *erunt tres anguli D A B, B A C, C A E, æquales tribus angulis A B C, B A C, A C B. Sed anguli D A B, B A C, C A E, æquales sunt duobus rectis, vt constat ex propositione decimatertia. Igitur & in triangulo A B C, anguli A B C, B A C, A C B, duobus sunt rectis æquales, quod est propositum. Ex hoc autem facilè concludemus, angulum externum A C F, si latus B C, sit protra-*



ctum

ctum, aqualem esse duobus internis, & oppositis A B C, B A C. Quoniam enim anguli A B C, B A C, A C B, aquales sunt duobus rectis, & ostensum fuit. a *Sunt autem & anguli A C F, A C B, duobus rectis aquales; Erunt anguli A B C, B A C, A C B, angulis A C F, A C B, aquales. Dempto igitur communi angulo A C B,* b *remanebit angulus A C F, duobus angulis A B C, B A C, aqualis.* a 13. primi. b 3. proinun.

FACILE etiam conuerti poterit prima pars propositionis Euclidis: Hoc est, si ab vno angulo trianguli linea recta ducatur, & angulus externus aqualis sit duobus internis, & oppositis, illam lineam esse in directum ipsi lateri constitutam. Ex C, enim ducatur C D, recta, sitq; angulus A C D, aqualis duobus angulis A B C, B A C. Dico rectas B C, C D, in directum iacere. Cum enim angulus A C D, aqualis sit angulis A B C, B A C, si addatur communis angulus A C B, c *erunt anguli A C D, A C B, aquales angulis A B C, B A C, A C B: Sed A B C, B A C, A C B,* d *aquales sunt duobus rectis. Igitur & anguli A C D, A C B, duobus erunt rectis aquales.* e *Quare B C, C D, vnam lineam rectam constituunt.*



c 2. proinun. d 32. primi. e 14. primi.

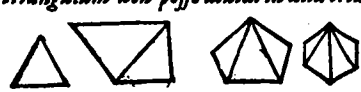
QVOT ANGVLIS RECTIS Æquiualeant anguli omnes interni cuiuscunq; figuræ rectilineæ.

DVOBVS modis ex hac propos. 32. colligemus, quotnam rectis angulis aquiualeant interni anguli figura cuiuslibet rectilinea, quorum primus hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis sunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipsa est inter figuras rectilineas.

HOC est, omnes anguli prima figura rectilinea aquales sunt bis vni recto, id est, duobus rectis; Anguli verò secunda figura rectilinea aquales sunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autem tertia figura rectilinea aquales sunt bis tribus rectis, sex videlicet rectis. Et sic reliquis. Eum autem locum qualibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, seu angulorum, dempto binario; quoniam dua linea recta superficiem non concludunt, unde nec figuram constituunt, sed cum minimum tres recta linea ad figura constitutionem requiruntur. Ex quo fit triangulum, quia habet tria latera, totidemque angulos, esse primam inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex trebus, relinquitur vnum. Sic erit figura habens 20. latera seu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctaua, cum binarius subtractus ex 20. relinquat 18. Idem

iudicium de aliis figuris est habendum. Itaque figura contenta 20. lateribus, cum sit decimaoctaua, habebit 20. angulos aquiualentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, & dictum est. Item quoque omnes 10. anguli figura 10. lateribus contenta, aquiualebunt 16. angulis rectis, cum talis figura sit octaua inter rectilineas figuras. Hoc autem hac ratione demonstrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quotæ ipsa est inter figuras, seu quot ipsa habet angulos lateráue, binario dempto. Nam à quouis angulo ipsius ad omnes angulos oppositos duci possunt linea recta, solum ad duos propinquos angulos non possunt duci. Quare in tot triangula distribuentur, quot ipsa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic videsi, triangulum non posse diuidi in alia triangula; quadrangulum verò in duo secari; quinquangulum in tria; sexangulum in quatuor, &c. Cum igitur anguli horum triangulorum constituant omnes angulos rectilineæ figuræ oppositæ, & omnes anguli cuiuslibet trianguli æquales sint duobus rectis; perspicuum est, omnes angulos figuræ cuiusuis rectilineæ æquales esse bis tot rectis, in quot triangula diuiditur, hoc est, quotæ ipsa est inter rectilineas figuras. Quod quidem manifestè perspicitur in propositis figuris.



SECVNDVS modus, quo scitur valor angulorum cuiuslibet figuræ rectilineæ, hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis, æquales sunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.

HOC est, anguli cuiuslibet trianguli æquales sunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis. Item etiam anguli figuræ continentis 20. latera æquiualebunt bis 20. angulis rectis, minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c. Demonstratio autem huius rei talis est. Si à quouis puncto intra figuram assumpto ad omnes angulos recta linea ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, angulósue figura ipsa



a 32. primi. *continet. Cum igitur anguli cuiuscunq; trianguli æquales sint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum æquales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundem triangulorum circa punctum intra figuram assumptum consistentes non pertinent ad angulos figuræ rectilineæ propositæ, & constat. Quare si hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli constituentes angulos figuræ propositæ, bis quoque tot rectis æquales, demptis illis circa punctum assumptum constitutis, quot latera, vel angulos continet figura.*

Sunt

Sunt autem omnes illi anguli, quotquot ſint, circa dictum punctum exiſtentes æquales 4. rectis tantummodò, & collegimus ex propoſ. 15. Quamobrem anguli cuiuſque figuræ bis tot rectis ſunt æquales, ablatis quatuor, quot ipſa figura continet angulos, ſeu latera, quod eſt propoſitum.

EX hoc porro ſecundo modo liquet, ſi ſingula latera figuræ cuiuſuis rectilineæ producantur ordinatim verſus eandem partem, omnes angulos externos æquales eſſe quatuor rectis. Nam quilibet externus, & illi deinceps internus, æquantur duobus rectis; atq; adeo omnes exter- a 13. pri. *mi ſimul cum omnibus internis æquales erunt bis tot rectis, quot latera, angulóſue figura continet. Sunt autem & ſoli interni bis tot rectis æquales, minus quatuor, vt demonſtrauimus. Si igitur interni auferantur, remanebunt externi quatuor tantùm rectis æquales, qui nimirum deſunt internis angulis, vt interni & externi ſimul bis tot rectos conficiant, quot latera figuram propoſitam ambiunt. Exemplum. In triangulo quouis, anguli interni & externi ſimul æquales ſunt ſex rectis. Cum igitur interni* b *duobus ſint rectis æquales, erunt ſoli externi æquales quatuor duntaxat rectis. In quadrilatero, anguli externi & interni ſimul æquales ſunt octo rectis. Cum igitur interni ſoli æquales ſint quatuor rectis, vt oſtendimus, erunt & ſoli externi quatuor etiam rectis æquales. In pentagono, ſeu quinquangulo, anguli interni & externi ſunt æquales* 10. *rectis. Quoniam verò interni adæquantur ſex rectis, vt demonſtrauimus, remanebunt externi æquales quatuor tantum rectis. Quæ omnia in appoſitis figuris conſpiciuntur. Eademque eſt ratio in aliis omnibus figuris.*



b 32. primi.

EX CAMPANO.

SI pentagoni ſingula latera producantur in partem vtramq;, ita vt quælibet duo extra pentagonum coeant, efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus ſolum rectis.

IN pentagono ABCDE, latera in vtramque partem producta coeant in punctis F, G, H, I, K. Dico quinque angulos F, G, H, I, K, æquales tantum eſſe duobus rectis. In triangulo enim BHK, cum latus HB. ſit protractum ad F, c erit externus angulus FBK, duobus internis, & oppoſitis H, K, æqualis. Eadem ratione in triangulo AIG, erit externus angulus FAG, æqualis duobus internis, & oppoſitis I, G. Quare duo anguli FBA, FAB, æquales ſunt quatuor angulis G, H, I, K. Addito igitur communi angulo



c 32. primi

a 2. pro-nun. *angulo F, a erunt tres anguli A, B, F, trianguli A B F, aequales quinque angulis F, G H I K. Sed anguli A, B, F, trianguli A B F,* b *aequales sunt duobus rectis. Igitur & quinque anguli F, G, H, I, K, duobus rectis aequales. Quod erat propositum.*

b 32. primi.

COROLLARIVM I.

EX hac propos. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli simul sumptos aequales esse tribus angulis cuiusq; alterius trianguli simul sumptis: Quoniam tam illi tres, quam hi, c aequales sunt duobus angulis rectis. Vnde si duo anguli vnius trianguli fuerint aequales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo huius aequalis, aequianguláque erunt ipsa triangula.

c 32. primi.

COROLLARIVM II.

CONSTAT etiam, in omni triangulo Isoscele, cuius angulus lateribus aequalibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum. Nam reliqui duo simul conficiunt vnum rectum, d cum omnes tres sint aequales duobus rectis: & tertius ille ponatur rectus. Quare e cum duo reliqui inter se sint aequales, erit quilibet eorum semirectus. At verò si angulus aequalibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet aliorum esse semirecto minorem. Reliqui enim duo simul minores erunt vno recto, &c. Si denique dictus angulus extiterit acutus. vtrumque reliquorum maiorem esse semirecto. Quoniam reliqui duo simul maiores erunt vno recto, &c.

d 32. primi.

e 5. pri.

COROLLARIVM III.

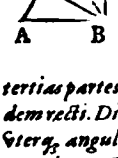
PERSPICVVM quoque est, quemuis angulum trianguli aequilateri esse duas tertias partes vnius recti, vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, f quibus aequales sunt tres anguli trianguli aequilateri, diuisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes vnius recti.

f 32. pri.

COROLLARIVM IV.

LIQVET etiam, si ab vno angulo trianguli aequilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangula scalena, quorum vnumquodque habet vnum angulum rectum prope perpendicularem; alium duas tertias partes vnius recti, illum scilicet, qui est, & angulus trianguli aequilateri; reliquum denique tertiam partem vnius recti.

SCHOLIVM.



PORRO ex tertio corollario depromi potest methodus, qua angulus rectus in tres angulos aequales dividatur. Sit enim angulus rectus A B C. Super rectam A B, g *constituatur triangulum aequilaterum A B D. Et quia per corollarium 3. angulus A B D, facit duas tertias partes anguli recti A B C; erit angulus C B D, pars tertia eiusdem recti. Diuiso igitur angulo A B D,* h *bifariam, per rectam B E, erit vterq; angulus A B E, E B D, tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus A B C, diuisus est in tres angulos aequales. Quod erat propositum.*

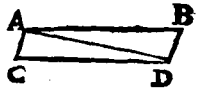
g 1. pri.

h 9. pri.

THEOR.

THEOR. 23. PROPOS. 33. xxxiij.

RECTÆ lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes eaſdem coniungunt; Et ipſæ æquales, & parallelæ ſunt.



SINT rectæ lineæ AB, CD, æquales, & parallelæ; Ipſas autem coniungant ad eaſdem partes rectæ AC, BD. Dico AC, BD, æquales quoque eſſe, & parallelas. Ducatur enim recta AD. Quoniam igitur AD, incidit in parallelas AB, CD, *a* erunt anguli alterni BAD, CDA, æquales. Quare cum duo latera BA, AD, trianguli BAD, æqualia ſint duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, vtrumque vtrique, & anguli quoque dictis lateribus incluſi æquales; *b* erunt baſes BD, AC, æquales, & angulus ADB, angulo DAC, æqualis. Cum igitur hi anguli ſint alterni inter rectas AC, BD, *c* erunt AC, BD, parallelæ: Probatum autem iam fuit, eaſdem eſſe æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 29. pri mi.
b 4. pri.
c 27. pri mi.

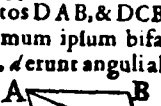
SCHOLIVM.

DIXIT Euclides, lineas æquales, & parallelas ad eaſdem partes debere coniungi, vt ipſæ coniungentes ſint & æquales & parallelæ. Nam ſi ad partes diuerſas coniungerentur, vt ad A, & D. Item ad B, & C, neque coniungentes lineæ eſſent parallelæ vnquam, ſed perpetuo ſe mutuo ſecarent, neque eſſent æquales, niſi raro admodum, vt ex ſequenti propoſitione conſtabit.

THEOR. 24. PROPOS. 34. xxxiv.

PARALLELOGRAMMORVM ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex aduerſo & latera, & anguli; atque illa bifariam ſecat diameter.

SIT parallelogrammum ABCD, quale definiuimus definitione 35. Dico latera oppoſita AB, DC, inter ſe eſſe æqualia, nec non latera oppoſita AD, BC. Item angulos oppoſitos B, & D, æquales inter ſe eſſe, nec non & angulos oppoſitos DAB, & DCB: Denique ducta diametro AC, parallelogrammum ipſum bifariam ſecari. Cum enim AB, DC, ſint parallelæ, *d* erunt anguli alterni BAC, DCA, æquales. Rurſus quia AD, BC, ſunt parallelæ, *e* erunt & anguli alterni BCA, DAC, æquales. Itaq; cum anguli BAC, BCA, trianguli ABC, æquales ſint duobus angulis DCA, DAC, trianguli ADC, vterque vtrique, & latus AC, dictis



d 29. pri mi.
e 29. pri mi.

a 26. primi. A C, dictis angulis adiacens, commune vtrique triangulo; a erit recta A B, æqualis oppositæ rectæ D C, & recta B C, oppositæ rectæ A D, quod est primum. Erit rursus eadem de causa angulus B, angulo D, æqualis. Et quia si æqualibus angulis B A C, D C A, addantur æquales anguli D A C, B C A, toti quoque anguli B A D, B C D, b fiunt æquales; constat secundum, angulos nimirum oppositos esse æquales. Quoniam verò duo latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia sunt duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumque vtrique, & angulus B, angulo D, æqualis, vt iam ostendimus; c erunt triangula A B C, C D A, æqualia, ideoque parallelogrammum A B C D, diuisum erit bifariam à diametro A C, quod tertio loco proponebatur. Parallelogrammorum igitur spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso, &c. Quod ostendendum erat.

b 12. primum.

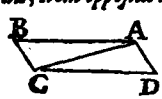
c 4. pri.

SCHOLIVM.

APPOSITE dixit Euclides, solummodo parallelogramma à diametro diuidi bifariam, non autem & angulos. In Quadrato enim, & Rhombo duntaxat anguli etiam bifariam diuiduntur à diametro; At in figura Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inaquales. Qua omnia perspicua erunt, si prius ostenderimus, quatuor hasce figuras, Quadratum, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma. Hoc autem demonstrabimus tribus sequentibus theorematibus, quorum primum est.

OMNE quadrilaterum habens latera opposita æqualia, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero A B C D, latera opposita A B, D C, aqualia; Item opposita latera A D, B C. Dico A B C D, esse parallelogrammum; hoc est, lineas A B, D C, esse parallelas; Itemque lineas A D, B C. Ducta enim diametro A C, erunt duo latera A B, B C, trianguli A B C, aqualia duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumque vtrique, & basis A C, communis. Igitur d erit angulus B, angulo D, aqualis. Rursus quia latera A B, B C, aqualia sunt lateribus C D, D A, vtrumque vtrique, & anguli, B, D, ostensi e aquales; e erit angulus B A C, angulo D C A, alterno aqualis, & f angulus B C A, alterno angulo D A C. Quare f erunt A B, & D C, parallela; Item A D, & B C, quod est propositum.



d 8. pri.

e 4. pri.

f 24. primi.

HINC constat, Rhombum, & Rhomboidem esse parallelogramma; quoniam opposita eorum latera sunt inter se aqualia, vt manifestum est ex eorum definitionibus. Parit ratione quadratum, parallelogrammum erit, quod latera opposita habeat aqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter se aqualia, per eius definitionem.

Conuer-

Conuertit autem hoc theorema primam partem propoſitionis 34. & patet.

Secundum theorema tale eſt.

OMNE quadrilaterum habens angulos oppoſitos æquales, eſt parallelogrammum.

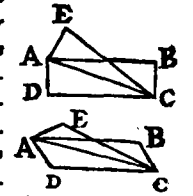
SINT in quadrilatero ABCD, anguli oppoſiti A, & C, æquales: Item oppoſiti anguli B, & D. Dico ABCD, eſſe parallelogrammum: hoc eſt, lineas AB, DC, eſſe parallelas: Itemque lineas AD, BC. Nam ſi æqualibus angulis A, & C, addantur æquales anguli B, & D: a *erunt duo anguli A, & B, duobus angulis D, & C, æquales & idcirco anguli A, & B, dimidium facient quatuor angulorum A, B, C, & D. Cum igitur hi quatuor æquales ſint quatuor rectis, & ad propoſ. 32. demonſtrauimus, erunt duo A, & B, duobus rectis æquales. Quare AD, BC,* b *parallelæ ſunt. Eadem ratione erunt AB, DC, parallelæ. Erunt enim duo quoque anguli A, & D, duobus angulis B, & C, æquales, &c. Quod eſt propoſitum. Ex hoc etiam manifeſtum eſt, Rhomboidem eſſe parallelogrammum, cum eius anguli oppoſiti æquales ſint, per definitionem. Similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppoſiti æquales, cum ſint recti, ex eorum definitionibus.*



a 2. primi.

b 28. primi.

HOC theorema conuertit ſecundam partem propoſitionis 34. & conſtat. Tertia autem pars non poteſt conuerti. Nam & trapezium aliquod bifariam ſecari poteſt à diametro, & tamen non eſt parallelogrammum. Sit enim altera parte longius, vel Rhomboides ABCD, quod parallelogrammum eſſe oſtenſum eſt: in quo, ducta diametro AC, conſtituatur ſuper AC, triangulo ABC, æquale triangulum AEC, inuerſo ordine, ita & latus CE, ſit æquale lateri AB, & AE, ipſi CB, & in ſcholio propoſ. 22. docuimus: fiat q trapezium AECD. Quoniam verò triangulum ABC, triangulo ADC, æquale eſt, c *quod diameter AC, bifariam ſecet parallelogrammum DB: Erit & triangulum AEC, triangulo ADC, æquale: Ac proinde trapezium AECD, bifariam diuidetur à diametro AC.*



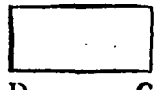
c 34. primi.

QVOD ſi quadrilaterum aliquod diuidatur bifariam ab vna diametro, illud parallelogrammum erit, vt oſtendemus ad propoſ. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri poteſt.

Tertium Theorema huiuſmodi eſt.

OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum.

SINT



SINT in quadrilatero A B C D, omnes quatuor anguli recti. Dico ipſum eſſe parallelogrammum: hoc eſt, lineas A B, D C, eſſe parallelas: Itemque A D, B C. Quoniam enim duo anguli A, & B, æquales ſunt duobus rectis, cum ſint duo recti: a *erunt A D, B C, parallela. Eodem modo erunt A B, D C, parallela: atque adeo A B C D, parallelogrammum. quod eſt propoſitum.*

a 28. primi.

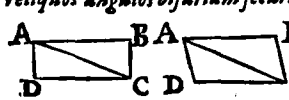
HINC rurſum conſtat, Quadratum, & alteram parte longius, eſſe parallelogramma, cum eorum anguli omnes exiſtant recti, & ſit liquet ex eorum definitionibus.

HIS in hunc modum demonſtratis, Quadratum ſcilicet, Alteram parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, eſſe parallelogramma, facile oſtendemus, angulos Quadrati, & Rhombi, bifariam ſecari à diametro: Angulos verò figuræ, Alteram parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, & paulo ante monuimus. Sit enim Quadratum,



vel Rhombus A B C D, in quo diameter A C. Quoniam igitur duo latera B A, A C, trianguli B A C, æqualia ſunt duobus lateribus D A, A C, trianguli D A C, utrumq; utrique, & baſis B C, baſi D C, (ſunt enim hæ b *figuræ æquilateræ) erunt anguli B A C, D A C, æquales. Quare angulus B A D, diuiditur bifariam. Eodem modo demonſtrabimus, reliquos angulos bifariam ſecari à diametro.*

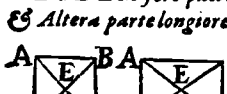
b 8. pri.



SIT rurſus Altera parte longius, vel Rhomboides A B C D, in quo diameter A C, ſitque maius latus A B. Quoniã igitur in triangulo A B C, latus A B, maius eſt latere B C, c *erit angulus B C A, maior angulo B A C. Eſt autem angulus B C A,* d *æqualis angulo D A C, alterno: quod B C, A D, parallelæ ſint. (Eſt enim A B C D, oſtenſum eſſe parallelogrammum.) Igitur & angulus D A C, maior erit angulo B A C. Atque propterea angulus B A D, inæqualiter diuiditur à diametro A C. Eadem eſt ratio aliorum angulorum. Quamobrem appoſitè Euclides in tertia parte huius propoſitionis dixit, ſolum parallelogramma bifariam à diametro ſecari, non autem & angulos.*

c 18. pri.
d 29. pri mi.

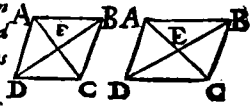
EODEM ferè pacto oſtendemus, duas diametros in Quadrato, & Altera parte longiore æquales eſſe; At verò in Rhombo, & Rhomboide inæquales, maiorem quidem eam, quæ angulos acutos, minorem verò eam, quæ obtuſos angulos diſpertit. Sit enim quadratum, vel altera parte longius A B C D, in quo diametri A C, B D, quas dico eſſe æquales. Cum enim duo latera A B, B C, trianguli A B C,



æqualia

æqualia sint duobus lateribus AB, AD, trianguli BAD: & trumque utrique, & angulus ABC, angulo BAD, quia uterque rectus: a erit basis AC, basi BD, æqualis: Ac proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore æquales sunt. a 4. pri.

SIT rursus Rhombus, vel Rhomboides, ABCD, in quo diametri AC, BD; sitq; angulus BAD, maior; ABC, minor. Non enim æquales sunt, quia alias uterque esset rectus, cum ambo b æquales sint duobus rectis; quod est absurdum, & contra definitiones Rhombi, & Rhomboidis. Dico diametrum BD, maiorem esse diametro AC.



b 29. primi.

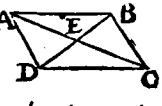
Quoniam enim duo latera AB, AD, trianguli BAD, æqualia sunt duobus lateribus AB, BC, trianguli ABC, & trumque utrique, & angulus BAD, angulo ABC, maior existit; c erit basis BD, maior basi AC. quod est propositum. Ex quo manifestum est, cur in propositione 33. Euclides asseruerit, eas tantum lineas, quæ coniungunt parallelas æquales ad easdem partes, æquales esse, & ibidem annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboide rectæ AC, BD, inæquales sunt, licet coniungant parallelas æquales AB, DC: quia non ad easdem partes ipsas coniungunt, ut perspicuum est. c 24. primi.

IN omni tamen parallelogrammo diametri se mutuo bifariam diuidunt. Cum enim duo anguli EAD, EDA, trianguli AED; d æquales sint alterni angulis ECB, EBC, trianguli BEC. & uterque utrique; & e latus AD, æquale lateri BC, opposito in parallelogrammo ABCD, quorum & trumque æqualibus adiacet angulis; f erit & AE, recta rectæ CE, & recta DE, rectæ BE, æqualis. Quare & traque diameter bifariam diuiditur in puncto E. d 29. primi. e 34. primi. f 26. primi.

HVIVS autem, quod modo diximus, conuersum etiam demonstrabimus, nimirum.

OMNE quadrilaterum, in quo diametri se mutuo bifariam diuidunt, parallelogrammum est.

IN quadrilatero enim ABCD, diametri AC, BD, se mutuo bifariam diuidant in E. Dico ABCD, parallelogrammum esse. Cum enim latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sint lateribus CE, ED, trianguli CED, & anguli contenti ad verticem E, g æquales quoque; h erunt & bases AB, CD, æquales, & angulus ABE, angulo alterno CDE, æqualis. i Quare recta AB, CD, parallelæ sunt. Eadem ratione parallelæ ostendentur AD, CB. Parallelogrammum ergo est ABCD.



g 15. pri. h 4. pri. i 27. pri.

ITAQVE, si quis expedite parallelogrammum describere velit, ducat duas lineas AC, BD, utcunque se in E, intersecantes. Si namque tam EA, EC, inter se, quam EB, ED, inter se æquales abscindet,

constituent ducta A B, B C, C D, D A, parallelogrammum, & hic demonstratum est. Quod si anguli ad E, sint recti, & omnes quatuor recta E A, E C, E B, E D, inter se aequales, constitutum parallelogrammum erit quadratum, propterea quod octo anguli ad A, B, C, D, sunt semirecti, vt facile demonstrabitur per 5. & 32. huius.

H V C quoque referri potest hoc theorema.

RECTA linea secans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum bifariam quoque: & recta linea diuidens parallelogrammum bifariam quouis modo, secat quoque diametrum bifariam.

I N parallelogrammo A B C D, diametrum A C, bifariam secet recta E F, in puncto G. Dico parallelogrammum diuidi bifariam.

a 29. pri mi. *Quoniam enim angulus E A G,* a *aequalis est angulo alterno B C G,*

b 15. pri mi. *&* b *angulus E G A, angulo F G C. Est autem & latus A G, lateri*

c 26 pri mi. *C G, aequale, per hypothesin, qua ambo aqualibus angulis adiacent;* c *erunt & latera E G, F G, aequalia. Quare cum latera A G, G E, aequalia sint lateribus C G, G F, & anguli quoque contenti aequales;*



d 4. pri mi. *derunt triangula A G E, C G F, aequalia. Addita igitur communi quantitate B C G E,*

e 2. pro mun. *erit triangulum A B C, trapezio B C F E, aequale: Sed triangulum A B C,*

f 34. pri mi. *dimidium est parallelogrammi A B C D. Igitur & trapezium dimidium erit eiusdem parallelogrammi, ideoq; recta E F, parallelogrammum bifariam secat.*

S E C E T iam E F, parallelogrammum bifariam; Dico & diametrum A C, bifariam secari in G. Si enim diameter A C, non bifariam

g 10. pri mi. *diuiditur in G,* g *diuidatur bifariam in alio puncto, vt in H, per quod ducatur recta E H I. Erit ergo, vt iam demonstrauimus, E I C B, trapezium dimidium parallelogrammi A B C D, atque adeo aquale trapezio E F C B, quod etiam dimidium ponitur eiusdem parallelogrammi, pars toti, quod est absurdum. Diuiditur igitur A C, bifariam in G, & non in alio puncto, quod erat propositum.*

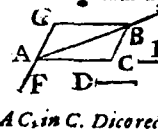
H I N C facile colligitur, si in latere aliquo parallelogrammi cuiusque punctum signetur, vel etiam intra parallelogrammum, vel extra, quod tamen non sit in diametro, nisi ipsum secet diametrum bifariã, qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, qua parallelogrammum bifariam secet. Si enim diameter ducatur, & a puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt si punctum sit E, in latere A B, ducenda est recta E F, per G, punctum, in quo diameter A C, bifariam diuiditur; & sic de aliis punctis

D E M O N S T R A T quoque hic Peletarius problema non inuncundum, videlicet.

INTER

INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarū faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autē hunc angulum datum, & eum, qui lineis datis continetur, minores esse duobus rectis.

DVÆ recta infinita A B, A C, contineant angulum B A C, sitq; data recta finita quæcunque D, & angulus datus E, hac lege, vt duo anguli E, & B A C, minores sint duobus rectis. Oportet igitur inter rectas A B, A C, collocare rectam æqualem quidem rectæ D, cum altera vero illarum, nimirum cum A C facientem angulum æqualem angulo dato E. a *Fiat angulus C A F, æqualis angulo E, & producta F A, ad G,* b *sit A G, æqualis rectæ D; & per G,* c *ducatur G B, parallela ipsi A C, secans A B, in B: Deinde per B, ducatur B C, parallela ipsi A G, secans A C, in C. Dico rectam B C, collocatam inter rectas A B, A C, æqualem esse rectæ D, angulumq; B C A, angulo E. Cum enim parallelogrammum sit per constructionem, A C B G,* d *erit recta B C, rectæ G A, æqualis: At G A, æqualis est, per constructionem, rectæ D. Igitur & B C, rectæ D, æqualis erit. Rursus* e *quia angulus B C A, angulo alterno C A F, æqualis est; & ei dem angulo C A F, æqualis est, per constructionem, angulus E; erunt anguli E, & B C A, æquales. Quod est propositum. Cæterum ex constructione manifestum esse cuilibet potest, cur duo anguli dati minores esse debeant duobus rectis. Nam alias non fieret triangulum A B C, si anguli B A C, & B C A, æquales essent duobus rectis, vel maiores, vt constat ex propos. 17. vel 32.*

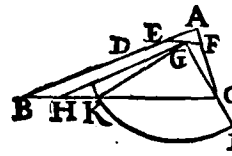


a 23. primi.
b 3. pri.
c 31. pri.
d 34. primi.
e 29. primi.
f 20. primi.

SCHOLIVM.

NON alienum erit à nostro instituto, adiicere quædam hoc loco ad lineas circa triangulum constitutas pertinentia, quæ à Pappo Alexandrino lib. 3. Mathematicarum collectionū demonstrantur: quemadmodum facturos nos recepimus ad propos. 21. Primum igitur in omni triangulo, quod non sit æquilaterum, vel Isosceles habens basim vtrouis latere minorem, non solum à duobus punctis basis constitui possunt duæ rectæ intra triangulum, quæ simul sumptæ maiores sint duobus lateribus simul sumptis, vt à Proclo in triangulis rectangulis, vel obtusangulis ostensum est ad propos. 21. sed etiam æquales.

SIT enim primum triangulum A B C, habens latus A B, latere A C, maius, sitq; B D, dimidium vtriusque lateris A B, A C, simul: Sumpto autem inter A, D, puncto E, vtcunq;, agatur E F, ipsi B C, parallela; & ex quouis puncto G, lateri A B, parallela ducatur G H, rectaq; iungatur G C. Et quoniam E A, A F, maiores sunt, quam E F: item C F, F G, maiores, quam G C: erunt E A, A C, F G, simul maiores, quam E F, G C, simul: ablataq; communi F G, erunt E A, A C,



ſimul maiores, quam E G, G C, ſimul: ac proinde multo maiores, quam G C, ſola. Producatur ergo G C, fiatq; G I, ipſis E A, A C, ſimul æqualis. Quia verò B E, maior eſt, quam vtraque E A, A C, ſimul, quod B E, ſuperet B D, dimidium vtriuſque B A, A C, ſimul, at E A, A C, ſimul deficiant à dimidio earundem, nimirum ab vtraque D A, A C, ſimul: erit quoque B E, maior, quam G I, quæ ipſis E A, A C, ſimul
a 34. pri mi. *eſt æqualis. Cum igitur* a *ipſi B E, æqualis ſit G H, in parallelogrammo B E G H: erit quoque G H, maior, quam G I. Si igitur centro G, & interuallo G I, circulus deſcribatur, ſecabit is rectam G H, ac propterea & ipſam C H, prius ſecabit in K. Connectatur G K. Dico vtramque G H, G K, ſimul æqualem eſſe vtrique A B, A C, ſimul. Id quod ex conſtructione perſpicuum eſt. Nam G H, ipſi B E, æqualis eſt, & G I, hoc eſt, G K, ipſis E A, A C, ſimul. Atque hoc infinitis modis fieri poteſt, prout punctum E, remotius à D, ſumptum fuerit, & punctum G, à puncto E: hoc eſt, prout tam A D, quam E F, infinitis in punctis ſecari poteſt.*



SIT deinde iſoſceles A B C, habens baſim B C, vtrouis latere maiorem. Deſcripto ex centro B, per A, arcu A D, ſecante rectam B C, in D, ducatur vtcunque recta B F, ſecans arcum in E, & latus A C, in F: & in E F, per quoduis punctum G, ipſi B C, parallela agatur G H, & per quodcunque eius punctum I, ipſi B F, parallela ducatur I K, rectæq; ſungatur I C: atque ipſi E G: æqualis abſcindatur A L. Erit igitur
b 34. pri mi. *B G, ipſis A B, A L, ſimul æqualis, at L C, minor quam B E, ſiue A B, & ob id multo minor, quam B G. Et quia ipſi B G,* b *æqualis eſt I K, in parallelogrammo B G I K: erit quoque I K, ipſis A B, A L, ſimul*
c 20. pri mi. *æqualis, maior autem, quam L C. Itaque* c *quia G F, F H, maiores ſunt, quam G H: & H C, H I, maiores, quam I C: erunt G F, F C, H I, ſimul maiores, quam G H, I C: & ablata communi H I, erunt reliqua G F, F C, ſimul maiores, quam G I, I C, ſimul: ac proinde appoſita communi B G, fient B F, F C, ſimul maiores, quam B G, G I, I C, ſi-*
d 20. pri mi. *mul. Sed ipſis B F, F C,* d *maiores ſunt B A, A C, ſimul. Ergo multo maiores erunt B A, A C, ſimul, quam B G, G I, I C, ſimul. Cum ergo B G, ipſis B A, A L, ſimul æqualis ſit, erit reliqua L C, maior, quam reliqua G I, I C, ſimul, ac proinde multo maior, quam I C, ſola. Ponatur I M, (producta I C) ipſi L C, æqualis. Et quia I K, oſtenſa eſt maior, quam L C, hoc eſt, quam I M: ſi ex centro I, per M, arcus circuli deſcribatur, ſecabit is rectam I K, ac proinde prius ipſam C K, ſecabit in N. Connectatur I N. Dico vtramque I K, I N, ſimul æqualem eſſe*

lem esse vtrique AB, AC, simul. Id quod ex constructione patet. Est namque IK, ipsis AB, AL, simul aequalis, & IN, hoc est, IM, ipsi LC, aequalis. Atque hoc infinitis modis fieri potest: cum BF, infinitis modis duci possit: & tam EF, quam GH, infinitis modis secatis.

CONSTAT autem, si intra idem triangulum ABC, ducantur duae rectae, quae rectas HG, GK, in priori triangulo, vel rectas KI, IN, in posteriori includant, eas maiores fore simul sumptas lateribus AB, AC, simul sumptis: quippe quae maiores forent rectis HG, GK, in priori triangulo, vel rectis KI, IN, in posteriori. a 21. primi.

AT verò in triangulo aequilatero, vel Isoscele habente basim vtrouis latere minorem, non posse intus constitui duas lineas maiores, vel aequales simul sumptas duobus lateribus simul sumptis, sed quascunque interiores esse minores, ita ostendi potest. In triangulo enim ABC, cuius duo latera AB, AC, aequalia, & basis BC, non maior, sed vel aequalis, vel minor; ita vt angulus A, maior non sit, quam angulus B, vel C, b sed vel aequalis, vel minor: constituantur duae rectae DE, EF, vtcunque, quas dico minores esse simul sumptas duobus lateribus AB, AC, simul sumptis. Producatur enim DE, secans latus AC, in G, iungaturque recta GB. Quoniam igitur c duo anguli ABC, & C, aequales sunt, est quidem ABC, maior angulo GBC, erit quoque C, maior angulo GBC. Est d autem & angulus GDB, angulo C, maior, externus interno. Igitur multo maior erit angulus GDB, angulo GBC; e ac proinde latus GB, latere GD, maius erit. Quia vero f angulus BGA, maior est angulo C, externus interno; angulo quidem C, vel aequalis est angulo A, vel maior, vt ostendimus: erit quoque angulus BGA, angulo A, maior. Quare g, latus AB, latere GB, maius erit: Sed recta GB, ostensa est maior, quam GD, ac proinde multo maior, quam DE. Igitur latus AB, multo etiam maius erit, quam DE. Eadem ratione, si FE, producatur secans AC, in H, iungatur quoque recta HB, ostendemus latus AB, ac proinde & AC, maius esse, quam FE. Quocirca latera AB, AC, simul maiora sunt duabus rectis DE, EF, simul sumptis. Quod si FE, producta secaret latus AB, demonstraremus eodem modo, latus AC, maius esse recta EF.



b 5. vel 18. pri.

c 5. pri.

d 16. primi.

e 19. primi.

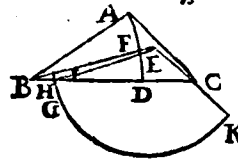
f 16. primi.

g 19. primi.

IAM verò, si admirabile videatur iis, qui Geometria ignari sunt, in illis, quae diximus, triangulis duci posse lineas interiores, quae simul sumptae maiores sint, vel aequales duobus lateribus simul sumptis; admirabilius sane erit, intra eadem illa triangula constitui posse duas lineas, quarum singula singulis lateribus maiores sint, vel aequales. Sunt ergo primum constituenda singula linea singulis lateribus maiores in triangulo ABC, cuius latus AB, minus non sit latere AC, aut latus BC, vtrouis latere AB, AC, maius. Describatur ex centro B, ar-

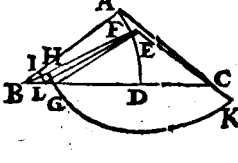
cu circuli A D, ſumatur quoduis punctum E, inter arcum A D, & latus A C, ducaturq; recta B E, ſecans arcum in F; ita vt B E, maior ſit, quam B F, hoc eſt, quam B A, iungaturq; E C. Quia vero a B E, E C, ſimul minores ſunt, quam A B, A C, ſimul, eſtque B E, maior, quam A B, erit E C, multo minor, quam A C. Producta igitur E C, fiat E K, ipſi A C, aequalis, ac propterea minor, quam E B; deſcribaturque

a 21. primi.



b ex E, per K, arcus circuli, qui rectam E B, ſecabit, ac proinde & ipſam C B, prius ſecabit in G. Sumpto denique inter B, & G, quouis puncto H, iungatur recta E H, ſecans arcum in I: factumque erit, quod proponitur. Nam B E, maior eſt, quam B A, & E H, maior, quam E I, hoc eſt, quam E K, vel A C.

DEIN DE ſint ſingula linea ſingulis lateribus aequales conſtituenda intra idem triangulum: fiat q; eadem conſtructio, demptis linea E H, ſed arcus K G, ſecet rectam E B, in H. Et latus B A, latere A C, ponatur maius, eritq; B E, recta maior, quam A B, cum maior ſit, quam B F, quae aequalis eſt ipſi A B. Sumpta igitur E I, aequalis ipſi A B, cadet punctum I, inter B, & H; quandoquidem E B, maior eſt, quam A B, & E H, minor, quam A B. Ex E, per I, deſcribatur arcus circuli ſecans B C, in L, iunganturque rectae E L, E G: factumque erit, quod propoſitum. Nam E L, ipſi E I, hoc eſt, ipſi A B, aequalis eſt, & E G, ipſi E K, hoc eſt, ipſi A C.



PRÆTER haec demonſtrat Pappus, intra eadem, quae diximus, triangula conſtitui poſſe duas rectas duobus lateribus maiores, & quae habeant ad eadem latera proportionem datam, qua tamen dupla proportione minor ſit: quod incredibile cuipiam videri poſſit. Quae res hoc loco demonſtrari non poteſt, cum ex proportionibus pendeat.

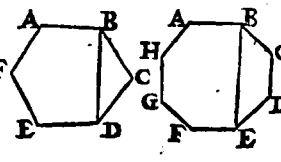
EX PROCLO.

IN omni figura rectilinea latera habente numero paria, ſi quidem fuerit aequilatera, & aequiangula: erunt duo quaelibet latera oppoſita, parallela inter ſeſe.

LATERA oppoſita dicuntur illa duo, quae ex vtraq; parte latera habent aequalia numero: vt in hexagono A B C D E F, latera oppoſita erunt A B, E D: quoniam tam ad partes A, & E, duo ſunt latera, quam ad partes B, & D. In octogono vero A B C D E F G H, latera oppoſita erunt A B, F E, quia tam ad partes A, & F, tria ſunt latera, quam ad partes B, & E. Et ſic in aliis figuris aequilaterum parium

laterum

laterum, ex vtraque parte oppoſitorum laterum erunt tot latera, quot ſunt in dimidio numero laterum, minus vno. Vt in quadrangulo erit vnum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor, in figura 12. laterum quinque, &c. Dico igitur qualibet latera oppoſita eſſe parallela; A B, nimirum ipſi E D, in hexagono; & A B, ipſi F E, in octogono, & ſic de cæteris. Connectantur enim duo extrema oppoſitorum laterum ad eaſdem partes linea recta, qualis eſt in hexagono B D, & in octogono B E. Et quoniam, vt ad 32. propoſ. demonſtrauimus, ſex anguli hexagoni æquales ſunt octo rectis, erunt tres anguli B, C, D, eiuſdem hexagoni æquales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur æquales;



Sunt autem anguli B C D, C B D, C D B, trianguli B C D, a duobus rectis æquales. Reliqui igitur anguli A B D, E D B, duobus rectis æquales erunt; Quare b parallela erunt A B, & E D. Rurſus a 32. primi. b 28. primi.

quia octo anguli octogoni æquales ſunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B, C, D, E, ſex rectis æquales: Sunt autem quatuor anguli quadrilateri B C D E, æquales quatuor rectis. Igitur duo reliqui anguli A B E, F E B, duobus erunt rectis æquales, c atque adeo A B, F E, parallela erunt. Eodem modo demonſtrabitur, in omnibus aliis figuris huiuſmodi, angulos duos ad lineam rectam extrema oppoſitorum laterum coniungentem exiſtentes, duobus eſſe rectis æquales. Nam in decagono aufert ea linea pentagonum, cuius anguli æquales ſunt ſex rectis: At quinque anguli decagoni æquales ſunt octo rectis. Ablatis igitur ſex, relinquuntur duo recti. In figura æquilatera, & æquiangula duodecim laterum eadem linea abſcindet hexagonum, cuius anguli ſunt octo rectis æquales: At ſex anguli totius figuræ æquales ſunt decem rectis. Demptis igitur octo, remanent duo recti, &c. c 28. primi.

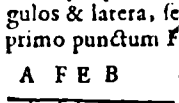
QVAMVIS autem omnis figura æquiangula parium laterum habeat latera oppoſita parallela, vt oſtendimus; tamen ſola quadrilatera figura latera oppoſita habens parallela, ab Euclide, & aliis Geometris parallelogrammum dici conſueuit, propterea, q; in definitionibus, Parallelogrammum diximus eſſe figuram quadrilateram, &c.

THEOR. 25. PROPOS. 35. XXXV.

PARALLELOGRAMMA ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

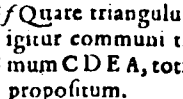
INTER duas parallelas A B, C D, ſuper baſi C D, exiſtant duo parallelogramma C D E A, C D B F. Dicuntur autem paral-

lelogramma in eiſdem eſſe parallelis, quando duo latera oppoſita partes ſunt parallelarum, vt in exemplo propoſito cernitur) Dico ipſa parallelogramma inter ſe eſſe æqualia, non quoad angulos & latera, ſed quoad aream, ſeu capacitatem. Cadat enim primo punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in parallelogrammo C D E A, recta A E, *a* æqualis eſt rectæ C D, oppoſitæ; & eidem C D, æqualis eſt F B, in parallelogrammo C D B F, oppoſita; Erunt A E, *b* F B, inter ſe æquales. Dempta igitur communi F E, *c* remanebit A F, ipſi E B, æqualis: *d* Eſt autem & A C, ipſi E D, oppoſitæ æqualis in parallelogrammo C D E A; *e* & angulus B E D, angulo F A C, externus interno. *f* Quare triangulum F A C, triangulo B E D, æquale erit. Addito igitur communi trapezio C D E F, *g* fiet totum parallelogrammum C D E A, toti parallelogrammo C D B F, æquale. Quod eſt propoſitum.



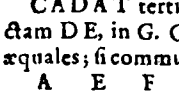
a 34. *primi.*
b 1. *pro. nun.*
c 3. *pro. nun.*
d 34. *primi.*
e 29. *primi.*
f 4. *pri.*
g 2. *pro. nun.*

CADAT ſecundo punctum F, in punctum E. Dico rurſus, parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia eſſe. Erunt enim, vt prius, rectæ A E, E B, æquales, nec non & anguli B E D, E A C; atque adeo *h* triangula, E A C, B E D, æqualia. Addito igitur communi triangulo C D E, *i* fient parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia.



h 4. *pri.*
i 2. *pro. nun.*

CADAT tertio punctum F, vltra E, ita vt recta C F, ſecet rectam D E, in G. Quoniam igitur, vt prius, rectæ A E, F B, ſunt æquales; ſi communis addatur E F; erit tota A F, toti E B, æqualis, nec non & anguli B E D, F A C, æquales erunt; atq; adeo *l* triangulum F A C, triangulo B E D, æquale. Ablato ergo communi triangulo E G F, *m* remanebit trapezium A E G C, trapezio F G D B, æquale. Quocirca addito communi triangulo C D G, fiet totum parallelogrammũ C D E A, toti parallelogrammo C D B F, æquale. Parallelogramma igitur ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. Quod erat demonſtrandum.



k 2. *pro. nun.*
l 4. *pri.*
m 3. *pro nun.*

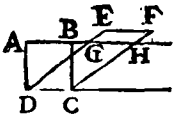
SCHOLIVM.

CONVERTEMVS facile hanc propoſitionem, hoc modo.

Parallelogramma æqualia ſuper eandem baſin, ad eaſdemq; partes cõſtituta, erunt inter eaſdem parallelas.

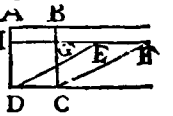
SINT duo parallelogramma æqualia A B C D, C D E F, ſuper eandem baſin C D, & ad eaſdem partes. Dico rectam A B, productam in directum iacere ipſi E F, & propterea ipſa parallelogramma inter

inter eaſdem eſſe parallelas. Aliàs enim AB, producta vel cadet infra EF, vel ſupra. Cadat primò infra, qualis eſt AH. Erit igitur parallelogrammum CDGH, a æquale parallelogrammo ABCD; Ponitur autem eidem parallelogrammo ABCD, æquale parallelogrammũ CDEF. Quare parallelogramma CDEF, CDGH, æqualia erunt, totum & pars, quod eſt abſurdum. Non ergo cadet AB infra EF.



a 35. primi.

CADAT ſecundò AB, producta ſupra EF. Cadet igitur FE, protracta infra AB. Quare, vt prius, erunt parallelogramma ABCD, CDHG, æqualia, totum & pars, quod eſt abſurdum. Idem abſurdum conſequeretur, ſi CF, DE, producerentur vſque ad AB, protractã. Eademq; demonſtratio conuenit omnibus caſibus, qui occurrere poſſunt, hoc eſt, ſiue punctum E, ſit vltra B, ſiue non, vt perſpicuum eſt. Non ergo cadet AB, ſupra EF; ſed nec infra, vt demonſtratum eſt; ergo producta in directum tacet ipſi EF; ac proinde parallelogramma ABCD, CDEF, in eiſdem ſunt parallelis.



THEOR. 26. PROPOS. 36. xxxvj.

PARALLELOGRAMMA ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

SINT duo parallelogramma ACEF, GHDB, ſuper æquales baſes CE, HD, inter eaſdem parallelas AB, CD. Dico ea eſſe æqualia. Connectantur enim extrema rectarum CE, GB, ad eaſdem partes lineis rectis CG, EB. Quoniam igitur recta CE, æqualis ponitur rectæ HD, eidem HD, *b* æqualis eſt GB, in parallelogrammo GHDB, oppoſita; erunt CE, GB, *c* æquales inter ſe: Sunt autem & parallelæ, per hypotheſin. Quare & CG, EB, ipſas coniungentes, *d* parallelæ erunt, & æquales, ideoque CEBG, parallelogrammum erit. Itaque cùm parallelogramma ACEF, GCEB, ſint inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin CE, *e* erit parallelogrammum ACEF, parallelogrammo GCEB, æquale. Rurſus quia parallelogramma GCEB, GHDB, ſunt inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin GB, *f* erit quoque parallelogrammum GHDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare & parallelogramma ACEF, GHDB, *g* inter ſe æqualia erunt. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eildem parallelis conſtituta, &c. Quod oſtendendum erat.



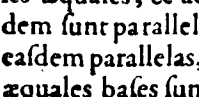
b 34. primi. c 1 prom. d 33 primi. e 35 primi. f 35. primi. g 1. primi.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis duplex eſt, ad hunc modum.

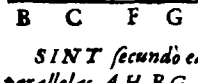
PARALLELOGRAMMA æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdem partes conſtituta, inter eaſdem ſunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſin, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta.

SINT primùm duo parallelogramma æqualia A B C D, E F G H, ſuper baſes æquales B C, F G, & ad eaſdem partes conſtituta. Dico ea eſſe inter eaſdem parallelas, hoc eſt, A D, protractam cotre in directum cum E H. Nam aliàs cadet aut infra E H, aut ſupra. Quo poſito



ſequitur, totũ & partem eſſe æqualia, quemadmodum in converſa præcedentis propoſitionis eſt dictum, & figura facilè commonſtrat. Intelligenda ſunt autem baſes æquales data in eadem linea recta B G.

SINT ſecundò eadem parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas A H, B G. Dico baſes B C, F G, eſſe æquales. Si enim altera, nempe B C, dicatur maior, a abſcindatur B I, æqualis rectæ F G, a 3. pri. b 31. pri.



& b ducatur I K, parallela ipſi C D. Erit ergo parallelogrammum A B I K, c æquale parallelogrammo E F G H; & ideo parallelogrammo A B C D, pars toti, quod eſt abſurdum. Non ergo B C, maior eſt, quàm F G. Eadem ratione neque minor erit. Quare baſes B C, F G, æquales ſunt. c 36. pri.

SEQVENS quoq; theorema facilè hinc demonſtrabitur.

SI duo parallelogramma inter eaſdem parallelas habeant baſes inæquales, illud, cuius baſis maior eſt, maius erit. Et contrà, ſi duo parallelogramma ſint inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis maioris maior erit.

SINT enim in poſteriori figura parallelogramma B D, F H, inter parallelas A H, B G, ſitq; baſis B C, maior baſe F G. Dico parallelogrammum B D, parallelogrammo F H, maius eſſe. d *Auferatur enim recta B I, ipſi F G, æqualis,* e *ducaturq; I K, ipſi A B, parallela. Erunt ergo* f *parallelogramma B K, F H, ſupra æquales baſes B I, F G, æqualia. Cùm igitur B D,* g *maius ſit, quàm B K, erit idem B D, maius, quàm F H.* d 3. pri. e 31. pri. f 36. pri. g 9. prænun.

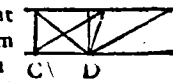
SINT rurſum parallelogramma B D, F H, inæqualia, & B D, maius. Dico baſin B C, maiorem eſſe baſe F G. Nam ſi foret æqualis, h 34. pri. *eſſent parallelogramma æqualia, quod eſt abſurdum, cùm B D, ponatur*

natur maius. Si autem esset minor, foret parallelogrammum F H, maius, quàm B D, vt proximè ostendimus. quod multo magis est absurdum, cùm B D, maius ponatur, quam F H. Basis ergo B C, cùm neque æqualis sit ipsi F G, neque minor, erit maior, quàm F G, quod est propositum.

THEOR. 27. PROPOS. 37. xxxvij.

TRIANGVLA super eadem basi constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

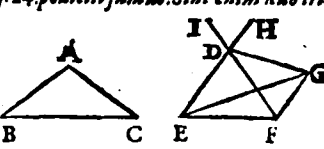
INTER parallelas A B, C D, & super basin C D, sint constituta duo triangula A C D, B C D. (Dicitur autem triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quando basis est pars vnius, & angulus oppositus alteram attingit.) Dico ea triangula esse æqualia. Per D, enim *a* ducatur D E, parallela rectæ A C, & D F, parallela rectæ B C. *b* Erunt igitur parallelogramma A C D E, B C D F, æqualia. Sunt enim super eandem basin C D, & inter easdem parallelas. Sed horum dimidia sunt triangula A C D, B C D; *c* quod A D, B D, diametri bifariam secent parallelogramma A C D E, B C D F. Igitur & triangula A C D, B C D, *d* æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.



a 31. pri.
b 35 pri.
c 34. primi.
d 7. prop. 1. huius.

SCHOLIVM.

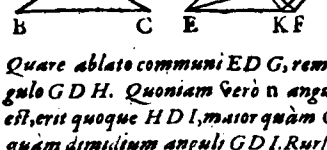
CONVERSA huius propositionis demonstrabitur ab Euclide prop. 39. Porrò ex hac propositione facilè cum Proclo demonstrabimus: Triangula, quorum duo latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus vnius illis lateribus contentus maior angulo alterius, aliquando esse æqualia, & aliquando inæqualia: Id quod ad prop. 24. pollicitis fuimus. Sunt enim duo triangula A B C, D E F, & latera A B, A C, æqualia lateribus D E, D F, & angulus A, maior angulo E D F, sint q primum bi duo anguli duobus rectis æquales. Dico triangula esse æqualia. c *Producatur enim E D, ad H, & F D, ad I; fiatq angulus E D G, æqualis angulo A, versus angulum acutum D F E. Nam semper alter angulorum D E F, D F E, acutus erit,* f *cùm ambo minores sint duobus rectis,* g *& recta D G, recta D F, seu A C; ducanturq recta E G, G F, cadet q semper E G, supra F, eb angulum acutum D F E, vt ad finem scholij prop. 24 ostendimus. Quoniam igitur duo anguli A, & E D F, ponuntur æquales duobus rectis, & angulus E D G, æqualis factus est angulo A; erunt & anguli E D G, E D F, duobus rectis æquales: Sunt autem & anguli E D G, G D H,*



c 23 pri.
f 17 pri.
g 3 pri.

duobus

a 13 pri. duobus a rectis æquales. Igitur anguli E D G, E D F, angulis E D G, G D H, æquales erunt. Quare ablato communi angulo E D G, b re-
b 3 pro. manebit angulo E D F, æqualis angulus G D H: Est autem eidem
nun. angulo E D F, c æqualis angulus H D I. Igitur & anguli G D H,
c 15 pri. H D I, æquales erunt; atque adeò angulus G D H, dimidium erit to-
ms. tius anguli G D I. Rursus quia latera D F, D G, sunt æqualia in
d 5. pri- triangulo D F G; d erunt anguli D F G, D G F, æquales; qui cùm
ms æquales e sint externo angulo G D I, erit vterlibet eorum, nempe
e 32 pri D G F, dimidium anguli G D I: Ostensum est autem, angulũ G D H,
ms. dimidium quoque esse eiusdem anguli G D I. f Quare anguli G D H,
f 7 pro- D G F, æquales erunt. Et quia sunt alterni inter E H, F G; g erunt
nun. E H, F G, parallelæ. Quamobrem h triangula D E G, D E F, æqua-
g 27. pri lia erunt, cùm habeant eandem basin D E, sintq; inter easdem pa-
ms. rallelas D E, F G. Quoniam verò triangulum D E G, i æquale est
h 37. pri triangulo A B C, propterea quòd latera D E, D G, æqualia sunt late-
ms. ribus A B, A C, & angulo A, æqualis angulus E D G; erit & triangu-
i 4. pri- lum A B C, triangulo D E F, æquale, quod est propositum.
ms. SINT deinde anguli A, & E D F, duobus rectis maiores. Dico triangulum A B C, quod maiorem habet angulum, minus esse trian-
k 23. pri gulo D E F. Producatur enim E D, ad H, & F D, ad I; k fiatq; an-
ms. gulus E D G, æqualis angulo A, l & recta D G, rectæ D F, seu A C,
l 3. pri- æqualis, ducanturq; rectæ E G, G F. Quoniam igitur anguli A, &
ms. E D F, ponuntur maiores duobus rectis, erunt & anguli E D G, E D F,

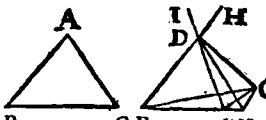


m 13. pri duobus rectis maiores: Sunt autem anguli E D G, G D H,
ms. n æquales duobus rectis. Igitur anguli E D G, E D F, maiores sunt angulis E D G, G D H. Quare ablato communi E D G, remanebit angulus E D F, maior an-
n 15 pri- gulo G D H. Quoniam verò n angulus E D F, angulo H D I, æqualis
ms. est, erit quoque H D I, maior quàm G D H; atque adeò G D H, minor, quàm dimidium anguli G D I. Rursus quia latera D G, D F, æqualia
o 5. pri. sunt: o erunt anguli D F G, D G F, æquales: qui cùm sint p æquales
ms. externo G D I, erit vterque eorum, nempe D G F, dimidium anguli
p 32. pri G D I: Ostensum est autem, angulum G D H, minorem esse dimidio
ms. eiusdem G D I. Quare D G F, maior erit, quàm G D H. Abscinda-
q 23. pri tur ex angulo D G F, angulus D G K, q æqualis angulo alterno G D H.
ms. Erit ergo G K, r parallela ipsi D E, secabitq; G K, rectam E F. Du-
r 27 pri catur ex D, ad K, vbi G K, secat rectam E F, recta D K. Erit igitur
ms. triangulum D E G, s æquale triangulo D E K. Quoniam autem
s 37. pri triangulum D E G, t æquale est triangulo A B C, propterea quòd
ms. latera D E, D G, æqualia sunt lateribus A B, A C, & angulo A,
t 4. pri. angulus E D G, æqualis; erit & triangulum A B C, triangulo D E K,
v 9. pron æquale. Cùm igitur D E K, u minus sit triangulo D E F; erit quo-

que

que *ABC*, triangulum triangulo *DEF*, minus. Quod est propositum.

SINT tertiò anguli *A*, & *EDF*, duobus rectis minores. Dico triangulum *ABC*, quod maiorem habet angulum, minus esse triangulo *DEF*. Producatur *ED*, ad *H*, & *FD*, ad *I*; a fiatq; angulus *EDG*, aqualis angulo *A*, b & recta *DG*, recta *DE*, seu *AC*; ducaturq; recta *EG*, *FG*. Quoniam igitur anguli *A*, & *EDF*, ponuntur minores duobus rectis, erunt quoque anguli *EDG*, *EDF*, duobus rectis minores. Sunt autem anguli c *EDG*, *GDH*, duobus rectis aquales. Igitur *EDG*, *EDF*, c minores sunt, quàm *EDG*, *GDH*; demptoq; communi *EDG*, remanebit *EDF*, minor, quàm *GDH*. Est autem *EDF*, d aqualis ipsi *HDI*. Quare & *HDI*, minor erit, quàm *GDH*; atque adeò *GDH*, maior est dimidio anguli *GDI*. Quoniam autem *DGF*, dimidium est eiusdem anguli *GDI*, & iam suprà ostensum fuit; erit *GDH* maior, quàm *DGF*. Fiat igitur angulus *DGK*, e aqualis angulo *GDH*, ducta recta *GK*, qua secabit rectam *EF*, protractam in *K*; & ducatur recta *DK*. Erit ergo, & prius, *GK*, f parallela ipsi *DE*; g triangulumq; *DEG*, triangulo *DEK*, aquale: Est autem iterum *DEG*, h aquale ipsi *ABC*. Igitur & *ABC*, aquale est ipsi *DEK*. Quocirca cùm *DEK*, i minus sit, quàm *DEF*; erit & *ABC*, minus, quàm *DEF*. Quod demonstrandum erat.



a 23. pri.
b 3. 1. ri.
c 13. pri.
d 15. pri.
e 23. pri
f 27. pri.
g 37. pri
mi.
h 4. pri.
i 9. prom.

Ex his perspicuum est, cur Euclides in propos. 24. solum collegerit inaqualitatem basium, non autem triangulorum, & ibidem admonuimus.

THEOR. 28. PROPOS. 38. 38.

TRIANGVLA super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

INTER parallelas *AB*, *CD*, & super æquales bases *CE*, *FD*, sint constituta triangula *ACE*, *BFD*. Dico ipsa esse æqualia. k Ducatur enim *EG*, parallela ipsi *AC*, & *DH*, ipsi *BF*: Eruntque l parallelogramma *ACEG*, *BFDH*, æqualia. Cùm igitur horum m dimidia sint triangula *ACE*, *BED*; n erunt hæc inter se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum.

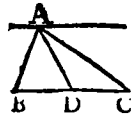


k 31. pri.
l 36. pri.
m 34. primi.
n 7. prænun.

SCHOLIVM.

CONVERSA huius ostendetur ab Euclide propos. 40.

COLLIGITVR autem ex hac propositione, si a quouis angulo trianguli dati linea recta ducatur dimidens latus oppositum bifariam,



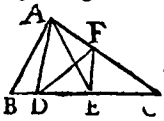
riam, triangulum quoque bifariam secari. Ducatur enim in triangulo A B C, ex angulo A, recta A D, diuidens bifariam latus B C, in D. Dico triangulum A B C, bifariam quoque secari. Si enim per A, ducatur parallela ipsi B C, erunt duo triangula A B D,

a38.pri. *A D C, inter easdem parallelas, & super aequales bases.* a *Quare aequalia erunt.*

EX PELETARIO.

A puncto quouis dato in vno latere trianguli propositi lineam rectam ducere, quæ bifariam secet triangulum datum.

SIT triangulum A B C, & punctum datum D, in latere B C. Oportet igitur ex D, rectam lineam ducere, quæ bifariam diuidat triangulum. Quod si punctũ D, diuidat latus B C, bifariam, recta D A, ducta ad A, diuidet triangulum bifariam, vt in hoc scholio est ostensum: Si verò D, non diuidit B C, bifariam, b *secetur B C, bifariam in E. Deinde ex D, ad angulum oppositum*

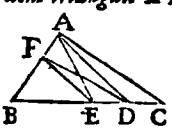


b10.pri.

c31.pri. *A, ducatur recta D A, & per E,* c *parallela E F, ipsi D A, secans A C, in F. Si igitur ducatur recta D F, erit triangulum diuisum bifa-*

d38.pri. *riam à linea D F. Nam ducta recta E A,* d *erunt triangula E F A, E F D, aequalia, cùm sint super eandem basin E F, & inter easdem parallelas E F, A D. Addito igitur communi C F E,* e *erunt tota tri-*

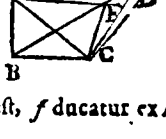
e2.pro-ximum. *angula A E C, C D F, equalia: Est autem A E C, dimidium totius A B C, vt iam fuit ostensum. Igitur & C D F, dimidium est eiusdem trianguli A B C. quod erat probandum.*



QVOD si punctum D, fuerit in altera medietate E C, eodem modo problema conficiemus: sed tunc triangulum abscindetur ad partes B, trapezium verò ad partes C, vt figura præsens satis indicat. Demonstratio autem eadem est. si tm ea mutetur litera B, in C, & C, in B. Hoc tamen problema multò nos vniuersalius proponemus ad finem sexti libri.

XXXIX. THEOR. 29. PROPOS. 39.

TRIANGVLA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.



SINT duo triangula æqualia A B C, D B C, super eandem basin B C, & ad easdem partes. Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta, hoc est, rectam ductam A D, parallelam esse ipsi B C. Si enim non

f31.pri. est, f ducatur ex A, parallela ipsi B C, quæ vel cadet supra A D,

vel

vel infra. Cadat primum supra, qualis est A E, coeatque cum B D, protracta in E, & ducatur recta E C. Quoniam igitur parallelæ sunt A E, B C; a erit triangulo A B C, triangulum E B C, æquale: Est autem per hypothesin, triangulum quoque D B C, æquale eidem triangulo A B C. Igitur b erunt triangula D B C, E B C, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A F; ducta recta F C, erunt eadem ratiocinatione triangula B F C, B D C, æqualia, pars & totū; quod est absurdū. Erit igitur A D, parallela ipsi B C. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat.

a 37. pri.

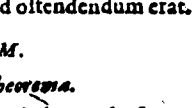
b 1. pre. num.

SCHOLIVM.

EX his infert Campanus sequens hoc theorema.

LINEA recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.

SECET linea D E, latera A B, A C, trianguli A B C, bifariam in D, & E. Dico D E, parallelam esse lateri B C. Cùm enim triangula A D E, B D E, sint super æquales bases A D, D B, & inter easdem parallelas; (si per E, ducatur parallela ipsi A B) c erit triangulum B D E, triangulo A D E, æquale: Eadem ratione erit triangulum C E D, eidem triangulo A D E, æquale. Quod etiam constat ex scholio precedentis propos. Recta enim E D, secabit triangulum A E B, bifariam, & recta eadem D E, triangulum A D C, bifariam etiam, quod bases A B, A C, sectæ sint bifariam à recta D E, ex hypothesi. Igitur triangula D B E, E C D, d æqualia erunt: Habent autem eandem basin D E, & sunt ad easdem partes constituta. Quare e inter easdem erunt parallelas, & idcirco D E, B C, parallela erunt. Quod est propositum.



c 38. pri.

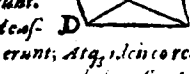
d 1. pre. num.

e 39. pri mi.

ID autem, quod ad finem secundi theorematis in scholio propos. 34. pollicitis sumus, facilè ex hac propos. demonstrabimus. Videlicet.

OMNE quadrilaterum, quod ab vtraq; diametro bifariam diuiditur, parallelogrammum est.

NAM quadrilaterum A B C D, diuidatur bifariam ab vtraque diametro A C, B D. Dico ipsum esse parallelogrammum. Cùm enim triangula A D C, B D C, diuidia sint eiusdē quadrilateri A B C D, f ipsa inter se æqualia erunt. Quare cùm eandem habeant basin D C, adeasdemq; partes sint, g ipsa in eisdem parallelis erunt; Atq; idcirco recta A B, D C, parallela sunt. Non aliter ostendemus, parallelas esse A D, B C. Parallelogrammum igitur est A B C D, Quod est propositum.



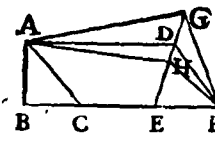
f 7. prem.

g 39. pri mi.

THEOR.

1 xl. THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGVLA æqualia ſuper æqualibus baſibus, & ad eaſdem partes conſtituta, & in eiſdem ſunt parallelis.



SINT duo triangula æqualia A B C, D E F, ſuper baſes æquales B C, E F (quæ in eadem recta linea collocentur) & ad eaſdem partes conſtituta. Dico ea eſſe in eiſdem parallelis, hoc eſt, rectam ex A, ad D, ductam parallelam eſſe rectæ B F. Si enim non eſt, cadet parallela ipſi B F, per A, ducta, vel ſupra A D, vel infra. Cadat primum ſupra, coeatq; cum E D, producta in G, & ducatur recta G F. Quoniam igitur parallelæ ſunt A G, B F, a erit triangulum E F G, triangulo A B C, æquale: Ponitur autem & triangulum D E F, eidem triangulo A B C, æquale. Igitur b trianguła D E F, G E F, æqualia erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Quod ſi parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis eſt A H; ducta recta H F, erunt eadem argumentatione triangula H E F, D E F, æqualia, pars & totum, quod eſt abſurdum. Eſt igitur A D, parallela ipſi B F. Quare triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 38. pri.

b 1. pro æun.

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio conuertitur uno modo propoſ. 38. Alio autem modo conuerti poteſt, quemadmodum propoſ. 36. conuertimus in eius ſcholio, nimirum.

TRIANGVLA æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſin, ſuper æquales baſes erunt conſtituta.

SINT triangula æqualia A B C, D E F, inter parallelas A D, B F, & ſuper baſes B C, E F, quas dico eſſe æquales. Si enim non ſunt



æquales, ſit B C, maior. c Abſciſſa ergo recta C G, æquali ipſi E F, & ducta recta G A; d erit triangulum A G C, triangulo D E F, æquale: Ponitur autem & triangulum A B C, eidem triangulo D E F, æquale: igitur triangula A G C, A B C, e æqualia erunt, pars & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt baſes B C, E F, ſed æquales. Quod eſt propoſitum.

c 3. pri.

d 38 pri.

e 1. pron.

SEQVENS etiam theorema facili negotio demonſtrabitur.

SI duo triangula inter eaſdem parallelas habeant baſes

baſes inæquales, illud, cuius baſis maior eſt, maius erit. Et contrà, ſi duo triangula ſint inæqualia inter eaſdem parallelas, baſis maioris maior erit.

SINT enim in proxima figura inter parallelas AD, BF, triangula ABC, DEF, ſitq; baſis BC, baſe EF, maior. Dico triangulum ABC, maius eſſe triangulo DEF. Ablata enim recta CG, a aequali ipſi EF, ductaq; recta AG; b *erunt triangula AGC, DEF, ſuper aequales baſes GC, EF, aequalia. Cùm ergo* c *triangulum ABC, triangulo AGC, maius ſit; erit idem triangulum ABC, maius quàm DEF.*

a 3. pri.
b 38. pri.
c 9. prenum.

SINT rurſus triangula ABC, DEF, inaqualia, & ABC, maius. Dico baſin BC, baſe EF, maiorem eſſe. Si enim dicatur aequalis, d *erit triangulum ABC, triangulo DEF, aquale, quod eſt abſurdum; cùm maius ponatur. Si verò credatur eſſe minor, erit triangulum DEF, maius triangulo ABC, vt proximè oſtendimus, quod multò magis eſt abſurdum, cùm ABC, ponatur maius, quàm DEF. Recta igitur BC, maior erit, quàm EF, cùm neque aqualis ſit oſtenſa, neq; minor. Quod eſt propoſitum.*

d 38. pri.

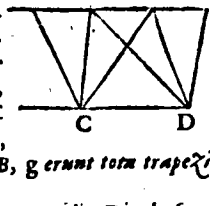
QVÆ porrò hactenus de parallelogrammis, triangulisq; inter eaſdem parallelas conſtitutis demonſtrata ſunt, facilè quoq; demonſtrari poſſunt de trapezijs inter eaſdem parallelas deſcriptis, eodem fermè ordine, hoc modo.

I.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes inter ſe æquales ſint, ſunt inter ſe æqualia: Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas æquales.

DICVNTVR trapezia in eiſdem eſſe parallelis, quando latera duo oppoſita parallela ſunt, partesq; ſunt earundem parallelarum.

INTER parallelas igitur AB, CD, ſuper eadem baſi CD, conſtituta ſint duo trapezia, ACDE, FCDB, quorum baſes oppoſitæ AE, FB, aquales ſint. Dico ipſa inter ſe eſſe aqualia. Ductis enim rectis EC, FD, c *erunt tam triangula ECD, FCD, ſuper eadem baſi CD, & in eiſdem parallelis, inter ſe aqualia,* f *quàm triangula ACE, FDB, ſuper aqualibus baſibus AE, FB, & in eiſdem parallelis. Si igitur aqualibus ECD, FCD, addantur aqualia ACE, FDB,* g *erunt tota trapezia ACDE, FCDB, inter ſe aqualia.*



c 37. primi.
f 38. pri.
g 2. prenum.

SINT iam trapezia ACDE, FCDB, aqualia. Dico baſes oppoſitas

a37.pri. positas AE, FB, æquales quoque esse. Erunt enim rursus a triangula
mi. ECD, FCD, æqualia. Si igitur ex trapezijs æqualibus auferantur,
b3.pre- b æqualia erunt reliqua triangula ACE, FDB. Quare, vt in hoc
mun. scholio ostendimus, bases AE, FB, æquales erunt.

II.

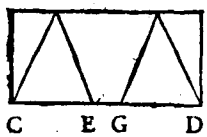
TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum oppositæ bases sint inæquales, inæqualia sunt, maiusq; est illud, cuius basis maior est; Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas inæquales, maiorque est illa, cuius trapezium maius est.

VT in eadem figura, si basis AE, dicatur esse maior base FB; Di-
c37.pri. *co trapezium ACDE, maius esse trapezio FCDB.* c *Erunt enim*
mi. *rursus triangula ECD, FCD, æqualia: At triangulum ACE, tri-*
d4.pre. *angulo FDB, maius, vt in hoc scholio demonstrauimus.* d *Totum er-*
mun. *go trapezium ACDE, toto trapezio FCDB, maius erit.*

RVRSVS si trapezium ACDE, dicatur esse maius trapezio
e37.pri. *FCDB; Dico basin AE, base FB, maiorem esse.* e *Erunt enim rur-*
sus triangula ECD, FCD, æqualia. Quare reliquum triangulum
f5.pron. *ACE, reliquo triangulo FDB,* f *maius erit: ac proinde, vt in hoc*
scholio ostensum est, basis AE, maior erit base FB. Quod ostendendum
erat.

III.

TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorum oppositæ bases sint æquales, æqualia sunt: Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent bases oppositas æquales.



INTER parallelas AB, CD, super æquales bases CE, GD, constituta sint duo tra-
pezia ACEF, HGDB, quorum bases oppo-
sitæ AF, HB, æquales quoq; sint: Dico ip-
sa trapezia æqualia esse. Ductis enim rectis FC,
g38.pri. *HD,* g *erunt tam triangula FCE, HGD,*
super æquales bases CE, GD, quam ACF,
h2.pre- *BDH, super æquales bases AF, BH, inter se æqualia.* h *Tota ergo*
mun. *trapezia æqualia erunt.*

SINT iam trapezia ACEF, HGDB, æqualia super bases æ-
quales CE, GD. Dico bases oppositas AF, BH, æquales quoque esse.
i38.pri. i *Erunt namque rursus triangula FCE, HGD, super æquales ba-*

ses

sit CF, GD, aqualia: quibus ablatis ex trapezijs aqualibus, reliqua triangula ACF, BDH, a aqualia erunt; ac proinde, & paulo ante in hoc scholio ostendimus, bases AF, BH, aquales erunt. a 3. prænum.

IV.

TRAPEZIA in eisdem parallelis, & superæqualibus basibus, quorum oppositæ bases sint inæquales, inæqualia sunt, maiusq; est illud, cuius basis maior est: Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & superæqualibus basibus, habent oppositas bases inæquales, maiorq; est illa, cuius trapezium maius est.

VT in eadem figura, si basis AF, dicatur esse maior base HB, erit trapezium ACEF, trapezio HGDB, maius. b *Erunt enim rursum triangula FCE, HGD, super aquales basis CE, GD, aqualia AC triangulum ACF, maiori triangulo BDH, & suprà ostensum est, quod basis AF, maior ponatur basi BH.* c *Totum ergo trapezium ACEF, toto trapezio HGDB, maius erit.* b 38. pri. c 4. prænum.

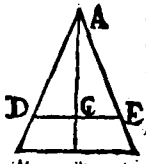
RVRSVS si trapezium ACEF, maius ponatur trapezio HGDB, erit basis AF, basi BH, maior. d *Erunt enim rursus triangula FCE, HGD, super aquales bases CE, GD, aqualia: quibus ablatis ex trapezijs inaqualibus, reliquum triangulum ACF, reliquo triangulo BDH,* e *maius erit; ac proinde, & in hoc scholio ostensum fuit, basis AF, basi BH, maior erit. Quod erat ostendendum.* d. 38 pri. e 5. prænum.

PORRO non videtur hic omittendum theorema sequens, per quod facili negotio lineam rectam quamcunque in quotuis partes aquales dividemus: quod nos in scholio propos. 10. huius lib. facturos hoc loco recepimus. Quamuis enim idem demonstrari possit, & quidem facilius, per proportiones linearum, & lib. 6. ostendemus; sucundum tamen est intelligere, nullo labore idem absolui posse per propositiones hactenus demonstratas, sine proportionum adiumento. Theorema ergo est huiusmodi.

SI in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo opposito ducta, diuidensq; alterutram parallelarum bifariam, diuidit quoque alteram bifariam.

IN triangulo ABC, aquidistet DE, ipsi BC, & recta AF, secet alterutram BC, DE, bifariam in F, vel G. Dico alteram quoque bifariam secari. Sint enim primum anguli ad F, recti. Quo posito, & anguli ad G, recti erunt. Si igitur BC diuiditur bifariam, f *diuidetur bifariam quoq; angulus A, per ea, quæ in scholio propos. 26. huius*

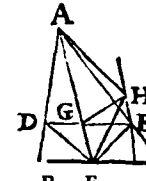
 f 29. pri.



huius lib. demonstrauimus; ac proinde recta AG, ad basin DE, trianguli ADE, perpendicularis, diuidensq; angulum A, bifariam, diuidet bifariam quoque basin DE, & ibidem ostendimus, quod est propositum.

SI verò DE, ponatur diuidi bifariam, diuidetur, per idem scholium propos. 26. huius lib. angulus quoq; A, bifariam; ac proinde recta AF, ad basin BC, perpendicularis, diuidensq; angulum A, bifariam, basin quoq; BC, bifariam secabit, quod est propositum.

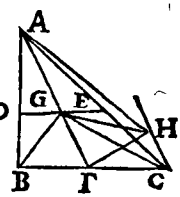
SINT deinde anguli ad F, non recti, sed AFC, obtusus, & AFB, acutus. Quo posito, erit & AGE, obtusus, & AGD, acutus,
a 29. pri. mi. a cùm hi illis sint aequales, externi internis. Si igitur BC, diuidatur bi-
b 23. pri mi. fariam, b constituatur acuto angulo AGD, aqualis angulus AGH, c & recta GH, recta GD,
c 3. primi. aequalis, ducanturq; rectæ AH, HF, FD, FE.
d 38. primi. Quia igitur tam triangula totæ ABF, ACF, ex scholio propos. 38. huius libri aequalia sunt, quam
e 3. prenun. d triangula ablata DBF, EGF, ob aequales bases BF, CF; e erunt quoq; reliqua triangula ADF, AEF, aequalia. Rursus quoniam duo latera AG, GD, trianguli AGD, duobus



lateribus AG, GH, aequalia sunt, angulosq; comprehendunt a-
f 4. pri. quales AGD, AGH, ex constructione, f erunt quoque tri-
angula AGD, AGH, aequalia. Par ratione, quia duo latera DG, GF, duobus lateribus HG, GF, aequalia sunt, ex constructione, angulosq; continent aequales DGF, HGF, (cùm enim per cõstructionem anguli AGD, AGH, aequales sint, erunt quoq; reli-
g 13. pri. qui duorum rectorum DGF, HGF, aequales: g sunt enim tam AGD, DGF, quàm AGH, HGF, duobus rectis aequales) erunt
h 4. pri. h quoque triangulo DGF, HGF, aequalia: i ac proinde & tota
i 2. pro- triangulo ADF, AHE, aequalia erunt. Est autem eidem triangulo
nun. ADF, aequale ostensum triangulum AEF. Igitur & inter se k a-
k 1. pro- qualia erunt triangula AHF, AEF: l ac propterea inter duas eas-
nun. dem erunt parallelas, hoc est, ducta recta EH, erit basi AF, commu-
l 39. pri. ni parallela. Igitur m & triangula HGF, EGF, inter easdem pa-
mi. rallelas, & super eadem basi FG, aequalia inter se erunt. Est autem
m 37. triangulum HGF, triangulo DGF, ostensum aquale. Igitur trian-
primi. gula quoque DGF, EGF, aequalia inter se erunt; propterea q; basis quoque DG, basi GE, aqualis erit, & in hoc scholio demonstratum est, quod est propositum.

n 23 pri mi. SI verò DE, ponatur bifariam diuidi, n constituatur angulo a-
o 3. pri. cuto AFB, aqualis angulus AFH, o & rectæ FH, rectæ FB, du-
canturq; rectæ AH, HG, GB, GG. Quoniam igitur tam triangula AGD,

AGD, AGE, ex scholio propos. 38. huius lib aequalia sunt, a *quàm triangula DGB, EGC, ob aequales bases DG, EG;* b *erunt totum etiã triangula AGB, AGC, aequalia. Rursus quia duo latera AF, FB, duobus lateribus AF, FH, aequalia sunt, continentq; angulos aequales AFB, AFH, ex constructione;* c *erunt triangula quoq; AFB, AFH, aequalia. Pari ratione, quia duo latera GF, FB, duobus lateribus GF, FH, aequalia sunt, aequalesq; continent angulos GFB, GFH, ex constructione;* d *erunt quoque aequalia triangula GFB, GFH: quibus demptis ex aequalibus AFB, AFH,*

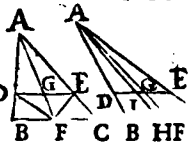


a 38. primi.
b 2. communis.
c 4. primi.
d 4. primi.

e aequalia erunt reliqua triangula AGB, AGH: Est autem eidem triangulo AGB, ostensum aequale triangulum AGC. f *Igitur & triangula AGC, AGH, inter se erunt aequalia.* g *Quare & inter easdem parallelas erunt, hoc est,ducta recta CH, ipsi AF, parallela erit; ac proinde* h *aequalia inter se erunt triangula GHF, GFC. Fuit autẽ ostensum triangulum GHF, triangulo GBF. aequale.* i *Igitur & aequalia inter se erũt triangula GFC, GFB; ideoq; vt in hoc scholio demonstrauimus, & bases FC, FB, aequales erunt. Quod est propositũ.*

e 3 prom.
f 1. prom.
g 39. primi.
h 37. primi.
i prom.

ALITER. Diuisa sit primum BC, bifariam in F. Dico & DE, bifariam esse diuisam in G. Si enim DG, GE, non sunt aequales, sit maior DG, ducanturq; recta FD, FE. Erit igitur per ea, quæ in hoc scholio demonstrauimus, tam triangulum ADG, triangulo AEG, quàm triangulum FDG, triangulo FEG, maius. k *Totum ergo triangulum ADF, toto triangulo AEF, maius erit: quibus si addantur triangula DBF, ECF,* l *quæ propter bases aequales BF, CF, aequalia sunt,* m *fiet totum triangulum ABF, toto triangulo ACF, maius; ac proinde, vt in hoc scholio demonstrauimus, basis BF, basi FC, maior erit: Sed & aequalis ponitur. Quod est absurdum. Bifariam ergo secta est DE, in G. Quod est propositum.*



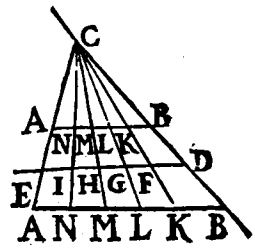
k 4. prom.
l 38. primi.
m 4. prom.

SIT iam DE, secta bifariam in G. Dico & BC, diuidi bifariam in F. Sin minus, n *diuidatur BC, in H, bifariam, ducaturq; recta AH, secans DE, in I. Quoniam igitur AH, secat BC, bifariam in H, secabit eadem ipsam DE, quoque bifariam in I, vt proximè ostendimus. Quod est absurdum, cum bifariam secta esse ponatur in G. Sequeretur enim partem toto esse maiorem. Nam si DI, aequalis est ipsi IE, cum IE, maior sit, quàm GE, erit quoque DI, maior, quàm GE, hoc est, quàm DG, quæ ipsi GE, aequalis ponitur. Diuidatur ergo BC, bifariam in F. Quod erat demonstrandum.*

n 10. primi.

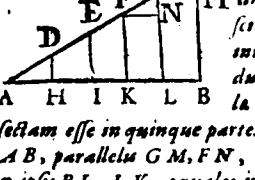
HOC ostenso theoremate, ad diuisionem lineæ rectæ in quotuis aequales partes tam

DATAM rectam lineam finitam in quotlibet partes æquales secare.



a 31. pri.
b 3. pri.

SIT data recta AB, secanda in quinque partes aquales. Per extremum punctum B, ducta recta BC, & cuiuscunq; assumpto in BC, puncto quocunque D, sive infra B, sive supra, a ducatur per D, ipsi AB parallela DE, in qua b abscindantur quinque partes inter se aquales DF, FG, GH, HI, IE, hac tamen lege, & existente puncto D, infra B, recta DE, ex quinque partibus aqualibus compositum maior sit, quàm data AB, minor verò, existente puncto D, supra B, & utrumvis recta AC, per alterum extremum A, & per E, ducta cum BD, concurrere possit in puncto aliquo, & in C. A quo si per puncta F, G, H, I, recta ducantur, secta erit data recta AB, in quinq; partes aquales BK, KL, LM, MN, NA. Quoniam enim in triangulo CBL, recta DG, ipsi BL, est parallela, vel in triangulo CDG, recta BL, ipsi DG: secta q; est DG, bifariam in F, secta quoque erit bifariam BL, in K, & in proximo theoremate demonstrauimus. Eadem q; ratione recta KM, in L, secta erit bifariam, quemadmodum & FH, in G, bifariam secta est. Sunt ergo tres partes BK, KL, LM, inter se aquales, sicuti tres DF, FG, GH, atq; ita de cæteris.



c 3. pri.
d 31. pri.

ALITER. Ad extremum A, linea AB, secanda in quinq; partes aquales, constituatur angulus rectilineus quicunq; A, & ex recta AC, c abscindantur quinque partes quantacunque inter se aquales AD, DE, EF, FG, GC: ductaq; recta CB, d agantur ei parallelæ GL, FK, EI, DH. Dico rectam AB,

e 31. pri.
f 34. pri.
g 34. pri.
omi.
h 29. pri
omi.
i 26. pri.

sectam esse in quinque partes aquales. e Ductis enim per G, F, ipsi AB, parallelis GM, FN, f quæ inter se etiam parallelæ erunt, & g ipsis BL, LK, aquales in parallelogrammis GB, FL; h erunt tam anguli FGN, GCM, externus & internus in parallelis GL, CB, quàm anguli CGM, GFN, externus & internus in parallelis GM, FN, æquales inter se. Quoniam igitur duo anguli C, G, trianguli CGM, duobus angulis G, F, trianguli GFN, æquales sunt, & terque utrique, latera q; illis adiacentia CG, GF, aqualia per constructionem, i erunt quoq; latera GM, FN, æqualia: quæ cum essensa sint æqualia rectis BL, LK, erunt quoque BL, LK, inter se æquales. Eadem q; ratione ostendemus KL, KI, æquales esse, nec

non

cum IK, HI, & HI, AH; ac propterea recta AB, in quinq; aquales partes diuisa erit. Quod est propositum.

ALITER. Ad extrema puncta A, B, linea AB, in quinq; partes aquales diuidenda constituantur duo aquales anguli in diuersas partes ABC, BAD. Et in vtraque linea BC, AD, a qua ob alternos angulos aquales A, B, parallela inter se sunt, b sumantur quatuor partes inter se omnino aquales, tot nimirum, vna minus, in quot partes linea secanda est, cuiusmodi sint BE, EF, FG, GC; AH, HI, IK, KD, iungaturq; recta CH; GI, FK, ED, c qua inter se erunt parallela, cùm coniungant extrema parallelarum aqualium. Dico rectam AB, in quinque partes aquales sectam esse. d Ductis enim per E, F, ipsi AB, parallelis EP, FQ, & quæ inter se quoque parallelæ erunt, e & ipsis NO, MN, aquales sint parallelogrammis EN, FM: g erunt tam anguli EFP, FGQ, externus & internus in parallelis FK, GI, quàm anguli GFQ, FEP, externus & internus in parallelis QF, PE, inter se aquales. Itaque quoniam duo anguli G, F, trianguli FGQ, duobus angulis F, E, trianguli EFP, aquales sunt, vterque vtrique, latera; illis adiacentia FG, EF, aqualia per constructionem, h erunt quoque latera FQ, EP, inter se aqualia: quæ cùm ostensa sint aqualia rectis MN, NO, erunt etiam MN, NO, inter se aquales. Eadem; ratione aquales inter se erunt OB, NO, MN, LM, AL, propterea; recta AB, in quinque aquales partes diuisa erit. Quod est propositum.

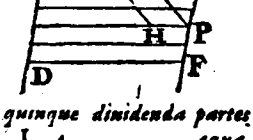


a 27. pri mi.
b 3. pri.
c 31. pri.
d 31. pri.
e 30. pri.
f 34. pri.
g 29. pri mi.
h 26. pri mi.

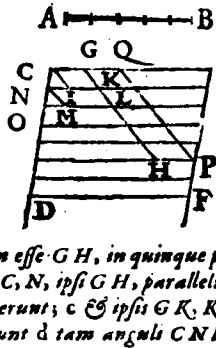
PRAXIS hac breuiùs ita demonstrabitur. i Quoniam recta ED, FK, GI, GH, parallela sunt, quòd coniungant extrema aqualium & parallelarum; secabitur recta BL, in quatuor partes aquales, nec non & recta AO, vt in præcedenti praxi ostendimus. Omnes ergo quinque partes AL, LM, MN, NO, OB, aquales erunt.

i 33. pri.

ALITER. Paretur instrumentum diuisoribus linearum in partes aquales accommodatum, hoc modo. Ductis duabus parallelis satis magno spatio inter se distantibus CD, EF, k sumantur in vtraque partes omnino inter se aquales quotcunq;, tot videlicet in vna, quot in altera, & modica quantitatis, punctaq; respondentia lineis rectis iungantur, l quæ parallelæ inter se erunt, cùm coniungant extrema parallelarum aqualium. Si igitur beneficio eiusmodi recta AB, in quinque dividenda partes aqua-



k 3. pri.
l 33. pri.



a 3. pri.

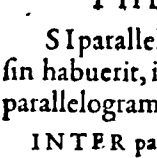
æquales, transferatur ex quouis puncto G, vsq; ad punctũ H, ita vt quinque spatia parallelarum inter G, & H, includantur, diuisa erit ducta G H, ab illis parallelis in quinque partes æquales, quibus partibus si in data A B, a sumantur partes æquales, diuisa quoque erit A B, in quinque æquales partes. Sectam autem esse G H, in quinque partes æquales, ita demonstrabitur. Ductis ex C, N, ipsi G H, parallelis C I, N M, b *quæ inter se quoq; parallelæ erunt;* c *& ipsis G K, K L, æquales in parallelogrammis G I, K M; erunt* d *tam anguli C N I, N O M, externus & internus in parallelis N K, O L, quàm anguli O N M, N C I, externus & internus in parallelis N M, C I, æquales inter se. Igitur cùm duo anguli N, C, trianguli C N I, duobus angulis O, N, trianguli N O M, æquales sint, vterque vtrique, lateréque illis adiacentia C N, N O, æqualia, ex constructione,* e *erunt quoque latera C I, N M, inter se æqualia: quacirca ostensa sint æqualia rectis G K, K L, erunt quoq; G K, K L, inter se æquales. Eademq; ratione omnes partes rectæ G H, ostendentur æquales: ac proinde recta G H, in quinque partes æquales erit diuisa.*

b 30. pri.
c 34. primi.
d 29. primi.
e 26 primi.

PRAXIS etiam hac breuius demonstrabitur, si hoc modo fiat. Sumptis quinque interuallis rectæ E F, ab E, vsque ad P, transferatur recta A B, beneficio circini ex P, ad aliquod punctum rectæ C E, vt ad Q. Erit enim hac ratione ducta recta P Q, diuisa à parallelis in quinque partes æquales. Vt in secunda praxi demonstratum est. Quare si partes rectæ P Q, quæ data rectæ A B, æqualis est, ex constructione, transferantur in datum rectam A B, diuisa quoq; erit A B, in quinque partes æquales. Quod est propositum.

xlj. THEOR. 31. PROPOS. 41.

SI parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.



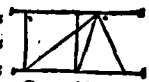
INTER parallelas AB, CD, & super basin CD, constituantur parallelogrammum A C D E, & triangulum B C D. Dico parallelogrammum esse duplum trianguli B C D. Ducta enim diametro A D, in parallelogrammo, erunt *f* triangula A C D, B C D æqualia; At parallelogrammũ A C D E, duplum est trianguli A C D; *g* quòd triangula A C D, A D E, æqualia quoque inter se sint. Igitur & trianguli B C D, *h* duplum erit idem parallelogrammum A C D E. Quamobrem, si paral-

f 37 pri.
g 34. primi.
h 6. prop. hum.

si parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HINC sequitur, si triangulum duplam habuerit basin, fueritq́ue in eisdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam si basis CD, producatur ad F, vt sit DF, æqualis ipsi CD, ducaturq́ue recta FB, erit triangulum BCF, duplum trianguli BCD, a *quod triangula BCD, BDF, æqualia sint: Est autem & parallelogrammum ACDE,* b *duplum eiusdem trianguli BCD.* c *Igitur æqualia erunt triangulum BCF, & parallelogrammum ACDE.*



a 38. primi.
b 41. primi.

IDEM hoc theorema Euclidis demonstrari potest eodem modo, si parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint bases, & non eandem, fuerintq́ue in eisdem parallelis, vt cernis in parallelogrammo ACDE, & triangulo BFG, quorum bases CD, FG, æquales sunt. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, erunt triangula ACD, BFG, æqualia. Cum igitur parallelogrammum ACDE, duplum sit trianguli ACD: c *quod diameter AD, secet parallelogrammum ACDE, bifariam:* f *erit quoque idem triangulo BFG, duplum. Eadem ratione si basis FG, duplicaretur, & recta ad B, duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc esset duplum etiam trianguli BFG, &c.*

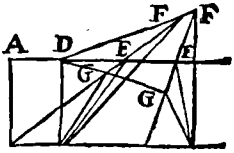


c 6. prænum.
d 38. primi.
e 34. primi.
f 6. prænum.

CONVERSVM huius theorematis duplex est, hoc modo.

SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemque habuerint basin, vel æquales, & ad easdem partes constituta; Erunt ipsa in eisdem parallelis. Et si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eisdemque parallelis: erunt bases æquales, si non sit eadem.

SIT parallelogrammum ABCD, duplum trianguli EBC, sive eandem habeant basin, sive æquales. Dico parallelam AD, productam cadere in E. punctum. Nam aliàs cadet aut supra E, aut infra. Vnde, vt in 39. vel 40. propos. ostendetur pars æqualis toti, vt & figura indicat. g *Nam erit quoq́ue parallelogrammum ABCD, trianguli BFC, vel BGC, duplum.* h *Quare triangula EBC, FBC, vel triangula EBC, GBC, æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum.*



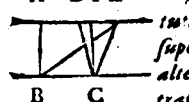
g 41. primi.
h 6. prænum.



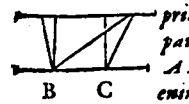
SIT deinde parallelogrammum ABCD, duplum trianguli EFG, in eiſdemq; parallelis. Dico baſes BC, FG, eſſe æquales. Nam ſi altera, nempe BC, ſit maior, abſciſſa æqualis CH, a 31. pri mi. *& ducta HI, parallela ipſi AB, demonſtrabimus parallelogramma ABCD, IHCD, eſſe æqualia, totum & partem; (quia vtrumque duplum eſt trianguli EFG; illud quidem per hypotheſin, hoc verò per 41. propoſ.) Quod eſt abſurdum. Idem oſtendemus, ſi baſis FG, maior dicatur. Si enim abſcindatur ipſi BC, æqualis FH, ducaturq; recta HE, erunt triangula EFH, EFG, æqualia, pars & totum; (Nam vtrumque dimidium eſt parallelogrammi ABCD; Illud quidem per propoſ. 41. hoc verò per hypotheſin.) Quod eſt abſurdum.*

EX PROCLO.

SI triangulum, & trapezium ſuper eadem baſi, & in eiſdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij ſit baſis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si verò minor linea parallela trapezij baſis ſit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.



INTER lineas parallelas AE, BC, ſint conſtituta trapezium ABCD, & triangulum EBC, ſuper baſim BC, eandem, quæ ſit tamen maior, quàm altera linea AD, parallela in trapezio dato. Dico trapezium ABCD, minus eſſe duplo trianguli EBC. Cum enim AD, minor ponatur quam BC, ſumatur AF, b 33. pri mi. *æqualis ipſi BC, & ducatur recta CE,* b *quæ erit parallela ipſi AB;* c 41. pri mi. *atq; adeo parallelogrammum erit ABCF,* c *quod duplum eſt trianguli EBC. Quare trapezium ABCD, cum ſit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiuſdem trianguli EBC. quod eſt propoſitum.*

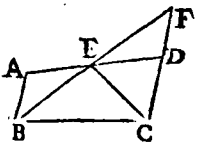


SINT rurſus trapezium, & triangulum, vt prius, ſed baſis BC, ſit minor, quam reliqua linea parallela AD, in trapezio dato. Dico trapezium ABCD, maius eſſe duplo trianguli EBC. Cum enim AD, maior ſit, quàm BC, abſcindatur DF, d 33. pri mi. *æqualis ipſi BC, & ducatur recta BF,* d *quæ erit parallela ipſi CD;* e 41. pri mi. *atq; adeo parallelogrammum erit BCDF:* e *quod duplum eſt trianguli EBC. Quare totum trapezium ABCD, quod ſuperat parallelogrammum BCDF, maius erit duplo eiuſdem trianguli EBC. quod eſt propoſitum.*

IDEM concludetur, ſi trapezium, & triangulum conſtituta fuerint ſuper æquales baſes, ita tamen vt nunc quidem baſis trapezij ſit maior latere oppoſito parallelo, nunc verò minor.

TRAPE-

TRAPEZIVM habens duo latera opposita paralela, duplum est trianguli, quod basin habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem verò in medio puncto lateris oppositi.

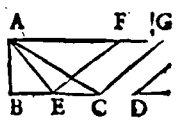


SIT trapezium ABCD, cuius duo latera opposita AB, DC, sint parallela, & super basin BC, constituatur triangulum EBC, verticem E, habens in medio puncto E, latus AD. Dico trapezium ABCD, duplum esse trianguli EBC. Producatur enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe BE, donec coeat cum CD, protracta in F. Et quia parallelæ sunt AB, CF, a erunt anguli alterni BAE, FDE, æquales: b *Sunt autem & anguli AEB, DEF, æquales, quippe qui ad verticem E; & latus AE, trianguli ABE, lateri DE, trianguli DEF, æquale, per hypothesin.* c *Igitur & reliqua latera AB, BE, reliquis lateribus, DF, FE, æqualia erunt, vtrumque vtrique, & reliqui anguli ABE, DFE, æquales: atque adeò triangula ABE, DFE, ex coroll. propos. 26. huius lib. æqualia erunt. Quare addito communi triangulo CDE,* d *erunt triangulo CEF, æqualia triangula simul ABE, CDE.* e *Est autem & triangulum BCE, eidem triangulo CEF, æquale, quod bases BE, EF, ostensa sint æquales, & ipsa triangula inter easdem sint parallelas, si per C ducatur parallela ipsi BF.* f *Igitur triangulum CBE, æquale erit triangulis ABE, CDE; & propterea CBE, triangulum dimidium erit trapezij ABCD, quod est propositum.*

a 29. pri mi.
b 15. pri.
c 26. pri
d 1. pro nun.
e 38 pri mi.
f 1. pro num.

PROBL. II. PROPOS. 42. xlij.

DATO triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.



DATVM triangulum sit ABC, & datus angulus rectilineus D. Oportet igitur constituere parallelogrammũ æquale triangulo ABC, habens angulum æqualem angulo D. Diuidatur latus vnum trianguli, nempe BC, *g* bifariam in E, & *h* fiat angulus CEF, æqualis angulo D, prout libet, hoc est, siue angulus CEF, vergat ad partes C, siue ad partes B, prout magis videbitur expedire. Ducatur item per A, *i* recta AF, parallela ipsi BC, quæ secet EF, in F. Rursus per C, vel B, ducatur ipsi EF, parallela CG, occurrens rectæ AF, productæ in G. Eritque in angulo CEF, qui dato angulo rectilineo D, factus est æqualis, constitutum parallelogrammum CEFG, quod dico esse æquale triangulo ABC. Ducta enim recta EA; quo-

g 10. pri mi.
h 23 pri mi.
i 35. pri.

a 41. *primi.* E A; quoniam parallelogrammum C E F G, *a* duplum est trianguli A E C; & triangulum A B C, duplum eiusdem trianguli A E C,
b 38. *primi.* *b* quod triangula A E C, A B E, super æquales bases E C, B E, & in eisdem parallelis, sint æqualia. Erunt parallelogrammum
c 6 *pro-num.* C E F G, & triangulum A B C, *c* æqualia inter se. Cum igitur angulus C E F, factus sit æqualis angulo D, constat propositum. Quocirca dato triangulo æquale parallelogrammum constituimus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

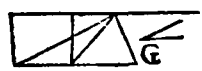
PRAXIS huius problematis facilima est ex ipsa constructione.

SVBIVNGIT autem hoc loco Peletarius subsequens problema, quod huius propos. conuersum est.

DATO parallelogrammo æquale triangulum constituere, in dato angulo rectilineo.

SIT datum parallelogrammum A B C D, & datus angulus G. Fiat angulus C B E, angulo G, æqualis, secetq; recta B E, rectam A D, productam in E. Extendatur quoque B C, ad F, sitq; C F, æqualis rectæ B C, & iungatur E F. Dico triangulum B E F, habens angulum E B F, angulo dato G, æqualem, æquale esse parallelogrammo A B C D.

d 41. *pri.* A D E



e 38. *primi.* B C F G

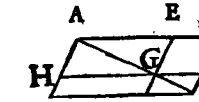
Ducta enim recta C E, d *erit parallelogrammum A B C D, duplum trianguli B C E. Item triangulum B E F, eiusdem trianguli B C E, duplum;* e *quod æqualia sint triangula E B C, E C F. Quare* f *æqualia inter se erunt parallelogrammum A B C D, & triangulum B E F. Quod est propositum.*

f 6. *pro-num.* *PRAXIS quoque huius problematis Peletarij ex ipsa constructione perfacilis est.*

xliij. THEOR. 32. PROPOS. 43.

IN omni parallelogrammo complementa eorum, quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.

A E B



H G I

D F C

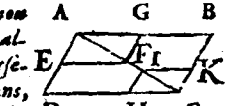
IN parallelogrammo A B C D, sint circa diametrum A C, parallelogramma A E G H, C F G I, & complementa D F G H, E B I G, vt in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter se

g 34 *primi.* esse æqualia. Cum *g* enim triangula A B C, C D A, æqualia sint;
h 1. *pro-num.* Itemque triangula A E G, G H A; si hæc ab illis demantur, *h* remanebunt trapezia C B E G, C D H G, æqualia: *i* Sunt autem &
i 34 *pri.* triangula C G I, C G F, æqualia. Quare si detrahantur ex trapeziis,

peziis, *a* remanebunt æqualia complementa DFGH, EBIG. In omni igitur parallelogrammo, complementa, &c. Quod oſtendendum erat. a 43. primi.

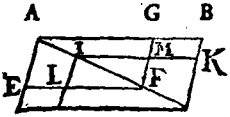
SCHOLIVM.

EODEM modo hoc theorema demonſtratur à Procle, etiamſi duo parallelogramma circa diametrum non contingantur in puncto G, ſed vel vnum ab altero ſit ſemotum, vel ambo ſe mutuo interſecent. Sit enim primo vnum ab altero diſtans, ita vt complementa ſint figura quinquangula. Vt in parallelogrammo ABCD, circa diametrum AC, conſiſtant parallelogramma AEFG, CHIK. Dico complementa DEFIH, BKIFG, eſſe æqualia. Cum enim b *triangula ABC, CDA, æqualia inter ſe ſint: item triangula AEF, GHI, æqualia triangulis AGF, CKI:* c *erunt reliqua complementa DEFIH, BKIFG, æqualia. Quod eſt propoſitum.*



b 34. primi. c 3. pronum.

SECENT ſe iam mutuo parallelogramma AEFG, CHIK, circa diametrum conſiſtentia, ita vt communem partem habeant ILFM. Dico adhuc complementa DELH, BGMK, eſſe æqualia. Cum enim d *æqualia ſint triangula ABC, CDA: item triangula AFG, AFE:* e *erunt reliqua quadrilatera BCFG, DCFE, æqualia: Sunt* f *autem rurſus æqualia triangula IFM, IFL. Igitur ſi hæc addantur diſtis quadrilateris,* g *erunt figura BCIMG, DCILE, æquales. Cum igitur* & h *æqualia ſint triangula CIK, CIH:* i *erunt reliqua complementa BGMK, DELH, etiam æqualia. Quod eſt propoſitum.*



d 34. primi. e 3. pronum. f 34. primi. g 2. pronum. h 34. primi. i 3. pronum.

CONVERSVM quoque huius theorematis cum Peletario demonſtrabimus, hoc modo.

SI parallelogrammum diuiſum fuerit in quatuor parallelogramma, ita vt ex illis duo aduerſa ſint æqualia: conſiſtent reliqua duo circa diametrum.

DVCTIS duabus rectis EF, GH, quæ ſint parallelæ rectis BC, CD, ſeque ſecent in I, diuiſum ſit parallelogrammum ABCD, in quatuor parallelogramma, quorum aduerſa duo BEIH, DFIG, ſint æqualia. Dico reliqua duo AEIG, CFIH, circa diametrum conſiſtere, hoc eſt, diametrum à puncto C, ad punctum A, ductam tranſire per punctum I. Si enim non tranſit, ſecet diametter CKA, rectam GH, in K, ſi fieri poteſt, & per K, k *ducatur LM, parallela ipſi BC.* l *Erunt igitur*



k 31. primi. l 43. primi.

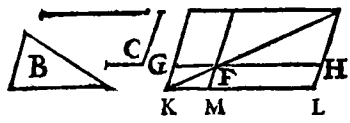
comple-

a 9.pro. complementa B H K L, D G K M, æqualia: Est a autem D G K M, mum. maius quam D G I F. Quare & maius erit B H K L, quam D G I F.
b 1.pro. Cum ergo D G I F, æquale ponatur ipsi B E I H; b erit etiam B H K L, mum. maius quam B E I H, pars quam totum. Quod est absurdum. Non ergo diameter A C, rectam G H, in K, secat, sed per punctum I, transit. Quod est propositum.

kliiij. PROBL. 12. PROPOS. 44.

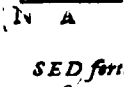
AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

DATA recta linea sit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habens æqualem angulo C, & vnũ
c 42.pri mi. latus æquale rectæ A. Constituatur triangulo B, c æquale parallelogrammum D E F G, habens angulum E F G, angulo C, æqualem, producaturque G F, ad H, vt F H, sit æqualis rectæ A, & per H,
d 31.pri mi. d ducatur H I, parallela ipsi F E, occurrens D E, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F,
e 31.pri. diameter I F, occurrens rectæ D G, productæ in K; & e per K, ducatur K L, parallela ipsi G H, secans I H, protractam in L, producaturque E F, ad M. Dico parallelogrammum L M F H, esse id, quod quæritur. Habet enim latus F H, æquale datæ rectæ A, &
f 15.pri. angulum H F M, angulo dato C, æqualem, f cum angulus H F M, æqualis sit angulo E F G, qui factus est æqualis angulo C: Deni-
g 43.pri mi. que parallelogrammum L M F H, æquale est triangulo B, g cum æquale sit complemento D E F G, quod factum est æquale triangulo B. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.



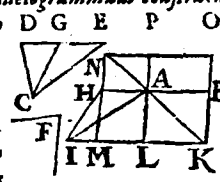
SCHOLIVM.

QVOD si quis optet, lineam ipsam A, datam, esse vnum latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammum F M L H, ad rectam A, ex iis, quæ in scholio propos. 31. huius lib. docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo M F H, & sumatur recta N O, æqualis rectæ F M, compleaturq; parallelogrammum, ceu in dicto scholio traditum fuit, effectum erit, quod quæritur.



SED fortassis magis ex sententia Euclidis problema hoc conficiemus, si super ipsam rectam datam constituamus parallelogrammum, non autem super æqualem, cuiusmodi fuit recta F H, &c. Sit ergo rursus data

ſint data recta A B, datum triangulum C D E, & datus angulus F, oporteatque ſuper rectam A B, conſtituere parallelogrammum æquale triangulo C D E, in dato angulo F, quod ita efficiemus. Secto vno latere trianguli, vt D E, bifariam in G, ductaque recta C G ſecante ex ſcholio propoſ. 38. huius lib. triangulum C D E, bifariam, producatur recta A B, verſus eam partem, vbi parallelogrammum conſtruendum debet habere angulum dato angulo F, æqualem, vt hic verſus A, fiatque A H, æqualis ipſi E G, dimidio lateris D E. Deinde in A, ad conſtituatur angulus H A I, angulo E, æqualis, deorſum quidem, ſi parallelogrammum verſus ſuperiorem partem ſit conſtruendum, ſurſum verò, ſi verſus inferiorem. Poſita autem recta A I, æquali ipſi E C, iungatur recta H I. Et quia duo latera H A, A I, duobus lateribus G E, E C, æqualia ſunt, vtrumque vtrique, angulosq; continent æquales, (erunt triangula A H I, E G C, æqualia. Poſt hæc, ducta per I, ipſi H B, parallela I K, conſtituatur in A, verſus hanc parallelam angulus H A L, angulo dato F, æqualis, ſecetq; A L, rectam I K, in L. Ducta quoque per H, ipſi A L, parallela H M, ſecante I K, in M, erit parallelogrammum A H M L, trianguli A H I, duplum: Eſt autem & triangulum C D E, trianguli E G C, duplum, quòd æqualia oſtenſa ſint triangula E G C, D G C. Igitur cum æqualia ſint demonſtratæ triangula A H I, E G C, gerunt æqualia parallelogrammũ A H M L, & triangulum C D E. Iam verò ſumpta recta L K, datæ rectæ A B, æquali, ducatur recta K A, producaturq; donec cum M H, producta coeat in N, & per N, agatur ipſi H B, parallela N O, donec in O, coeat cum K B, protracta, ac tandem L A, producatur vſque ad P, in rectam N O. Dico parallelogrammum A B O P, eſſe id, quod quæritur. Eſt enim conſtitutum ſuper datam rectam A B, habetq; angulum B A P, dato angulo F, æqualem, h cum æqualis ſit angulo H A L, qui angulo F, factus eſt æqualis. Deinde æquale eſt dato triangulo C D E, i cum æquale ſit parallelogrammo A H M L, quod triangulo C D E, oſtenſum fuit æquale.



a 23. primi.

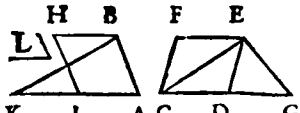
b 4. pri.
c 31. primi.
d 23. primi.
e 31 pri.
f 41. pri.
g 7 pro. num.
h 15. primi.
i 43. primi.

PRAXIS verò huius problematis à conſtructione ipſa non differt, niſi quod recta H I, duci non debet, neque recta C G. Hæ enim propter demonſtrationem tantum ductæ ſunt.

ADDIT hic aliud problema Peletarius, hoc modo.

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo conſtituere æquale triangulum in dato angulo rectilineo.

SIT data recta A B; datum parallelogrammum C D E F, & datus angulus L. Producatur C D, ad G, vt D G, æqualis ſit ipſi C D, & iun-



& iungatur G E, recta: Eritque triangulum C E G, parallelogrammo C D E F, æquale, & demonstrauimus scholio propos. 41. a Fiat iam super data recta A B, parallelogrammum A B H I, æquale triangulo C E G, hoc est, parallelogrammo C D E F, habens angulum A, angulo L, æqualem; & producatur A I, ad K, & sit I K, æqualis ipsi A I, iungaturque recta B K. Dico triangulum A B K, constitutum super datam rectam A B, habens q; angulum A, æqualem dato angulo L; æquale esse dato parallelogrammo C D E E. Cum enim triangulum A B K, æquale sit parallelogrammo A B H I, ex scholio propos. 41. quod æquale est constructum parallelogrammo C D E F, constat propositum.

PRAXIS huiusce problematis à constructione non differt; difficiliuſq; non est, si adhibeatur præcedens praxis, qua triangulo E C G, parallelogrammum A B H I, super data recta A B, in dato angulo A, constituatur.

a 44. *primi.*

b

PROBL. 13. PROPOS. 45.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

QVAMVIS Euclides proponat hoc problema absolutè, non astringendo nos ad certam aliquam rectam lineam datam, vt in præcedenti propos. 44. fecerat; tamen quia in sequentibus frequenter vsurpata in data recta linea, placuit ipsum proponere vna cum data recta linea. Sit ergo recta data E F; rectilineum A B C, & datus angulus D. Oportet igitur constituere ad datam rectam E F, parallelogrammum æquale rectilineo A B C, quod habeat angulum æqualem angulo D. Resoluatur rectilineum in triangu-
b 44. *primi* la A, B, & C. Deinde triangulo A, *b* æquale parallelogrammum



constituatur E F G H, super rectam E F, habens angulum F, angulo D, æqualem. Item super rectã G H, parallelogrammum G H I K, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item super rectam I K, parallelogrammum I K L M, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et sic deinceps procedatur, si plura fuerint triangula in dato rectilineo: factumque erit, quod iubetur. Nam tria parallelogramma constructa, quæ quidem æqualia sunt re-
c 1. *primi.* ctilineo dato A B C, conficiunt totum vnum parallelogrammum, quod sic demonstratur. Duo anguli E F G, H G K, c inter se sunt

æquales,

æquales, cum vterque æqualis sit angulo D. Addito igitur communi angulo FGH, erunt duo anguli EFG, FGH, *a* qui duobus rectis æquiualent, *b* æquales duobus angulis HGK, FGH, ideoq; hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt. *c* Quare FG, GK, vnam rectam lineam efficient. Eadem ratione ostendemus, EH, HI, vnam rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli EHG, HIK, æquales inter se sunt, (*d* cum sint æquales oppositis angulis æqualibus EFG, HGK.) *e* & duo anguli HIK, IHG, duobus sunt rectis æquales, &c. Cum igitur EI, FK, sint parallelæ. *f* Item q; EF, IK, quod vtraque parallela sit rectæ HG; Parallelogrammum erit EFKI. Eodem modo demonstrabitur, parallelogrammũ IKLM, adiunctum parallelogrammo EFKI, constituere totum vnum parallelogrammum EFLM. Ad datam ergo rectam lineam EF, dato rectilineo ABC, constituimus æquale parallelogrammum EFLM, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

a 29. pri mi.
b 14. pro num.
c 14. pri.
d 34. pri mi.
e 29. pri mi.
f 30. pri.

SCHOLIVM.

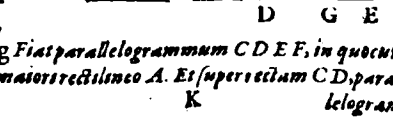
PARI ratione, propositis quotcunque rectilineis, constituemus illis parallelogrammum æquale, si omnia resoluantur in triangula, quibus æqualia parallelogramma exhibeantur, singulis singula, per prop. 44. Veluti factum est in hoc problemate. Nam cum omnia hæc parallelogramma efficiant vnum parallelogrammum, vti hic demonstratum fuit, constitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propositis. Vt si quis intelligat duo rectilinea proposita A B, & C; Atque A B, resoluatur in triangula A, & B, singulisq; triangulis, A, B, C, singula parallelogramma E G, G I, I L, super rectas E F, H G, I K, iuxta artem huius problematis, æqualia constituantur, ex prop. 44. erit constructum parallelogrammum totum E F L M, æquale duobus rectilineis A B, & C. Et sic de pluribus.

PRAXIS autem huius problematis ex praxi præcedentis propos. sæpius repetita petenda est.

HVC referri potest problema vtilissimum ex Peletario, quod non tamen alia ratione, & breuiori demonstrabimus in hunc modum.

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minus inquirere.

SINT data rectilinea A, & B, sitque A, maius. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, superet rectilineum B. g *Fiat parallelogrammum C D E F, in quocunque angulo D, æquale maiori rectilineo A. Et super rectam C D, parallelogram-*



g 45. pri mi.

lelogrammum C D G H, in eodem angulo D, æquale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum C D E F, superat parallelogrammum C D G H, parallelogrammo E F H G, superabit quoque figura A, figuram B, eodem parallelogrammo E F H G. Quod est propositum.

PROBL. 14. PROPOS. 46. xlv.

A DATA recta linea quadratum describere.

SIT data recta A B, super quam oporteat quadratum describere. Ex A, & B, *a* educantur A D, B C, perpendiculares ad A B, sintque ipsi A B, æquales, & connectatur recta C D. Dico A B C D, esse quadratum. Cum enim anguli A, & B, sint recti, *b* erunt A D, B C, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis sit ipsi A B. Igitur *c* & A B, D C, parallelæ sunt & æquales: & ideo parallelogrammum est A B C D, in quo, cum A D, D C, C B, æquales sint ipsi A B, omnes quatuor lineæ æquales existunt: Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum C, & D, *d* æquales sint oppositis rectis A, & B Quadratum igitur est A B C D, ex definitione; Ac proinde à data recta linea quadratum descripsimus. Quod faciendum erat.



a 11. pri mi.
b 28. pri mi.
c 33. pri mi.
d 34. pri mi.

EX PROCLO.

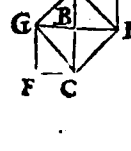
LINEARVM æqualium æqualia sunt quadrata: & quadratorum æqualium æquales sunt lineæ.



SINT primum rectæ A B, C D, æquales. Dico eorum quadrata A B E F, C D G H, æqualia quoque esse. Ductis enim diametris B F, D H, erunt duo latera B A, A F, trianguli B A F, duobus lateribus D C, C H, trianguli D C H, æqualia, vtrumque vtrique, cum ex definitione quadrati rectæ A F, C H, æquales sint rectæ A B, C D. Sunt autem & anguli A, & C, æquales, nempe recti. e *Igitur trianguli B A F, D C H, æqualia erunt. Quæ* f *cum sint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod est propositum.*

e 4. pri mi.
f 34. pri mi.

SINT deinde quadrata A B D E, B C F G, æqualia. Dico lineas quoque ipsorum A B, B C, æquales esse. Coniungantur enim quadrata ad angulum B, vt rectæ A B, B C, in directum constituantur. Et quoniam anguli A B G A B D, sunt recti, g *erunt & rectæ G B, B D, in directum constitutæ. Ducantur diametri A D, C G, iungunturque rectæ A G, C D. Quoniam igitur quadrata A B D E, B C F G, æqualia sunt, erunt & trianguli A B D, B C G, eorum dimidia, æqualia. Addito ergo communi*



g 14. pri.

uterni triangulo B C D, fiet totum triangulum A C D, toti triangulo G D C, æquale. Quare triangula A C D, G D C, cum eandem habeant basin C D, ad easdemque sint partes, a in eisdem sunt parallelis: ideoque parallela sunt A G, C D. Et quoniam, & in scholio propos. 34. ostendimus, diameter in quadrato secat angulos quadrati bifariam, erunt anguli D A C, G C A, alterni semirecti, ideoque æquales. Quamobrem, & parallela sunt A D, C G. Igitur parallelogrammum est A D C G: ac propterea c recta A D, C G, æquales. Quoniam ergo in triangulis A B D, B C G, latera A D, C G, æqualia sunt, & anguli quibus ea latera adiacent, inter se etiam æquales, cum sint semirecti, & in scholio propos. 34. ostensum fuit: erunt d reliqua latera æqualia, nempe A B, ipsi B C, &c. Quod est propositum.

a 39. primi.
b 27. primi.
c 34. primi.
d 26. primi.

SCHOLIVM.

POSSENT hæc omnia multo breuius probari per superpositionem quadrati cuius super aliud. Nam si linea sint æquales, si una alteri superponatur, congruent ipsa inter se. Cum ergo & anguli sint æquales, nempe recti, conuenient quoque ipsi inter se, ideoque totum quadratum toti quadrato congruet. Quod si quadrata sint æqualia, congruent ipsa inter se, propter æqualitatem angulorum. Igitur & lineæ: alias unum quadratum alio maius esset.

PRAXIS autem huius problematis perfacilis est. Si namque ad datam rectam A B, in altero extremorum, & in A, erigatur perpendicularis A D, ipsi datæ rectæ A B, æqualis, & ex B, & D, ad interuallum eiusdem A B, duo arcus describantur sese in C, intersecantes, iungaturque recta B C, D C, constructum erit quadratum. Nam A B C D, cum ex constructione sit figura æqualium laterum, atque adeo latera opposita habeat æqualia, parallelogrammum erit, & ad initium scholij propos. 34. demonstrauimus. Existente ergo angulo A, recto, e erunt & B, D, recti, nec non f & oppositi anguli C, &c.

e 29. primi.
f 34. primi.

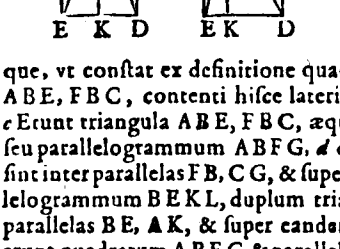
THEOR. 33. PROPOS. 47. xlvj.

IN rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.

IN triangulo A B C, angulus B A C, sit rectus, g describanturque super A B, A C, B C, quadrata A B F G, A C H I, B C D E. Dico quadratum B C D E, descriptum super latus B C, quod angulo recto opponitur, æquale esse duobus quadratis A B F G, A C H I, quæ super alia duo latera sunt descripta, siue hæc duo latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta A K, h parallela ipsi B E, vel

g 46. primi.
h 31. primi.

BE, vel ipſi CD, ſecans BC, in L, & iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duo anguli BAC, BAG, ſunt recti, *a* erunt rectæ GA, AC, vna linea recta; eodemque modo IA, AB, vna recta linea erunt. Rurſus quia anguli ABF, CBE, ſunt æquales, cum ſint recti, ſi addatur communis angulus ABC, *b* fiet totus angulus CBF, toti angulo ABE, æqualis; ſimiliterque totus angulus BCH, toti angulo ACD. Quoniam igitur duo latera AB, BE, trianguli ABE, æqualia ſunt duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, vtrumque vtrique, vt conſtat ex definitione quadrati: Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hiſce lateribus æquales, vt oſtendimus; *c* Erunt triangula ABE, FBC, æqualia. Eſt autem quadratum, *d* ſeu parallelogrammum ABFG, duplum trianguli FBC, cum ſint inter parallelas FB, CG, & ſuper eandem baſin BF: Et parallelogrammum BEKL, duplum trianguli ABE, quòd ſint inter parallelas BE, AK, & ſuper eandem baſin BE. Quare *e* æqualia erunt quadratum ABFG, & parallelogrammum BEKL. Eadem ratione oſtendetur, æqualia eſſe quadratum ACHI, & parallelogrammum CDKL. *f* Erunt enim rurſus triangula ACD, HCB, æqualia, ideoq; eorum dupla, parallelogrammũ videlicet CDKL, & quadratũ ACHI, æqualia erũt. Quamobrem totum quadratũ BCDE, quod componitur ex duobus parallelogrammis BEKL, CDKL; æquale eſt duobus quadratis ABFG, ACHI. In rectangulis ergo triangulis, quadratũ, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 14 *primi.*

b 2. *prounun.*

c 4. *primi.*

d 41. *primi.*

e 6. *prounun.*

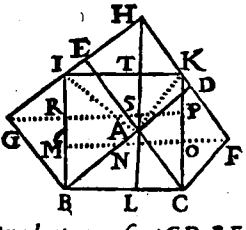
f 4. *primi.*

SCHOLIVM.

FACILE ex theoremate iſto quiuis intelliget, in triangulo amblygonio quadratum lateris obtuſo angulo oppoſiti maius eſſe duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum: In quouis autem triangulo quadratum lateris vni acutorum angulorum oppoſiti minus eſſe duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum. Num ſi angulus coarctaretur donec fieret rectus, manentibus iiſdem lateribus eum ambientibus, euaderet latus oppoſitum minus: Si autem acutus angulus dilataretur, donec fieret rectus, manentibus iiſdem lateribus eum ambientibus, fieret latius oppoſitum maius, vt patet. Cum ergo quadratum lateris anguli recto oppoſiti aquale ſit hic oſtenſum duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum; perſpicuum eſt, quadratum lateris obtuſo angulo oppoſiti eſſe maius duobus quadratis ſimul aliorum duorum laterum: quadratum verò lateris anguli acuti oppoſiti eſſe minus duobus quadratis ſimul duorum laterum reliquorum.

rum. Quanto autem illud maius sit, & quanto hoc minus, demonstrabit Euclides lib. 2. propos. 12. & 13.

QVONIAM verò theorema hoc pulcherrimum est, vtilitatesq; habet insignes, operæpretium iudicaui tentare, num illud alijs viis demonstrari possit, variata aliquantulum constructione; quod Peletarium sine proportionibus fieri posse negauit. Sit ergo rectus triangulum A B C, cuius angulus B A C, rectus sit, productisq; lateribus B A, C A, ad partes anguli recti fiant A D, A E, ipsis A C, A B, æquales; & per C, D, B, E, ipsis A B, A C, parallelæ agantur coeuntes in F, G. Et quia in parallelogrammis C D, B E, a tam latera D F, F C, oppositis lateribus A C, A D, quam latera E G, G B, lateribus oppositis A B, A E, æqualia sunt, erit vtrumque parallelogrammum æquilaterum: Sed & anguli omnes recti sunt. b Nam F, G, oppositis rectis D A C, E A B, æquales sunt, ideoque recti: Anguli autem C, D, B, E, recti sunt, quod vterque C, D, cum recto D A C, & vterque B, E cum recto E A B, c æqualis sit duobus rectis. Quadrata ergo sunt C D, B E, laterum A C, A B. Productis etiam lateribus F D, G E, donec conueniant in H, erigantur in B, C, ad B C, perpendiculares B I, C K, secantes G H, F H, in I, K, iungaturq; recta I K. Et quia si à recto angulo I B C, A B G, auferatur communis angulus A B I, reliqui A B C, G B I, æquales sunt; sunt autem & recti anguli B A C, B G I, æquales; erunt duo anguli A, B, trianguli, A B C, duobus angulis G, B, trianguli G B I, æquales, vterque vtrique: Sunt autem & latera A B, G B, illis adiacentia æqualia, ob quadratum B E. d Igitur & tam latera B C, B I, quàm A C, G I, æqualia erunt, & reliqui anguli C, I, æquales. Non aliter in triangulis A B C, F K C, æqualia erunt tum latera B C, C K, quam A B, F K, & anguli B, K: propterea quod duo anguli A, C, trianguli A B C, duobus angulis F, C, trianguli F K C, æquales sunt: (cum A, F, recti sint, & duo anguli C, reliqui duorum rectorum, dempto communi A C K) & latera A C, C F, illis adiacentia æqualia, ob quadratum C D. Quare recta B I, C K, inter se et- e tiam æquales erunt. f Cum ergo quoque sint parallelæ, g erunt etiam B C, I K, æquales, & parallelæ. Quadratum igitur est B C K I, lateris f B C, cum quatuor eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti, quod anguli I, K, oppositis rectis C, B, æquales sint. Dico ergo, quadratum g C I, duobus quadratis B E, C D, æquale esse. Ducta enim ex H, per A, recta H T A L, ipsis B I, C K, parallela erit. Nam quia G E, h ipsi h B A, æqualis est, & E H, ipsi A D, hoc est, ipsi G I, qua ipsi A C, siue A D, ostensa fuit æqualis, erit &, addita communi E I, tota H I, toti G E, hoc est, ipsi A B, æqualis. Cum ergo H I, A B, sint etiam paral-



a 34. pri mi.

b 14. pri mi.

c 29. pri mi.

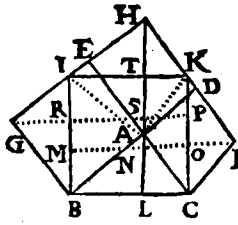
d 26. pri mi.

e 1. pri mi.

f 28 pri mi.

g 31. pri mi.

h 34 pri mi.



a 33. primi. lela, a erunt quoque B I, A H, parallelæ & æquales. Eodemq; modo A H, ipsi C K, parallela ostendetur, & æqualis. Quoniam igitur b tam quadratum B E, parallelogrammo B H, super eandem basim A B, quam parallelogrammum B T, eidem parallelogrammo B H, super eandem basim B I, æquale est, c erit quoque quadratum B E, parallelogrammo B T, æquale. Sic etiam quia tam d quadratum C D, parallelogrammo C H, super eandem basim A C, quam parallelogrammum C T, eidem parallelogrammo C H, super eandem basim C K, æquale est, c erit quoque quadratum C D, parallelogrammo C T, æquale. Totum ergo quadratum B C K I, ex duobus parallelogrammis B T, C T, compositum, duobus quadratis B E, C D, æquale est. Quod erat demonstrandum.

b 35. primi.

c 1. pronum.

d 35. primi.

e 1. pronum.

ALITER. Loco rectæ H T A L, jungantur duæ rectæ A I, A K, & per A, ipsis B I, C K, parallela ducatur T A L. Quoniam ergo f tam quadratum B E, (ostendemus enim & prius, B K, B E, C D, quadrata esse laterum B C, A B, A C.) trianguli A B I, super eandem basim A B, quam parallelogrammum B T, eiusdem trianguli A B I, super eandem basim B I, duplum est, g erit quadratum B E, parallelogrammo B T, æquale. Pari ratione, quia h tam quadratum C D, trianguli A C K, super eandem basim A C, quàm parallelogrammum C T, eiusdem trianguli A C K, super eandem basim C K, duplum est, i erit quoque quadratum C D, parallelogrammo C T, æquale. Quam ob rem, & prius, totum quadratum B C K I, ex parallelogrammis duobus B T, C T, constatum, duobus quadratis B E, C D, æquale est. Quod erat ostendendum.

f 41. primi.

g 6. pronum.

h 41. primi.

i 6. pronum.

ALITER. Loco rectarum H T A L, A I, A K, ducantur per F, G, ipsis B C, I K, parallelæ P M, G P, secantes A B, C K, in N, O, & B I, C E, in R, S. Eritque B R, ipsi K O, æqualis. Quoniam enim k anguli O, R, recti sunt, & O K F, R B G, æquales, quod & uterque angulo A B C, supra ostensum sit æqualis; erunt duo anguli O, K, trianguli F K O, duobus angulis R, B, trianguli G B R, æquales, & uterque utrique: Sunt autem & latera F K, B G, illis adiacentia æqualia, quod & utrumque supra sit ostensum ipsi B C, æquale. l Igitur & latera K O, B R, æqualia erunt. Itaque quoniam m tam parallelogramma B C F N, B C O M, super eandem basim B C, quam parallelogramma B C S G, B C P R, super eandem basim B C, æqualia sunt, estque parallelogrammum B C P R, parallelogrammo I K O M, æquale, ob rectas B R, K O, ostensas æquales; (Nam hinc fit, ut si unum alteri superponatur, sibi mutuo congruant, propter laterum, angulorumq; æqualitatem) erunt ambo parallelogramma B C F N, B C S G, toti quæ-

k 29. primi.

l 26. primi.

m 33 primi.

toti quadrato BCKI, ex duobus parallelogrammis BCOM, IKOM, compositio aequalia. a Cum ergo tam quadratum CD, parallelogrammo BCFN, super eandem basin CF, quam quadratum BE, parallelogrammo BCSG, super eandem basin BG, aequale sit; erunt quoque ambo quadrata CD, BE, eidem quadrato BCKI, aequalia. Quod demonstrandum erat. a 35. primi.

ATQVE in hunc modum alia demonstrationes excogitari poterunt. Video demonstrationem Euclidis simpliciorem esse, & magis expeditam, sed non iniucundum tamen est intelligere, variis demonstrationibus eandem veritatem posse confirmari.

INVENTIO porro admirabilis, atque pulcherrimi huius theorematis ad Pythagoram refertur, qui, vt scribit Vitruuius lib. 9. hostias Musis immolauit, quod se in tam praeclaro inuento adiuuerint. Sunt qui putent, eum immolasse centum boues: si tamen Proclo credendum est, vnum tantummodo obtulit. Fortasse autem Pythagoras, vt nonnulli volunt, ex numeris occasionem sumpsit; vt theorema hoc inuestigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter esset contemplatus, vidisset que quadratum numerum maioris aequalem esse quadratis numeris reliquorum, composuit triangulum scalenum, cuius maximum latus diuisum erat in 5 partes aequales, minimum in 3. eiusdem magnitudinis, & reliquum in 4. Quo facto, considerauit angulum sub his duobus lateribus contentum, inuenitque eum esse rectum. Idq; in quamplurimis aliis numeris, vt in 6. 8. 10. & 9. 12. 15. &c. obseruauit. Quare inquirendum esse iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis aequale esset, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem secundum dictos numeros, continebant vnum angulum rectum: Atque ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi voluptate adinuenit, firmaque ratione demonstrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 6. propos. 31. Vbi demonstrauit, non solum quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, aequale esse quadratis reliquorum duorum laterum; Verum etiam figuram quamlibet rectilineam super latus recto angulo oppositum constructam, siue ea sit triangulum, siue quadrangulum, &c. aequalem esse duabus figuris, quae super reliqua latera describuntur, dummodo priori sint similes, similiterq; descripta, vt ibidem ostendemus.

CÆTERVM quoniam mentionem fecimus trium numerorum, quorum maximi quadratum aequale est quadratis reliquorum, non abs re fuerit, paucis explicare, quonam pacto huiusmodi numeri inueniantur. Habitis igitur his tribus numeris 3. 4. 5. si duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. si idem triplicentur, exurgent alij tres 9. 12. 15. & si quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16. 20. Atque ita reperientur quotcunq; alij, si primi illi tres per quemcunque numerum

tiplicentur numerum. Traduntur tamen à Proclo duæ regulæ, quibus inueniuntur prædicti numeri, nulla habita ratione illorum trium. Prima ascribatur Pythagoræ, & est huiusmodi. Sumatur pro minimo quicunque numerus impar, vt 5. ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, vt hic ex 25. reiice vnitatem. Nam reliqui numeri dimidium, videlicet 12. erit alter numerus, cui si addatur vnitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum æquale est quadratis aliorum. Quod si numerus impar acceptus fuisset 3. essent reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula tribuitur Platoni, quæ talis est. Accipiatur numerus quicunque par, nempe 6. Ex huius dimidij quadrato, nimirum 9. detrahe vnum, eidemq; adde vnum, habebisq; reliquos duos numeros 8. & 10. primus autem est 6. nimirum numerus par acceptus. Hæc regula si accipiatur par 10. reperientur alij duo 24. & 26.

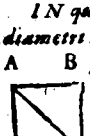
COLLIGVNTVR ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima scitu non iniucunda tam theoremata, quam problemata, è quibus visum est ea duntaxat in medium proferre, quæ vtilitatem magnam rebus Geometricis allatura creduntur, initium hinc sumentes.

I.

SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum à diametro descriptum duplum erit prædicti quadrati.

IN quadrato A B C D, ducatur diameter A C. Dico quadratum diametri A C, duplum esse quadrati A B C D. Cum enim in triangulo A B C, angulus B, rectus sit, a *erit quadratum lateris A C, æquale duobus quadratis laterum A B, B C. Cum igitur quadrata linearum A B, B C, æqualia sint, quod lineæ A B, B C, sint æquales, erit quadratum diametri A C, duplum cuiuslibet illorum, vt quadrati lineæ A B, hoc est, quadrati A B C D. Quod est propositum.*

a 47. primi.

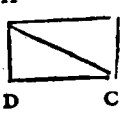


II.

QVADRATVM diametri figuræ altera parte longioris æquale est duobus quadratis laterũ inæqualium.

IN altera parte longiori A B C D, ducatur diameter A C; & quia in triangulo A B C, angulus B, est rectus, b *erit quadratum lateris A C, æquale duobus quadratis laterum inæqualium A B, B C. Quod est propositum.*

b 47. primi.

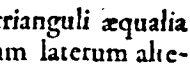


III.

SI fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis opposita sint æqualia, erunt duo quadrata reliquo-

reliquorum duorum laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius.

TRIANGVLORVM ABC, DEF, anguli A, & D, sint recti, lateráque opposita BC, EF, æqualia. Dico duo quadrata laterum AB, AC, simul sumpta æqualia esse duobus quadratis laterum DE, DF, simul sumptis. Nam quadrata linearum BC, EF, æqualia inter se sunt, cùm & ipsæ lineæ inter se ponantur æquales. Quadrato autem lineæ BC, a æqualia sunt quadrata linearum AB, AC. Et quadrato lineæ EF, æqualia sunt quadrata linearum AB, AC; Et quadrato lineæ EF, æqualia sunt quadrata linearum DE, DF. b Quadrata ergo rectarum AB, AC, quadratis rectarum DE, DF æqualia sunt. Quod est propositum.

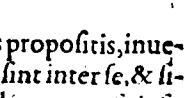


a 47. primi.
b 1. pronum.

IV.

DVOBVS quadratis inæqualibus propositis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia sint inter se, & simul sumpta æqualia duobus inæqualibus propositis simul sumptis.

SINT A, & B, latera duorum quadratorum inæqualium. Fiat angulus rectus DCE, sitq; DC, recta æqualis rectæ B, & recta CE, rectæ A. Ducta deinde recta DE, coniungente duo puncta D, E, constituantur super ipsam duo anguli semirecti DEF, EDF, c coeantq; rectæ DF, EF, in F. Quoniam igitur in triangulo FDE, anguli FDE, FED, æquales sunt; d erunt & latera DF, EF, æqualia, ideoq; & quadrata eorundem laterum æqualia. Dico iam, eadem quadrata linearum DF, EF, æqualia esse quadratis linearum A, & B, hoc est, quadratis linearum CE, & CD. Nam cùm in triangulo DEF, anguli FDE, FED, faciant vnum rectum; e erit reliquus angulus F, rectus. f Quamobrem erunt quadrata linearum DF, EF, æqualia quadrato lineæ DE: g Sed eidem quadrato lineæ DE, æqualia sunt quoque quadrata linearum CD, CE. Igitur quadrata linearum DF, EF, h æqualia sunt quadratis linearum DC, EC. Quod est propositum.



c 13. pronum.
d 6 primi.
e 32. primi.
f 47. primi.
g 47 primi.
h 1. pronum.

V.

PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus potest maior, quàm minor.

POTENTIA linea recta dicitur eius quadratum. Tantum enim quauis recta linea posse dicitur, quantum est eius quadratum. Sint ergo duæ lineæ inæquales A, & B, oporteatq; cognoscere, quanto

maius sit quadratum maioris lineæ A, quàm minoris B. Ex quauis



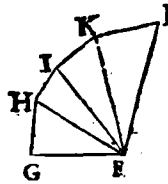
lineæ rectæ C D, sumatur C E, æqualis rectæ A, & E F, æqualis rectæ B. Deinde centro E, & interuallo E C, semicirculus describatur C G D; & ex F, ducatur F G, perpendicularis ad C D. Dico quadratum rectæ A, hoc est rectæ C E, sibi æqua-

lis, maius esse, quàm quadratum rectæ B, hoc est, rectæ E F, sibi æ-
247.pri mi. *qualis, quadrato rectæ F G. Ducta enim recta E G, a erit eius quadratum æquale quadratis rectarum E F, F G, hoc est, quadratum rectæ E C, illi æquale, superabit quadratum rectæ E F, quadrato rectæ F G. Quod est propositum.*

VI.

PROPOSITIS quotcunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale.

SINT latera quinque quadratorum A, B, C, D, E. Oporteat q̃ inuenire quadratum æquale omnibus illis quinque. Fiat angulus re-





ctus F G H, sit q̃ recta F G, æqualis recta A, & recta G H, recta B. Ducta deinde recta H F, fiat angulus rectus F H I, sit q̃ H I, æqualis recta C. Ducta rursus recta I F, fiat angulus rectus F I K, sit q̃ I K, æ-

qualis rectæ D. Ducta denique recta K F, fiat angulus rectus F K L, sit q̃ K L, æqualis rectæ E, ducatur q̃ recta F L. Dico quadratum rectæ F L, æquale esse quinq̃ qua-
b47.pri mi. *dratis propositis. Quadratum enim rectæ F H,* b *æquale est quadratis*
c47.pri mi. *rectarum F G, G H, hoc est, quadratis rectarum A, & B. Rursus qua-*
d47.pri mi. *dratum rectæ F I,* c *æquale est quadratis rectarum F H, H I, & id-*
e47.pri mi. *circo quadratis rectarum A, B, & C. Item quadratum rectæ F K,* d *æquale est quadratis rectarum F I, I K, ideoq̃ quadratis rectarum A, B, C, & D. Denique quadratum rectæ F L,* e *æquale est quadratis rectarum F K, K L, ac propterea quadratis rectarum A, B, C, D, & E. Quod est propositum.*

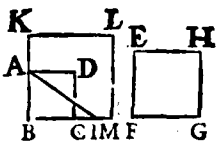
VII.

PROPOSITIS duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita vt tota figura composita sit etiam quadrata.

SINT duo quadrata A B C D, E F G H, propositum q̃ sit quadrato A B C D, apponere figuram, quæ sit æqualis quadrato E F G H, &c. Sumatur recta B I, æqualis rectæ F G, lateri quadrati E F G H. Du-

cta au-

Ita autem recta A I, & producta recta B A, ad partes A, accipiatur B K, æqualis rectæ A I, perficiaturq; quadratũ B K L M. Dico figuram A D C M L K, quadrato A B C D, adiunctam, æqualem esse quadrato E F G H. Quoniam enim quadratum rectæ A I, hoc est, quadratum B K L M, a *æquale est quadratis rectarum A B, B I, hoc est, quadratis A B C D, E F G H: si auferatur commune quadratum A B C D,* b *remanebit figura A D C M L K, æqualis quadrato E F G H. Quod est propositum.*



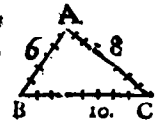
a 47. primi.

b 3. prænum.

VIII.

COGNITIS duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.

SIT angulus A, rectus in triangulo A B C, sintq; primùm cognita latera A B, A C, circa angulum rectum, quorum A B, ponatur 6. palmorum, & A C, 8. Quoniam igitur quadrata rectarum A B, A C, nempe quadrata palmi 36. & 64. c *æqualia sunt quadrato rectæ B C; si illa coniungantur simul, efficietur hoc quadratorum palmorum 100. Latus ergo B C, continebit 10. palmos. Tantum enim est latus, seu radix quadrata 100. palmorum, & perspicuum est apud Arithmeticos. Sint deinde cognita latera A B, B C, sitq; A B, 6. palmorum, & B C, 10. Quoniam igitur quadrata rectarum A B, A C,* d *æqualia sunt quadrato rectæ B C; si quadratum rectæ A B, quod continet palmos 36. detrahatur ex quadrato rectæ B C, quod est palmorum 100. remanebit quadratum rectæ A C, 64. palmorum. Latus ergo A C, continebit 8. palmos. Tantum enim est radix quadrata, seu radix 64. palmorum. Quod est propositum. Cæterùm non semper hac arte inuenientur numeri rationales, quia non omnis numerus habet latus, radicémve quadratum, & notum est apud Arithmeticos. Vnde latus inuentum sæpenumero exprimi nequit, nisi per radicem surdam, quam vocant: Sed de his alias.*



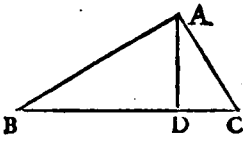
c 47. primi.

d 47. primi.

IX.

SI ex angulo à duobus lateribus inæqualibus triangulo comprehenso ad basin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum, secabitur basis in partes inæquales, maiórque pars iuxta maius latus erit. Et contrà, si basis à perpendiculari secetur non bifariam, erunt duo latera inæqualia, maiusque illud erit, quod maiori basis segmento adiacet.

CADAT



CADAT primum in triangulo ABC, cuius latus AB, maius sit latere AC, perpendicularis AD, ad ABC, demissa intra triangulum, quod tum demũ continget, quando vterque angulus B, C, acutus est, vt ex coroll. 2. propos. 17. constat. Dico segmentum BD, esse maius segmento CD. Quoniam enim

247 primi. *a tam quadratum ex AB, quadratis ex AD, BD, quàm quadratum ex AC, quadratis ex AD, CD, aquale est: Est autem quadratum ex AB, maius quadrato ex AC, quod latus AB, latere AC, penatur maius; erunt quoque duo quadrata ex AD, BD, maiora duobus quadratis ex AD, CD: Et ablato communi quadrato recta AD, reliquum quadratum ex BD, reliquo quadrato ex CD, maius erit. Quare & recta BD, maior erit, quàm recta CD, quod est primum.*

FACIAT deinde perpendicularis AD, segmentum BD, maius segmento CD. Dico latus AB, maius esse latere AC. Erit enim quadratum ex BD, quadrato ex CD, maius: Additoq; quadrato communi ex AD; duo quadrata ex BD, AD, duobus quadratis ex

b 247 primi. *CD, AD, maiora erunt. Cùm ergo b tam quadratum ex AB, quadratis ex BD, AD, quàm quadratum ex AC, quadratis ex CD, AD aquale sit; erit quoque quadratum ex AB, quadrato ex AC, maius; propterea q; & latus AB, latere AC, maius erit. Quod est propositum.*

ATQVE in hunc modum plurima alia ex inuento hoc Pythagoræ colligi possunt, quæ consulto, ne lectori molesti simus, hic omittenda censuimus, & in alium locum differenda.

THEOREMATE porrò hoc Pythagoreo multò vniuersalius est illud, quod à Pappo demonstratur in omni triangulo, siue illud rectangulum sit, siue non, & de quibuscunque parallelogrammis super latera trianguli constructis tam rectangulis, quàm non rectangulis, etiamsi non sint inter se aquiangula. Quod nos in formam theorematis redigentes, clarius hoc modo proposuimus, & meo iudicio generalius adhuc, quàm Pappus.

IN omni triangulo, parallelogramma quæcunq; super duobus lateribus descripta, æqualia sunt parallelogrammo super reliquo latere constituto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli illius producantur.

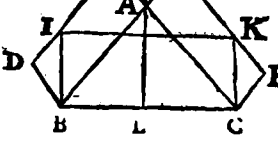
SIT triangulum quodcunque ABC, constituanturq; super latera

tera AB, AC, parallelogramma quæcunque $ABDE$, $ACFG$, quorum latera DE, FG, quæ lateribus AB, AC, assumptis in triangulo opponuntur, producta ad partes anguli A, dictis lateribus AB, AC, comprehensi, conueniant in H, ducaturq; recta AH. Dico parallelogramma AD, AF, æqualia esse parallelogrammo super latus BC, descripto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ AH. Producta enim HA, secet BC, in L, & per B, C, agantur BI, CK, parallelæ ipsi AH, iungaturq; recta IK. Quoniam igitur parallelogramma sunt BI, HA, CK, HA; a erit vtraq; BI, CK, ipsi AH, æqualis; atque adeò & inter se æquales erunt BI, CK; b quæ cum sint etiam parallelæ, quòd eidem AH, parallelæ sint; c erunt quoque BC, IK, parallelæ, & æquales. Quare parallelogrammum est $BCKI$, super latus BC, habens alterum latus BI, rectæ AH, æquale, & parallelum: Cui quidem æqualia ostendenda sunt parallelogramma AD, AF. d Quia ergo æqualia sunt parallelogramma AD, $ABIH$, quòd eandem habeant basin AB, in eisdemq; sint parallelis AB, HD; e Est autem $ABIH$, parallelogrammo IL, æquale, quòd illud cum hoc etiam eandem habeat basin BI, in eisdemq; sit parallelis BI, LH: Erit quoque AD, eidem IL, æquale. Nouo aliter ostendemus, AF, ipsi KL, esse æquale: Quare parallelogramma AD, AF, parallelogrammo BK, æqualia sunt. Quod est propositum.



a 34 pri mi. b 30. primi. c 33 pri. d 35. pri. e 35. pri.

PAPPVS construit figuram aliter. Nam sumit rectas AG, AE, & AB, AG, in directum positas, ita vt parallelogramma AD, AF, sint æquiangula, habentia angulos AED, AGF angulo BAC, (interuos externo æquales, cuius hæc eius figura indicat. Sed nos vniuersalium rerum propositiones, vt manifestum est.



f 29. pri.

THEOR. 34. PROPOS. 47. xlvij.

SI quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

DETVR triangulum ABC, sitq; quadratum lateris AC, æquale quadratis reliquorum laterum BA, BC. Dico angulum ABC,

A B C, esse rectum. Ducatur namque B D, perpendicularis ad B A, & æqualis rectæ B C, connectaturq; recta A D. Quoniã igitur
a 47. pri. in triangulo A B D, angulus A B D, rectus est; a erit quadratum rectæ A D, æquale quadratis rectarum B A, B D: Est autem quadratum rectæ B D, quadrato rectæ B C, æquale, ob linearum æqualitatem. Quare quadratum rectæ A D, quadratis rectarum B A, B C, æquale erit. Cùm ergo quadratum rectæ A C, eisdem quadratis rectarum B A, B C, æquale ponatur; b etunt quadra-
b 1. pro- ta rectarum A D, A C, inter se æqualia, ac propterea & rectæ ipsæ
blem. A D, A C, æquales. Quoniã igitur latera B A, B D, trianguli A B D, æqualia sunt lateribus B A, B C, trianguli A B C; & basis A D,
c 8. pri. ostensa est æqualis basi A C; c etunt anguli A B D, A B C, æquales: Est autem angulus A B D, ex constructione rectus. Igitur & angulus A B C, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

CONVERSVM est autem theorema hoc præcedentis theorematis Pythagorici, vt perspicuum est.

TRIANGVLORVM COMparationes.

NOVEM modis duo triangula inter se comparauit Euclides hoc libro. Primum quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, con-
d 4. pri. tinentque angulum angulo æqualem, d collegit æqualitatem basium, reliquorum angulorum, atq; adeò totorum triangulorum.

DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æ-
e 8. pri. qualia sunt, vtrumq; vtrique, basisq; basi æqualis, e intulit æqualitatem angulorum illis lateribus comprehensorum. Vbi nos concluſimus etiam æqualitatem reliquorum angulorum, totaq; triangula probauimus esse æqualia.

TERTIO, cùm duo latera duobus lateribus sunt æqualia, vtrumque vtrique, comprehendunt autem an-
f 24. pri. gulos inæquales, f ostendit basin maiori angulo oppositam esse maiorem basi minori angulo oppositæ.

QVAR-

QVARTO, cùm duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumq; vtrique, at bases inæquales, *a* demonstrauit angulum maiori basi oppositum esse maiorem angulo minori basi opposito. a 25. pri.

QVINTO, quando duo anguli duobus angulis æquales sunt, vterque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus angulis adiacet, siue quod vni æqualium angulorum opponitur, *b* probauit reliqua latera vnius reliquis lateribus alterius esse æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo. Vbi nos docuimus sequi etiam, tota triangula esse æqualia. b 26. pri.

SEXTO, *c* demonstrauit, duo triangula super eandem basin, & inter easdem parallelas constituta, esse æqualia. c 37. pri.

SEPTIMO *d* ostendit, duo triangula super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, æqualia esse. d 38. pri.

OCTAVO *e* docuit, duo triangula æqualia super eandem basin, & versus eandem partem constituta, esse inter easdem parallelas. e 39. pri.

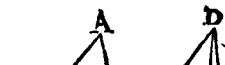
NONO denique *f* probauit, duo triangula æqualia super æquales bases in eadem linea, in eandemque partem constituta, esse inter easdem parallelas. f 40. pri.

ATQVE his modis argumentandi in duobus triangulis propositis vniuersa ferè Geometria niti videtur, vt propterea diligenter memoriæ mandandi sint. Quemadmodum autem à propos. 26. in scholio propos. 31. excluſimus duas comparationes, quãdo nimirum duo anguli duobus angulis æquales sunt, & vnũ latus vni lateri æquale, non quidem quòd æqualibus adiacet angulis, vel quòd vni æqualium angulorum opponitur in vtroque triangulo: sed quòd in vno quidem angulus æqualibus adiacet, in altero verò vni æqualium angulorum opponitur: vel quòd in vno opponitur vni æqualium angulorum, in altero verò alteri æqualium angulorum: Quemadmodum, inquam, duas hasce comparationes excluſimus, quòd ex iis non sequatur reliquorum laterum æqualitas, vt in scholio propos. 31. demonstrauimus: Ita

quo-

quoque à propoſ. 4. excludendæ ſunt tres comparationes, ex quibus nullo modo inferri poteſt baſium æqualitas.

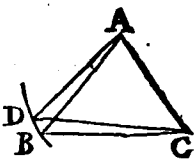
PRIMVM enim quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, qui vni æqualium laterũ opponitur, baſes æquales eſſe nequeunt; niſi quando angulus in vtroque triangulo alteri lateri æquali oppoſitus, vel eſt minor recto, vel non minor recto.



SIT enim Iſoſceles D F G, habens latera D F, D G, æqualia, & producta baſe F G, vſque ad E, iungatur recta E D, & triangulo D E G, æquale triangulum conſtruatur A B C, cuius latera A B, A C, lateribus D E, D G, æqualia ſint, & baſis B C, baſi E G. Sunt igitur duo latera A B, A C, duobus lateribus D E, D F, æqualia, vtrũq; vtriq;, angulíq; B, E, æqualib. lateribus A C, D F, oppoſiti æquales; & tamen baſis B C, maior eſt baſe E F; quod B C, ipſi E G, æqualis ſit. Ratio eſt, quòd angulus C, acutus eſt, at a 5. pri. *D F E, obtuſus. Nam cùm* a *anguli D F G, & G, æquales ſint,* b 17. pri. *& ſimul ſumpti minores duobus rectis; erit vterque minor recto, ac proinde D F E, recto maior; quandoquidem* c 13 pri. *duo anguli ad F, æquales ſunt duobus rectis. Quòd ſi duo latera A B, A C, duobus lateribus D E, D G, ſint æqualia, angulusq; B, angulo E, & vterque angulus C, G, vel minor recto, vel non minor; tam demum ſequitur, baſes B C, E G, æquales eſſe, &c. Nam ſi baſis B C, minor eſſet, quàm E G; ſi A B, ipſi D E, ſuperponeretur, congrueret quidem B C, ipſi E G, propter æqualitatem angulorum B, E, ſed punctum C, citra G, caderet, vt in F. Quia igitur latera D F, D G, æqualia ſunt, quod D F, idem ſit, quod* d 5 pri. *A C, ipſi D G, æquale;* d *erunt anguli D F G, & G, æquales, ac* e 17. pri *propterea vterque minor recto: quòd* e *ambo minores ſint duo-* f 13 pri. *bus rectis. Cùm igitur* f *duo anguli ad F, ſint duobus rectis æquales, erit D F E, hoc eſt, C, quia D F E, non differt, recto maior. Non ergo vterque angulus C, & G, minor eſt, aut non minor recto, ſed G, quidem acutus, & C, obtuſus, quod eſt contra hypotheſin. Eodem modo, ſi baſis B C, dicatur eſſe maior baſe E F, poſitis lateribus A B, A C, æqualibus ipſis D E, D F, & angulo B, æquali*

quali ipſi E, & vtroque angulo G, & F, vel minore recto, vel non minore) cadet punctum C, vltra F, vt in G; eritq; rurſus angulus quidem C, hoc eſt, G, acutus, & D F E, obtuſus, quod eſt contra hypotheſin.

DEINDE, *quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, ita vt vnus vni æqualium laterum, & alter alteri opponatur, nihil etiam colligi poteſt. Nam ſit triangulum A B C, cuius latus A B, maius ſit latere A C. Erit* a *ergo angulus A C B, maior angulo A B C. Fiat angulus A C D, angulo A B C, æqualis: cadetq; CD, ſupra C B. Deſcribatur quoque ex A, per B, arcus circuli ſecans C D, in D, iungaturq; recta A D. Sunt igitur duo latera A B, A C, duobus lateribus A D, A C, æqualia, vtrumque vtrique, & angulus A B C, lateri A C, oppoſitus, æqualis angulo A C D, lateri A D, oppoſito. Et tamen baſes B C, D C, æquales non ſunt. Si enim æquales eſſent, eſſent tam duæ rectæ A B, A D, quàm duæ C B, C D, æquales,* b *quod eſt abſurdum. vel etiam anguli B A C, D A C,* c *æquales eſſent, pars & totum. quod eſt abſurdum.*

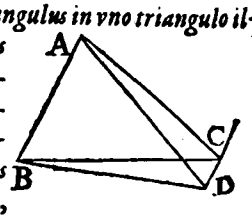


a 18. pri.

b 7. pri.

c 8. pri.

POSTREMO, *quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & angulus in vno triangulo illis lateribus comprehenſus, æqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur vni illorum laterum, nihil etiam poteſt inferri. Sit namque triangulum A B C, cuius vtrumque latus A C, C B, maius ſit latere A B, & B C, maius, quàm A C. Erit* d *ergo angulus B A C, maior angulo A B C. Si igitur fiat angulus A B D, angulo B A C, æqualis, cadet B D, infra B C. Deſcribatur quoque arcus circuli ex A, per C, qui infra B C, cadet, ſecabitq; B D, in D. Iuncta igitur recta A D, erunt duo latera A B, A C, duobus lateribus A B, A D, æqualia; vtrumque vtrique, angulusq; B A C, illis lateribus A B, A C, comprehenſus, æqualis angulo A B D, qui lateri A D, oppo-*



d 18. pri.

nitur: Et tamen baſes BC, BD, æquales non ſunt. Aliàs tam
a 7.pri. rectæ AC, AD, quàm BC, BD, æquales eſſent, a quod eſt
b 8.pri. abſurdum. Vel etiam, b anguli BAC, BAD, æquales eſſent, to-
tum & pars, quod eſt abſurdum.

RECTE igitur Euclides propoſ. 4. præcepit angulum illis lateribus comprehenſum in vno triangulo debere eſſe æqualem angulo alterius trianguli, qui illis quoque lateribus comprehenditur: quandoquidem ſine hac conditione nihil colligere licet, vt demonſtrauimus.

FINIS ELEMENTI PRIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM SECVNDVM.

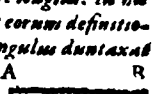
DEFINITIONES.

I.

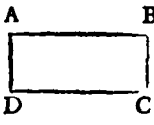
OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.

AGIT Euclides secundo hoc libro de potentijs linearum rectarum, inquirendo, quanta sint & quadrata partium cuiusuis lineæ rectæ diuisæ, & parallelogramma rectangula sub partibus eiusdem lineæ diuisæ comprehensa, tam inter se, quàm comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod vt commodè exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonstranda sunt, rectè intelligenda maximè necessaria.

PRIORI definitione exponit, sub quibus rectis lineis contineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum: Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod vt intelligatur, explicandum primum est, Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli sunt recti. Cuius quidem duo tantum sunt genera. Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, vt perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porrò parallelogrammo, si vnus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessariò recti. Sit enim in parallelogrammo A B C D, angulus A, rectus. Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoque esse. Num cum parallela sint A D, B C, a earum anguli A, & B, interni duobus



a 29. pri. rectis æq.



a 34. primi. B *rectus aequales: At angulus A, rectus est, ex hypothesi. Igitur & B, rectus erit. Quoniam verò a quilibet suo opposito est aequalis, vt angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.*

DICIT itaq; Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub duabus rectis lineis, quæ vnum eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum A B C D, contineri dicitur sub duabus lineis rectis A B, A D, vel sub A D, D C, vel sub D C, C B, vel denique sub A B, B C: quoniam qualibet huiusmodi duæ linea exprimunt totum parallelogrammi magnitudinem, vna quidem vt A B, vel D C, eius longitudinem, altera verò, vt A D, vel B C, eius latitudinem. Vnde expressis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota eius quantitas concipitur, intelligiturq; longitudo nimirum, atq; latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario vnius linea in alteram huiusmodi parallelogrammum conficitur. Si namq; animo concipiatur recta A B, deorsum secundum rectam A D, moueri in transuersum, ita vt semper angulum rectum cum A D, constituat, donec punctum A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, descriptum erit totum parallelogrammum A B C D. Idem fiet, si A D, ponatur moueri in transuersum secundum rectam A B, &c. Quamobrem iure optimo sub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogrammum rectangulum.



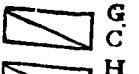
ITA QVE parallelogrammum rectangulum, quod sub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud, cuius duo latera circa vnum angulum recti aequalia sunt duabus illis rectis lineis, vtrumq; vtrique. Vt parallelogrammum rectangulum sub rectis E, & F, contentum, erit idem, quod parallelogrammum A B C D: quoniam latus A B, aequale est rectæ E, & latus A D, rectæ F.

PERSPICVVM autem est ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum sub duabus lineis aequalibus esse quadratum. Cùm enim qualibet illarum linearum aequalium aequalis sit linea opposita, erunt omnia quatuor parallelogrammi rectanguli latera aequalia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.

ITEM manifestum est, si duæ rectæ lineæ alijs duabus rectis lineis aequales fuerint, vtraque vtrique, rectangulum parallelogrammum sub prioribus duabus comprehensum, aequale esse ei, quod sub duabus posterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius aequalia sunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facilè hac etiam ratione demonstrari potest. Sint rectæ A B, B C, aequales rectis D E, E F, vtraq; vtriq;. Dico parallelogrammum rectangulum A B C G, contentum sub A B, B C, aequale

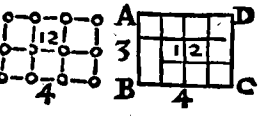
esse

esse parallelogrammo rectangulo D E F H, con-
stanto sub D E, E F. Ductis etenim diametris A C,
D F, eiusq; latera A B, B C, trianguli A B C, aqua-
lia sint lateribus D E, E F, trianguli D E F, & an-
guli B, & E, aquales, nempe recti; a erunt trian-
gula A B C, D E F, aqualia. Eadē ratione aqualia erūt triangula A G C,
D H F. Quare totum parallelogramma A B C G, D E F H, aqualia erunt.

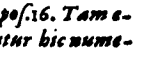


a 4. pri.

H A B E T autem comprehensio hac phrallelogrammi rectanguli
sub duabus rectis lineis angulum rectum continentibus, magnā affi-
nitatem cum multiplicatione ꝺnius numeri in alterum. Sicut enim ex
multiplicatione 3. in 4. producitur numerus 12. qui in formam paral-
lelogrammi constituitur, ꝺnde & contineri dicitur sub 3. & 4. Ita quo-
que parallelogrammum A B C D, comprehensum sub duabus rectis
A B, B C. quarum illa sit 3. palmorum,
hac autem 4. constat 12. palmis qua-
dratis, qui quidē ex ductu linea A B,
3. palmorum in lineam B C, 4. palmo-
rum producuntur, ꝺt figura indicat,
notumq; est Arithmeticis, atq; Geo-
metris, demonstraturq; à Ioanne Regiomont. lib. 1. de triangulis, pro-
pos. 16. Hinc fit, ꝺt nonnulli dicant, parallelogrammum rectangulum
gigni ex ductu duarum linearum circa angulum rectum ꝺnius in al-
teram. Vt proximè antecedens parallelogrammū ex ductu linea A B,
in lineam B C, ꝺel (quod idem est) ex ductu linea B C, in lineam A B.
Idem enim parallelogrammum procreatur, sive minor linea in maio-
rem, sive maior in minorem ducatur: quemadmodum etiam idem pro-
ducitur numerus, sive minor numerus in maiorem, sive maior in mi-
norem ducatur, ꝺt ab Euclide demonstratur lib. 7. propos. 16. Tam e-
nim ex multiplicatione 3. in 4. quàm ex 4. in 3. producitur hic nume-
rus 12.



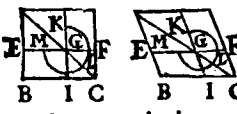
O B I T E R quoq; monendus mihi lector ꝺidetur, Euclidem in hoc
secundo libro, & in alijs, qui sequuntur, parallelogrammum rectan-
gulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam cateri Geometra
obseruant, ita ꝺt nomine rectanguli perpetuò intelligendum sit paral-
lelogrammū rectangulum. Rursus, ne totties eadem li-
tera repetantur, solent Geometra exprimere parallelo-
grammum tam rectangulum, quam non rectangulum duabus duntaxat literis, qua per diametrum opponuntur. Vt appositum parallelo-
grammum appellant A C, ꝺel B D.



II.

IN omni parallelogrammo spatio, vnumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

IN parallelogrammo A B C D, ſiue rectangulum illud ſit, ſiue non, ducatur diameter A C, ex cuius puncto quolibet G, ducantur recta E F, H I, parallela lateribus parallelogrammi, ita vt parallelogrammum diuiſum ſit in quatuor parallelogramma, quorũ duo E H, I F, dicuntur eſſe circa diametrum, alia verò duo B G, G D, complementa, vt manifeſtum eſt ex vltima definitione primi lib. Itaq; figura compoſita ex parallelogrammo vtrolibet circa diametrũ, vt ex I F, vna cum duobus complementis B G, G D, qualis eſt figura E B C D H G E, quam complectitur circumferentia K L M, dicitur Gnomon. Eadem ratione figura F D A B I G F, compoſita ex parallelogrammo E H, circa diametrum, & duobus complementis B G, G D, Gnomon appellabitur.



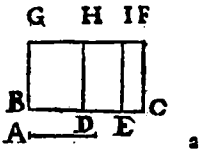
SED iam ad propoſitiones ſecundi huius lib. veniamus, in quibus ſanè opera pretium fuerit, multum laboris in eis exquiſitè intelligendis ponere, propter multiplicem earum vſum cùm in rebus Geometricis, tum in humanis commercijs. Nam ex nonnullis harum propoſitionum demonſtrantur regula illa admirabiles Algebræ, quibus vix credo in diſciplinis humanis præſtantius aliquid reperiri, quippe cùm miracula quædam numerorum (vt ita dicam) eruant tam abſtruſa, ac recondita, vt facultas illa omnem captum humanum ſuperare videatur, tanta nihilominùs facilitate, atq; voluptate, vt facilius videatur eſſe nihil. Ex alijs deinde propoſitionibus huius lib. elicuntur demonſtrationes, quibus inter ſe adduntur, ſubtrahuntur, multiplicantur, atq; diuiduntur numeri ſurdi (quos dicunt) hoc eſt, qui nullo modo exprimi poſſunt; cuiuſmodi ſunt radices numerorum non quadratorũ, aut non cubicorum, quæ neq; per Diuinam potentiam in numeris poſſunt exhiberi, quòd hac res contradictionem implicet, vt Philoſophi atque Theologi loquuntur. Quo quid admirabilius? Quis enim credat, per demonſtrationem ſciri poſſe, quid producatur ex radice quadrata numeri 8. ad radicem quadratam num. 18. adiecta, cùm vtraq; radix incognita ſit, & nulla ratione exprimi queat, quòd illa paulo minor ſit, quàm 3. hac verò paulò maior quàm 4? Et tamen ſumma, quæ ex vtraq; fit, colligitur ex 6 propoſitionis 4. huius lib. radix quadrata numeri 50. quæ paulò maior eſt, quàm 7. Præterea ex propoſ. 12. & 13. eiuſdem huius lib. area, & quantitas cuiuſuis trianguli exquiſitiſſimè cognoſcitur, ex qua cognitione rurſus dimenſio omnium magnitudinum fluit, atq; dimanat. Poſtremò vltima propoſ. huius lib. omnem figuram rectilineam licet irregularem, vel etiam plures, ad quadratum æquale mira facilitate reducit. Vt verè aureus dici mereatur hic liber, cum mole quidem ſit perexiguus, vtilitate verò contineat prope infinitas.

THEOR.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, seceturq; ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & B C, quarum B C; secetur quomodocunque in quotlibet segmenta B D, D E, E C. Dico rectangulum sub A, & B C, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indiuisa A, & quolibet segmento comprehenduntur, nempe rectangulo sub A, & B D; Item sub A, & D E; Item sub A, & E C, comprehenso.



Rectangulum enim B F, comprehendatur sub A, & B C, hoc est, recta G B, æqualis sit rectæ A. Quod quidem fiet, si erigantur ad B C, duæ perpendiculares B G, C F, æquales rectæ A, ducaturq; recta F G. Nam rectæ B G, C F, *a* parallelæ erunt, ob rectos angulos B, C: Sed & *b* æquales inter se sunt, quod vtraque rectæ A, æqualis ponatur. *c* Igitur erunt quoque G F, B C, parallelæ, & æquales inter se: ac proinde rectangulum erit B F, contentum sub A, siue G B, & B C, ex defin. 1. huius lib. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ D H, E I, parallelæ ipsi B G, vel C F. Itaque D H, E I, cùm parallelæ sint ipsi B G, *d* inter se quoque parallelæ erunt. Rursus eædem, cùm ex constructione parallelogramma sint B H, B I, *e* æquales erunt rectæ B G, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta B G, æqualis est rectæ A, erit rectangulum B H, comprehensum sub insecta linea A, & segmento B D. Eadem ratione erit rectangulum D I, comprehensum sub A, & segmento D E. Item rectangulum E F, sub A, & segmento E C. Quare cùm rectangula B H, D I, E F, æqualia sint toti rectangulo B F; perspicuum est, rectangulum comprehensum sub A, & B C, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, & segmentis B D, D E, E C, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

a 28. pri
b 1. pro. num.
c 33. pri.
d 30. pri.
e 34. pri.

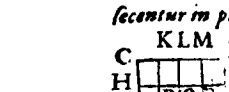
SCHOLIVM.

QVONIAM lib. 9. propos. 14. decem priora theoremata secundi huius libri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonstrabimus, si dimidiantur, vt linea; non abs re fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus verbis de lineis hic demonstrantur.

tur, præsertim cùm multiplicato numero vnius in alterum respondeat ductus vnius lineæ in alteram, vt suprà diximus. Itaq; propositis duobus numeris quibuscunq;, vt 6. & 10. diuidatur posterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. aqualem esse tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5 & 3. & 2. gignuntur: id quod perspicuum est.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus duo alia theoremata, quæ iam sequuntur.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis vnius, & quolibet segmentorum alterius continentur rectangulis.



SINT duæ rectæ A B, A C, rectum angulum A, continentes, quæ secentur in partes A D, D E, E F, F B; A G, G H, H C. Dico rectangulum sub rectis A B, A C, comprehensum æquale esse rectangulis, quæ sub A D, A G; A D, G H; A D, H C: D E, A G; D E, G H; D E, H C: E F, A G; E F, G H; E F, H C: F B, A G; F B, G H; F B, H C, continentur. Compleatur rectangulum A I, ducanturq; D K, E L, F M; parallelæ ipsi A C, vel B I. Item H N, G O, parallelæ ipsi A B, vel C I; quæ secent priores in P, Q, R, S, T, V. Quoniam igitur rectangulum A S, continetur sub A D, A G; & G P, sub A D, G H; & H K, sub A D, H C; (a quòd rectæ G S, H P, ipsi A D, sint æquales:) Item rectangula D T, S Q, P L, continentur sub D E, A G; D E, G H; D E, H C; (b quod D S, S P, P K, ipsis A G, G H, H C, æquales sint, & S T, P Q, ipsi D E.) Et eadem ratione rectangula E V, T R, Q M, continentur sub E F, A G; E F, G H; E F, H C: Nec non rectangula F O, V N, R I, sub F B, A G; F B, G H, F B, H C: perspicuum est, rectangulum sub A B, A C, æquale esse rectangulis sub singulis partibus A D, D E, E F, F B, & quolibet segmentorum A G, G H, H C, comprehensis. Quod est propositum.

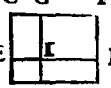
a 34 pri.

b 34 primi.

SI sint duæ rectæ lineæ, secenturq; ambæ vtcunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, vna cum rectangulo sub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenso, æquale est eis, quæ sub totis lineis, & dictis partibus mutuò continentur, rectangulis, vna cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso.

SINT duæ rectæ A B, A C, angulum continentes rectum A, quæ secentur vtcunque in D, & E. Dico rectangulum comprehensum sub A B, A C,

AB, AC, cum rectangulo comprehenso sub partibus AD, EC, aequale esse rectangulis contentis sub AB, EC; AC, AD; cum rectangulo sub DB, AE, comprehenso. Compleatur enim rectangulum AF, agaturq; per D, recta DG, ipsi AC, vel BF, parallela; nec non per E, recta EH, secans DG, vel, parallela ipsi AB, vel CF. Quoniam igitur rectangulum AF, aequale est rectangulis EF, DH, AI; si addatur commune EG, erunt rectangula AF, EG, nempe sub totis AB, AC, & partibus AD, EC, comprehensa, aequalia rectangulis EF, AG, DH, sub AB, EC; AC, AD; DB, AE, comprehensis aequalia. Quod est propositum.



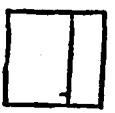
IN numeris etiam haec eadem perspicua sunt. Propositis enim duobus bisce numeris 10. & 8. quorum prior in tres partes, 2. 3. 5. posterior vero in duas, 3. 5. dividatur; perspicuum est, 80. numerum productum ex 10. in 8. aequalem esse sex numeris 6. 10. 9. 15, 15. 25. qui producuntur ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partem 3. 5. efficiuntq; simul additi 80. Ut volebat theorema 1. Federici.

RVRSVS, si iidem numeri secentur vtcunque, prior quidem in 3. 7. posterior autem in 2. 6. manifestum quoque est 80. numerum productum ex 10. in 8. cum 18. numero producto ex 3. in 6. aequalem esse tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum vtrobique efficiantur 98. Ut theorema 2. Federici optabat.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

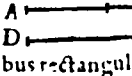
SI recta linea secta sit vtcunque: Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato.

RECTA linea AB, dividatur vtcunque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehensa sub tota, AB, & segmentis AC, CB, simul sumpta, æqualia esse quadrato totius lineæ AB. Describatur enim AD, quadratum lineæ AB, & ex C, ducatur CF, parallela rectæ AE, vel BD, quæ *a* æqualis erit rectæ AE, hoc est, rectæ AB, cui æqualis est recta AE, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta AE, æqualis est rectæ AB, erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Similiter erit rectangulum CD, comprehensum sub tota AB, & segmento CB. Quare cum rectangula AF, CD, æqualia sint quadrato AD, perspicuum est, rectangula comprehensa sub AB, & segmentis AC, CB, æqualia esse quadrato lineæ AB. Si igitur recta linea secta sit vtcunque, &c. Quod demonstrandum erat.



a 34. primi.

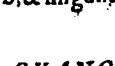
ALITER. Sumatur recta D, æqualis rectæ AB. Quoniam igitur AB, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub insecta D, & recta AB, hoc est quadratum rectæ AB, *a* æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur sub D, insecta, hoc est, sub AB, & singulis segmentis AC, CB. Quod est propositum.



a 1. *sec.*

SCHOLIVM.

QVANQVAM Euclides secundum hoc theorema proponat de linea recta diuisa in duas tantummodo partes, & eaque, idem tamen eisdem mediis demonstrabitur, si linea diuidatur in quotcunque partes, & ex his figuris manifestum est. In numeris verò idem perspicitur hoc modo. Numerus 10. *diuisus sit in duas partes* 7. *&* 3. *Dico numerum* 70. *&* 30. *qui producuntur ex multiplicatione* 10. *in* 7. *&* 3. *aequales esse* 100. *quadrato ipsius numeri* 10. *vt manifestum est. Simili modo si numerus* 10. *diuidatur in plures partes* 3. 2. 4. *&* 1. *erunt numeri* 30. 20. 40. *&* 10. *geniti ex* 10. *in* 3. 2. 4. *&* 1. *aequales* 100. *quadrato ipsius numeri* 10.

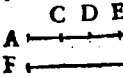




SIMILI modo demonstrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.

SI linea recta secetur in quotcunq; segmenta: Quadratum, quod à tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis.

SIT recta AB, diuisa in partes quotcunque AC, CD, DB. Dico quadratum ex AB, descriptum, aequale esse rectangulis, quae sub singulis partibus AC, CD, DB, & quolibet segmentorum AC, CD, DB, comprehenduntur; hoc est, rectangulis sub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD; DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB, comprehensis. Sumpta enim recta EF, quae aequalis sit ipsi AB, diuisaq; in partes EG, GH, HF, partibus AC, CD, DB, aequales. Erit ex iis, quae ad propos. 1. huius libri demonstrauimus, rectangulum sub AB, EF, hoc est, quadratum ipsius AB, aequale rectangulis sub AC, EG; AC, GH; AC, HF: CD, EG; CD, GH; CD, HF: DB, EG; DB, GH; DB, HF. Cum igitur partes AC, CD, DB, partibus EG, GH, HF, sint aequales; erit quoque quadratum ex AB, aequale rectangulis sub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD, DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB. Quod est propositum.

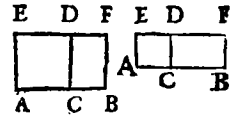


IN nu-

IN numeris idem est manifestum. Si enim numerus 10. *dividatur in* 2. 3. 5. *erit* 100. *quadratus totius æqualis his omnibus numeris* 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. *qui ex singulis partibus* 2. 3. 5. *in quamlibet partium* 2. 3. 5. *procreantur, vt perspicuum est.*

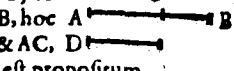
THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI recta linea secta sit vtcunque: Rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur, quadrato.



LINEA recta AB, diuisa sit vtcunque in puncto C. Dico rectangulum comprehensum sub tota AB, & vtrouis segmento, vt AC, (siue hoc segmentum maius sit, siue minus) æquale esse rectangulo sub segmentis AC, CB, comprehenso, & quadrato prioris segmenti assumpti AC. Constituatur enim quadratum dicti segmenti AC, quod sit AD: & ex B, educatur BF, parallela ipsi AE, donec coeat cum ED, protracta in F. Quoniam igitur AE, recta rectæ AC, æqualis est, ex quadrati definitione; erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Rursus, quia recta CD, eadem ratione æqualis est rectæ AC; erit rectangulum CF, comprehensum sub segmentis AC, & CB. Cum igitur rectangulum AF, æquale sit quadrato AD, & rectangulo CF; liquido constat, rectangulum sub AB, tota, & segmento AC, comprehensum esse æquale rectangulo comprehenso sub segmentis AC, CB, & quadrato prædicti segmenti AC. Itaque si recta linea secta sit vtcunque, &c. Quod erat ostendendum.

ALITER. Accipiatur recta D, æqualis segmento AC. Quoniam igitur recta AB, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub D, & AB, hoc est, sub AB, & AC, *a* æquale rectangulo sub D, & CB, hoc est, sub AC, CB, & rectangulo sub D, & AC, hoc est, quadrato segmenti AC. Quod est propositum.



a 1. *sex.*

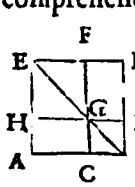
SCHOLIVM.

VT hoc theorema numeris accommodetur, sit numerus 10. *diuisus in* 7. *&* 3. *Dico numerum* 70. *productum ex* 10. *in* 7. *æqualem esse numero* 21. *qui ex* 7. *in* 3. *producitur, vna cum* 49. *quadrato prioris partis* 7. *Id quod res ipsa indicat. Pari ratione erit numerus* 30. *procreatus ex* 10.

ex 10. in 3. aequalis numero 21. producto ex 3. in 7. simul cum 9. quadrato praedicti numeri 3.

iiij. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secta sit vtcunque: Quadratum, quod à tota describitur, æquale est & illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

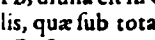


RECTA linea AB, diuisa sit vtcunque in C. Dico quadratum totius rectæ AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis AC, CB. Describatur enim super AB, quadratum AD, ducaturque diameter BE. Deinde ex C, agatur CF, parallela rectæ BD, secans diametrum in G, puncto, per quod rursus ducatur HI, parallela rectæ AB. Eritque quadratum AD, diuisum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE, æqualia sunt; *a* erunt duo anguli ABE, AEB, æquales: Atqui *b* tres anguli ABE, AEB, BAE, trianguli AB-E, duobus rectis sunt æquales, & BAE, rectus est. Reliqui ergo duo anguli ABE, AEB, semirecti erunt. Eadem ratione ostendes angulos DBE, DEB, semirectos esse. Quod etiam constat ex ijs, quæ ad 34. propos. lib. 1. demonstrauimus. Nam, vt ibi ostensum est, diameter BE, diuidit angulos rectos ABD, AED, bifariam. Quia ergo anguli quoque tres trianguli EFG, *c* æquales sunt duobus rectis, & angulus EFG, rectus est, *d* cum sit æqualis recto D, externus interno; nec non FEG, ostensus semirectus; erit & reliquus EGF, semirectus; ideoque æqualis angulo FEG. Quare *e* æqualia erunt latera EF, FG: quæ cum sint *f* æqualia oppositis lateribus GH, HE, erit parallelogrammum FH, quadratum, cum omnia eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti; propterea quod existente vno angulo recto, nempe FEH, vel F, in parallelogrammo FH, omnes quatuor recti sunt, vt ad defin. 1. huius lib. monstrauimus. Eadem ratione quadratum erit CI. Quamobrem CI, FH, quadrata sunt segmentorum AC, CB, quod latus HG, *g* æquale sit rectæ AC. Rectangula quoque AG, DG, comprehensa erunt sub segmentis AC, CB, propterea quod CG, GI, æquales sunt rectæ CB, ob quadratum CI; & FG, æqualis rectæ GH, ob quadratum FH, hoc est, *h* rectæ AC. Quocirca cum quadratum AD, æquale sit quadratis CI, FH, & rectangulis AG, DG; constat quadratum AD, totius lineæ AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso sub eisdem segmentis AC, CB, bis sum-

a 5. pri. mi.
b 32. pri mi.
c 32 pri mi.
d 29. pri mi.
e 6. pri.
f 34. pri mi.
g 34. pri mi.
h 34 pri mi.

bis ſumpto. Igitur ſi recta linea ſecta ſit vtcunque, quadratum, quod à tota deſcribitur, &c. Quod demonſtrandum erat.

ALITER. Quoniam recta A B, diuiſa eſt in C, *a* erit quadratum totius A B, æquale rectangulis, quæ ſub tota A B, & ſegmentis A C, C B, comprehenduntur: Rectangulum autem ſub A B, A C, comprehenſum, *b* æquale eſt rectangulo comprehenſo ſub A C, C B, & quadrato ſegmenti A C: Item rectangulum ſub A B, C B, comprehenſum, æquale eſt rectangulo ſub C B, A C, comprehenſo, & quadrato ſegmenti C B. Igitur quadratum rectæ A B, æquale etiam eſt quadratis ſegmentorum A C, C B, & rectangulis ſub A C, C B, & ſub C B, A C. Quod eſt propoſitum.



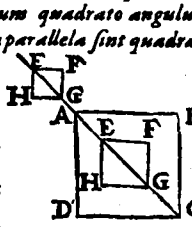
a 2. *ſec.*

b 3. *ſec.*

COROLLARIVM I.

HINC manifeſtum eſt, parallelogramma circa diametrum quadrati eſſe quadrata.

CONSTAT hoc ex priori huius theorematis demonſtratione, in qua oſtenſum eſt, rectangula C I, F H, quæ ſunt circa diametrum B E, eſſe quadrata. In omnibus enim aliis quadratis eadem erit demonſtratio. Eſt tamen corollarium iſtud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrum quadrati, quæ communem aliquem angulum habent cum toto quadrato, cuiuſmodi ſunt dicta parallelogramma C I, F H. Illud enim angulum habet A B D, communem cum quadrato, hoc verò angulum A E D. Idem nihilominus verum eſt de quibuſcunque parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela ſint quadrati lateribus. Circa enim diametrum A C, quadrati B D, conſiſtat parallelogrammum F H, ſiue intra quadratum, ſiue extra, quod tamen habeat latera lateribus quadrati B D, parallela. Dico F H, eſſe quadratum. Cum enim parallela ſint A B, E F, c *erunt anguli B A C, F E G, æquales, internus, & externus; atque eadem ratione anguli B C A, F G E, æquales erunt: Sunt autem anguli B A C, B C A, ſemirecti, vt oſtenſum iam fuit. Igitur & anguli F E G, F G E, ſemirecti erunt:* d *propterea q; latera E F, F G, illis oppoſita, æqualia,* e *& angulus F, rectus. Quare cum E F, F G, latera* f *æqualia ſint oppoſitis lateribus G H, H E, æquilaterum erit parallelogrammum F H: Sed & rectangulum eſt, ex iis, quæ ad defin. 1. huius lib. oſtendimus, propterea quod angulus vnus F, rectus eſt demonſtratus. Igitur F H, quadratum erit. Quod eſt propoſitum.*



c 29. *pri*

d 6. *pri.*

e 32. *pri*

f 34. *pri*

COROLLARIVM II.

SEQVITVR etiam ex demonſtratione huius propoſit. 4. diametrum

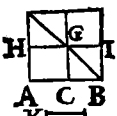
trum cuiuſuis quadrati diuidere eius angulos bifariam. Probatum enim fuit, angulos A E B, D E B, eſſe ſemirectos, &c. Id quod etiam ad propoſ. 14. lib. 1. demonſtrauimus.

SCHOLIVM.

IN numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit numerus 10. *diuiſus vtcunque in* 7. *&* 3. *Vides igitur* 100. *quadratum totius numeri aquale eſſe* 49. *&* 9. *quadratis partium* 7. *&* 3. *bina cum numero* 21. *qui ex* 7. *in* 3. *procreatur, bis ſumpto. Nam* 49. 9. 21. *&* 21. *efficiunt* 100.

PERFACILE autem erit ex hoc theoremate 4. *demonſtrato hoc aliud theorema.*

SI linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa deſcriptum, quadruplum eſt quadrati ex hac deſcripti. Et ſi quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum eſt lateris huius.



SIT enim primum linea A B, dupla linea K. Dico quadratum rectæ A B, quadruplum eſſe quadrati rectæ K. Nam diuiſa A B, bifariam in C, ſi fiat conſtructio, vt in 4, *hoc theoremate, erunt quatuor parallelogramma A G, C I, I F, F H, quadrata, atque inter ſe aqualia, cum omnia eorum latera ſint aqualia, omnesq; anguli recti, vt facile demonſtrari poteſt ex propoſ.* 34. *lib.* 1. *Quare cum quadratum A D, aquale ſit quatuor quadratis A G, C I, I F, F H, erit quadratum linea A B, quadruplum quadrati linea A C, hoc eſt, linea K, qua aqualis eſt ipſi A C. Eſt enim vtraque dimidium linea A B.*

a 4. *ſec.* *BREVIVS.* a *Quadratum rectæ A B, aquale eſt quadratis rectarum A C, C B, & rectangulo ſub rectis lineis A C, C B, bis comprehenſo. Cum igitur quadrata rectarum aqualium A C, C B, aqualia ſint; & rectangulum ſub aqualibus A C, C B, quadratum quoque ſit, atque aquale quadrato rectæ A C; Conſtat quadratum rectæ A B, quadruplum eſſe quadrati rectæ A C; cum aquale ſit quatuor quadratis, quorum vnumquodque quadrato rectæ A C, aquale eſt.*

SIT deinde quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus A B, duplum eſſe lateris K. Nam diuiſa recta A B, bifariam in C, vt A B, dupla ſit ipſius A C; erit, vt iam demonſtratum eſt, quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ A C. Ponitur autem & quadruplum quadrati rectæ K. Igitur aqualia ſunt quadrata rectarum K, & A C, & ipſa propterea recta K, & A C, aquales: Eſt autem A B, ex conſtructione ipſius A C, dupla. Dupla igitur etiam erit ipſius K. Hæc tamen omnia aliter demonſtrabimus ad propoſ. 20. *lib.* 6.

CÆTE-

CAETERVM ex hac propoſ. 4. colligi poteſt modus inueniendi numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum conſtituat. Si namq; ex dato numero auferatur 1. cui quadratus numerus ex reliqui numeri dimidio in ſe multiplicato productus, is qui quaeritur. Vt ſi datus ſit numerus 15. inueniendusq; numerus quadratus, cum quo datus numerus 15. faciat numerum item quadratum; detrahemus 1. ex 15. & reliqui numeri 14. dimidium 7. accipiemus. Nam numerus quadratus 49. ex eo dimidio in ſe multiplicato productus erit is, cum quo datus numerus 15. conſtituit 64. quadratum numerum, cuius latus eſt 8. nempe numerum vna vnitate maior, quam 7. latus quadrati inuenti. Ratio huius rei haec eſt. Quoniam quadratum AD, rectae AB, aequale eſt duobus quadratis FH, CI, partium AC, CB, vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub AC, CB; ſi gnomonem HBF, qui cum quadrato FH, conſtituit totum quadratum AD, ponamus 15. quantus nimirum eſt datus numerus: quadratum autem CI, ſtatuamus 1. atque adeo latus quoq; eius CB, 1. erit ſtrumuis rectangulorum AG, DG, 7. ac proinde ſegmentum AC, 7. vt nimirum ex AC, in CB, qua eſt 1. fiant 7. Quadratum ergo FH, erit 49. Totum autem latus AB, erit 8. nempe vna vnitate maius, quam AC, latus quadrati FH. Haec ergo eſt cauſa, cur ex dato numero, hoc eſt, ex gnomone HBF, detrahamus 1. & reliqui numeri dimidium ſtatuamus latus quadrati FH, quaſiti. 24. ſeſ.

VT autem numeri fracti vitentur, datus numerus debet eſſe impar, vt nimirum ablata 1. reliquus numerus diuidi poſſit bifariam. Regula nihilominus vera eſt, quicunque numerus datus ſit.

IDEM efficiemus, ſi ex dato numero quemuis quadratum numerum demamus, & reſidui dimidium per latus quadrati ablati partiamur. Quoties enim erit latus quadrati quaſiti. Vt ſi detur numerus 45. pro gnomone HBF, auferemus numerum quadratum 9. pro quadrato CI, cuius latus eſt 3. Reſidui 36. dimidium eſt 18. pro AG, quod diuiſum per 3. hoc eſt per CG, latus quadrati ablati CI, facit Quotientem 6. pro latere GH, cuius quadratum FH, nimirum 36. additum ad gnomonem HBF, nimirum ad 45. efficit quadratum numerum 81. Vt autem fractiones euitentur, dandus erit numerus, ita vt, ablato quadrato numero aliquo, reſiduus numerus habeat dimidium numerum, quem latus quadrati ablati numeret.

VICISSIM reperiemus numerum quadratum, à quo datus quiuis numerus ſubtractus relinquat numerum quoque quadratum. Nam ſi ex numero dato detur 1. & reliqui numeri dimidio adiungatur 1. conficietur latus quadrati quaſiti. Vt ſi rurſum datus ſit numerus 15. Detracta 1. erit reliqui numeri 14. dimidium 7. cui addita 1. fiet latus quadrati quaſiti 8. Si enim ex eius quadrato 64. detrahas 15. remanet quadratus numerus 49. cuius latus eſt 7. quod perpetuo eſt vna vnitate minus, quam latus quadrati inuenti. Ratio etiam

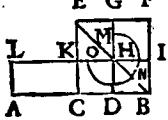
huius

huius regula facilius est ex eadem figura huius propos. 4. Nam si gnomonem H B F, qui ex quadrato A D, subtractus reliquum facit quadratum F H, ponamus 15. quantus nimirum est numerus datus. Quadratum verò C I, statuamus 1. atq; adeo & latus eius C B, 1. erit utrumlibet rectangulorum A G, D G, 7. ac proinde & segmentum A C, 7. vt supra dictum est, & totæ lineæ A B 8. &c.

V. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vna cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod à dimidia describitur, quadrato.

DIVIDATVR recta A B, bifariam in C, & per inæqualia in D, vt sectionum intermedia sit recta C D, qua nimirum dimidia C B, minus segmentum D B, superat, vel qua maius segmentum A D, dimidium A C, excedit. Dico rectangulum sub segmentis inæqualibus A D, D B, comprehensum, vna cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas est sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ C B. Describatur enim C F, quadratum super dimidia C B, & ducta diametro B E, ducatur ex D, recta D G, parallela rectæ B F, secans diametrum B E, in H, puncto, per quod ducatur rectæ B C, parallela I K: Item ex A, rectæ C E, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. præcedentis propos. D I, K G, quadrata, ideoque D H, recta rectæ D B, æqualis: *a* Est autem & K H, ipsi C D, æqualis. Quare rectangulum A H, comprehenditur sub A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C D. Probandum itaque est, rectangulum A H, vna cum quadrato K G, æquale esse quadrato C F. Quoniam ergo *b* complementa C H, F H, æqualia sunt; si addatur commune quadratū D I, erit parallelogrammum D F, parallelogrammo C I, æquale: *c* Est autem & A K, eidem C I, æquale, quod & bases A C, C B, æquales sint. Igitur D F, A K, æqualia etiam inter se erunt: quibus si commune apponatur C H, erit gnomon M N O, rectangulo A H, æqualis. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, æqualia sint quadrato C F; erit & rectangulum A H, vna cum quadrato K G, æquale eidem quadrato C F. Si recta ergo linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod ostendendum erat.



a 34. *primi.*

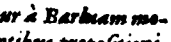
b 43. *primi.*

c 36. *primi.*

SCHOLIVM.

ALITER hoc theorema cum Francisco Maurolyco demonstrabimus,

bimus, eo modo, quo idem in numeris demonstratur à Barlaam monacho. quod etiam cum eodem Maurolyco in sequentibus propositionibus vsque ad 21. exclusiue faciemus. Demonstrationes autem has numeris accommodatas reperies ad propos. 14. lib. 9. Ita ergo propositum exequemur. Quia quadratum ex C B, a aequale est quadratis ex C D, D B, vna cum rectangulo bis sub D B, C D; Rectangulo autem sub D B, C D, vna cum quadrato ex D B, b aequale est rectangulum sub D B, C B; Erit quadratum ex C B, aequale reliquo quadrato ex C D, vna cum reliquo rectangulo sub D B, C D, & rectangulo sub D B, C B, vel sub D B, A C. Atqui rectangulis sub D B, A C, & sub D B, C D, c aequale est rectangulum sub D B, & tota A D. Igitur quadratum ex C B, aequale erit quadrato ex C D, vna cum rectangulo sub D B, A D; hoc est, rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex C D, aequale erit quadrato ex C B. Quod erat demonstrandum.



a 4. sec.

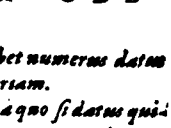
b 3. sec.

c 1. sec.

IDEM in numeris est manifestum. Diuidatur enim numerus 10. aqualiter in 5. & 5. Item inaqualiter in 7. & 3. ita vt medius numerus inter sectiones sit 2. quo videlicet dimidius numerus 5. superat minorem partem 3. &c. Vides igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, vna cum 4. quadrato intermedij numeri 2. aqualem esse 25. quadrato dimidij numeri 5.

EX hac etiam propos. 5. inuenietur alio modo numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque conficiat numerum. Nam si dato numero adiiciatur 1. & à compositi numeri dimidio detrahatur 1. reliquum fiet latus quadrati quaesiti. Vt si datus numerus sit 15. Addita 1. fit 16. à cuius dimidio 8. si demantur 1. manet 7. latus quadrati 49. cum quo datus numerus 15. componit numerum quadratum 64. cuius latus est 8. quod perpetuo est vna vnitate maior latere 7. quadrati inuenti. Ratio huius regulae ex demonstratione propos. 5. difficilis non est. Cum enim rectangulum A H, cum quadrato K G, d aequale sit quadrato C F; si rectangulum A H, poterit 15. sicut numerus datus; at vero quadratum D I, statuatur 1 ac proinde latus D B, quod erit recta A D, 15. Vt numerum ex A D, in D B, significatur 15. rectangulum videlicet A H. Addita ergo 1. erit tota linea A B. 16. à cuius dimidio 8. demptus 1. relinquetur C D, 7. latus nimirum quadrati K G.

d 5. sec.



HIC quoque, si fracti numeri vitandi sint, debet numerus datus esse impar, vt videlicet, addita 1. dimidi possit bifariam.

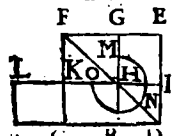
E contrario reperiemus numerum quadratum, à quo si datus quiuis numerus subtrahatur, reliquus fiat numerus quoque quadratus. Nam si ad datum numerum adiiciatur 1. erit dimidium compositi numeri latus quadrati quaesiti. Vt si rursum numerus 15. datus sit.

Addita 1. erit compositi numeri dimidium 8. latus quadrati 64. quæsiti. Si enim demas datum numerum 15. reliquus fiet quadratus numerus 49. cuius latus 7. perpetuo minus est vna vnitate, quam latus quadrati inuenti. Ratio huius rei perspicua quoque est ex eadem figura huius propos. 5. Nam si rectangulum AH, quod ex quadrato CF, ablatum relinquit quadratum KG, statuatur 15. sicut datus numerus; & quadratum DI, ponatur 1. atque adeo & DB, eius latus 1. erit tota AB. 16. & eius dimidium CB, 8. &c.

VJ. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur: Rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato à dimidia, æquale est quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.

SECETVR recta AB, bifariam in C, & ei in rectum addatur BD. Dico rectangulum comprehensum sub tota composita AD, & DB, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ CB, æquale esse quadrato lineæ CD, quæ ex dimidia CB, & adiecta BD, componitur. Describatur namque CE, quadratum super CD, & ducta diametro DF, ducatur ex B, recta BG, parallela rectæ DE, secans diametrum DF, in H, puncto, per quod agatur IK, parallela rectæ CD: Item ex A, ducatur rectæ CF, parallela AL, secans IK, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4. huius lib. BI, KG, quadrata, ideoque recta DI, rectæ DB, æqualis: *a* Est autem & KH, rectæ CB, æqualis. Quare rectangulum AI, comprehendetur sub rectis AD, DB; & KG, erit quadratum rectæ CB. Probandum itaque est, rectangulum AI, vna cum quadrato KG, æquale esse quadrato CE. Quoniam ergo parallelogrammum AK, *b* æquale est parallelogrammo CH, quod bases AC, CB, æquales sint: *c* Est autem & parallelogrammum HE, eidem CH, æquale, complementum complemento; erunt AK, HE, æqualia inter se. Addito ergo communi CI, erit rectangulum AI, gnomoni MNO, æquale. Quocirca cum gnomon MNO, & quadratum KG, quadrato CE, sint æqualia; erit & rectangulum AI, vna cum eodem quadrato KG, eidem quadrato CE, æquale. Itaque si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur, &c. Quod erat demonstrandum.



a 34. *primi.*

b 36 *primi.*

c 43 *primi.*

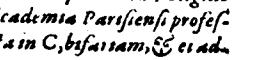
SCHO-

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex CD, æquale est quadratis ex CB, BD, ℭna cum rectangulo bis sub DB, CB, hoc est, quadratis ex CB, BD, ℭna cum rectangulis sub DB, CB, & sub DB, AC: (sumpta AC, semel pro CB, quæ illis æqualis ponitur.) Est autem rectangulum sub DB, AC; DB, CB; & sub DB, DB, (quod est quadratum ex DB) æquale rectangulum sub DB, & tota AD. Igitur quadratum ex CD, æquale est reliquo quadrato ex CB, ℭna cum rectangulo sub DB, AD: Hoc est, rectangulum sub AD, DB, ℭna cum quadrato ex CB. æquale est quadrato ex CD. Quod demonstrandum erat. a 4. sec. b 1. sec.



CÆTERVM si rem attentius considerare ℭ elimus, comperiemus propositionem hanc 6. per præcedentem 5. facillime posse demonstrari: id quod etiam eruditus vir, & in omni doctrinarum genere exercitatissimus, Maximus Brescius Gratianopolitanus, Regius olim Mathematicarum disciplinarum in Academia Parisiensi professor, animaduertit. Sit enim recta AB, secta in C, bifariam, & ei adiecta recta quantacunque BΓ. Dico rectangulũ comprehensum sub tota AD, composita, & adiecta BD, ℭna cum quadrato dimidiæ CB, æquale esse quadrato rectæ CD, ex dimidia, & adiecta composita. Addita namque recta AD, ex altera parte rectæ AE, quæ adiecta BD, æqualis sit, erit tota ED, secta in C, æqualiter, & in B, inæqualiter, quod EA, AC, ipsis DB, BC, æquales sint. Recta quoque EB, rectæ AD, æqualis erit, quod EA, ipsi DB, sit æqualis, & AB, vtrique communis. ℭ Rectangulum igitur sub partibus inæqualibus EB, BD, ℭna cum quadrato interiectionis CB, hoc est, rectangulum sub AD, ED, ℭna cum quadrato dimidiæ CB, æquale erit quadrato dimidiæ CD, hoc est, quadrato rectæ ex dimidia CB, data recta AB, & ex adiecta BD, compositæ. Quod est propositum. c 5. sec.



SECETVR iam numerus 10. bifariam, (vt & hoc theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturq; ei numerus 2. Videt igitur numerum 24. qui producitur ex toto numero compositò 12. in adiectum 2. ℭna cum 25. quadrato dimidij numeri, æqualem esse 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5 & adiecto 2. componitur.

EX hoc porro theoremate colligitur proprietas insignis Arithmeticæ proportionalitatis, quæ consistit in eodem semper excessu quantitatum proportionalium. Cum enim AD, superet CD, magnitudine AC, hoc est, CB; & CD, superet BD, eadem magnitudine BC, habebunt tres lineæ AD, CD, BD, proportionalitatem Arithmeticam; quandoquidem prima AD superat secundam CD, eodem excessu AC, siue CB, quo secunda CD, tertiam BD, superat. Quare cum ostensum

sit, rectangulum sub extremis A D, B D, vna cum quadrato excessus C B, æquale esse quadrato lineæ mediæ C D; perspicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectangulum sub extremis contentum, vna cum quadrato excessus, æquale esse quadrato lineæ mediæ. Semper enim tres lineæ Arithmetice proportionales ita inter se coniungi poterunt, vt efficiant vnam lineam bifariam diuisam, (quæ nimirum æqualis sit excessui inter primam & tertiam, & ex tertia. Vt patet si tres rectæ sint datæ A D, C D, B D. Si namque ex prima A D, abscindatur D C, æqualis mediæ, & ex media hac D C, auferatur tertia D B, erit A B, (excessus inter primam & tertiam) secta bifariam in C, eiq; addita tertia B D. Cum enim C B, excessus sit inter mediam C D, & tertiam B D, qui æqualis esse debet, ob proportionalitatem Arithmeticam, ipsi A C, nempe excessui inter primam A D, & mediam C D; erit necessario A B, secta in G, bifariam. Eademque ratio est in aliis. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent excessum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem excessum 3. habentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. vna cum 9. quadrato excessus 3. æqualis est quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

EX hac etiam propos. 6. reperiemus, vt ex 4. propos. numerum quadratum, cum quo datus quinis numerus quadratum quoque numerum componat. Nam si ex dato numero dematur 1. & reliquus numerus bifariam secetur, erit quadratus numerus huius dimidij is, qui quæritur. Vt si datus numerus sit 15. Dempta 1, relinquitur 14. cuius dimidium 7. dabit numerum quadratum 49. quæsitum. Nam 15. cum 49. facit quadratum numerum 64. cuius latus 8. vna vnitate maius est latere 7. quadrati inuenti. Huius rei ratio manifesta ex hac 6. propos. Cum enim rectangulum A I, cum quadrato G K,
6. sec. *æquale sit quadrato C E; si rectangulum A I, statuatur 15. at quadratum B I, 1. ideoque & latus B D, 1. erit tota linea A D, 15. vt nimirum multiplicata in B D, 1. producat rectangulum A I, 15. Ablata igitur 1. B D. remanet A B, 14. cuius dimidium 7. dabit C B, latus quadrati K G, quæsiti.*

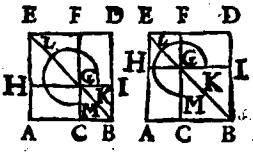
NECESSE autem etiam hic est, datum numerum esse imparem, vt fracti numeri vitentur, vt videlicet dempta 1. bifariam possit diuidi.

VERSA vice inueniemus numerum quadratum, à quo datus numerus detractus quadratum etiam numerum relinquat. Si enim ex dato numero tollatur 1. & reliqui numeri dimidio adiiciatur rursus 1. conficietur latus quadrati quæsiti. Vt si datus sit numerus 15. Dempta 1. erit 7. dimidium reliqui numeri 14. additaq; 1. fiet latus quadrati quæsiti 8. Nam si ex eius quadrato 64. subducas datum numerum 15. reliquus erit quadratus numerus 49. cuius latus 7. semper vna vnitate minus est latere inuento 8. Ratio est, quia si rectangulum

gulum AI, quod ex quadrato CE, ſubtractum relinquit quadratum KG, ſtatuatur 15. at quadratum BI, ideoque & BD, eius latus 1. erit tota linea AD, 15. vt dictum eſt. Dempta ergo 1. BD, erit AB, 14. cuius dimidio CB, quod eſt 7. ſi rurſus apponatur 1. fiet latus CD, 8. quod quæritur, &c.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

SI recta linea ſecetur vtcunque; Quod à tota, quodque ab vno ſegmentorum, vtraque ſimul quadrata, æqualia ſunt & illi, quod bis ſub tota, & dicto ſegmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato.



SECETVR recta AB, vtcunque in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum ſegmenti ſiue maioris, ſiue minoris AC, æqualia eſſe rectangulo bis comprehenſo ſub tota AB, & dicto ſegmento AC, vna cum quadrato reliqui ſegmenti CB. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum AD, & ducta diametro BE, ducatur ex C, recta CF, parallela rectæ AE, ſecans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela rectæ AB. Erunt igitur per corollarium 1. propoſ. 4 huius lib. CI, HF, quadrata: & quia recta GH, *a* æqualis eſt rectæ AC, erit HF, quadratum ſegmenti AC. Rurſus quia AE, æqualis eſt ipſi AB, erit rectangulum AF, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento AC. Eadem ratione rectangulum HD, comprehenſum erit ſub eiſdem rectis AB, AC, quod rectæ DE, EH, æquales ſint rectis AB, AC, ob quadrata AD, FH. Quoniam igitur rectangulis AF, FI, vna cum quadrato CI, hoc eſt, gnomoni KLM, vna cum quadrato CI, æquale eſt quadratum AD; ſi apponatur commune quadratum HF, erunt quadrata AD, HF, æqualia rectangulis AF, DH, (quorum quodlibet comprehenditur ſub tota AB, & ſegmento AC,) vna cum CI, quadrato reliqui ſegmenti CB. Si igitur recta linea ſecetur vtcunque, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 34. primi.

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex AB, b *æquale eſt quadratis ex AC, CB, & vna cum rectangulo bis ſub AC, CB; ſi addatur commune quadratum ex AC, erunt quadrata ex AB, AC, æqualia quadrato ex AC, bis, & quadrato ex CB, & vna cum rectangulo bis ſub AC, CB. Sed rectangulo ſub AC, CB, & vna cum quadrato ex AC,*

b 4. ſec.



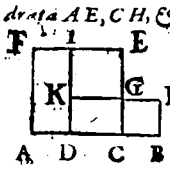
3. sec. *æquale est rectangulum sub AB, AC: Et proinde rectangulo bis sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, bis, æquale est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur quadrata ex AB, AC, æqualia sunt reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis sub AB, AC. Quod demonstrandum erat.*

IN numeris autem diuidatur numerus 10. *vtcunque in* 6. *&* 4. *Igitur* 100. *quadratus numerus totius numeri* 10. *&* 36. *quadratus numerus partis* 6. *æquales sunt numero* 120. *qui fit bis ex toto* 10. *in partem* 6. *vna cum* 16. *quadrato numero alterius partis* 4. *vt constat. Sic etiam* 100. *quadratus numerus totius numeri* 10. *&* 16. *quadratus numerus partis* 4 *æquales sunt numero* 80. *qui bis fit ex toto* 10 *in partem* 4. *vna cum* 36. *quadrato numero alterius partis* 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

SI recta linea in partes inæquales fecetur: Earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

SECETVR recta AB, in partes inæquales AC, CB, sitq; maior pars AC; ponatur autem minori parti CB, æqualis linea AD, vt DC, sit excessus, quo pars AC, superat partem CB. Dico quadrata partium AC, CB, æqualia esse rectangulo, quod bis continetur sub AC, CB, vna cum quadrato lineæ DC. Constituantur enim quadrata AE, CH, & agatur DI, ipsi CE, parallela, producaturq; HG, ad K. Itaque quoniam AD, ipsi CB, est æqualis, addita communi DC, erit tota AC, hoc est, CE, toti DB, æqualis: Est autem & CG, ipsi CB, æqualis, quod quadratum sit CH. Igitur & reliqua GE, reliqua DC, æqualis erit: Ac proinde, cum & IE, ipsi DC, sit æqualis, erunt GE, IE, æquales; ideoque IG, quadratum erit ab excessu DC, descriptum. Quoniam vero rectangula AI, DH, continentur sub partibus AC, CB, (Est enim AC, vtrique lineæ AF, DB, & CB, vtrique AD, BH, æqualis) manifestum est, quadrata AE, CH, partium AC, CB, æqualia esse rectangulis AI, DH, quæ continentur sub partibus AC, CB, vna cum quadrato IG, excessus DC. Quod est propositum.



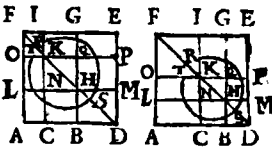
SCHOLIVM.

IN numeris. Secetur numerus 10. *inæqualiter in* 4. *&* 6. *ita vt maior pars superet minorem numero* 2. *Vides igitur numeros* 16. 36. *quadratos partium, qui efficiunt* 52. *æquales esse numero* 14. *qui ex* 4. *in* 6. *fit, bis sumpto, vna cum* 4. *quadrato excessus* 2. *vt volebat theorema.*

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viij.

SI recta linea secetur vtcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.



SIT recta AE, in C, diuisa vtcunque. Dico rectangulum quater comprehensum sub AB, & segmento siue maiore, siue minore CB, vna cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale esse quadrato lineæ, quæ ex recta AB, & dicto segmento CB, componitur. Producatur enim AB, versus dictum segmentum CB, ad D, sitque BD, recta æqualis segmento CB; & super tota AD, quadratum describatur AE. Ducta autem diametro DF, ducantur BG, CI, parallelæ ipsi DE, secantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur LM, OP, parallelæ ipsi AD, quæ secent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4. huius lib. OI, NQ, BM, LG, CP, circa diametrum DF, quadrata. Et quia OK, a æqualis est rectæ AC, erit OI, quadratum segmenti AC. Rursus b quia NH, æqualis est rectæ CB; erit NQ, quadratum segmenti CB, ideoque quadrato BM, æquale, cum rectæ CB, BD, æquales sint. Quare rectæ BH, HQ, æquales sunt segmento CB; atque adeo duo rectangula AH, LQ, comprehensa erunt sub AB, & segmento CB, c cum LH, sit æqualis rectæ AB. Eadem ratione erunt duo rectangula NG, HE, comprehensa sub AB, & CB. cum NH, HM, rectæ d æquales sint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectæ FL, hoc est, rectæ LH, hoc est, rectæ AB. Et quia quadrata NQ, BM, æqualia sunt; si addatur commune KG, erunt BM, KG, simul æqualia rectangulo NG. Quapropter quinque rectangula AH, LQ, HE, BM, & KG, gnomonem RST, componentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta AB, & segmento CB. Cum igitur gnomon RST, & quadratum OI, æqualia sint quadrato AE; erit rectangulũ quater comprehensum sub data recta AB, & segmento CB, vna cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale quadrato lineæ AD, compositæ ex AB, & dicto segmento CB. Quamobrem, si recta linea secetur vtcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

a 34. pri. mi.
b 34. pri. mi.
c 34. pri. mi.
d 34. pri. mi.

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex AD, e æquale est quadratis e 4. sec. *ex AB, BD, & vna enim rectangulo sub AB, BD, bis, hoc est, quadratis ex AB,*



ex AB, BC, & una cum rectangulo bis sub AB, BC: At quadrata ex AB, BC, 27. *sec. aequalia sunt rectangulo iis sub AB, BC, & una cum quadrato ex AC; Erit quadratum ex AD, aequale rectangulo quater sub AB, BC, una cum quadrato ex AC. Quod demonstrandum erat.*

SECETVR iam numerus 10. *vtcunque in* 6. *&* 4. *Numerus igitur* 240. *qui quater fit ex toto* 10. *in partem* 6. *una cum* 16. *quadrato numero alterius partis* 4 *hoc est, numerus* 256. *aequalis est numero quadrato huius numeri* 16. *qui componitur ex data numero* 10. *& dicta parte* 6. *vt constat. Eodem modo, numerus* 160. *qui fit quater ex* 10. *toto, in partem* 4. *una cum* 36. *quadrato numero alterius partis* 6. *hoc est, numerus* 196. *aequalis est quadrato numero huius numeri* 14. *qui componitur ex* 10. *&* 4. *vt perspicuum est.*

POTEST propositio haec 8. *ita etiam proponi.*

SI linea recta secetur vtcunque, eique in rectum adiiciatur alia recta vni segmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compositæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub data linea, & adiecta siue dicto segmento, vna cum quadrato alterius segmenti.

NAM recta AB, secta est in C, vtcunque, eique addita BD, segmento CB, aequalis, demonstratumque est, quadratum totius AD, aequale esse rectangulo quater comprehenso sub data linea AB, & adiecta BD, siue dicto segmento CB, una cum quadrato alterius segmenti AC.

Item sic.

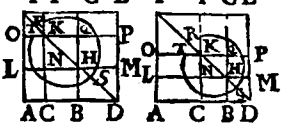
SI linea recta secetur bifariam, eique in rectum adiiciatur recta alia quantacunque: Quadratum totius compositæ lineæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub linea composita ex dimidia, & adiecta, & sub dimidia, vna cum quadrato adiectæ.

NAM recta DC, secta est bifariam in B, eique addita CA, probatumque fuit, quadratum totius AD, aequale esse rectangulo quater comprehenso sub AB, composita ex BC, dimidia, & adiecta AC, & sub dimidia CB, una cum quadrato adiecta AC.

IAM vero ex hac quoque propos. 8. *inueniemus alia ratione numerum quadratum, cum quo datus quilibet numerus conficiat numerum similiter quadratum. Nam si ex quarta parte numeri dati dematur* 1. *reliquum erit latus quadrati quaesiti. Vt si datus numerus sit* 32. *tollatur* 1. *ex eius quarta parte* 8. *Reliquus enim numerus* 7. *dabit quadratum* 49. *cum quo datus numerus* 32. *efficit quadra-*

tum 81.

tum 81. Cuius latus 9. est semper una unitate maius quarta parte dati numeri. Facilis est huiusce rei ratio. Quoniam enim rectangulum A H, quater sumptum, cum quadrato O I, æquale est quadrato A E; si rectangulum A H, ponatur 8. nempe quarta pars dati numeri,



a 8. sec.

at vero quadratum C H, adeoq; & C B, eius latus, 1. erit linea A B, 8. ut ducta in C B, 1. faciat 8. Ablata ergo 1. reliquum erit A C, latus quadrati O I, 7. quod quæritur.

VT autem fractiones vitentur, necesse est, datum numerum dividi posse in quatuor partes æquales, ita ut à 4. numeretur.

CONTRA, inueniemus quoque numerum quadratum, à quo datus numerus subtractus relinquat numerum etiam quadratum. Si namq; ad quartam partem numeri dati addatur 1. conflabitur latus quadrati quæsiti. Vt si datus rursum sit numerus 32. si ad quartam eius partem 8. adiiciatur 1. fiet latus 9. à cuius quadrato 81. si detrahatur datus numerus 32. remanebit quadratus numerus 49. cuius latus 7. semper est unitate minus quarta parte dati numeri. Ratio est, quia si quarta pars gnomonis R S T, qui ex quadrato A E, sublatus relinquit quadratum O I, hoc est, si rectangulum A H, quod gnomonis R S T, quartam partem esse demonstrauimus, statuatur 8. quarta pars dati numeri 32. at quadratum B M, ideoq; & latus eius B D, 1. erit linea A B, 8. ut dictum est, ac proinde totum latus A D, 9. ex cuius quadrato A E, quod est, 81. si auferatur gnomon R S T, quem posuimus esse 32. reliquum fiet quadratum O I, 49. cuius latus A C, est 7. quandoquidem A B, erat 8. & C B, hoc est, B D, illi æqualis, 1. quod quidem latus A C, perpetuò una unitate minus est quarta parte numeri dati 32. ut dictum est.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & eius, quod à dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

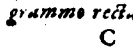
SECETVR recta A B, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata segmentorum inæqualium A D, D B, simul dupla esse quadratorum simul, quæ fiunt ex dimidia A C, & ex intermedia sectionum C D. Educatur enim ex C, ad A B, perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, vel C B, ducanturque rectæ E A, E B. Deinde ex D, ducatur quoque ad A B, perpendicularis D F, secans E B, in puncto F, per quod ducatur F G, parallela ipsi A B, secans C E, in G, ducaturque tandem A F. Quo-

ui im igitur in triangulo A C E, latera C A, C E, æqualia sunt,
a 6. pri. a erunt anguli C A E, C E A, æquales: Est autem angulus A C E,
b 32. pri mi. rectus: Reliqui igitur b anguli alium rectum conficient, ideoque A E C, semirectus erit. Eadem ratione angulus B E C, semirectus erit; ac propterea totus A E B, rectus. Rursus, quia trianguli
c 29. pri mi. F G E, angulus E G F, c æqualis est recto E Ç B, externus inter-


no; d erunt reliqui duo anguli vni recto æquales:
d 32. pri. Ostensum autem est, angulum F E G, esse semirectum. Igitur & E F G, semirectus erit, propterea q;
e 6. pri. A anguli E F G, F E G; æquales erunt, e ideoque & latera E G, G F, æqualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo B D F, latera B D, D F, esse æqualia. Nam angulus F D B, est rectus, & B, semirectus, &c. Itaque cùm in triangulo A C E, an-
f 47. pri mi. gulus C, rectus sit, f erit quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis laterum A C, C E: Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia, quod & lineæ A C, C E, æquales sint. Igitur quadratum lateris A E, duplum erit quadrati lateris A C. Rursus, quia in
g 47. primi. triangulo E G F, angulus G, rectus est, g erit quadratum lateris E F, æquale duobus quadratis laterum E G, G F: At duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob æqualitatem linearum E G, G F. Igitur quadratum lateris E F, duplum erit quadrati lateris F G,
h 34 pri mi. hoc est quadrati lineæ C D. Est enim C D, h recta rectæ F G, æqualis; cùm C F, sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum A E, E F, dupla sunt duorum quadratorum linearum rectarum A C, C D: Sunt autem duo quadrata rectarum A E, E F,
i 47. pri mi. i æqualia quadrato rectæ A F; & quadratum rectæ A F, æquale duobus quadratis rectarum A D, D F. Igitur & duo quadrata rectarum A D, D F, dupla sunt duorum quadratorum rectarum A C, C D: Atqui quadratum rectæ D F, æquale est quadrato rectæ D B. Ostensum enim est, rectas D F, D B, esse æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum A D, D B, segmentorum inæqualium, dupla sunt quadratorum rectarum A C, C D, dimidiæ lineæ, & intermediæ sectionum. Si ergo recta linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex linea recta A D, descriptum,
k 4. sec. *k æquale est quadratis descriptis ex A C, C D, ℭna cum parallelogrammo rectangulo bis sub rectis A C, C D, comprehenso; si commune*



apponatur quadratũ ex D B, erunt duo quadrata ex A D, D B, æqualia tribus quadratis ex A C, C D, D B, ℭna cum rectangulo bis sub A C, C D, ℭel sub B Ç, C D; Atqui quadrato ex D B, ℭna cum rectangulo bis sub B Ç, C D,
l 7. sec. *l æqualia sunt quadrata ex B C, seu A C, & ex C D Quadratum igi-*

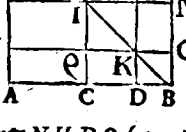
tur

tur ex AD, DB, aequalia sunt bis quadratis ex AC, CD: Ac propterea quadrata ex AD, DB, dupla sunt quadratorum ex AC, CD. Quod ostendendum erat.

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam AC, ipsi CB, aequalis est, & superat CB, ipsam CD, recta DB; superabit quoque AC, ipsam CD, eadem recta DB. Quare, & ad 7. propos. huius libri demonstratum est, quadrata rectarum AC, CD aequalia sunt rectangulo sub AC, CD, bis & una cum quadrato rectae DB. Ac propterea quadrata rectarum AC, CD, & rectangulum sub AC, CD, bis, una cum quadrato rectae DB, dupla sunt quadratorum ex AC, CD: Sed quadratum rectarum AC, CD, una cum rectangulo sub AC, CD, bis, est aequale quadrato rectae AD. Igitur & quadrata rectarum AD, DB, dupla sunt quadratorum ex AC, CD. 2 4. sec.

IAM vero rursus numerus 10. diuidatur aequaliter in 5. & 5. Item inaequaliter in 7. & 3. Vt sit intermedia sectio numerus 2 ceu in propos. 5 est dictum. Quadrati numeri igitur 49. & 9. partium inaequalium 7. & 3. dupli sunt quadratorum 25 & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas sectiones, vt manifestum est.

QVOD si lubeat, demonstrabimus & hanc 9. propos. ex ipsa constructione, vt praecedentes, hoc modo. Descripto quadrato AE, totius lineae AB, ductisq; diametro BF, ducantur per C, D, lateribus AF, BE, parallelae CG, DH, secantes diametrum BF, in punctis I, K, per quae lateribus AB, FE, parallela agantur LM, NO, secantes CG, DH, in Q, P. Quoniam igitur ex coroll. 1 propos 4. huius lib. quadrata sunt LG, QP, DO, CM, NH, b est q; LI, ipsi AC, & QK, ipsi CD, & NK ipsi AD, aequalia; erunt NH, DO, quadrata partium inaequalium AD, DB, & LG, QP, quadrata dimidiatae lineae AC, & intermediae sectionis CD. Dico illa horum esse dupla. Quoniam enim quadrata NH, DO superant quadrata LG, QP, quadrato DO, & rectangulis NI, IH: Sunt autem quadrata DO, & rectangula NI, IH, aequalia quadratis LG, QP, vt mox demonstrabitur; liquido constat, quadrata NH, DO, quadratorum LG, QP, esse dupla, cum haec bis in illis contineantur. Quod autem tria haec rectangula DO, NI, IH, aequalia sint quadratis LG, QP, sic ostendetur. Rectangulum NI, c aequale est rectangulo QM. quod recta NQ, QO, d aequales sint aequalibus AC, CB. Igitur NI, complectitur quadratum QP; & insuper KM. Sterge KM, DO, IH, aequalia sint quadrato LG, erunt necessario DO, NI, IH, aequalia duob. quadratis LG QP. Esse autem KM, DO, IH, aequalia quadrato LG sic demonstrabimus. e Rectangula KM, DO, simul aequalia sunt ipsi PE, quod recta BM, ME, aequales sint, cum BM, aequa-



b 34. primi.

c 36. pri.

d 34. pri.

e 36. pri.

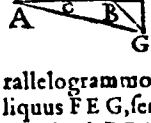
mi.

a 34. pri. *aqualis sit ipsi C B, ob quadratum C M, a & M E, ipsi F L, hoc est,*
b 34 pri. *ipsi L I, ob quadratum L G, hoc est* b *ipsi A C. Addito ergo communi*
c 36 pri. *I H, erunt K M, D O, I H, aqualia ipsi I E, hoc est, quadrato L G:*
d 34. pri mi. c *quod I E, L G, aqualia sint, ob rectas L I, I M,* d *quæ aqualibus A C, C B, aquales sunt. Quod est propositum.*

1. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea secetur bifariam, adijciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod à dimidia, & eius, quod à compositа ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, descriptum sit, quadrati.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D. Dico duo quadrata rectarum A D, B D, simul dupla esse quadratorum simul, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Super A B, enim ex C, erigatur perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, vel C B, & iungantur rectæ A E, E B. Per D, deinde educatur D F, ipsi C E, parallela, occurrens rectæ E B, protractæ in G; & per E, ducatur rectæ C D, parallela E F, F secans D F, in F, iungaturque recta A G. Ostendetur iam, angulum A E B, esse rectum, vt in D præcedenti propos. & C E B, semirectum; e idcoque eius alternum E G F, semirectum quoque: f Est autem angulus F, rectus, cùm in parallelogrammo C F, recto angulo C, opponatur. g Igitur & reliquus F E G, semirectus erit, & propterea ipsi E G F, æqualis. Quare rectæ h E F, F G, angulis F E G, E G F, oppositæ, æquales quoque erunt. Eadem arte ostendes, rectas B D, D G, esse æquales, propterea quòd angulus B D G, sit rectus, & B G D, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ A E, i æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium A C, C E; erit quadratum rectæ A E, duplum quadrati rectæ A C. Rursus quia quadratum rectæ E G, k quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, F G, æquale est; erit quoque quadratum rectæ E G, duplum quadrati rectæ E F, hoc est rectæ C D, l cũ C D, recta æqualis sit rectæ E F. Duo igitur quadrata rectarum A E, E G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorũ. Atqui duobus quadratis rectarum A E, E G, æquale est m quadratum rectæ lineæ A G; & quadrato rectæ A G, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis A D, D G, describuntur. Quadrata ergo rectarum A D, D G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorum. Cùm igitur quadratum rectæ D G, æquale sit quadrato rectæ B D; e-



e 29. pri mi.
f 34. pri.
g 32. pri mi.
h 6. pri.
i 47. pri.
k 47. pri mi.
l 34. pri mi.
m 47. primi.

runt

sunt quoque quadrata rectarum AD, DB, dupla quadratorum, quæ ex rectis AC, CD, describuntur. Itaque si recta linea secetur bifariam, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex AD, a *æquale est quadratis ex AC, CD, & una cum rectangulo bis sub AC, CD, vel sub BC, CD; si commune addatur quadratum ex BD, erunt duo quadrata ex AD, BD, æqualia tribus quadratis ex AC, CD, BD, & una cum rectangulo bis sub BC, CD.* b *Sed quadrato ex BD, & una cum rectangulo bis sub BC, CD, æqualia sunt quadrata ex CD, BC, hoc est, quadrata ex AC, CD. Igitur quadrata ex AD, BD, æqualia sunt quadratis ex AC, CD, bis; Ac proinde quadrata ex AD, BD, dupla sunt quadratorum ex AC, CD; Quod erat demonstrandum.*

a 4. sec.

b 7. sec.



ALITER ex Federico Commandino. Quoniam AC, ipsi CB, est æqualis, & superat CD, ipsam CB, recta BD; superabit quoque CD, ipsam AC, eadem recta BD. Quare, vt ad 7. propos. huius lib. ostendimus, quadrata ex AC, CD, æqualia sunt rectangulo sub AC, CD, bis, & una cum quadrato recta BD; Ac propterea quadrata rectarum AC, CD, & rectangulum sub AC, CD, bis, & una cum quadrato recta BD, dupla sunt quadratorum ex AC, CD: Atqui quadratis rectarum AC, CD, & una cum rectangulo sub AC, CD, bis, c *æquale est quadratum recta AD. Igitur & quadrata rectarum AD, BD, dupla sunt quadratorum ex AC, CD.*

c 4. sec.

NVMERVS 10. bifariam secetur in 5. & 5. cui addatur numerus quinus 3. vt totus numerus compositus sit 13. Quadrati igitur numeri 169. & 9. horum numerorum 13. & 3. dupli sunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, vt perspicuum est.

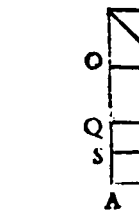
SED & hac propos. 10. facilè ex præcedenti 9. demonstrabitur, quemadmodum supra demonstratum fuit 6. ex 5. Sit enim recta AB, secta bifariam in C, eiq; addita recta quantacunque BD. Dico duo quadrata rectarum AD, BD, simul dupla esse duorum quadratorum rectarum AC, CD, simul. Addita E *A C B D*
namq; recta AD, ad partes A, recta AE, quæ adiecta BD, æqualis sit; erit tota ED, secta in C, bifariam, & in B, non bifariam, quod EA, AC, ipsi DB, BC, æquales sint. Recta quoque EB, recta AD, æqualis erit, quod EA, ipsi DB, sit æqualis, & AB, vtrique communis. d *Quadrata igitur rectarum EB, BD, hoc est, rectarum AD, BD, dupla erunt quadratorum rectarum EC, CB, hoc est, rectarum CD, AC. quod est propositum.*

d 9. sect

QVOD si lubeat eandem hanc propos. 10. demonstrare ex ipsa

con-

constructione, quemadmodum præcedentem 9. ostendimus, fiet id hoc modo. Producta AD, ad E, vt DE, sit adiecta linea BD, æqualis, de-



scriptoq; quadrato AF, totius lineæ AE, ducantur per C B, D, lateribus AG, EF, parallelæ CH. BI, DK, secantes ductam diametrum EG, in L, M, N, punctis, per quæ latera AF, GF, parallela agantur OP, QR, ST, secantes priores in V, X, Y, Z, a, b. Quoniam igitur ex coroll. 1. prop. 4. huius lib. omnia rectangula circa diametrum

34. pri mi. *EG, quadrata sunt, a estq; SN, ipsi AD, æqualis, & OL ipsi AC, & aN, ipsi CD: erit SK quadratum rectæ AD, & DT, quadratum rectæ DE, siue BD, & OH, aX, quadrata rectarum AC, CD. Dico quadrata SK, DT, simul dupla esse quadratorum OH, aX, simul. Quoniam enim quadrata SK, DT, superant quadrata OH, aX, quadrato DT, & rectangulis SL, LK: Sunt autem quadratum DT, & rectangula SL, LK, æqualia quadratis OH, aX, vt mox demonstrabitur; liquido constat, quadrata SK, DT, quadratorum OH, aX, dupla esse, cum hæc in illis contineantur bis. Quod autem tria hæc rectangula DT, SL, LK, quadratis OH, aX. æqualia*

b 36 pri mi. *sint, ita patebit. Rectangulum QL, b æquale est quadrato OH, ob*

c 34. pri mi. *lineas QO, OG, quæ æquales sunt; c propterea quod QO, ipsi YL, æqualis est, & YL, ipsi OG, ob æqualia quadrata YV, OH, æqualium laterum OL, LV. Item d SY, ipsi aM, & LI, ipsi YV, & VK, ipsi*

d 34. pri mi. *VZ, & DT, ipsi bZ. Igitur quinque rectangula QL, SY, LI, VK, DT, hoc est, tria rectangula DT, SL, LK, æqualia sunt quinque rectangulis OH, aM, YV, VZ, bZ. hoc est, duobus quadratis OH, aX. Quod est propositum.*

xj. PROBL. I. PROPOS. II.

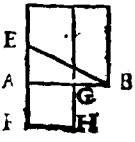
DATAM rectam lineam secare, vt comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod á reliquo segmento fit, quadrato.

DATA sit recta AB, quam secare oportet in duas partes, ita vt rectangulum comprehensum sub tota AB, & altero eius segmento, nempe minori, æquale sit quadrato reliqui segmenti, nimirum maioris. Describatur ex AB, quadratum AC, & diuiso latere AD, quod cum linea data AB, angulum rectum efficit, bifariam in E, iungatur recta EB, cui ex EA, producta æqualis sumatur EF, & ipsi AF, abscindatur ex recta AB, data æqualis AG. Est enim AB, maior quam AF. Nam cùm EB, sit æqualis

e 29. pri. ipsi EF, ex constructione; e sunt autem latera AE, AB, maiora

latere

latere E B ; Erunt quoque rectæ E A, A B; maiores recta E F: ac proinde ablata communi A E, reliqua A B, maior erit, quam reliqua A F. Dico rectam A B, sectam esse in G, ita vt rectangulum comprehensum sub A B, B G, æquale sit quadrato rectæ A G; adeò vt A G, sit maius segmentum, & B G, minus. Ducatur enim per G, recta H I, parallela rectæ D F, secans C D, in I; Ac per F, ducatur ipsi A G, parallela F H, secans H I, in H. Erit igitur parallelogrammum A H, quadratum segmenti A G, cùm omnia eius quatuor latera sint æqualia, quippe cùm a F H, G H, æqualia sint a 34. pri. oppositis A G, A F, æqualibus; omnesque anguli eiusdem recti ob rectum A, vt ad defin. 1. huius libri ostendimus. Rectangulum quoque C G, comprehensum erit sub A B, & segmento B G; quod A B, æqualis sit ipsi B C. Itaque probandum est, rectangulum C G, & quadratum A H, æqualia esse. Quoniam igitur recta D A, diuisa est bifariam in E, & ei addita in rectum A F; b erit rectangulum sub D F, F A, hoc est, rectangulum D H (cùm F H, sit æqualis ipsi F A;) vna cum quadrato dimidiæ A E, æquale quadrato rectæ E F, hoc est, quadrato rectæ E B, quæ rectæ E F, æqualis est: Est autem quadratum rectæ E B c æquale quadratis rectarum A E, A B. Quare rectangulum D H, vna cum quadrato rectæ A E, æquale quoque est quadratis rectarum A E, A B. Dempto ergo communi quadrato rectæ A E, remanebit rectangulum D H, æquale quadrato rectæ A B, hoc est, quadrato A C. Ablato igitur rursus communi rectangulo A I, remanebunt rectangulum C G, & quadratum A H, inter se æqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam A B, secuimus &c. Quod erat faciendum.



b 6. sec.

c 47 pri mi.

SCHOLIVM.

HOC problema nulla ratione accommodari potest numeris. Non enim numerus vllus in duos potest numeros diuidi, vt numerus productus ex toto in alteram partem æqualis sit quadrato alterius partis. vt demonstrabimus ad propos. 14. lib. 9. Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius lib. in numeris demonstrabimus. Clarius q; ad propos. 29. eiusdem lib. 9. ostendemus, problema hoc 11. nulla ratione posse numeris accommodari.

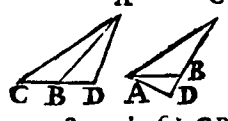
PRAXIS autem huiusce problematis non est difficilis Nam ad extremum A, vbi terminari debet maius segmentum lineæ data A B, extimus perpendicularis A D, ipsi data lineæ A B, æqualis, eaq; secta in E, bifariam; si ad interuallum E B, resecetur E A, producta in F, erit A F, maiori segmento A G, æqualis, vt demonstratum est.

THEOR.

xij. THEOR. II. PROPOS. 12.

IN amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cùm protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exteriùs linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

TRIANGVLVM ABC, habeat angulum ABC, obtusum, & ex A, in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AC, quod obtuso angulo opponitur, maius esse quadratis laterum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, hoc est, quadratū lateris AC, æquale esse duobus quadratis laterum AB, BC, vna cum rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso.



Cùm enim recta CD, diuisa sit in B, vtcunque a erit quadratum rectæ CD, æquale duobus quadratis rectarum CB, BD, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD: b Est autem quadratis rectarū CD, DA, æquale quadratum rectæ AC. Quare & quadratum rectæ AC, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Cùm igitur quadratis rectarum BD, DA, c æquale sit quadratum rectæ AB; erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Quod est propositum. In amblygoniis ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat ostendendum.

a 4. sec.

b 47. primi.

c 47. primi.

SCHOLIVM.

IAM hoc loco demonstrauit Euclides, quantò maius sit in triangulo amblygonio quadratum lateris angulo obtuso oppositi, quadratis aliorum duorum laterum: In sequenti autem propos. 13. ostendet, quantò quadratum lateris acuto angulo oppositi minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, & ad institutum scholij propos. 47. lib. 1. monuimus.

QVONIAM verò assumpsit Euclides, perpendicularem duci ex A, cadere in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum, ideo paucis id demonstrabimus. Sit in triangulo ABC, angulus ABC, obtu-

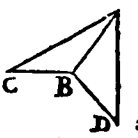
obtusum, & latus C B, ad partes S B, protractum. Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulum in latus C B, protractum, cuiusmodi est recta A D. Si enim caderet intra triangulum, qualis est recta A E, essent duo anguli A B E, A E B, duobus rectis maiores, cùm ille sit obtusus, hic verò rectus. Quod est contra propos. 17 lib. 1. Si verò caderet extra triangulum in latus B C, productum ad partes C, qualis est recta A F, essent rursus in triangulo A B F, duo anguli A B F, A F B, maiores duobus rectis, cùm illo sit obtusus, hic verò rectus. Quod est absurdum.



SED & hoc theorema verum est.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, obtusus erit.

IN triangulo A B C, quadratum lateris A C, maius sit quadratis laterum A B, B C. Dico angulum B, quem latus A C, subtendit, esse obtusum. Ducatur enim ex B, ad A B, perpendicularis B D, linea B C, aequalis, inungatur q$_{s}$ recta A D. Quoniam igitur quadratum ex A D, a aequale est quadratis ex A B, B D, a 47. pri mi. *hoc est, ex A B, B C: Ponitur autem quadratum ex A C, maius quadratis ex A B, B C; Erit quadratum ex A D, minus quadrato ex A C, & idcirco recta A D, minor quàm recta A C. Itaq$_{s}$ quia latera A B, B C, trianguli A B C, aequalia sunt lateribus A B, B D, trianguli A B D, utrumq$_{s}$ utriq$_{s}$, & basis A C, maior est basi A D:* b Erit angulus b 25. pri. *A B C, maior angulo A B D: Sed A B D, rectus est. Igitur A B C, recto maior, & obtusus erit. Quod est propositum.*



QVIN etiam conuersum huius propos. 12. demonstrabimus: nimirum.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab opposito angulo demissa abscindit: Demissa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, obtusus.

IN triangulo A B C, ad latus C B, protractum demittatur ex opposito angulo A, recta A D, sit q$_{s}$ quadratum lateris A C, maius, quam quadrata laterum A B, B C, rectangulo sub C B, B D, bis comprehenso. Dico A D, ad C D, esse perpendicularem, & angulum A B C, obtusum. Si enim A D, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad

C B, perpendicularis, quam dico cadere necessario in C B, productam ad partes B. Cadat enim, si fieri potest, in B, sita vt A B, sit ad C B, perpendicularis. Erit igitur a quadratum ex A C, aequale quadratis ex A B, B C, quod est absurdum, cùm maius ponatur. Non cadet ergo perpendicularis ex A, in C B, demissa, in punctum B.

a47. primi.

C A D A T deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, demissa, in latus B C, qualis est A F. Erit igitur b quadratum ex A C, aequale quadratis ex A F, F C. Ponitur autem quadratum ex A C, maius quadratis ex A B, B C. Igitur & quadrata ex A F, F C, maiora erunt quadratis ex A B, B C, quod est absurdum. Sunt enim quadrata ex A B, B C, maiora quadratis ex A F, F C, quod recta A B, recto angulo A F B, oppositum c maior sit quàm A F, & B C, totum maior parte F C. Perpendicularis ergo ex A, demissa non cadit in C B.

b47. primi.

c19. primi.

C A D A T tertiò, si fieri potest, perpendicularis ex A, ad latus B C, demissa in C, ita vt A C, sit perpendicularis. Erit igitur quadratum ex A B, d aequale quadratis ex A C, C B, ac proinde quadratum ex A C, minus erit quadrato ex A B, & propterea multò minus quadratis ex A B, B C, quod est absurdum, cùm ponatur maius. Perpendicularis ergo ex A, ad B C, demissa non cadit in C.

d47. primi.

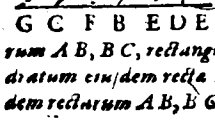
C A D A T quartò, si fieri potest, perpendicularis ex A, in B C, protractam ad partes C, qualis est A G. Quoniam igitur duo anguli A G C, A C G, e minores sunt duobus rectis, est q A G C, rectus; erit A C G, minor recto, ac proinde A C B, obtusus. Recta ergo A B, f maior erit quàm A C, & propterea quadratum ex A C, minus erit quadrato ex A B, ac proinde multò minus quadratis ex A B, B C: sed & maius ponitur, quod est absurdum. Cùm ergo perpendicularis ex A, demissa ad C B, non cadat in B, neque inter C, B, neque in C, neque extra C, cadet extra B, qualis est A D, vt demonstrabitur: Quare angulus A B E g acutus erit, & A B C, obtusus. quod secundo loco ponitur, demonstrandum.

e17. primi.

f19. primi.

g17. primi.

CAETERVM angulum A B C, esse obtusum, si quadratum rectae A C, maius sit quadratis rectarum A B, B C, facilius demonstrauimus in proximo theoremate huius scholij. Ex quo fit (vt ad initium huius scholij ostendimus) perpendicularem ex A, ad C B, demissam cadere extra triangulum A B C, ad partes anguli obtusi.



QVOD autem A D, sit ad C B, perpendicularis ita demonstrabimus. Si non est, ducatur A E, ad C B, perpendicularis cadens extra B, vt ostendimus. Quoniam igitur angulus A B C, ostensus est obtusus, erit quadratum rectae A C, maius quam quadrata rectarum A B, B C, rectangulo bis comprehenso sub C B, B E: Sed & quadratum eiusdem rectae A C, maius ponitur, quam quadrata earundem rectarum A B, B C, rectangulo bis comprehenso sub C B, B D. Igitur

quadratum ex A B, B C, una cum rectangulo ſub C B, B D comprehenſo æqualia erunt quadratis ex A B, B C, una cum rectangulo ſub C B, B E, bis comprehenſo: & ablatis quadratis communibus rectarum A B, B C, rectangulum bis ſub C B, B E, comprehenſum æquale erit rectangulo bis comprehenſo ſub C B, B D, ac proinde & rectangulum ſub C B, B E, ſemel comprehenſum æquale erit rectangulo ſemel ſub C B, B D, comprehenſo, & recta B E, recta B D, æqualis, pars toti, vel totum parti. quod eſt abſurdum. Eſt ergo A D, ad C D, perpendicularis, & nulla alia. quod eſt propoſitum.

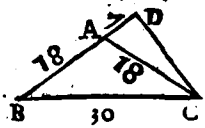
IAM verò, quoniam neque hoc duodecimum theorema, neque ſequens 13. per numeros, quando libet, explicari poteſt, quod poſito uno latere trianguli quotlibet partium æqualium, alia latera, eorumq; partes à perpendicularibus lineis facta plerumque numerus exprimi nequeant, ſed ſint linea illi lateri incommenſurabiles: quod in præcedentibus propoſitionibus non accidebat, quippe cum, poſita diuiſa recta linea quotlibet partium æqualium, eius partes ſtatus poſſint pro libito ei commenſurabiles, vt in exemplis numerorum adhibitis factum eſt, præſcribemus regulas quaſdam, quibus Geometricè triangula amblygonia, atque oxygonia (quotquot quis optauerit) conſtituantur eiuſmodi, vt omnia latera, partesq; eorum à lineis perpendicularibus facta ſint linea commenſurabiles: atq; adeò veritas vtriuſq; theorematis in numeris quoque appareat. Hic autem de amblygonijs triangulis agemus, & in ſcholio ſequentis propoſitionis de Oxygonijs.

Quoniam autem amblygonium triangulum eſt vel iſoſceles, in quo 219. pri.
rectum latus ſemper à maius eſt, quod obtuſo angulo opponatur, vel ſcalenum (æquilaterum enim eſſe non poteſt, vt ad definitionem 27. lib. 1. diximus) & in ſcaleno linea perpendicularis cadit vel in minimum latus productum, vel in medium, proponemus tres regulas. Prima exhibebimus triangulum amblygonium iſoſceles laterum commenſurabilium, in quo etiam ſegmentum vtriuslibet laterum æqualium producti inter perpendicularem, & angulum obtuſum eiſdem lateribus commenſurabile ſit. Secunda conſtituemus triangulum amblygonium ſcalenum laterum etiam commenſurabilium, & in quo ſegmentum minimi lateris producti inter perpendicularem, & angulum obtuſum lateribus eiſdem ſit commenſurabile. Tertia denique triangulum amblygonium ſcalenum proponemus commenſurabilium laterum, & in quo ſegmentum lateris medij producti inter lineam perpendicularem, & obtuſum angulum eiſdem lateribus commenſurabile exiſtat.

REGVLA I.

AD conſtruendum triangulum amblygonium iſoſceles laterum commenſurabilium, in quo ſegmentum exterius alterius laterum æqualium producti inter perpendicularem lineam, & angulum obtuſum, eiſdem lateribus quoq; ſit commenſurabile; ſtatuatur ſegmen-

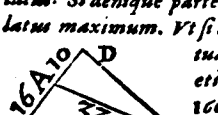
tum exterius tot partium aqualium, & earum numerus à 7. numeretur, & 7. vel 14. vel 21. vel 28. &c. Deinde & trumuis laterum aqualium ponatur dicti segmenti duplum superquadrupartiens septimas, maximum autem obtuso angulo oppositum eiusdem segmenti quadruplum superbipartiens septimas. Vt in triangulo A B C, ducta sit C D, ad B A, latus productum. Si igitur A D, constituatur partium 7. & trumuis laterum A B, A C, partium 18. qui numerus habetur, si duplicaueris 7. addideriſque $\frac{4}{7}$ ipsius. Latus verò B C,



partium 30. quem numerum habebis, si quadruplicaueris 7. adiunxeris $\frac{2}{7}$ ipsius; erit triangulum A B C, quod quaeritur. In hoc enim triangulo quadratum lateris B C, est 900. cui aqualia sunt quadrata laterum A B, A C, nempe 324. 324, & una cum rectangulo bis comprehenso sub A B, A D, hoc est, cum 126. 126. Hae enim conficiunt quoque summam 900. Quam ob rem, & in hoc scholio ostendimus, erit ducta C D, ad B D, perpendicularis, & angulus B A C, obtusus. Quod si singulos numeros huius trianguli per quemlibet numerum multiplices, procreabis alias lineas trianguli commensurabiles, prioribus tamen proportionales. Vt si inuentos numeros duplices, efficies A D, 14. & tam A B, quàm A C, 36. at B C, 60. Propositum quoq; triangulum reperies, statuendo segmentum exterius A D, quotcunq; partium, etiamsi à 7. non numerentur: sed tunc latera erunt numeri integri cum fractionibus. Idem deniq; triangulum offendes, statuendo latus quodcunque, à quo incipere vis, quotlibet partium, dummodò maximum fiat segmenti A D, quadruplum superbipartiens septimas, & trumuis autem aqualium sit eiusdem segmenti duplum superquadrupartiens septimas.

REGVLA II.

VT efficiatur triangulum amblygonium Scalenum laterum commensurabilium, in quo perpendicularis cadens in minimum latus productum faciat segmentum exterius commensurabile etiam lateribus: statuatur exterius segmentum quotuis partium aqualium à 5. numeraturum, & 5 vel 10. vel 15. vel 20. &c. Quibus si addas $\frac{1}{5}$ habebis minimum latus. Si verò easdem partes dicti segmenti triplices, addas $\frac{1}{5}$ vel si partes minimi lateris inuentas duplices, efficies medium latus. Si denique partes easdem dicti segmenti quadruplices, reperies latus maximum. Vt si in appositio triangulo segmentum A D, constituatur 10. erit A B, 16. A C, 32. & B C, 40. & vbi etiam vides, quadrato lateris B C, quod est 1600. aqualia esse quadrata laterum A B, A C, nimirum 256. 1024. & una cum rectangulo bis sub A B, A D, comprehenso, id est, cum 160. 160.

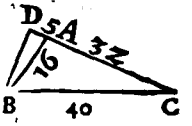


Ex quo

Ex quo fit, CD, esse ad BD, perpendiculavem, & angulum BAC, obtusum, vt suprà in hoc scholio ostendimus. Iam si singulos numeros inuentos multiplices per quemuis numerum, gignentur alij numeri illis proportionales, qui idem præstabunt. Vt si eos duplices, erit latus AB, 32. AC, 64. & BC, 80. qui quidem numeri reperientur eadem arte, si exterius segmentum AD statuas partium 20. qua duplam quoque proportionem habent ad priores partes 10. Sic si eosdem numeros triplices, efficies segmentum exterius AD, partium 30. latus AB, 48. AC, 96. BC, 120. & sic deinceps.

REGVLA III.

PRO triangulo amblygonio Scaleno commensurabilium laterum, in quo perpendicularis linea in medium latus productum cadens efficiat quoque segmentum lateribus trianguli commensurabile; accipiatur rursum exterius segmentum quotlibet partium à 5. numeratarum, vt in præcedenti regula. Quas si triplices, addas $q_3\frac{1}{5}$ produces minimũ latus: Si verò easdem multiplices per 6. adiungas $q_3\frac{2}{5}$ habebis latus medium: Si denique easdem per 8. multiplices, produces maximum latus. Vt si in triangulo proposito segmentum AD, fiat partium 5. erit AB, 16. AC, 32. & BC, 40. Atque ita quadrata laterũ BC, numerorum 1600. æqualia existent quadratis laterum AB, AC, nempe 256. 1024. vna cum rectangulo bis comprehenso sub AC, AD, hoc est, cum 160. 160. Ac proinde BD, ad CD, erit perpendicularis, angulus q. BAC, obtusus, vt in hoc scholio suprà demonstrauimus. Quod si numeros inuentos per quemuis numerum multiplices, inuenies alios numeros laterum illis proportionales, in quibus eadem hæc propos. 12. examinabitur. Vt si eos quadruplices, efficies segmentum exterius AD, partium 20. latus AB, 64. AC, 128. & BC, 160. Si verò eosdem illos priores numeros per 10. multiplices, erit segmentum exterius AD, 50. latus AB, 160. AC, 320. & BC, 400. Atque ita in infinitum.

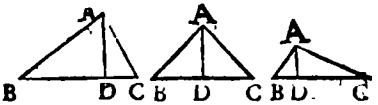


CAVE autem, existimes, posito latere aliquo trianguli amblygonij, vel segmento exteriori, quotlibet partium æqualium, alia latera cum illo seruare necessario proportiones illas, quas in regulis prædictis explicauimus: adeò vt cognito vno, reliqua etiam cognoscantur. Hoc enim falsum est, cùm illa variari possint mille modis, & aliis atque aliis proportiones habere. Itaque ex tribus præscriptis regulis solùm colligendum erit, ex lineis rectis, qua dictas proportiones seruent, constitui posse triangulum amblygonium, vna cum segmento exteriore, in quo veritas propositionis 12. possit examinari.

xiij. THEOR. 12. PROPOS. 13.

IN oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum ſubtendente minus eſt quadratis, quę fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenſo, & ab vno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab aſſumpta interius linea ſub perpendiculari prope acutum angulum.

SINT omnes anguli trianguli A B C, acuti, & ex A, perpendicularis A D, demiſſa cadat in latus B C. Dico quadratum lateris A B, quod acuto angulo A C B, opponitur, minus eſſe quadratis laterum A C, C B, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, hoc eſt, quadratum lateris A B, vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, æquale eſſe duobus quadratis laterum A C, C B. Cùm enim recta B C, diuiſa ſit in D, vtcunque, erũt quadrata rectarũ B C, C D, *a* æqualia rectangulo comprehenſo bis ſub B C, C D, & quadrato rectæ B D. Addito ergo communi quadrato rectæ D A, erunt tria quadrata rectarum B C, C D, D A, æqualia rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A: Duobus autem quadratis rectarum C D, D A, *b* æquale eſt quadratum rectæ C A. Duo igitur quadrata rectarum B C, C A, æqualia ſunt rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A. Cum ergo duobus quadratis rectarum B D, D A, *c* æquale ſit quadratum rectæ A B; erunt duo quadrata rectarum B C, C A, æqualia rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, & quadrato rectæ A B, quod eſt propoſitum. Eodem modo oſtendetur, quadrata rectarum A B, B C, æqualia eſſe rectangulo bis comprehenſo ſub C B, B D, & quadrato rectæ A C, hoc eſt, quadratum lateris A C, minus eſſe quadratis laterum A B, B C, rectangulo comprehenſo bis ſub C B, B D. In oxygoniis ergo triangulis, quadratum à latere, &c. Quod demonſtrandum erat.



a 7. *ſec.*

b 47. *primi.*

c 47. *primi.*

SCHOLIVM.

ITAQVE ex tribus propoſitionibus, nempe 47. lib. 1. & 12. atq; 13. huius lib. cognoſcimus, quantum ſit quadratum cuiuſuis lateris trianguli cum quadratis aliorum duorum laterum comparatum, nempe an ſit illis æquale, an maius, minus &c. & quanto maius ſit, aut minus, prout videlicet angulus aſſumpto lateri oppoſitus fuerit rectus, vel obtuſus, aut acutus.

QVAM-

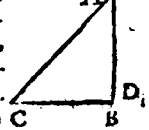
QVAMVIS autem Euclides theorema hoc proponat de triangulis duntaxat oxygonijs, qua scilicet omnes angulos habent acutos; idem tamen verum etiam est in triangulis rectangulis, & amblygonijs, vt constat ex posterioribus duobus triangulis in schemate propositis. Sunt enim in hisce triangulis necessariò duo reliqui anguli acuti, vt perspicuè colligi potest ex propos. 17. vel 32. primi lib. Hoc solùm observandum est in triangulis rectangulis, & amblygonijs perpendicularem duci debere ab angulo recto, vel obtuso, in oxygonijs verò à quolibet. Ita enim semper cadet perpendicularis intra triangulum, vt Euclides in demonstratione assumpsit. Quod quidem facilè demonstrabitur hac ratione. Sint in triangulo A B C, duo anguli A B C, A C B, acuti; angulus verò B A C, rectus, vel obtusus, acutusve. Dico perpendicularem ex A, demissam cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in C B, protractam ad partes B, cuiusmodi est recta A E, esset in triangulo A B E, angulus exterior A B C, acutus, à mator interno & opposito recto A E B, quod est absurdum Si verò caderet extra B C, productam ad partes C, qualis est recta A F, in idem incideremus absurdum, vt manifestum est.



a16. pri.

IDEM hoc theorema in triangulis rectangulis, & obtusangulis demonstrat Federicus Commandinus, etiamsi perpendicularis A D, non cadat in latus B C; sed vel eadem sit, qua latus A B, vt in rectangulo, vel extra triangulum cadat, vt in obtusangulo accidit, ceu in sibolio propos. precedentis demonstrauimus: quod tum demum accidet, cum perpendicularis non ab angulo recto, vel obtuso, sed ab altero acuterum demittitur.

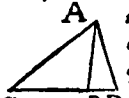
SIT triangulum rectangulum A B C, cuius angulus B, sit rectus; & ex angulo A, acuto ad B C, perpendicularis ducatur A D, qua eadem erit qua latus A B, propter angulum rectum B. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, subtendentis, minus esse, quàm quadrata laterum A C, C B, rectangulo bis comprehenso sub latere C B, in quod perpendicularis cadit, & sub linea C D, qua interijcitur inter perpendicularem A D, & acutum angulum C. Cum enim quadrata ex A B, C B, b aqualia sint quadrato ex A C; addito communi quadrato ex C B, erunt tria quadrata, nempe quod ex A B, & duplum eius, quod ex C B, aqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C B, idem est, quod rectangulum sub C B, C D. Igitur & quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis sub C B, C D, aquale est quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quàm quadrata ex A C, C B, rectangulo bis sub C B, C D. Quod est propositum.



b47 primi.

RVRSVS sit triangulum obtusangulum A B C, cuius angulus

B, obtusus; & ex angulo acuto A, ad BC, perpendicularis ducatur AD, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris AB, acutum angulum C, subtendentis minus esse, quàm quadrata laterum AC, CB, rectangulo comprehenso bis sub CB, & CD. Quoniam enim quadrata ex AD, CD, a *aequalia sunt quadrato ex AC; addito quadrato ex CB, communi, erunt tria quadrata ex AD, CD, CB, aequalia duobus quadratis ex AC, CB: At quadratum ex CD,* b *aequale est quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis sub CB, BD. Igitur & duo quadrata ex AD, CB, & una cum quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis sub CB, BD, aequalia sunt quadratis ex AC, CB: Sunt autem quadrata ex AD, BD, aequalia* c *quadrato ex AB. Quare quadratum quoque ex AB, & duplum quadrati ex CB, & una cum rectangulo bis sub CB, BD, aequalia sunt quadratis ex AC, CB. Atqui quadrato ex CB, & una cum rectangulo sub CB, BD,* d *aequale est rectangulum sub CD, CB. Ac propterea duplo quadrati ex CB, & una cum rectangulo bis sub CB, BD; aequale est rectangulum bis sub CD, CB. Igitur & quadratum ex AB, & una cum rectangulo bis sub CB, CD; aequale est quadratis ex AC, CB. Ac proinde quadratum ex AB, minus est, quàm quadrata ex AC, CB, rectangulo bis sub CB, CD. Quod est propositum.*



a 47. primi.

b 4. sec.

c 47. primi.

d 3. sec.

ALITER, & breuius. Quoniam quadratum ex AC, minus e *est, quàm quadrata ex AB, BC, rectangulo bis sub CB, BD, comprehenso, hoc est, quadratum ex AC, aequale est quadratis ex AB, BC, & una cum rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso; erit quadratum ex AB, minus, quàm quadratum ex AC, quadrato ex BC, & rectangulo sub CB, BD, bis: Ac proinde si quadrato ex AC, addatur quadratum ex BC, erit quadratum ex AB, minus quàm quadrata ex AC, BC, quadrato ex BC, bis sumpto, & rectangulo bis sub CB, BD, comprehenso. Cùm ergo quadrato ex BC, & una cum rectangulo sub CB, BD, contento,* f *aequale sit rectangulum sub CB, CD, contentum; erit quoque quadratum ex AB, minus quam quadrata ex AC, CB, rectangulo comprehenso bis sub CB, CD. Quod est propositum.*

e 12. sec.

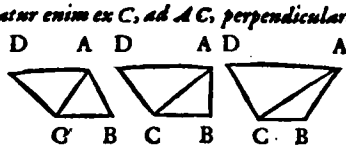
f 3. sec.

IN scholio quodam antiquo demonstratur sequens theorema, instar illius, quod nos in scholio precedentis propos. secundo loco demonstrauimus. Videlicet.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, acutus erit.

IN triangulo ABC, quadratum lateris AB, minus sit, quam quadrata laterum AC, CB. Dico angulum C, quem dictum latus subten-

ſubtendit, eſſe acutum. Ducatur enim ex C, ad AC, perpendicularis CD, linea CB, æqualis, iungaturque recta AD. Quoniam igitur quadratum ex AD, a æquale eſt quadratis ex AC, CD, hoc eſt, ex



a 47. pri mi.

AC, CB: Ponitur autem quadratum ex AB, minus quadratis ex AC, CB; Erit quadratum ex AD, maius quadrato ex AB; & ideo recta AD, maior quam recta AB. Itaque quia duo latera AC, CD, trianguli ACD, æqualia ſunt duobus lateribus AC, CB, trianguli ACB, vtrumque vtrique, & baſis AD, maior baſe AB; b Erit angulus ACD. maior angulo ACB: Sed ACD, rectus eſt, ex conſtructione. Ergo ACB, recto minor, & acutus erit.

b 25. pri mi.

SED & conuerſum huius propoſ. 13. oſtendemus, nimirum.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub recta linea inter angulum priori lateri oppoſitum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri oppoſito demiſſam: Linea hæc demiſſa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, acutus.

IN triangulo ABC, ad latus BC, demittatur ex angulo oppoſito A, recta AD; ſitque quadratum lateris AB, minus quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo ſub BC, CD, bis comprehenſo. Dico AD, eſſe perpendicularem ad BC, & angulum ACB, acutũ. Si namque AD, perpendicularis non eſt, ducatur ex A, ad BC, perpendicularis, quã dico neceſſario cadere citra punctum C, verſus B, hoc eſt, vel in latus BC, vel in punctum B, vel in latus BC, verſus B, productum. Cadat enim, ſi fieri poteſt, in C, ita vt AC, ſit ad BC, perpendicularis. Erit igitur c quadratum ex AB, æquale quadratis ex AC, CB. quod eſt abſurdum, cum minus ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, deducta ad BC, in punctum C.



b 47. pri mi.

c 47 pri mi.

CAD AT deinde, ſi fieri poteſt, perpendicularis ex A, demiſſa vltra C, in E, qualis eſt AE. Erit igitur d quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB: Ponitur autem quadratum ex AB, minus quadratis ex AC, CB. Igitur & quadrata ex AE, EB, minora

247. pri mi. erunt quadratis ex AC, CB. Cum ergo quadratum ex AC, æquale sit quadratis ex AE, EC; erunt quoque quadrata ex AE, EB, minora quadratis ex AE, EC, CB: Et ablato communi quadrato rectæ AE, erit reliquum quadratum ex EB, minus quoque quadratis ex EC, CB. quod est absurdum. Cum enim quadratum ex EB, b 4. sec. æquale sit quadratis ex EC, CB, & una cum rectangulo bis comprehenso sub EC, CB, maius erit quadratum ex EB, quadratis ex EC, CB. Non ergo perpendicularis cadit vltra C: Sed neque in C, cadit, vt ostendimus. Igitur cadet citra punctum C, qualis est AD, & de- c 17. pri monstrabitur, ac propterea c angulus ACB, acutus erit. Quod se- mi. cundo loco proponitur demonstrandum.

CÆTERVM angulum ACB, esse acutum, si quadratum rectæ AB, minus sit quadratis rectarum AC, CB, facilius demonstrauimus in proxime antecedente theoremate huius scholij. Ex quo fit, (quemadmodum in coroll. 2. propos. 17. lib. 1. ostensum est) perpendicularem ex A, ad BC, demissam cadere citra angulum ACB, acutum versus B.

QVOD autem AD, sit ad BC, perpendicularis, ita ostendemus. Si non est, sit AF, ad BC, perpendicularis, cadens citra punctum C, vt probatum est, vbicunque hoc contingat, siue intra triangulum, siue in punctum B, siue extra triangulum. (In secundo tantum triangulo non dicet aduersarius, perpendicularem cadere in B; quia eadem esset, quæ AD. quod ille negat) Quia ergo angulus ACB, ostensus fuit d 13. sec. acutus, d erit quadratum ex AB, minus, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis comprehenso sub BC, CF, hoc est, quadratum ex AB, una cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CF, æquale est quadratis ex AC, CB: Ponitur autem quadratum idem ex AB, minus quoque, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, hoc est, quadratum idem ex AB, una cum rectangulo bis contento sub BC, CD, æquale ponitur quadratis ex AC, CB. Igitur quadratum ex AB, una cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, æquale erit quadrato eidem ex AB, una cum rectangulo comprehenso bis sub BC, CF: Et ablato communi quadrato rectæ AB, rectangulum sub BC, CD, bis comprehensum æquale erit rectangulo bis sub BC, CF, comprehenso: ac proinde & rectangulum semel comprehensum sub BC, CD, æquale erit rectangulo semel comprehenso sub BC, CF, ideoque & recta CD, CF, æquales erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Est igitur AD, ad BC, perpendicularis, & non alia. Quod est propositum.

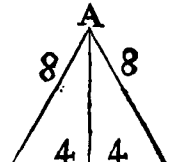
QVEMADMODVM autem in scholio superioris propositionis triangula amblygonia constructumque laterum, & linearum commensurabilium, in quibus per numeros veritas propositionis 12. examinari possit, ita hoc loco oxygonia triangula constituemus laterum, atque linearum commensurabilium, in quibus huius 13. propos. veri-

tas ex-

tur explicetur. Quia verò triangulum oxygonium est vel æquilaterum, vel Isosceles, vel Scalenum; complectemur totam hanc doctrinam septem regulis. Prima de triangulo æquilatero oxygonio aget. Secunda de Isoscele, in quo perpendicularis cadit in tertium latus inæquale, sive maius illud sit, sive minus utrouis æqualium. Tertia de Isoscele, cuius tertium latus maius est, perpendicularis q; in alterutrum æqualium laterum cadit. Quarta de Isoscele, cuius latus tertium minus est, & perpendicularis rursus in alterutrum laterum æqualium cadit. Quinta de Scaleno, in quo perpendicularis cadit in minimum latus. Sexta de Scaleno, in quo perpendicularis in medium latus demittitur. Septima denique de Scaleno, in quo ad maximum latus perpendicularis ducitur. Loquor autem hic de illis etiam triangulis, in quibus perpendicularis linea cadit intra triangulum, ac proinde duo anguli supra basin sunt acuti, sive oppositus angulus acutus etiam sit, sive non. De his enim propositio etiam intelligenda est, ut diximus. Quo pacto autem triangula, in quibus linea perpendicularis cadit vel extra ipsa, vel cum uno laterum coincidit, numeris quoque possint accommodari, docebimus ad finem regularum.

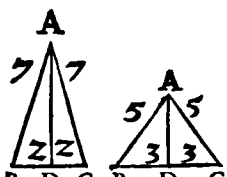
REGVLA I.

SI quodlibet latus trianguli æquilateri statuatur quotuis partium æqualium, numero tamen parium, & fractiones utantur, erunt omnia latera & inter se, & segmentis à linea perpendiculari factis commensurabilia. Vt in triangulo æquilatero A B C, diuidet perpendicularis A D, oppositum latus BC, bifariam, ut in scholio propos. 26. lib. 1. demonstrauimus. Quam ob rem posito quolibet latere 8. erunt segmenta B D, C D. 4. 4. Vbi vides quadratum lateris A B, angulo acuto C, oppositi, (omnes enim anguli in triangulo æquilatero acuti sunt, ex coroll. 3. propos. 17. lib. 1.) hoc est, 64. una cum rectangulo bis contento sub B C, C D, id est, cum 32. 32. efficere 128. quantum videlicet conficiunt duo quadrata laterum A C, C B, nempe 64. 64.



REGVLA II.

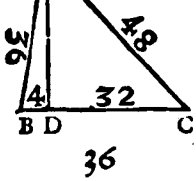
SI utrumq; laterum æqualium trianguli Isoscelis statuatur quotcunque partium æqualium, tertium autem quotlibet partium numero parium, & fractiones utantur, sive pauciores partes in hoc latere ponantur, quam in utrolibet æqualium, sive plures, dummodo tot non sint, quot in utroque simul, aut plures; quia sic non posset fieri triangulum, propterea quod duo latera æqualia non essent maiora tertio latere, sed vel æqualia, vel minora, quod propositioni



positioni 20. lib. 1. repugnat. Si inæquam latera hoc modo numeris exponantur, erunt omnes lineæ trianguli inter se commensurabiles. Vt in priori horum Isoscelium Ƈtrumuis latus A B, A C, statuatur 7. & B C, 4. In posteriori autem Ƈtrumlibet A B, A C, 5. & B C, 6. Cum ergo perpendicularis A D, dividat basim B C, bifariam, ex scholio propos. 26. lib. 1. erunt segmenta B D, C D, in priori quidem triangulo 2. 2. in posteriori Ƈerò 3. 3. Vbi etiam perspicuum est, quadratum lateris A B, angulo acuto C, oppositi, (Ƈterque enim angulus B, C, acutus est, ex coroll. 3. propos. 17. lib. 1.) Ƈna cum rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, æquale esse quadratis simul laterum A C, C B. &c.

REGVLA III.

IN triangulo Isoscele, in quo tertium latus maius est, & perpendicularis in alterum æqualium laterum cadit, erit segmentum prope maius latus tertium, maius, Ƈt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Si igitur minus segmentum statuas quotuis partium, eaq́, per 8. multiplices, habebis segmentum maius: Si Ƈerò eadem ducas in 12. efficies tertium latus: Duo denique segmenta simul addita conflabunt Ƈtrumque laterum æqualium; quod etiam produces ex multiplicatione minoris segmenti per 9. Vt si in Isoscele A B C, segmentum minus B D, ponatur 4. erit maius C D, 32. latus Ƈerò A C, 48. & Ƈtrumque latus A B, B C, 36. 36. Quadratum igitur lateris A B, angulo acuto C, oppositi, nempe 1296. Ƈna cum eo, quod fit bis ex B C, in C D, id est, cum 1152. 1152. conficit 3600. quantum nimirum efficiunt duo quadrata ex A C, C B, nempe 2304. 1296. Ita quoque quadratum ex A C, nimirum 2304 Ƈna cum eo, quod bis fit ex C B, in B D, hoc est, cum 144. 144. facit 2592. qui numerus etiam conficitur ex quadratis laterum A B, B C, nimirum ex 1296. 1296. In huiusmodi ergo triangulo segmenta inæqualia proportionem habent octuplam: Ƈtrumuis Ƈerò æqualium laterum ad minus segmentum proportionem habet nouemplam: Tertium denique latus maius ad idem segmentum minus habet proportionem duodecuplam.

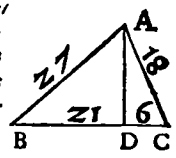


REGVLA IV.

IN triangulo Isoscele, cuius tertium latus minus est, & perpendicularis rursum in alterum æqualium laterum cadit, erit segmentum prope minus latus tertium, minus, Ƈt ad propos. 47. lib. 1. ostensum est.

Quod

Quod ſegmentum ſi ſtatuas quotuis partium numero parium, & fractiones ſingantur, eaſq; per 3. multiplices, & producto earundem mediatatem adiicias, vel earum medietatem per 7. multiplices, produces maius ſegmentum: Si verò eaſdem partes minoris ſegmenti multiplices per 3. efficies tertium latus minus. Vtrumque deniq; aqualium laterum componetur ex duobus ſegmentis: quod etiam ex multiplicatione medietatis minoris ſegmenti per 9. producetur. Vt ſi in Iſoſcele A B C, minus ſegmentum C D, ponatur 6. erit maius B D, 21. & latus A C, 18. atque tam A B, quàm B C, 27.

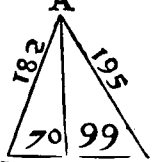


27

Quadratum ergo lateris A B, angulo acuto C, oppoſiti, nimirum 729. vna cum eo, quo fit bis ex B C, in C D, id eſt, cum 162. 162. efficit 1053. qui numerus etiam componitur ex quadratis laterum A C, C B, nempe ex 324. 729. &c.

REGVLA V.

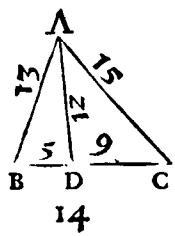
IN Scaleno triangulo, in quo perpendicularis in minimum latus demittitur, erit ſegmentum baſis iuxta medium latus, minus, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtratum eſt. Quod ſegmentum ſi conſtituatur tot partium aqualium, vt à 70. numerentur, nimirum partium 70. vel 140, vel 210. &c. eiuſq; addantur earum $\frac{1}{7}$ $\frac{9}{0}$ confectum erit ſegmentum maius, & ex additione partium horum ſegmentorum gignetur minimum latus. Si verò partes minoris ſegmenti duplicentur, & producto adiiciantur $\frac{4}{7}$ $\frac{2}{0}$ hoc eſt, $\frac{1}{5}$ earundem partium, procreabitur medium latus. Si denique partes eiuſdem minoris ſegmenti duplicentur, productoq; $\frac{5}{7}$ $\frac{5}{0}$ id eſt, $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{4}$ earundem addantur, componetur latus maximum. Vt in ſcaleno A B C, ſi minus ſegmentum B D, ponatur 70. erit maius C D, 99. & totum minimum latus B C, 169. Medium autem latus A B, 182. & maximum A C, 195. Quadratum ergo lateris A B, acuto angulo C, oppoſiti, hoc eſt, 33124. vna cum numero, qui bis fit ex B C, in C D, id eſt, cum 16731. 16731. conficit numerum 66586. aqualem duobus ſimul quadratis 38025. 28561. laterum A C, C B, &c.



169

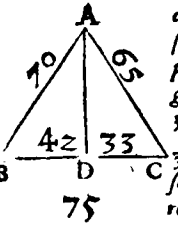
REGVLA VI.

IN triangulo Scaleno, quando perpendicularis in medium latus cadit, erit ex iis, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. oſtendimus, minus ſegmentum minimo lateri adiacens. Quod ſegmentum ſi ſtatuatur tot aqualium partium, vt à 5. numerentur, vt 5. vel 10. vel 15. &c. eiuſq; addantur



dantur $\frac{4}{5}$. *confectum erit segmentum maius, & partes horum segmentorum in vnam summam collecta component medium latus. Si autem partibus minoris segmenti duplicatis adiungantur earundem* $\frac{3}{5}$. *producetur minimum latus. Triplum denique earundem partium minoris segmenti dabit latus maximum. Vt in Scaleno A B C, si minus segmentum B D, fiat 5. erit segmentum maius C D, 9. & totum latus B C, medium, 14. Minimum verò A B, 13. & maximum A C, 15. &c.*

REGVLA VII.



IN Scaleno denique triangulo, vbi perpendicularis ad maximum latus deducitur, erit minus segmentum iuxta latus minimum, ex iis, quæ ad propos. 47. lib. 1. scripsimus. Si ergo pro minori segmento sumantur 33. vel quius alius numerus à 33. numeratus, vt 66. vel 99. &c. eiq^{s} *addantur* $\frac{2}{3}$ *hoc est,* $\frac{3}{1}$. *fiet maius segmentum: quæ duo segmenta simul composita maximum latus offerent. Si verò numero minoris segmenti duplicato adiiciantur* $\frac{4}{3}$. *producetur medium latus. Si denique eidem minori segmento apponantur* $\frac{3}{3}\frac{2}{3}$. *exhibebitur minimum latus. Vt si in Scaleno A B C, minus segmentum C D, sit 33. erit maius segmentum B D, 42. totumque latus maximum B C, 75. & medium A B, 70. & minimum A C, 65. &c.*

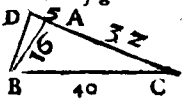
QVOD si singulos numeros harum regularum per eundem numerum aliquem, quicunque is sit, multiplices, procreabis altos numeros lateribus triangulorum tribuendos. Idem etiam numeri repetentur, si minus segmentum, vel maius, vel quodcunq^{s} *latus statuatur quotlibet partium; si modo proportiones seruentur, quas suprà dictis regulis expressimus.*

HIC quoque sciendum est, non in omni triangulo oxygonio proportiones præscriptas reperiri inter latera, cum mille modis possint variari eorum proportiones. Neque verò hoc regula illa docent, sed & sua earum in eo solum consistit, vt seruatis illis proportionibus, quas explicauimus, triangula oxygonia formari possint, in quibus propositio 13. huius lib. 2. ad numeros accommodetur.

IAM verò si perpendicularis coincidat cum illo latere, cuius quadratum probandum est minus esse duobus quadratis aliorum duorum laterum, &c. Ita vt triangulum propositum sit rectangulum; quærendi sunt tres numeri pro lateribus, ex iis, qua in scholio pro-

prop. 47. lib. 1. ſcripſimus. Vt in figura regula 6. ſi in triangulo A B D, minimum latus B D, ponatur 5. erit A D, 12. & A B, 13. Vbi cernis quadratum lateris A D, acuto angulo B, oppoſiti, nempe 144. una cum eo, quod fit bis ex B D, in B D, hoc eſt, cum 25. 25. efficere 194. quantum videlicet conficiunt duo quadrata ſimul ex A B, B D, nimirum 169. 25. Eadem ratione, ſi minimum latus B D, ſtatuatur partium 6. erit A D, 8. & A B, 10. Vbi etiam vides. quadratum lateris A D, acuto angulo B, ſubtenſi, nimirum 64. una cum eo, quod fit ex B D, in B D, hoc eſt, cum 36. 36. conficere 136. quem numerum etiam conficiunt duo numeri quadrati laterum A B, B D, nimirum 100. 36. Ita quoque cernis, quadratum numerum lateris B D, acuto angulo A, oppoſiti, hoc eſt, 36. una cum eo, quod fit ex A D, in A D, bis, id eſt, cum 64. 64. efficere 164. quantum ſcilicet conficiunt duo numeri quadrati ſimul laterum A B, A D, nimirum 100. & 64. Denique ſi in alio triangulo A C D, minimum latus C D, ponas 6. reperies ex iis, quæ ad prop. 47. lib. 1. ſcripſimus, A D, 40. & A C. 41. Vbi manifeſtum eſt, quadratum numerum lateris A D, angulo acuto oppoſiti, nimirum 1600. una cum numero, qui fit ex C D, in C D, bis, id eſt, cum 81. 81. facere 1762. qui numerus æqualis eſt quadrati numeri duorum laterum A C, C D, hoc eſt, duobus numeris 1681 81. Hi enim conficiunt quoque ſummam 1762. Quod ſi minimum latus C D, facias 7. comperies A D, 24. & A C, 25. in quibus numeris idem experieris. Nam quadratus numerus lateris C D, angulo acuto A, ſubtenſi, id eſt, 49 una cum numero, qui bis producitur ex A D, in A D, hoc eſt, cum 576. 576. facit 1201 quantum ſcilicet efficiunt duo quadrati numeri laterum A C, A D, hoc eſt, 625. 576.

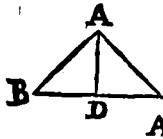
A T ſi perpendicularis cadat extra triangulum, ita vt triangulum ſit obtuſangulum, quærendum erit ſegmentum exterius, una cum lateribus, vt in tribus regulis ſcholij præcedentis propoſitionis docuimus. Segmentum namque exterius cum latere producto, dabit totum ſegmentum inter acutum angulum aſſumptum & perpendicularem. Vt in figura regulæ 3. ſcholij antecedentis propoſitionis, erit ſegmentum totum C D, inter angulum acutum C, & perpendicularem B D, cadentem extra triangulum, 37. Vbi perſpicuum eſt, quadratum lateris A B, angulo C, acuto oppoſiti, hoc eſt, 256. una cum rectangulo ſub A C, C D, comprehenſo bis, id eſt, cum 1184. 1184. componere numerum 2624. qui æqualis eſt duobus quadratis ſimul laterum B C, A C, nimirum aggregato quadratorum numerorum 1600. 1024 &c.



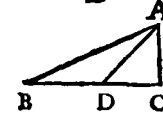
N E Q V E vero alienum putavi hoc loco ex Pappo Alexandrino ſequens etiam theorema demonſtrare.

SI in

SI in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppositum bifariam, erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium simul dupla duorum quadratorum simul sumptorum, quorum vnum ex linea ducta, alterū verò ex dimidiato latere describitur.



IN triangulo A B C, recta A D, secet latus B C, bifariam in D. Dico quadrata ex A B, A C; dupla esse quadratorum ex A D, B D. Demittatur enim ex A, ad B C, perpendicularis, quæ primum recta A D, congruat, ac proinde triangulum A B C, æquilaterum sit, & vel Isosceles, & ad propos. 26. lib. 1. demonstrandum.



a 47. primi. *a Quoniam igitur tam quadratum ex A B, æquale est quadratis ex A D, D B, quam quadratum ex A C, quadratis ex A D, D C; erunt duo quadrata ex A B, A C, æqualia quadrato ex A D, bis sumpto, & una cum quadratis ex D B, D C. Cum ergo quadrata ex D B, D C, æqualia sint, si auferantur duo quadrata ex A D, D C, ablatum erit dimidium quatuor quadratorum, nimirum quadrati ex A D, bis sumpti, & quadratorum ex D B, D C. Quare duo quadrata ex A B, A C, dupla sunt duorum quadratorum ex A D; D B.*

b 47. primi. *quod est propositum. Quod clarius ita ostendetur. b Quoniam quadratum ex A B, duobus quadratis ex A D, D B, æquale est: Sunt autem duo quadrata ex A B, A C, quadrati ex A B, dupla, ob æqualitatem linearum A B, A C; erunt quoque quadrata ex A B, A C, dupla quadratorum ex A D, D B. Quod demonstrandum erat.*

CONGRVAT deinde perpendicularis A C, lateri A C. Et quia quadratū ex B C, quadruplum est tam quadrati ex B D, quam quadrati ex D C, & in scholio propos. 4. huius lib. ostendimus; erit idem quadratum ex B C, duplum duorum quadratorum ex D B, D C. Sunt autem duo quadrata ex A C, C D, bis sumpta, dupla quoque quadrati ex A D; quòd

c 47. primi. *c quadrata ex A C, C D, semel sumpta æqualia sint quadrati ex A D. Igitur quadratum ex B C, & una cum quadratis ex A C, C D, bis sumptis, duplum erit quadratorum ex D B, D C, A D. Cum ergo & quadratum ex C D, bis sumptum, duplum sit quad-*

d 10. prop. num. *drati ex C D; d erit reliquum quadratum ex B C, & una cum quadrato ex A C, bis sumpto, duplum quoque reliquorum quadratorum ex*

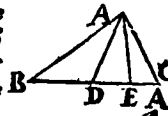
c 47. primi. *D B, A D. Sunt autem c quadrata ex B C, A C, æqualia quadrato ex A B. Igitur quadrata ex A B, A C, (quæ æqualia sunt quadrato ex B C, & una cum quadrato ex A C, bis sumpto) dupla quoque sunt, quadratorum ex A D, D B. Quod est propositum.*

TERTIO cadat perpendicularis A E, intra triangulum inter

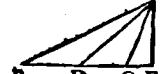
f 9. sec. *puncta D, C. Quia igitur f quadrata ex B E, E C, dupla sunt quadra-*

torum

torum ex BD, DE: Item quadrata ex AE, DE, bis ſumpta, dupla ſunt quadrati ex AD; quod a quadrata ex AE, ED, ſemel ſumptum quadrato ex AD, aqualia ſint; erunt quadrata ex BE, EC, ℭna cum a 47. pri mi.



quadratis AE, DE, bis ſumptis, dupla quoque quadratorum ex BD, DE, AD. Cum ergo & quadratum ex DE, bis ſumptum, duplum ſit quadrati ex DE; b erunt reliqua quadrata ex b 10. pro num.



BE, EC, ℭna cum quadrato ex AE, bis ſumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex DB, AD. Quare cum quadratis ex BE, AE, c aqualeſit quadratum ex AB; & quadratis ex EC, c 47. pri mi.

AE, quadratum ex AC; erunt quoque quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod eſt propoſitum.

POSTREMO cadat perpendicularis AE, in latus BC, productum. Quoniam igitur d quadrata ex BE, CE, dupla ſunt quadra- d 10. ſec.

torum ex BD, DE. Item quadrata ex AE, DE, bis ſumpta, dupla ſunt quadrati ex AD; e quod quadrata ex AE, DE, ſemel ſumpta, e 47. pri

aqualia ſint quadrato ex AD; erunt quadrata ex BE, CE, ℭna cum mi.

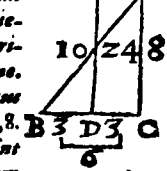
quadratis ex AE, DE, bis ſumptis, dupla quoque quadratorum ex BD, DE, AD. Cum ergo & quadratum ex DE, bis ſumptum, duplum ſit quadrati ex DE; f erunt reliqua quadrata ex BE, CE, ℭna f 10. pro num.

cum quadrato ex AE, bis ſumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex BD, AD. Quare cum quadratis ex BE, AE, g aquale ſit g 47. pri mi.

quadratum ex AB, & quadratis ex CE, AE, quadratum ex AC; erunt quoque quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod erat oſtendendum.

NON te moneat autem, quod ad huius theorematis demonſtrationem adhibuerimus pronunciatum 20. quod ℭnuerſaliter in omni genere multiplicium ab Euclide demonſtratur lib. 5. propoſ. 5. quoniam in dupla proportione facile concedi poteſt ſine demonſtratione, ℭt in expoſitione eius principij diximus: Vel propoſitio 5. lib. 5. ante hoc theorema demonſtrari poteſt: Vel certe theorema ipſum poſt librum 5. demonſtrari; ita ℭt circulus in demonſtrando nulla ratione committatur, etiamſi principium illud demonſtretur libro 5. quia propoſitio 5. lib. 5. ex hoc theoremate non pendet.

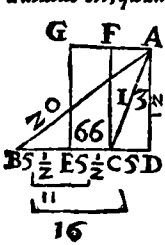
EX his autem, quæ proximis duobus theorematibus, & propoſ. 47. lib. 1. demonſtrata ſunt, aream cuiuſque trianguli latera habentis nota inuenietur, ℭt recte hoc loco monet Campanus, & Federicus Commandinus demonſtrat, hac fere ratione. Sit primo triangulum rectangulum ABC, cuius latera nota ſint, nempe AB, 10 palmorum; AC, 8. BC, 6. Diuiſo latere BC, bifariam in D, ℭt ſint ℭD, BD, 3. *palmorum, perficiatur rectangulum*



O ACDE.

A C D E, quod æquale est triangulo A B C, & in scholio propos. 42. lib. ostendimus. Quia verò ex ductu C D, trium palmorum in C A, 8. palmorum producitur area rectangula C E, 24. palmorum quadratorum, & ad initium huius lib. docuimus: Totidem palmos quadratos coinetinebit triangulum A B C, rectangulo C E, æquale. Quod est propositum.

SIT deinde triangulum obtusangulum A B C, cuius latera sint cognita; A B, 20. palmorum; A C, 13. B C, 11. Primum igitur inuenienda est quantitas perpendicularis linea A D, ex A, in latus B C, protractum demissæ; hoc modo. Quoniam quadratum lateris A B, a 12. sec. *a maius est, quam quadrata laterum A C, B C, rectangulo bis comprehenso sub B C, C D; si quadrata laterum A C, B C, nempe 169. 121. quæ efficiunt 290. detrahantur ex 400 quadrato lateris A B, remanebunt 110. pro rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, cuius numeri dimidiū 55. dabit rectangulū sub BC, CD. Si igitur 55. rectangulū sub BC, CD, dimidiatur per 11. latus notum B C, exibit reliquum latus C D, 5. palmorum, vt Ioan. Regiom. demonstrat propos. 17. lib. 1. de triangulis, & à nobis demonstratum est in libro de mensurationibus omnium quantitatum.*



b 47. primi. *Quia verò quadrata laterum A D, C D,* b *æqualia sunt quadrato lateris A C; si quadratum 15. palmorum, nempe lateris C D, 5. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 169 quadrato lateris A C, remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris A D. Quare latus A D, erit 12. palmorum, cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12. Iam verò diuiso latere B C, bifariam in E, educantur ex C, E, ad B D, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ A G, quæ per A, ipsi B D, parallela ducitur, in punctis F, G. Quibus peractis, si E C, palmorum quinque*

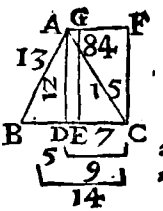
c 34. primi. *cum dimidio, ducatur in C F, 12. palmorum, (Est enim C F, ipsi A D, æqualis,) exurget area rectanguli C G, 66. palmorum: quod cum æquale sit triangulo A B C, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum C G, & triangulum A B C, in eisdem parallelis, &c.) Erit quoque area trianguli A B C, palmorum quadratorum 66. quod est propositum.*

SIT postremo triangulum acutangulum A B C, latera habens nota; A B, 13 palmorum; A C, 15. B C, 14. Primum igitur hic quoque reperienda est quantitas perpendicularis A D, ex A, ad B C, demissæ,

d 13. sec. *hac ratione. Quoniam quadratum lateris A B,* d *minus est, quam quadrata laterum A C, B C, rectangulo comprehenso bis sub B C, C D; si quadratum lateris A B, nimirum 169. detrahatur ex quadratis laterum A C, B C, hoc est, ex 225. 196. quæ efficiunt 421. remanebunt 252. pro rectangulo comprehenso bis sub B C, C D. cuius numeri dimidium 126. dabit rectangulum sub B C, C D. Si igitur 126. rectangu-*

lum sub

lum sub B C, C D, dividatur per B C, latus notum, vt per 14; exibit reliquum eius latus C D, palmorum 9. Vt constat ex Ioan. Regiom. lib. 1. de triangulis propos. 17. & à nobis demonstratum est in lib. de mensurationibus omnium quantitatum. Quoniam autem quadrata ex A D, C D, æqualia sunt quadrato ex A C; si quadratum 81. palmorum, nempe lateris C D, 9. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 225. quadrato lateris A C; remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris A D. Quare cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12. erit latus A D, 12. palmorum. Iam vero diuisis latere B C, bifariam in E, educantur ex C, E, ad B C, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ A F, quæ per A, ipsi B C, parallela ducitur, in punctis G, F. Quibus peractis, si C E, 7. palmorum ducatur in E G, 12. palmorum; (b est enim E G, rectæ ipsi A D, æqualis) exurget area rectanguli E F, palmorum 84 Quod cum triangulo A B C, sit æquale, ex scholio propos. 41 lib. 1. (sunt enim rectangulum E F, & triangulum A B C, in eisdem parallelis, &c.) erit quoque area trianguli A B C, 84 palmorum. Quod est propositum.



247 primi.

b 34. primi.

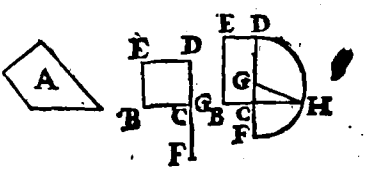
IT A QVE in vniuersum, area cuiuscunque trianguli producitur ex dimidio basis in perpendicularem, quæ a vertice ad basim demittitur, vt in exemplis datis est manifestum. Sed plura hac de re in libro de mensurationibus omnium quantitatum, quem propediem, Deo iuuante, in lucem edemus. Quo pacto autem, duobus lateribus, cum vno angulo, cognitis, vel duobus angulis, cum vno latere, reliqui anguli, & latera cognoscantur, demonstrauimus in nostris triangulis rectilineis.

PROBL. 2. PROPOS. 14. xiv.

DATO rectilineo æquale quadratum constituere.

SIT datum rectilineum A, cui quadratum æquale constituendum est. Constituatur parallelogrammum B C D E, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius vnum latus, vt D C, producatur ad F, fiatq; C F, recta æqualis rectæ B C Diuidatur quoque D F, bifariam in puncto G, quod cadet aut in punctum C, aut non. Si cadit in punctum C, erit recta B C, (cum æqualis ponatur rectæ C F) rectæ C D, æqualis. Quare rectangulum B D, erit quadratum, eum latera D E, E B, æqualia sint oppositis lateribus B C, C D; atque adeo constitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si vero

c 45. primi.



d 34. primi.

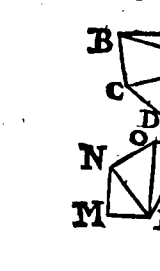
punctum

punctum G, non cadit in C; facto G, centro, describatur interuallo G D, vel G F, semicirculus F H D, producaturque B C, donec circumferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ C H, esse æquale rectilineo A. Ducta enim recta G H; quia recta D F, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectangulum comprehensum sub D C, C F, hoc est, rectangulum B D, vna cum
a 5. sec. quadrato rectæ G C, *a* æquale quadrato rectæ G F, hoc est, quadrato rectæ G H; cum rectæ G F, G H, sint æquales: At quadra-
b 47. pri mi. tum rectæ G H, *b* æquale est quadratis rectarum G C, C H. Igitur rectangulum B D, vna cum quadrato rectæ G C, æquale quoque erit quadratis rectarum G C, C H. Quam ob rem dempto communi quadrato rectæ G C, remanebit rectangulum B D, hoc est, rectilineum A, quadrato rectæ C H. æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum constituimus: Quod facere oportebat.

SCHOLIVM.

VERVM quia laboriosum est, rectangulum dato rectilineo multorum angulorum construere æquale, quod sapius super datam rectam constituendum sit, ex propos. 44. lib. 1. rectangulum æquale triangulo, facilius fortasse describemus quadratum dato rectilineo æquale, si datam figuram rectilineam in triangula resoluamus, & cuilibet triangulo quadratum æquale efficiamus, hoc est, latus quadrati, quod cuius triangulo æquale sit, inuestigemus: quod factu facillimum est, vt mox ostendemus. Nam si per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. scripsimus, inueniamus latus alterius quadrati, quod sit omnium inuentorum laterum quadratis æquale, factum erit, quod proponitur.

VT si datum sit rectilineum A B C D E F, resoluemus illud in



triangulo A B F, F B C, C F D, D E F, inueniemusq; latera G, H, I, K, quorum quadratæ sint illis ordine æqualia. Deinde angulum rectum constituemus M, & lineas L M, M N, lateribus G, H, æquales. Ducta autem recta N L, erigemus ad eam perpendicularem N O, lateri I, æqualem. Similiter ducta recta O L, excitabimus illi perpendicularem O P, lateri K, æqualem, iungemusque rectam P L. Atq; hoc modo progrediemur, donec vltimo lateri sumpta sit perpendicularis linea æqualis, qualis hic fuit perpendicularis O P, vltimo lateri K, æqualis. Nam quadratum rectæ P L, postremo loco ductæ æquale erit omnibus quadratis laterum G, H, I, K, & ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, atque adeo omnibus triangulis A B F, F B C, C F D, D E F, hoc est, datæ figuræ rectilineæ A B C D B F.

PRAXIS

PRAXIS autem, qua cuiuis triangulo quadratum æquale inueniatur, facilis eſt. Sit enim inueniendum quadratum æquale quarto triangulo DEF, datæ rectilineæ figuræ. Diuidatur quodcunque datum, nempe DE, bifariam in A, producaturque quantum libet. Ducatur deinde per angulum oppoſitum F, lateri DE, parallela FB, ducatur per E, ad DE, perpendicularis HEB, ſecans FB, in B, ſitque EH, ipſi AE, dimidio lateris DE, æqualis. Poſtremo, diuiſa tota linea BH, bifariam in G, deſcribatur ex G, ad interuallum GH, vel GB, arcus ſecans latus DE, productum in I. Dico quadratum lateris EI, æquale eſſe triangulo DEF. Si namque compleatur rectangulum AEC, & ſemicirculus BH, ducaturq; recta GI, oſtendemus, vt in hac propoſ. 14. quadratum ex EI, rectangulo AB, æquale eſſe. Cum ergo rectangulum AB, triangulo DEF, ſit æquale, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. quod baſis DE, ſit dupla baſis AE, conſtat propoſitum.

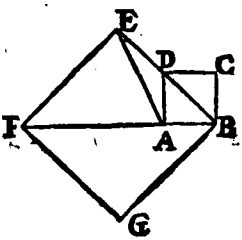
NON eſt tamen neceſſarium, vt rectangulum conſtruatur AB. Nam ſi fiat angulus rectus IEB, atque in BH, capiatur EH, ſemiſſi lateris DE, æqualis, & recta EB, æqualis perpendiculari ex F, in latus DE, demiſſæ, ſecenturque BH, bifariam in G, auferet circumferentia ex G, circa BH, deſcripta rectam EI, cuius quadratum æquale eſt rectangulo ſub BE, EH, hoc eſt, triangulo DEF.

QVONIAM verò ſecundo hoc libro Euclides multa de quadratis, ac rectangulis parallelogrammis diſputauit, rectè hic inſeri potuerunt ſequentia duo problemata de quadrato, & parallelogrammo rectangulo, neque iniucunda, neque inutilia: quorum poſterius eruditus vir, atque excellens Mathematicus, Marinus Ghetaldus Patricius Racuſinus, mihiq; familariſſimus, ingenioſiſſimè ſanè ſoluit, & longè alter, breuiusq;, quam à quodam alio ſolutum quondam fuit, quam ſolutionem hic ſubiungere ſupernaeaneum eſt, cum illam Marini Racuſini hic apposuerim, tanquam breuiorem, ac faciliorem.

I.

DATO exceſſu diametri alicuius quadrati ſupra latus eiuſdem; Inuenire latus ipſius quadrati.

EXCEDAT diameter alicuius quadrati latus eiuſdem recta AB, inueniendumq; ſit latus illius quadrati. Ex recta AB, deſcribatur quadratum AC, cuius diameter ducta BD, producatur ad E, vt ſit DE, recta recta AD, æqualis. Dico rectam EB, eſſe latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipſum latus BE, exceſſu dato AB. Ducatur enim EF, perpendicu-



latus ad B E, quæ rectam B A, productam secet in F. Quoniam igitur in triangulo B E F. angulus F E B, rectus est, & E B F, semirectus, ea
a 32.pri coroll.2 propos. 4. huius lib. a erit & B F E, semirectus. b *Quare recta*
mi. *B E, F E, æquales sunt. Si igitur ex F, ducatur F G, parallela ipsi B E;*
b 6 pri. *& ex B, recta B G, parallela ipsi E F, occurrens priori in G, constitue-*
c 5. pri. *tum erit quadratum rectæ B E. c Quod si ducatur recta A E, erunt an-*
guli A E D, E A D, æqualibus isnoe D E, D A, oppositi æquales. Quare si demantur ex rectis angulis D E F, D A F, remanebunt an-
d 6. pri. *guli A E F, E A F, æquales; d ideoque recta E F, A F, æquales erunt. Quoniam vero diameter B F, rectam A F, superat data recta A B; superabit eadem diameter B F, latus quadrati E F, eadem recta A B. quod est propositum.*

COROLLARIVM.

ITAQVE recta composita ex diametro quadrati supra excessum datum descripti, & ex latere eiusdem quadrati, exhibet latus quadrati, quod quæritur. Eadem autem diameter cum duplo excessus, diametrum quæsiti quadrati constituit.

II.

DATIS duobus excessibus diametri alicuius parallelogrammi rectanguli supra vtrumque latus; Inuenire latera ipsius rectanguli.



SVPERET diameter minus latus recta A B, & maius recta B C. Productis A C in vtramq; partem sumatur A D, ipsi A B, æqualis: descriptoque circa C D, semicirculo, erigatur ad A C, perpendicularis B E, secans circumferentiam in E, sumatur q; ipsi B E, æqualis C F. Et quia, vt ex demonstratione propos. 14 huius lib. constat, quadratum rectæ B E; æquale est rectangulo sub D B, B C, erit B E, maior quam B C, minus latus dicti rectanguli. Igitur & C F, maior erit quam B C. Sumpta ergo F G, ipsi B C. æquali, cadet punctum G, inter C, & F. Erecta autem ad A F, perpendiculari G H, ipsi B F, æquali; Dico A G, esse maius latus, & G H, minus, ita vt rectangulum quæsitum sit G K. Esse enim rectam A G, maiorem quam G H, ita probabitur: Quoniam B C, F G, æquales sunt, addita communi C G, erunt quoque B G, C F, æquales. Additis igitur inæqualibus A B, ipsi B G, & B C, ipsi C F, erit A G, maior quam B F, hoc est, quam G H: quandoquidem addita A B, maior est, quam addita B C. Esse autem A G, G H, latera quæsita, ita demonstrabitur. Descripto ex A, ad internallum A G, circulo, ducatur per A, H, recta secans circumferentiam in L, M, & recta A D, producatur, circumferentiam

secans

ficam; in I. *Quoniam igitur rectangulum sub B C, B D,* a *æquale est* a 1. *sec.*
rectangulis sub C B, B A, & sub C B, A D, hoc est, duplum rectanguli
sub exceſſibus A B, B C: Est autem rectangulo sub B C, D B, æquale
quadratum rectæ B E, vt oſtendimus; erit quoque quadratum rectæ
B E, duplum rectanguli sub A B, B C, hoc est, quadratum rectæ B E,
æquale erit duplo rectanguli sub A B, B C. Addito ergo communi qua-
drato rectæ B C, vna cum duplo rectanguli sub B G, B C, hoc est, sub
G F, B C; erunt quadrata rectarum B E, sive C F, & *B C, vna cum*
duplo rectanguli sub C F, B C, æqualia duplo rectanguli sub A B,
B C, & *quadrato rectæ B C, vna cum duplo rectanguli sub C F,*
B C. Sunt autem quadrata rectarum G F, B C, vna cum duplo
rectanguli sub C E, B C, b *æqualia quadrato rectæ B F. Igitur* b 4. *sec.*
& *quadratum rectæ B F, æquale erit duplo rectanguli sub A B,*
B C, & *quadrato rectæ B C, vna cum duplo rectanguli sub C F,*
B C, vel sub B G, B C Cum ergo duplum rectangulorum sub A B, B C,
& *sub B G, B C, æquale sit rectangulo sub I G, (quæ ipſarum A B,*
B G, simul dupla eſt) & *B C, vel F G; erit quoque quadratum rectæ*
B F, æquale rectangulo sub I G, F G, vna cum quadrato rectæ B C, vel
F G. At rectangulo sub I G, G F, vna cum quadrato rectæ F G, c *æqua-* c 3. *sec.*
le est rectangulum sub I F, F G. Igitur quadratum rectæ B F, sive
G H. æquale erit eam est rectangulo sub I F, F G. Addito ergo communi
quadrato rectæ A G; erunt quadrata rectarum G H, A G, æqualia
rectangulo sub I F, F G, vna cum quadrato rectæ A G. Est autem
quadratum rectarum G H, A G, d *æquale quadratum rectæ A H;* & d 47.
rectangulo sub I F, F G, vna cum quadrato rectæ A G, c *æquale est primi.*
quadratum rectæ A F. Igitur & *quadratum rectæ A H, quadrato re-* c 6. *sec.*
ctæ A F, æquale est, reliquæ A H, rectæ A E, æqualis: demptis
æqualibus A L, A G, reliqua L H, G H, æquales erunt. Diameter
ergo A H, rectanguli G K, hoc est, rectæ A F, excedit maius latus A G,
rectæ G F, sive exceſſu dato B C: Ipſum vero minus latus G H, sive re-
ctam B F, ipſi G H, æqualem, exceſſu dato A B. Quod est propoſitum.

COROLLARIVM.

ITAQVE recta B E, vel C F, cuius quadratum rectanguli sub datis exceſſibus A B, B C, duplum est, addita minori exceſſui B C, efficit minus latus quæſitum B F, hoc est, G H. Eadem autem recta B E, hoc est, B G, addita maiori exceſſui A B, conficit maius latus quæſitum A G: Eadem denique B E, vel C F, cum vtroque exceſſu A B, B C, diametrum A F, vel A H, conſtituit.

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVM.

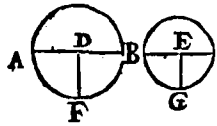
DEFINITIONES.

I.

ÆQVALES circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales; vel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ ſunt æquales.



QVONIAM Euclides hoc 3. lib. varias circuli proprietates demonſtrat, idcirco explicat primo terminos quoſdam, quorum frequens in eo futurus eſt uſus. Primum itaque docet, eos circulos eſſe æquales, quorum diametri, vel ſemidiametri æquales ſunt. Cum enim circulus deſcribatur ex circumvolutione ſemidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile, vt lib. 1. diximus, perſpicuum eſt, eos circulos eſſe æquales, quorum ſemidiametri, ſeu rectæ ex centris ductæ, ſunt æquales; vel etiam quorum totæ diametri æquales ſunt. Vt ſi diametri AB, BC, vel rectæ DF, EG, è centris D, E, ductæ ſint æquales, æquales erunt circuli AFB, & BGC. Sic etiam è contrario, ſi circuli ſint æquales, erunt diametri, vel rectæ è centris ductæ, æquales. Ex his liquet, circulos, quorum diametri, vel rectæ ductæ ex centris ſunt inæquales, inæquales eſſe; atque adeo illum, cuius diameter, vel ſemidiameter maior, maiorem. Et contra, circulorum inæqualium diametros, ſemidiametros ve inæquales eſſe, maioris quidem maiorem, & minoris minorem.

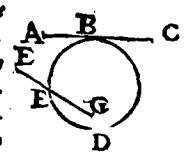


II.

RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, ſi producatur, circulum non ſecat.

VT recta

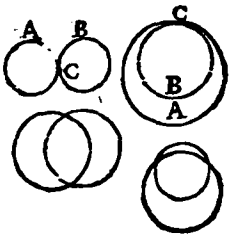
VT recta A B, si ita circulum B F D, tangat in B, & producta ad C, nulla ratione circulum secet, sed totæ iaceat extra ipsum, dicetur tangere circulum. At verò recta E F, quia ita eundem circulum tangit in F, & producta ad G, secet circulum, cadatq; intra ipsum, non dicetur circulum tangere, sed secare.



III.

CIRCVLI sese mutuò tangere dicuntur, qui sese mutuò tangentes, sese mutuò non secant.

EODEM modo duo circuli A C, B C, mutuò dicuntur tangere in C, si ita sese contingant in C, vt neuter alterum secet. Est autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exterius sese circuli tangunt, vt quando vnus extra alterum est positus; aut interius; quando vnus intra alterum constituitur. Quòd si duo circuli ita se mutuò tangant, vt vnus alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuò secare, & non tangere.



IV.

IN circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, cùm perpendiculares, quæ à centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

QVONIAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, brevissima est perpendicularis, & semper eadem; aliæ verò infinitis modis variari possunt; recta distantia illius puncti à linea illa recta accipitur penes lineam perpendicularem. Vt distantia puncti A, à recta B C, dicitur esse perpendicularis A D, non autem A E, vel A F, vel alia quauis, quæ non perpendicularis est; quia A D, omnibus est brevior, ex coroll. propos. 19. lib. 1. immò non solùm A E, A F, maiores sunt, quàm A D, sed etiam ipsæ inter se inæquales sunt. Est enim A F, a maior, quam A E, cùm angulus A E F, sit obtusus, & A F E, acutus, & sic de alijs lineis non perpendicularibus. Quòd enim A F E, acutus sit, constat ex eo, quod in triangulo A D F, duo anguli A D F, A F D, b minores sunt duobus rectis. Hinc enim fit, cùm A D F, rectus sit, angulum A F D, recto minorem. Eadem ratione angulus A E D, ostendetur acutus, propterea quòd in triangulo A D E, c duo anguli A D E, A E D, minores sint

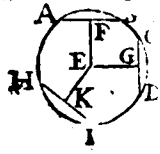


a 19 pri.

b 17 pri.

c 17. pri.

res ſunt duobus rectis, & A D E, rectus eſt) ac proinde, cùm ambo
213. pri. A E D, A E F, æquales ſint duobus rectis, erit A E F, obtuſus. Hinc factum eſt, vt Euclides æqualem diſtantiam rectarum in circulo ab ipſius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem diſtantiam per inæquales. Vt duæ rectæ A B, C D, in circulo A B C D, æqualiter dicentur diſtare à centro E, ſi perpendiculares E F, E G, æquales fuerint. At linea C D, longiùs abeſſe dicetur à centro E, quàm linea H I, ſi perpendicularis E G, maior fuerit perpendicularis E K.



V.

SEGMENTVM circuli eſt figura, quæ ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

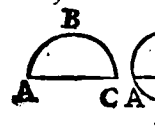


VT ſi ducatur in circulo A B C D, recta B D, vtcunque, dicetur tam figura B A D, contenta circumferentia B A D, & recta E D; quam figura B C D, comprehenſa recta B D, & circumferentia B C D, circuli ſegmentum. Ex hìc colligitur triplex circuli ſegmentũ, ſemicirculus, quando recta B D, per centrum E, incedit; Segmentum ſemicirculo maius, quando recta B D, non tranſit per centrum, in ipſo tamen centrum exiſtit, quale eſt ſegmentum B A D; Et ſegmentum ſemicirculo minus, extra quod centrum circuli conſtituitur, cuiuſmodi eſt ſegmentum B C D. Id quod ad defin. 18 lib. 3. demonſtrauimus. Vocatur à pleriſq; Geometris recta B D, chorda, & circumferentia B A D, vel B C D, arcus.

VI.

SEGMENTI autem angulus eſt, qui ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

DEFINIT iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis conſiderantur. Primo loco angulum ſegmenti, dicens angulum mixtium B A C, vel B C A, contentum ſub recta linea A C, & circumferentia A B C, appellari angulum ſegmenti. Quod ſi ſegmentũ circuli fuerit ſemicirculus, dicetur angulus ſemicirculi. Si verò ſegmentũ maius ſemicirculo extiterit, vocabitur angulus ſegmenti maioris: Si denique ſegmentũ minus fuerit ſemicirculo, angulus ſegmenti minoris nuncupabitur.

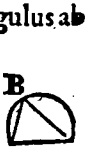


VII.

IN ſegmento autem angulus eſt, cùm in ſegmenti peripheria ſumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ ſegmenti baſis eſt, adiun-

adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is, inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehensus.

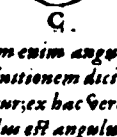
SIT segmentum circuli quodcunque A B C, cuius basis recta A C. Ex susceptо quolibet puncto B, in circumferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema basis, rectæ lineæ B A B C. Angulus igitur rectilineus A B C, dicitur existere in segmento A B C.

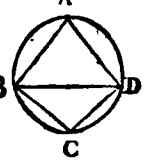


VIII.

CVM verò comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquã assumunt peripheriã, illi angulus insistere dicitur.

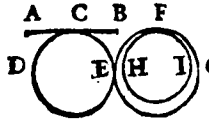
EX puncto A, quolibet susceptо in circumferentia circuli A B C D, ducantur rectæ duæ lineæ A B, A D, ad duo extrema B, & D, circumferentiæ B C D, cuius quam quidem duæ rectæ A B, A D, assumunt. Angulus itaque rectilineus B A D, insistere dicitur circumferentiæ B C D. Perspicuum autem est, hunc angulum à præcedente non differre, nisi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus B A D, iuxta præcedentem quidem definitionem dicitur esse in segmento B A D, si recta B D, basis duceretur; ex hac verò insistere circumferentiæ B C D. Non tamen confundendus est angulus in segmento aliquo, cum angulo, qui circumferentia insistit, quamuis unus & idem sit; ad diuersa siquidem referuntur. Angulus enim in segmento, segmentum, in quo existit, angulus autem insistens circumferentiæ, circumferentiam, qua basis est ipsius anguli, respicit. Vnde si sumatur segmentum aliquod circuli B C D, in circulo A B C D, non erit idem angulus in hoc segmento existens, & eius circumferentiæ insistens. Angulus enim in eo existens, erit B C D; at eius circumferentiæ B C D, insistens, erit angulus B A D. qui multum ab eo differt. Qua in re mirũ in modum hallucinati sunt Orontius, Pelotarius, & alij interpretes nonnulli. Quòd autem angulus in segmento, & angulus circumferentiæ cuipiam insistens, ad diuersos arcus referantur, luce clarius patebit ex vltima propos. lib. 6. qua solùm conuenire potest circumferentijs circulorum, quibus anguli insistunt, nõ autem in quibus existunt, vt eo in loco ostendemus. Idem quoq; faciè constat ex verbo græco βεβηκέναι, quod ascendisse significat. Ascendit enim angulus D A B, supra circumferentiam B C D.





PRÆTER tres dictos angulos consideratur etiam à Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea recta tangente circulum, & circumferentia circuli; vel certè duabus circumferentijs sese mutuo tangentibus, siue hoc exterius fiat, siue interius. Exemplum. Si recta A B, tangat circulum C D E, in C; angulum mixtum A C D, vel

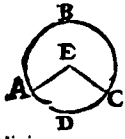
B C E,



BCE, dicetur angulus contingentiæ, siue contactus: Rursus, si circulus CED, tangat circulum EFG, exterius in E; Item circulus HFI, circulum EFG, interius in F; appellabitur tam angulus curuilineus CEF, quàm EFH, vel GFI, angulus contactus, seu contingentia. Sunt itaque, vt vides, tres anguli contingentiæ, vnus quidem mixtus, reliqui verò duo curuilinei.

IX.

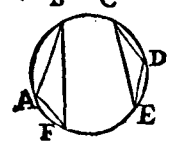
SECTOR autem circuli est, cùm ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirum figura & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis assumpta.



SI in circulo ABCD, cuius centrum E, recta AE, CE, constituant angulum AEC, ad centrum E; nominabitur figura AECD, contenta rectis AE, EC, & circumferentia ADC, quam pradicta linea assumunt, Sector circuli. Ex hoc autem perspicuè etiam colligitur, angulum, qui definitione 8. explicatur, referri ad circumferentiam, qua ipsius basis est, non autem ad eam, in qua existit, vt multi interpretes existimarunt. Nam sicut in hac definitione Euclides intelligit circumferentiam ADC, quæ basis est anguli ad centrum constituti, quando mentionem facit peripheriæ à rectis AE, CE, assumptæ: Ita quoque in illa intellexisse eum necesse est nomine peripheriæ, quam recta linea assumunt, eam, quæ basis est anguli ad circumferentiam constituti; quandoquidem in vtraque definitione vsus est eadem verbo græco ἀπολαμβάνω.

X.

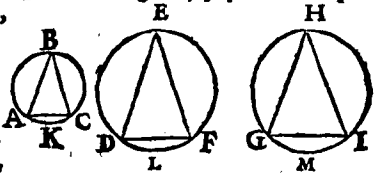
SIMILIA circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter se sunt æquales.



SEGMENTA videlicet ABDF, DCAE, eiusdem circuli ABCDEF, quæ capiunt hos duos angulos ABF, ACE, æquales: vel, quod idem est, in quibus iidem anguli æquales existunt, iuxta 7. definitionem, similia dicuntur, & ipsa circumferentiæ quoque ABDF, DCAE, similes.

EODEM modo segmenta diuersorum circulorum tum æqualium, quàm inæqualium, à Geometris dicuntur similia, quæ vel suscipiunt æquales angulos; vel in quibus æquales anguli

quli existunt. Vt si in circulis A B C K, D E F L, G H I M, anguli A B C, D E F, G H I, fuerint aequales, dicentur segmenta, seu circumferentia A B C, D E F, G H I, quae dictos angulos suscipiunt, vel in quib. praedicti anguli existunt,



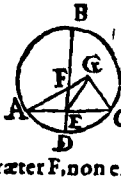
similes. Consistit autem haec segmentorum, circumferentiarúmve similitudo in eo, quod qualis pars est vna circumferentia totius suae circumferentiae, talis quoque sit altera circumferentia, qua dicitur huic similis, totius suae circumferentiae; itaut qualis, & quanta pars est circumferentia A B C totius circumferentiae A B C A, talis & tanta quoque pars sit circumferentia D E F, totius circumferentiae D E F D; Item talis, & tanta circumferentia G H I, totius circumferentiae G H I G, Vel potius segmentorum similitudo in hoc consistit, quòd segmenta, seu circumferentiae similes, ad totas circumferentias suas eandem habeant proportionem. Quòd autem segmenta, quae vel aequales suscipiunt angulos, vel in quibus existunt aequales anguli, sint huiusmodi, demonstrabimus propositione vltima lib. 6. Nunc satis sit, talia segmenta circulorum, vel etiam arcus, circumferentiasve, appellari similes.

EADEM ratione dicuntur arcus, vel circumferentiae similes, quibus aequales anguli, iuxta defin. 8. insistunt. Vt si in ijsdem circulis anguli A B C, D E F, G H I, sint aequales, dicentur arcus, circumferentiaeve A K C, D L F, G M I, quibus insistunt similes. Immò si anguli ad centra insistentes arcubus A K C, D L F, G M I, sint aequales, erunt adhuc ipsi arcus similes. Id quod à nobis in scholio propos. 22. huius lib. demonstrabitur.

PROBL. 1. PROPOS. 1. 3.

DATI circuli centrum reperire.

SIT circulus datus A B C D, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque A C, & quae bifariam diuidatur in E, & per E, ad A C, perpendicularis agatur B D, vtrinque in peripheria terminata in punctis B, D. Hac igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta B D, aliud punctum, praeter F, non erit centrum, cùm omne aliud punctum ipsam diuidat inaequaliter, quandoquidem in F, diuisa fuit aequaliter. Si igitur F, non est centrum, sit punctum G, extra rectam B D, centrum, à quo ducantur lineae G A, G E, G C. Quoniam ergo latera A E, E G, trianguli A E G, aequalia sunt lateribus C E, E G, trianguli C E G; & basis A G, basi



ax. 10. 1.

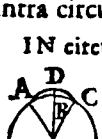
28.pri. AG, basi CG; (à centro enim duci dicuntur) & erunt anguli AEG, CEG, æquales, ideoq; recti; Erat autem & angulus AEF, rectus ex constructione. Igitur recti AEF, AEG, æquales sunt, pars & totum. quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademq; est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaq; dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli: Nam ex eo, quod BD, recta rectam AC, bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctū eius medium F, necessariò esse circuli centrum.

ij. THEOR. 1. PROPOS. 2.

SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.



IN circulo ABC, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circumferentia. Dico rectam ex A, in C, ductā cadere intra circulum, ita vt ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea ADC, recta, vt vult aduersarius. Inuento b igitur centro E, ducātur ab eo ad puncta assumpta A, & C; nec non ad quoduis punctum D, in recta ADC, lineæ rectæ EA, EC, ED, secetq; ED, circumferentiam in B. Quoniam ergo duo latera EA, EC, trianguli, cuius basis ponitur recta ADC, æqualia sunt, (à centro enim ducuntur) c erunt anguli EAD, ECD, æquales: Est autem angulus EDA, d angulo ECD, maior, externus interno opposito, cùm latus CD, in triangulo ECD, fit productum ad A. Igitur & angulo EAD, maior erit idem angulus EDA. Quare recta EA, maiori angulo ADE, opposita, hoc est, recta EB, sibi æqualis, e maior erit, quàm recta ED, minori angulo DAE, oppositæ, pars quàm totum. Quod est absurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur, rectam ductam ex A, in C, non posse ea lere super arcum ABC, ita vt eadem sit, quæ circumferentia ABC. Esset enim recta EA, maior, quàm recta EB. Quod etiam ex definitione rectæ lineæ patet, cùm ABC, arcus sit linea curua, non autem recta. Itaque si in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.

br. ter. ax.

c 5. pri.

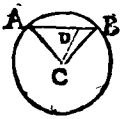
d 16. pri.

e 19. pri.

SCHOLIVM.

IDEM hoc theorema demonstrari posset affirmatiuè, hoc modo. Recta AB, coniungat duo puncta A, & B, in circumferentia circuli AB,

AB, eius centrum C. Dico rectam AB, intra circulum cadere, itaut omnia eius puncta media intra circulum existant. Assumatur enim quodcunque eius punctum intermedium D; & ex centro educantur recta CA, CB, CD. Quoniam igitur duo latera CA, CB, trianguli CAB, aqualia sunt, a *erunt anguli CAB, CBA, aquales. Est autem angulus CDA,* b *angulo CBA, maior, externus interno. Igitur idem angulus CDA, angulo CAD, maior erit, & ob id latus CA,* c *latere CD, maius erit. Quare cùm CA, sit ducta à centro ad circumferentiam, & usque, non perueniet recta CB, ad circumferentiam, eademq; punctum D, intra circulum cadet. Idem ostenderur de quolibet alio puncto assumpto. Tota igitur recta AB, intra circulum cadet. Quod est propositum.*



a 5. pri.
b 16. pri.
c 19. pri.

COROLLARIVM.

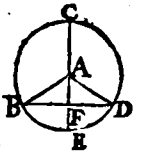
HINC est manifestum, lineam rectam, quæ circulum tangit, ita vt eum non secet, in vno tantùm puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, *d* caderet pars rectæ inter ea duo puncta posita intra circulum. Quare circulum secaret, quod est contra hypothesin.

d 2. ter.

THEOR. 2. PROPOS. 3. iij.

SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

PER centrum A, circuli BCD, recta CE, extensa dimidat rectam BD, non per centrum extensam, bifariam in F. Dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi BD. Ductis enim rectis AB, AD, erunt duo latera AF, FB, trianguli AFB, duobus AF, FD, trianguli AFD, æqualia; & bases AB, AD, æquales. *e* Igitur anguli AFB, AFD, æquales erunt, *e* 8. pri. hoc est, recti. Quod erat primò propositum.



SIT iam AF, ad angulos rectos ipsi BD. Dico rectam BD, bifariam secari in F, à recta CE. Ductis enim iterum rectis AB, AD, cùm latera AB, AD, trianguli ABD, sint æqualia, *f* erunt anguli ABD, ADB, æquales. Quoniam igitur duo anguli AEB, ABF, trianguli ABF, æquales sunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF; & latera AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque: *g* erunt latera FB, FD, æqualia. Quod secundò proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extensa, &c. Quod demonstrandum erat.

f 5. pri.
g 26. pri.

FACILE quoque demonstrari poterat secunda hæc pars, quæ quidem conuersa est primæ partis, hac ratione. Si enim AF, perpendicularis est ad BD, erit tam quadratum rectæ AB, æqua-

a47.pri mi. æquale quadratis rectarum AF, FB, quàm quadratum rectæ AD, quadratis rectarum AF, FD. Cùm igitur quadratum rectæ AB, æquale sit quadrato rectæ AD; erunt & quadrata rectarum AF, FB, æqualia quadratis rectarum AF, FD. Quare dempto cõmuni quadrato rectæ AF, remanebunt quadrata rectarum FB, FD, æqualia; atque idcirco & rectæ FB, FD, æquales erunt.

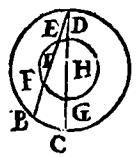
COROLLARIVM.

EX hac demonstratione facilè inferemus, in quouis triangulo duorum laterum æqualium, siue æquilaterum illud sit, siue Isosceles, lineam, quæ basin bifariam secet, perpendicularem esse ad basin. Et contrà, lineam, quæ ad basin sit perpendicularis, basin secare bifariam. Nam in triangulo ABD, cuius duo latera AB, AD, æqualia sunt, atque adeò ex centro A, per B, D, circulus describi potest: ex eo, quod recta AF, secat basin BD, bifariam, ostensum est, angulos ad F, esse rectos: Et ex eo, quòd anguli ad F, recti sunt, demonstratum est, basin BD, à recta AF, bifariam secari. Sed hoc etiam demonstrauimus ad propos. 26. lib. 1. & quidem vniuersalius.

SCHOLIVM.

CENSEMVS quoque, demonstrandum esse hoc loco sequent theorema, ad ea, quæ sequuntur, non inutile; videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis, si ab aliquo puncto circumferentiæ exterioris recta ducatur interioris circumferentiam secans; erunt eius segmenta inter vtramque circumferentiam posita, inter se æqualia.



DVO circuli ABC, DEFG, habeant idem centrum H, & ex puncto A, ducatur primum per centrum H, recta AC, secans circumferentiam interiorem in D, G. Dico rectas AD, CG, æquales esse. Nã si ex HA, HC, quæ b *æquales sunt, demantur HD, HG, quæ eadem ratione æquales sunt,* c *erunt rectæ AD, CG, æquales.*

b15.def. c4.prænum.

DEINDE ex eodem puncto A, ducatur recta AB, non per centrum, secans interiorem circumferentiam in E, F. Dico rursus, rectas d12.pri. c3.ter. *AE, BF, esse æquales.* d *Ducta enim ex centro H, ad AB perpendiculari HI,* c *secabit hæc tam rectam AB, in circulo ABC, quàm rectam EF, in circulo DEFG, bifariam. Ablatis igitur æqualibus* f3.prop. *IE, IF, ex æqualibus IA, IB,* f *remanebunt AE, BF, æquales. quod erat propositum.*

iiij. THEOR. 3. PROPOS. 4.

SI in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuò secent non per centrum extensæ; sese mutuò bifariam non secabunt.

DVÆ

DVÆ rectæ AB, CD, ſe mutuò in E, ſecent in circulo ACBD, non per centrum extenſæ. Dico fieri non poſſe, vt mutuò ſeſe bifariam ſecent. Si enim vna earum per centrum tranſit, certum eſt, eam bifariam non ſecari: ſolùm enim in centro, per quod altera ponitur non tranſire, bifariam diuiditur: Si verò neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquam bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minimè ſecabitur bifariam. Diuiſa enim ſit & AB, & CD, ſi fieri poteſt, bifariam in E. *a* Inuento igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta FE. Quoniam' ergo FE, ponitur ſecare rectam AB, bifariam in E, *b* ſecabit ipſam ad angulos rectos. Eadem ratione ſecabitur CD, ad angulos rectos, cùm ponatur bifariam diuidi in E. Quare rectus angulus FED, recto angulo FEB, æqualis eſt, pars toti, quod eſt abſurdum. Itaque ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecent, &c. Quod erat demonſtrandum.



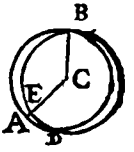
a 1. ter.

b 3. ter.

THEOR. 4. PROPOS. 5. v.

SI duo circuli ſeſe mutuò ſecent; non erit illorum idem centrum.

DVO circuli ABD, EBD, ſe mutuò ſecent in B, & D. Dico ipſos non habere idem centrum. Sit enim, ſi fieri poteſt, idem centrum vtriuſque, C, à quo duæ rectæ ducantur; CB, quidem ad ſectionem B; CA, verò ſecans vtramq; circumferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli EBD, erit recta EC, rectæ BC, æqualis. Rurſus quia C, centrum quoque ponitur circuli ABD, erit & recta AC, eidem rectæ BC, æqualis. Quare rectæ EC, AC, *e* æquales inter ſe erunt, et pars, & totum, quod eſt abſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe mutuò ſecent, &c. Quod oſtendendum erat.



e 1. prop.

THEOR. 5. PROPOS. 6. vj.

SI duo circuli ſeſe mutuò interius tangant; eorum non erit idem centrum.

DVO circuli AB, BC, ſe interius tangant in B. Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, ſi fieri poteſt, idem centrum D, à quo duæ rectæ ducantur; DB, quidem ad tactum B. At DC, ſecans vtramq; circumferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli AB, erit recta AD, rectæ BD, æqualis. Rurſus quia D, ponitur centrum circuli BC, erit recta CD, eidem rectæ BD, æqualis. Quare rectæ AD, & CD; *d* inter ſe erunt æquales, pars & totum, quod eſt abſurdum.



d 1. prop. hui.

ſurdum. Si igitur duo circuli ſeſe mutuò interius tangant, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

EVCLIDES propoſuit theorema hoc de circulis ſeſe interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius ſeſe tangentium, cùm vnus ſit extra alium, non poſſe eſſe idem centrum, manifeſtum eſt.

vij. THEOR. 6. PROPOS. 7.

SI in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima verò reliqua; aliarũ verò propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore ſemper maior eſt: Duæ autem ſolùm rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtraſq; partes minimæ, vel maximæ.

IN diametro AB, circuli ACDEB, cuius centrum F, punctum aſſumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ GC, GD, GE. Dico omnium, quæ ex G, ad circumferentiam ducuntur, maximam eſſe GA, in qua eſt centrum, minimam verò reliquam GB, quæ diametrum perficit: Deinde rectam GC, quæ rectæ GA, per centrum ductæ propinquior eſt, maiorem recta GD, quæ ab eadem GA, plus diſtat; & eadem ratione GD, maiorem recta GE, atque ita de aliis lineis, ſi ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad vtraſque partes minimæ lineæ GB, vel maximæ GA, duci poſſe tantummodò duas lineas inter ſe æquales. Ducantur è centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ FC, FD, FE. Quoniam igitur duo latera GF, FC, trianguli GFC, a maiora ſunt latere GC. Sunt autem rectæ GF, FC, æquales rectis GF, FA, hoc eſt, toti rectæ GA; erit & GA, maior quàm GC. Eadem ratione maior erit recta GA, quàm GD, & quàm GE. Quare GA, maxima eſt omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.



a 20. primi.

DEINDE, quoniam in triangulo EFG, latus EF, b minus eſt duobus lateribus FG, GE. Eſt autem EF, ipſi FB, æqualis; erit & FB, minor duabus rectis FG, GE. Dempta ergo communi recta FG, remanebit adhuc GB, minor, quàm GE. Eadem ratione minor erit GB, quàm GD, & quàm GC. Quare GB, minima eſt omnium, quæ ex G, in circuli circumferentiam cadunt.

b 20. primi.

RVRSVS, quia duo latera GF, FC, trianguli GFC, æqualia ſunt

unt duobus lateribus G F, F D, trianguli G F D; & angulus totus G F C, maior eſt angulo G F D; *a* erit baſis G C, maior baſe G D. *a* 24. pri
Eadem ratione maior erit G C, quàm G E: Item maior erit G D, *ma*
quàm G E. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior eſt ea, quæ remotior.

FIAT iam angulo B F E, ex altera parte æqualis angulus B F H, & ducatur recta G H. Quoniam igitur latera E F, F G, trianguli E F G, æqualia ſunt lateribus H F, F G, trianguli H F G, & anguli his lateribus contenti E F G, H F G, æquales; *b* erunt rectæ *b* 4. pri
G E, G H, ex vtraque parte ipſius lineæ minimæ G B, vel maximæ G A, æquales inter ſe. Quòd autem nulla alia his duabus poſſit eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex G, ducatur alia, quæ cadat ſupra punctum H, erit ea, cùm ſit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, maior quàm G H: ſi verò cadat infra H, erit ea, cùm ſit remotior ab eadem G A, per centrum ducta, minor quam G H, vt oſtenſum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad vtraſque partes minimæ G B, vel maximæ G A, cadunt. Itaque ſi in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, &c. Quod erat demonſtrandum.

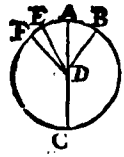
SCHOLIVM.

QVANQVAM autem Euclides ſolum demonſtrauerit, lineam, quæ propinquior eſt rectæ per centrum ductæ, remotiore eſſe maiorem, ſi amba linea ex eadem parte diametri AB, exiſtant: idem tamen verum etiam eſt, ſi ad diuerſas partes ductæ ſint. Vt ſi quis dicat, rectam G D, propinquiorem eſſe rectæ G A, quàm rectam G H; dico G D, maiorem eſſe, quam G H. Si namque ipſi G H, ex altera parte æqualis ducatur G E, vt dictum eſt, nempe ſi fiat angulo G F H, æqualis angulus G F E, &c. cadet punctum E, inter D, & B; quod G H, G E, æqualiter à G A, diſtent, ob æqualitatem angulorum G F H, G F E; & G D, ponatur minùs diſtare quam G H, ac proinde minùs, quam G E. Cùm ergo G D, maior *c* 7. hui
ſit, quàm G E, maior quoque erit eadem G D, quam G H.



HANC porrò propoſitionem nonnulli conuertunt, hoc modo.

SI intra circulum punctum ſumatur, ab eoque puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima ſit, vna verò minima; & reliquarum aliæ ſint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum tranſibit, minima verò erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt maximæ propinquiores, æquales autem ab eadem maxima, vel minima æqualiter diſtabunt.



IN circulo A B C, punctum ſumatur D, à quo rectæ quotcunque D A, D C, D E, D F, D B, cadant in circumferentiam, quarum omnium maxima ſit D A, minima verò D C; ipſarum verò D E, D F, maior ſit D E; denique D E, D B, ſint æquales. Dico D A, per centrum tranſire, & D C, reliquam partem eſſe diametri, hoc eſt, D C, ipſi D A, eſſe in directum. Item D E, quæ maior ponitur quam D F, propinquiorem eſſe maximæ D A, quàm D F. Denique D E, D B, æqualiter ab eadem D A, vel D C, abeſſe. Primùm enim ſi D A, non tranſit per centrum; ducta ex D, per centrum recta

a 7. ter. *quapiam linea, a erit ea omnium ex D, cadentium maxima. Quod eſt abſurdum; cùm D A, maxima ponatur. Tranſit ergo D A, per centrum.*

DEINDE ſi D C, non eſt in directum ipſi D A; protracta A D,

b 7. ter. *in directum, b erit alia recta quàm D C, ex D, cadens, nempe pars ipſius A D, protracta, omnium minima; Quod eſt abſurdum; cùm D C, minima ponatur. Eſt ergo D C, reliqua pars diametri.*

RVRSVS ſi D E, non eſt vicinior maximæ D A, quàm D F; aut æqualiter diſtabunt ab ea, aut D E, longiùs ab ea aberit: Si æqualiter

c 7. ter. *ſtrings, à D A, dicantur diſtare, c ipſæ erunt æquales; quod eſt abſurdum. Ponitur enim D E, maior. Si verò æqualiter ex eadem parte à D A, diſtare dicantur, erunt D E, D F, una eademq; linea; atq; adeò D E, maior non erit, quàm D F, quod eſt contra hypotheſin. Quod ſi*

d 7. ter. *D F, dicatur eſſe propinquior maximæ D A, d ipſa erit maior, quàm D E. Quod magis eſt abſurdum.*

POSTREMO ſi D E, D B, non æqualiter diſtent à D A, vel

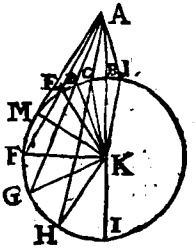
e 7. ter. *D C, e erit ea, quæ magis à D A, diſtat, reliqua minor. Quod eſt abſurdum. Ponuntur enim æquales D E, D B.*

viij. THEOR. 7. PROPOS. 8.

SI extra circulum ſumatur punctum quodquiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ verò vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt; In conuexam verò peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarū autem ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ autem tantùm rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſq; partes minimæ, vel maximæ.

EX

EX puncto A, extra circulum BCDE, cuius centrum K, lineæ secantes circulum ducantur, quarum AI, per centrum transeat, aliæ verò AH, AG, AF, vtcunque. Dico omnium esse maximam AL, quæ per centrum incedit: Deinde rectã AH, quæ rectæ AI, quæ per centrum ducitur, propinquior existit, maiorem rectæ AG, quæ remotior est ab eadem AI: Et eadem ratione AG, maiorem quàm AF. E contrario autem, rectam AB, omnium, quæ extra circulum sunt, minimam esse: Deinde rectam AC, quæ vicinior est minimæ AB, minorem esse rectæ AD, remotiore; Et eadem ratione, ipsam AD, minorem, quàm AE. Denique ex A, ad vtrasque partes minimæ lineæ AB, vel maximæ AI, duci posse tantummodò duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ KC, KD, KE, KF, KG, KH. Quoniã igitur duo latera AK, KH, trianguli AKH, *a* maiora sunt recta AH, Sunt autem rectæ AK, KH, æquales rectis AK, KI, hoc est, toti rectæ AI; erit & AI, maior quam AH. Eadem ratione erit AI, maior, quàm AG, & quàm AF. Quare AI, est omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.



a 20 *primi.*

DEINDE, quoniam latera AK, KH, trianguli AKH, æqualia sunt lateribus AK, KG, trianguli AKG; Et angulus totus AKH, maior est angulo AKG; *b* erit basis AH, basi AG, maior. Eadem ratione maior erit AH, quàm AF: Item AG, maior, quàm AF. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est linea remotiore. *b* 24 *primi.*

RVRSVS, quia in triangulo ACK, recta AK, *c* minor est duabus AC, CK; si auferantur æquales BK, CK: remanebit adhuc AB, minor, quàm AC. Simili ratione erit AB, minor, quàm AD, & quàm AE. Quare AB, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima est. *c* 20. *primi.* *mi.*

RVRSVS, cùm intra triangulum ADK, cadant duæ rectæ AC, CK, ab extremitatibus lateris AK; *d* erunt AC, CK, minores, quàm AD, DK, Sublatis igitur æqualibus CK, DK, remanebit adhuc AC, minor quàm AD. Pari ratione erit AC, minor, quàm AE: Item AD, minor quàm AE. Quare linea propinquior minimæ lineæ AB, minor est, quàm remotior ab eadem. *d* 21. *primi.*

POSTREMO fiat angulo AKC, angulus AKL, æqualis, & ducatur recta AL. Quoniam igitur latera AK, KC, trianguli AKC, æqualia sunt lateribus AK, KL, trianguli AKL; Sunt autem & anguli AKC, AKL, dictis lateribus contenti æquales; *e* erunt rectæ AC, AL, ex vtraque parte minimæ AB, vel maximæ AI, in- *e* 4. *primi.*

A I, inter ſe æquales. Quòd autem nulla alia his poſſit eſſe æqualis, conſtat. Nam ſi ex A, ducatur recta cadens vltra L, erit ipſa, cùm ſit remotior à minima, maior quàm A L. Quod ſi cadat inter B. & L, erit ea, cùm ſit minimæ propinquior, minor quàm A L, vt oſtenſum eſt. Duæ igitur ſolùm rectæ lineæ æquales ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EADEM ratione ab A, in peripheriam concauam duæ tantùm lineæ æquales cadent, ad vtraſque partes maximæ A I.

FIAT enim angulo A K H, æqualis angulus A K M, iungatúrque recta A M. Quia igitur latera A K, K H, æqualia ſunt lateribus A K, K M: ſunt autem & anguli A K H, A K M, æquales: a *erunt baſes A H, A M, æquales. Neque verò vlla alia his duabus æqualis exhiberi poteſt. Nam quacunque ex A, ducatur ad partes H, ea vel maior erit, vel minor, quàm A H, prout citra vel vltra rectam A H, ducta fuerit, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione theorematis.*



4. pri.

HÆC propoſitio vera etiam eſt, quando vna linearum ex A, cadentium circulum tangit. Hac enim quia longiùs à linea per centrum ducta abeſt, minor eſt omnibus aliis in eandem peripheriam cadentibus, qualis eſt recta A M, in priori figura. Nam ducta recta K M, ex centro ad contactum, erunt duo latera A K, K F, trianguli A K F, æqualia duobus lateribus A K, K M, trianguli A K M, angulus vero b *A K F, angulo A K M, maior. Igitur* b *baſis A F, baſe A M, maior erit. Eadem ratione maior erit quacunque alia in eandem peripheriam cadens, quàm recta A M.*

b 24. pri.

PARI ratione eadem linea tangens A M, maior erit omnibus aliis in conuexam peripheriam cadentibus. Nam cùm duo latera A E, E K, c *minora ſint duobus lateribus A M, M K: ſi auferantur æquales rectæ K E, K M, erit reliqua A E, minor quam reliqua A M. Eademq; ratio eſt de cæteris.*

c 21. pri.

QVAMQVAM verò Euclides ſolùm demonſtrauerit, lineam propinquiorem ei, quæ per centrum ducitur, maiorem eſſe remotiore: Item lineam propinquiorem minimæ minorem eſſe remotiore, ſi amba lineæ ex eadem parte maximæ, vel minimæ exiſtant: idem tamen verum etiam eſt, ſi ad diuerſas partes ductæ ſint. Quod non aliter demonſtrabitur, quàm idem in ſcholio præcedentis propoſitionis de duabus lineis ad diuerſas partes ductis demonſtratum fuit.

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 9.

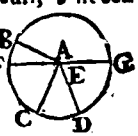
Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quàm duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

A puncto assumpto A, in circulo B C D, cadant plures rectæ, quàm duæ, A B, A C, A D, inter se æquales. Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis B C, C D; quibus diuisis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ A E, A F. Quoniã igitur latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus A E, E C, trianguli A E C; & bases A B, A C, ponuntur etiam æquales; a erunt anguli A E B, A E C, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cùm rectæ A E, A F, diuidant rectas B C, C D, bifariam, & ad angulos rectos, transibit vtraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo se mutuò secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret vtraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.



a 8. pri

ALITER. Si punctum A, non est centrum circuli, b sit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter F G. Quoniam igitur in diametro F G, præter centrum acceptum est punctum A, a quo in circumferentiam cadunt rectæ A D, A C; c erit recta A D, quæ propinquior est rectæ A G, per centrum E, ductæ maior, quàm recta A C, remotior ab A G, quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ A D, A C. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter A, centrum ponatur.



b 1. huius

c 7. huius

QVOD si quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum vna trium æqualium datarum, vt si dicantur æquales tres A B, A F, A C, vbi E A, coincidit cum A F; d erit A F, omnium à puncto A, cadentium minima, atque adeò minor, quàm A B, & A C. quod est absurdum. Ponitur enim vtriq; æqualis.

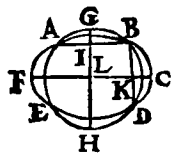
d 7. huius

THEOR. 9. PROPOS. 10.

CIRCVLVS circulum in pluribus, quàm duobus, punctis non secat.

SECET enim, si fieri potest, circulus A B C D E F, circulum A G B D H E, in pluribus, quàm duobus, punctis A, B, & D, quæ iungantur

a 10. pri. bis. pri.

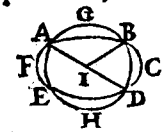


gantur rectis AB, BD: quibus a bifariam diuisis in I, & K, b educantur ex I, & K, ad AB, & BD, perpendiculares IL, KL. Quoniam igitur rectæ IL, KL, secant rectas AB, BD, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; transibit vtraque, ex corollario propos. 1. huius lib. per centrum ipsius. Quare punctum L, in quo se diuidunt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli ABCDEF. Duo igitur circuli se mutuò secantes idem possident centrum, c quod est absurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat, Quod erat demonstrandum.

c 5. ter.

ALITER. Secent se ijdem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A, B, & D. d Inuentum autem sit I, centrum circuli AGBDHE, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ IA, IB, ID, quæ per defin. circuli æquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulum ABCDEF, assumptum est punctum I, à quo cadunt in circumferentiam plures, quàm duæ, rectæ æquales, e erit I, centrum circuli ABCDEF. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE. Duo ergo circuli se mutuò secantes habent idem centrum. f Quod est absurdum.

d 1. ter.



e 9. ter.

f 5. ter.

xj. THEOR. 10. PROPOS. 11.

SI duo circuli sese intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TANGAT circulus ABC, circulum ADE, intus in A, & sit F, centrum circuli ABC, & G, centrum circuli ADE, quod necessariò ab illo diuersum erit, cùm duo circuli interius se tangentes, g non possint idem centrum habere. Dico rectam extensam per G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit, secet vtrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur AF, AG. Quoniam igitur in triangulo AFG, duo latera GF, FA, h maiora sunt latere GA; Est autem GA, recta rectæ GD, æqualis; (quod G, positum sit centrum circuli ADE) erunt & GF, FA, rectæ maiores recta GD. Dempto igitur communi GF, remanebit FA, maior, quàm FD. Quare cùm FA, æqualis sit ipsi FB; (quod F, positum fuerit centrum circuli ABC) erit & FB, maior, quàm FD, pars quàm totum, quod est absurdum.

g 6. ter.

h 20. pri.



QVOD si quis velit contendere F, esse centrum circuli ADE,

A D E, & G, centrum circuli A B C, instituetur argumentatio hac ratione. In triangulo A F G, duo latera F G, G A, *a* maiora sunt latere F A: Est autem recta F A, rectæ F E, æqualis. (cum F, ponatur centrum circuli A D E.) Igitur rectæ F G, G A, maiores sunt recta F E. Dempta ergo communi F G, remanebit G A, maior, quam G E. Quia igitur G A, æqualis est ipsi G C: (propterea quod G, ponitur esse centrum circuli A B C,) erit quoq; G C maior, quam G E, pars quam totum, quod est absurdum. Idem absurdum sequetur, si centrum maioris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta F G, extensa vtrumque circulum secabit, sed in contactum A, cadet. Quare si duo circuli sese intus cõtingant, &c. Quod erat demonstrandum.

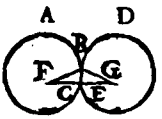


a 20. pri mi.

THEOR. 11. PROPOS. 12. xj.

SI duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactũ transibit.

CIRCVLI duo A B C, D B E, tangant se exterius in B, & centrum circuli A B C, sit F, circuli verò D B E, centrum sit G. Dico rectam extensam per F, & G, transire per contactum B. Si enim non transit, secet circumferentias in C, & E, ducanturque à centris F, G, ad B, contactum rectæ F B, G B. Quoniam igitur in triangulo F B G, latera duo B F, B G, *b* maiora sunt latere F G: Est autem recta B F, rectæ F C, æqualis: (quod F, ponatur centrum circuli A B C,) & recta G B, rectæ G E, æqualis; (quod G, ponatur centrum circuli D B E,) erunt & rectæ F C, G E, maiores quam recta F G, pars quam totum, (cum F G, contineat præter F C, G E, rectam adhuc C E,) quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

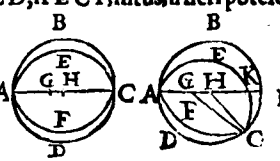


b 20. pri mi.

THEOR. 12. PROPOS. 13. xij.

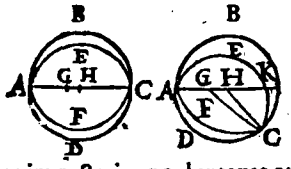
CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, siue intus, siue extra tangat.

TANGANT sese circuli A B C D, A E C F, intus, si fieri potest, in pluribus punctis, quam vno, A, & C: Assumantur autem centra horum circulorũ G, H, *c* quæ diuersa erunt, per quæ recta G H, in vtramque partem extendatur, quam necesse est *d* cadere in con-



c 6. tert.

d 11. ter.



tactus A, & C. Itaque cum G, sit centrum, & recta A G H C, diameter, diuidetur A G H C, bifariam in puncto G. Simili ratione diuidetur eadem A C, bifariã in H, quod est absurdum. Vna enim recta in vno duntaxat puncto diuiditur bifariam. Si namque G C, est dimidium totius A C, erit necessario H C, dimidio minor, cum sit pars dimidij G C.

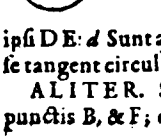
QVOD si quis dicat rectam G H, extensam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At verò ad partes H, minime pertinere ad contactum C, sed secare vtrumque circulum in I, & K, vt in secunda figura perspicuum est: (Dicere enim quis posset, in præcedenti propos. ostensum esse, rectam per duo centra circulorum sese intus tangentium ductam cadere in vnum duntaxat contactum, non autem in alterum, quod tamen nemo rectè affirmare poterit, cum demonstratio præcedentis propos. vtrique contactui conueniat. Sed quicquid dicat aliquis, ostendemus, absurdum illud esse) ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ G C, H C. Ponatur igitur primo G, centrum circuli, A B C D: & H, centrum circuli A E C F. Et quia in triangulo G H C, duo latera G H, H C, *a* maiora sunt latere G C: Sunt autem rectæ G H, H C, æquales ipsi G K: (quod H C, H K, ex centro H, sint æquales, & G H, communis) & recta G C, rectæ G I; (quod sint ex G, centro) erit quoque recta G K, maior quam G I, pars quam totum, quod est absurdum. Ponatur secundo G, centrum circuli A E C F; & H, centrum circuli A B C D. Quoniam igitur rectæ H G, G C, *b* maiores sunt recta H C; Est autem H C, æqualis rectæ H A: (cum vtraque ducta sit ex centro H,) erunt quoque H G, G C, maiores recta G A. Quare dempta communi H G, erit G C, maior, quam G A, quod est absurdum, cum vtraque ex centro G, ducatur. Non igitur circuli intus se tangent in pluribus punctis, quam vno.

a 20. primi.

b 20. primi.

TANGANT se iam circuli A B, C B, exterius in pluribus punctis, quam vno prope F. Ducatur ex D, centro circuli A B, ad E, centrum circuli C B, recta D E, *c* quæ per contactum F, necessario transibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, se tangunt, tangant sese in B. Ductis igitur rectis D B, E B, erunt rectæ D B, E B, æquales rectis D F, E F, hoc est, ipsi D E: *d* Sunt autem & maiores, quod est absurdum. Non ergo se tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam vno.

c 12. 1. 11.



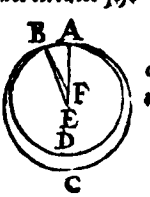
d 20 primi.

ALITER. Si circuli A B, C B, exterius se tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta B F, cadet ipsa intra vnum circulorum, per

rum, per 2. propoſ. huius tertij lib. & ideo extra alium, quod eſt contra eandem propoſ. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SI recte conſideretur Euclidis demonſtratio, qua probauit, circulum à circulo intus non poſſe tangi in pluribus punctis, quam in uno, videtur ea potiſſimum concludere, circulum non poſſe tangi à circulo in duobus, vel pluribus punctis, qua longe interualla à ſe diſſideant, non autem eundem contactum plura puncta habere non poſſe; quamuis facile hoc ipſum eodem argumento fere demonſtrari poſſit. Quare vt omnis ex parte confirmatum relinquatur, circulum non poſſe tangere circulum in pluribus punctis, quam uno, oſtendemus breuiter, in uno eodemque contactu non poſſe eſſe plura puncta, quam unum. Tangat enim circulus A B G, circulum A B D, prope A; & per eorum centra E & F, a qua diuerſa ſunt, recta ducatur E F, b qua ad contactum a 6. ter. *peruenient neceſſario, vt ad punctum A. Dico igitur, hos circulos ſeſe* b 11. ter. *duntaxat tangere in puncto A. Si enim ſe tangant in alio etiam puncto, vt in B; ductis ex B, ad centra E & F, rectis B E, B F,* c *erunt recta E F, F B, maiores recta E B. Eſt autem recta E B, aqualis rectæ E A, cum vtraque ſit ex centro E. Igitur & recta E F, F B, maiores erunt recta E A. Quare empta communi E F, remanebit F B, maior, quam F A, quod eſt abſurdum, cum F B, F A, cadant è centro F, ad circumferentiam, ideoque ex circuli defin. aquales exiſtant. In ſolo ergo puncto A, ſe mutuo tangent circuli A B C, A B D, & non in alio.*



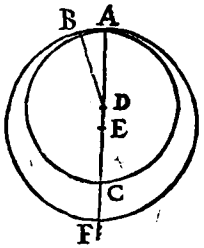
c 20. primi.

NON videtur etiam omittendum hoc loco ſequens theorema, videlicet.

SI in ſemidiametro circuli producta punctum vltra centrum ſumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum ſemidiametri punctum deſcriptus tanget priorem circulum in dicto puncto extremo ſemidiametri, totusque extra eundem cadet.

SIT circulus A B C, cuius centrum D, & in ſemidiametro A D, producta ſumatur punctum quodcunque E, ex quo ad interuallum E A, circulus deſcribatur A F, quem dico circulum A B C, in ſolo puncto A, tangere. Aut enim punctum E, eſt intra circulum A B C, aut extra. Si intra, quoniam A E, maior eſt, quam A D, hoc eſt, quam D C, hoc eſt, à fortiori, quam E C; erit quoque E F, qua ipſi A E, aqua-

A E, æqualis eſt, maior quam E C: ac proinde punctum F, extra circulum A B C, exiſtet, circulumq; A F, extra eundem circulum A B C, prope punctum F, exiſtet. Multo magis punctum F, extra circulum A B C, cadet, ſi E, extra eundem circulum A B C, exiſtet: Si igitur circulus A F, non totus extra circulum A B C, cadat, ita vt eum in ſolo puncto A, tangat; ſecet, vel tangat circulus A F, circulum A B C, in alio puncto B, ſi fieri poteſt, ducaturque recta D B. Quoniam igitur in diametro circuli A F, ſumptum eſt punctum D, præter centrum E,



a 7. ter. *a erit D A, omnium rectarum ex D, cadentium minima. Minor eſt ergo D A, quam D B. quod eſt abſurdum. Sunt enim æquales rectæ D A, D B, cadentes ex centro D, in circumferentiam eiuſdem circuli A B C. Non ergo circulus A F, circulum A B C, ſecat aut tangit in alio puncto, quam in A, ſed totus extra illum cadit. Quod eſt propoſitum.*

QVOD ſi in ſemidiametro non producta punctum ſumatur citra centrum, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum ſemidiametri punctum deſcriptus tanget quoque priorem circulum in dicto puncto extremo ſemidiametri, totusq; intra eundem cadet. Vt ſi in ſemidiametro A E, circuli A F, ſumatur punctum D, ex quo ad internallum D A, circulus deſcribatur A B C, cadet hic totus intra illum, tangetq; eum in ſolo puncto A. Cum enim oſtenſum proxime ſit, circulum A F, cadere totum extra circulum A B C, cadet vicißim totus hic intra illum, ita vt ſe mutuo in ſolo puncto A, contingant.

xiij. THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro. Et quæ æqualiter diſtant à centro, æquales ſunt inter ſe.



SINT in circulo A B C D, cuius centrum E, duæ rectæ æquales A B, C D. Dico ipſas æqualiter diſtare à centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas A B, C D, duæ perpendiculares E F, E G, & coniungantur rectæ E A, E D. b Secabunt rectæ E F, E G, rectas A B, C D, bifariam. Quare cum totæ A B, C D, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ videlicet A F, D G, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum E A, E D, æqualium, inter ſe ſunt æqualia; Quadratum autem rectæ E A, c æquale eſt quadratis rectarum A F, F E; & quadratum rectæ E D, quadratis rectarum D G, G E: Erunt quoque

b 3. ter.

c 47. pri.

quadra-

quadrata rectarum AF, FE, æqualia quadratis rectarum DG, GE. Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum AF, DG, remanebunt quadrata rectarum FE, GE, æqualia, ideoque & rectæ EF, EG, æquales erunt: Distant igitur per 4. defin. huius lib. rectæ AB, CD, æqualiter à centro E.

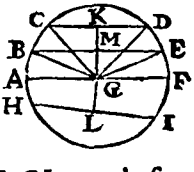
RVRSVS distent rectæ AB, CD, æqualiter à centro E. Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterum ex centro B, ad AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; *a* diuidentque rectas AB, CD, bifariam. Ductis igitur rectis EA, ED, erunt earum quadrata æqualia: Est autem quadratum rectæ EA, *b* æquale quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, æquale quadratis rectarum DG, GE. Igitur & quadrata rectarum AF, FE, æqualia sunt quadratis rectarum DG, GE; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectatum AF, DG, æqualia; atque adeo rectæ AF, DG, ac propterea earum duplæ AB, CD, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro, &c. Quod erat demonstrandum.

a 3. *ter.*
b 47. *pri mi.*

THEOR. 14. PROPOS. 15. XIV.

IN circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.

IN circulo ABCDEF, cuius centrum G, diameter sit AF; & recta ei propinquior HI, remotior autem CD. Dico omnium esse maximam AF, & HI, maiorem, quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ GK, GL, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior est CD, à centro, quam HI, erit GK, maior quam GL, per 4. defin. huius lib. Abscindatur ex GK, recta GM, ipsi GL, æqualis; atque per M, educatur BME, perpendicularis ad GK, & connectantur rectæ GB, GC, GD, GE.



Quoniam igitur rectæ perpendiculares GM, GL, æquales sunt, æqualiter distabunt rectæ BE, HI, à centro, per 4. defin. huius lib. *c* & ideo inter se æquales erunt. Rursus quia rectæ GB, GE, *d* maiores quidem sunt recta BE, æquales autem diametro AF; erit & diameter AF, maior, quam BE. Eadem ratione ostenditur AF, maior omnibus aliis lineis. Deinde quia latera GB, GE, trianguli BGE, æqualia sunt lateribus GC, GD, trianguli CGD; & angulus BGE, maior est angulo CGD; *e* erit recta BE, maior quam CD; atq; adeo HI, quæ æqualis ostensa fuit ipsi BE, maior

c 14. *tert.*
d 20. *pri mi.*
e 24. *pri mi.*

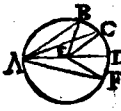
quoque

quoque erit quam CD. In circulo igitur maxima quidem linea eſt diameter, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EODEM fere modo demonſtrabitur theorema, ſi ab vno, eodemque circumferentia puncto plurima linea cadant.

CADANT enim à puncto A, plures linea AB, AC, AD, quarum AD, per centrum E, tranſeat. Dico AD, eſſe omnium maximam; & AC, maiorem remotiore AB. Ductis enim rectis BE, CE; cum in triangulo AEC, latera AE, EC, a maiora ſint latere AC; ſintque recta AE, EC, aquales rectis AE, ED, hoc eſt, recta AD; maior erit AD, quam AC. Eademque ratione maior erit, quam AB, & ſic de cæteris. Maxima ergo omnium eſt AD.



a 20. primi.

DEINDE, quia duo latera AE, EC, trianguli AEC, aqualia ſunt duobus lateribus AE, EB, trianguli AEB; & angulus AEC, totus maior eſt angulo AEB; b erit baſis AC, maior baſe AB. Eodemque argumento erit AC, maior quacunque alia linea, quæ à centro remotior eſt.

b 24. primi.

CÆTERVM & hinc duæ tantum æquales lineæ duci poſſunt à puncto A, ad vtraſque partes maximæ AD. Si namq; angulo AEC; æqualis fiat angulus AEF, iungaturque recta AF; cum latera AE, EC, æqualia ſint lateribus AE, EF, & anguli contenti quos AEC, AEF, æquales; c erunt baſes AC, AF, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis poteſt exhiberi. Quacunque enim ducatur ex A, ſupra AC, ea minor erit quam AC; ſi verò infra AC, ea maior erit, vt iam demonſtratum eſt.

c 4. primi.

QVOD ſi AB, AF, ad diuerſas partes diametri AD, ductæ ſint, & dicatur AF, propinquior centro, quàm AB, demonſtrabitur, vt in ſcholio propoſ. 7. huius lib. AF, maiorem eſſe, quam AB. Sumamque, vt proxime oſtenſum fuit, ducatur ipſi AF, æqualis AC, ex altera parte, nempe ſi fiat angulo AEF, æqualis angulus AEC, &c.

d 14. tert.

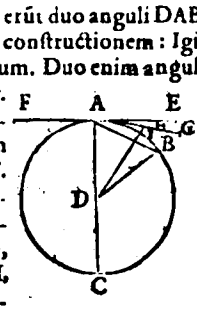
cadet punctum C, inter B, & D; quod AF, AC, d æqualiter diſtent ab AD, ob earum æqualitatem, aut certe ob æquales angulos AEF, AEC. Hinc enim fit, cum AF, ponatur propinquior centro, quam AB, vt & AC, ipſi AF, æqualis, propinquior ſit centro, quam AB, ac proinde punctum C, ſit inter B, & D. Cum ergo AC, maior ſit, quam AB, vt in hoc ſcholio demonſtratum eſt, maior erit quoque AF, quam AB.

XV. THEOR. 15. PROPOS. 16.

QVÆ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locum inter ipſam rectam lineam, & peripheriam compre-

comprehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

IN circulo A B C, cuius centrum D, diameter sit A C, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum qualis est A B; ducta D B; *a* erũt duo anguli D A B, D B A, æquales, sed D A B, rectus est, per constructionem: Igitur & D B A, rectus erit, quod est absurdum. Duo enim anguli in triangulo *b* minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; neque eandem ob causam in ipsam circumferentiam, sed extra, qualis est E F. Dico iam ex A, inter A E, rectam, & circumferentiam A B, non posse cadere alteram rectam. Cadat enim, si fieri potest, recta A G, ad quam ex D, ducatur perpendicularis D H, secans circumferentiam in I, quæ necessario ad partes anguli acuti D A G, cadet, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 1. Quoniam igitur in triangulo D A H, *c* duo anguli D H A, D A H, minores sunt duobus rectis; & D H A, rectus est, per constructionem, erit angulus D A H, recto minor, ideoque recta D A, hoc est, recta illi æqualis D I, *d* maior erit, quam D H, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter A E, & circumferentiam A B: sed quæcunque ex A, ducatur infra A E, ea secabit circulum. Dico denique angulum semicirculi, contentum diametro A C, & circumferentia A B, maiorem esse omni acuto angulo rectilineo; reliquum verò angulum contingentiæ, qui continetur recta A E, & circumferentia A B, minorem esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim ostensum est, omnem rectam ex A, ductam, infra perpendicularem A E, cadere intra circulum, faciet necessario ea linea cum A C, angulum rectilineum acutum minorem angulo semicirculi, at verò cum A E, angulum rectilineum acutum maiorem angulo contingentiæ, cum ille sit pars anguli semicirculi, hic verò totum quidpiam respectu anguli contingentiæ. Id quod liquido constat, ducta recta A B, quomodocunque infra A E. Nam cum hæc linea A B, intra circulum cadat, vt demonstratum est, erit angulus rectilineus acutus C A B, minor angulo semicirculi contento sub diametro A C, & circumferentia A B C, cum ille huius sit pars: Angulus verò contingentiæ contentus sub tangente linea A E, & circumferentia A B C, minor angulo rectilineo acuto B A E, quod ille huius pars sit. Eademq; ratio est de omnibus

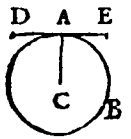


a 5. pri.
b 17. pri mi.
c 17. pri mi.
d 19. pri mi.

aliis an-

aliis angulis acutis rectilineis, cum omnes contineantur à diametro A C, vel tangente A E, & rectis ex A, ſub A E, ductis, quæ omnes intra circulum cadent, vt demonſtrauimus. Angulus igitur ſemicirculi maior eſt omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentiæ, minor. Itaque quæ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.



HINC manifeſtum eſt, rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam ipſum circulum tangere. Oſtenſum enim eſt, ipſam cadere extra circulum. Quare ſolum in puncto illo diametri extremo circulum attingit.

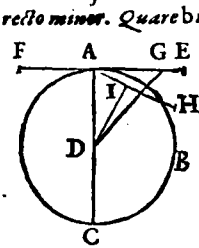
QVARE ſi iubeamur per datum punctum A, in circumferentia circuli A B, rectam lineam ducere, quæ circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam A C, & ad eam excitabimus perpendicularem D A E. Hæc enim circulum tanget in A, vt demonſtratum eſt.

EX FRONTIO.

POTEST hoc idem theorema demonſtrari oſtenſiue hac ratione. Sit diameter A C, in circulo A B G, cuius centrum D. Ducatur ex A, ad A C, perpendicularis A E, quam dico extra circulum cadere. Sumatur enim in ea quoduis punctum G, & coniungatur recta G D. Quoniam igitur in triangulo A D G, duo anguli D A G, D G A,

a 17. primi. *a minores ſunt duobus rectis, & D A G, factus eſt rectus; erit D G A, recto minor. Quare* b *maior erit recta D G, quam D A; ideoque punctum G, extra circulum erit. Eademque eſt ratio de omnibus aliis punctis recta A E. Cadet ergo tota A E, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra A E, recta A H, quam dico neceſſario ſecare circulum. Fiat enim angulus A D I, aqualis angulo E A H. Addito igitur communi angulo D A H, erunt duo anguli A D I, D A H, aequales toti angulo recto D A E, ideoque minores duobus rectis: Quare* c *coibunt recta A H,*

b 19. primi.



c 13. primi. *D I, in aliquo puncto, & in I. Dico igitur punctum I, eſſe intra circulum. Quoniam enim tres anguli in triangulo D A I,* d *aequales ſunt duobus rectis, & duo anguli D A I, A D I, oſtenſi ſunt aequales recto D A E; erit reliquus A I D, rectus, atque adeo maior, quam*

d 32. primi.

e 19. primi. *D A I, acutus. Quare recta D A,* e *maior eſt, quam D I. Non igitur D I, ad circumferentiam perueniet; propterea que punctum I, intra circulum exiſtet; atque adeo recta A H, circulum ſecabit. Reliqua partes theorematis oſtendentur, & prius.*

SCHO-

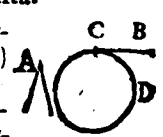
SCHOLIVM.

EXISTIMAT Peletarius, angulum contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem esse omni acuto angulo rectilineo, nihil esse, atque adeo ex illo contactu lineam rectam, & circumferentiam, non effici angulum vllum. Vt autem sententia illius planior fiat, afferemus in medium digressionem illam, quam ipse hoc loco instituit. Sic igitur inquit:

CVM huius theorematis caput postremum attentius considerarem, mihi sanè in mentem subiit prima specie, Geometriam non satis sibi constare; immo adeo repugnantiam in se admittere.

PRIMVM enim extra intelligentiam est, vt inter quantitates minima dari possit; qualem hoc loco angulum, quem dicunt contingentiæ, seu rectum, contactus, minorem omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima quantitas detur, qualis hic angulus semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas est, quod partibus constet, & secundum eam æquale, & inæquale dicatur. Quantitatis etiam continuæ in infinitum sectio est. Atque adeo cum in primam propositionem decimi incidissem, tum magis anxiè expendere cepi, quenam pacto conciliari posset tam aperta, vt apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.

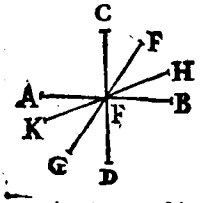
SI à maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidium; ac rursus ex reliquo maius, quàm dimidium, idque continuo fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.



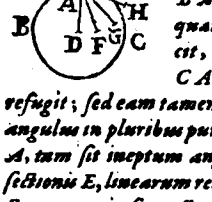
VERBI causa, sint duo anguli A, quidem rectilineus; BCD, verò angulus (si modo sit angulus) contactus: Vult prima decimi, si auferatur ab angulo A, maius, quàm dimidium, ac rursus à reliqua parte maius, quam dimidium; sicque continuo ex residuis partibus maius, quam dimidium; tandem relinquiri minorem angulum, quam BCD. Cuius demonstrationem hic non appono, cum ex sequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propositio est, qua (vt sic dicam) magis naturaliter vera sit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non videt, proposito duobus numeris 8. & 2. cum ab octonario maius quam dimidium abstuleris, vt quinarium; tum à ternario residuo, maius quam dimidium, vt binarium; relinqui vnitatem posito binario minorem? Neque verò ad rem facit, quod Campanus illuc excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla est; quam etiam mentis Euclidis contraria, vt nos, cum illuc ventum erit, manifestum faciemus. Immo & ipse Campanus secum pugnat, cum in se-

cunda duodecimi demonſtranda, aliisq; propoſitionibus nonnullis ſolidorum, à curuo rectum auferat.

NOS igitur hanc dubitationem ſic expediemus; & dicamus, lineam rectam, qua circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere; ſcilicet B C D, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in ſectione conſiſtit, non in contactu. Et ubi ceſſat ſectio, ceſſat quoque anguli forma. Atque ut uno verbo dicam, in decuſſatione (Decuſſationem hoc loco, & ſectionem ſine diſcrimine accipio) omnes angulorum ſpecies perficiuntur. Duabus enim lineis A B, & C D, ſe



ſecundentibus in puncto E, ad angulos rectos, intelligatur C D, ſic moueri in orbem, ſcilicet ſuper puncto E fixo, ut ex C D, fiat F G; hinc ſanè ex recto angulo A E C, fiet obtuſus A E F: Inde ex recto B E C, fiet acutus B E F. Cumque facta fuerit H K, hinc quidem angulus obtuſior fiet H E A, inde uerò acutior B E H; ſicque continuo, donec peruenerit ad A B, & intra eoſdem terminos concludatur cum ea. Tum enim immerſa, ut ſic dicam, linea C D, in lineam A B, euaneſcet angulus. Neque diuerſa ratio eſt in curuo. Sit enim in circulo A B C A, cuius centrum D, linea D E, prætereuntes peripheriam, & ſecans ipſam in A, puncto fixo, ſuper quod circumducatur ipſa D E, per puncta F, G, H. Tum fient anguli continuo uarij cum peripheria, in ipſo puncto



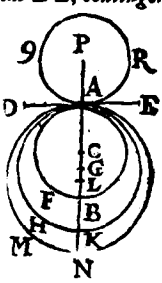
A; donec ceſſante decuſſatione, linea E D, facta ſit E K, & tangat circulum. Ac tum linea D E, non iam inclinata intelligitur, ſed immenſa in lineam B A C, quantum ad angulum attinet: non aliter quam ſi B A H, eſſet linea recta; neque contra facit, quod deducantur linea, faciantque ſpatium C A K. Namid ſola A C, linea efficit, quæ rectam refugit; ſed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non conſiſtat, quam uno; fit, ut punctum A, tam ſit ineptum angulo conſtituendo, quam modo erat punctum ſectionis E, linearum rectarum. Fortaſſe dices, punctum A, linea recta manere in ſuo recto, punctumque A, peripheria in ſuo rotundo; neque utrumq; eſſe idem punctum; ſed lineas ſe tantum inter ſe uelut lambere, quia altera alteram penitus, omniq; puncto refugit; ut contraria contrapoſita fiant manifeſtiora; Id uero ſenſus non recipit. Duo enim circuli ſeſe extrinſecus tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerent: Scilicet, ſi intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipſum A B C, circulum extrinſecus: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri poſſe, ut nihil in cogitationem cadat, quod ſemel ſpiam Geometria non repræſentet. Illud tamen minimè urgebit; Imo tanto minus contactus linearum erit angulus.

Hinc habi-

Habit enim utrinque ipsarum concursus. Sed nos hac Geometricis rationibus confirmemus per theoremata.

CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non est.

SIT enim circulus A F B A cuius centrum C, diameter verò A B, per cuius extremitatem A, ducatur linea D E, ad angulos rectos. Et constat, ex consectario huius decimæsexta lineam D E, contingere ipsum A F B A, circulum: ac propterea D A F, esse minorem omni angulo acuto, ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per vltimam partem huiusce decimæsexta. Iam verò inter puncta C, & B, suscipiatur in diametro A B, centrum G, & spatio G A, describatur alter maior circulus A H K A. Dico F A H, non esse quantitatem. Constat quippe circulum A H K A, transire inter rectam D A, & curuam A F, cum sit semidiameter G A, maior semidiametro C A. Manifestum quoque est, lineam D E, tangere ipsum A H K A, circulum, ex eodem huiusce decimæsexta consectario: ac propterea D A H, esse omni acuto minorem. Describatur tertio, secundum maius spatium L A, circulus A M N A. Et erit ex eodem consectario, D A M, omni acuto minor. Sicque in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea D E, cum circulis ductu per A, punctum, quorum centra in A B, linea, minores omni acuto rectilineo: ac sic omnes æquales, si modo æqualitas inter non quanta dici possit. Quapropter contactus D A M, erit æqualis contactui D A F: Fietque vt M A F, contactus interior circulorum, neque augeat, neque minuat contactum D A M. Igitur M A F, quantitas non est. Quod erat demonstrandum.



SED & probabimus, contactum interiorem circulorum quantitatem non esse in hunc modum. Nempe cum omnes circuli sint simile, erunt & semicirculi similes. Quapropter anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, in omnibus circulis sunt æquales, per conuersam definitionis similium sectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus B A F, æqualis vtriq; angulorum K A H, & N A M: Ac propterea contactus F A M, nihil addit ad angulum B A F. Quare F A M, quantitas non est. Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterum.

CONTACTVS lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.

MANENTE enim eadem constructione, si D A F, sit quantitas; ipsa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non

per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimæsextæ: neq; per obliquam, vt per lineam A M. Esset enim F A M, pars ipsius D A F: Atqui F A M, quantitas non est, vt modo probauimus. Non est igitur F A M, pars ipsius D A F. Igitur D A F, neque per lineam rectam, neque per obliquam diuidi potest. Quare D A F, quantitas non est: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non est.

IN eàdem constructione, protrahatur B A, diameter ad punctum P. Tum centro P, interuallo autem P A, describatur circulus A Q R A, tangens circulum A B F A, exterius in puncto A. Dico contactum F A Q, non esse quantitatem. Id verò manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur, cum F A M, non sit quantitas per primam harum; neque per rectam, cum neque D A F, sit quantitas, per secundam earundem; neque D A Q, quantitas per eandem. Quare cum F A Q, partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

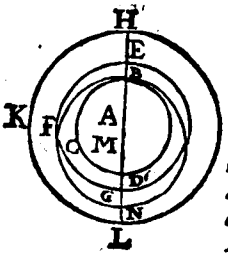
EX his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria neme hactenus admittendum esse cogitauit.

ANGVLI, qui fiunt à diametro, & peripheria, siue intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

VT in posteriori figura, angulus B A F, æqualis est angulo E A D; cum ipsi nihil accrescat ob contactum D A F, qui quantitas non est: & ob id Q A P, rectum quoque est, & æqualis ipsi D A P, cum D A Q, nihil addat: quod erat probandum.

HÆC Peletarius hoc in loco. In epistola autem, quam ad Cardanum scribit, affert aliam demonstrationem, quam ipse ait pleniorem esse. Hanc igitur hic subiscere statui. In primis autem præmittit hoc theorema.

IN circulis anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, sunt æquales.



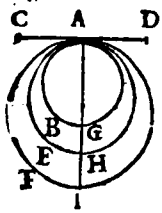
SINT enim super centrò A, duo circuli B C D B, & E F G E, quorum diametri B D, & E G; & secet E G, ambos circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos C B D, & F E D, esse æquales. Nam si sit F E D, maior ipso C B D; (neque enim contra, C B D, maior vllo pacto erit ipso F E D) describantur plures circuli super eodem centro A, quorum vnus hoc loco satis fuerit H K L H: fiet tandem ex continuo augmento, an-

go, angulus à diametro, & peripheria, verbi gratia, angulus K H L maior recto: quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter se aquales: quod fuit ostendendum. Idem de exterioribus inducitur. Neque in hac demonstrandi ratione vllus est paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos; attamen erit angulorum, qui fiunt ex sectione recta linea, & peripheria, aliqua collatio ad ipsos rectilineos. Eiusmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifeste maiores, & minores fiunt.

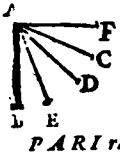
His ad hunc modum demonstratis, aio contactum circulorum interiorem, non esse quantitatem. Super centro M, in eadem linea H L, posito, describatur circulus B F N B, tanto internallo, quanto est circulus E F G E; posita scilicet M B, semidiametro aquali ipsi A E; qui circulus tangat B C D B, circulum in puncto B. Et manifestum est, angulum F B D, aqualem esse angulo F E D, propter aqualitatem peripheriarum & diametrorum. Quapropter & idem ipse F B D, erit angulo C B D, aqualis. Igitur C B F, contactus nihil addit ad ipsum C B D, angulum. Quare C B F, quantitas non est: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonstratio eorum, quæ in tertio libro adduximus, theorematum.

Hæc igitur est Peletarij sententia de angulo contactus, qua omnino Euclidis est contraria. Si enim Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi aqualem recto rectilineo: Quid, obsecro, tantopere desudasset, vt demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, minus esse quocunque angulo? Quid quoque magis perspicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse qualibet acuto? Quapropter angulum contactus vere esse angulum, ac quantitatem, affirmamus; atque adeo angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Vnde dissolvenda sunt à nobis omnia Peletarij sophismata, qua in hac digressione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil esse.

Primum igitur extra intelligentiam esse fatemur, vt inter quantitates minima dari possit: sed inficiamur, nos asserere, angulum contactus esse minimam quantitatem: Imo vero asseueramus, quemuis angulum contactus, etsi ab Euclide minor ostensus est omni acuto rectilineo, diuidi posse in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonstrauit, & optimè; sed per lineam circularem. Vt proposito angulo contactus C A B, si per A, describatur circulus A E H, maior circulo A B G, tangens rectam C D, in A; fiet angulus contactus C A E, minor angulo contactus C A B Quod



ſi adhuc maior circulus A F I, deſcribatur, erit multo minor angulus contactus C A F, eodem angulo contactus C A B. Atque ita ſine fine ſemper minorem angulum contactus eſſi. tentus. Reperitur igitur inæqualitas inter angulos contactuum, quamuis quilibet eorum minor ſit acuto rectilineo quocunque. Quemadmodum quiuis angulus acutus minor eſt recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit; cum diuidi poſſit infinitè. Vt angulus acutus B A C, minor eſt recto B A F; & tamen ſi



ducatur recta A D, inter A C, A B, fiet acutus minor B A D. Quod ſi alia recta A E, inter A B, A D, deducatur, erit multo minor acutus B A E, nec ſunquam finis erit huius decrementi.

PARI ratione aſſerimus, angulum contactus augeri poſſe infinitè, ita vt quouis angulo contactus propoſito, dentur alij maiores ſine numero. Vt in ſuperiori figura circulari, angulo contactus C A F, maior eſt angulus contactus C A E, & multo maior angulus contactus C A B; Atq; ita deinceps, ſi minores ſemper circuli, quam A B G, deſcribantur, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus contactus; ſemper tamen minor exiſtet quouis rectilineo acuto. Quemadmodum quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto B A E, maior eſt acutus B A D, & multo adhuc maior acutus B A C. Quod ſi alia recta ducatur inter perpendicularem A F, & rectam A C, fiet adhuc maior angulus acutus, nec ſunquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiuſmodi incremento nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui ſit æqualis angulo recto, vel maior recto, niſi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtuſum. ſed ſemper recto, vel obtuſo minor eſt angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui æqualis ſit acuto angulo rectilineo propoſito, vel maior acuto, niſi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtum, (qui quidem efficitur à duabus lineis ſe ſecantibus; cuiuſmodi eſt angulus ſegmenti.) ſed angulus contactus acuto ſemper minor eſt.

EODEM modo negamus, nos ponere angulum ſemicirculi maximam quantitatem. Imò aſſerimus, quolibet angulo ſemicirculi propoſito, quamuis oſtenſus ſit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari poſſe maiores. Vt in eadem figura ſuperiori circulari, angulo ſemicirculi B A G, maior eſt angulus ſemicirculi E A H, & multò adhuc maior angulus ſemicirculi F A I: Atque ita deinceps, ſi maiores ſemper circuli deſcribantur, quàm A F I, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus ſemicirculi, ſemper tamen minor exiſtet angulo recto C A I. E contrario verò, angulo ſe-

gulo semicirculi F A I, minor est angulus semicirculi E A H, & multo adhuc minor angulus semicirculi B A G, nec unquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior est quouis angulo acuto rectilineo, licet infinitè diminuatur, vt Euclides demonstrauit. Quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij verò minores innumerabiles.

QVOD autem anguli contactus sint inaequales inter se, non omnes aequales, vt vult Peletarius, similiter & anguli semicirculorum, ex eo manifestum est, quod angulus quilibet consistit in vnico puncto, & linearum inclinatione, qua non in directum iacent, vt constat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt aequalitas angulorum eiusdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt linea vnius conueniant omnino lineis alterius, si vnus alteri superponatur; Ea enim aequalia sunt, quae sibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis semicirculorum, nequaquam reperiatur semper eadem inclinatio, quod (vno superposito alteri) linea eorum non sibi respondeant, sed prorsus inter se dissideant, vt ex figuris superioribus perspicuum est; non erunt omnes anguli huiusmodi inter se aequales. Imò quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinitè per lineam curuam, licet per rectam secari nequeat, vt rectè ostendit Euclides. Cuius etiam rei haec afferri potest causa. Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum secabit, donec iterum ipsum contingat: Tunc enim primum secare desinet circulum. Quare si vel minimè inclinari intelligatur super puncto illo contactus fixo, secabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum possit tangere, vt ex 2. propos. huius lib. collegimus.

SOLVM igitur illi anguli contactus, pariterque illi duorum angulo semicirculorum aequales inter se erunt, qui efficiuntur à peripheriis aequalibus: In his enim tantummodo linea sibi congruunt mutuo. Anguli verò contactus, qui efficiuntur à peripheriis minoribus, maiores erunt; Et qui à peripheriis maioribus, minores. Anguli denique semicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obscurè intelligi potest ex superioribus figuris. Neque enim linea talium angulorum sibi mutuo conueniunt.

CONSTAT ergo, quemuis angulum contactus habere partes: & vnum alteri posse aequalem exhiberi, ac rursus inaequalem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur rectè intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum verò semicirculi, maximam.

DEINDE non est, quod anxium reddat Peletarium prima propositio decimi libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatibus eiusdem generis, quam diuersi, dummodo vtrauis multiplicata alteram excedere possit; cuiusmodi non sunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulum quilibet contactum sine hoc fiamatur, siue ter, quaterue, siue denique quoties libuerit, semper minor est angulo acuto rectilineo. Si namque quotcunque anguli contactus, vt centum, inter se aquales angulum acutum rectilineum excederent, vel se illis aquarent; esset quoque vnus illorum maior, vel aqualis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei; quod est absurdum, cum quilibet angulus contactus minor sit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonstratum. Quare nullo modo ex illa propositione colligere licebit, si ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rursus ex reliquo maius, quam dimidium, idque continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus proposito; quoniam angulus contactus, vt dictum est, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, siue quantumuis auctus, semper minor existit angulo acuto; nec vnquam ipsum superare potest: quod tamen necessario requiritur ad demonstrationem illius propositionis. Vt enim demonstretur, multiplicanda est minor quantitas proposita toties, donec excedat maiorem, vt videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipse Euclides per Campanum, quando in Stereometria à cubo rectum aufert, vel contra, vt vult prima propos. lib. 10. assumit semper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere potest.

IAM verò nulla ratione concedemus Peletario, angulum vnumquemmodo effici à duabus lineis se secantibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano adinuicem inclinari, ita tamen, vt non in directum iaceant, vt constat ex anguli plani descriptione tradita ab Euclide, quanquam se mutuo non secent, si producantur; cuiusmodi sunt peripheria se tangentes. Quare verè angulum efficiunt, vt antea diximus.

PORRO demonstratio Peletarij, qua conatur ostendere, contactum interiorem non esse quantitatem, nullius est momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur à linea tangente, & peripheria, minores sint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter se omnes aquales esse necesse est, sed potest alio alius maior esse, & minor, vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores sunt angulo recto, & tamen ipsi inter se non sunt omnes aquales. Sic etiam omnes formicæ (vt ex rebus quoque naturalibus exemplum afferamus,) minores sunt homine, vel monte, cum tamen ipsæ inter se valde sint inaquales. Quare non rectè concludit Peletarius, contactum interiorem nihil esse.

NEGA-

NEGAMVS deinde, angulos segmentorum similium aquales esse, sicut ipse assumit in sequenti demonstratione: Neque enim hoc Euclides significauit in vltima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea segmenta esse similia, in quibus anguli rectilinei sunt aquales, vel qua angulos rectilineos capiunt aquales; non autem quorum anguli aquales existunt. Immò magnum discrimen est inter angulos in segmentis, & angulos segmentorum, vt apertè constabit ex propos. 31. huius libri.

EX his facilè reijcientur reliqua Peletarij demonstrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur à linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior sit verè pars eius, cùm contrarium nullo modo ostenderit. Eodem pacto angulus contactus, quem constituunt duo circuli se exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, qua vtrumque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo asseruit, angulum semicirculi aqualem esse angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum semicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Postremò hallucinatus est quoque Peletarius in illa demonstratione, quam ad Cardanum misit. Etsi enim angulus semicirculi in maiori circulo maior est angulo semicirculi in circulo minori: non tamen propterea efficitur, vt aliquis angulus semicirculi maior sit angulo recto. Semper enim rectus angulus superabit quemuis angulum semicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur à peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto proposito, dari possunt alij maiores; nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in precedenti figura cernere licet. Constat igitur ex his, angulum contactus verè esse angulum, demonstrationes autem Peletarij sophisticas esse, ac nullius momenti, hominemq; Geometra prorsus indignas.

HAEC porrò mea de angulo contactus disputatio adeò Peletarium commouit, atque perturbauit, vt lasam esse omnino, atque offensam existimationem putauerit suam. Quare annis ferè quinque post mei in Euclidem commentarij editionem, hoc est, anno 1579. vt se defenderet, Apologiam in me conscripsit: in qua tamen neque ausus est solutiones meas hoc loco adductas infringere, aut impugnare, neque opinionem suam, nouam illam quidem, & inauditam, nouis rationibus (scilicet nullas habebat) confirmare, sed verbis duntaxat, & conuitijs se defendere conatur, vt facilè q̃ qui eam perlegerint, iudicabunt. Huic ego Apologia iam pridem non tam mei purgandi, quàm veritatis tuenda gratia respondissem, nisi me ab hoc consilio grauissima eruditissimorum hominum auctoritas, qui eam responsò omnino indignam iudicabant, reuocasset. Nunc verò quoniam locus hic à me postulare videtur, vt in secunda hac editione patrocinium veritatis iterum suscipiam, non alienum esse duxi, breuiter calumnias,

atque iniurias, quibus frequenter me in ea Apologia afficit, quamum potero modestia, depellere. Quamuis enim hoc à me factum iam sit anno 1586 in meis triangulis sphæricis, vbi necessario de re ipsa, eiusque Apologia mentio facienda fuit; quia tamen fortassis non omnes librum illum meum viderunt, operæ pretium arbitratus fuero me factu rum, si totam illam responsionem hic, vbi proprius eius locus est, interseram, vt benignus lector intelligat, sine causa cum tanto animi dolore, & iracundia, quantam præ se fert, contra me exarsisse, falsoq; mihi imposuisse multa: me autem è contrario nullum verbum iniuriosum in illum effudisse, aut conuitium, quod frustra in epistola nuncupatoria criminatur, vbi me à conuitijs non abstinere, apertè testatur. Atq; in illa Apologia nihil adeò me offendit, quàm quòd me Peletarium non syncerè, sed animosè, atque adeò inuidiosè fecisse insimulat, vt eum in meis commentarijs vel reprehenderem, vel laudarem: qua sanè vitia puſillis semper animis esse duxi, & ab homine liberaliter, Christianéque educato alienissima. Verum ea quàm longè absint tum à nostra Societatis disciplina, tum à mea consuetudine, nemo omnino, qui nos ac nostra norit, ignorat. Hi verò, qui nostra minimè norunt, hoc ipse liber fidem faciet, syncerè omnia dico, nihil inuidiosè, nihil animosè: planè vt veritatem quæsitum, non cuiusque auctoritatem contemptum esse appareat. Neque enim mihi tantum derogo, (etsi nihil arrogo) vt mihi vnis interdictum putem, ne, si quid in alienis scriptis falsum videatur, occasione oblata, cur id mihi minùs probetur, ostendam; modo (quod pudentium, ac bene moratorum hominum consuetudo postulat) id sine conuitio, atque irrisione faciamus. Hoc autem liber ipse, qui in medio est, tam à me factum esse clamat. Etenim vt totum hunc librum peruolutes, ne verbum quidem vnum reperias, quod vel speciem maledicti habeat, atque conuitij. Nam in scholio hoc de angulo contactus iurare liquidò possem, nihil me minùs cogitasse, quàm vt Peletarium obtrectandi animo oppugnarem; sed illud habuisse propositum, (si modò consequi possem) vt sum esset veritatis locus. Quod quidem eò liberiùs feci, quod Peletario ipso non modò inuito, sed etiam libenti existimarem me esse facturum, quod vel ipso auctore facerem: qui non à Cardano solùm, atque Campano, sed etiam à Procle, Theone, Apollonio, Eratosthene, Pappo, Ptolemæo, Hipparcho, Geometria luminibus, ab ipso denique omnium magistro Euclide dissentire non dubitauit. Nimirum quia, vt ab eodem in Apologia verè dictum est, in omni doctrina, præsertim verò in Geometria, non auctoritas est spectanda, sed veritas: quanquam nō video, qui amicus veritatis sit is, apud quem veritas odium parit; nisi fortè aut decipi se non posse arbitratur, qui columina illa Geometria errasse interdum prædicat, aut veritatem in alienis rebus amat, ac quærit potiùs, quàm in suis. Equidem si quis me in re quapiam (quod pro humani ingenij imbecillitate fieri posse video) errasse ostenderit, ita ego maxi-

mam

enam illi gratiam habuero, qui errantem in viam veritatis reduxerit. At enim probat studium veritatis Peletarium, convitia ferre non posse? quæ tandem convitia? rogas? Demonstrationes meas appellat sophismata. Nunc demum, quæ convitia dicat, intelligo. Nam alia nulla in meo hoc libro esse certò scio: ab his (si convitia sunt) fateor me non abstinere. At ego homo simplex, & ignarus verborum, convitia esse nunquam duxi, cùm verè dicerentur. Neque enim, quo alio vocabulo demonstrationes planè fallaces, & adulterinas appellarem, habebam: neque verò Philosophorum, ac Mathematicorum consuetudo loquendi magis appositum mihi verbum suppeditabat. Accedit, quod cùm à Peletario, homine in loquendo consideratissimo, germanas Campani, Cardanique demonstrationes paralogismos appellari viderem, existimaui in falsis eius demonstrationibus refellendis impunem fore similis me vocabulo vsurum. Quod si sophisma contumeliosum verbum est, quàm paralogismus, in Gallia, ignoscat consuetudinis eius ignaro, atque existimet, me paralogismos dicere voluisse. Atque vt planè intelligat Peletarius, me non contradicendi studio illa scripsisse, mecum vnà consideret, quantum mihi materiam sui refellendi dederit, si hominem refellere potiùs, quàm rem, qua tum agebatur, explanare in animo fuisset: quanquam occasionem eius reprehendendi in sinum delatam sæpius omisi, ne illum mihi delegisse viderer, in quem potissimùm incurrerem. Quàm præclara enim occasio fuit in propos. 4. & 8. lib. 1. atq; in propos. 24. lib. 3. quam ipse 23. facit? In his enim omnibus reiecit demonstrationes antiquissimas Euclidis, tanquam non Geometricas; quippe in quibus figuram vnam alteri superponi concipere animo oporteat: quod ipse à Geometria dignitate putat esse alienum, hac solùm inductus ratione, quod superpositionem illam mechanicum quid esse arbitretur, & quòd omnes ferè propositiones hoc modo, vt ait, possint demonstrari, etiam problemata, in quibus aliquid proponitur construendum: atq; in huius rei exemplum adducit propos. 2. & 3. lib. 1. quæ problemata sunt. Hic certè Peletarium iure carpere potuissem, si id mihi fuisset propositum, vt falsè crimenatur; maximè in eo, quod eadem ratione vsui fore existimauit superpositionem in demonstrandis problematibus, ac theorematibus. Nam non satis intellexisse videtur, quo pacto Geometra superpositionem illam vsurpet. Neque enim volunt, re ipsa faciendam esse superpositionem, (hoc enim mechanicum quid esset) sed cogitatione tantum, ac mente, quod opus est rationis atque intellectus. Itaque in theorematibus quidem locum habebit genus hoc argumentandi, in problematibus verò non. Nam q; in theorematibus, propter magnitudinum aqualitatem, inaqualitatemve, qua, vnam ponitur, facile intellectus cernit sine vlla hæsitatione comprehendit, vna vel nō excedere alteram, vel excedere, si animo concipiatur vna alteri esse superposita, quamuis re ipsa non fiat illa superpositio. vt in propos. 4. lib. 1. facilis est;

At in

At in problematibus, in quibus magnitudinem quis alteri aqualem conſtruere iubetur, licet mente cogitet magnitudinem propoſitam transferri in alium locum, non tamen propterea quicquam efficit, cum re ipſa translatio nulla facta ſit: Vt mirum ſit, Peletarium ſibi perſuadere potuiſſe, propoſ 2. & 3. lib. 1. & alias pene omnes per ſuperpoſitionem, ſine translationem linearum, figuriarumve poſſe demonſtrari, ſi hoc modo argumentandi in Geometria vti liceret. Et certè hac in re non ſolum Euclidem in crimen vocat Peletarius, verum etiam Archimedem, quo, omnium iudicio, acutior in demonſtrando, & ſubtilior fuit nemo, eiuſque commentatorem grauiſſimum, eumq; doctiſſimum Eutocium Aſcalonitam, qui eodem argumentandi genere vtuntur in aquependentibus, immò verò & omnes Geometras redarguat neceſſe eſt, qui non rarò hoc argumenti genus adhibent. Sed videamus, quò tandem egregium hic noſter Geometra, qui omnes alios Geometras reprehendit, ſit deuolutus. Viderat Peletarius, (neque enim rem adeò manifeſtam videre non poterat) ſi hunc modum argumentandi è medio tollat, vniuerſam ſe Geometriam funditus euertere, cùm plurima, eaque precipua propoſitiones in Geometria demonſtrentur ex propoſitione 4. & 8. lib. 1. & ex 24. lib. 3. quæ quidem alio modo demonſtrari nequeunt, quam per illam figurarum ſuperpoſitionem, non quidem re ipſa exiſtentem, ſed cogitatione duntaxat, vt dixi, comprehenſam. Quò igitur ſe verteret? quid ageret? Excogitauit ſanè rem magis à Geometria alienam, quam eſt ſuperpoſitio illa figurarum. Coactus enim eſt aſſerere, propoſitionem 4. lib. 1. eſſe definitionem angulorum æqualium, (& quis vnquam talem audiuit definitionem?) atque adeò concedendam eam eſſe ſine demonſtratione: propoſitionem verò 8. eiuſdem lib. principium eſſe per ſe quoque notum. Quod vt credibile magis efficiat, ita ſcribit in propoſitionem 4. lib. 1. (Etenim nulla euidentiori ſpecie æqualitas figurarū dignoſcitur, quàm ex laterum æqualitate.) *Idemq; quaſi confirmat, & repetit in propoſitionem 8. eiuſdem lib. dum ita loquitur.* (Quis enim negauerit, duas ſuperficies eſſe æquales, quarum latera & quantitate, & numero ſunt æqualia?) *Hæc Peletarius, vt dicta propoſitiones Euclidis ſine demonſtratione admittantur, commentus eſt. ſed quæ omnino falſa ſunt: vt magnoperè mirandum ſit, potuiſſe eum propoſitiones à Geometria prorſus alienas tam inconſideratè proferre. Scilicet verum eſt, quod Philoſophi aſſerunt; Dato vno abſurdo, cætera conſequuntur. Aſſumpſerat enim Peletarius propoſ. 4. & 8. lib. 1. pro principijs: quod quidem falſum eſt, atque abſurdum. Vnde ad eas abſurditates neceſſariò deuenit, quas etiam illi, qui vix adhuc principia Geometria attigerunt, vel facilè vitare potuiſſent. Nam quis non videt, Rhombum, & Quadratum, etiamſi latera habeant & quantitate, & numero æqualia, poſſe tamen inter ſe valde eſſe inæqualia? Id quod in Pentagonis quoque æquilateris, & in alijs figuris plurium late-*

laterum æqualium cernu potest: quod non est huius loci pluribus verbis explicare. Cùm ergo in omnibus figuris multilateris inæqualitas reperiatur, licet latera habeant & quantitate, & numero æqualia, demonstrandum fuit necessariò Euclidi, æqualitatem triangulorum colligi ex laterum æqualitate, quandoquidem in aliis figuris ea non colligatur. Quare neque propositio 4. Definitio, neque propositio 8. principium erit; ac proinde omnes propositiones, quæ illis nituntur, quæ innumerabiles propemodum sunt, corruunt necesse est, nisi demonstrationes Euclidis recipiantur in illis propositionibus, cum alio modo demonstrari non possint. Demonstratio enim nona propos. 4. quam Peletarius confinxit, nihil aliud est, quàm (vt cum Logicis loquamur) petitio principij. Id quod perspicuum erit cuilibet qui eam diligentiùs considerare voluerit. Nam in ea solùm construitur, unum triangulum posteriori ex duobus datis æquale, immò idem, atque hoc ipsum quidem ineptissimè, cùm ad id præstandum circulos describat Peletarius, quibus tamen in demonstratione non vtitur, quod vitiosum omnino est in Geometria: Deinde infert, triangulum hoc constructum, quod à posteriori ex duobus propositis non differt, priori esse æquale, sine vlla demonstratione; certum autem est, hoc ab initio propositum fuisse, vt demonstraretur. Quocirca manifestè principium petit, cum eadem facilitate statim in principio concludere potuisset, etiamsi nullam adhibuisset constructionem, triangula proposita esse æqualia; quippe cùm constructio illa ad rem non faciat. Idem dico de demonstratione propos. 24. lib. 3. quam etiam nonam confinxit: quod eorum iudicio, ad quorum manus libri commentarij peruenerunt, reliquo. Præterea alia loca innumerabilia, in quibus abutitur propositionibus Euclidis in demonstrando, vt quod plerunque secundam propos. lib. 1. inscitè prætertim assumat, &c. Neque enim mihi in animo nunc est, vllos commentarios examinare, sed solùm calumnias, quas frequentes in sua Apologia adhibuit, à me depellere. Quæ cùm ita sint, quod ille falsò de me, verè ego de illo dicere possem, rubere me, (vetera verba vrar) Euclidi interpretem contigisse, qui nō iam Theonem, aut Campanum emendet, sed ipsum Euclidem sine causa reprehendat; quippe cùm ego Euclidem (vt par est) à calumniis ipsius defendam, omnesq; insidias, ac fallacias, quas contra eum instruxerat, detegam ac refellam. Liquet igitur, me ea mente non fuisse, vt Peletarium redarguerem, cùm tot ac tantos errores dissimulauerim: quos ego ne nunc quidem in lucem protulissem, nisi vellem omnes & intelligere, quantum Peletarius à me, de quo tam acerbè queritur, tum beneficium acceperit, & ex breui hac disputatione fructus aliquid, vtilitatisq; percipere. Nunc vt, quam dispari ille animo in me fuerit, appareat, eius calumnias breuiter exponam, atque ita refellam ac delebam, vt omnes oculis videant, eas esse calumnias: In quo tamen eusmodi à me moderatio adhibebitur, vt modestia, quæ hominem reli-

veligiosum decet, minimè obliniscar. Neque enim illi, vti præcantibus respondebo.

PRIMVM itaque mihi obijcit Peletarius, quod in eius demonstrationibus citandis ita me gesserim, vt si quo modo nomen ipsius supprimere potuissem, id me ostendam libenter fuisse facturum. Quod quam sit falsum, facilè iudicabunt ij, qui meos commentarios legerint; cùm vbique eum honorificè appellem, eiq; plurimas demonstrationes adscribam, tanquam proprias, quas tamen aliter, quam ipse, & multò brevius demonstro, & interdum etiam (quod maius est) vniuersaliùs, vt liquidò constat ex ijs, qua tum ad propos. 38. tum ad propos. 45. lib. 1. ex Peletario demonstrauj, vt alia interim taceam: qua non iniuriâ mihi vendicare potuissem: vt miror, quid illi in mentem venerit, id à me parum syncerè, atque adeò inuidiosè factum existimare, quod ego verebar, ne nimis ambitiosè factis quispiam inuidicaret. Quod verò propos. 16 lib. 3. & in prioribus duabus definitionibus lib. 5. vt ipse obijcit, animosè, vt ego fateor, liberè, quid de eius demonstrationibus sentirem, exposui, id feci, vt iam antè dixi, non cuiusquam laedendi causa, sed quærendæ veritatis. Ea enim est natura, & conditio eorum, qui liberalibus artibus dant operam, vt etiamsi alter alterius interdum sententiam impugnet, non tamen idcirco ab ijs potiùs, quàm ingenijs inter se certare videantur. Qui sit aliorum sensus ignoro, equidem, vt sup. à dixi, ita sum animo, vt si quis me alicuius erroris in demonstrando commissi admoneret, ei quam maximas gratias habeam: atque vt liberiùs id facerent, enixè rogaui non paucos, & nunc iterum eosdem, atq; etiam alios amicè oratos volo. Scio enim, quàm facilè possit in suis quisq; inuentis hallucinari; videor (quod ipse quoque Peletarius in Apologia sapienter asseruit) omnibus hominibus commune esse, vt peccent. Deinde quod in additionibus ad propos. 47. lib. 1. eius mentionem non fecerim, non est, quod ægrè ferat, cùm illa propositiones non sint ab ipso inuentæ. Quadam enim multo tempore ante ipsum demonstrata sunt vel à Campano, vel à Proclo, aut Theone, quædam verò demonstraui egomet, antequam ipsius demonstrationes vidissem; quòd adeò manifesta sint, & faciles, vt nullâ probatione egeant, sed sint instar corollariorum propos. 47. Vt nulla prorsus laus, aut gloria illi accessura videretur, si maximè eas ab ipso inuentas esse (quod tamen verum non est) prædicassem; cùm eas quilibet, modo primoribus labris studia Mathematica degustarit, nullo negotio ex illa propos. 47. colligere possit: Vt non videam, cur mendem eas propositiones tanti ponderis esse dicat, cùm sint omnium iudicio leuissimæ; adeò vt in plerisque earum nec ipse Peletarius demonstrationem vllam, propter earum euidentiam, adhibeat, sed eas nulla probatione egere fateatur. Denique non est, quod tantopere mihi succenseat idcirco, quod constructionem Pentagoni æquilateri, & æquianguli supra datam rectam lineam finitam ei non tribuerim: quoniam in ea con-

stru-

ſtructione nihil prorſus ab eo ſum mutuatus: quod ijs dijudicandum relinquo, qui meam cum illius conſtructione contulerint. Nam & mea omnino diuerſa eſt, & elle in ſua mirificè (vt alia peccata taceã) abutitur propoſitione 9. lib. 3 cùm ex ea probet, punctum quoddam eſſe centrum circuli, qui nondum eſt deſcriptus. Geometra ſanè dixiſſet, punctum illud eſſe eiuſmodi, vt circulus ex eo deſcriptus ad internallum cuiuslibet linea rectæ ex illis tribus, quæ ibi oſtenſæ ſunt æquales, tranſeat per extremitates reliquarum duarum lineærum æqualium. Nam propoſitio 9. lib. 3. nihil eo loco ad rem facit, cùm propoſitum ex ipſa conſtructione poſſit concludi, & ex demonſtratis, vt proximè dixi, etiamſi propoſitio illa vera non eſſet, aut nuſquam demonſtrata. Idem peccatum committit Peletarius in omnibus propoſitionibus lib. 4. in quibus vel intra figuram rectilineã, vel circa eandem circulus deſcribendus eſt. Quòd ſi ideo ſum reprehendendus, quòd propoſitionem vnã, multò aliter à me, & breuius demonſtratam, ei non aſcripſerim, non video, quo pacto in eadem ipſe vitium non incurrat, cùm problema hoc (Propoſitis duabus lineis inæqualibus, potentiam maioris ſupra minorẽ cognoſcere) multis ſeculis ante ipſum à Theone demonſtratum ſibi arroget, hac ſolùm de cauſa, vt arbitror, quod illud alia ratione, longiore tamen, demonſtrauit. Mitto hoc aliud problema, (Dato angulo rectilineo æqualem angulum curuilineum conſtituere.) quod in Apologia ſuum proprium appellat, idemq; hactenus deſideratum eſſe gloriatur; cùm tamen illud ipſum ego ex Proclo, qui multis ante eum ſeculis floruit, in defin 5 lib. 5. multò breuius, & clariùs demonſtrauerim. Nam, vt eo in loco oſtendi, ſi recta linea datũ angulum rectilineum continentes ponantur æquales, & circa ipſas duo ſemicirculi (qui æquales erunt) verſus eaſdem partes deſcribantur, illico conſtitutum erit angulus curuilineus dato angulo rectilineo æqualis: Neq; opus eſt tot ambagibus vti, quot Peletarius ad eam rem demonſtrandam adhibet; quamuis robur demonſtrationis ipſius idẽ ſit, quod meæ. Et quod magis mirandũ eſt, fatetur Peletarius, ſe meam demonſtrationem vidiſſe, & eã nihilominùs ſibi audet, tanquam propriã, arrogare. Et cur Peletarius clamet, me nõ paucas demonſtrationes parum honeſtè, vt mihi videtur, ſibi ſubducere conatũ. Quas autẽ non videt, id eum in altero vituperare, quod ipſe ſibi glorioſum putat? Itaq; multo verius, ac iuſtius eodẽ illum crimine ego, quàm ille me, cõdemnare poſſum; cùm nunquã propoſitionũ illarum inuentorem me appellauerim, vt ipſe, ſed ſolũ eius nomen, ob rationes à me expoſitas, retinuerim.

DEINDE angulum contactus, & acutum rectilineum eiuſdem generis eſſe, contra me pluribus verbis conatur oſtendere. Sed neſcio quo modo aberrat, quod dicitur, à ſcopo. Solum enim probat, vtrumque angulum eodem genere quantitatis contineri, hoc eſt, vtrumq; angulum planũ eſſe; quòd acutus angulus rectilineus, vel etiam rectus conſtare poſſit ex angulo contactus, & alio angulo mixto: quod ne-

quo

quo ego, neque vllus vnquam Geometra negauit. Ego angulos illos eiusdem esse generis negans hac solùm de causa, quod angulum contactus quantumuis multiplicatum angulum acutum rectilineum superare nequeat, vt in scholio huius propos. 16. euidenter ostendi. Hinc enim fit, vt alter ad alterum proportionem non habeat, atque adeò quodammodo diuersi generis sint: quemadmodum eadem de causa linea recta finita, & infinita non censentur esse eiusdem generis, cum altera ad alteram proportionem non habeat; quamuis sub eodem genere magnitudinis; nimirum sub linea recta, comprehendantur. Hoc itaque feriat, vt collimasse videatur: quanquam vt omnia faciat, collimabit nunquam; ita longè abest, quod est propositum. Magnitudines autem, quarum altera multiplicata alteram superare nequit, non censeri eiusdem generis, (quod ad proportionem attinet) licet sub eodem genere quantitatis, hoc est, sub longitudine, aut latitudine, aut profunditate, aut numero, collocentur, liquidò constat ex defin. 5. lib. 5. vbi Euclides satis perspicuè explicat, cuiusmodi debeant esse magnitudines eiusdem generis, inter quas proportio reperitur. Quare viderint alij, Peletarius homo consideratus quam cogitate me incogitantem hominem appellarit; quasi non rectè intellexerim, quæ magnitudines sint eiusdem generis, quæ non sint. Nunquam enim dixi (id quod mihi affinxit, vt carperet) duarum magnitudinum, quæ sub diuersis quantitatis generibus collocantur, quales sunt linea, superficies, corpus, ac numerus, alterutram ita posse multiplicari, vt alteram superet: In quo, nemine reluctante, frustra se fatigat, & doceat, id fieri non posse, sed de illis duntaxat magnitudinibus sum locutus, quæ cùm in eodem genere quantitatis versentur, diuersi tamen generis censeri possunt: quales sunt superficies rectilinea, & curuilinea, siue mixta: Item q3 linea recta, & curua. Hactenus ita differre inter se videntur, vt Aristoteles liquidò affirmarit, vnam alteri æqualem esse non posse: quod tamen (pace Aristotelis dictum sit) verum vsquequaque non est; cùm Archimedes in lib. de lineis spiralibus demonstrauerit, quanam linea recta æqualis possit esse circumferentiæ cuiusuis circuli dati, idemq3 nos in quadratura circuli ostenderimus. Non igitur negare poterit Peletarius, ab Euclide defin. 5. lib. 5. aliquas quantitates à proportionis definitione excludi, diuersiq3 propterea esse quodammodo generis, quod ad proportionem attinet, licet in eodem magnitudinis genere ponantur: quales sunt angulus contactus, & angulus rectilineus; Linea item recta finita, & infinita: Multæ item magnitudines comprehendi in eadem definitione proportionis, quas plerique excludebant; cuiusmodi sunt curuilinea, superficies, & rectilinea; nec non linea circularis, & recta, vt paulò antè diximus, latiusq3 in defin. 5. lib. 5. exponemus. Verùm Peletarius, ne opinionem illam suam, quam de angulo contactus semel imbiberat, deserere cogeretur, voluit hanc expositionem 5. defin. lib. 5. recipere;

immò

immò eam & oppugnet, omnes videtur in Apologia intendisse uernos, oblitus sui, qui fere eodem modo illam defin. in 5. lib. olim exposuerat; nisi quod non rectè inde colligit, angulum contactus non esse quantitatem, propterea quòd multiplicatus nullam magnitudinem, vt dicit, possit excedere. Hoc enim (pace eius dixerim) falsum est. Nam licet angulus contactus multiplicatus angulum rectilineum non possit excedere, excedet tamen alium angulum contactus. Quare ex illa defin. solùm rectè colligitur, angulum contactus ad angulum rectilineum non habere proportionem vllam; ad angulum verò alium contactus quemcunque proportionem habere. Sed siue ita intellexerit eam defin. vt ex commentarijs eius in lib. 5. colligi potest, siue secus, vt in Apologia indicare videtur, non multum laboro: Certè ita illam esse intelligendam, vt exposui, nemo qui verba Euclidis diligenter expenderit, negabit. Verum enim vero, si mihi fidem habere non vult Peletarius, habebit certè, (nisi arrogans haberi volet) aut Proclo grauissimo scriptori, qui lib. 2. in lib. 1. Euclidis ad definitionem anguli plani eodem modo definitionem illam intellexit, aut Petro Nonio Lusitano, quem tanti facit, (& merito id quidem: fuit enim acerrimo vir ingenio, & nullo hac nostra aetate in Mathematicis inferior) vt eum suam pro multis millibus testem citet, & suarum demonstrationum approbatorem, qui disertissimis verbis tum in libro de Erratis Orontij, tum in Algebra sua, illam definitionem explicat, vt à me est exposita: quin etiam ibidem asserit ex ea defin. colligi, angulum contactus ad angulum rectilineum, & lineam finitam ad infinitam nullam habere proportionem; vt Petrus Nonius, quem testem produxerat pro se Peletarius, iam pro me testimonium dicat. Atq; ex hisce duobus locis Petri Nonij facilè quiuis intelliget, quam sine ratione, & quanto contradicendi studio mihi insultet Peletarius, cùm semel atque iterum odiosè percontatur, vndenam potuerim illi lineam infinitam deportare. In idem enim crimen (si crimen est, lineam infinitam exempli causa nominare) vocat etiam Petrum Nonium testem suum, atque adeò omnes Philosophos, quorum est illa vox nemini inaudita, praterquam Peletario, finisti ad infinitum nullam esse proportionem. Desinat igitur à me scisciari, vnde lineam infinitam deportauerim: Inde enim respondebo, vnde eam Petrus Nonius, vnde Philosophi omnes deportarunt. Quid? nonne sophisma illud Peletarij, semper in hoc erro, demonstratio illa, volui dicere, & quidem palmaria, qua conatur ostendere, propositionem 1. lib. 10. cum propos. 16. lib. 3. stare non posse, si angulus contactus concedatur esse quantitas, à Petro Nonio Peletarij cognitore eadem prorsus ratione, qua à me ipso confutatur? Qua si germana demonstratio est, miror quid sit, cur eam Nonius Geometra scientissimus, idemq; Peletarij approbator, minus probarit: Cur nihilo magis demonstrationes eiusdem, quibus planum facit, (vt putat) angulum contactus

quantitatem non esse, eundem illum Nonium nihil admodum mihi nocuisse? Id enim (nisi fallor) illa Nonij verba (Si quis sententiam Peletarii de angulo contactus amplecti velit.) declarant. Nam si demonstrationes existimasset, profectò Peletarij doctrinam in eo retinendam esse dixisset, Geometrica enim demonstrationes eiusmodi sunt, vt assensum extorqueant, ac dubitationem omnem excludant, nullo q; modo quempiam sinant ancipiti opinione distrahi sic, vt tum assentiatur, si velit, tum, si nolit, dissentiat. Ex cur Peletarium Nonij testimonio aliorum iudicia contemnat, ex praeclarum testimonium, quod Petrus Nonius eius demonstrationibus dedit: quo aequiore animo ferat, eas à me nihilo magis, quàm ab illo suo approbatore, demonstrationes putare.

TERTIO, quod existimare dixi Peletarium, angulum contingentia nihil esse, falsum esse clamat: Nusquam enim dixisse se, nihil esse, sed quantitatem non esse. Itane verò? at ne praedicamento Quantitatis, quod neque est punctum, (quis enim inclinationem illam puncti esse dixerit?) neque quantitas, quo alio nomine vocetur, quàm Nihil? Sed vt vt dixit, profectò non modo mirabile est, sed monstrum in Geometria simile, putare angulum contactus non esse quantitatem, qui postea additus alijs angulis efficiat curuilineum angulum rectilineo aequalem. Quis enim vnquam Geometrarum id, quod quantitas non est, magnitudini adiunxit, vt aequalem eam alteri efficeret? Praetereo, quòd figura trilatera curuilinea intra tres circulos se mutuò tangentes conclusa nullum haberet angulum ex Peletarij sententia; quia tres illi contactus, anguli non sunt: cum tamen tribus diuersis lineis contineatur; quod omnino nouum est, & inauditum apud Geometras. Itemque, si quatuor, aut plures circuli se mutuò tangerent, vt fieret figura curuilinea quadrilatera, vel plurium laterum, illa nullum angulum haberet. Atque etiam, si duae lineae rectae angulum continentes, vnum eundemque circulum tangerent, trilatera illa figura habens tertium latus curuum, vnicum tantùm haberet angulum. Quae omnia si sunt absurda, consentanea non est opinio Peletarij. Sed nimis fortasse multa ad Nihil illud Peletarij euertendum, ad quod tuendum ille nihil afferat. Quoniam verò, ne pro Nihilo suo nihil agere videatur, quandoquidem non potest, mea verba carpit, verba defendam: qua quidem ille nescio quibus praestigijs ita depravat, vt dicere videar, Nihil esse minus quocunque angulo: atque (vt simplicem, credo, hominem irretiat) quaerit ex me, quod tandem genus sermonis sit illud. Viderit is, cuius ex officina prodijt. Nec enim ego eiusmodi sermonem agnosco, qui, Nihil esse minus quocunque angulo, nusquam dixerim, nisi ex sententia Peletarij. Sed videlicet homo callidus, vt suum illud Nihil eliciscevetur, aliud mihi Nihil affinxit, quo cum impune pugnaret: At quàm palaestricè pugnat? quam sibi placet hoc loco, dum meum illud argumentum, quo petitus fuerat, in me ipsum mira dexteritate conuertit? Sic enim argumentatur. (Angulus

silus contactus nihil est: Angulus contactus angulo contactus maior est. Angulus igitur maior nihilo est: Atqui Clauius eundem ponit minorem nihilo. Est igitur angulus contactus nihilo maior, & idem nihilo minor.) *Mox quasi Nihil illud ab se efficium insulasset, exclamat.* (En Clauii argumenta, quæ verum tandem Peletarii sophismata sunt, an Clauii potiùs figmenta, cùm ipse suum angulum contactus nihil esse dicat, non ego?) *Verum vt hominem furcum, atq; adumbratum nequicquam petere desinat, virum ostendam, qui cum, si velit, certare cum laude possit. Ego, vt ostenderem, angulum contactus, ex Euclidis sententia, verè esse angulum, & angulum semicirculi angulo recto rectilineo minorem; ita sum argumentatus. Si Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, (hoc est, vt Peletarius intelligit, non esse angulum, vel non esse quantitatem) & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo; quid obsecro, tantoperè desudasset, vt demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum verò semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quàm nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, hoc est, quàm id, quod quantitas non est, minus esse quocunque angulo? Quid rursus magis perspicuum, quàm angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Agnoscat itaque Peletarius, Nihil illud suum malè a nobis acceptum, idque ita velit, vt meum hoc argumentum refellat: in quo ego si angulum contactus dixi esse nihil, & non potius eum nihil esse asserui ex sententia Peletarij, libenter manus dabo. Videtur Peletarius aut non intellexisse meum argumentum, aut intelligere noluisse: nisi eum quis dicat, dedita opera verba mea voluisse cauillari; quod & plerisque alijs in locis facere videtur. Numquam enim dixi, angulum contactus minorem esse, aut maiorem nihilo: Solum affirmaui, angulum contactus quemcunque minorem esse, aut maiorem aliquo alio angulo contactus; quem non ego dixi nihil esse, sed Peletarius, eundemq; Euclides minorem quolibet acuto rectilineo rectè demonstrauit. Vt autem intelligat Peletarius, me, quod ipse negat, dedicisse Dialecticam, illum ipsum tam lepidum, atq; acutũ syllogismum, quo nihil illud ab se confictum mira venustate confinxit, paulisper considerabimus, vt quàm sue iure Dialectica ignaros alios vocet, appareat. Nam mihi quidem malè tornatus ille ipse syllogismus videtur, secundóque reddendus. Etenim cùm versetur in tertia figura, in eo maior extremitas (vt Dialectici loquuntur) quæ est, Nihil, de minori extremitate, quæ est, angulo contactus maior, in recto pradicari deberet, hoc pacto. Angulus contactus nihil est: Angulus contactus angulo contactus maior est. Igitur aliquid, quod angulo contactus maius est, nihil est. Qua quidem conclusio rectè sequitur ex præmissis, quarum prior Peletarij est, non mea, posterior autem mea, & Procli, immò & Euclidis. Conclusio autem illa Peletarij,*

Angulus igitur maior nihilo eſt, nulla ratione ex præmiſſis inferri poteſt. Nam ſi, angulum cùm dicit, intelligit Peletarius angulum contactus, aſſumitur medius terminus, qui in vtraque præmiſſa ſubijcitur: quod nefas eſſe, Ariſtoteles in prioribus Anal. & Dialectici omnes clamant. Si autem alium angulum intelligit, aſſumitur in concluſione terminus, cuius nulla facta eſt mentio in præmiſſis: quod nihilo magis licere, nemo eſt tam plumbeus in Dialecticis, qui neſciat. Neque contendat Peletarius, mentionem factam eſſe anguli in minore extremitate, vbi dictum eſt, angulum contactus angulo contactus maiorem eſſe. Nam angulus in minore extremitate poſitus eſt in obliquo, qui in concluſione ſubijcitur in recto: quod, vt auctore Ariſtotele docent omnes Logici, ſine peccato fieri non poteſt. Quod, vt planum fiat, vtemur exemplo ex palæſtra, quam ab illo didicimus. Si quiſpiam ita argumentetur; Angulus in ſemicirculo rectus eſt: Angulus in ſemicirculo angulo acuto maior eſt. Angulus igitur acutus maior recto eſt; quis, modò ſit imbutus Dialecticis, eiuſmodi argumentationem probet, cùm præmiſſa vera ſint, concluſio autem falſa? Talis ille ſyllogiſmus eſt Peletarij, qui apud imperitum multitudinem alter Chryſippus videri voluit. Concluſio, quæ rectè ex præmiſſis inferretur, hæc eſſet. Igitur aliquis angulus, qui acuto maior eſt, rectus eſt. Sed tamen ei veniam dandam puto, quòd ſe Geometricum Dialecticum, ex alio quodam Dialecticorum genere, profitetur, cuius ego me Dialecticam, ſi ab Ariſtotelica abhorret, planè fateor ignarum. Fatetur deinde Peletarius, ſe non intelligere, quo pacto dicere poſſim, angulum rectilineum minimum dari non poſſe, & tamen angulum contactus eſſe omni acuto rectilineo minorem, (ipſe vt aliquid addat de ſuo, dicit, omni minimo acuto rectilineo minorem; cùm tamen verbum illud, minimo, ego non addiderim) cupitque ſcire, quid aliud ſit, angulum contactus minorem eſſe omni rectilineo acuto, quàm angulum contactus eſſe acutorum rectilineorum minimum. Quæ in re morem geram homini non grauatè, etſi è ſcholio huius propoſ. 16. potuit id, quod cupit, cognoſcere. Nempe ea ratione me illud potuiſſe dicere, qua dicimus: angulum obtuſum rectilineum minimum dari non poſſe, & tamen angulum rectilineum acutum eſſe omni obtuſo rectilineo minorem. Item quemadmodum aliud eſt, angulum rectilineum acutum minorem eſſe omni rectilineo obtuſo, quàm angulum rectilineum acutum eſſe obtuſorum rectilineorum minimum: propterea quòd angulus acutus non eſt obtuſus, ſicut nec angulus contactus rectilineus eſt, aut acutus. Id quod etiam clariſſimè docet Proclus lib. 2. in primum Euclidis ad defin. anguli recti, obtuſi, & acuti. Sed hæc puerilia ſunt; & quæ magis ad Grammaticos ſpectent, quàm ad Geometras. Quod etiam, ne librum meum parum ſpiſſum viderer feciſſe, ſuas demonſtrationes ad verbum me recitaſſe queritur, id in me reprehendit, quod ego in ipſo deſidero. Id enim eo à

me con-

me consilio factum est, ut omnes planè viderent, syncerè me, ac fideliter eius opinionem retulisse, nullumq; omnino verbum immutasse. Quod utinam in meis verbis recitandis ipso facere in animum induxisset, Multò enim minùs spissam Apologiam suam facere potuisset. Nam ego, quid erat, cur laborarem meum librum Peletarij verbis magis spissum efficere? Qui enim parum spissum indscarem librum eum, qui necrarat, nec inanes in libros omnes Euclidis commentationes contineret, cùm Peletarius suum librum, qui sex priorum duntaxat librorum demonstrationes complectitur, satis spissum sit arbitratus? Sed eo sum aquior Peletario, quod ex se alios iudicat. Nam in Apologia sua, me inanis rerum videretur, tres demonstrationes nihil penitus ad eam pertinentes inserit: quarum priorem immeritò suam propriam facit, ut suprà dixi: posteriorem verò, quam mirum in modum gloriatur se clariorem feciſſe, ego & longè brevius, & dilucidius (nisi meorum me amor fallat) iam pridem demonstraui, ut mox, Deo adiuuante, ex Geometria mea Practica clarissimè apparebit. Sed licuerit Peletario sua Apologia, ne incomitata prodiret, nouos mores comites ac pedisequas adiungere: mihi cur non liceat, quod omnibus semper licuit, aliorum sententias totas meis scriptis intexere? Aut igitur omnes reprehendat, atque inprimis Petrum Nonium laudatorem suum, qui idem fecit in refellendis paralogismis Orontij, aut sine causa id se mihi vitio dedisse fateatur. Quòd si, postquam tam fideliter eius verba proposui, Peletarius criminatur, me eius sententiam perperam esse interpretatum, quid facturus fuisset, si alienis verbis eius opinionem in medium adduxissem? Equidem facilè sibi persuadebit quiu, nullum eum verbum relicturum fuisse, quod non reprehendisset.

QVARTO ut leuiora hac omittat, illud potat palmare, quod me laborare ostendit, ut probem, angulos contactus alios alijs esse inaquales: propterea quòd scripsi aqualitatem angulorum eiusdem generis requirere eandem inclinationem linearum, ita ut linea minus conueniant omnino lineis alterius, si alter alteri superponatur, iuxta actauum pronunciatum. Qua in re duplicster me peccare ait. Primum quod dicam, ad aqualitatem angulorum eiusdem generis requiri eandem linearum inclinationem; cùm tamen angulus rectilineus ostensus sit à me aqualis curuilineo, atque adeò eiusdem generis cum illo, licet non sit in utroque eadem linearum inclinatio. Deinde, quòd putem angulos contactus ideo inter se inaquales esse, quod sibi mutuo non congruant. Equidem si quid in eo à me peccatum esse intelligerem, & peccatum (quod est ingenuo, & liberaliter educato homine dignum) agnoscerem, & Peletario correctori, & emendatori meo (quocunque id animo fecerit) gratias agerem. Nunc verò, cum, tota re etiam atque etiam considerata, nihil omninò vitij inesse videam, ita, qua obijciuntur, diluam, ut tamen gratiam habeam Pele-

tario, qui occasionem dedit eius loci diligentiùs explicandi. Ego igitur eo loco intellexi angulos eiusdem generis illos, qui vnam lineam habent rectam, & alteram circularem, quales sunt anguli contactus, & semicirculorum, de quibus tunc agebamus. Quare cum linea recta vnius congruat lineæ rectæ alterius, circularis verò circularis non item, nisi circuli ponantur æquales, efficitur, angulos illos esse inæquales inter se, quippe cùm alter alterum excedat. Eadem ratione, si dentur duo anguli curuilinei æqualium circulorum æquales, necesse est, lineas vnius lineis alterius congruere, si alter alteri superponatur. Quòd si Peletarius hanc doctrinam oppugnat, sciat, se iam bellum mouere mihi, sed Proclo, qui lib. 3. in primum Euclidis ad propos. 4. idem præcipuè docet, quod ego. Ast enim (Angulorum autem æqualitatem sumemus iuxta conuenientiam laterum in rectilineis: in cæterisque omnibus, qui eiusdem sunt speciei, vt in Lunaribus, in Systroidibus, atque in vtrinque conuexis, &c.) *Et infra.* (Quæ æqualia data sunt, sibi inuicem congruunt. Hoc autem non in omnibus verum est, sed in ijs, quæ specie similia sunt. Specie autem similia hæc dico, vt recta linea rectæ lineæ, & circumferentia circumferentiæ circuli eiusdem, & anguli, qui à similibus similiter iacentibus lineis comprehensi sunt. Horum autem dico, quòd quæ æqualia data fuerint, sibi inuicem congruunt.) *Nonne luce clarius ex his colligitur, Proclum illos solum angulos contactus concedere æquales, quorum recta linea, & curua sibi mutuò congruunt? Temerè igitur Peletarius mihi obijcit angulum rectilineum, & curuilineum, triangulum & quadratum, atque alia huiusmodi, de quibus eo loco sermo non erat; quippe qua non sint eiusdem speciei, atque adeò æqualitatem tueantur, etiamsi alterum alteri non congruat. Vt iam vereri incipiam, ne Peletarius noster contentionis sit cupidior, quàm veritatis.*

POSTREMO, vt nihil intactum relinquat, me non modò Geometria ignarum vocat, sed etiam Logices: propterea quòd lib. 5. dixi, non rectè à quibusdam diuidi Proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, atque inæqualitatis; quòd multæ proportiones inæqualitatis sint etiam irrationales. Ego verò (etsi non sum, qui mihi quicquam illo in genere arrogem) tamen in hisce studijs, in quibus mediocriter versatus sum, planè rudem non esse, præ me semper vuli. Quantulum autem sit id, quod in vtroque possim, cæteri melius, qui vacant amore, & odio, iudicabunt; Peletario quidem ipsi ita me adhuc respondisse arbitror, vt iam minùs fortasse ignarum Geometriæ, ac Dialecticæ videar, quàm putarat. Nunc, vt perspiciat, neq; me pertinacem esse, neq; illa, quæ exagitat, à Dialecticorum præceptis abhorrere, libenter ei concedo, diuisionem illam, quam à me reprehensam criminatur, probam esse, ita tamen si in quolibet diuisionis membro Diuisum intelligatur: neque verò hoc vnquam negaui, cùm

cùm alibi similes diuisiones vsurpem. Solùm id eo luci contendi, rectius meo iudicio, diuidi Proportionem in vniuersum duplici diuisione, priori quidem in proportionem rationalem, & irrationalem; posteriori verò in proportionem aequalitatis, atque inaequalitatis, (quod verissimum esse, neminem negaturum censeo, qui rem diligentius expenderit) cùm tam priora duo membra diuidentia, quàm posteriora totum Diuisum, (vt Logici loquuntur) exhauriant: quàm si prius membrum prioris diuisionis, hoc est, proportio rationalis, secetur in proportionem aequalitatis, & inaequalitatis, cùm hac membra dividentia latiùs pateant, quam Diuisum, nisi in illis Diuisum intelligatur. Atque eò magis duplex illa diuisio mihi probatur, quòd non desint, qui primùm partiantur Proportionem in proportionem aequalitatis & inaequalitatis; posteriorem deinde hanc in proportionem rationalem, & irrationalem: contrario scilicet modo, quàm priores. Vt igitur hanc controuersiam dirimerem, ac dubitationem, vtri rectiùs faciant, priores ne, an posteriores, tollerem, statui duabus diuisionibus secundam esse Proportionem, quarum vtraque absolutissima est, ac perfectissima. Non aliter arbitror, omnes magis esse probaturos, si corpus duplici diuisione secetur, primùm quidem in viuens, & non viuens; deinde verò in album, nigrum, ac mixto colore affectum: quam si corpus viuens diuidatur in album, nigrum, ac mixto colore affectum; ob causam iam dictam: licet haec subdiuisio bona sit, si Diuisum semper intelligatur. Huiusmodi diuisiones sexcentas adducere possem: sed satis est, me prudenti lectori institutũ meum in diuisione Proportionis exposuisse, & cur duplicem illam diuisionem subdiuisioni aliorum praetulerim. Quòd si tam acres, & seueri iudices singulorũ verborum aut improprietatem, quae per incogitantiã interdum excidunt, esse velimus, ne scriptorum nullus ab quo vitio carebit, neq; ipse quidem Peletarius, vt partim ex ijs, quae dicta sunt, constat, partim etiam ex alijs eius demonstrationibus apparere potest: quas si liberet ad certam illam Dialecticorum normam exquirere, profectò reprehendendi materia non deesset. Verum non est hoc nostri consilij, refellendi studio vitia aliena seruitari, sed vbi sese occasio obtulerit, meam (qualiscunque est) de aliorum sententijs sententiam exponere: Solùm ab eo peto, (quoniam se tam acutum Dialecticum iactat, vt alios contemnere videatur; quanquam ex superiore syllogismo, quem in me conuertit, liquidò constat, quam sit Dialectica peritus) ex qua Logica hanc argumentationem hauserit; Omnes anguli contactus sunt inmodi quolibet angulo acuto rectilineo: ergo omnes inter se sunt aequales. Itemque hanc; Anguli semicirculorum, quo à maioribus circulis fiunt, eo sunt maiores: igitur tandem ad aliquem perueniemus, qui recto rectilineo maior sit; in qua quidem ad Cardanũ scribit, nullum esse paralogismum. Ego sanè vehementer miror, qua ratione in tam apertas hallucinationes, & viro Geometrae omnino indignas, incidere

potuerit. Sed argumentationes eiusmodi satis superq; in scholio huius propos. 16. à me sunt confutatæ, adductis contra ipsas euidentissimis instantijs. Deinde quòd me perstringit, quasi parum intellexerim, quæ sit proportio rationalis, & quæ irrationalis, non multum laboro. Constat enim, eum studio mihi detrahendi id dixisse, cùm has proportiones vbique ex sententia grauissimorum scriptorum definierim, neque verò ipse vllum peccatum à me eatenus esse commissum, poterit ostendere. Certè commentarius meus in lib. 10. Euclidis abundè declarat, num illas intellexerim, nec ne. Denique quod criminatur, me in definitionibus lib. 5. proportionis nomen confundere cum Rationis nomine, nullo modo verum est. Perspicuis enim verbis docui in defin. 4. lib. 5. me in commentario comparationem duarum quantitatum, Proportionem cum pluribus Geometris appellaturum, habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem; licet in textu cum interprete illam dicam Rationem, hanc verò, Proportionem. Neque enim quicquam in textu Euclidis volui immutare. Itaque nulla in meis verbis potest esse ambiguitas.

EX his, quæ diximus, satis (vt opinor) apparet, doctissimos illos viros, de quibus initio memini, non sine causa Apologiam Peletarij inanem, ac responsionis indignam iudicasse. Ego tamen, ne contemnere hominem viderer, quem semper laudandum esse duxi, occasione inuitatus respondendum amicè putaui. Existimet ille, angulum contactus quantitatem non esse, atque adeo angulum semicirculi recto rectilineo esse æqualem, ego certè contrariam sententiam tuebor, donec aliud mihi demonstratum ab aliquo fuerit: rationes enim Peletarij fallaces sunt, nihilq; continent in se probabilitatis, vt in scholio huius propos. 16. ostendi, vbi omnes dissolui, neque meis ipse solutionibus vel vnum verbum (exceptis ijs, quæ suprà ex lib. 10. adduxi) respondit; quod tamen maximè ad Apologiam pertinebat: Vt non sine causa permulti existimauerint, eum non veritatis studio eam Apologiam scripsisse, sed ne veritatis cessisse videretur. Nec verò quisquam putet, me vnum existimare, angulum contactus verè esse angulum, & angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Multos enim eius rei auctores, eosq; grauissimos laudare possum, Theonem, Campanum, Petrum Nonium, & (vt Nonius refert) Archimedem, atq; Iordanũ: quin etiam (quod plurimi facio) Euclidem ipsum, eiusq; commentatorem celeberrimum Proclum; vt taceam ex Gallis præstantissimos, atque eruditissimos viros non paucos, è quorum numero inprimis est Franciscus Candalla ex illustrissima Flussatum familia oriundus, qui insigne volumen in elementa Geometrica Euclidis edidit, vbi ad propos. hanc 16. apertissimè docet, angulos contingentiæ verè esse angulos, ex definitione anguli plani, alios q; alijs esse maiores, æquales, aut minores: Eos autem, qui aliter sentiunt, (Peletarium proculdubio intelligit. Præter eum enim ad hunc diem nemo hac de re scripsit) absurdè

multa

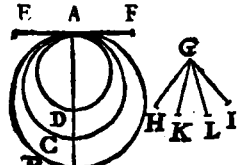
multa ex falsis suppositis concludere affirmat. Huc accedat etiam Henricus Monanthelius Mathematicarum artium professor regius, qui, cum Apologiam Peletarij in me conscriptam vidisset, opusculum eruditum aduersus Peletarium de angulo contactus edidit. Vt autem studiosus lector videat, quid in hoc negotio sentiat Proclus, afferam in medium pauca quadam ex eius commentarijs in lib. 1. Euclidis, quæ obiter notaui, & ex quibus liquido constabit, eius sententiam esse Peletarij commento prorsus contrariam. Primum itaque ita scribit lib. 2. in primum Euclidis, ad definitionem anguli plani. (Duæ namque circumferentiæ se inuicem secando, vel sese contingendo, angulos efficiunt. Quin etiam à recta linea, & conuexa circumferentia angulus continetur, vt Cornicularis.) *Intelligit autem nomine Cornicularis anguli angulum contactus mixtum. Paulo enim ante dixerat, angulum Cornicularem esse omni rectilineo minorem: quod solius anguli contactus proprium est. Deinde in eodem libro ad definitionem anguli recti, obtusi, & acuti ita habet.* (Cornicularis namque angulus omni recto est minor, quandoquidem & acuto, nec tamen acutus est: Semicircularis itidem quocunque recto est minor, acutus tamen non est.) *Quid clarius, quam Proclum hic asseuere, angulum semicirculi minorem esse recto? Rursus lib. 3. ad propos. 4. lib. 1. Euclidis ita scribit.* (Addiscemus enim, quòd angulus Cornicularis acuto semper inæqualis est, & nunquam æqualis; Et semicircularis similiter, transitusque à maiori ad minus non omnino per æquale fit.) *En quam apertè docet, angulum semicirculi æqualem esse non posse angulo rectilineo, transitumque propterea fieri à maiori ad minus non per æquale: quorum vtrumque Peletarius negat, audetque posterius appellare paralogismum. Denique eodem lib. 3. ad propos. 23. hæc verba habentur.* (Cum autem nullus angulus mixtus rectilineo æqualis esse possit, &c.) *Et Peletarius tamen non dubitat angulum semicirculi, qui mixtus est, angulo recto rectilineo facere æqualem, contra Procli sententiam. Ex his liquere arbitror, vt de cæteris taceam, idem sentire Proclum de angulo contactus, & semicirculi, quod ego contra Peletarium scripsi; quis autem neget, maiorem esse auctoritatem, meliora argumenta Procli, quam Peletarij?*

OBITER quoque hoc loco monendum lectorem censeo, id quod de angulo contactus, qui fit in circulis, ex sententia Euclidis, & Procli docui, verum etiam esse de angulo contactus, qui in conicis sectionibus efficitur, nimirum in Parabola, Hyperbola, & Ellipsi. Vt enim Apollonius Pergæus demonstrat lib. 1. propos. 32. in locum, qui inter conicam sectionem, & rectam lineam tangentem interijcitur, altera recta linea non cadit, atque adeo angulus ille contactus minor etiam est omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (si nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitetur perpendicularis)

omni acuto rectilineo maior. Si igitur, vt opinatur Peletarius, angulus contactus quantitas non est, (eadem enim hic est ratio, quæ in circulo) erunt omnes anguli contactus inter se æquales, hoc est, vt ipse vult, non inæquales, & reliquorum angulorum singuli recto rectilineo æquales. Vbi sanè maior absurditas apparet, quo ad sensum, in ea Ellipsi, quæ perexiguam habeat latitudinem, & in ea Hyperbola, quæ ferè linea recta esse videatur. Valde enim inæquales cernuntur anguli ad verticem illius Ellipsis, & Hyperbola constituti; vt incredibile omnino sit, nisi firma ratione demonstretur, angulos illos contactus ad vertices sectionum constitutos inter se, & reliquos ex rectis inter se quoque esse æquales; propterea quod in ea Ellipsi linea tangens magis recedere perspiciatur à circumferentia Ellipsis, quam in circulo; in illa verò Hyperbola minus. Sed hæc alio tempore examinanda relinquamus: nunc ad interruptam expositionem Euclidis reuertamur.

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas potest continuè, & infinitè augeri, altera verò infinitè minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius.



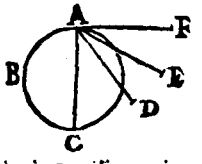
PROPONANTVR enim anguli contactus BAE, & acutus HGI. Si igitur describantur alij circuli minores AC, AD, tangentes rectam EF, in A, angebitur continuè angulus contactus, vt dictum est. Si rursus inter rectas GH, GI, aliæ rectæ cadant GK, GL, diminuetur continuè angulus acutus: Et tamen semper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor est angulo acuto, quantumuis diminuatur.

EX CAMPANO.

CÆTERVM ex hac propos. 16. perspicuum est, vitiosam esse argumentationem hanc, qua vsus est Brison in quadrando circulo, vt auctor est Aristoteles. Videlicet.

TRANSITVR à minori ad maius, vel contra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc, & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.

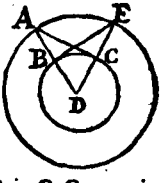
DESCRIBATVR enim circulus ABC, cuius diameter AC, mouerí intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per puncta D, E, F, donec circulum contingat in A. Hoc concesso, manifestum est, quam-



eſt, quamdiu recta A C, ſecat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo ſemicirculi; quamprimum vero ſecare ceſſat, eſſicit angulum rectum maiorem eodem angulo ſemicirculi. Cum igitur factus ſit tranſitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullum angulum rectilineum æqualis reperitur angulo ſemicirculi; (Rectus enim, vel obtuſus, maior eſt; & acutus, minor,) conſtat quoque vitioſam eſſe poſteriorem conſequentiam.

PROBL. 2. PROPOS. 17. xvj.

A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.



EX puncto A, ducenda ſit linea, quæ tangat circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta A D, ſecans circulum B C, in B. Deinde centro D, interuallo autem D A, deſcribatur circulus A E, & ex B, educatur B E, perpendicularis ad A D, ſecans circulum A E, in E. Ducta denique recta E D, ſecante circulum B C, in C, connectatur recta A C: quam dico tangere circulum B C, in C. Cum enim duo latera D E, D B, trianguli B D E, æqualia ſint duobus lateribus D A, D C, trianguli C D A, vtrumque vtrique, vt conſtat ex circuli definitione; anguluſque D, contentus dictis lateribus ſit communis: Erunt *a* & baſes B E, C A, & anguli D B E, D C A, *a* 4. pri. ſuper ipſas, æquales. Eſt autem D B E, rectus ex conſtructione. Igitur & D C A, rectus erit. Itaque C A, cum ſit perpendicularis ducta ad C, extremum ſemidiametri C D, tanget circulum, per corollariũ præcedentis propoſitionis. A dato ergo puncto A, ducta eſt A C, recta tangẽs circulum B C, in C, quod faciendum erat.

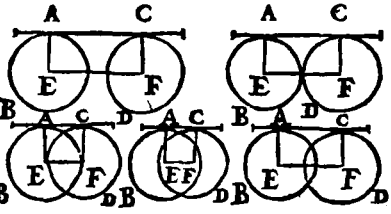
SCHOLIVM.

PRAXIS huius problematis ex ipſa demonſtratione facile elicitur. Facilioremtamen praxim, ad propoſ. 31. huius lib. inueniet.

SED & ſequens problema cum Cardano abſoluemus.

PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterum includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumque tangat circulum.

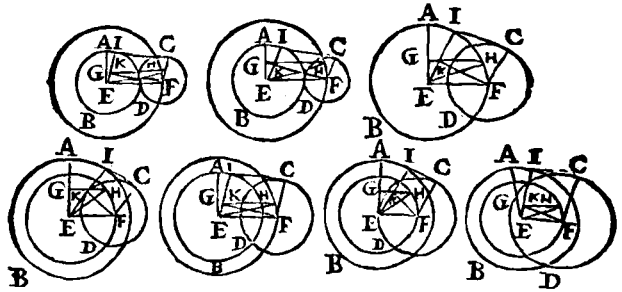
SINT primum duo propoſiti circuli æquales A B, C D, quorum centra E, & F, rectæ iungantur E F, ad quam ducantur perpendiculares E A, F C, ſecantes circumferentias in punctis A, & C. Dico rectam;



a 28.primi.
b 33.primi.
c 29.primi.

dam per A, & C, eductam vtrumq; circulum tangere. Cũ enim E A, F C, semidiametri circulorum aqualium sint aquales, a & parallela, quod anguli E, & F, recti sint; b Erunt quoque E F, A C, aquales & parallela; Ideoque c & anguli A, & C, recti. Quare, per coroll. propos. 16. huius lib. recta A C, vtrumque circulum tanget, cum rectos angulos constituat in extremitatibus semidiametrorum.

SINT deinde duo circuli propositi inaquales A B, C D, quorum rursus centra E, & F, tangantur recta E F, ad cuius internallum ex E, centro maioris circuli circulus describatur F H, si maior non transeat per centrum minoris. Deinde ducta ad E F, perpendiculari E A, abscindatur ex ea portio A G, semidiametro minoris circuli C D, aqualis; & ex G, ipsi E A, perpendicularis ducatur G H, vsque ad circumferentiam circuli F H, proxime descripti. Ducta autem recta H E, fiat angulo H E A, angulus F E I, aqualis; atque per F, aga-



tur ipsi E I, parallela recta F C. Dico rectam per puncta I, & C, ductam vtrumque circulum A B, C D, contingere. Abscindatur enim ex I E, recta I K, ipsi A G, vel semidiametro F C, minoris circuli, aqualis; vt sint reliqua E G, E K, aquales quoque, ducaturque recta K F. Quoniam igitur latera H E, E G, trianguli H E G, aqualia sunt lateribus F E, E K, trianguli F E K, & anguli ipsis contenti aquales,

d 4.primi. ex constructione: d Erunt anguli H G E, F K E, aquales: Ac proinde,
e 33.primi. cum H G E, rectus sit, ex constructione, erit & F K E, rectus. Rursus
f 29.primi quia C F, I K, aquales sunt, & parallela, ex constructione, e erunt
g 29.primi quoque I C, K F, aquales & parallela; Atq; propterea angulus E I C,
f cum aqualis sit externo F K E, rectus erit; g Ideoque & I C F, rectus
existet. Quocirca, per coroll. propos. 16. huius lib. recta I C, vtrumque

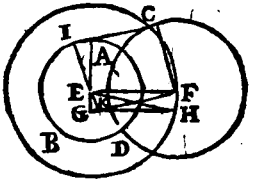
circulum

circulum continget, cum rectos angulos efficiat in extremitatibus semidiametrorum. Quod erat propositum.

SATIS autem constat, si circuli propositi aequales fuerint, id quinque modis posse fieri. Aut enim alius extra alium cadit, aut se mutuo contingunt, aut se invicem per centra secant, aut non, ita tamen, vt vel centra consistant in communi eorum segmento, vel certe extra illud.

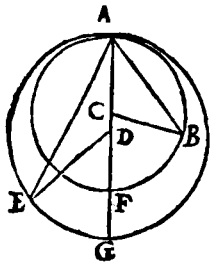
ITEM si circuli propositi fuerint inaequales, id contingere posse septem modis. Aut enim minor totus extra maiorem cadit, aut ipsum tangit, aut ipsum secat, ita vt vel centrum eius sit in circumferentia maioris, vel intra ipsum circulum, hac tamen lege, vt circumferentia minoris citra centrum maioris transeat, vel centrum minoris sit extra circulum maiorem, vel iterum ita intra, vt circumferentia minoris per maioris centrum incedat, vel denique ita intra, vt circumferentia minoris includat centrum maioris.

QVONIAM verò circulis inaequalibus existentibus, initium constructionis sumpsimus semper à maiori, si quis maluerit à minori incipere, id efficiet eadem constructione, demonstratione eq;, nisi quod rectae AE, IE, protrahendae sunt ad G, & K, vt AG, IK, aequales sint semidiametro FC, maioris circuli; Addito insuper, angulos HEG, FEK, contentos lateribus HE, EG; FE, EK, idcirco aequales esse, quod HEA, FEI, reliqui duorum rectorum, aequales sint ex constructione. Denique angulum EIC, esse rectum, ex 29. propos. lib. 1. quod & EKF, inter parallelas IC, KF, rectus sit ostensus.



QVIA verò & per punctum in circumferentia circuli datum, & per punctum extra circulum existens lineam rectam, qua circulum tangat, ex ijs, qua demonstrata sunt, ducere possumus; per punctum quidem in circuli circumferentia positum, ex coroll. propos. 16. per punctum verò extra circulum ex hac propos. 17. Item ostensum est hoc scholio, rectam duci posse, qua duos circulos tangat, dummodo alter eorum in altero non totus includatur; non alienum erit hoc loco demonstrare, quo pacto per datum punctum circulus alium datum circulum tangens, sive interius, sive exterius, describendus sit: Item qua ratione describendus sit circulus tangens duos alios circulos, quorum vnus non sit totus intra alium.

SIT ergo primum in circulo AB, cuius centrum C, datum punctum A, in circumferentia, per quod describendus sit circulus, circulum AB, tangens in A. Ducta ex A, per centrum C, recta AC, sumatur in ea quodvis punctum D, ex quo ad interuallum DA, circulus describatur AE, qui circulum AB, in A, tanget; Et si quidem punctum D,



dum D, fuerit vltra centrum C, cadet circulus AE, totus extra circulum AB; intra verò, si punctum D, in semidiametro AC, extiterit, vt scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

DEINDE extra eundem circulum AB, datum sit punctum G, per quod describendus sit circulus circulum AB, tangens. Ducta ex G, per centrum C, recta GCA, eaque secta bifariam in D, describatur ex D, per A, circulus AE, qui per datum punctum G, transibit, tangetque circulum AB, in A, per ea, quæ in scholio propos. 13 huius lib. demonstrauimus.

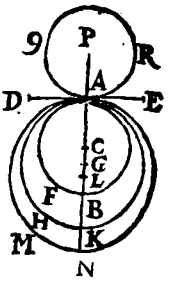
ALITER. Sit datum rursus punctum E, extra circulum AB. Ducta recta EA, vtcunque ex puncto dato E, quæ circulum secet, & non per centrum transeat, ducatur ex A, per centrum C, recta AC; eritque angulus EAC, acutus, cum pars sit anguli semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo EAC, in E, æqualis constituatur AED: coibitque recta ED, cum AC, in D, ob duos angulos DAE, DEA, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli DAE, DEA, æqua-
b 6. pri. les sunt, b erunt & latera DA, DE, æqualia. Circulus ergo ex D, per A, descriptus per datum punctum E, transibit, tangetque circulum AB, in A, ex ijs, quæ in supradicto scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

TERTIO datum sit punctum F, intra circulum AE. Ducta ex F, per centrum D, recta FA; eaque secta bifariam in C, describatur ex C, per A, circulus AB, qui per datum punctum F, transibit, tangetque ex dicto scholio circulum AE, in A.

ALITER. Sit datum rursus punctum B, intra circulum AE, cuius centrum D. Ducta recta quacunque AD, per centrum D, & non per datum punctum B, transeunte, quæ cum recta coniuncta AB, faciet angulum acutum BAD, vtpote minorem angulo semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo BAD, in B, æqualis fiat ABC: coibitque recta BC, cum AD, in C, ob duos angulos BAC, ABC, duo-
b 6. pri. bus rectis minores. Quoniam igitur anguli BAC, ABC, æquales b sunt, b erunt & latera CA, CB, æqualia. Circulus ergo ex C, per A, descriptus per datum punctum B, transibit, tangetque circulum AE, in A, per ea, quæ a nobis scholio propos. 13. huius lib. demonstrata sunt.

QVOD si per punctum N, extra circulum QAR, datum describendus sit circulus tangens circulum QAR, exterius, ita vt neuter intra alium cadat, ducatur ex N, puncto dato ad centrum P, circuli QAR, recta NP, secans circumferentiam in circulo in A. Diuisa deinde recta NA, bifariam in L, describatur ex L, per A, circulus, qui per datum

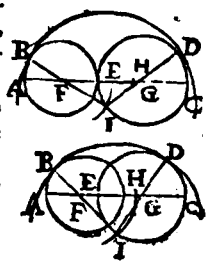
ductum punctum N, transibit, tangetque circulum Q A R, in A, propterea quod vterque circulus rectam D E, qua per A, ducitur ad N P, perpendicularis, tangit in A, ex coroll. propos. 16 huius lib.



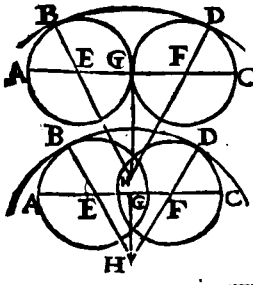
EODEM modo, si in circumferentia circuli Q A R, datum sit punctum A, describemus circulum, qui circulum Q A R, exterius tangat in A. Ducta enim ex centro P, recta P A C, per datum punctum A, si ex quolibet puncto huius rectæ, per A, circulus describatur, nimirum A M N, ex centro L, tanget hic circulum Q A R, vt dictum est, in A.

EX his liquet, per idem punctum datum plures posse circulos describi alium datum circulum tangentes, (si nimirum ex datis punctis E, B, in prioris figura ducantur aliæ rectæ, quæ à rectis E A, B A, differant; Item ex punctis datis F, G, emittantur aliæ lineæ non per centra C, D, transeuntes, sed circulos secantes; ac eandem in recta A G, eiusdem figura, vel in P A C, posterioris figura, quando punctum A, in circumferentia datur, alia centra à centris C, D, L, diuersa assumantur) cum tamen per punctum datum extra circulum vna sola linea ad eadem partes duci possit circulum tangens. Quo pacto autem circulus duos circulos tangens, quorum vnus non sit totus intra alium, describendus sit, hac ratione cum Ioan. Bapt. Benedicto demonstrabimus.

SINT primum duo circuli se mutuo tangentes, aut secantes inæquales, A B, minor, & C D E, maior, quorum centra F, G, per quæ recta ducatur F G, occurrens circumferentiis in A, C, quæ, si circuli se tangant in E, per contactum E, transibit. Abscissa recta E H, ex semidiametro maioris circuli, quæ semidiametro minoris sit æqualis, describatur ex F, centro minoris ad internallum rectæ H C, quæ maior est, quam semidiameter minoris, arcus secans circumferentiam maioris in I; & ex I, per centra F, G, rectæ ducantur I F, I G, occurrentes circumferentiis in B, D. Et quia C H, ipsi I F, & H E, ipsi F B, æqualis est, per constructionem; erunt tota C E, I B, æquales. Cum ergo & diameter I D, diametro C E, æqualis sit, erit quoque I B, ipsi I D, æqualis. Circulus ergo ex I, per B, descriptus transibit per D. Cum ergo idem, ex scholio propos. 13. huius lib. extra vtrumque circulum cadat totus, tanget vtrumque circulum in B, D. Quod est propositum.

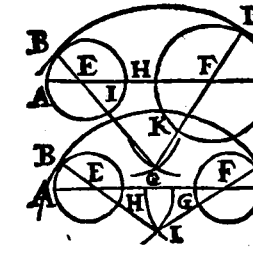


SINT



SINT deinde duo circuli se mutuo tangentes, vel secantes æquales, A B, C D, per quorum centra E, F, recta educatur A C. Diuisa deinde recta E F, inter duo centra bifariam in G, (Quando circuli se mutuo tangunt, diuiditur recta E F, bifariam in puncto contactus, propter semidiametros æquales æqualium circulorum) excitetur in G, ad E F, perpendicularis G H: in qua sumpto puncto H, vtcunque, ducantur ex eo per centra E, F, rectæ occurrentes circumferentiis in B, D. Quoniam igitur duo latera G E, G H, duobus lateribus G F, G H, æqualia sunt, angulosque a 4. pri. *comprehendunt æquales, nimirum rectos; a erunt & bases H E, H F, æquales: Et additis semidiametris æqualibus E B, F D, tota lineæ H B, H D, æquales erunt. Circulus igitur ex H, per B, descriptus transibit per D, cadetq; extra vtrumque circulum, ex scholio propos. 13. huius lib. Quare vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.*

TERTIO sint duo circuli siue æquales, siue inæquales, A B, C D, quorum alter extra alterum sit totus. Per eorum centra E, F, ducatur recta A C. Et si circuli sunt inæquales, describatur ex E, centro minoris ad interuallum diametri maioris C H, arcus, quem in G, secet

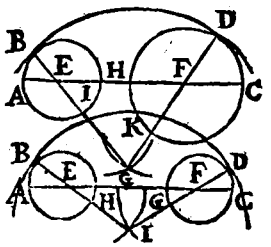


alter arcus ex F, centro maioris descriptus ad interuallum rectæ F I, compositæ ex semidiametro maioris F H, & H I, semidiametro minoris æquali. Ponamus enim nunc hos arcus se intersecare; quando autem se non secant, dicemus mox, quid agendum sit. Ex G, autem per centra E, F, rectæ ducantur secantes circumferentias in B, D. Et quia F G, ipsi F I, æqualis est: ablatis æqualibus F K, F H; reliqua æquales erunt K G, H I. Est autem H I, sumpta æqualis semidiametro minoris E B. Igitur & K G, ipsi E B, æqualis erit. Cum ergo & E G, diametro maioris K D, sit æqualis; erunt totæ rectæ G B, G D, æquales. Quare circulus ex G, per B, descriptus transibit per D, cadetque extra vtrumque circulum ex scholio propos. 13. huius lib. ac proinde vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.

VERVM quia non semper duo illi arcus ex E, & F, descripti se intersecant, quod accidit propter nimiam circulorum distantiam vnius ab altero, absoluemus problema hoc alio modo, qui generalis est, siue circuli se tangant, siue non, etiamsi non se secent, & siue æquales sint, siue inæquales. Ducta recta A C, per circulorum centra sumantur

ſumantur recta æquales AG, CH, ita vt qualibet ſemiſſem ipſius AC, ſuperet: & ex centro E, per G, arcus GI, deſcribatur, quem ſecet in I, alius arcus HI, ex centro F, per H, deſcriptus: ac denique ex I, per centra E, F, recta emittantur circumferentijs occurrentes in B, D. Et quoniam EG, EI, æquales ſunt; ſi addantur æquales AE, BE, fient tota AG, BI, æquales. Eadem ratione erunt CH, DI, æquales. Cùm ergo AG, CH, poſita ſint æquales, erunt quoq; BI, DI, æquales. Circulus igitur ex I, per B, deſcriptus tranſibit per D, totusq; extra vtrumque circulum cadet, ex ſcholio propoſ. 13. huius lib. ac propterea vtrumque tanget in B, D. Quod eſt propoſitum.

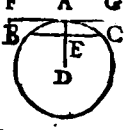
IAM verò eadem arte deſcribemus circulum datæ magnitudinis, qui duos circulos propoſitos tangat, dummodò ſemidiameter circuli deſcribendi maior ſit ſemiſſe rectæ AC, per centra circulorum vſque ad circumferentias ducta. Nam ſi ſemidiametro dati circuli rectæ æquales abſcindamus AG, CH, reliqua perficiemus, vt proximè dictum eſt.



PORRO manifeſtum etiam eſt, ſi ex puncto medio rectæ AC, per centra circulorum vſque ad circumferentias ducta, deſcribatur circulus per A, & C, eum circulum tangere vtrumque circulum AB, & CD, in A, & C, ex ſcholio propoſ. 13. huius lib.

EX PELETARIO.

LINEÆ rectæ, quæ circulum ſecet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.



CIRCVLVM enim ABC, cuius centrum D, ſecet recta BC, cui ducenda eſt parallela tangens circulum ABC. Ducatur ex centro D, recta DE, perpendicularis ad BC, extendaturq; ad punctum A, in circumferentiam; & ex A, ducatur FG, perpendicularis ad AD. a *Erit igitur FG, parallela ipſi BC, tangetq; circulum in A, per corollarium propoſ. 16. huius lib. quod erat faciendum.*

a 28. primi.

THEOR. 16. PROPOS. 18. xvij.

SI circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipſam contingentem perpendicularis erit.

A C F B



RECTA linea AB, tangat in C, circulum CD, cuius centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem esse ad AB. Si enim non est, ducatur EF, perpendicularis ad AB, secans circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo CEF, a duo anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis; Et est EFC, rectus, ex constructione. erit ECF, minor. Quare b maior erit recta EC, hoc est, ED, quàm EF, pars quàm totum. quod est absurdum. Est igitur EC, perpendicularis ad AB. Quare si circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonstrandum erat.

a 17. primi.

b 19. primi.

ALITER. Si EC, non est perpendicularis ad AB, erit alter angulorum ad C, obtusus, & alter acutus. Sit ergo ECB, acutus, qui cùm maior sit angulo semicirculi ECD, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum. Omnis siquidem angulus semicirculi c maior est omni acuto.

c 16. tertij.

SCHOLIVM.

HINC licebit demonstrare sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: Videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis; erunt omnes rectæ lineæ interiorem circulum tangentes, & vsque ad circumferentiam exterioris circuli extensæ, inter se æquales, bifariamque in punctis contactuum secabuntur.

A B



SINT duo circuli ABCD, EF, ex eodem centro G, descripti, quos tangant rectæ AC, BD, in punctis E, F. Dico rectas AC, BD, esse æquales. bifariamq; secari in E, F. Ducantur enim ex centro G, ad puncta contactuum E, F, rectæ GE, GF, d quæ ad AC, BD, perpendiculares erunt; ac proinde, per defin. 4. huius lib. rectæ AC, BD, æqualiter à centro G, in circulo ABCD, distabunt, cùm perpendiculares GE, GF, æquales sint. Igitur e rectæ AC, BD, æquales sunt. Diuiduntur autem f & bifariam in E, F, à perpendicularibus GE, GF. Constat ergo id, quod propositum est.

d 18. tertij.

e 14. tertij.

f 3. tertij.

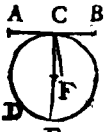
xviij. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TANGAT recta AB, circulum CDE, in C; & ex C, ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in CE, esse centrum circuli. Si enim est extra CE, sit F, centrum, à quo ad C, ducatur recta FC,

quæ

quæ *a* perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo ECB, æqualis erit, pars toti: quod eſt abſurdum. Non igitur extra CE, centrum circuli exiſtet. Itaq; ſi circulum tetigerit recta quæpiã linea, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 18. tertij.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xxix.

IN circulo, angulus ad centrum duplex eſt anguli ad peripheriam, cùm fuerit eadem peripheria baſis angulorum.

IN circulo ABC, cuius centrum D, ſuper baſin BC, conſtituatur angulus BDC, ad centrum; & ſuper eandem baſin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplum eſſe anguli BAC. Includant enim primũ duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales ſunt, *b* erunt anguli DAB, DBA, æquales: Eſt autem externus angulus BDE, *c* æqualis duobus angulis internis DAB, DBA. Quare BDE, duplus erit alterius eorum, vt anguli DAB. Eodem modo duplus oſtenderur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC. Quando enim duæ magnitudines duarum ſunt duplæ, ſingulæ ſingularum, eſt quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Conſtat ergo propoſitum.



b 5. primi.

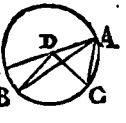
c 32. primi.

DEINDE non includant rectæ AB, AC, rectas DB, DC, ſed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC, *d* æqualis eſt duobus internis DAC, DCA: Hi autem duo *e* inter ſe ſunt æquales, quòd latera DA, DC, ſint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod eſt propoſitum.

d 32. primi.

e 5. primi.

TERTIO recta AB, ſecet rectam DC, & per centrum D, extendatur recta AE. Quoniam igitur angulus EDC, ad centrum, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandem baſin EC, & recta AE, extenditur per centrum; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, vt oſtenſum eſt in ſecunda parte. Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent enim hi anguli eandem baſin EB. Reliquus igitur angulus BDC, duplus erit reliqui anguli BAC. *f* Quando enim totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; eſt & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.



f 20. primi.

SCHOLIVM.

AD primam partem huius propoſ. demonſtrandam aſſumptum eſt hoc principium. (*Si* duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint duplæ, ſingulæ ſingularum; erit quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum) *In tertia verò partis demonſtratione hoc aliud principium adhibitum eſt.* (Si totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum) *Quorum vtrumq; ab Euclide vniuerſaliter demonſtratur in omni genere multiplicium, & de quotcunque magnitudinibus, libro 5. propoſ. 1. & 5. Non tamen propterea demonſtratio huius propoſ. cenſenda eſt vitioſa, quaſi aſſumat ea, quæ nondum ſunt demonſtrata: quia & duo illa principia lumine naturali ita cognita ſunt in duplis magnitudinibus, vt facilè à quouis ſine vlla demonſtratione concedantur, & vtraque illa propoſitio lib. 5. demonſtrari poteſt ante tertium hunc librum, cùm ex eo non poſſe ideant: adeò vt duo illa principia iure optimo adhiberi poſſint hoc loco, tanquam demonſtrata. Neque verò hac in re circulus ab Euclide committitur, cùm duo illa principia, per quæ propoſ. 20. huius lib. demonſtratur, hac eadem propoſitione non nitantur, aut alijs propoſitionibus, quæ ex hac 20. pendent.*

VERVM, ſi placet, demonſtrabimus primam partem huius propoſ. ſine priore illo principio, & tertiam ſine poſteriore, (*ſecunda enim pars neutro eorum indiget*) *hac ratione. Repetatur prima figura. Et quoniam* a *tam anguli DAB, DBA, inter ſe æquales ſunt, quàm anguli DAC, DCA; erit totus angulus BAC, duobus angulis BC, ſimul ſumptis æqualis, ac proinde tres anguli BAC, B, & C, ſimul ſumptis dupli erunt anguli BAC. Quia verò angulus BDC, æqualis eſt iiſdem tribus angulis BAC, B, & C;* (*Nam*

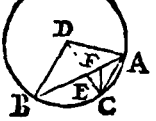


a 5. primi.

b 32. primi. *cùm BDE, duobus internis, B, & DAB, & CDE, duobus internis C, & DAC, æqualis ſit, erit totus BDC, omnibus quatuor, hoc eſt, tribus BAC, B, & C, æqualis.*) *erit angulus quoque BDC, duplus anguli BAC. quod eſt propoſitum.*

c 32. primi. *ALITER. Quoniam* c *ſex anguli triangulorum ABD, ACD, ſunt æquales quatuor rectis, ſunt autem & tres anguli BDC, CDA, ADB, quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propoſ 15. lib. 1. erunt hi*

d 3. pronun. *tres illis ſex æquales: ablatoq; communibus ADB, ADC,* d *reliqui BDC, reliquis BAC, B, & C, æqualis erit. Quare vt primus, erit BDC, ipſius BAC, duplus.*

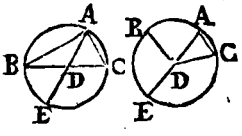


e 5. pronum. *REPETATVR quoque tertia figura, vbi recta DC, rectam AB ſecat, vt in E. Quoniam ergo, ducta recta AD,* e *duo anguli DAC, DCA, æquales ſunt, eſtq; angulus DAC, angulo EAC, maior, erit quoq; angulus DCA, eodem angulo EAC, maior. Si igitur fiat angulus ACF, angulo*

gulo E A C, æqualis secabit C F, rectam A E, & in puncto F, a angulus q; E F C, æqualis erit internis angulis F A C, F C A, ac proinde anguli B A C, duplus. Quia verò b anguli D A C, D C A, æquales sunt, & ablati quoque F A C, F C A; erunt & reliqui D A B, E C F, æquales. Cùm c ergo D A B, ipsi D B A, æqualis sit; erit quoq; E C F, eidem D B E æqualis: Sunt autem, d & anguli D E B, F E C, ad verticem E, æquales. Igitur & reliqui anguli B D E, E F C, æquales erunt, d ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. Cùm ergo angulus E F C, ostensus sit anguli B A C, duplus; erit quoque angulus E D C, anguli B A C, duplus. quod est propositum.

a 32. primi. b 5. primi. c 5. primi. d 15. primi.

QVOD si rectæ B D, C D, in centro angulum non constituant ad partes basis B C; quod tum demum fit, quando segmentum B A C, est vel semicirculus, vel segmentum minus; nihilominùs spatium illud ad centrum duplum erit anguli ad circumferentiam, qui eandem habeat basin, quam spatium illud. Ducta enim recta A E, per centrum, erit tam angulus B D E, ad centrum duplus anguli B A E, ad circumferentiam, quam angulus C D E, ad centrum, anguli C A E, ad circumferentiam, & ostensum est. Spatium igitur ad centrum D, basin habens B E C, constans ex duobus angulis E D E, C D E, duplum est totius anguli B A C. Quod est propositum.



THEOR. 19. PROPOS. 21.

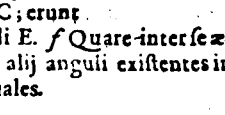
IN circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli, sunt inter se æquales.

IN circulo A B C D, cuius centrum E, existant anguli A, & B, in segmento D A B C. Dico eos esse æquales. Sit enim segmentum D A B C, primum semicirculo maius; & ducantur rectæ D E, C E, ad centrum E. Quoniam igitur angulus D E C, ad centrum e duplus est tam anguli D A C, quàm D B C, ad peripheriã, cùm omnes habeant eandem basin D C; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E. f Quare inter se æquales erunt. Eademq; ratione omnes alij anguli existentes in segmento D A B C, ostendentur esse æquales.



e 20. tertij. f 7. primum.

SIT deinde segmentum D A B C, vel semicirculus, vel semicirculo minus. Ducantur per centrum E, rectæ A F, B G, & in segmento minori connectantur rectæ D E, C E. Quoniam igitur angulus D E F, ad centrum, g duplus est anguli D A F, ad peripheriam: Similiter angulus C E F, an-



g 20. tertij.

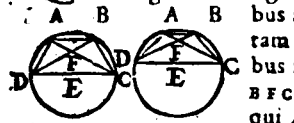
guli C A F; ac proinde duo anguli simul D E F, C E F, duorum angulorum simul D A F, C A F, dupli erunt, hoc est, totius anguli D A C: Sunt autem anguli D E G, G E F, æquales angulo D E F: erunt quoq; tres anguli D E G, G E F, F E C, simul dupli anguli D A C. Eadem ratione erunt ijdem tres anguli dupli anguli D B C. *a* Quare æquales erunt anguli D A C, D B C.

a 37. *primi.*

ALITER. Quoniam, vt in scholio propos. præcedentis demonstrauimus, spatium ad centrum E, cuius basis D G F C, duplum est vtriusque anguli D A C, D B C, ad circumferentiam: *b* Erunt ipsi anguli D A C, D B C, inter se æquales.

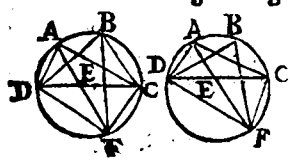
b 7. *primi.*

ALITER. Secent sese rectæ A C, B D, in F, & connectatur recta A B. Quoniam igitur tres anguli trianguli A F D, æquales sunt tribus angulis trianguli B F C; quoniam tam illi, quàm hi *c* æquales sunt duobus rectis: Si auferantur anguli A F D, B F C, *d* qui æquales sunt; erunt reliqui A D F, D A F, reliquis B C F, C B F, æquales. Atqui & anguli A D F, B C F, æquales sunt ostensi in segmento maiori A D C B. Ergo & anguli reliqui D A C, C B C, æquales sunt.



c 32. *primi.*

d 15. *primi.*



ALITER. Ductis rectis D F, C F, ad punctum in circumferentia quoduis F, includentibus centrum E, ita vt tam D A B C F, quàm F D A B C, sit segmentũ maius; iungantur quoq; rectæ A E, B F. Quia igitur anguli D A F, D B F, in eodem segmento maiori D A B C F, æquales sunt; nec non & anguli F A C, F B C, in segmento etiam maiori F D A B C, existentes: si hi illis addantur, fiet totus angulus D A C, toti angulo D B C, æqualis. Itaq; in circulo, qui in eodem segmento sunt, &c. Quod erat ostendendum.

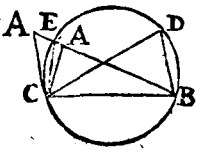
SCHOLIVM.

FACILE quoq; theorema istud conuertemus hoc modo.

SI à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex singulis binæ, quæ ad eadem partes contineant angulos duos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum descriptus, per alterum quoque angulum transibit.

EX duobus enim punctis B, C, educantur quatuor rectæ lineæ B A, C A, B D, C D, binæ ex singulis, constituentes ad eadem partes duos æquales angulos A, D. Dico circulum per puncta B, C, & angulum D, descriptum, transire quoq; per angulum A. Si enim non transit, transibit

ibit vel vltra A, vel citra secans rectam AB, in E. Ducta ergo recta CE, a erunt anguli E, D, æquales. Cùm ergo & angulus A, angulo D ponatur æqualis; erunt anguli CAB, CEB, æquales, externus, & internus, quod est absurdum. b *Externus enim interno maior est. Transit ergo circulus per A, quod est propositum.*



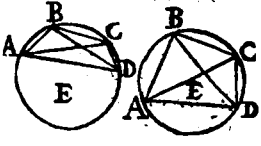
a 11. huius.

b 16. primi.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxij.

QVADRILATERORVM in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

IN circulo, cuius centrum E, inscriptum sit quadrilaterum ABCD. Dico duos angulos oppositos ABC, CDA: Item BCD, DAB, æquales esse duobus rectis. Ductis enim diametris duabus quadrilateri AC, BD, *c* erunt duo anguli ABD, ACD, in eodem segmento ABCD, æquales. Similiter erũt duo anguli CBD, CAD, in eodem segmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est, totus angulus ABC, æqualis est duobus angulis ACD, CAD. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA. *d* Sed hi tres æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos BCD, DAB, duobus esse rectis æquales. Nam rursus duo anguli, ABD, ACD, sunt æquales: Item duo BCA, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Addito igitur communi angulo BAD; erunt duo anguli BCD, BAD, æquales tribus angulis ABD, BDA, DAB. *f* Sed hi tres sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo BCD, DAB, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorum, &c. Quod demonstrandum erat.



c 21. tertij.

d 32. primi.

e 32. primi.

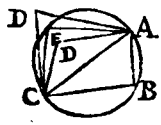
SCHOLIVM.

CONVERSVM quoque huius theorematis demonstrari potest, hoc modo.

SI in quadrilatero anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sint æquales; circulus, qui per tres quoscunque eius angulos describitur, transibit etiam per reliquum

quartum angulum; Atq; adeò circa ipſum quadrilaterum circulus deſcribi poteſt.

IN quadrilatero enim ABCD, ſint anguli oppoſiti B, & D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus deſcribatur; (Quo modo autem hoc fieri poſſit, ad 25. propoſ. huius lib. & ad 5. quarti lib. oſtendetur.) quem dico tranſire etiam per D. Si enim non, tranſibit vel



ultra D, vel citra. Ducantur ergo rectæ CE, AE, ad circumferentiam, ita vt non ſecent rectas CD, AD. Quo facto, a *erunt anguli B, & E, æquales duobus rectis: Erant autem & anguli B, & D, duobus rectis æquales. Igitur duo anguli B, E, æquales ſunt duobus angulis B, D. Quocirca ablato communi B, remanebunt anguli D, & E, æquales;* b *quod eſt abſurdum. Ducta enim recta AC,* b *erit angulus D, maior angulo E, vel contrà, angulus E, maior angulo D. Tranſit igitur circulus per punctum D. Quod eſt propoſitum.*

a 32. primi.

b 21. primi.

SATIS autem eſt, ſumere duos tantùm angulos oppoſitos æquales duobus rectis, vt theorema hoc verum ſit: quia ſi duo oppoſiti ſunt æquales duobus rectis, erunt neceſſariò & reliqui duo oppoſiti duobus rectis æquales; cùm omnes quatuor ſint quatuor rectis æquales, vt ad propoſ. 32. lib. 1. demonſtrauimus.

EX hac etiam propoſ. facilè demonſtrabimus theorema hoc inſequens, quod frequenter vſurpari ſolet, tanquam principium, à Mathematicis, ſcilicet.

SI ex ſemicirculis, aut circulis ſegmenta ſimilia detrahantur; reliqua quoque ſegmenta ſimilia erunt.



SINT primùm in circulis ABC DEF, GHIKLM, arcus ſimiles CDE, IKL. Dico & reliquos arcus EFABC, LMGHI, ſimiles eſſe. Sumptis enim in dictis arcubus, punctis vtcunq; D, B, K, H, tungantur rectæ DC, DE, BC, BE, KI, KL, HI, HL. Quia igitur arcus CDE, IKL, ſimiles ſunt, erunt, ex definitione ſegmentorum ſimilium, anguli CDE, IKL, æquales. Cùm ergo duo anguli CDE, CBE, duobus angulis IKL, IHL, ſint æquales; c *quod tam illi, quàm hi ſint æquales duobus rectis:* d *erunt & reliqui anguli CBE, IHL, æquales; ac propterea, ex defin. 10. huius lib. arcus EBC, LHI, ſimiles erunt.*

c 22. tertij.

d 3. propoſ.

DEINDE in ſemicirculis AEC, GLI, ſimiles ſint arcus EC, LI. Dico & reliquos arcus AE, GL, eſſe ſimiles. Sumptis enim punctis D, F, K, M, vtcunq; in ijs arcubus, tungantur rectæ CD, DE, CE, EF, FA, AE; IK, KL, IL, LM, MG, GL. Itaq; quia arcus EC, LI, ſimiles

similes sunt, erunt ex defin. anguli C D E, I K L, æquales. Cum ergo & duo anguli C D E, E A C, duobus angulis I K L, L G I, æquales sint; a *quod uero illi, quàm hi sint duobus rectis æquales: erunt & reliqui anguli E A C, L G I, æquales. Sunt autem & anguli A E C, G L I, in semicirculis, hoc est, in segmentis similibus A E C, G L I, æquales, ex definitione segmentorum similium. Igitur in triangulis A E C, G L I, & reliqui anguli A C E, G I L, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. æquales erunt. Cum ergo duo anguli A C E, E F A, duobus angulis G I L, L M G, æquales sint;* b *quod tam illi, quam hi duobus sint rectis æquales; erunt quoque anguli reliqui E F A, L M G, æquales: ac proinde, ex defin. similium segmentorum, arcus A E, G L, reliqui in semicirculis, similes erunt. Quod erat ostendendum.*

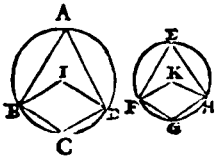
a 22. ter tij.

b 22. ter tij.

QVANDO autem de segmentis similibus sermo hic incidit, non uidentur omittenda hoc loco tria theoremata tum Geometricis rebus, tum præsertim Astronomicis perneceſſaria, quorum primum sit hoc, quod nos ad defin. 10. huius lib. demonstrandum recepimus: uidelicet.

ANGVLI insistentes arcubus circulorum similibus siue ad centra, siue ad circumferentias, sunt inter se æquales. Et contra, arcus, quibus anguli æquales siue ad centra, siue ad circumferentias insistunt, similes sunt.

SINT in circulis A B C D, E F G H, quorum centra I, K, primum arcus similes B C D, F G H, quibus ad centra insistant anguli I, K, ad circumferentias uerò anguli A, E. Dico tam illos, quam hos inter se æquales esse. Consistuantur enim in illis arcubus anguli C, G, qui ex defin. segmentorum similium, æquales erunt. c *Sunt autem tam duo anguli C, A, quam duo G, E, duobus rectis æquales.*



c 22. ter tij.

d 10. ter tij.

Ablatu igitur æqualibus C, G, erunt quoque reliqui A E, æquales. d *Quorum cum dupli sint anguli I, K,* e *erunt hi quoque æquales. Quod est propositum.*

e 6 prænum.

DEINDE sint tam anguli I, K, quàm A, E, insistentes arcubus B C D, F G H, inter se æquales. Dico arcus B C D, F G H, esse similes. Nam si A, & E, sint æquales: sint f *autem tam duo anguli A, C, quam duo E, G, duobus rectis æquales; erunt & reliqui C, G, æquales; ac propterea, ex defin. similium segmentorum, arcus B C D, F G H, quibus anguli æquales A, E, ad circumferentias insistunt, similes. Si uerò anguli I, K, ad centra sint æquales,* g *erunt quoque eorum dimidia æqualia, hoc est, anguli A, E. Quare est primus, arcus B C D, F G H, similes sunt. Quod erat ostendendum.*

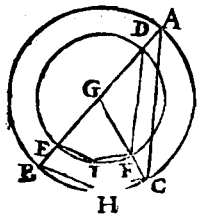
f 22. ter tij.

g 7. prænum.

SECVNDVM autem, quod nos etiam in sphæra ad finem primi cap. demonstrauimus, huiusmodi sit.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro deſcribantur, atque ex centro duæ, aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quaſcunque duas lineas intercepti, ſimiles.

DVO circuli ABC, DEF, ex eodem centro G, deſcripti ſint, & ex centro G, duæ rectæ educantur GB, GC. Dico arcum EF, BC, eſſe ſimiles. Producta enim BG, ad A, iungantur rectæ AC, DF; Item ſumptis punctis H, I, vtcunque ducantur rectæ BH, CH, EI, FI.



a 20. ter tij. b 7. pro mm. c 22. ter tij. d 3. pro mm.

Quoniam igitur angulus G, ad centrum arcubus EF, BC, inſiſtens a duplus eſt tum anguli EDF, quam anguli BAC; b erunt anguli EDF, EIF, duobus angulis BAC, BHC, aequales; quod c tum illi, quam hi duobus rectis ſint aequales. Ablatis igitur aequalibus angulis EDF, BAC, d reliqui EIF, BHC, aequales erunt: ac proinde ſegmenta EF, BC, in quibus ſunt, ſimilia erunt, ex definitione ſimilium ſegmentorum. Quod erat oſtendendum.

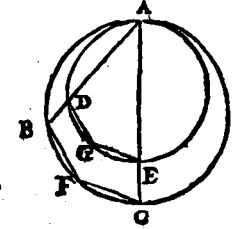
e 7. pro mm. f 20. ter tij.

BREVIVS ſic. e Quoniam anguli A, D, aequales ſunt, quod vtriuſque f duplus ſit anguli G, ad centrum; erunt per antecedens theorema, arcus BC, EF, quibus ad circumferentias inſiſtunt, ſimiles. Quod eſt propoſitum.

VEL adhuc brevius. Quoniam arcubus EF, BC, aequales anguli in centro inſiſtunt, imò vnus & idem angulus BGC; erunt per antecedens theorema arcus EF, BC, ſimiles. Atque in hac demonſtratione non eſt opus vlla conſtructione, vt manifeſtum eſt.

TERTIVM denique, quod aliter quoque in noſtro Aſtrolabio oſtendimus, hoc ſit.

SI duo, aut plures circuli ſe mutuo tangant interius in vno puncto, à quo duæ, aut plures rectæ educantur; erunt & arcus inter quaſcunque duas lineas intercepti, & arcus inter quamcunque lineam, & punctum contactus intercepti, ſimiles.



g 22. ter tij.

TANGANT ſe mutuo interius duo circuli ABC, ADE, in puncto A, à quo duæ rectæ educantur AB, AC. Dico tum arcus DE, BC, quam AD, AB, & AED, ACB, ſimiles eſſe. Sumptis enim duobus punctis vtcunque F, G, iungantur rectæ BF, CF, DG, EG. Quoniam igitur duo anguli DAE, DGE, duobus angulis BAC, BFC, aequales ſunt, quod tum illi, quàm

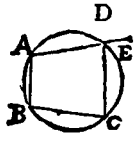
illi, quàm hi ſint duobus rectis æquales: ablato communi angulo B A C, a erunt reliqui anguli D G E, B F C, æquales; ac proinde ar- a 3. *pro-*
cus D E, B C, ſimiles erunt ex defin. ſegmentorum ſimilium. *mun.*

BREVIVS ſic. Quoniam angulus A, communis vtrique arcui D E, B C, ad circumferentias inſiſtit, erunt, ex demonſtratis ante proximè antecedens theorema, arcus D B, B C, quibus inſiſtit, ſimiles. Quod eſt propoſitum.

QVIA verò, ſi per circulorum centra ducta cogitetur recta A C, b *hæc in contactum A, cadit, ſuntque eodem pacto arcus D E, B C, ſi-* b 11. *ter-*
miles, fit, vt hiſce ſimilibus ablatis ex ſemicirculis ſimilibus, reliqui *tij.*
arcus A D, A B, ſimiles quoque ſint: atque his ablatis ex totis circumferentiis ſimilibus, ſimiles quoq; ſint reliqui arcus A E D, A C B, vt paulo ante demonſtrauimus. Quod eſt propoſitum.

HVC etiam referri poteſt hoc theorema.

SI vnum latus quadrilateri in circulo deſcripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.

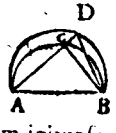


IN circulo A B C D, deſcriptum ſit quadrilaterum quodcunque A B C D, cuius latus A D, producatur ad E. Dico angulum E D C, angulo B, æqualem eſſe. Cum enim duo anguli ad D, c æquales ſint duobus rectis: Item d duo B, & D, in quadrilatero; erunt duo illi his duobus æquales. Ablato ergo communi angulo A D C; reliquus E D C, externus reliquo B, c 13. *pri-*
mi.
d 22. *ter-*
tij.
æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxij.

SVPER eadem recta linea, duo ſegmenta circulorum ſimilia, & inæqualia, non conſtituentur ad eaſdem partes.

SI enim fieri poteſt, ſuper recta A B, conſtituantur ad eaſdem partes duo ſegmenta ſimilia, & inæqualia A C B, A D B. Perſpicuum eſt autem, quod ſe ſolum interſecent in punctis A, & B; e Circulus enim circulum non ſecat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius ſegmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta A D, ſecans circumferentias in C, & D, & connectantur rectæ C B, D B. Quoniam igitur ſegmenta ponuntur ſimilia, erit per 10. defin. huius lib. angulus A C B, æqualis angulo A D B, externus interno: f quod eſt abſurdum. Non igitur ſegmenta ſunt ſimilia: Quare ſuper eadem recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum.



e 10 *tert.*
tij.

f 16. *pri-*
mi.

SCHO-

SCHOLIVM.



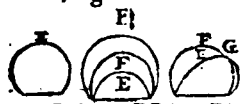
EADEM ratione, neque ad diuersas partes super eadem recta linea duo segmenta circulorum similia, & inaqualia constituentur. Nam si alterum eorum intelligatur moueri circa lineam AB, vt iam ambo sint ad easdem partes, in idem absurdum incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inaqualitatem.

xxiij. THEOR. 22. PROPOS. 24.

SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.



SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD, constituta sint segmenta similia AEB, CFD. Dico ea inter se esse æqualia. Lineæ enim AB, CD, cum sint æquales, cõgruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmentũ AEB, segmento CFD, congruere. Si enim non congruit, cadet



aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod si extra cadat, aut intra, cõstituentur super eadem recta CD, duo segmenta AEB, AFB, similia, & inæqualia, quorum vnum totum extra aliud cadit, quod est absurdum. *a* Demonstratum enim est contrarium. Quod si partim extra cadat, partim intra, secabunt sese in pluribus punctis, quam duobus, nimirum in A, B, G. Quod est absurdum. *b* Circuli enim non se secant in pluribus punctis, quam duobus. Congruet igitur segmentum AEB, segmento CFD, atque adeo ipsa inter se æqualia erunt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

a 23. *ter tij.*

b 10. *ter tij.*

SCHOLIVM.

NON solum in hac propositione ostenditur, segmenta similia AEB, CFD, esse æqualia, super æquales bases AB, CD; verum etiam ipsas peripherias, eo quod, vt demonstratum est, sibi mutuo congruant.

CONVERSVM quoque huius propos. & precedentis, facile demonstrabitur. Nimirum, segmenta circulorum æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, esse similia. Nam propter æqualitatem, alterum alteri congruet; quare similia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipsis constituti æquales sint. Quod si quis dicat, non sibi mutuo congruere segmenta, secabit necessario vna circumferentia alteram. Vna enim extra alteram non cadet. Inæqualia

namque

namque forent ſegmenta, quod eſt contra hypotheſin. Sint ergo ſegmenta A F B, A G B, æqualia ſuper eandem rectam A B, ſecentque ſe mutuo in G. Igitur circuli A F B, A G B, ſecant ſeſe in puncto A, G, B, pluribus quam duobus, quod eſt abſurdum. a Circuli enim non ſe interſecant in pluribus punctis quam duobus. Eodem modo res demonſtrabitur, ſi æqualia ſegmenta ſuper æquales rectas ſint conſtituta: ſi nimirum altera alteri ſuperponatur, &c. a 10. tert

PROBL. 3. PROPOS. 25. XXIV.

CIRCVLI ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum.

SIT ſegmentum circuli A B C, quod perficere oporteat. Subtendatur recta A C, quæ bifariam ſecetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur D B, connectaturque A B. Angulus igitur D B A, vel maior eſt angulo D A B, vel æqualis, vel minor. Sit primum maior, (quod quidem continget, quando ſegmentum A B C, minus fuerit ſemicirculo: Tunc enim, quia B D, tranſit per centrum, ex corollario propoſ. 1. huius lib. quod eſt extra ſegmentum, cum ponatur eſſe minus; erit D A, maior, quam D B, cum D B, perficiens diametrum *b* ſit omnium minima, quæ ex puncto D, in circumferentiam cadunt. Quare angulus D B A, *c* maior erit angulo D A B.) fiatque angulus B A E, æqualis angulo D B A, & ſecet recta A E, rectam B D, productam in E. Dico E, eſſe centrum circuli, cuius ſegmentum A B C. Ducta enim recta E C, erunt latera A D, D E, trianguli A D E, æqualia lateribus C D, D E, trianguli C D E, & anguli contenti, recti. *d* Quare baſes E A, E C, æquales erunt; *e* Eſt autem & E A, æqualis ipſi E B, quod anguli E A B, E B A, æquales ſint. Igitur tres lineæ E A, E B, E C, æquales erunt, *f* ac propterea E, centrum erit circuli A B C, quando-quidem ex E, plures quam duæ rectæ æquales cadunt in circumferentiam.



b 7. tert. c 18. pri. d 4. pri. e 6. pri. f 9. tert.

SIT deinde angulus D B A, angulo D A B, æqualis: (Quod demum continget, quando ſegmentum A B C, ſemicirculus fuerit. Tunc enim erit A C, diameter, & D, centrum, atque adeo rectæ D A, D B, æquales; quare *g* & anguli D A B, D B A, æquales erunt.) *h* Erunt igitur rectæ D A, D B, æquales: Erat autem & D C, æqualis ipſi D A, quòd recta A C, ſecta ſit bifariam. Quapropter cum tres rectæ D A, D B, D C, cadant ex D, in circumferentiã, *i* erit D, centrum.



g 5. pri. h 6. pri. i 9. tert.

SIT tertio angulus D B A, angulo D A B, minor, (quod quidem euenier, ſi ſegmentum A B C, ſemicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam B D, tranſit per centrum, ex corollario propoſ. 1.



a 7. ter.

b 18. primi.

posi. 1. huius lib. quod quidem intra segmentum, cum maius esse ponatur, existit; a erit D B, omniũ, quæ ex D, in circumferentiam cadunt, maxima; maior igitur erit quam D A, b ideoq; angulus D A B, maior angulo D B A.) fiatque angulus B A E, æqualis angulo D B A, & secet recta A E, rectam B D, in E, puncto, quod ostenderur esse centrum eodem modo, quo id ipsum ostendimus, quando angulus D B A, maior erat angulo D A B, vt constat, si recta ducatur E C. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cuius est segmentum. Quod facere oportebat.

SCHOLIVM.

SED fortassis hac demonstratio Euclidis, qua per omnia tria circuli segmenta progreditur, ita facilius instituetur. Diuisa recta A C, bifariam in D, erectaque perpendiculari D B, & ducta A B; aut D B,

c 18. primi.

minor est, quàm D A, aut æqualis, aut maior. Si minor, c erit angulus D B A, maior angulo B A D. Constituto igitur angulo B A E, æquali ipsi A B D; ostendemus, vt prius, E, centrum esse. Atque hoc euenit, quando segmentum est semicirculo minus.

SI verò D B, æqualis est ipsi D A; erunt omnes tres D A, D B, D C,

d 9. ter.

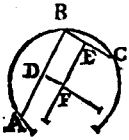
æquales; d ac proinde D, centrum. Qua ratio locum habet in semicirculo.

e 18. pri.

SI denique D B, maior est, quàm D A; e erit angulus D B A, minor angulo D A B. Constituto ergo angulo B A E, æquali ipsi A B E; ostendetur E, esse centrum, vti prius. Hoc autem maioris segmento accidit.

ALITER idem problema hoc modo absoluetur. Positis iisdem, quæ prius, fiat angulo D B A, æqualis angulus E A B. Et si quidem recta A E, cadit infra A C, erit segmentum semicirculo minus, vt in prima figura. Si verò A E, cadit supra A C, erit segmentum semicirculo maius, vt in tertia figura: semper autem E, centrum erit, vt demonstratum est. Si denique recta efficiens cum A B, in A, angulum æqualem angulo A B D, coincidit cum A C, erit segmentum semicirculus, punctumque D, centrum erit, vt in secunda figura.

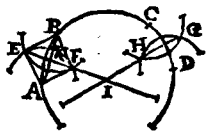
BREVIVS tamen inuenietur centrum segmenti propositi cuiuslibet, siue illud semicirculo minus sit, siue æquale, siue maius, hac ratione. Assumantur in peripheria segmenti tria puncta vtcunque A, B, & C, quæ duabus rectis coniungantur A B, B C, quæ bifariam secentur in D, & E. Deinde ex D, & E, educantur ad A B, B C, perpendiculares D F, E F. Quoniam igitur per corollarium propos. 1. huius lib. tam D F, quam E F, incedit per centrum circuli, cuius A B C, est segmentum, conibunt ambæ in centro, vt in F. Quare centrum est inuentum. Quod est propositum.



ALITER, vt Mechanici solent. Accipiantur in circumferen-

tia duo

tia duo puncta quæcunque A, & B, à quibus describantur duo arcus ad idem interuallum quodcunque, qui se intersecent in E, & F. Postea ex alijs duobus punctis C, & D, alij duo arcus se secantes in G, & H, describantur ad quodnis interuallum, siue idem quod prius, siue diuersum. Si igitur agantur recta E F, G H, transibunt amba per centrum. Quare punctum I, in quo coeunt, erit centrum. Quod autem linea E F, G H, per centrum transeant, ita demonstrabitur. Ducantur recta A E, A F, B E, B F, quæ inter se æquales erunt, ob æqualitatem circulorum. Quoniam igitur latera A E, E F, trianguli A E F, æqualia sunt lateribus B E, E F, trianguli B E F; & bases quoque A F, B F, æquales: a *Erunt anguli A E F, B E F, æquales. Rursus ducta recta A B, quæ secet E F, in K: quoniam latera A E, E K, trianguli A E K, æqualia sunt lateribus B E, E K, trianguli B E K; & anguli A E K, B E K, ostensi quoque æquales;* b *erunt & bases A K, B K, & anguli A K E, B K E, æquales, ideoque recti. Quare cum E F, diuidat rectam A B, in circulo bifariam, & ad angulos rectos, transibit per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. Eadem ratione ostendetur G H, transire per centrum. Debent autem quatuor puncta A, B, C, D, in tali situ accipi, vt recta E F, G H, non in directum sibi occurrant, sed vt se mutuo secent. Quòd si quando contingat, rectas E F, G H, in directum esse constitutas, diuidenda erit recta intra circumferentiam comprehensa, bifariam. Punctum enim dimissionis erit centrum circuli: propterea quòd tunc recta illa est diameter circuli, quandoquidem per centrum transit, ex coroll. propos. 1. huius lib.*

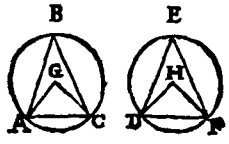


a 8. pri.

b 4. pri.

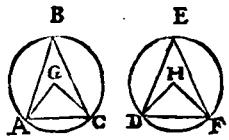
THEOR. 23. PROPOS. 26. XXV.

IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripheriis insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.



IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, H, constituti sint primũ ad centra anguli æquales A G C, D H F. Dico peripherias A C, D F, quibus insistunt, siue super quas ascenderunt, esse æquales. Sumantur enim in peripherijs A B C, D E F, duo puncta B, E, ad quæ rectæ ducantur A B, C B, D E. F E, connectanturque rectæ A C, D F. Quoniam igitur c anguli B, & E, dimidij sunt æqualium angulorum G, & H; erunt & ipsi æquales inter se. Quare ex definitione segmenta A B C, D E F, similia erunt. Et quia latera A G, G C, trianguli, A G C, æqua-

c 20. tert. 33.



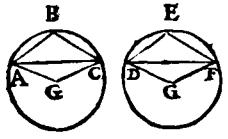
æqualia ſunt lateribus D H, H F, trianguli D H F, propter circulorum æqualitatem; & anguli, quos continent, G, H, æquales, ex hypotheſi; *a* erunt baſes A C, D F, æquales. Cum igitur ſegmenta ſimilia A B C, D E F, ſint ſuper *a* 24. *pri.* lineas æquales A C, D F, *b* erunt ipſa inter ſe æqualia. Quare ſi à *b* 24. *ter tij.* circulis æqualibus demantur, remanebunt & ſegmenta A C, D F, inter ſe æqualia; atque adeo peripheriæ A C, D F. Quod eſt propoſitum.

SINT deinde ad peripherias conſtituti duo anguli æquales B, & E; Dico rurſus, peripherias A C, D F, ſuper quas aſcenderunt, eſſe æquales. Erunt enim, vt prius, ſegmenta A B C, D E F, ſimilia. Cum igitur ſint ſuper æquales lineas A C, D F: (cùm enim *c* 20. *ter tij.* anguli G, H, æquales ſint, *c* quod ſint dupli angulorum æqualium B, & E; erunt, vt prius, rectæ A C, D F, æquales) *d* erunt ipſa *d* 24. *ter tij.* inter ſe æqualia. Si igitur à circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & ſegmenta A C, D F, æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

HÆC ſecunda pars breuius ita demonſtrabitur. Quoniam anguli G, H, dupli ſunt angulorum æqualium B, E, erunt ipſi inter ſe æquales. Quare vt oſtenſum eſt prius, peripheria A C, D F, ſuper quas aſcenderunt, æquales erunt.

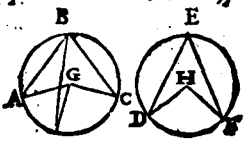
IAM verò ſi quando contingat, rectas A G, C G; D H, F H, non conſtituere angulos in centris ſupra baſes A C, D F, ſed ſupra baſes A B C, D E F, vt ſubiecta hæ figuræ monſtrant: ita ſecunda pars huius propoſ. demonſtranda eſt. Quoniam ſpatia ad centra G, H, inſiſtentia arcubus A C, D F, æqualia inter ſe ſunt, cum ex ſcholio propoſ. 20. huius lib. dupla ſint angulorum B, E, ad circumferentias; erunt etiam anguli A G C, D H F, reliqui quatuor rectorum, quibus tam ſpatium circa G, quam ſpatium circa H, æquale eſt, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. inter ſe æquales. Quare, vt prius, oſtendemus, baſes A C, D F, triangulorum A G C, D H F, æquales eſſe, ideoque ſegmenta ſimilia A B C, D E F, ob æqualitatem angulorum B, E, ſuper æquales baſes A C, D F, eſſe æqualia, &c.



HINC etiam fit, ſpatia æqualia in centris, inſiſtere arcubus æqualibus. Nam ſi ſpatia in centris G, H, inſiſtentia arcubus maioribus A C, D F, æqualia ſunt; erunt quoque, vt oſtendimus, anguli A G C, D H F, æquales. Igitur, vt in prima parte propoſitionis demonſtratum

stratum est, erunt & arcus A C, D F, maiores & minores A B C, D E F, inter se æquales.

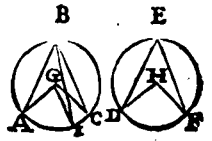
QVOD si dicti anguli fuerint inæquales, maior insistet maiori peripheriæ, quam minor. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, sit angulus A G C, ad centrum maior angulo D H F, ad centrum: Item angulus A B C, ad circumferentiam, maior angulo D E F, ad circumferentiam. Dico peripheriam A C, maiorem esse peripheria D F. Si enim fiat angulus C G I, angulo D H F, & angulus C B I, angulo D E F, æqualis; erunt *vt ostensum est*, *peripheriæ C I, D F, æquales. Ac propterea A C, maior, quam D F.*



PORRO propositio hæc, & tres proximè sequentes intelligenda etiam sunt in eodem circulo. Hoc est. In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripheriis insistunt, &c. Vt ex demonstratione huius propos. & sequentium trium liquido constat. Eadem enim semper demonstratio, qua duobus, pluribusve circulis accommodatur, locum habet in vno eodemque circulo.

THEOR. 24. PROPOS. 27. xxvj.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.



IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, H, insistant primum anguli ad centra A G C, & D H F, æqualibus peripheriis A C, D F. Dico angulos A G C, & D H F, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit angulus G, maior, fiatque angulus A G I, æqualis angulo D H F. [a] Erunt igitur peripheriæ A I, D F, æquales. Cum igitur peripheria A C, æqualis ponatur peripheriæ D F, erunt peripheriæ A I, A C, inter se æquales, pars, & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli A G C, D H F, æquales. [a] 26. 3. 3.

INSISTANT deinde eisdem peripheriis æqualibus A C, D F, anguli B, & E, ad peripherias; quos rursus dico æquales esse. Nam si alter, vt A B C, maior est; fiat angulo E, æqualis angulus A B I, [b] eruntque peripheriæ A I, D F, æquales. Quare, vt prius, erunt peripheriæ A I, A C, æquales, pars & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli A B C, D E F, æquales. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis insistunt, &c. Quod demonstrandum erat. [b] 26. 3. 3.

T SCHO-

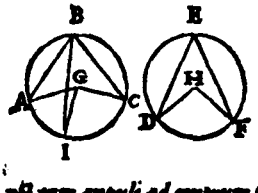
SCHOLIVM.

HÆC secunda pars ita quoque demonstrabitur, quando rectæ A G, C G; D H, F H, in centris angulos constituunt supra bases A C, D F. Quoniam a *anguli A B C, & E, dimidij sunt angulorum A G C, & H, quos iam ostendimus esse æquales; erunt & ipsi inter se æquales.*

a 20. tertij.

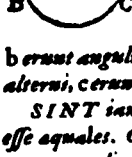
EODEM modo spatia in centris G, H, insistentia arcubus A B C, D E F, æqualibus, æqualia erunt. Nam ablatis æqualibus A B C, D E F, ex circulo æqualibus, reliqui fient æquales arcus A I C, D F; ideoque & ostendimus, anguli A G C, D H F, æquales erunt: quibus ablatis ex spatijs circa centra G, H, quæ æqualia sunt, cum quodlibet sit quatuor rectis æquale, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. reliqua erunt & spatia in centris G, H, insistentia arcubus A B C, D E F, æqualia.

SI verò peripheria fuerint inæquales, insistet maiori maior angulus, siue ad centrum, siue ad circumferentiam, quam minori. In figura enim scholij præcedentis sit peripheria A C, maior, quam peripheria D F. Dico angulum A G C, maiorem esse angulo D H F, & angulum A B C, maiorem angulo D E F. Si enim fiat peripheria C I, æqualis peripheriæ D F, ducanturque rectæ I G, I B, erunt, & ostensum est, tum anguli ad centrum C G I, D H F, quam anguli ad circumferentiam C B I, D E F, æquales. Quare & angulus A G C, angulo D H F, & angulus A B C, angulo D E F, erit maior.



QVOD etiam de spatijs ad centra G, H, insistentibus arcubus A B C, D E F, intelligendum est. Nam eodem modo demonstrabimus spatium ad H, arcui D E F, insistens maius esse spatio ad G, quod arcui A B C, insistit, si arcus D E F, maior ponatur arcu A B C.

EX hac porro propositione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuo non secantes, esse parallelas. Et si sint parallelæ, ab ipsis arcus æquales intercipi. In circulo enim A B C D, rectæ A D, B C, intercipiant arcus æquales A B, D C. Dico A D, B C, esse parallelas. Ductis namque rectis A C, cum arcus A B, D C, ponantur æquales, b *erunt anguli A C B, C A D, ipsis insistentes, æquales; qui cum sint alterni,* c *erunt A D, B C, parallelæ.*



b 27. tertij.

c 27. primi.

SINT iam A D, B C, parallelæ. Dico arcus interceptos A B, D C, esse æquales. Cum enim sint parallelæ A D, B C, d *ducta recta A C; erunt anguli alterni A C B, C A D, æquales;* d *Ac proinde arcus A B, D C, quibus insistunt, æquales erunt.*

d 29. primi.

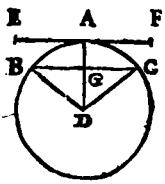
e 26. tertij.

VISVM est quoque hoc loco apponere sequens theorema ad ea quæ sequuntur, non inutile: videlicet.

LINEA

LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela eſt rectæ lineæ, quæ peripheriam illam ſubtendit.

IN circulo A B C, cuius centrum D, ducantur ex A, puncto medio peripheriæ B A C, linea E F, tangens circulum. Dico E F, parallelam eſſe rectæ B C, arcum B A C, ſubtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctum contactus A, recta D A, ſecante rectam B C, in G, connexisque rectis D B, D C, a *erunt anguli A D B, A D C, circumferentiis æqualibus A B, A C, inſiſtentes, æquales: Sunt autem & latera B D, D G, trianguli B D G, lateribus C D, D G, trianguli C D G, æqualia, vtrumque vtrique* b *Igitur & anguli ad G, æquales ſunt ſuper baſes G B, G C, ac propterea recti. Igitur & A G B, A G C, illi deinceps recti ſunt: Sunt autem & anguli G A E, G A F, recti,* c *quòd D A, perpendicularis ſit ad E F.* d *Ergo E F, & B C, parallelæ ſunt. Quod eſt propoſitum.*



a 27. tertij.

b 4. primi.

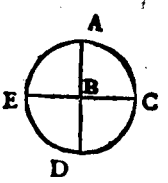
c 18. primi.

d 28. primi.

EX demonſtratis in hac propoſ. & antecedente, colligitur etiam hoc theorema, quod ad initium quoque triangulorum rectilineorum demonſtrauimus.

ANGVLVS rectus in centro inſiſtit quadranti; acutus verò arcui quadrante minori; & obtuſus arcui quadrante maiori. Et contra, angulus in centro quadranti inſiſtens, rectus eſt; inſiſtens verò arcui quadrante minori, acutus; & arcui quadrante maiori, obtuſus.

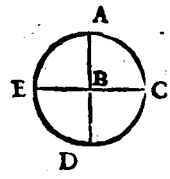
RECTVS angulus A B C, inſiſtat arcui A C, in centro B, circuli A C D E. Dico arcum A C, quadrantem eſſe, &c. Productis enim rectis A B, C B, ad D, E, erunt quoq; anguli A B E, C B D, recto A B C, deinceps, recti, ex defin. 10. lib. 1. nec non & anguli D B E, rectus, e *cum æqualis ſit recto angulo A B C, ad verticem. Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B, æquales ſunt, vtpote recti: ac propterea* f *arcus A C, C D, D E, E A, quibus inſiſtunt, æquales erunt. Quilibet igitur eorum quadrans eſt. Et quoniam recta cum A B, in B, conſtituens angulum acutum, cadit in arcum A C: recta verò cum eadem A B, in B, continens angulum obtuſum, cadit in arcum C D; liquido conſtat, angulum acutum inſiſtere arcui quadrante minori, obtuſum verò maiori.*



e 15. primi.

f 26. tertij.

SED inſiſtat iam quadranti A C, angulus A B C, in centro B. Dico angulum A B C, eſſe rectum, &c. Productis enim rurſum rectis A B,

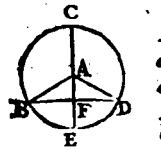


CB, ad D, E; quoniam tam C A E, quam A C D, & A E D, semicirculus est, est q3 A C, quadrans; erit tam A E, quàm C D, quadrans quoque, ac proinde & D E, in semicirculo A E D, quadrans erit: Sunt ergo quatuor arcus A C, C D, D E, E A, æquales, a ac proinde anguli ad centrum B, illis insistentes, æquales erunt. Quare cum omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, erit eorum quilibet rectus. Et quia recta cum A B, auferens minorem arcum quadrante A C, facit in centro B, cum A B, minorem angulum recto angulo A B C; recta verò cum eadem A B, auferens maiorem arcum quadrante A C, constituit in centro B, angulum recto angulo A B C, maiorem; perspicuum est, angulum minori arcui quadrante insistentem, esse acutum; maiori verò, obtusum Quod est propositum.

a 27. ter tij.

PARI ratione & hoc theorema ex demonstratis elicitur, quod in sinubus etiam demonstrauimus.

RECTA linea è centro circuli ducta, secansque aliam rectam non per centrum ductam bifariam, secabit & arcum, cui hæc recta subtenditur, bifariam. Et contra, si secet arcum bifariam, secabit & rectam ei subtensam bifariam.



EX centro A, circuli B C D E, recta egrediens A E, secet rectam B D, bifariam in F. Dico & arcum B E D, in E, sectum esse bifariam, &c. Ductis enim rectis A B, A D; quoniam duo latera A B, A F, duobus lateribus A D, A F, æqualia sunt, vtrumq3 vtrique, basisque B F, basi D F, æqualis positur; b erit angulus B A F, angulo D A F, æqualis. Igitur c arcus B E, arcui D E, æqualis erit. Sectus ergo est arcus B D, in E, bifariam.

b 8. pri.
c 26 ter tij.

SECET iam recta A E, arcum B D, in E, bifariam. Dico rectam quoq3 B D, in F, bifariam esse sectam. Ductis enim rursum rectis A B, A D: quoniam arcus B E, D E, ponuntur æquales; d erunt & anguli B A E, D A E, in centro æquales. Itaq3 quia duo latera A B, A F, duobus lateribus A D, A F, æqualia sunt, vtrumq3 vtriq3 angulosq3 continent æquales, vt ostendimus; e erunt quoq3 bases B F, D F, æquales: ac proinde recta B D, in F, secta est bifariam. Quod erat ostendendum.

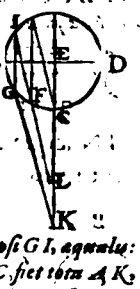
d 27. ter tij.
e 4. pri.

NEQVE verò omittenda hoc loco videtur eximia quædam proprietas circuli, quam Ioannes Baptista Benedictus ex Cardano lib. 16. cap. 1. de subtilitate desumptam demonstrat: Videlicet.

SI in circulo, ductis duabus diametris se se ad angulos rectos secantibus, altera earum producatur, eique ex vna par-

vna parte quotquot parallelæ agãtur diuidentes vtrumque Quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctum proximæ parallelæ recta ducatur conueniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum concursus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis vna cum diametro, quæ producta est, simul sumptis, æqualis.

IN circulo A B C D, secent se ad rectos angulos diametri A C, B D, & A C, producatur versus C, quantumlibet. Diuiso autem Quadrante B C, in quotuis partes æquales C F, F G, G B, & Quadrante B A, in totidem, iungantur rectæ F H, G I, quæ ex scholio huius propos. 27. ipsi A C, parallelæ erunt, cum arcus æquales intercipiant. Ex B, per G, denique extendatur recta B G, occurrens A C, productæ in K. Dico rectam A K, æqualem esse omnibus parallelis A C, H F, I G, simul sumptis. Ductis enim rectis H C, I F, & productis, donec cum A K, conueniant; a quoniam anguli C H F, H F I, æquibus æqualibus C F, H I, insistentes, sunt æquales; b erunt rectæ H C, I L, parallelæ: Est autem & F H, ipsi C L, parallela. Parallelogrammum ergo est C H F L; c ac proinde recta C L, recta F H, æqualis. Eadem ratione erit K L, ipsi G I, æqualis: & sic deinceps, si sint plures. Addita ergo communi A C, fiet tota A K, omnibus A C, H F, I G simul sumptis æqualis. Quod est propositum.



a 27. *ter tij.* b 27 *pri mi.* c 34. *pri mi.*

THEOR. 25. PROPOS. 28. xxvij.

IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, sint rectæ æquales A C, D F. Dico maiorem peripheriam A B C, æqualem esse maiori D E F, & minorem A C, minori D F.

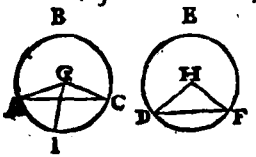


Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F; erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F. Ponuntur autem & bases A C, D F, æquales. Igitur *d* anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ A C, D F, quibus insistunt, *e* æquales erunt; quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquent etiam æquales A B C, D E F. In æqualibus ergo circulis æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

d 8. *pri.* e 26. *ter tij.*

SCHOLIVM.

QVOD si fuerint linea inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorem peripheriam, quam minor, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo. Nam si de segmentis circuli maioribus sermo habeatur, maior linea auferet minorem peripheriam, quam minor. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, sit recta A C, maior, quam D F. Dico peripheriam A C, semicirculo minorem, maiorem esse peripheria D F: At peripheriam A B C, minorem peripheria D E F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F. Ponitur autem basis A C, maior basi D F. Igitur a angulus A G C, maior erit angulo D H F. Fiat angulus C G I, angulo D H F, æqualis; eritque propterea b peripheria C I, peripheriæ D F, æqualis; Ac proinde peripheria A I C, maior, quam peripheria D F. Idemque reliqua A B C, minor, quam reliqua D E F.



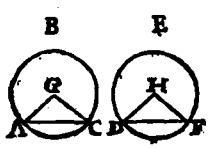
a 25. primi.

b 26. tertij.

xxviij.

THEOR. 26. PROPOS. 29.

IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.



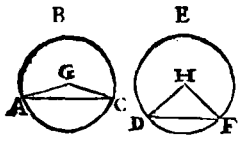
IN circulis eisdem æqualibus ponantur æquales peripheriæ A B C, D E F; Item A C, & D F. Dico rectas A C, D F, quæ eas subtendunt, esse æquales. Ductis enim lineis, vt prius, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F: Sunt autem & anguli G, H, æquales, quod æqualibus peripheriis A C, D F, insistant. Igitur d bases A C, D F, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

c 27. tertij.

d 4. primi.

SCHOLIVM.

SI autem fuerint peripheria inæquales, subtendet maiorem maior linea, quam minorem, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmentis maioribus semicirculo loquamur, subtendet maiorem minor linea, quam minorem. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, sint peripheria semicirculo minores A C, D F; sitque A C, maior, quam D F; Ac proinde A B C, minor quam D E F. Dico lineam A C, maiorem esse, quam D F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F,



D H, H F; erit angulus A G C, maior angulo D H F, ex ſcholio propoſ. 27. huius lib. Cum igitur latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia ſint lateribus D H, H F, trianguli D H F, a erit baſis A C, a 4. pri. maior baſi D F, &c.

S V N T autem proximè antecedentes quatuor propoſitiones 26. 27. 28. & 29. intelligenda etiam in eodem circulo, vt in ſcholio propoſ. 26. monuimus, quemadmodum conſtat ex demonſtrationibus additis. Eadem enim locum habent in vno eodemq; circulo.

I T A Q V E eadem quatuor propoſitiones magis vniuerſales fient, ſi ita proponantur.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

IN æqualibus circulis, vel eodem, anguli qui æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſunt inter ſe æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

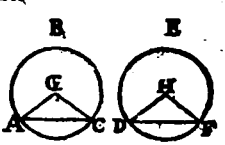
IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales peripherias æquales rectæ lineæ ſubtendunt.

S E D & ſequentes propoſitiones demonſtrare, non fuerit inutile.

I.

CIRCVLI, è quibus æquales rectæ lineæ auferunt ſimiles circumferentias, æquales ſunt.



E X circulis A B C, D E F, rectæ lineæ æquales A C, D F, abſcindant ſimiles circumferentias A B C, D E F. Dico circulos ipſos æquales eſſe. Nam ſi ſegmenta A B C, D E F, ſimilia ſunt, erunt & reliqua ſegmenta A C, D F, ſimilia, vt ad propoſ. 22. demonſtrauimus. Rurſus quia ſuper rectas æquales A C, D F, conſtituta ſunt ſimilia ſegmenta A B C, D E F, b ipſa inter ſe æqualia erunt. Eadem ratione b 24. def. iij. *æqualia erunt ſegmenta A C, D F, quæ ſimilia ſunt demonſtrata. Toti ergo circuli æquales erunt. Simili modo, ſi rectæ æquales A C, D F, detrahantur auferre ſimiles circumferentias A C, D F, erunt ex iij. quæ ad propoſ. 22. demonſtrauimus, & ſegmenta A B C, D E F, ſimilia.* c *Tam ergo illa, quam hæc inter ſe æqualia erunt: ac proinde &* c 24. def. iij. *toti circuli æquales erunt inter ſe. Quod eſt propoſitum.*

II.

EX circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circumferentias dissimiles auferunt.

IN eadem figura ponantur rectæ A C, D F, æquales, at circuli A B C, D E F, inæquales. Dico circumferentias A B C, D E F, dissimiles esse. Si enim similes essent, circuli ipsi, & proximè demonstrauimus, essent æquales. Quod pugnat cum hypothesi. Dissimiles ergo sunt circumferentia A B C, D E F. Eadem ratione circumferentiæ A C, D F, erunt dissimiles. Quod erat ostendendum.

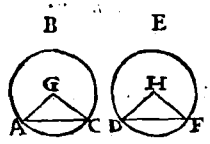
III.

EX circulis inæqualibus lineæ rectæ, quæ circumferentias similes auferunt, inæquales sunt.

IN eadem figura ponantur circuli inæquales, at circumferentia A B C, D E F, similes. Dico rectas A C, D F, inæquales esse. Si enim dicantur esse æquales, erunt, ex primo theoremate, circuli æquales, quod est absurdum, cum ponantur inæquales. Sunt ergo rectæ A C, D F, inæquales. Eodem modo, si similes dicantur circumferentiæ A C, D F, demonstrabitur, rectas lineas A C, D F, inæquales esse.

IV.

RECTÆ lineæ, quæ ex quibuscunque circulis circumferentias similes inæquales auferũt, inæquales sunt.



IN eadem figura ponantur circumferentia A B C, D E F, similes & inæquales. Dico rectas A C, D F, inæquales esse. Aut enim circuli æquales sunt, vel inæquales. Sint primum æquales. Si ergo recta A C, D E, dicantur æquales, a 28. ter 3. *erunt circumferentiæ A B C, D E F, ablatæ æquales, quod est contra hypothesin. Non ergo æquales sunt rectæ A C, D F. Sint deinde circuli inæquales. Igitur rectæ A C, D F, auferentes circumferentias A B C, D E F similes, inæquales sunt, vt in tertio theoremate demonstratum est. Non aliter ostendemus, rectas A C, D F, inæquales esse, si circumferentiæ A C, D F, ponantur similes, & inæquales.*

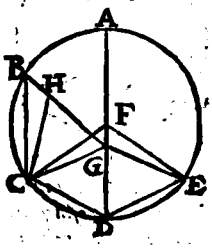
V.

SI in diametro circuli præter centrum punctum sumatur, ab eoque in peripheriam duæ rectæ non in easdem partes cadentes efficiant ad diametrum angulos æquales, rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abscindent æquales. Et si lineæ sint æquales, constituent rectæ illæ ad

illæ ad diametrum angulos æquales, abſcindentq; æquales arcus. Si denique arcus æquales abſcindant, erunt rectæ illæ æquales, conſtituentq; ad diametrum angulos æquales.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, ſumatur in diametro AD, punctum G, præter centrum, conſtituantur q; primùm duo anguli æquales CGD, EGD. Dico tam rectas GC, GE, quàm arcus CD, ED, æquales eſſe. Quoniam enim a tam duo anguli CGD, CGF, quàm duo EGD, EGF, duobus rectis æquales ſunt, ſi demantur æquales CGD, EGD; erunt & reliqui CGF, EGF, æquales. Ductis igitur rectis CF, EF, ad centrum, erunt duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia, angulique FGC, FGE, æqualibus lateribus oppoſitis æquales. Cùm ergo reliquorum angulorum FCG, FEG, uterque ſit recto minor; (Ducta enim recta CD, erit angulus FCD, in iſoſcele FCD, acutus; ex 3. coroll. propoſ. 17. lib. 1. ac propterea à ſortiori FCG, acutus erit. Eodemq; modo, ducta recta DE, angulus FEG, acutus erit,) erit ex ijs, quæ ad finem lib. 1. demonſtrauimus, baſis GC, baſi GE, æqualis, & angulus CFG, angulo EFG; b ac proinde arcus CD, ED, æquales erunt. Conſtat ergo propoſitum.

a 13. primi.



b 26 tertij.

DEINDE ſint linea GC, GE, æquales. Dico & angulos CGD, EGD, æquales eſſe, & arcus CD, ED. Si enim linea GC, GE, ſunt æquales, erunt duo latera GC, GF, æqualia duobus lateribus GE, GF: Eſt autem & baſis FC, baſi FE, æqualis. c Igitur anguli FGC, FGE, æquales erunt, ac proinde & ex duobus rectis reliqui CGD, EGD, erunt æquales. Rurſus quia duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia ſunt, baſeſq; æquales ponuntur GC, GE; d erunt & anguli CFD, EFD, æquales, e atq; idcirco & arcus CD, ED, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.

c 8. primi.

d 8. primi.

e 26. tertij.

TERTIO ſint arcus CD, ED, æquales. Dico & lineas GC, GE, & angulos CGD, EGD, eſſe æquales. Si enim arcus CD, ED, æquales ſunt, f erunt & anguli CFD, EFD, æquales. Quare cùm duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, ſint æqualia, angulosq; æquales contineant; g erunt & baſes GC, GE, æquales, & anguli FGC, FGE; ac proinde ex duobus rectis reliqui CGD, EGD. Quæ omnia demonſtranda erant.

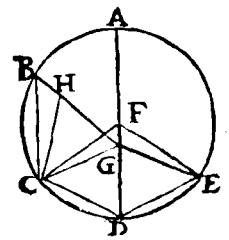
f 27. tertij.

g 4. primi.

HOC tamen theoremate multò vniuerſalius eſt Lemma 21. lib. 1. noſtri Aſtrolabij.

V.

SI in diametro circuli præter centrum ſumatur punctum quodpiam, in quo ad eaſdem partes duo anguli æquales conſtituantur, inſiſtent hi anguli æquales arcubus inæqualibus, maiorque erit ille, qui à maiori portione diametri remotior eſt.



IN eadem figura proximæ ſint anguli æquales C G D, *duo* C G B. *Dico arcum* B C, *arcu* C D, *maiorem eſſe. Ductis enim rectis* B C, C D, a *quoniam recta* G B, *maior eſt, quàm recta* G D, *abſcindatur* G H, *ipſi* G D, *æqualis, iungaturq; recta* C H. *Quia igitur duo latera* G H, G C, *duobus lateribus* G D, G C, *æqualia ſunt, angulosq; continent æquales;* b *erunt & baſes* C H, C D, *æquales, & angulus* G H C, *angulo* G D C, *æqualis. Eſt autem* G D C, *in iſoſcele* F C D, *acutus, ex* 5. *coroll. propoſ.* 17. *lib.* 1. *Igitur & G H C, acutus erit; ac proinde ex duobus rectis reliquus* C H B, *obtuſus erit. Cùm ergo* c *duo anguli* C H B, C B H, *ſint duobus rectis minores, erit* C B H, *acutus. Quare* d *latus* B C, *latere* C H, *maius erit. Eſt autem* C H, *recta oſtenſa ipſi* C D, *æqualis. Igitur recta* B C, *maior quoq; erit quàm* C D; *ac propterea ex ſcholio propoſ.* 28. *huius lib. arcus* B C, *arcu* C D, *maior erit. Quod erat oſtendendum.*

a 7. *tertij.*

b 4. *primi.*

c 17. *primi.*

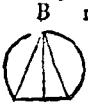
d 19. *primi.*

xxix.

PROBL. 4. PROPOS. 30.

DATAM peripheriam bifariam ſecare.

SIT peripheria A B C, ſecanda bifariam. Ducatur recta ſubtendens A C, qua diuiſa bifariam in D, erigatur perpendicularis D B, quæ peripheriam A B C, bifariam ſecabit in B. Ductis enim rectis A B, C B, erunt latera A D, D B, trianguli A D B, æqualia lateribus C D, D B, trianguli C D B: Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti. Igitur *e* & baſes A B, C B, æquales erunt; Ac propterea *f* peripheriæ A B, C B, A D C erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam ſecuimus. Quod erat faciendum.



e 4. *primi.*

f 28. *tertij.*

PRAXIS.

NON differt praxis diuidendi datum peripheriam bifariam à praxi diuidendi rectam lineam bifariam, quam ad propoſ. 10 *lib.* 1. *tradidimus. Si namq; quicunq; arcum proponatur, & A B C, intelligenda ſemper eſt recta linea eum ſubtendens A C, etiamſi ducta non ſit; atq; ex punctis A, & C, deſcribendi arcus eodem interuallo ſe mu-*

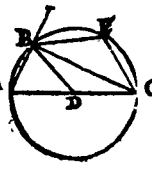
tuò

tuò interſecantes ſupra & infra puncta A, & C, &c. non ſecus, ac ſi dicta recta A C, ſecanda eſſet bifariam. Recta enim dimidens rectam A C, bifariam, ſecabit quoq; arcum datum bifariam.

THEOR. 27. PROPOS. 31. xxx.

IN circulo angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in maiore ſegmento, minor recto: qui verò in minore ſegmento, maior eſt recto. Et inſuper angulus maioris ſegmenti, recto quidem maior eſt: minoris autem ſegmenti angulus, minor eſt recto.

CIRCVLI enim A B C, cuius centrum D, diameter ſit A C, conſtituaturq; in ſemicirculo angulus A B C, exiſterq; angulus B A C, in maiori ſegmento C A B. Conſtituatur quoq; in C E B, minori ſegmento angulus B E C. Dico angulum A B C, in ſemicirculo rectum eſſe; angulum verò B A C, in maiore ſegmento, minorem recto; & angulum B E C, in minori ſegmento, maiorem recto. Item angulum maioris ſegmenti comprehenſum recta B C, & peripheria B A C, eſſe recto maiorem. At angulum minoris ſegmenti comprehenſum recta B C, & peripheria B E C, recto minorem. Ducatur enim recta B D, ad centrum, & extendatur A B, in F. Quoniam igitur rectæ D A, D B, æquales ſunt, *a* erit angulus D B A, angulo D A B, æqualis. Eadem ratione erit angulus D B C, angulo D C B, æqualis, ideoq; totus angulus A B C, duobus angulis B A C, B C A, æqualis erit. *b* Eſt autem & angulus F B C, externus eiſdem duobus internis angulis B A C, B C A, in triangulo A B C, æqualis. Quare æquales erunt inter ſe anguli A B C, F B C; ac propterea vterque rectus. Rectus igitur eſt angulus A B C; quod eſt primum.



a 5. primi.

b 32. primi.

QVONIAM verò in triangulo A B C, *c* duo anguli A B C, & B A C, ſunt duobus rectis minores; Et eſt angulus A B C, oſtenſus rectus: Erit angulus B A C, in ſegmento maiori, recto minor; quod eſt ſecundum.

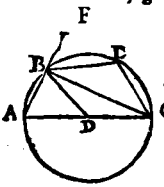
c 17. primi.

RVRSVS quia in quadrilatero A B E C, intra circulum deſcripto, *d* duo anguli oppoſiti B A C, & B E C, ſunt duobus rectis æquales; Et angulus B A C, oſtenſus eſt recto minor: Erit B E C, angulus in ſegmento minore, recto maior; quod eſt tertium.

d 22. primi.

SATIS autem eſt, demonſtraſſe, Vnum angulum in ſemicirculo, nempe A B C, rectum eſſe: & in maiori ſegmento, qualis eſt B A C, recto minorem: ac denique in ſegmento minori, cuiuſmodi eſt B E C, maiorem recto. Cùm enim omnes anguli in eodem ſegmento ſint inter ſe æquales, perſpicuum eſt, ſi vnus angulus in ſemicirculo rectus ſit, omnes vn eodem ſemicirculo eſſe rectos: Et ſi in maiore ſegmen-

segmento vnus sit recto minor, omnes in eodem segmento esse recto minores: Et si denique in minore segmento vnus sit maior recto, omnes in eodem segmento maiores esse recto. Hoc idcirco dixerim: quia

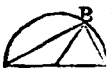


Euclides non probat absolutè, quemcunq; angulum in segmento maiore B A C, esse recto minorem, & constat, si alius angulus in eo segmento constitueretur; cum is non contineretur à diametro, quemadmodum angulus B A C. Quare quicunque alius ostendetur esse etiam recto minor, quia æqualis est angulo B A C, in eodem segmento maiore, qui recto minor est ostensus ab Euclide.

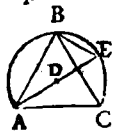
AMPLIVS cùm angulus rectus A B C, pars sit anguli segmenti maioris B A C, qui comprehenditur recta B C, & peripheria B A C; erit angulus segmenti maioris, recto maior, quod est quartum.

POSTREMO, cùm angulus segmenti minoris, comprehensus recta B C, & peripheria B E C, pars sit quoque anguli recti F B C; Erit angulus segmenti minoris recto minor; quod est quintum. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est, &c. Quod erat demonstrandum.

ALIA demonstratio huius propositionis. In semicirculo, cuius diameter A C, & centrum D, sit angulus A B C, quem dico esse rectum. Ducta enim recta B D, *b* erunt anguli D B A, D A B, æquales, quòd rectæ D A, D B, æquales sint. Cùm igitur angulus B D C, exterus *c* æqualis sit duobus angulis internis D B A, D A B, in triangulo A B D; Erit angulus B D C, duplus anguli D B A. Eodem modo erit angulus A D B, duplus anguli D B C, atque adeò duo anguli ad D, dupli erunt totius anguli A B C. Cùm igitur *d* anguli ad D, sint duobus rectis æquales; erit angulus A B C, eorum dimidium, rectus: quod est primum.



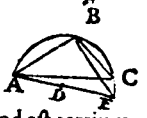
Vel sic. Quoniam *e* angulus D A B, angulo D B A, & angulus D C B, angulo D B C, æqualis est; erunt duo anguli A, C, angulo A B C, æquales in triangulo A B C: ac proinde angulus A B C, dimidium erit trium angulorum A, C, & A B C, eiusdem trianguli. Quocirca *f* cùm tres anguli in triangulo A B C, sint æquales duobus rectis; erit A B C, dimidium duorum rectorum, atq; idcirco rectus.



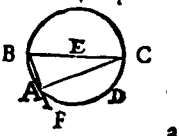
SIT rursus in segmento maiori, cuius centrum D, angulus A B C, quem dico esse recto minorem. Ducta enim diametro A E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in semicirculo rectus, vt demõstratum est. Quare angulus A B C, pars recti, recto minor erit: quod est secundum: Atq; hæc demonstratio in omnem

innem angulum in minori ſegmento quadrat: quod de ſuperiori demonſtratione dici non poterat, vt ibidem monuimus.

SIT iterum in ſegmento minori, cuius centrum D, angulus A B C, quem dico eſſe recto maiorẽ. Ducta enim diametro A E, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in ſemicirculo rectus, vt demonſtratũ eſt; qui cùm ſit pars anguli A B C, erit angulus A B C, recto maior: quod eſt tertium.



IAM verò proponatur ſegmentum maius A B C, & ſegmentum minus A D C, quorum centrum E. Dico angulum C A B, ſegmenti maioris, qui videlicet conſtituitur à recta C A, & peripheria A B C, eſſe recto maiorem; At angulũ C A D, ſegmenti minoris, qui fit à recta eadem C A, & peripheria A D C, recto minorem. Ducta enim diametro C B, & recta B A F, cadet eius ſegmentum B A, duo puncta B, A, coniungens, a intra circulum, reliqua verò pars A F, extra circulum; eritq; angulus B A C, in ſemicirculo rectus, atque adeò et deinceps F A C, rectus quoq;. Cùm igitur angulus rectilineus rectus B A C; ſit pars anguli C A B, ſegmenti maioris, qui nimirũ ſub recta C A, & peripheria A B C, continetur, & angulus C A D, ſegmenti minoris, contentus videlicet ſub recta C A, & peripheria A D C, pars quoque anguli recti F A C; conſtat vtrumque.



a 2. tertij.

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, quòd angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis exiſtit, rectus eſt: eo quòd illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eiſdem ſit æqualis. Quod quidem conſtat ex priore demonſtratione. Vel eo quod dimidium ſit trium angulorum trianguli, qui duobus rectis æquiualent. Quod ex poſteriore demonſtratione manifeſtum eſt.

EX CAMPANO.

EX hac propoſitione perſpicuum quoque eſt, non ualere duas illas argumentationes, quas impugnauimus ad propoſ. 16. huius lib. quarum una eſt.

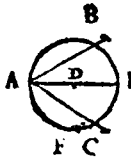
TRANSITVR à maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

ALTERA verò eſt eiuſmodi.

CONTINGIT reperire maius, & minus eodem; Igitur continget reperire æquale.

IN circulo enim A B C, cuius centrum D, & diameter A E, ducatur recta A B, b *Erit angulus A B E ſegmenti maioris, recto maior. Quare ſi A B, moueatur uerſus A E, circa A, punctum fixum,* b 31. tertij.

faciet



faciet semper cum peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum A E, perueneris, a Ꝟbi *facit angulum semicirculi, recto minorem. Quod si* Ꝟlterius *moueatur ad A C,* b *faciet à fortiori angulum A C F, segmenti minoris, recto minorem. Transitur ergo ab angulo segmenti maioris, qui recto maior est, ad angulum semicirculi, vel etiam segmenti minoris, quorum* Ꝟterque *recto minor est, non tamen per angulum recto aqualem. Cùm igitur per omnes medios angulos fiat transitus, perspicuum est, vtiosas esse praditas consequentias.*

2 16. ter 19.
b 31. ter 33.

SCHOLIVM.

MANIFESTVM quoq; est conuersum huius theorematis: hoc est.

SEGMENTVM circuli, in quo angulus constitutus est rectus, est semicirculus: in quo verò angulus est acutus, est segmentum maius: & in quo angulus est obtusus, est segmentum minus. Et segmentum, cuius angulus recto est maior, est semicirculo maius; cuius verò angulus est recto minor, est vel semicirculus, vel semicirculo minus.

NAM angulo existente recto, si segmentum non sit semicirculus, erit vel maius, & sic angulus erit acutus; Ꝟel *minus, & sic angulus in eo obtusus erit: quorum* Ꝟtrumque *pugnat cum hypothesi. Rursus angulo existente acuto, si segmentum non sit semicirculo maius, erit vel semicirculus, & sic angulus in eo erit rectus;* Ꝟel *minus, & sic angulus in eo erit obtusus: quorum* Ꝟtrumque *cum hypothesi etiam pugnat. Denique angulo existente obtuso, si segmentum non sit minus semicirculo, erit vel semicirculus, atque ita angulus in eo rectus erit;* Ꝟel *maius, atq; ita angulus in eo acutus erit: quod similiter hypothesi contrarium est. Praterea, quando segmenti angulus est recto maior, si segmentum non sit maius semicirculo, erit vel semicirculus vel semicirculo minus, & sic eius angulus recto erit minor, quod non ponitur. At quando anguius segmenti est recto minor, si segmentum non sit semicirculus, aut semicirculo minus, erit maius, atque ita eius angulus recto quoq; maior erit. quod hypothesi aduersatur.*

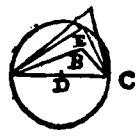
QVIN & hoc theorema Ꝟerum *est; scilicet.*

SI angulo recto linea recta subtensa, hoc est, si in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, bifariã secetur, & ex puncto diuisionis circa illam rectam, vel latus, circulus describatur, transibit necessariò circulus ille per angulum rectum.

ANGVLO enim recto A B C, subtensa recta A C, Ꝟel *in trian-*

gulo

gulo rectangulo A B C, latus A C, recto angulo B, oppositum bifariam secetur in D, puncto, ex quo ad intervallum D A, vel D C, circulus describatur A E C, quem dico transire per B. Si enim transeat citra B, vel vltra; ductæ rectæ A E, C E, ita vt rectas A B, A C, non secent, sed vel intra eas cadant, vel extra; a erit angulus A E C, rectum quoq;. Quare anguli recti B, & E, æquales erunt; quod est absurdum: cùm angulus E, sit necessariò, b vel maior, vel minor angulo B. Transit igitur circulus per punctum E: quod est propositum.

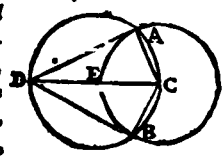


a 31. 1. tij.

b 21. primi.

EX ijs, quæ in priore parte huius propos. demonstrata sunt, nullo negotio ex puncto extra circulum dato ducemus duas rectas ad vtram que partem recta ex eodem puncto per centrum circuli ducta, quæ circulum tangant. Id quod ad propos. 17. huius lib. polliciti sumus.

SIT enim circulus A B, cuius centrum C, & punctum D, extra ipsum. Ducta recta D C, ex dato puncto ad centrum, eaq; diuisa bifariam in E, describatur ex E, ad intervallum E C, vel E D, circulus A C B D, secans datum circulum in punctis A, B, iungaturq; recta D A, D B. Dico vtramq; circulum tangere in A, & B. Ductis enim rectis A C, B C, c erit vterq; angulus A, & B, in semicirculo rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. recta D A, circulum A B, tanget in A; & recta D B, eundem tanget in B: quandoquidem tam illa perpendicularis est ad extremitatem semidiametri A C, quàm hæc ad extremitatem semidiametri C B.

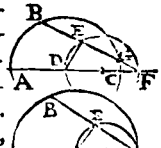


c 31. tij.

SED & hoc theorema non inuncundum ex Pappo Alexandrino demonstrabimus hoc loco.

SI per centrum circuli alius circulus describatur, & per vtriusque circuli centrum recta eijciatur, à puncto verò, vbi hæc recta à posteriori circulo secatur, ducatur recta vtcunq;: secabitur eius portio intra priorem circulum à circumferentia posterioris bifariam.

SIT circulus A B C, per cuius centrum D, describatur alius circulus D E F, & per horum circulorum centra ducatur recta A F; ac deniq; ex puncto F, vbi circulus D E F, rectam A F, intersecat, ducatur recta F B, secans circumferentias in B, E, G. Dico B E, G E, esse æquales. Ducta enim recta D E, d erit angulus D E F, in semicirculo D E F, rectus. Igitur e recta D E, rectam B G, secat bifariam.



d 31. tertij.

e 3. tertij.

QVOD si posterior circulus transeat per punctũ C, vt in 2a figura; erit f rursum angulus D E C, in semi-

f 31. tertij.

semicirculus D E C, rectus; ac a propterea B C, in E, secabitur bifariam.

Si denique posterior circulus totus sit intra priorem, & in tertia figura, erit iterum b angulus D E F, in semicirculo D E F, rectus. Quare c recta D E, rectam B G, bifariam secabit. Quod erat ostendendum.

FACILE etiam aliud hoc theorema demonstrabitur.

QVADRILATERVM in circulo descriptum, cuius duo latera opposita sunt parallela, & æqualia, parallelogrammum est rectangulum, hoc est, vel quadratum, vel altera parte longius.



IN circulo A B C D, descriptum sit quadrilaterum A B C D, cuius duo opposita latera A D, B C, parallela sint, & æqualia. Dico, sum esse parallelogrammum, & rectangulum. Cum enim recta A D, B C, parallela sint, & æquales, d erunt quoque A B, D C, parallelæ, & æquales. Parallelogrammum ergo est A B C D. Quia verò e & arcus A D, arcui B C, ob rectas æquales A D, B C, & arcus A B, arcui D C, ob æquales rectas A B, D C, æquales; erit totus arcus B A D, totis arcui B C D, & totam arcus A D C, toti arcui A B C, æqualis; ac proinde, ductis rectis B D, A C, f semicirculi erunt B A D, B C D, A D C, A B C. Quare f anguli quadrilateri recti erunt. Quod est propositum.

d 33 primi

e 28. tertij

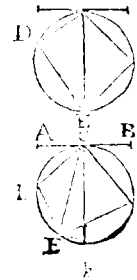
f 31 tertij

THEOR. 28. PROPOS. 32.

xxxj.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

TANGAT recta A B, circulum C D E, in C, puncto, à quo ducatur recta C E, diuidens circulum in duo segmenta, in quibus fiant anguli C G E, C D E. Dico angulum A C E, æqualem esse angulo C G E, in alterno segmento; & angulum B C E, angulo C D E, in alterno quoque segmento. Transeat enim primum, vt in priore figura, recta C E, per centrũ.



g Erit igitur vterque angulus A C E B C E, rectus: *h* Sunt autem & anguli C G E, C D E, in semicirculis recti. Igitur angulus A C E, angulo C G E; & angulus B C E, angulo C D E, æqualis est.

g 31 tertij

h 31 tertij

NON

NON transeat iam CE, recta per centrum, vt in figura posteriore. Ducta igitur recta CF, per centrum, connectatur recta EF: *a* eritque CF, perpendicularis ad AB, *b* & angulus CEF, rectus; ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, æquales erunt vni recto, vt angulo recto ACF. Dempto ergo communi angulo ECF, erit reliquus ACE, reliquo CFE, æqualis: *c* Est autem angulo CFE, æqualis quoque angulus CGE, cùm vterq; sit in segmento CGE. Quare angulus ACE, angulo CGE, æqualis erit. Quoniam verò in quadrilatero CDEG, duo *d* anguli CDE, CGE, duobus sunt rectis æquales: *e* Sunt autem & duo anguli ACE, BCE, duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli ACE, CGE, remanebit angulus BCE, angulo CDE, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem, &c. Quod erat ostendendum.

a 18. *ter* *tij.* b 31. *ter* *tij.* c 21. *ter* *tij.* d 22. *ter* *tij.* e 13. *pri* *mi.*

SCHOLIVM.

POTEST theorema hoc conuerti hoc modo.

SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

IN eadem figura priore transeat primùm recta CE, per centrum, secans circulum CDE, & ducatur recta AB, per C, faciens angulum ACE, æqualem angulo CGE. Dico AB, tangere circulum. Quoniam f angulus CGE, rectus est, erit & angulus ACE, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. AB, circulum tanget. Iam verò CE, non transeat per centrum, construatur q; figura posterior, vt supra. Quoniam igitur angulus ACE, æqualis ponitur angulo CGE, in alterno segmento maiore, g & hic est æqualis angulo CFE; erit & angulus ACE, æqualis angulo CFE. Addito ergo communi angulo ECF, erit angulus ACF, æqualis duobus angulis EFC, ECF: Atqui anguli EFC, ECF, æquales sunt vni recto; quod h angulus CEF, rectus sit in semicirculo, & tres anguli in triangulo CEF, æquales i sint duobus rectis. Angulus igitur ACF, rectus quoq; erit; ideoq; per coroll. propos. 16. huius lib. AB, circulum tanget.

f 31. *tert.* *tij.* g 21. *tert* *tij.* h 31. *ter* *tij.* i 32. *pri* *mi.*

EODEM modo, si angulus BCE, æqualis fuerit angulo CDE, in alterno segmento minori, ostendetur recta AB, tangere circulum. Cùm enim k anguli BCE, ACE, duobus sint rectis æquales; Item duo l anguli CDE, CGE, duobus rectis æquales; si demantur æquales BCE, CDE, remanebunt anguli ACE, CGE, æquales. Quare, vt demonstratum iam est, recta AB, circulum tanget.

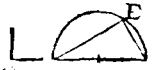
k 13. *pri* *mi.* l 22. *ter* *tij.*

PROBL. 5. PROPOS. 33. xxxij.

SVPER data recta linea describere segmentum cir-

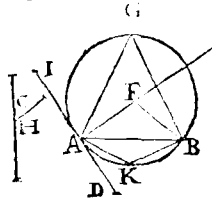
culi, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

RECTA data sit AB, & datus angulus primum rectus C. Oportet igitur super AB, segmentum describere, in quo angulus existens sit æqualis angulo recto dato C. Diuisa AB, bifariam in D, describatur centro D, interuallo autem DA, vel DB,



a 31. ter 1. semicirculus AEB; factumq; erit, quod proponitur. Nam a angulus AEB, in descripto semicirculo rectus est, ideoque æqualis angulo C, recto.

SIT deinde angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus DAB, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad DA, perpendicularis AE, quæ cadet supra AB. Fiat deinde angulo FAB, æqualis angulus FBA, fecetq; BF, rectam AE, in F. b Erunt igitur rectæ FA, FB, æquales. Quare si centro F, & interuallo FA, circulus describatur AGB, transibit is per B. Dico igitur angulum in segmento AGB, quod descriptum est super AB, esse æqualem angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento AGB. Quia igitur AE, per centrum F, transit, & ei perpendicularis est DA, tanget DA, recta circulum in A, per coroll. c 32. ter 3. propos. 16. huius lib. Quapropter c angulus DAB, hoc est, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in segmento alterno AGB.



b 6. primi.

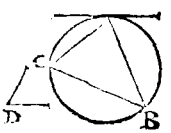
SIT tertio angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo H, æqualis angulus IAB, & agatur ad IA, perpendicularis AE, quæ supra AB, cadet. Reliqua omnia fiant, vt prius, describatumq; erit super AB, segmentum AKB, in quo angulus K, æqualis est angulo dato obtuso H. Nã angulus IAB, hoc est, angulus datus H, æqualis d est angulo K, in alterno segmento AKB. Eadem enim est demonstratio. Itaque super data recta linea descripsimus segmentum, &c. Quod efficiendum erat.

d 32. ter 3.

xxxiij. PROBL. 6. PROPOS. 34.

A DATO circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

DATVS circulus sit ABC, à quo auferre oporteat segmentum, in quo angulus existens æqualis sit dato angulo D. e Ducatur recta EF, tangens circulum in A. Fiat deinde angulus FAB, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulum ACB, in segmento ablato ACB,



e 17. ter 3.

A C B, æqualem esse dato angulo D. Est enim *a* angulus F A B, æqualis angulo C, in alterno segmento A C B. Cùm ergo angulo dato D, factus sit æqualis angulus F A B, erit quoque angulus C, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abscindimus segmentum A C B, &c. Quod erat faciendum. *a* 32. tij.

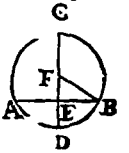
THEOR. 29. PROPOS. 35.

SI in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuò secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis vnius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo. xxxiv.

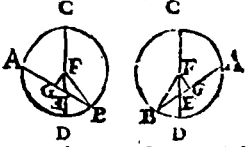
IN circulo A C B D, secent se mutuò rectæ A B, C D, in E. Dico rectangulum comprehensum sub segmentis A E, E B, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis C E, E D. Aut enim vtraque linea transit per centrum, aut vna tantùm, aut neutra. Transeat primùm vtraq; per centrum. Quoniã igitur omnia quatuor segmenta inter se æqualia sunt, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub duobus vnius lineæ æquale esse ei, quod sub duobus alterius lineæ comprehenditur, rectangulo, ex ijs, quæ ad initium lib. 2. scripsimus.

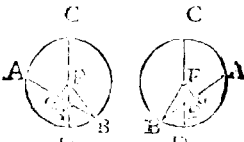


TRANSEAT deinde C D, sola per centrum F, diuidatque primùm rectam A B, bifariam, *b* ac propterea ad angulos rectos, coniungaturq; recta B F. Quoniam igitur C D, diuisa est per æqualia in F, & per inæqualia in E, *c* erit rectangulum sub C E, E D, vnà cum quadrato rectæ E F, æquale quadrato rectæ F D, ideoq; quadrato rectæ F B, cùm rectæ F D, F B, sint æquales: Est autẽ quadratum rectæ F B, *d* æquale quadratis rectarum F E, E B. Igitur rectangulum sub C E, E D, vnà cum quadrato rectæ E F, æquale quoq; erit quadratis rectarũ F E, E B. Quare ablato communi quadrato rectæ F E, remanebit rectangulum sub C E, E D, æquale quadrato rectæ E B, hoc est, rectangulo sub A E, E B, cùm A E, E B, rectæ sint æquales: ac proinde rectangulum sub eis comprehensum, sit quadratum, ex ijs, quæ ad defin. 1. lib. 2. scripsimus. b 3. tertij. c 5. secundi. d 47. primi.



DIVIDAT iam C D, transiens per centrum rectam A B, non bifariam. Secetur ergo A B, bifariam in G, ducanturq; rectæ F G, F B, *e* eritq; F G, perpendicularis ad A B. Quoniam verò rectangulum sub C E, E D, vnà cum quadrato rectæ F E, æquale *f* est quadrato rectæ F D, hoc est, quadrato rectæ F B: Est autem quadratum rectæ F E, *g* æquale quadratis rectarum F G, G E, e 1. tertij. f 5. secundi. g 47. primi.

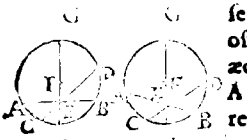




FG, GE, & quadratũ rectæ FB, æquale quadratis rectarũ FG, GB; erit quoque rectangulum ſub CE, ED, vna cũ quadratis rectarum FG, GE, æquale quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo communi quadrato rectæ FG, remanebit rectangulum ſub CE, ED, vna cum quadrato rectæ GE, æquale quadrato rectæ GB. Atqui etiam rectangulum ſub AE, EB, vna cum quadrato rectæ GE, æquale eſt eidem quadrato rectæ GB. Proptera quòd recta AB, ſecta eſt bifariam in G, & non bifariam in E, igitur rectangulum ſub CE, ED, vna cum quadrato rectæ GE, æquale eſt rectangulo ſub AE, EB, vnà cum quadrato eiuſdem rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum ſub CE, ED, æquale rectangulo ſub AE, EB. quod eſt propoſitum.

a *ſecta AB, EB, vna cum quadrato rectæ GE, æquale eſt eidem quadrato rectæ GB. Proptera quòd recta AB, ſecta eſt bifariam in G, & non bifariam in E, igitur rectangulum ſub CE, ED, vna cum quadrato rectæ GE, æquale eſt rectangulo ſub AE, EB, vnà cum quadrato eiuſdem rectæ GE.*

TERTIO neutra per centrum tranſeat, ſiue vna illarum bifariam diuidatur ſiue neutra. Ducatur per centrum F, & punctũ ſectionis E, recta GH. Quoniam itaque oſtenſum eſt, rectangulum ſub AE, EB, æquale eſſe rectangulo ſub GE, EH, ſiue AB, diuidatur bifariam, ſiue non: Item rectangulũ ſub CE, ED, æquale eſſe quoque eidem rectangulo ſub GE, EH, ſiue CD, recta ſit bifariam ſiue non; Erit rectangulum ſub AE, EB, æquale rectangulo ſub CE, ED. quod eſt propoſitum. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecent, &c. Quod demonſtrandum erat.



SCHOLIVM.

CONVERTI poterit theorema iſtud hoc modo.

SI duæ rectæ ita ſe ſecent, vt rectangulum ſub vnius ſegmentis comprehenſum, æquale ſit ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur, rectangulo; deſcribi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc eſt, circulus per quælibet tria puncta earum extrema deſcriptus, per quartum quoq; punctum tranſibit.

SECENTES inuicem rectæ AB, CD, in E, ſitq; rectangulum ſub AE, EB, æquale rectangulo ſub CE, ED. Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circumferentiam circuli cadere, hoc eſt, per ea circulum poſſe deſcribi: adeò vt circulus per tria puncta A, D, B, deſcriptus, tranſeat neceſſariò per punctum etiam C. Deſcribatur enim per tria puncta A, D, & B, circulus aliquis;



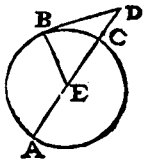
(quo

(quo autem modo id fiat, oſtendemus ad 5. propoſ. lib. 4). quiſi non tranſeat per C, tranſibit aut ultra C, vel citra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum ſub F E, E D, a aequale eſt rectangulo ſub A E, E B; & rectangulum ſub C E, E D, ponitur quoq; aequale eidem rectangulo ſub A E, E B; Erunt rectangula ſub C E, E D, & ſub F E, E D, aequalia, pars & totum; quod eſt abſurdum. Tranſibit igitur circulus per punctum C. quod erat propoſitum. a 35 tertij.

THEOR. 30. PROPOS. 36. XXXV.

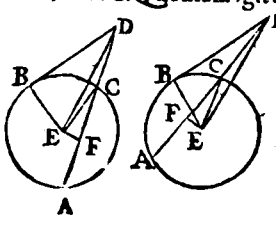
SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera verò tangat: Quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato.

EXTRA circulum A B C, punctum ſumatur D, à quo linea ducatur D A, ſecans circulum in C, *b* & linea D B, circulum tangens in B. Dico rectangulum ſub D A, D C, æquale eſſe quadrato rectæ D B. Tranſeat enim primum recta D A, per centrum E, & iungatur recta E B *c* quæ perpendicularis erit ad D B. Quoniam igitur C A, diuiſa eſt per æqualia in E, & ei addita in rectum & cõtinuum C D, *d* erit rectangulum ſub D A, D C, vna cum quadrato rectæ E C, hoc eſt, cum quadrato rectæ E B, æquale quadrato rectæ D E: Eſt autem quadratum rectæ D E, *e* æquale quadratis rectarum E B, B D. Quare rectangulum ſub D A, D C, vna cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadratis rectarum D B, B E. Ablato igitur communi quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum ſub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale. Quod eſt propoſitum.



b 17. tertij. c 18. tertij. d 6. ſecundi. e 47. primi.

NON tranſeat iam D A, ſecans per centrum E Diuiſa ergo A C, bifariam in F, ducantur rectæ E B, E C, E D, E F; *f* eritque E B, ad B D, perpendicularis; *g* & E F, ad A C. Quoniam igitur C A, diuiſa eſt per æqualia in F, & ei addita recta C D, *h* erit rectãgulum ſub D A, D C, vna cum quadrato rectæ C F, æquale quadrato rectæ D F. Addito igitur communi quadrato rectæ F E, erit rectangulum ſub D A, D C, vna cum quadratis rectarũ C F, F E, æquale quadratis rectarũ D F,

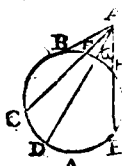


f 8. tertij. g 3. tertij. h 6. ſecundi.

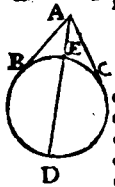
E. Est autem quadratis rectarum C F, F E, a æquale quadratum
rectæ E C, ideoque & quadratum rectæ E B; Et b quadratis re-
ctarum D F, F E, æquale est quadratum rectæ D E. Quare rectan-
gulum sub D A, D C, vna cum quadrato rectæ E B, æquale erit
quadrato rectæ D E. Cùm igitur quadratum rectæ D E, c æquale
sit quadratis rectarum D B, B E; erit & rectangulum sub D A, D C,
vna cum quadrato rectæ E B, æquale quadratis rectarum D B,
B E. Ablato ergo communi quadrato rectæ B E, remanebit re-
ctangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale: quod est
propositum. Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod,
&c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

HINC manifestum est, si à puncto quouis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus, inter se esse æqualia. Vt si ex A, ducantur rectæ A C, A D, A E, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub A C, A F; Item sub A D, A G; & sub A E, A H, æqualia inter se. Nam ducta A B, tangente circulum, d erunt quadrato rectæ A B, æqualia singula illa rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt.



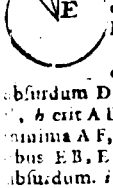
COROLLARIVM II.



CONSTAT etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter se esse æquales. Ducantur enim ex A, rectæ A B, A C, tangentes circulum; quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta A D, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ A B, quàm quadratum rectæ A C, e æquale rectangulo sub A D, A E. Quare quadrata rectarum A B, A C, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ A B, A C, æquales quoque erunt.

COROLLARIVM III.

PERSPICVVM quoque est, ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantùm posse duas lineas, quæ circulum tangant. Si enim præter duas A B, A C, duci possit tertia A D, circulum eundem tangens; ductis rectis E B, E D, ex centro E, f erunt anguli A B E, A D E, recti, ideoque æquales; quod est absurdum. Nam si ducatur recta A E, g erit angulus A D E, maior angulo A B E.



ALITER. Si tertia A D, circulum etiam tangat, erunt duæ tangentes A B, A D, æquales, vt ostensum est; quod est absurdum. Ducta namque recta A E, ad centrum E, quæ circulum secet in F, h erit A D, cùm sit propinquior minimæ A F, minor, quàm A B, quæ à minima A F, remotior est. Vel sic. Si A B, A D, sunt æquales; additis æqualibus E B, E D, erunt quoque A B, B E, ipsis A D, D E, æquales. quod est absurdum. i Sunt enim maiores A B, B E. Solum igitur duæ rectæ ducentur à puncto A, quæ circulum tangant: Quod est propositum.

COROL-

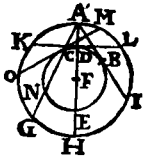
COROLLARIVM IV.

ILLVD denique constat etiam, si duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in conuexam peripheriam incidant, & earum vna circulum tangat, alteram quoque circulum tangere. Vt si duæ rectæ A B, A C, in antecedente figura sint æquales, & A C, tangat circulum in C, tanget quoque A B, eundem circulum in B. Si enim non tangat, ducatur A D, tangens, (semper enim duæ tangentes ab eodem puncto duci possunt, vt constat ex scholio propos. 31. huius lib. eruntq; ex 2. coroll. A C, A D, æquales. Cùm ergo & A B, ipsi A C, æqualis ponatur, ducentur tres rectæ æquales A B, A C, A D, quod est absurdum. *a* Duæ enim tantùm duci possunt. *a* 8. 3ij.

ALITER. Ponantur in figura sequentis propos. duæ rectæ æquales D B, D F, & D B, circulum tangat, in B. Dico & D F, eundem tangere in F. Ductis enim rectis E B, E F, ex centro, erunt duo latera D B, B E, duobus lateribus D F, F E, æqualia, & basis D E, communis. *b* Igitur anguli B, F, æquales erunt: *c* Sed B, rectus est. Igitur & F, rectus erit. atque idcirco D F, circulum tanget in F, ex coroll. propos. 16. huius lib. *b* 8. primi. *c* 18. tertij.

SCHOLIVM.

FACILLIMO negotio propositionem hanc per antecedentem propositionem demonstrabimus, hoc modo. Ex puncto A, extra circulum B C D, ducatur tangens A B, & secans A E, quæ primùm per centrum F, transeat, secetq; circumferentiã in D. Dico rectangulum sub A E, A D, æquale esse quadrato ex A B. Descripto namque ex F, per A, circulo A K L, producantur A E, A B, & quæ ad H, I; & per D, ad A H, perpendicularis K L, quæ eundem circulum B C D, tanget in D, ex coroll. propos. 16. huius lib. Eruntq; ex demonstratis in scholio propos. 3. huius lib. A D, H E, æquales, ac proinde, additæ communi D E, & A E, H, D, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius lib. A I, K L, æquales erunt, secabunturq; in B, D, bifariam: ac propterea rectangula sub A B, B I: & sub K D, D L, æqualia inter se erunt, atq; adeò quadratum, ob æqualitatem rectarum A B, B I; K D, D L. Itemq; quoniam rectangulum sub H D, D A, hoc est, sub A E, (quæ ipsi H D, est æqualis) A D, d æquale est rectangulo sub K D, K L, hoc est, rectangulo sub A B, B I, siue quadrato ex A B, constat propositum. d 35. 3ij.

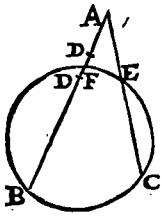


SED iam secans linea A N, non transeat per centrum F, secetq; circumferentiam in C. Dico rursum, rectangulum sub A N, A C, quadrato ex A B, æquale esse. Descripto enim rursus ex F, per A, circulo A K L, producantur A N, A B, & quæ ad G, I; & per C, ducatur O M, circulum B C D, tangens. Eruntq; ex scholio propos. 3. huius lib. A C, G N, æquales, ac proinde, additæ communi C N, & A N, G C, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius lib. A I, O M, æquales erunt, secabunturq; in B, C, bifariã: ac propterea rectangula sub

A B, B I, & ſub O C, C M, æqualia inter ſe erunt, atq; adeò quadrata, ob æqualitatem rectarum A B, B I; O C, C M. Itaque quoniam rectangulum ſub G C, C A, hoc eſt, ſub A N, (quæ ipſi G C, oſtenſa eſt æqualis) A C, æquale eſt rectangulo ſub O C, C M, hoc eſt, rectangulo ſub A B, B I, ſiue quadrato ex A B; conſtat rurſus id, quod proponebatur.

PRIMVM etiam corollarium huius propoſ. hoc modo fermè conuertemus.

SI à puncto aliquo binæ lineæ rectæ finitæ egrediantur, quæ ita ſecentur in binas partes, vt rectangula ſub totis, & ſegmentis prope punctum comprehenſa ſint æqualia: deſcribi poterit per extrema puncta aliorum ſegmentorum circulus, hoc eſt, circulus per tria puncta extrema aliorum ſegmentorum deſcriptus, per quartum etiam punctum extremum tranſibit.



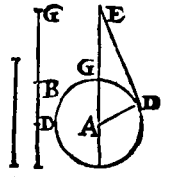
EX puncto enim A, egrediantur duæ rectæ A B, A C, quæ ita ſecentur in punctis D, E, vt rectangula ſub A B, A D, & ſub A C, A E, ſint æqualia. Dico quatuor puncta B, C, E, D, in circumferentiam circuli cadere; hoc eſt, per ea poſſe deſcribi circulum: adeò vt circulus per tria puncta B, C, E, deſcriptus, tranſeat neceſſario per reliquum etiam punctum D. Deſcribatur enim per tria puncta B, C, E, (vt ad propoſ. 5. lib. 4. docebimus) circulus B C E, qui ſi dicatur non tranſire per quartum punctum D, tranſibit aut citra D, aut vltra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum ſub A B, A F, æquale eſt, ex coroll. 1. huius propoſ. rectangulo comprehenſo ſub A C, A E; & rectangulum ſub A B, A D, eidem rectangulo ſub A C, A E, ponitur æquale: erunt rectangula ſub A B, A F, & ſub A B, A D, inter ſe æqualia, pars & totum: quod eſt abſurdum. Tranſibit ergo circulus per punctum D. Quod erat demonſtrandum.

LICEBIT quoque ex demonſtratis hac propoſ. colligere huiuſmodi problema.

DATIS duabus rectis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, alterutri earum rectam adiungere, vt rectangulum ſub tota compoſita, & adiuncta comprehenſum, quadrato alterius ſit æquale.

SINT data duæ rectæ A B, & C, ſitque ipſi A B, minori adiungenda recta, ita vt rectangulum comprehenſum ſub tota compoſita, & adiuncta, æquale ſit quadrato rectæ C, maioris. Diuiſa recta A B,

recta A B, bifariam in D, describatur ex quouis centro A, ad interuallum A D, dimidiatum, circulus D F G, & ad A D, in D, excitetur perpendicularis D E, ipsi C, æqualis, ac denique ex E, per A, centrum recta extendatur E F, secans circumferentiam in G. Dico si recta A B, adiiciatur B G, ipsi E G, aqualis, rectangulum sub totam A G, & G B, æquale esse quadrato recta C. Quoniam



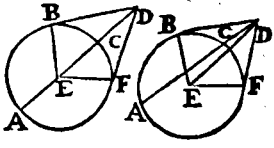
enim rectangulum sub F E, E G, a *æquale est quadrato recta E D;* a 36. ter
(quod E D, circulum tangat in D, ex coroll. propos. 16. huius lib.) Est tij.
autem rectangulum sub F E, E G, æquale rectangulo sub A G, G B, (quod recta F E, E G, rectis A G, G B, æquales sint. Sumpta enim est G B, ipsi E G, æqualis, & A B, ipsi F G, æqualis posita est,) & quadratum ex E D, quadrato ex C, (ob æqualitatem rectarum E D, & C, ex constructione,) æquale. Igitur & rectangulum sub A G, G B, quadrato ex C, æquale erit. Quod est propositum.

NON secus propositum demonstrabitur, si recta C, maiori adimenda sit recta, tum & rectangulum sub totam compositum, & adimendam comprehensum quadrato recta A B, minoris æquale sit.

THEOR. 31. PROPOS. 37. xxxvj.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.

EXTRA circulum A B C, cuius centrum E, punctum sumatur D, à quo ducatur recta D A, circulum secans in C, & recta D B, incidens in circulum ad punctum B; sitque rectangulum sub D A, D C, æquale quadrato rectæ D B. Dico D B, circulum tangere in B. *b* Ducatur enim D F, tangens circulum, & iungantur rectæ B E, E F. Quod si D A, secans non transeat per centrum E, iungatur quoque recta D E. Quoniam



b 17. ter tij.

igitur rectangulo sub D A, D C, æquale est quadratum rectæ c 36. ter
tangentis D F: Et eidem rectangulo sub D A, D C, æquale ponitur tij.
quadratum rectæ D B: erunt quadrata rectarum D F, D B, inter se æqualia, ideoque & rectæ D F, D B, æquales inter se erunt. Ita-

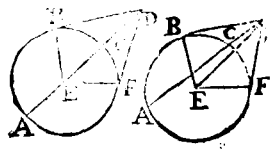
que quia latera D F, F E, trianguli D F E, æqualia sunt lateribus
a 8. pri. D B, B E, trianguli D B E; & basis D E, communis, a erunt anguli
b 18. ter D F E, D B E, æquales. b Atqui angulus D F E, rectus est, quod D F,
tij. circulum tangat. Igitur & angulus D B E, rectus erit. Quapropter
per coroll. propos. 16. huius lib. D B, circulum tanget; quod est
propositum. Si ergo extra circulum sumatur punctum aliquod,
&c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EST autem hoc theorema conuersum precedentis theorematis, & perspicuum est.

PLACET hoc loco sequens etiam theorema demonstrare.

SI à puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum tangentes ducantur, aut duæ lineæ vsque ad conuexam peripheriam inter se æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circuli ducta angulum ab eis comprehensum diuidit bifariam: Et contra, Linea recta angulum ab eis comprehensum diuidens bifariam, per centrum circuli transibit.



IN priori figura huius propos. duæ rectæ D B, D F, circulum A B C F, tangant in B, F, punctis, quæ ex 2. coroll. precedentis propos. æquales erunt: Vel ducantur quæcunq; duæ æquales D B, D F. Et per centrum E, ducatur recta linea D E A. Dico angulum B D F, sectum esse bifariam à recta D A. Cum enim iunctis rectis E B, E F, duo latera B D, D E, duobus lateribus F D, D E, æqualia sint, basisque E B, basi E F, æqualis; c erunt duo anguli ad D, inter se æquales. Quod est propositum.

c 8. pri.

DIVIDAT iam recta D A, angulum B D F, bifariam. Dico rectam D A, per centrum transire. Si enim in D A, non est centrum, sit extra ipsam centrum E, sumaturque recta E D, & ut in posteriori figura huius propos. Ergo, & demonstratum est, recta E D, angulum B D F, bifariam diuidet; ac propterea anguli B D A, B D E, cum sint dimidiata partes anguli B D F, æquales inter se erunt, pars, & totum, quod est absurdum. Transit ergo recta D A, per centrum. Quod demonstrandum erat.

EVCLI-

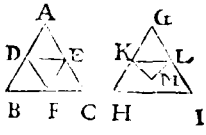
EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.

GENS Euclides quatuor hoc libro de scitis inscriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum descriptionibus: item de inscriptionibus circuli in eisdem figuris & circuli descriptionibus circa eosdem: exponit, quæ deinceps de inscriptionibus, quid sit figuram in figura inscribi, aut circa figuram describi, incipiens à rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni D E F, tangant latera A B, A C, B C, trianguli externi A B C, dicetur triangulum D E F, in triangulo A B C, esse inscriptum. At quoniam angulus M, trianguli K L M, non tangit latus H I, trianguli G H I, non dicetur triangulum K L M, inscribi in triangulo G H I, quamuis totum illud sit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera G H, G I.



II.

SIMILITER & figura circum figuram describi dicitur, cum singula eius, quæ circumscribitur, latera singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

E con-

Contrario dicetur triangulum A B C, describi circa triangulum D E F; quoniam singula latera illius singulos huius angulos tangunt. At triangulum G H I, non dicetur descriptum esse circa triangulum K L M, propterea quòd latus illius H I, angulum huius M, non tangit. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

CAETERVM propriè figura rectilinea dicuntur in figuris rectilineis describi, & circa easdem describi, *quando inscripta, & circumscripta habent latera numero aqualia, & angulos numero aquales: quamuis hoc non sit omnino necessarium, cum & quadratum intra triangulum describi possit, vt ad finem lib. 6. docebimus.*

III.

FIGVRA rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

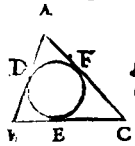
VT si tangant anguli A, B, C, trianguli A B C, peripheriam circuli A B C, dicetur triangulum in circulo esse inscriptum. Quod si vel vnus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum esse inscriptum in circulo.



IV.

FIGVRA verò rectilinea circa circulum describi dicitur, cum singula latera eius, quæ circumscribitur, circuli peripheriam tangunt.

AT verò, si latera trianguli A B C, singula tangant peripheriam circuli D E F; dicetur triangulum circa circulum esse descriptum.



V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

VI.

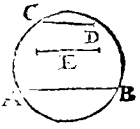
CIRCVLVS autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit eius figuræ, quam circumscribit, angulos.

VICISSIM dicetur circulus D E F, in figura definitionis 4. inscriptus esse in triangulo A B C: At verò circulus A B C, in figura definitionis

finitionis 3. describatur esse circa triangulum A B C. Idem iudicium habeto de aliis figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.

VII.

RECTA linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

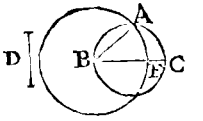


VT recta linea A B, quoniam eius extrema A, & B, in peripheria circuli A B C, existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicitur: Non autem recta E, vel C D; quia hæc alterum duntaxat extremorum, nempe C, habet in peripheria circuli; illa verò neutrum.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

1.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro nó sit maior.



IN circulo A B C, coaptanda sit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen maior non sit diametro circuli dati. Cum enim diameter *a* sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta diametro maior foret, non posset in circulo aptari illi vna æqualis. Ducatur ergo diameter B C. Itaque si data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit B C, illi æqualis: Si verò D, minor fuerit diametro, *b* abscindatur B E, æqualis ipsi D, & centro B, interuallo autem B E, circulus describatur E A, secans circulum A B C, in A. Ducta igitur recta B A, erit ea aptata in circulo A B C, æqualis datæ rectæ D. *c* Est enim B A, æqualis ipsi B E, & D, æqualis eidem B E, per constructionem. Quare A B, & D, inter se æquales quoque erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

a 15. *ter* 1*ij.*

b 3. *pri*. *mi.*

c 15. *de*- *fin. pri*- *mi.*

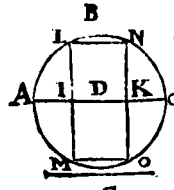
EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.

IN dato circulo A B C, cuius centrum D, accommodanda sit recta æqualis rectæ E F, quæ diametro maior non sit, & alteri rectæ G, parallela. d *Ducatur per centrum D, diameter A C, rectæ G parallela. Quod si recta E F, diametro fuerit æqualis, factum iam erit, quod*

d 31. *pri mi.*

proponi-



proponitur. Si verò E F, diametro minor fuerit, secta ea bifariam in H, abscindatur D I, ipsi H E, & D K, ipsi H F, æqualis, & tota I K, toti E F, sit æqualis. a Et per I, K, ad angulos rectos ipsi A C, ducantur L M, N O; tangaturque L N. Dico L N, accommodatam esse æqualem ipsi E F, & ipsi G, parallelam. Cum enim L M, N O, æqualiter à centro distent, b ipsa æquales inter se secerunt: c quæ cum bifariam dividantur in I, & K, quod ad angulos rectos secentur à recta A C, per centrum D, transeunte; erunt & earum semisses L I, N K, æquales. d Quia verò L I, N K, parallela etiam sunt; e erunt quoque L N, I K, æquales, & parallela. Quare cum I K, æqualis sit ipsi E F, & parallela ipsi G. Erit etiam L N, æqualis ipsi E F, & ipsi G, parallela. Eadem ratione, si recta ducatur M O, erit ea æqualis ipsi E F, & parallela ipsi G. Quod est propositum.

a 11. pri.
b 14. tertij.
c 3. tert.
d 28. primi.
e 33. primi.
f 30. primi.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

IN dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.



SIT in circulo A B C, dato describendum triangulum æquiangulum triangulo dato cuicunque D E F. Ducatur recta G H, tangens circulum in A, fiatque angulus G A B, angulo F, æqualis, & angulus H A C angulo E, atque extendantur rectæ A B, A C, ad circumferentiam usque in puncta B, & C, coniungaturque recta B C. Non cadet autem recta A C, in rectam A B, vel inter rectas A B, A G: propterea quod anguli G A B, H A C, hoc est, anguli F, E, g minores sunt duobus rectis. b Essent autem duobus rectis æquales, si A C, in A B, caderet; vel maiores duobus rectis, si inter A B, A G, cadere. Dico triangulum A B C, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo D E F. Est enim angulus C, i æqualis angulo G A B; & eidem angulo G A B, æqualis est angulus F, ex constructione. Quare anguli C, & F, inter se quoque erunt æquales. Similiter quia angulus B, k, æqualis est angulo H A C; & eidem angulo H A C, æqualis est, per constructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter se æquales. Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli D E F, l erunt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum est ergo triangulum A B C, triangulo D E F. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

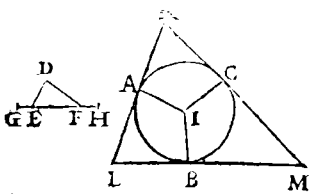
g 17. primi.
h 13. primi.
i 32. tert.
k 32. tert.
l 32. primi.

PROBL.

PROBL. 3. PROPOS. 3. iij.

CIRCA datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

CIRCA circulum datum A B C, describendum sit triangulum æquiangulum dato triangulo D E F. Producto latere E F, vtrinque ad G, & H, sumptoq; centro circuli I, ducatur recta vtcunque A I, & fiat angulus A I B, æqualis angulo D E G, & angulus B I C, angulo D F H. Deinde ex A, B, C, educantur ad A I, B I, C I, perpendiculares K L, L M, M K, quæ circulum tangent in punctis A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K, L, M. Si enim ducerentur rectæ A C, fierent duo anguli K A C, K C A, duobus rectis minores, ac proinde A K, C K, coibunt, &c. Nam recta hæc ducta A C, caderet supra rectas A I, C I, quod hæ angulum constituant in I. Cum enim spatium circa I, æquale sit quatuor rectis, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. hoc est, quatuor angulis ad E, & F, sintque duo anguli A I B, C I B, duobus angulis D E G, D F H, æquales, erit reliquum spatium A I C, reliquis duobus angulis D E F, D F E, æquale: Sed a hi minores sunt duobus rectis. Igitur & spatium A I C, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit A I C. Alias spatium illud esset vel æquale duobus rectis, si nimirum A I, C I, vnam rectam lineam constituerent; vel maius duobus rectis, si recta A I, producta caderet supra I C. Cadit igitur necessario A I, producta infra C I, atque idcirco angulus fiet A I C, ad partes K, & ducta recta A C, faciet cum A K, C K, duos angulos minores duobus rectis ideoque rectæ A K, C K, coibunt in K. Non secus ostendemus, A L, B L, coire in L, & C M, B M, in M: quia ductæ rectæ A B, B C, facient cum A L, B L, C M, B M, angulos minores duobus rectis. Descriptum est igitur circa circulum triangulum K L M, quod dico esse æquiangulum triangulo D E F. Quoniam enim anguli in quadrilatero A I B L, æquales sunt quatuor rectis, vt ad 32. propos. lib. 1. ostensum fuit, & anguli I A L, I B L, sunt duo recti, erunt reliqui A I B, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur b & anguli D E G, D E F, sint duobus rectis æquales: si auferantur æquales A I B, D E G, remanebit angulus I, anguli D E F, æqualis. Eadem ratione ostendemus angulum M, æqualem esse angulo D F E. c Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum K L M, æquiangulum erit dato D E F. Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.



a 17. pri mi.

b 13. pri mi.

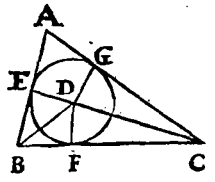
c 32. pri mi.

PROBL.

IV. PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato triangulo circulum inscribere.

SIT describendus circulus in dato triangulo A B C. Diuisis duobus angulis A B C, A C B, bifariam rectis B D, C D, quæ intra triangulum coeant in D, ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares D E, D F, D G. Quoniam igitur duo anguli D B E, D E B, trianguli D B E, æquales sunt duobus angulis D B F, D F B, trianguli D B F, vterque vtrique; & latus B D, commune; a erunt quoque latera D E, D F, æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera D F, D G, in triangulis D C F, D C G. Cum igitur tres rectæ D E, D F, D G, sint æquales; circulus ex D, ad interuallum D E, descriptus transibit per reliqua puncta F, & G; tangetque latera trianguli in E, F, G, per coroll. propos. 16. lib. 3. quod latera perpendicularia sint ad semidiametros D E, D F, D G. In dato ergo triangulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.



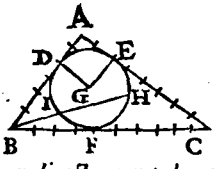
a 26. primi.

SCHOLIVM.

b 20. primi. VERVM quoniam Euclides lib. 1. demonstrauit; b in omni triangulo duo latera quomodolibet assumpta reliquo esse maiora; non abs re fuerit demonstrare hoc loco, cum Io. Baptista Benedicto, quanto maiora sint, hoc proposito theoremate.

IN omni triangulo, si circulus inscribatur, duo quælibet latera superant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ab angulo illis lateribus comprehenso in cauam peripheriam ducta, & sub eius segmento exteriore. Quod si angulus comprehensus sit rectus superabunt illa duo latera latus recto angulo oppositum diametro circuli triangulo inscripti.

c 4. quinti. SIT triangulum A B C, c cui circulus inscribatur D E F, tangens latera trianguli in D, E, F, punctis: & à quouis angulo B, siue rectus is sit, siue obtusus, siue acutus, ducatur recta B H, secans circulum in I. Dico duo latera B A, B C, superare latus A C, recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli sub B H, B I, comprehensi. Quoniam enim per coroll. 2. propos. 36. lib. 3. recta C F, recta C E, & recta A D, recta A E, æqualis est, erunt duæ rectæ F C, D A, lateri A C, æquales. Latera igitur

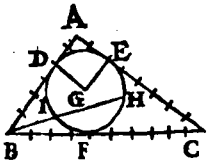


igitur B A, B C, latus A C, superant segmentis B D, B F: quæ cum ex eodem coroll. sint æqualia; superabunt eadem latera B A, B C, latus A C, rectâ, quæ dupla est segmenti B D. Sed quadratum rectæ, quæ dupla est segmenti B D, quadruplum est quadrati rectæ B D, ex scholio propos. 4. lib. 2. Et quadratum rectæ B D, æquale est rectangulo sub B H, B I. Igitur latera B A, B C, superant latus A C, rectâ, cuius quadratum quadruplum est rectanguli sub B H, F I. Quod est propositum. 2 36. 1ij.

QVOD si angulus A, rectus sit, dico non solum duo latera A B, A C, superare latus B C, rectâ, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub rectâ ex A, in cassum perpheriam ductâ, & eius segmento exteriore, & ostensum est: Verum etiam excessum illum esse diametro circuli D E F, æqualem. Ductis enim ex centro G, ad puncta contactuum D, E, rectis G D, G E; b erunt anguli ad D, & E, rectis. Cum ergo & angulus A, ponatur rectus, c erunt tam rectæ A E, D G, quam A D, E G, parallelæ inter se: atque ideirco A G parallelogrammum erit. d Quare tam recta A D, semidiametro E G, quàm recta A E, semidiametro D G, æqualis erit: hoc est, duæ rectæ A D, A E, simul totis diametro circuli erunt æquales. Superant autem duo latera A E, A C, latus B C, duabus rectis A D, A F, & ostensum est. Nam E C, ipsi F C, & D B, ipsi F B, æqualis est, ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. Igitur eadem latera A B, A C, superant latus B C, diametro circuli inscripti. Quod est propositum. b 18. ter tij. c 28. pri mi. d 34. pri mi.

IT A QVE quæuis duo latera superant reliquum duabus rectis circulum triangulo inscriptum tangentibus, quæ inter angulum duobus illis lateribus comprehensum, & circulum interiacentur. Ostensum enim est, latera A B, A C, superare latus B C, rectis tangentibus A D, A E, &c.

I A M vero his ita demonstratis, si tria latera trianguli cognita sint, inuenietur nullo negotio tria puncta, in quibus circulus triangulo inscribendus latera tangere debet. Quia enim latera, verbi gratia, A B, A C, superare debent latus B C, duabus tangentibus ex A, ductis, quæ quidem æquales sunt: si dematur latus B C, notum ex notis lateribus A B, A C, relinquentur duæ tangentes A D, A E, notæ. Semissis ergo huius excessus dabit vtrumq; punctum D, E. Reliquum deinde segmentum E C, dabit segmentum C F, vsque ad punctum tertium F: Vel reliquum segmentum D B, dabit segmentum B F, ad eadem punctum F. Si igitur ex duobus punctis D, E, erigantur perpendiculares D G, E G, coibunt hæ in G, centro circuli inscribendi. Exempli gratia. Sit latus A B, 6. latus A C, 8. & latus B C, 10. palmorum. Dempto latere B C, 10. palmorum ex duobus lateribus A B, A C, hoc est, ex 14. palmis, relinquuntur 4 palmi. Tam ergo A D, quam A E, duos palmos continebit. Segmentum ergo D, E, continebit 4 palmos, totidemq; segmentum B F, habebit. Segmentum autem

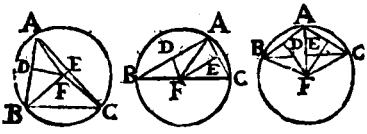


E C, ac proinde & C F, erit 6. palmorum. Sic etiam dempto latere A B, 6. palmorum, ex lateribus A C, B C, id eſt, ex 18. palmis, reliqui fiunt 12. palms. Vtrumque ergo ſegmentum C E, C F, erit 6. palmorum: ac proinde vtrumque A E, A D 2. palmorum; & vtrumque B D, B F, 4. palmorum. Poſtremo dempto latere A C, 8. palmorum ex lateribus A B, C B, hoc eſt, ex palmis 16. remanent 8. palms. Vtrumque ergo ſegmentum B D, B F, habebit 4. palmos: At vtrumque C F, C E, 6. palmos: & vtrumque A D, A E, 2. palmos.

v. PROBL. 5. PROPOS. 5.

CIRCA datum triangulum circulum deſcribere.

SIT circulus deſcribendus circa datum triangulum A B C. Diuidantur duo latera A B, A C, (quæ in triangulo rectangulo, vel obtuſangulo ſumenda ſunt facilitatis gratia, circa rectũ, vel obtuſum angulũ, quamuis hos non ſit omnino neceſſarium, ſed duo quæuis latera bifariam poſſint ſecari) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur D F, E F, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F, (Quod enim coeant, patet. Nam ſi ducta eſſet recta D E, fierent anguli F D E, F E D, duobus rectis minores.) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere B C, vel extra triangulum. Ducantur rectæ F A, F B, F C. Quoniam igitur latera A D, D F, trianguli A D F, æqualia ſunt lateribus B D, D F, trianguli B D F, & anguli ad D, recti; *a* erunt baſes F A, F B, æquales. Eodem modo erunt F A, F C, æquales. Cum ergo tres rectæ F A, F B, F C, ſint æquales, circulus deſcriptus ex F, ad interuallum F A, tranſibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triangulum circulum deſcripſimus. Quod erat faciendum.



a. prim.

COROLLARIVM.

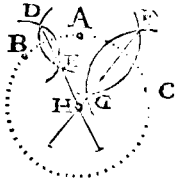
b. 31. tert. HINC manifeſtum eſt, ſi centrum intra triangulum cadat, *b* omnes angulos eſſe acutos, quoniam omnes ſunt in maiori ſegmento circuli: ſi vero ſit in latere B C, *c* angulum B A C, ei lateri oppoſitum, eſſe rectum, *c. 31. tert.* quod ſit in ſemicirculo: Si denique cadat extra triangulum, *d* angulum *d. 31. tert.* oppoſitum B A C, obtuſum eſſe, cum ſit in minori ſegmento circuli.

CONTRA verò perſpicuum eſt, ſi triangulum fuerit acutangulum, cadere intra triangulum: ſi rectangulum, in latus recto angulo oppoſitum: ſi denique obtuſangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile oſtenderur, ducendo ad incommodum aliquod, ſiue abſurdum. Quia ſi in acutangulo caderet centrum in vnum latus, eſſet angulus ei oppoſitus

positus rectus: si vero extra, esset idem angulus obtusus. Item si in rectangulo centrum caderet intra, essent omnes anguli acuti, si vero extra, esset angulus oppositus obtusus. Denique si in triangulo obtusangulo caderet in vnum latus, esset angulus ei oppositus, rectus, si vero intra, omnes anguli essent acuti. Quæ omnia ex priori parte huius coroll. colligantur, & pugnant cum hypothesi.

SCHOLIVM.

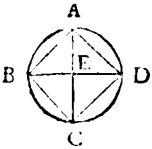
COLLIGITVR etiam ex hoc problemate, quanam arte describendus sit circulus, qui per data tria puncta non in vna recta linea existentia transeat. Nam si data puncta trium rectis iungantur, & constituatur triangulum, facile circa ipsum circulus describetur, & hac propos. tradetur est. Quod tamen facilius efficietur praxi illa, quam tradidimus propos. 15. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C. Ex A, & B, quouis interuallo eodem duo arcus describantur se intersecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur D H. Item ex A, & C, quouis also interuallo eodem, vel etiam, si placet, priori illo, alij duo arcus delineentur secantes sese in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur F H, secans rectam D H, in H. Dico H, esse centrum circuli transeuntis per data puncta A, B, & C. Nam si ducerentur rectæ A E, A C, B C, diuiderentur latera A B, A C, trianguli A B C, bifariam à rectis D H, F H, cum demonstratum est in praxi illa propositionis 15. lib. 3. Quare & in hoc 5. problemate Euclidis ostenditur, H, esse centrum circuli circa triangulum A B C, descripti. Quod est propositum.



PROBL. 6. PROPOS. 6. vj.

IN dato circulo quadratum describere.

SIT in dato circulo A B C D, cuius centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, secantes se ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ A B, B C, C D, D A. Dico A B C D, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera E A, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus E C, E B, trianguli C E B, cum omnia sint ex centro; & anguli contenti sunt recti; a erunt bases A B, B C, æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ B C, C D: Item rectæ C D, D A, & rectæ D A, A B. Omnia igitur latera quadrilateri A B C D, æqualia inter se sunt. Quod breuius ita concludemus. Quoniam quatuor anguli ad E, æquales sunt, nimirum recti; b erunt quatuor arcus, quibus insistunt, æquales: c ac proinde & rectæ quatuor subtensæ æquales erunt. Omnia ergo latera quadrilateri A B C D, inter se æqualia



a 4. primi.

b 26. tert.

c 29. tert.

31. ter. 3. sunt. Sunt autem a & anguli recti, cum omnes in semicirculis existant. Quare quadratum erit A B C D, propterea que in dato circulo quadratum descripsimus. Quod erat faciendum.

vij. PROBL. 7. PROPOS. 7.

CIRCA datum circulum quadratum describere.

SIT circa datum circulum A B C D, cuius centrum E, describendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, secantes se in E, centro ad angulos rectos; & per A, B, C, & D, educatur ad diametros lineæ perpendiculares F G, F H, H I, I G, coeuntes in punctis F, H, I, G. Quod enim coeant A F, B F, patet ex eo, quod ducta recta A B, faciat cum A F, BF, duos angulos duobus rectis minores; atque ita de reliquis. Dico F H I G, esse quadratum circa circulum datum descriptum. Cum enim anguli A E B, F B E, sint recti, b erunt F H, A C, parallelæ; similiterque erunt G I, A C, parallelæ. c Quare & F H, G I, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt F G, H I. Quoniam igitur parallelogrammum est A C H F, d erunt latera opposita A C, F H, æqualia, & anguli oppositi A C H, A F H, æquales: Sed A C H, est rectus. Igitur A F H, rectus erit. Eadem ratione ostendemus angulos H, I, G, rectos esse: & latera H I, I G, G F, æqualia esse diametris B D, A C. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera F G, F H, H I, I G, æqualia, ideoque F G I H, quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propos. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.

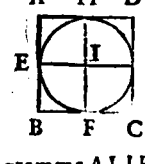


b 28. pri. c 28. pri. d 34. pri.

viij. PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato quadrato circulum describere.

SIT in dato quadrato A B C D, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bifariam in E, F, C, H, ducantur rectæ E G, F H, secantes se in I. Quoniam igitur A D, B C, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum A H, B F, æquales & parallelæ. e Quare & A B, parallela est, & æqualis ipsi F H. Eadem ratione erit D C, parallela, & æqualis eidem F H: Itemque rectæ A D, B C, parallelæ erunt, & æquales ipsi E G. Sunt igitur parallelogramma A I, I B, C I, I D, ideoque rectæ I E, I F, I G, I H, æquales erunt rectis A H, E B, D H, A E: Sunt autem hæ inter se æquales, cum sint semisses æqualium A D, A B, &c. Quare & rectæ I E, I F, I G, I H, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad interual-



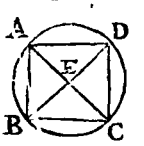
e 31. pri.

interuallum IE, transibit quoque per puncta F, G, H, quæ cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propos. 16. lib. 3. a quod anguli ad E, F, G, H, sint recti, descriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum descripsimus. Quod efficiendum erat. a 29. primi.

PROBL. 9. PROPOS. 9. IX.

CIRCA datum quadratum circulum describere.

SIT describendus circulus circa quadratum ABCD. Ducantur diametri AC, BD, secantes se in E. Quoniam igitur latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia sunt, b erunt anguli ABD, ADB, æquales: Est autem angulus BAD, rectus. c Quare ABD, ADB, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & ideirco inter se æquales. Cum ergo anguli EAD, EDA, sint æquales; d erunt rectæ EA, ED, æquales. Eadem ratione EA, EB, æquales erunt; nec non EB, EC. Item EC, ED. Quare circulus ex F, descriptus, interuallo EA, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.



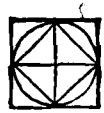
b 5. primi.

c 32. primi.

d 6. primi.

SCHOLIVM.

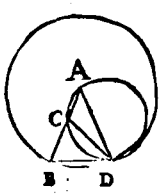
QVOD si circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inscribatur, erit quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum. Quoniam enim latus quadrati circumscripti æquale est diametro circuli, & ex 7. propos. huius lib. constat, hoc est, diametro quadrati inscripti: quadratum verò diametri duplum est quadrati, cuius est diameter, & ad 47. propos. lib. 1. ostendimus; Constat propositum.



PROBL. 10. PROPOS. 10. X.

ISOSCELES triangulum constituere; quod habeat vtrumque eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.

SVMATVR quæuis recta linea AB, quæ e diuidatur in C, ita vt rectangulum sub AB, BC, æquale sit quadrato rectæ AC. Deinde centro A, interuallo vero AB, circulus describatur, in quo f accommodetur recta BD, æqualis ipsi AC, iungaturq; recta AD. Quoniam autem rectæ AB, AD, æquales sunt, erit



e 11. secundi.

f 1. quarti.



triangulum A B D, Isosceles. Dico vtrumque angulorum A B D, A D B, duplum esse reliqui anguli A. Ducta enim recta C D, *a* describatur circa triangulum A C D, circulus D C A. Quoniam igitur rectangulum sub A B, B C, æquale est quadrato rectæ B D, & recta A B, secat circulum D C A, *b* tanget recta B D, eundem circulum D C A, in D. Quare angulus B D C, *c* æqualis est angulo A, in alterno segmento C A D. Addito igitur communi C D A, erit totus angulus A D B, æqualis duobus angulis C A D, C D A: Sed his eisdem *d* æqualis est etiam angulus externus B C D. Angulus ergo B C D, æqualis erit angulo A D B, hoc est, angulo A B D, *e* cum A B D, A D B, æquales sint; ac propterea *f* rectæ C D, B D, æquales erunt: Est autem B D, æqualis *g* positæ rectæ A C. Igitur & C D, ipsi C A, æqualis erit; *g* ac propterea anguli C A D, C D A, æquales. Angulus igitur A D B, qui æqualis est: ut is est duobus angulis C A D, C D A, duplus erit alterutrius eorum, anguli nimirum A. Quare & angulus A B D, duplus erit eiusdem anguli A. Isosceles ergo triangulum constituimus, habens, &c. quod erat efficiendum.

a 5. quarti.
b 17. tertij.
c 32. tertij.
d 32 primi.
e 5 primi.
f 6. primi.
g 35 primi.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero tres anguli trianguli A B D, *h* æquales sunt duobus rectis, hoc est, quinque quintis duorum rectorum; perspicuum est, angulum A, esse quintam partem duorum rectorum; vtrumlibet autem B, D, duas quintas partes. Item A, esse duas quintas partes vnius recti, & vtrumuis B, D, quatuor quintas partes; quandoquidem omnes tres *i* æquales sunt duobus rectis, hoc est, decem quintis vnius recti.

h 32 primi.
i 32. primi.

SCHOLIVM.

POTVISSET problema hoc proponi ad instar theorematis, hoc modo.

SI recta linea secetur, vt propos. 11. lib. 2. traditum est; Isosceles triangulum, cuius basis maiori segmento æqualis est, vtrumuis verò laterum æqualium ipsi datæ lineæ æquale, habet vtrumlibet angulorum æqualium ad basim, duplum reliqui.

NON est autem, quod se exercuerint Campanus, & Peletarius, & probent, rectam B D, ita applicari circulo D C A, vt eum nullo modo secet. Nam propterea quod quadratum rectæ B D, æquale est rectangulo sub A B, B C, ostensum est vltima propos. 3. lib. rectam B D, perpendicularem esse ad semidiametrum circuli ex D, ductam. Quare circulum tanget, & nulla ratione secabit.

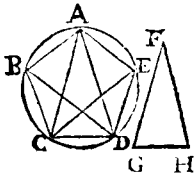
QVÆ arte autem construi debeat triangulum Isosceles, cuius vterque angulorum ad basim, ad reliquum habeat quamcunque proportio-

portionem datam, non ſolum duplam, & hic ab Euclide factum eſt, trademus cum Pappo ad finem lib. 6. Qua res hactenus deſiderata eſt.

PROBL. II. PROPOS. II. xj.

IN dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

SIT in dato circulo A B C D E, inſcribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. *a* Conſtruatur triangulum Iſoſceles F G H, ita vt vterque angulorum G, H, duplus ſit reliqui F, & in circulo *b* inſcribatur triangulum A C D, æquiangulũ triangulo F G H, & vterque angulorum A C D, A D C, *c* bifariam diuidatur rectis C E, D B, atque rectæ iungantur A B, B C, C D, D E, E A. Dico pentagonum A B C D E, in circulo dato inſcriptum, eſſe æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim vterque angulorum A C D, A D C, duplus ſit anguli C A D, & diuiſis bifariam; erunt quinque anguli A D B, B D C, C A D, D C E, E C A, æquales *d* Quare arcus A B, B C, C D, D E, E A, ſuper quos aſcendent, atque idcirco *e* & rectæ A B, B C, C D, D E, E A, æquales erunt. Æquilaterum eſt igitur pentagonum A B C D E. Rurſus quia arcus A B, E D, æquales ſunt; addito communi B C D, fient æquales A B C D, E D C B. *f* Anguli ergo A E D, B A E, dictis arcubus inſiſtentes æquales erunt. Eodem modo æquales erunt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Inſiſtunt enim æqualibus arcubus, quorum ſingulis extremis arcubus æqualibus componuntur. Æquiangulum eſt ergo pentagonum A B C D E. Quare cum & æquilaterum eſſe ſit oſtenſum, inſcriptum erit dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum: Quod faciendum erat.



a 10. *quarti.*
b 2. *quarti.*
c 9 *pri.*
d 26. *ter tij.*
e 29. *ter tij.*
f 27. *ter tij.*

COROLLARIVM.

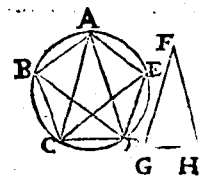
SEQVITVR hinc, angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum rectorum; vel ſex quintas recti. *g* Cum enim tres anguli B A C, C A D, D A E, æquales ſint, vtpote qui æqualibus arcubus B C, C D, D E, inſiſtant, ſit autem C A D, per coroll. præcedentis propoſ. quinta pars, duorum rectorum, vel dnæ quintæ vnius recti: erit totus B A E, tres quintæ duorum rectorum: vel ſex quintæ vnius recti.

g 27. *ter tij.*

SCHOLIVM.

QVOD ſi detur recta linea terminata C D, ſuper ea conſtituemus pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc modo. h *Fiat triangulum Iſoſceles F G H, habens vtrumlibet angulorum G, H, duplum reliqui anguli F. Deinde conſtituantur anguli A C D, A D C,*

h 10. *quarti.*

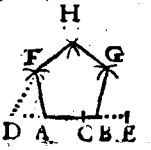


a 32. primi.

b 5. quarti.

æquales angulis G, H, coëantque rectæ CA, DA, in A, a quæ efficient angulum CAD, æqualem angulo F; ac propterea trianguli ACD, vterque angulorum ACD, ADC, duplus erit reliqui anguli CAD. Iam verò circa triangulum ACD, circulus b describatur ABCDE; In quo cum sit inscriptum triangulum ACD, si anguli ACD, ADC, bifariam secentur, inscribetur, vt primo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, cuius latus est recta CD. Quod est propositum.

FACILIVS idem efficiemus hac ratione. Secta recta proposita AB, supra quam pentagonum æquilaterum, & æquiangulum constituendum est, in C, vt propos. 11 lib. 2. traditum est, producatur ad vtramque partem, sintq; AD, BE, maiori segmento AC, æquales. Interuallo deinde data recta AB, ex A, D, duo arcus describantur secantes sese in F. Item ex B, E, eodem interuallo alij duo se intersecantes in G. Denique ex F, G, eodem interuallo alij duo se diuidentes in H, coniungantur q; rectæ AF, FH, HG, GB. Dico pentagonum ABGHF, super datam rectam AB, descriptum, esse æquilaterum, atque æquiangulum. Quòd enim sit æquilaterum, constat ex constructione, cum omnes lineæ ipsi AB, sumptæ sint æquales, hoc est, omnes arcus descripti sint ad interuallum AB. Quod autem sit & æquiangulum, ita ostendetur. Ducta recta DF, erit ADF, Isosceles, quale ab Euclide propos. 10. constructum est, vt ex scholio eiusdem propos. manifestum est, propterea quòd basis AD, æqualis est maiori segmento AC, lineæ AB, vtrumuis verò laterum æqualium ipsi AB, æquale. Quare ex coroll. eiusdem propos. 10. angulus BAF, continebit duas quintas duorum rectorum; ac proinde reliquus angulus duorum rectorum, nimirum BAF, reliquas tres quintas duorum rectorum continebit. Cum ergo ex coroll. huius propos. angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli complectatur tres quintas duorum rectorum; erit BAF, angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli. Eademque ratione erit ABG, angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli. Ex quo sequitur, totum pentagonum esse æquiangulum. Si enim compleatur, aut concipiatur esse completum, hoc est, super F, G, cogitentur descripta duo alia latera, cadent ea necessario in punctum H. Alioquin, si supra H, aut infra



c 11. primi. conuenirent, c essent ea vel maiora, vel minora rectis FH, GH, vt constat, si angulo H, subtenderetur basis FG: atque idcirco alijs lateribus FA, AB, BG, æqualia non forent, quod est absurdum. Pentagonum ergo ABGHF, & æquilaterum, & æquiangulum est. Quod erat ostendendum.

PROBL.

PROBL. 12. PROPOS. 12. xij.

CIRCA datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT circa datum circulum A B C D E, describendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. *a* Inscribatur in eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum A B C D E, & ex centro F, ducantur rectæ F A, F B, F C, F D, F E, ad quas ducantur perpendiculares G H, H I, I K, K L, L G, coeuntes in G, H, I, K, L. Cùm enim anguli G A E, G E A, duobus sint rectis minores, partes nimirum angulorum rectorum F A G, F E G; *b* coibunt rectæ A G, E G, ad partes G, & sic de aliis. Et quia ipsæ tangunt circulum, per coroll. propos. 16 lib. 3. erit descriptum pentagonũ G H I K L, circa circulum; quod dico esse æquilaterum atque æquiangulum. Ductis enim rectis F G, F H, F I, F K, F L, erunt quadrato rectæ F H, *c* æqualia tam quadrata rectarum F A, A H, quàm rectarum F B, B H. Quare quadrata rectarum F A, A H, æqualia erunt quadratis rectarũ F B, B H. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium F A, F B, remanebunt quadrata rectarum A H, B H, æqualia; ideoque & rectæ A H, B H, æquales erunt. Quod etiam constat ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. cùm A H, B H, ex eodem puncto H, ducantur circulum tangentes in A, & B. Quoniam ergo latera A F, F H, trianguli A F H, æqualia sunt lat ribus B F, F H, trianguli B F H. Est autem & basis A H, basi B H, æqualis, vt ostensum est; *d* erunt anguli A F H, B F H, æquales. Igitur *e* & anguli A H F, B H F. Duplus igitur est angulus A F B, anguli B F H, & angulus A H B, anguli B H F. Eodem modo ostendemus, angulum B F C, duplum esse anguli B F I, & angulum B I C, anguli B I F. Cùm igitur *f* anguli A F B, B F C, sint æquales, quòd insistant circumferentiis A B, B C, *g* quæ æquales sunt, cùm à rectis æqualibus subtendantur A B, B C; erunt & dimidij eorum B F H, B F I, æquales. Quocirca cùm duo anguli B F H, H B F, trianguli B F H, æquales sint duobus angulis B F I, I B F, trianguli I F B, & latus illis adiacens commune B F, *h* erunt & latera B H, B I, æqualia, & anguli B H F, B I F, æquales. Dupla est ergo recta H I, rectæ H B. Eademque ratione ostendemus G H, rectam duplam esse rectæ H A. Sunt autem ostensæ æquales H B, H A. Igitur & earum duplæ H I, H G, æquales erunt. Similiter demonstrabimus, rectas I K, K L, L G, æquales esse cuilibet rectarum H I, H G. Æquilaterum ergo est pentagonum G H I K L. Rursus quoniam ostensum est, angulos B H F, B I F, æquales esse, ac semisses angulorum B H A, B I C; erunt & eorum dupli B H A, B I C, æquales. Eademque ratione anguli



a 11. quarti.

b 13. pri mi.

c 47. pri mi.

d 8. primi.

e 4. primi.

f 27. ter tij.

g 28. ter tij.

h 26. pri mi.

guli I K L, K L G, L G H, æquales erunt cuilibet angulorum B H A, B I C. Æquiangulum igitur est pentagonum G H I K L. Quapropter cùm & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterũ, & æquiangulum. Quod efficiendum erat.

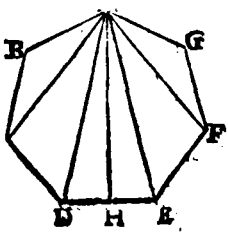
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex huius problematis demonstratione; si in circulo quæcunque figura æquilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: has perpendiculares constituere aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualium circulo circumscriptam. Eadem enim semper ratione demonstrabitur, illas perpendiculares concurrere, angulosque conficere æquales, si nimirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, vt in pentagono factum est: quæ quidem ipsos angulos bifariam secabunt, quemadmodum in pentagono hic probatum est, &c.

HVC referendum est theorema sequens ad figuras æquilateras, & aquiangulas spectans, quod perutile erit ad inuenienda centra circulorum circa ipsas figuras, siue intra ipsas describendorum, vt ex sequentibus patebit.

IN figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est, recta linea ex quouis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, diuidit quoq; angulum bifariam; Et contrà, recta linea diuidens angulum bifariam secat quoq; latus oppositum bifariã: Si verò numerus angulorum est par, recta linea ex quouis angulo ad oppositum angulum ducta secat vtrumq; angulum bifariam: Et contrà, recta linea secans quemuis angulum bifariam cadit in oppositum angulum, eumq; bifariam quoq; diuidit.

SIT primùm figura æquilatera, æquiangulaq; imparium laterum A B C D E F G, & ex angulo A, demissa recta A H, secet latus oppositum D E, bifariam. Dico angulum quoq; B A G sectum esse bifariam. Ductis enim ex A, rectis ad omnes angulos non proximos; quoniam duo latera B A, B C, duobus lateribus G A, G F, æqualia sunt, angulosq; continent æquales, ex hypothesi; erunt & bases A C, A F, æquales, & tam anguli B A C, G A F, quàm B C A, G F A: ac proinde cùm toti anguli B C D, G F E, ponantur æquales; erunt quoq; reliqui A C D,



8 4. primi.

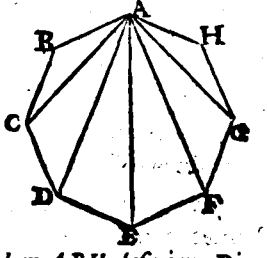
A C D, A F E, æquales. Quia igitur rursus duo latera C A, C D, duobus lateribus F A, F E, æqualia sunt, continentq; angulos æquales, & est ensum est; a erunt & bases A D, A E, æquales, & tam anguli C A D, F A E, quàm C D A, F E A. Atque ita procedendum erit, donec ad latus oppositum perventum sit. Vbi quia rursus toti anguli C D E, F E D, æquales sunt; erunt quoque reliqui A D H, A E H, æquales. Quare cùm duo latera D A, D H, duobus lateribus E A, E H, æqualia sint, angulosque æquales contineant, b erunt etiam anguli D A H, E A H, æquales. Quocirca cùm quotuis anguli B A C, C A D, D A H, totidem angulis G A F, F A E, E A H, sint æquales, singuli singulis; erit quoque totus angulus B A H, toti angulo G A H, æqualis; ac proinde angulus B A G, sectus erit bifariam. Quod est propositum.

a 4. primi.

b 4. primi.

S E D iam recta A H, secet angulum B A G, bifariam. Dico eam secare quoque latus oppositum D E, bifariam. Si enim dicatur latus D E, non secari bifariam, si ex A, ducatur alia recta secans D E, bifariam, secabit eadem & angulum B A G, bifariam, & iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum B A G, secabunt bifariam. quod est absurdum, cùm una modicæ maior esset quàm altera. Recta ergo A H, secans angulum B A G, bifariam, secat quoque latus D E, bifariam. Quod est propositum.

S I T deinde figura æquilatera, & æquiangula parium laterum A B C D E F G H, & ex angulo A, ad angulum oppositum E, ducatur recta A E. Dico rectam A E, secare tam angulum B A H, quàm D E F, bifariam. Ductis enim ex A, ad omnes angulos non proximos rectis; demonstrabimus, & in antecedente figura, quotuis angulos B A C, C A D, D A E, totidem angulis H A G, G A F, F A E, esse æquales, singulos singulis; ideo totum angulum B A E, toti angulo H A E, æqualem esse, nec non & angulum D E A, F E A, esse æqualem. Vterq; igitur angulum B A H, D E F, secabitur bifariam. Quod est propositum.

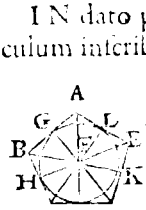


S E D iam recta A E, secet angulum A B H, bifariam. Dico eam cadere in angulum oppositum E, eumque dimidare bifariam. Si enim non dicatur cadere in E, si ex A, ad E, ducatur alia recta, secabit ea angulum B A H, bifariam, & iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum B A H, bifariam secabunt. quod est absurdum. Recta ergo A E, secans angulum B A H, bifariam, cadit in E, secatq; propterea, & demonstratum est proxime, angulum D E F, bifariam quoque. Quod est propositum.

PROBL.

xiij. PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.



a 9. primi. SIT inscribendus circulus in dato pentagono A B C D E. *a* Diuidantur duo eius anguli B A E, A B C proximi bifariam rectis A F, B F, quæ coeant in F. Cùm enim ex scholio præcedentis propos. rectæ A F, B F, secent opposita latera C D, D E, bifariam, necesse est, duas rectas A F, B F, se mutuò intra pentagonum secare, priusquam rectis C D, D E, occurrant. Connectantur deinde rectæ F C, F D, F E. Quoniam igitur latera A B, B F, trianguli A B F, æqualia sunt lateribus C B, B F, trianguli C B F. Sunt autem ex constructione, & anguli ipsis contenti æ-

b 4. primi. quales A B F, C B F; *b* erunt bases A F, C F, & anguli B A F, B C F, æquales. Cùm igitur anguli B A E, B C D, ponantur æquales, & B A F, dimidium sit anguli B A E, per constructionem; erit & B C F, dimidium anguli B C D. Diuisus est ergo angulus B C D, bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos C D E, D E A, diuisos esse bifariam. Ducantur iam ex F, ad singula Pentagoni latera perpendiculares F G, F H, F I, F K, F L. Quoniam igitur duo anguli F G A, F A G, trianguli F A G, æquales sunt duobus angulis F L A, F A L, trianguli F A L; estque latus A F, subten-

c 26 primi. sum vni æqualium angulorum commune, *c* erunt & rectæ F G, F L, æquales. Similiterq; ostendentur reliquæ perpendiculares F H, F I, F K, æquales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & interuallo F G, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam verò latera pentagoni circulum hunc tangũt, per coroll. propos. 16. lib. 3. eo quòd angulos rectos faciant cum semidiametris F G, F H, &c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

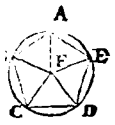
SCHOLIVM.

EADEM prorsus arte in quacunque figura aquilatera, & aquiangula circulum describemus. Semper enim ostendemus, dimissis duobus angulis proximis bifariam, si ex puncto concursus linearum angulos diuidentium perpendiculares ducantur ad latera, eas inter se esse æquales: ac proinde punctum illud concursus centrum esse circuli inscribendi. Concurrent autem necessariò intra figuram duæ illæ rectæ, quæ angulos duos proximos secant bifariam: propterea quòd in figura imparium laterum diuidunt latera opposita bifariam; in figura verò parium laterum, angulos oppositos bifariam, vt in scholio antecedentis propos. ostensum est.

THEOR.

PROBL. 14. PROPOS. 14. XIX.

CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.



SIT circa pentagonum A B C D E, æquilaterum, & æquiangulum, circulus describendus. Diuisis duobus angulis B A E, A B C, bifariam rectis A F, B F, quæ coeant in F, intra pentagonum, vt in antecedente propos. demonstratum est; & coniunctis rectis F C, F D, F E, ostendemus, vt in præcedenti problemate, reliquos etiam angulos B C D, C D E, D E A, sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter se æquales, quòd toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo A F B, duo anguli æquales sunt F A B, F B A; *a* erunt rectæ F A, F B, æquales. Eademque ratione erunt reliquæ F C, F D, F E, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, interuallo autem F A, transibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.

a 6 *primi.*

SCHOLIVM.

EODEM prorsus artificio circa quamlibet figuram æquilateram, & æquiangulam circulum describemus: Semper enim ostendemus, diuisis duobus angulis proximis bifariam, rectas ex puncto concursus linearum angulum diuidentium ad angulos figuræ ductas, inter se esse æquales: ac propterea punctum illud concursus centrum esse circuli circumscribendi.

PROBL. 15. PROPOS. 15. XV.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum & æquiangulum inscribere.



SIT in dato circulo A B C D E F, cuius centrum G, inscribendum hexagonum æquilaterum, & æquiangulum. Ducta diametro A D, describatur circulus ex centro D, interuallo verò D G, qui secet circulum datum in punctis C, & E, è quibus per centrum G, rectæ extendantur C F, E B. Si igitur connectantur rectæ A B, B C, C D, D E, E F, F A, inscriptum erit in dato circulo hexagonum A B C D E F; quod dico esse & æquilaterum & æquiangulum. Cùm enim recta G C, æqualis sit rectæ G D, & recta D C, æqualis eidem rectæ D G, ex definitione circuli; erunt & rectæ G C, D C, æquales inter se: Ideoque triangulum C D G, erit æquilaterum. Quare *b* tres anguli C G D, G D C, D C G, æquales inter se erunt: qui cùm *c* æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe C G D, tertia pars duorum rectorum.

b 5. *primi.*

c 32. *primi.*

Eodem *mi.*

Eodem modo erit angulus D G E, tertia pars duorum rectorum.

a 13 pri. Sunt autem tres anguli C G D, D G E, E G F, *a* æquales duobus rectis. Reliquus igitur angulus E G F, tertia quoq; pars erit duorum rectorum. Sunt ergo tres anguli C G D, D G E, E G F, inter se æquales; quibus eiam *b* æquales sunt ad verticem anguli F G A, A G B, B G C, erunt sex anguli ad centrum G, æquales.

b 15. pri. c 26. ter. Quare circumferentiæ, quibus insistunt, *d* ac propterea rectæ A B, B C, C D, D E, E F, F A, æquales erunt. Quapropter æquilatum est hexagonum A B C D E F. Rursus quia circumferentia B C, æqualis est circumferentiæ A F; si addatur cõmunis C D E F, erunt circumferentiæ B C D E F, A F E D C, æquales. Anguli igitur ipsis insistentes B A F, A B C, *e* æquales erunt. Similiterque ostendemus, reliquos angulos B C D, C D E, D E F, E F A, æquales esse cuilibet horum, quia nimirum quilibet insistit arcui compositi ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inscripta, demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes æqualibus arcubus insistere. Quare æquiangulum quoq; erit hexagonum A B C D E F. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendũ erat.

d 29. ter. e 27. ter.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, Hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli. Nam D G, latus hexagoni, æquale est semidiametro D G, ex definitione circuli.

SCHOLIVM.

CÆTERVM per ea, quæ dicta sunt de pentagono propos. 12. 13. & 14 describemus hexagonum æquilaterum, & æquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus, & denique circa eidem hexagonum describemus circulum. Nam, vt hexagonum circulo circumscribatur, inscribendum prius erit hexagonum intra circulum, vt hac propos. 15. docuit Euclides. Si vero circulus vel in hexagono, vel circa hexagonum describendus sit, diuidendi erunt duo anguli proximi bifariam. Reliqua deinde perficienda, vt propos. 12. 13. 14. traditur.



PORRO ex his quoque facilè demonstrabimus, dari posse triangulum Isosceles oxygonium, cuius tertium latus Strouis æqualium maius sit, sine in quo Strumuis laterum æqualium tertio minus sit. Id quod ad defin. 28. lib. 1. admonuimus. Sit enim A, centrum circuli B C D E, in quo

f 15. quarti. *sexta pars sit D E, & quarta B E. Erit ergo subtensa D E, semidiametro æqualis. Ejs ex quouis puncto C, inter B, & D, ad E, recta ducatur C E; erit hæc maior quam D E, ex scholio propos. 19. lib. 3. hoc est, maior, quam semidiameter. Quare iunctis duabus semidiametris A C, A E, erit triangulum A C E, Isosceles, cuius tertium latus*

tha C E, vtrouis æqualium A C, A E, maius est. Dico idem esse oxygonium. Quoniam enim a *anguli A C E, A E C, æquales sunt,* b *& simul duobus rectis minores, erit vterque acutus. Ducta item recta A B, erit angulus B A E, quadrantis B E, in centro insistens rectus, ex fenotio propos. 27. lib. 3. ac proinde C A E, acutus erit. Oxygonium ergo est Isosceles triangulum A C E, habens tertium latus C E, vtrolibet æqualium maius. Quod est propositum.*

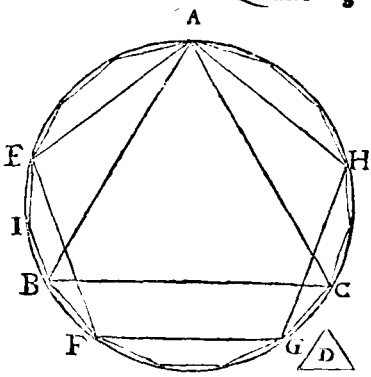
a 5. *prisimi.*

b 17 *primi.*

PROBL. 16. PROPOS. 16. xvj.

IN dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT in dato circulo A B C, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo æquilatero D, quod ex coroll. propos. 5. lib. 1. erit etiã æquiangulum; *c* inscribatur ei æquiangulum triangulum A B C, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterũ, ex coroll. propos. 6. lib. 1. *d* eruntque tres arcus A B, B C, C A, æquales, vel propter tres rectas A B, B C, C A, æquales, vel propter tres æquales angulos A, B, C, trianguli A B C. Quelium igitur partiũ æqualium quindecim est circumferentia tota A B C, talium quinque erit arcus A B, qui tertia pars est totius circumferentiæ. *e* Inscribatur rursus in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum A E F G H, applicans vnum angulorum ad punctum A, *f* eruntque quinque arcus A E, E F, F G, G H, H A, æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim est tota circumferentia A B C, talium trium erit arcus A E, quinta pars existens totius circumferentiæ. Itaque cùm arcus A B, contineat tales partes quinque, & arcus A E, tres; continebit reliquus arcus E B, duas. Diuiso *g* ergo arcu E B, bifariam in I, erit arcus B I, pars decimaquinta totius circumferẽtiæ. Quare ducta recta B I, subtendet decimaquintam partem totius circumferentiæ; cui si aliæ quatuordecim *h* æquales in circulo accommodentur, inscriptum erit in circulo quintidecagonum æquilaterum, quod *i* & æquiangulum est, cùm eius anguli subtendant arcus æquales, compositos videlicet ex 13. arcubus æqua-



c 2. *quarti.*

d 26. *&* 28. *tertij.*

e 11. *quarti.*

f 28 *tertij.*

g 30. *tertij.*

h 1. *quarti.*

i 27. *tertij.*

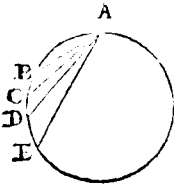
æqualibus omnes, vt perſpicuum eſt. In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

SIMILITER autem per ea, quæ dicta ſunt de pentagono ſupra, propoſ. 12. 13. & 14. deſcribemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribemus; & tandem circa datum quintidecagonum deſcribemus circulum.

SCHOLIVM.

EX huius problematis ſtructura, atque demonſtratione colligi poteſt methodus, atque ars quædam, qua infinita propemodum figuræ in dato circulo inſcribantur. Nam quia recta A B, denominatur a ternario, quod ea ſit latus trianguli æquilateri, & recta A E, à quinario, quod ea ſit latus pentagoni; ſi multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex illis duobus lateribus in circulo deſcriptis, inſcribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumq; æqualium, hac ratione. Denominator lateris A B, hoc eſt, 3. exceditur à denominatore lateris A E, id eſt, a 5. binario. Igitur arcus B E, continebit duo latera figuræ prædictæ; idemque diuiſo arcu B E, bifariam in F, erit ſubtenſa recta B I, latus figuræ 15 laterum, angulorumq; æqualium; vt demonſtratum fuit. Hac fere arte vſus eſt Euclides in deſcribendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiuſmodi Theorema.

SI in circulo ab eodem puncto inſcribantur duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum; continebit arcus inter illa latera incluſus tot latera alterius figuræ inſcribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter ſe differunt denominatores eorundem laterum: Continebit autem figura inſcribenda tot latera, angulosque æquales, quot vnitates ſunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.



INSCRIBANTVR in circulo ABCDE, initio ſemper facto à puncto A, plurima latera; Hexagoni quidem A B, pentagoni verò A C, & quadrati A D, trianguli denique æquilateri A E. Quoniam igitur denominator lateris A B, numerus 6. excedit denominatorem lateris A C, nempe 5. vnitate; continebit arcus B C, inter ea latera incluſus vnum latus figuræ 30. laterum, angulorumq; æqualium. Nam ex multiplicatione 5 cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita eſſe, ſic demonſtrabitur. Quoniam

partium

partium æqualium 30. est tota circumferentia, talium 5. est arcus AB, sexta pars circumferentiæ; & talium 6. est arcus AC, quinta pars circumferentiæ. Igitur arcus BC, unam talem continebit partem.

PARI ratione arcus BD, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumq; æqualium. Nam denominator lateris AB, videlicet 6. superat denominatorem lateris AD, nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6 fiunt 24.

ITA quoque arcus BE, comprehendet tria latera figuræ 18 laterum.

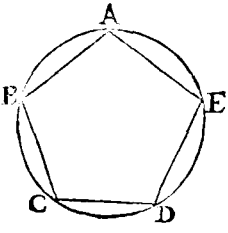
ARCVS verò CD, complectetur unum latus figuræ 20. laterum.

ARCVS autem CE, duo latera figuræ 15. laterum.

ARCVS denique DE, continebit unum latus figuræ 12. laterũ, angulorumq; æqualium. Hac itaque arte, ac methodo inuestigabuntur ferè infinitarum figurarum latera.

NON est autem prætereundum hoc loco, omnem quidem figuram æquilateram circulo inscriptam, esse quoque æquiangulam: at non omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam necessariò æquiangulam quoque esse, nisi quando numerus angulorum ipsius est impar; vel si par est, quando duo anguli proximi æquales sunt, vel duo non proximi, dummodo vno eorum primo posito, alter occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (si enim secundum occuparet, esset primo proximus. quod est contra hypothesin.) sextum, octauum, decimum, &c. Qua in re nonnulli hallucinati sunt, putantes omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam, necessariò esse quoq; æquiangulam: inter quos est Campanus Euclidis non obscuri nominis interpres.

SIT enim figura æquilatera quotcunq; angulorum ABCDE, circulo inscripta. Dico eam necessario esse quoq; æquiangulam. Cum enim latera AB, BC, CD, sint æqualia, a erunt arcus quoque AB, BC, CD, æquales; ac proinde CBA totius arcus ABC, totis arcui BCD, æquales erunt. Reliqui ergo ADC, BED, in eodem circulo æquales erunt. Quocirca b anguli ABC, BCD, illis insistentes æquales e-



a 28 *tertij.*

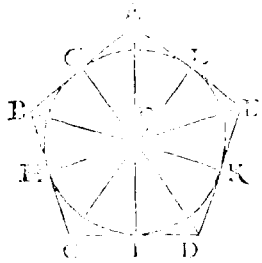
b 27 *tertij.*

runt.

rum. Eodemq; modo omnes anguli ostendentur esse æquales, quotquot illi sint; ac proptereà figura ABCDE, æquiangula est, sive angulorum numerus sit par, sive impar. Quod ostendendum erat.

SI verò figura æquilatera ABCDE, quotlibet angulorum numero imparium circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam necessario esse quoq; æquiangulam. Ductis enim ex F, centro ad omnes angulos, & ad puncta contactuum, rectis, a erunt ha ad latera perpendiculares. Et quoniam tangentes AG, AL, ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. æquales sunt; erunt duo latera AG, AF, duobus lateribus AL, AF, æqualia. Cùm ergo & basis FG, FL, ex centro sint æquales; b erunt & anguli ad A, æquales: ac proinde angulus BAE, divisus erit bifariam. Non aliter ostendemus reliquos omnes angulos figuræ sectos esse bifariam. Rursus quia duo latera AB, BF, duobus lateribus CB, BF, æqualia sunt, angulus ABF, angulo CBF, æqualis; c erunt quoq; bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cùm ergo hi anguli sint semisses angulorum BAE, BCD, & totus angulus BAE, totius BCD, dimidium est, erunt toti anguli BAE, BCD, æquales. Eadem ratione erit recta CF, rectæ EF, & angulus BCD, anguli CDE, æqualis: Atq; ita deinceps, si figura plures habeat angulos, erit is angulus tertius quisq; angulus est, à quo tertius est, sive is primus in medio æqualium: hoc est, primus (constitutis autem potest primus quivis angulus) æqualis erit tertio, tertius quinto, quintus septimo, &c. Atq; ita omnes anguli in locis imparibus positi, æquales erunt. Eademq; ratione omnes anguli parium locorum, sive sint quartus, sextus, octauus, decimus, &c. æquales inter se erunt. Nam quartus sit à secundo tertius, & sextus à quarto tertius, &c. Itaq; quoniam figura proposita habet numerum angulorum imparem, erit primus angulus, qui æqualis est ultimo angulorum imparium, æqualis ultimo angulo impari proximo. Hic autem ultimus angulus erit tertius à primo, qui æqualis, qui tertius est ab ultimo, primo, & duobus alijs à secundo tertium locum occupantibus, &c. decimo, &c. usque ad penultimum. Quare figura proposita inter se æquales erunt.

Quadrilateris aquilateris circulo circumscriptis, quod [illegible] rectum parem, locum non habet. Ex eo [illegible] angulum æqualem esse tertio, quinto, septimo, nono, & alijs deinceps imparia occupantibus; nunquam autem proba-



a 18. tert. elq.

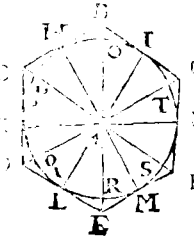
b 8. primi.

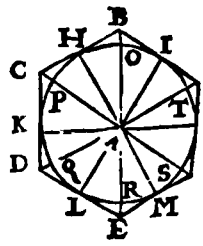
c 4. primi.

probabitur, primum & vltimo esse æqualem, eo quòd & vltimus locum parem occupet. Vt in quadrangulo quartum, in hexagono sextum, in octogono, octauum, &c. Sic etiam locum quemcunque impari numero diuisum colligetur, angulum secundum ipsi dextro esse quatenus ad vltimum decimo, & alijs locum parem occupantibus æqualem, quemadmodum secundum angulum esse primo æqualem, propterea quòd & ipse vltimum imparem occupat. Itaque omnes anguli vltra primum & vltimum soli quoque anguli locorum parium inter se semper consimiles sunt æquales.

QVOD si duo anguli proximi, & ijdem duo non proximi, dummodo vnus eorum in loco impari, alter verò in loco pari existat, fuerint inter se æquales, eadem demonstrandi ratione, & concludetur omnium angulorum æqualitas. Nam si primus vt alius æqualis sit secundo, (quando enim duo anguli proximi sunt æquales, licebit vnum eorum dicere primum, & alterum secundum,) si ea ostensum sit, primum esse æqualem quoque omnibus angulis in impari loco existentibus, secundum verò omnibus parium locorum, erunt omnes inter se æquales. Si autem primus angulus æqualis sit alteri loco pari existenti, (quando enim duo anguli non proximi sunt æquales, quorum vnus in loco impari, & alter in loco pari existat, dicere licebit eorum vnum primum, & alterum vel quartum, vel sextum, vel octauum, &c. prout ab illo distiterit, non autem secundum, quia secundus primo proximus est,) eum primum ostensus sit æqualis omnibus alijs locorum imparium, alter verò omnibus parium locorum, atque adeo & vltimo angulo, erit quoque primus secundo æqualis: licebit dicere primum esse æqualem quemcunque numerum habenti, si proximè deinceps primum, omnes quoque pares erunt æquales.

VERVM si dicat se hoc aliquis quia quamcunque rationem [illegible] ratione colligi nequeat, quòd cum sit numerus primus, [illegible] numeros sit par, circulo circumscripto, [illegible] non colligi tamen contrarium [illegible] esse æquilatam, non quidem propter [illegible] sed propter [illegible] amplam aliam; adeò vt nullus [illegible] circulo circumscripta, quin [illegible] Campanus cum [illegible] inquam, aliquis [illegible] infinitas figuras æquilateras [illegible] numero parij circumponi, [illegible] esse æquiangulas. Sit enim circulus [illegible] centro A describatur, cuius circuli diametros BE, CF, DG in [illegible] O P, P Q, Q R, R S, S T, T O, [illegible] quemadmodum prop. 15 in descriptione hexa-





goni traditum est. Deinde arcus O P, sectetur inaqualiter in H, sitq; maius segmentum O H, & minus P H. Arcui quoq; O H, aquales sumantur O I, Q K, Q L, S M, S N, ita vt sex arcus aquales ad vtrasq; partes trium semidiametrorum non proxim. a. ũ. sed inter binas singulis relictis in medio, sumãtur. Erũtq; ad vtrasq; partes semidiametrorũ relictarum sex reliqui arcus P H, P K, R E, R M, T N, T I, aquales. Ducta item ex centro A, ad puncta H, K, L, M, N, I, rectis lineis, ducatur per H, ad H A, perpendicularis B C, secans semidiametros A O, A P, productas in B C, quæ circulum tanget in H, ex coroll propos. 16. lib. 3. Coibunt autẽ necessariò recta H B, A B, propterea quòd duo anguli B H A, B A H, duobus rectis minores sunt. Est enim B H A, rectus, & B A H, insistens arcui O H, qui minor est quadrante, minor recto, ex scholio propos. 27. lib. 3. Iungatur quoq; recta B I. Et quia duo latera A H, A B, duobus lateribus A I, A B, aqualia sunt, a anguloq; q̃ continẽt aquales aqualibus arcubus O H, O I, insistentes; b erunt quoq; bases B H, B I, & anguli H, I, aquales. Cùm ergo B H A, rectus sit ex constructione, erit & B I A, rectus: ac propterea recta B I, circulum tanget in I, conueniet q; cum semidiametro A T, producta in G, ob angulos A I G, G A I, duobus rectis minores: Est nam q; A I G, ostensus rectus, at G A I, recto minor est, ex scholio propos. 27. lib. 3. ob arcum T I, quadrante minorem. Et quoniam duo anguli I, A, trianguli G A I, duobus angulis H, A, trianguli C A H, aquales sunt; (Nam I, H, recti sunt, P H,) lateraq; A I, A H, quibus adiacent, aqualia; d erunt quoq; latera G I, G A, lateribus H C, C A, aqualia. Cùm ergo & B I, ipsi B H, ostensa sit aqualis; erit tota B G, toti B C, aqualis. Eadem ratione, ducta recta G N, tanget circulum in N, coibitq; cum semidiametro A F, producta in F, eritq; ipsi G B, aqualis. Item iuncta recta F M, circulũ tanget in M, & cum semidiametro A R, producta conueniet in E, ipsiq; F G, aqualis erit. Similiter ducta recta E L, tanget circulum in L, & semidiametro A Q, protracta occurret in D, ipsiq; E F, fiet aqualis. Deniq; iuncta recta D K, eundem circulum tanget in K, & cum semidiametro A P, producta concurret in C, fietq; ipsi D E, aqualis. Quòd autem D K, in eodẽ puncto C, occurrat semidiametro A P, in quo recta B H, eidem occurrit, manifestũ est. Si enim in alio puncto eam secaret, cum ducta recta C L, circulum tangeret in K, & demonstratum est, tangerent duæ rectæ circulum in eodem puncto K; aq; adeò inter peripheriam, & tangentem interciperetur ad punctum contactus vna linea recta: quod fieri non posse, e Euclides demonstrauit. Est ergo hexagonum B C D E F G, circulo circumscriptum, æquilaterũ. At idem esse

a 27. ter tij.
b 4. primi.
a 27. ter tij.
d 26. primi.
e 16. ter tij.

esse non æquiangulum, ita demonstrabimus. Quoniam figura BCDEFG, æquilatera est, erunt quidem per ea, quæ paulo antè monstrauimus, anguli locorum imparium, nimirum B, D, F, inter se, & anguli locorum parium, vt C, E, G, inter se, æquales; omnes autem scilicet erunt bifariam à semidiametris: At quia tres anguli trianguli ABH, a tribus angulis trianguli ACH, æquales sunt, ablatis rectis ad H, erunt reliqui duo reliquis duobus æquales: Est autem BAH, maior quàm CAH, ex scholio propos. 27. lib. 3. quod & arcus OH, maior sit arcu PH. Igitur reliquus ABH, reliquo ACH, minor erit; quæ cum semisses sint totorũ angulorum B, C, & ostensum sit; erit totus quoq; CBG, toto BCD, minor. Eod. mo. toti anguli D, F, totis angulis E, G, minores ostendentur. Non est ergo hexagonum BCDEFG, æquiangulum. Quod erat ostendendum. a 32. primi.

EADEM omnino constructio, & demonstratio fieri potest in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterum, si circulus quatuor diametris secetur in 8. partes, vel quinq; diametris in 10. &c.

QVOD si figura æquilatera quotcunq; angulorum circulo circumscribatur per doctrinam propos. 12. descripta nimirum prius simili figura intra circulum, & ductis lineis circulum tangentibus in figura inscripta angulis, &c. & factum est in pentagono propos. 12. tum necessario figura illa erit simul æquiangula, vt ex demonstratione eiusdem propos. liquido constat.

OBSERVATIONE quoq; dignum est, omnẽ quidem figuram æquiangulam circulo circumscriptam, esse etiam æquilateram: at non omnem figuram æquiangulam circulo inscriptam necessariò æquilaterã quoque esse, nisi quando numerus laterum ipsius est impar; vel si par est, quando duo latera proxima æqualia sunt, vel duo non proxima, dummodo vno eorum posito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (si enim secundũ occuparet, esset primo proximum, quod est contra hypothesin) sextum, octauum, decimũ, &c. Qua in re facilè etiã quis hallucinari possit.



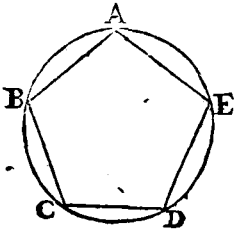
SIT enim figura æquiangula ABCDE, quotuis laterum circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam esse quoque necessario æquilateram. Ducãtur enim ex F, centro ad puncta contactuum rectæ FG, FH, FI, FK, FL, b *quæ ad latera figuræ sunt perpendiculares; emittantur quoq; ex centro F, ad anguios figuræ rectæ FA, FB, FC, FD, FE. Et quoniam tangentes AG, AL, ex 2. coroll propos. 36. lib. 3. æquales sunt, erunt duo latera AG,* b 18. tertij.



AF, trianguli AGF, duobus lateribus AL, AF, trianguli ALF, aqualia: Sunt autem & bases FG, FL, ex centro aquales. a *Igitur anguli quoq; ad A, illis lateribus comprehensi aquales sunt, ideoq; angulus BAE, sectus est bifariam. Non aliter ostendemus, reliquos angulos figura bifariam sectos esse, ac proinde cùm toti anguli ponantur aquales, & eorum semisses aquales erunt. Quocirca duo anguli A, G, trianguli AFG, duobus angulis B, G, trianguli BFG, aquales erunt: Est autem latus FG, vni aqualiũ angulorum oppositum commune.* b *Igitur latera quoq; AG, BG, aqualia erunt; atq; ideo latus AB, sectum erit bifariam in G. Eodem modo probabis, reliqua figura latera secta esse bifariam. Quia ergo AG, AL, dimidia aquales sunt, erunt quoq; tota linea AB, AE, aquales. Eadem ratione AB, BC, & BC, CD, & CD, DE, & DE, EA, aquales erunt. Quamobrem figura ABCDE, aquilatera est, siue numerus laterum sit par, siue impar. Quod erat demonstrandum.*

a 8. primi.

b 26. primi.



SIT rursus figura aquianguia AB-CDE, quotuis laterum numero imparitũ circulo inscripta. Dico eam necessario esse quoq; aquilateram. Quoniam enim anguli BAE, ABC, ponuntur aquales; c *erunt arcus BCE, ADC, quibus insistunt, aquales: quibus demptis ex communi circulo, aquales quoq; erunt reliqui arcus BAE, ABC. Dempto ergo communi arcu AB, erunt & reliqui arcus AE, BC, aquales. Eadem ratione arcus BC, arcui DE, aqualis erit;* d *proinde & latus AE, lateri BC, & latus BC, lateri DE, aquale erit: atq; ita deinceps si figura plura habeat latera, erit semper tertiũ quoq; latus ei, à quo tertium est, vno relicto in medio, aquale: hoc est, primum (constitutis autem quotuis latus potest primum) aquale erit tertio, tertium quinto, quintum septimo, septimum nono, &c. atque in hunc modum omnia latera in locis imparibus posita, aqualia inter se erunt: Eademq; ratione omnia latera parium locorum, vt secundum, quartum, sextum, octauum, decimum, &c. aqualia inter se erunt, cùm quartum sit à secundo tertium, & sextum à quarto tertium item occupet locum, &c. Itaque quoniam propositæ figuræ numerum laterum habet imparem, aquale erit vltimum primo, cui proximum est. Hoc autem vltimum latus eadem ratione aquale erit secundo, quod ab vltimo tertium est, primo in medio relicto; & omnibus aliis à secundo tertium locum occupantibus, vt quarto, sexto, octauo, &c. vsque ad penultimum. Quocirca omnia latera figuræ proposite inter se aqualia erunt. quod ostendendum erat.*

c 26. tertij.

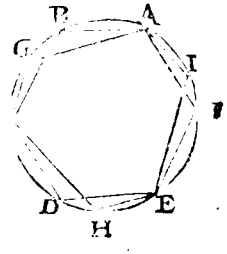
d 29. tertij.

HAEC etiam demonstratio in figuras aquiangulas parium late-

rum

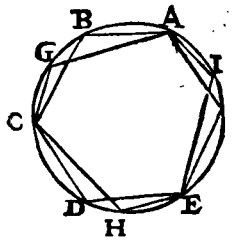
rum circulo inscriptas non quadrat. Ex ea enim solum concludetur, primum latus esse æquale tertio quinto, septimo, & aliis loca impara occupantibus; nunquam autem per eam demonstrabitur, primam ultimo esse æquale, præterea quod ultimum occupat locum parem, vt in quadrangulo quartum, in hexagono sextum, &c. Partitione eadem demonstratio conuincet tantum latus secundum æquale esse quarto, sexto, octauo, & aliis loca paria possidentibus, at per eam nunquam colligetur, secundum latus esse æquale primo, eo quod primum in loco impari locetur. Itaque sola latera imparium locorum inter se, & sola latera in paribus locis posita inter se conuincentur esse æqualia.

QVOD si duo latera proxima, vel etiam duo non proxima dummodo vnum eorum in loco impari, alterum verò in loco pari posita sint, fuerint inter se æqualia, tum demum superior demonstratio concludet omnium laterum æqualitatem. Nam si primum latus (nam sit æquale, (quando enim duo proxima latera æqualia sunt, ea vocabo vnum primum, & alterum secundum) cum demonstratum sit, primum æquale esse quoque omnibus lateribus locorum imparium secundum vero omnibus parium locorum, perspicuum est, omnia inter se esse æqualia. Si autem primum latus æquale sit alteri cuiuspiam paris occupantis, (quando enim duo latera non proxima sint æqualia, ita tamen, vt eorum in loco impari, & alterum in pari reperiatur, hoc sit eorum vocabo primum, & alterum vel quartum, vel septimum, &c. prout ab illo deficient, non autem secundum, quia secundus primo proximum est.) cum primum assumptum sit æquale omnibus aliis positis in locis imparibus, alterum vero omnibus loca paria occupantibus, atque adeo & secundo latere; erit quoque primum secundo æquale: ac proinde duo proxima inter se æqualia erunt. Vt ergo proximè demonstratum est, omnia latera erunt inter se æqualia.



SI quis autem dubitet, dari posse figuram æquiangulam parium laterum circulo inscriptam, quæ non sit æquilatera (quanquã enim superior demonstratio non probet omnia latera esse æqualia, si omnes anguli æquales sint; contrarium tamen ex ea inferre non licet.) demonstrabimus id Geometrice hac ratione. Primum quidem constat id in figuris quadrilateris. Nam figura altera parte longior æquiangula est, quippe cum omnes eius anguli sint recti, sed non æquilatera. Quis autem dubitet,

cam circulo posse inscribi? Deinde verò hexagonum aequilaterum & aequiangulum A B C D E F, in circulo descriptum; sumaturq; in arcu B C, quodvis punctum G, & arcus BG, in tertio arcu ab eo arcus aequalis D H; Item in quinto ab eo arcus aequalis F I, jungaturq; recta A G, G C, C H, H E, E I, I A. Dico hexagonum A G C H E I, aequiangulum esse, at non aequilaterum. Quod enim sit aequiangulum, sic ostendemus. Anguli B, G, a aequales sunt in eodem segmento A B C. Eadem ratione aequales sunt anguli D, H, & F, I. Praterea quia arcus B G, D H, aequales sunt, per constructionem; addito communi G D, erunt toti arcus BCD, G C H, aequales. Igitur reliqui ex circulo arcus B F D, GFH, aequales erunt; b ac proinde anguli B C D, G C H, illis insistentes aequales quoq; erunt. Non aliter ostendemus & angulos D E F, H E I, & F A B, I A G, aequales inter se esse. Ergo sex anguli hexagoni A G C H E I, sex angulis hexagoni A B C D E F, aequales sunt, singulis singulis: ideoq; cùm hoc ponatur aequiangulum, erit quoq; illud aequiangulum. Quod autem non sit aequilaterum, ita probabimus. Latus A G, latere A B, maius est, & latus G C, latere B C, minus, ex scholio propos. 29. lib. 3. Item eadem ratione latera C H, E I, latesibus C D, E F, maiora sunt, & latera H E, I A, lateribus D E, F A, minora. Cùm ergo latera A B, B C, C D, D E, E F, F A, aequalia ponantur, erunt A G, G C, C H, H E, E I, I A, inaequalia: quanquam A G, C H, E I, inter se, & G C, H E, I A, inter se, relicto semper uno in medio, aequalia sint, ut suprà ostendimus.



a 21. tertij.

b 27. tertij.

IDEM prorsus eodem modo demonstrabitur fieri posse in octogono, decagono, & alijs figuris pariũ laterum, si in circulo inscribantur prius octogonũ, decagonũ, & alia figura aequilatera, atq; aequiangula.

QVOD si figura inscribatur circulo per doctrinam propos. 11. & 16. erit ea perpetuò & aequiangula, & aequilatera, vt ex earum propositionum demonstrationibus perspicuum est.

PORRO qualemcunq; figuram aequilateram & aequiangulam in circulo nouerimus inscribere, talem etiam sciemus describere circa circulum, & in ea circulum quoq; inscribere, & circa eandem describere circulum, si artem imitemur, qua tradita fuit de pentagono, propos. 12. 13. & 14.

RVRSVS inscripta figura quacunque aequilatera & aequiangula in circulo, inscribetur in eodem figura, qua habeat latera duplo plura. Diuisis etenim arcubus, quos latera subtendunt, bifariam, & subtensis rectis lineis, constat propositum. Vt per triangulum aequilaterum inscriptum inscribetur & hexagonum, & ideo dodeca-

decagonum, figura 24. laterum, &c. Sic quoque ex quadrato in circulo descripto, inscribetur octogonum, atque adeo figura 16. laterum, figura 32. 64. 128. laterum, &c.

CÆTERVM omnes figuræ aquilateræ & æquiangulæ in circulo inscribi possunt beneficio Isoscelium triangulorum, & recte hoc loco nonnulli Euclidis interpretes monent.

IMPARIVM enim laterum figuræ inscribentur beneficio triangulorum Isoscelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad Verticem sunt, angulorum. Vt beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin æqualis est ei, qui ad Verticem, descripti in circulo inscribetur prima figura imparium laterum, hoc est, triangulum aquilaterum. Nam Isosceles huiusmodi, triangulum aquilaterum erit. Quod si in circulo inscribatur Isosceles, cuius vterque angulorum ad basin duplus sit eius, qui ad Verticem, inscribetur secunda figura imparium laterum, nimirum pentagonum, in circulo. si duo anguli æquales secentur bifariam, Geleti propos. 11. fuit ostensum. At Heptagonum, tertia figura laterum imparium, inscribetur in circulo, per triangulum Isosceles habens vtrumque angulorum ad basin triplum eius, qui ad Verticem, si duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad Verticem. Ita quoque figura quarta imparium laterum, quale est Hennagonum, in circulo inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin quadruplus est eius, qui ad Verticem, si vterque distribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad Verticem, &c.

DIVISIO autem hac angulorum ad basin in partes æquales perfacilis est. Nam si anguli ad Verticem constituantur ad basin tot anguli æquales ordine, quot vnitates sunt in numero proportionis multiplicis, quam vterque angulorum æqualium habet ad reliquum, diuisus erit angulus in partes æquales. Verum descripto huiusmodi triangulo Isoscele in circulo, describetur figura in circulo sine diuisione angulorum ad basin, si basi accommodentur recta æquales in circulo. Basis enim semper est vnum figura latus, vt in Pentagono patuit.

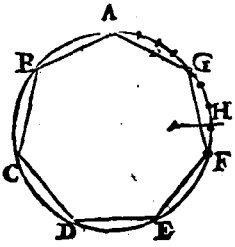
PARIVM verò laterum figuræ in circulo inscribentur, beneficio Isoscelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad Verticem sunt, angulorum. Vt quadratum constituens primam figuram parium laterum, inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin sesquialter est anguli ad Verticem. Nam angulus ad Verticem insistit quartæ parti circumferentiæ. Cum enim duo anguli ad basin simul contineant tres angulos æquales ei, qui ad Verticem, quod quilibet semel eius continet, & dimidiatum insuper eius partem; subtendent ipsi tres partes circumferentiæ, & idcirco angulus ad Verticem vnam duntaxat. Hexagonum, hoc est, secunda figura laterum parium, inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin duplus sesquialter est eius,

qui ad Verticem, anguli. Nam angulus ad Verticem, insistit sextæ parti circumferentiæ, cum reliqui anguli simul compositi contineant ipsum quinquies; propterea quod quilibet bis eum contineat, & dimidiatam eius insuper partem. Itu quoque Octogonum, id est, tertia figura laterum parium, inscribetur beneficio Isoscelis habentis Vtrumque angulorum ad basin triplum sesquialterum anguli ad Verticem.

SI igitur inuenta fuerit ars, qua Isoscelia triangula constituantur habentia angulos ad basin multiplices eorum, qui ad Verticem sunt, angulorum, quemadmodum Euclides Isosceles fabricauit habens Vtrumque angulorum ad basin duplum anguli ad Verticem, facilè in circulo describentur figura omnes laterum imparium. Et si arcus earum diuidantur bifariam, inscribentur quoque omnes figuræ parium laterum, post quadratum, atque adeo circumferentia cuiuslibet circuli in quotlibet æquales partes Geometrice diuidetur. Quæ res summam Astronomis afferret vtilitatem. Verum hæc ars adhuc ignota extitit. Non enim rectè sibi eam vendicat Orontius Finæus in libello hactenus, vt ipse ait, desiderato de absolutis figurarum rectilinearum omnium descriptione intra circulum, &c. cum eius demonstrationes falsæ sint, ac sophisticæ, vt Geometricè ostensum est a Petro Nonio Lusitano in libello de erratis Orontij.

NOS tamen ad finem lib. 6 ex Pappo Alexandrino lineam quandam inflexam Geometricè describemus, qua non solum triangula Isoscelia, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant datam proportionem, construantur, ac proinde omnes figuræ æquilaterę, & æquiangula in circulo describantur: verum etiam arcus quiuis circuli distribuatur in quotcunque partes æquales, siue is quadrans sit, siue non. Quin etiam eiusdem lineæ inflexæ beneficio incunda operatione circulus quilibet sine vllo negotio in quadratum æquale commutabitur, vt ibidem dicemus. Quæ res ad hunc vsque diem animos Mathematicorum tenuit suspensos.

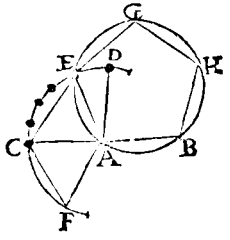
SED deceamus, si placet, qua etiam via figura quauis æquilatera, & æquiangula circulo inscribatur sine triangulis Isoscelibus, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant proportionem datam. Sit ergo in circulo A B C D E F G, inscribendum heptagonum æquilaterum, & æquiangulum. Secetur eius quadrans A H, in septem partes æquales, in tot videlicet, quot latera, angulosve figura inscribenda continet. Secabis autem quadrantem A H, in propositas partes æquales vel ex iis, quæ ad finem lib. 6. nos demonstraturos dximus, vel beneficio circini, dilatando eius crura modo magis, modo minus, donec reperias eorum distantiam



partiri

partiri quadrantem in partes optatas. Facilius enim quadrans in quotuis æquales dividetur partes, quam tota circumferentia quoties-cunque attentando, & quasi repetendo opus, eadem apparatu in parva magnitudine, quam in magna, quantum detrahi, vel addi debeat parti cui beneficio circumscripta, sive partem desideratam non offerat. Secto quadrante in quotlibet partes æquales, vel in plures, si libet, unæ pluribus lateribus æquilaterum, erit recta linea A G, quæ quatuor ejusmodi partes subtendat, latus figuræ inscribendæ. Quoniam enim in tota circumferentia quoties tot partes æquales continentur, in quot quadrans divisus est, constituatur aggregatum ex quotuis partibus toties in tota circumferentia, quoties una pars in quadrante: quia quælibet pars cum aliis tribus quarum singulæ in singulis aliis tribus quadrantibus accipiantur, efficit aggregatum ex quatuor partibus. Quod etiam ita possit fieri. Quoniam partes eandem proportionem habent, quam earum æquemultiplices, ut ab Euclide demonstratur lib. 5. propos. 15. Licebit enim hanc accommodare eam propos. cum ex antecedentibus nullo modo pendeat. Ita se habebit una pars ad quadrantem, ut quadruplum unius partis, hoc est, arcus A G, ad quadruplum quadrantis, id est, ad totam circumferentiam. Quotus ergo pars quadrantis est una illarum, in quas quadrans divisus est, totus erit arcus A G, totius circumferentiæ. Atque ita si quadrans divisus sit in 7. partes, continebuntur eæ, modi partes 28. in tota circumferentia. Igitur 4 efficient $\frac{4}{28}$, hoc est, $\frac{1}{7}$, totius circumferentiæ. Ita quoque si quadrans sectus sit in 11. partes, continebuntur ejusmodi partes 44. in tota circumferentia: atque adeo 4. efficient $\frac{4}{44}$, hoc est, $\frac{1}{11}$. totius circumferentiæ: & sic de cæteris. Itaque si arcus A G, quatuor partium abscindantur arcus continuæ æquales, eisdemque arcubus rectæ subtendantur, inscripta erit circulo figura proposita, ut ex demonstratis liquet.

IAM vero si supra datam rectam lineam quavis figura æquilatera, & æquiangula describenda sit, efficiemus id hac ratione. Sit supra datam rectam A B, constituendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Producta B A, ad C, & A C, ipsi A B, æqualis sit, describatur ex A, per C, arcus circuli; ductaque A D, perpendicularis ad A C, & quadrans sit C D, ex scholio propos. 27. lib. 3. dividatur quadrans C D, in quinque partes æquales, in tot videlicet, quot latera figuræ construenda sit, quarum 4 sint C E, jungaturque recta A E, quæ ipsi A B, æqualis erit. Dico angulum B A E, æqualem esse angulo pentagoni æquilateri & æquianguli. Sumpto enim arcu

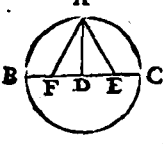


C E æquali

C F, aquali arcui C E, iungantur rectæ C E, G F. Et quoniam C E, rectæ subtendens 4. partes quadrantis, latus est pentagoni æquilateri & æquianguli, & proximè demonstrauimus, in circulo E C F, describendi, erit C F, alterum latus; ac proinde duo latera E C, F C, comprehendent angulum pentagoni æquilateri & æquianguli E C F. Quoniam verò, ducta recta A F, duo latera E C, C A, duobus lateribus
a 8. pri. F C, C A, æqualia sunt, & bases item æquales A E, A F; a erunt an-
b 5. pri. guli E C A, F C A, æquales. Cum ergo, b & anguli A C E, A E C, sint æquales; erit & A C F, ipsi A E C, æqualis: additoque communi
c 32. pri. A C E, totus angulus E C F, duobus angulis A C E, A E C, æqualis erit. Est autem c externus B A E, eisdem internis A C E, A E C, æqualis. Igitur & E C F, B A E, inter se æquales erunt. Cum ergo
d 1. quinti. E C F, sit angulus pentagoni, erit quoque B A E, pentagoni angulus. Quocirca si circa tria puncta B, A, E, circulus describatur, & rectis d A B, A E, d rectæ æquales in eo accommodentur B H, H G, G E, describetur erit pentagonum æquilaterum & æquiangulum descriptum in circulo A B H G E, ac proinde supra datam rectam A B. Quod faciendum erat. Non est autem dubitandum, quin rectis A B, A E, æquales rectæ possint in circulo accommodari, quæ totum circumferentiam absoluant. Nam angulus pentagoni B A E, insistit tribus quintis partibus totius circumferentiæ, singula autem latera A B, A E, singulas quintas partes subtendunt, ac proinde singulæ B H, H G, G E, singulas quoque quintas partes subtendent, cum ipsis A B, A E, sumptæ sint æquales, propterea que totum arcum B G E, continentem tres quintas partes absoluent. Eadem ratio est de aliis figuris æquilateris, & æquiangulis.

Si forte in promptu habeamus aliquam figuram æquilateram, & æquiangulam, cui supra datam rectam lineam desideramus constituere similem, siue ea in circulo aliquo descripta sit, siue non: satis erit vni eius angulo æqualem angulum constituere B A E, in extremo datæ lineæ A B. Si namque, posita recta A E, æquali ipsi A B, per tria puncta B, A, E, circulus describatur, perficiemus figuram propositam, vt ante diximus.

QVONIAM verò longa est, atque difficilis ea inscriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo, quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annectere praxim quandam, quæ vna eademq; opera Ptolemæus lib. 1. magna constructionis, in circulo dato inscribit Pentagonum, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus



circulus A B C, cuius centrum D; Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde diuisa semidiametro C D, bifariam in E, ducatur recta E A, cui æqualis abscindatur E F. Itaque si ducatur recta A F, erit A F, latus Pentagoni, & D F, latus Decagoni

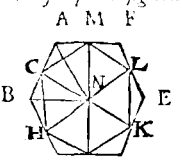
agoni in dato circulo inscribendi, & ipse demonstrat. Caterum cum demonstratio huius rei pendeat ex 13 lib. Euclidis, non videtur hoc loco scribenda, sed in proprium locum, utpote in librum 13. differenda.

NON erit etiam praeter institutum nostrum, aut ab hoc libro alienum, si sequens adhuc theorema adiungamus, videlicet.

SI bifariæ sectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula totidem laterum in illa figura, idem centrum habens.

CENTRVM figuræ æquilateræ, & æquiangulæ appellatur punctum illud, è quo circulus figuræ inscribitur, aut circumscribitur: & idem sit centrum circuli, & figuræ.

SIT igitur figura æquilatera, & æquiangula A B C D E F, cuius laterà bifariam secentur in G, H, I, K, L, M, rectis rectis G H, H I, I K, K L, L M, M G. Dico figuram G H I K L M, inscriptam figuræ A B C D E F, æquilateram esse quoque, atque æquiangulam, eidemque centrum habere. Æquilatera quidem erit, quoniam eius latera cum subdant angulos æquales comprehensos æqualibus rectis, utpote dimidijs laterũ æqualium, a æqualia sunt. Quoniam verò tres anguli A M G, G M L, L M F, quàtres F L M, M L K, K L E, b duobus sunt rectis æquales: Sunt autem A M G, L M F, F L M, K L E, c inter se æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, subtendanturque à basibus æqualibus; Erunt reliqui anguli G M L, M L K, æquales. Eodemque argumento concludemus, reliquos angulos & hisce, & inter se æquales esse. Æquiangula igitur quoque est figura G H I K L M.



a 4. pri.

b 13. pri

c 8. pri.

QVOD autem idem habeat centrum, ita ostendetur. Ex centro N figuræ A B C D E F, ad omnes angulos figuræ inscriptæ ducantur rectæ N G, N H, &c. iungantur quæ rectæ N A, N B. Quoniam igitur A G, G N, latera trianguli A G N, æqualia sunt lateribus B G, G N, trianguli B G N; suntque bases A N, B N, cum sint semidiametri circuli circa figuram descripti, æquales: d Æquales erunt anguli A G N, B G N, idcoque recti. Quare N G, perpendicularis est ad latus A B; Eodemque modo reliquæ N H, N I, &c. perpendiculares erunt ad latera B C, C D, &c. Quæ cum ex defin. 4 lib. 3. ostendant distantias rectarum A B, B C, &c. æquidistare à centro N; æquales ad inuicem erunt. Circulus igitur ex N, intervallo N G, descriptus, per reliquos angulos H, I, K, L, M, transibit; Ac propterea N, centrum erit figuræ G H I K L M, hoc est, circulus circa eam figuram descriptus. Quod est propositum.

d 8. pri.

e 14. ter tij.

NEQVE verò hæc omittenda sunt circa omnes figuras æquilateras

laterus, & æquiangulus, plum triangulum, quadratum, & hexago-
num, circa eum circulum aptari, quot triangula, vel quadrata, vel hexa-
gona, tot esse oportet, quæ aptari, & inter eorum angulos nihil sit
constituant. Nam sex anguli in trian-
quadrato; & tres in hexagono aqui-
sunt quatuor rectis, quantum nimirum
quodlibet in plano, vt ad propos. 15. lib. 1.
unus angulus trianguli æquilateri con-
stres continent $\frac{4}{3}$. vnius recti, hoc est,
usmodi anguli $1\frac{1}{3}$. vnius recti, id est,
anguli in quadrato sunt quatuor recti.
xagoni æquilateri, & æquianguli con-
s sex continent $\frac{6}{3}$ vnius recti, hoc
usmodi anguli $1\frac{2}{3}$. vnius recti, id est,
planus æquilaterus, & æquiangulus non
pentagono æquilatero, & æquiangulo
hoc est, angulus rectus $3\frac{3}{5}$. duntaxat, at
vnius recti, id est, angulus rectus $4\frac{4}{5}$.
æquivalent 6. rectis, hoc est, consti-
adeirco vnius continet $\frac{6}{5}$. vnius recti,
locum replere non possunt, cum trium in-
minores sint quatuor rectis: quippe qui
rectos cum tribus quintis. Eadem ratio-
ne quatuor pentagona locum
replere nequeunt, propterea quòd qua-
tuor in plano aptati vnum quatuor anguli maiores sunt quatuor rectis,
cum æquales sint quatuor angulis rectis, & insuper quatuor quintis
vnius recti. Vt dictum est. Pari ratione neq; ex heptagonis locum pote-
runt replere. Nam tres anguli cuiuslibet heptagoni æquilateri, & æqui-
anguli æquales sunt $\frac{10}{7}$ vnius recti, hoc est, angulis rectis $4\frac{3}{7}$. Quo-
niam enim omnes septem anguli 10. rectis sunt æquales, hoc est, com-
plectuntur $\frac{14}{7}$ vnius recti, fit, vt vnus contineat $\frac{10}{7}$ vnius recti,
hoc est, vnum rectum, & præterea $\frac{3}{7}$ vnius recti: ac proinde tres con-
tinebunt quatuor rectos, & $\frac{2}{7}$ vnius recti. Non ergo tribus heptagonis
in plano aptatis, eorum tres anguli locum replere possunt, cum quatuor
rectos excedant. At fortasse nec
$\frac{4}{3}$ quatuor heptagonos locum replebunt:
æquilaterus, & æquiangula, aut quatuor, neq; tres
aut quatuor æquiangula, atq; aquiangula plurium laterum,
tres anguli simul sumpti sint maiores
maiores sunt tribus angulis heptagoni
quatuor rectis esse ma-
æquilaterum, quadratum, & hexa-
aquiangulum. suis angulis
possunt, vt diximus.

FINIS ELEMENTI QVARTI.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM.

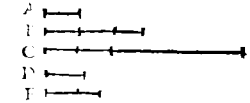
DEFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

TOT in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua & absolute considerata; Nunc vero duobus sequentibus de eadem disserit non absolutè sed prout vna ad alteram refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia, proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum vnius generis, non defendendo ad vllam quantitatis speciem, vt ad lineam, sape facit, vel corpus aliquod. Sexto verò effundit in species, quæ inuicem proportionem habeant inter se linea angulos, circumferentia circulorum, triangula, & alia figuræ planæ. Vt igitur instrumentum suum format, de quo prius vocabula, quæ ad demonstrationes proportionum adhibentur.

ITAQVE aut magnitudinem illam minorem, quæ maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellat partem. Vt quoniam magnitudo A, ter sumpta, metitur magnitudinem B; fortè autem sumpta, magnitudinem C, dicitur magnitudo A pars magnitudinum B, & C. At ne quia magnitudo D non metitur magnitudines E, & F, dicendum putes, excedit magnitudinem E, & sumpta ter, deficit a magnitudine F. Sumpta autem quater, eandem superat, non assequitur magnitudo D partis magnitudinum E, & F.



DIFFI-

DUPLEX autem eſt pars apud Mathematicos: Quædam metitur ſuum totum, ita vt aliquoties repetita totum ſuum conſtituat; qualis eſt numerus 4. cum 8. 12. 16. 20. Et collatus; Quædam autem non metitur ſuum totum, ſed aliquoties ſumpta ipſum vel excedit, vel ab eodem deficit: cuiuſmodi pars eſt numerus 4. collatus cum 6. 7. 9. 10. 11. 13. & 14. Prior dicitur aliquota, poſterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc loco definit partem aliquotam duntaxat, tum quia hæc ſolum metitur ſuum totum; Aliquanta enim non dicitur metiri ſuum totum; tum etiam, quia vt ex lib. 7. conſtabit, pars aliquanta in numeris non dicitur ab Euclide pars, ſed partes. Nam numerus 4. non eſt pars numeri 6. ſed dua partes tertia, quales ſunt duo bina ipſius ternarij. Hanc quod in omnibus demonſtrationibus huius quinti libri, ac quinti ab omnibus interpretibus proparte aliquota. Vnde mirum fane eſt, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos eſt etiam Peletarius, conendere partem hoc loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quam aliquantam; cum tamen in demonſtrationibus etiam ipſi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II.

MVLTIPLEX autem eſt maior minoris, cum minor metitur maiorem.

VT in ſuperiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo C multiplex eſt magnitudinis A; quantam hac vtramque illam metitur. Altera neque magnitudo E, neque magnitudo F, multiplex eſt dictæ magnitudinis D propterea quod hæc neutram illarum metitur. Itaque pars ad multiplex refertur, & multiplex ad partem, ita vt minor quantitas menſurans maiorem, dicatur pars maioris; Maior vero menſurata a minori, dicatur minoris multiplex.

SED hæc autem per ſe ex hac definitione colligitur, partem antea definitam eſſe eam, quæ perfectè metitur ſuum totum. Si enim 6. dicerentur metiri 7. vt aiunt Peletarius, eſſet iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipſius 6. quod eſt abſurdum.

QVANDO ita quamdo duæ magnitudines minores duas alias maiores æquè metiuntur, hoc eſt, vna minor in vna maiore toties continetur, quoties altera minor in altera maiore; dicuntur dua hæ maiores duarum illarum minorum æquemultiplices. Quod idem dicet, ſi plures minores æquè metiantur plures maiores.

III.

RATIO eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis mutua quædam, ſecundum quantitatẽ, habitudo.

QVANDO dua quantitates eiuſdem generis, vt duo numeri, dua li-

dua linea, dua superficies, duo solida, &c. inter se comparantur secundum quantitatem, hoc est, secundum quod una maior est quam altera, vel minor, vel aqualis; appellatur huiusmodi comparatio, seu habitudo mutua, **Ratio** *seu (vt alijs placet)* **Proportio.** *Itaque si comparetur linea aliqua cum superficie quapiam, vel numerus cum linea, non dicetur ea comparatio proportio, quod neque linea, & superficies; neque numerus, & linea sint eiusdem generis quantitatis. Similiter si conferatur linea aliqua cum alia linea secundum qualitatem, hoc est, secundum quod una est alba, & altera nigra: aut quod una est calida, & altera frigida, &c. quamuis eiusmodi quoque sint eiusdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, qua non sit secundum quantitatem.*

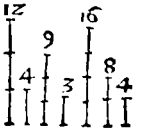
QVAMQVAM autem in solis quantitatibus proprie reperitur **proportio**, *tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam sapiunt* **quantitatis**, *cuiusmodi sunt tempora, soni, voces, loca, motus, pondera, &* **potentiæ**, *proportionem quoque dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur secundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore esse maius, vel minus, vel duo tempora esse aqualia, &c. appellabitur eiusmodi habitudo, proportio; quorum tempora tunc considerantur, veluti quantitates quædam.*

CÆTERVM in omni proportione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, **dicitur ab Euclide**, *& Geometris alijs antecedens proportionis; Ea verò, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Vt in proportione linea 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis, at linea 3. palmorum, proportionis consequens. Quod si è contrario consideretur proportio lineæ 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens linea 3. palmorum, consequens verò linea 6. palmorum, & sic in cæteris.*

IV.

PROPORTIO verò est rationum similitudo.

QVOD hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία, *plerisque autem Latinis* proportionalitas *dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter se, dicitur* **proportio**; *ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter se,* **proportionalitas** *solet nuncupari. Vt si proportio quantitatis A ad quantitatem B, similis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter has proportiones* **proportionalitas**. *Eodem modo, si similis fuerit proportio lineæ E, ad F, proportioni G, ad H, appellabitur ea similitudo* **proportionalitas**. *Multæ autem habitudines proportionum, seu* **proportionalitates**, *(Nos enim cum pluribus comparationem inter duarum quantitatum* **proportionem** *appellabimus) habitudo, inter duarum*



L *proportio-*

proportionum, Proportionalitatem) à scriptoribus, præsertim Boëtio, & Iordano, disseruntur: inter quas primum semper locum obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Musica seu Harmonica: de quibus paulò post dicemus. Verum Euclides de sola Geometrica agit hoc libro, quæ quidem duplex est, continua altera, in qua singulæ quantitates intermediæ bis sumuntur, ita vt nulla fiat proportionum interruptio, sed qualibet quantitas intermedia sit & antecedens, & consequens; Antecedens quidem quantitate subsequenti comparata: Consequens verò quantitati antecedentis. Vt si dicatur, quæ est proportio A ad F, ea est F, ad G; Vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera verò discreta, seu non continua, in qua singulæ quantitates intermediæ semel tantum accipiuntur, ita vt fiat proportionum interruptio, nullaque quantitas sit & antecedens, & consequens, sed vel antecedens tantum, vel consequens tantum. Vt si dicatur, quæ est proportio A, ad B, ea est C, ad D; appellabitur proportionalitas discreta, seu non continua.

DE PROPORTIONIS Diuisionibus.

OPERÆ pretium esse arbitror, paucis hoc loco exponere, quotuplex sit genus proportionum apud Mathematicos, & quænam sint eorum proportionalitates, earumque proprietates, vel ob hanc præcipuè vtilitatem, vt ea, quæ his duobus libris ab Euclide demonstrantur de proportionibus magnitudinum, rebus possint materialibus accommodari, quando opus fuerit, & tum ea, quæ a Mathematicis de proportionibus dicuntur, tum ea, quæ a Philosophis cum Aristotele de proportione motuum disputantur, intelligi. Vt autem maior vtilitas, ac voluptas ex admirabilium proportionum affectionibus percipi possit, instituemus paulo vberiorem tractationem in hac posteriori editione, quam in prioribus nihilominus innumera propemodum, quæ dici possunt, in pleniorem nostram Arithmeticam, vbi omnia genera Proportionalitatum diligentissimè persequimur.

PROPORTIO igitur ab Euclide definita diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis est ea, quæ [illegible] habiberi. qualis est proportio lineæ 20. [illegible] palmorum. Hac enim proportio in [illegible] ostenditur. Irrationalis verò proportio ea est,

ea est, quæ in numeris exhiberi nequit, qualis est proportio diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiusdem quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non potest, vt in 10. lib. ab Euclide demonstratur. Alii dicunt, proportionem rationalem eam esse, quam habent quæuis duæ quantitates commensurabiles: Irrationalem vero eam, quam habent duæ qualibet quantitates incommensurabiles. Dicuntur autem quantitates commensurabiles, quæ habent vnam communem partem aliquotam seu quas eadem mensura communis metitur. Cuiusmodi sunt lineæ 20. palmorum, & lineæ 8. palmorum. Nam linea 4. palmorum est vtriusque pars aliquota, similiter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quam 2. palmorum metitur lineam 20. palmorum; ita quoq; eadem linea tum 4. tum 2. palmorum lineam 8. palmorum mensurat. Nec aliter omnes numeri, commensurabiles dicentur, quia saltem vnitas omnes metitur. Quantitates vero incommensurabiles dicentur, quæ nullam habent communem partem aliquotam, seu quarum nullam mensuram communem contingit reperiri. Cuiusmodi sunt diameter, & latus eiusdem quadrati. Quamuis enim quælibet harum linearum infinitas habeat partes aliquotas, vt tertiæ partem dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota vnius, quantumuis minima, alterius inueniri potest, vt demonstratur ab Euclide lib. 10. propos. vltima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommensurabiles ostenduntur, præter illas duas. Itaque in numeris inuenitur sola proportio rationalis; at in quantitate continua tam rationalis, quam irrationalis proportio continetur.

ALIO modo diuidi solet proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Æqualitatis proportio, est inter duas quantitates æquales, vt inter 10. & 10. inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorum, & lineam 10. palmorum, &c. Inæqualitatis vero proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, vt inter 20. & 10. inter 8. & 4. inter lineam 6. palmorum, & lineam 2. palmorum, &c. Habent autem hæ duæ proportionum genera cum superiori illa duplex commune, vt omnis proportio æqualitatis sit rationalis, & econtra. Omnis item proportio irrationalis necessario est inæqualitatis,

æqualitatis, sed non contra. Ex quo manifestum est minus rectè à quibusdam diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis sit necessario æqualitatis, inæqualitatisve, non tamen contra omnis proportio huiusmodi est rationalis; cum multæ proportiones inæqualitatis sint irrationales. Pari ratione perperam est, quòdam non satis rectè distribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis sit necessario rationalis, irrationalisve, non tamen omnis huiusmodi proportio est proportio inæqualitatis: cum multæ proportiones rationales sint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio à plerisque subdiuiditur proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem, & irrationalem; Posteriori verò in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis, vt à nobis factum est. Ita enim membra diuidentia cum Diuiso (vt cum Dialectici loquuntur) in vtraque diuisione reciprocantur. Scio vel de posse subdiuidi tam proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis; quam proportionem inæqualitatis in proportionem rationalem, & irrationalem; si in vtraque diuisione fabricetur Diuisum. Sed cur duplicem nostram diuisionem, qua proportio in tota sua latitudine diuiditur, vtrique harum subdiuisioni prætulerim, supra exposui in responsione ad Apologiam Pelletarii.

RVRSVS proportio inæqualitatis (Reliquimus enim æqualitatis proportionem, quoniam amplius subdiuidi nequit, cum quæcunque quantitates æquales siue magnæ, siue paruæ fuerint, eandem semper habeant proportionem æqualitatis) subdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis: Maioris inæqualitatis proportio est, quando maior quantitas cum minore confertur; qualis est proportio 20. ad 10. Item linea 8 pedum ad lineam 6. pedum, &c. Proportio minoris inæqualitatis est, quando minor quantitas ad maiorem refertur; qualis est proportio 10. ad 20. Item linea 6. pedum ad lineam 8. pedum, &c. Non est autem hæc diuisio inanis, & supernacanea, vt multi suffurantur. Neque enim eadem est proportio

4. ad 2.

4. ad 2. quæ 2. ad 4. sed multum inter se differunt, cum valde diuersus sit vsus vtriusque, vt perspicuum est iis, qui vel mediocriter in rebus Geometricis, & regula Algebræ sunt versati. Hæ igitur sunt generales diuisiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla secluſa: Nunc autem tam proportionem maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, quatenus solas proportiones rationales comprehendunt, subdividemus; quoniam de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. est sermo futurus.

PROPORTIO *ergo rationalis maioris inæqualitatis, distribuitur in quinque genera, vt in proportionem multiplicem, superparticularem, superpartientem, multiplicem superparticularem, & multiplicem superpartientem. Pari ratione proportio rationalis minoris inæqualitatis in eadem genera secatur, si modo singulis vocabulis præponatur præpositio (sub) vt in proportionem submultiplicem, subsuperparticularem, subsuperpartientem, submultiplicem superparticularem, & submultiplicem superpartientem. Horum autem quinque generum priora tria sunt simplicia, posteriora verò duo ex illis tribus composita, vt manifestum est. Cur verò tantum sint quinque hæc genera proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis, post explicationem omnium harum quinque proportionum ostendemus.*

DE PROPORTIONE MVLTIPLICI.

PROPORTIO *Multiplex est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, decies, centies, &c. continet: ita vt minor maiorem mettatur. qualis est proportio numeri 20. ad 4. Nam numerus 20. comprehendit 4. quinquies. Item proportio lineæ 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c.*

HAEC *autem sub se continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorem bis tantum continet, dicitur proportio dupla: si ter, tripla: si decies, decupla, si centies, centupla, &c.*

EX *his facilè omnes species proportionis multiplicis definiemus. Nam proportio octupla nihil erit aliud quam habitudo ma-*

ioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur. Eodemque modo definienda erunt reliquæ proportiones multiplices: vt proportio quintupla, qualis est 40 ad 8. dicetur ea, cuius maior quantitas minorem continet quinquies. Item proportio dupla lineæ 10. cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & sic de reliquis.

CÆTERVM omnes proportiones multiplices in numeris integris, hoc est, omnes numeros multiplicem habentes proportionem, inuenies hoc modo. Accipe numerum, qui indicat, quoties maior numerus minorem in data proportione multiplici continet. Is enim ad Vnitatem habet primam proportionem multiplicem, qua inuestigatur: hoc est, numerus ille, & Vnitas sunt primi, ac minimi numeri, inter quos proposita proportio multiplex reperitur. Atq; numerus ille idem, atq; Vnitas dicuntur ab Arithmeticis termini eius proportionis multiplicis, qua proponitur. Inuentis hisce terminis, inter quos prima proportio multiplex proposita reperitur, si Vterque duplicetur, producentur duo numeri habentes secundam proportionem multiplicem propositam: si Vterque idem triplicetur, procreabuntur numeri tertiæ proportionis multiplicis propositæ: si Vterque quadruplicetur, exurgent numeri quartæ proportionis multiplicis quæsitæ. Atque ita si iidem termini per quemuis numerum multiplicentur, producentur duo numeri proportionis multiplicis propositæ, qua eum locum inter omnes proportiones multiplices illius speciei obtinet, quem numerus, qui Vtrumque terminum multiplicauit, indicat: Adeo vt, si multiplicatio fiat per 100. procreentur duo numeri obtinentes centesimum locum inter omnes numeros propositum proportionem habentes.

EXEMPLI gratia. Quærantur omnes numeri proportionis quintuplæ. Et quoniam maior numerus minorem continet quinquies in quintupla proportione, erit prima proportio quintupla inter 5. & 1. qui duo termini si ducantur in 2. reperietur secunda proportio quintupla inter 10. & 2. Si iidem termini per 3. multiplicentur, procreabuntur numeri 15. & 3. tertia proportionis quintuplæ: Et sic deinceps. Itaque si decima proportio quintupla quæratur, ducendi erunt duo primi termini inuenti 5. & 1. per 10. si verò millesima reperienda sit, multiplicandi erunt iidem termini per 1000. &c.

OMNES item numeri cuiusque proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Constituantur duæ series numerorum in infinitum progredientes: quarum inferior ab Vnitate incipiat, & per seriem naturalem numerorum progrediatur; superior autem ab eo numero, qui significat, quoties maior numerus minorem in data proportione continet, initium ducat progrediaturque per continuam additionem eiusdem nu-

dem numeri, primum ad seipsum, deinde ad conflatum numerum, &c. Nam superioris ordinis numeri ad numeros ordinis inferioris, & primus ad primum, secundus ad secundum, tertius ad tertium, &c. habent omnes proportiones multiplices speciei propositæ. Exempla hic habes in proportionibus quintuplis, septuplis, & decuplis.

Proportiones quintuplæ.

5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.	55.	60.	65.	70.	75. 80. &c.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15. 16. &c.

Proportiones septuplæ.

7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.	70.	77.	84.	91.	98.	105. &c.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15. &c.

Proportiones decuplæ.

10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90.	100.	110.	120.	130.	140. &c.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14. &c.

DE PROPORTIONE.

PROPORTIO *superparticularis est habitudo maioris quantitatis ad maiorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper vnam eius partem aliquotam, scilicet dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Qualis est proportio 3. ad 2. Nam 3. continent 2. semel, & insuper vnitatem, quæ dimidiata pars est numeri 2. Ita quoque linea 12. pedum ad lineam 9. pedum, proportionem habet superparticularem, quia prior linea continet posteriorem semel, & insuper lineam 3. pedum, quæ tertia pars est lineæ 9. pedum, &c.*

HAEC quoque proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, est dimidiata pars minoris quantitatis, constituitur proportio sesquialtera; si est tertia pars, exurgit proportio sesquitertia; si quarta, sesquiquarta; si millesima, sesquimillesima, &c.

VNDE ex ipsomet vocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum superparticularium. Erit enim proportio sesquioctaua, quando maior quantitas minorem semel includit, & insuper octauam partem minoris: qualis est inter 9. & 8. Item inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.

INVENIENTVR omnes proportiones ſuperparticulares, ſiue omnes numeri, inter quos proportio ſuperparticularis quacunque reperitur, hoc modo. Accipiatur numerus, qui partem aliquotam in proportione expreſſam denominat. Ad eum enim numerus proximè maior, qui videlicet eum vna ſola vnitate ſuperat, habebit primam proportionem ſuperpartic'larem propoſitam, ita vt in minoribus numeris ea proportio reperi. ne queat. His duo numeri, qui termini data proportionis dicuntur, ſi duplicentur, triplicentur, vel per quemcunque alium numerum multiplicentur, gignentur alij numeri eandem proportionem habentes, nimirum ſecundam, tertiam, vel eam, quam numerus multiplicans indicat.

VERBI cauſa. Si quarantur omnes proportiones ſeſquiſeptima, quoniam hic exprimitur pars ſeptima, erit 7. minor terminus huius proportionis, maior autem erit 8. vna vnitate illum ſuperans: atque inter 8. & 7. prima proportio ſeſquiſeptima exiſtit. Qui duo termini ſi duplicentur, procreabuntur hi alij duo numeri 16. & 14. inter quos ſecunda proportio ſeſquiſeptima cernitur: ſi triplicentur, erit tertia proportio eadem inter 24. & 21. Si denique centeſima proportio eadem quaratur, ducendi erunt termini inuenti 8. & 7. per 100. vt gignantur numeri 800. & 700.

NVMERI quoque omnes eiuſque proportionis ſuperparticularis comperientur, ſi conſtituantur duo ordines numerorum, quorum inferior à numero partem aliquotam denominante incipiat, ſuperior verò à numero proximè maiore: vterq; verò per continuam additionem numeri, à quo initium ſumit, primum ad ſe, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur. Exempla hic poſuimus in proportionibus ſeſquialtera, ſeſquiſeptimi, & ſeſquidecimi.

Proportiones ſeſquialteræ.

3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. 36. 39. 42. 45. &c.	
2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. 30. &c.	

Proportiones ſeſquiſeptimæ.

8. 16. 24. 32. 40. 48. 56. 64. 72. 80. 88. 96. 104 112. 120. &c.	
7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. 84. 91. 98. 105. &c.	

Proportiones ſeſquidecimæ.

11. 22. 33. 44. 55. 66. 77. 88. 99. 110. 121. 132. 143. 154. &c.	
10. 20. 30. 40. 50. 60. 70. 80. 90. 100. 110. 120. 130. 140. &c.	

DE PROPORTIONE SVperpartiente.

PROPORTIO ſuperpartiens eſt habitudo maioris quantitatis

titatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes vnam aliquotam. Qualis est proportio 8. ad 5. Nam 8. continent semel 5. & insuper tres vnitates, quarum qualibet est pars aliquota, vtpote quinta, huius numeri 5. ipse autem ternarius ex illis compositus, non est pars vna aliquota numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere constituere vnam partem aliquotam, ob multas proportiones, quæ primo aspectu videntur esse superparticulares, cum tamen sint superparticulares; cuiusmodi proportio est inter 10. & 8. Quanquam enim 10. contineant semel 8. & duas insuper vnitates, quarum qualibet est octaua pars numeri 8. quia tamen binarius ex illis vnitatibus compositus, est quarta pars 8. non dicenda est ea proportio superpartiens, sed superparticularis, nempe sesquiquarta. Itaque vt duæ quantitates dicantur habere proportionem superpartientem, necesse est, vt maior quantitas minorem contineat semel, & plures eius partes aliquotas, quæ simul sumptæ non constituant vnam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter se confundunt.

DIVIDITVR primùm proportio superpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Nam maior quantitas minorem semel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non constituentes vnam, constituit proportio superpartiens: si tres partes aliquotas, supertripartiens; si decem, superdecupartiens, &c.

DIVIDITVR deinde quodlibet horum generum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio superbipartiens inter duas quantitates inæquales, quarum maior continet minorem semel, & duas eius partes tertias, dicitur superbipartiens tertias. Quod si duæ illæ partes fuerint quintæ, appellabitur superbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus superbipartientibus. Pari ratione superdecupartiens proportio inter duas quantitates inæquales, quarum maior excedit minorem decem partibus vndecimis, appellabitur superdecupartiens vndecimas. Quod si decem illæ partes sint duodecimæ, vocabitur proportio superduodecupar-

tionis decimastertias; & sic de reliquis omnibus superdecupartientibus proportionibus.

NE autem proportiones superpartientes vel inter se confundantur, vel cum proportionibus superparticularibus, quod a plerisque factum esse deprehendimus, diligenter considerandæ sunt ea, quæ quamuis dictum, in pronunciatione cuiuscunq; proportionis superpartientis duos indicari numeros, quorum alter monstrat, quotam partem aliquotam minoris quantitatis in maiore superfint: alter vero, quota partes eæ sint, aut quantæ, indicat. Vt in proportione supertripartiente octauas, denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior significat, maiorem quantitatem dictæ proportionis continere semel minorem, & adhuc tres eius partes aliquotas, exprimiturque syllaba illa (tri) quando dicitur, supertripartiens: posterior autem per vocem (octauas) expressus ostendit, illas tres partes aliquotas esse partes octauas numeri. Deinde in quolibet proportione superpartiente duos prædictos numeros (quos quidem facilè ex ipsa proportionis prolatione cognoscuntur, vt ex proximo exemplo patet) eiusmodi esse debere, vt non habeant vllam partem aliquotam communem, præter vnitatem. Quæ quidem est omnium numerorum pars aliquota hoc ipso, quod inter se primi Numeri enim, qui præter vnitatem nullam habent partem aliquotam communem, absolutè dicuntur Arithmetici cum Euclide, primos inter se, vt ex lib. 7. constabit. Tales sunt duo illi numeri 3. & 8. in superiori proportione superpartiente octauas expressi. Nam sola vnitas, vt constat, vtriusque pars communis aliquota. Quare nolle dicere aliam proportionem inter 11. & 8. supertripartientem octauas, quæ sit inter 22. & 16. Non autem recte appellabitur proportio inferior inter 22. & 16. superpartiens sextas decimas, quia is maior minorem contineat semel & præterea vnitatem, quarum qualibet decima sexta pars est. Nec sic appellabitur, quia duo numeri 22. & 16. communem habent partem aliquotam 2. per quam, vtrius; videlicet reducantur, reducuntur $\frac{6}{16}$. ad $\frac{3}{8}$. atque ita proportio 22. ad 16. est supertripartiens octauas. Sic etiam non recte dicemus esse proportionem inter 9. & 6. supertripartiens sextas,

quo-

quoniam duo numeri in ea notati 3. & 6. habent præter vnitatem, aliam communem mensuram, videlicet 3. Nam ternarius semel sumptus, seipsum, & bis repetitus, senarium metitur, ac proinde $\frac{3}{6}$. reducentur per partem aliquotam communem 3. ad $\frac{1}{2}$. Quocirca talis proportio nuncupanda erit sesquialtera, cùm maior quantitas contineat semel minorem, & eius partem dimidiatam. Eadem ratione non rectè dicetur proportio inter 10. & 6. superquadripartiens sextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habent 2. communem partem aliquotam, præter vnitatem; atque ita dicenda erit talis proportio, superbipartiens tertias, cùm maior quantitas contineat minorem semel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur non difficile erit vnicuique, denominare conuenienter omnes proportiones superpartientes.

PERSPICVVM etiam ex dictis relinquitur, cur proportionem superbipartientem diuiserimus paulo antè, in proportionem superbipartientem tertias, quintas, septimas, nonas, &c. præterecuntes superbipartientem quartas, sextas, octauas, decimas, &c. Cùm enim hæ posteriores omnes sint superparticulares, propterea quòd $\frac{4}{5}$. faciant $\frac{2}{3}$. & $\frac{6}{7}$. constituant $\frac{3}{4}$. & $\frac{8}{9}$. effleiant $\frac{4}{5}$. denique $\frac{10}{11}$. æquiualent $\frac{5}{6}$, consideratur proportiones superpartientes cum proportionibus superparticularibus, si & ipsæ in numerum proportionum superbipartientium referrentur. Quo modo autem dignoscendum sit, an duo quilibet numeri propositi habeant, præter vnitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, nec ne, in Arithmetica docetur, demonstrabiturque ab Euclide, ad initium libri 7.

INVENTIO omnium proportionum superpartientium cuiusque speciei sic se habet. Numerus tot vnitatibus maior denominatore partium aliquotarum, quas in proportione nominantur, quot partes in eadem proportione exprimuntur, habebit primam proportionem speciei propositæ ad numerum easdem partes à proximo denominantem. Qui duo termini duplicati, triplicati, &c. per quemuis numerum multiplicati, gignent secundos numeros in eam proportionem habentes, tertios, vel alios, & [illegible] *quæ ducam* [illegible] *quæsita sint inquirendi sint omnes numeri proportionis superbipartientis decimas, erunt primi huiusmodi numeri, 13 & 10. quia maior superat minorem, qui partes decimas denominat, totidem & non plures, quot videlicet partium decimarum mentio fit, in proposita* [illegible]

positio-

pertripartiente decimas. Dupli eorum, qui nimirum secundam proportionem constituunt; sunt 26. & 20. Tripli, 39. & 30. Centesima autem eiusmodi proportio erit 1300. ad 1000. cum hi numeri centupli sint terminorum 13. & 10. qui primo loco inuenti sunt.

EOSDEM numeros omnium proportionum superpartientium reperies, si statuas duos numerorum ordines, quorum inferior incipiat à partium aliquotarum denominatore; superior autem à numero, qui numero partium nominatarum priorem illum superat: Vterque deinde ordo progrediatur per continuam additionem primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad numeros conflatos, vt suprà diximus. Exempla hic adiecimus proportionum superbipartientium quintas, superoctipartientium nonas, & superseptupartientium decimas.

Proportiones superbipartientes quintas.

7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. 84. 91. 98. &c.	
5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55. 60. 65. 70. &c.	

Proportiones superoctupartientes nonas.

17. 34. 51. 68. 85. 102. 119. 136. 153. 170. 187. &c.	
9. 18. 27. 36. 45. 54. 63. 72. 81. 90. 99. &c.	

Proportiones superseptupartientes decimas.

17. 34. 51. 68. 85. 102. 119. 136. 153. 170. 187. &c.	
10. 20. 30. 40. 50. 60. 70. 80. 90. 100. 110. &c.	

DE PROPORTIONE MVLTIplici superparticulari.

PROPORTIO multiplex superparticularis est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, vel quater, &c. continet, & praterea vnam eius partem aliquotam. Cuiusmodi est proportio 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (qua ex parte proportio hac cum multiplici conuenit, vtpote cum dupla) & insuper comprehendunt vnitatem, qua est quarta pars numeri minoris; (qua in re proportioni superparticulari, nimirum sesquiquarta, eadem proportio proposita similis est.) vt rectè proportio hac composita dicatur ex multiplici, & superparticulari.

DIVIDITVR autem proportio hac, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita, veluti multiplex. Vt in

duplam

duplam superparticularem; triplam superparticularem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quater, &c. & insuper vnam partem minoris quantitatis aliquotam.

VNVMQVODQVE rursus horum generum in infinita alia subdiuidatur, habita ratione proportionis superparticularis. Nam proportio, v. g. tripla superparticularis continet sub se triplam sesquialteram, (quando scilicet maior quantitas minorem ter continet, & praterea dimidiatam eius partem;) triplam sesquitertiam; triplam sesquiquartam, & ita infinitas alias.

REPERIEMVS vero omnes proportiones multiplices superparticulares cuiuslibet speciei, si diligentius denominatorem partis aliquotæ, & proportionis multiplicis quarum in proposita proportione mentio fit. Nam si denominatorem partis aliquotæ per denominatorem multiplicis proportionis multiplicemus, præcedentque numero adjungimus vnitatem, habebit hic numerus conflatus ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem speciei propositæ. Et hi duo numeri duplicati, triplicati, vel per quemvis numerum multiplicati dabunt alios in eadem proportione numeros, nimirum secundos, tertios, vel alterius ordinis, pro numero vnitatum, quæ in numeros multiplicante contrahuntur. Vt in allato dictum est. EXEMPLI gratia, si inuenire velis quot sunt omnes numeri proportionis sextuplæ sesquiquartæ, decimus 9. denominatorem partis nonæ in 6. denominatorem multiplicis proportionis producet 54. addemus 1. Conflatus namque numerus 55. ad 9. denominatorem partis nonæ exprimit habet primam proportionem sextuplam sesquiquartam, ita vt in minoribus numeris integris ea dari nequeat. Dupli horum numerorum 110 & 18. erunt secundi numeri in eadem proportione. Tripli vero 165. & 27 erunt tertij, & ita vt eorundem centupli 5500. & 900. exhibeant centesimam proportionem eandem.

EADEM proportiones multiplices superparticulares inuenies, si constituas duas series numerorum, quarum inferior incipiat à denominatore partis aliquotæ minutæ, superior autem à numero conflato ex vnitate, & numero producto ex multiplicatione denominatoris partis aliquotæ eodem in denominatorem proportionis multiplicis expressæ. Vterque series [illegible] continuam additionem primi numeri sui ordinis à se ipsum, & sic conflatum numerum, &c. progrediatur, vt in sequentibus exemplis videre est. Exempla hic vides proportionis duplæ sesquialteræ, triplæ superquartæ, & decuplæ sesquitertiæ.

Propor-

Proportiones duplæ ſeſquialteræ.												
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.	55.	60.	65. 70. &c.
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.	20.	22.	24.	26. 28. &c.
Proportiones triplæ ſeſquiſeptimæ.												
22.	44.	66.	88.	110.	132.	154.	176.	198.	220.	242.	&c.	
7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.	70.	77.	&c.	
Proportiones decuplæ ſeſquitertiæ.												
31.	62.	93.	124.	155.	186.	217.	248.	279.	310.	341.	&c.	
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.	27.	30.	33.	&c.	

DE PROPORTIONE MVLTIplici ſuperpartiente.

PROPORTIO *denique multiplex ſuperpartiens eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & inſuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes vnam: qualis eſt proportio* 11. *ad* 3. *Dixi, non conficientes vnam, ob cauſam dictam in proportione ſuperpartiente. Nam ſi partes illæ aliquotæ vnam efficerent, non eſſet proportio multiplex ſuperpartiens, ſed multiplex ſuperparticularis. Vt proportio* 20. *ad* 6. *non dicenda eſt multiplex ſuperbipartiens ſextas, quamuis* 20. *contineant ter* 6. *& duas ſextas; quia duæ ſextæ conficiunt vnam tertiam partem. Quare vocabitur proportio tripla ſeſquitertia.*

DISTRIBVITVR *autem hæc proportio primùm, habita ratione proportionis multiplicis. Vt multiplex in duplam ſuperpartientem: triplam ſuperpartientem, &c.*

DEINDE *qualibet harum, habita ratione numeri partium, ſub ſe continet genera infinita. Vt ſub tripla ſuperpartiente, continetur tripla ſuperbipartiens; tripla ſupertripartiens, &c.*

POSTREMO *quæuis iſtarum, habita ratione denominationis partium aliquotarum: in genera adhuc infinita ſecatur. Vt tripla ſupertripartiens diuiditur in triplam ſupertripartientem quartas; in triplam ſupertripartientem quintas, &c.*

&c. Quarum omnium definitiones, & exempla non difficile ex cuiuis ex dictis depromere, &c.

OMNES proportiones multiplices ſuperpartientes poſtrema diuiſione ita inuenietis. Denominator partium aliquotarum propoſitarum multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis propoſitæ, productoque numero addatur numerus partium aliquotarum expreſſus. Conflatus enim numerus ad earundem partium aliquotarum denominatorem habet primam proportionem earum, quæ inueſtigantur. Atque hi duo numeri, ſi duplicentur, triplicentur, vel per alium quemcunque numerum multiplicentur, dabunt ſecundos numeros, tertios, & alios in eadem proportione. VELUTI ſi quærantur omnes proportiones quadruplæ ſuperoctupartientes undecimas, ducemus 11. *denominatorem partium undecimarum in* 4. *denominatorem proportionis quadruplæ, numeroque procreato* 44. *adiiciemus* 8. *numerum octo partium. Nam conflatus numerus* 52. *ad* 11. *denominatorem partium habet primam proportionem quæſitam. Secundi numeri erunt* 104. *&* 22. *Tertij* 156. *&* 33. *nimirum illorum dupli, tripli, &c. Centupli autem eorundem, vt* 5200. *&* 1100. *habent centeſimam proportionem inter omnes quadruplas ſuperoctupartientes undecimas.*

QVOD ſi duo numerorum ordines conſtituantur, quorum inferior incipiat à denominatore partium aliquotarum propoſitarum, & per continuam eiuſdem additionem primùm ad ſe, deinde ad numerum conflatum, &c. progrediatur; ſuperior verò incipiat à numero conflato ex numero producto ex eodem partium denominatore in denominatorem multiplicis proportionis data, & ex numero partium expreſſo, ac per eiuſdem continuam additionem primùm ad ſe, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur; obtinebimus quoque omnes numeros oblatæ proportionis, vt in ſuperioribus quoque diximus: Exempla hic vides in proportione dupla ſuperbipartiente tertias, dupla ſuperquintupartiente ſextas, & quintupla ſupertripartiente quintas.

Proportiones duplæ ſuperbipartientes tertias.

8. 16 24. 32. 40. 48. 56. 64. 72. 80. 88. 96. 104. &c.	
3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. 36. 39. &c.	v

Proportones duplæ ſuperquintupa rtientes ſextas.

17. 34. 51. 68. 85. 102. 119. 136. 153. 170. 187. &c.	
6. 12. 18. 24. 30. 36. 42. 48. 54. 60. 66. &c.	

Propor-

Proportiones quintuplæ ſupertripartientes quintas.

28.	56.	84.	112.	140.	168.	196.	224.	252.	280.	308.	&c.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.	55.	&c.

DE PROPORTIONIBVS RATIONALIBUS minoris inæqualitatis.

OMNIA, quæ dicta hactenus ſunt de quinque generibus proportionum rationalium maioris inæqualitatis, intelligenda ſunt quoque de quinque generibus correſpondentibus minoris inæqualitatis, præmiſſa tamen ſemper præpoſitione (ſub) vt dictum eſt. Nam ſi in exemplis allatis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportiones minoris inæqualitatis correſpondentes. Quemadmodum enim proportio 100. ad 1. eſt centupla, ita proportio 1. ad 100. eſt ſubcentupla. Sicut etiam proportio 11. ad 3. eſt tripla ſuperbipartiens tertias, ita proportio 3. ad 11. eſt ſubtripla ſuperbipartiens tertias; Atque ita de cæteris.

NON videtur autem hoc loco prætermittenda inſignis vtilitas tabulæ Pythagoricæ, quam cap. 4. noſtræ Arithmeticæ conſtruximus, in omnibus proportionibus rationalibus inueniendis: quæ eiuſmodi eſt. Conſtructa tabula Pythagorica, (Eſt autem conſtructio facillima, cùm numeri in ſiniſtro latere conſtituant ſeriem numerorum naturalem, in infinitum q; progredi poſſint; qualibet autem linea in tranſuerſionem procreetur ex continua additione numeri in ſiniſtro latere, à quo incipit, ad ſeipſam, & ad numerum conflatum, & ſic in infinitum: ita vt hæ linea in tranſuerſum nil aliud ſint, quàm progreſſiones Arithmeticæ numerorum, quorum differentia ſint primi numeri earundem linearum) primùm omnes numeri cuiuſuis proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Denominator datæ proportionis multiplicis in ſuprema linea acceptus ad vnitatem in ſiniſtro latere habet primam eam proportionem multiplicem: Numeri autem ſub eodem denominatore deſcendentes per lineam rectam ad numeros ſub vnitate in latere ſiniſtro poſitos, ſinguli ad ſingulos, habent ſecundam, tertiam, quartam, & alias proportiones eiuſdem ſpeciei, in infinitum. Vt prima proportio nonuplæ erit inter 9. ſuprema linea ad 1. in ſiniſtro latere; ſecunda inter 18. ſub 9. ad 2. ſub 1. tertia inter 27. eiuſdem linea à 9. deſcendentis, & 3. in ſiniſtro latere, &c. atque ita de alijs proportionibus multiplicibus dicendum eſt.

DEINDE omnes numeri cuiuſuis proportionis ſuperparticularis ſic

tis sic inuenientur. Ad denominatorem partis aliquotæ, quæ in proportione exprimitur, in latere supremo acceptum habet proximè insequens numerus primam proportionem datam: Et si per lineam rectam ab hisce duobus numeris descendamus, reperiemus omnes alios numeros eiusdem proportionis, & de multiplicibus dictum est. Verbi gratia, prima proportio sesquioctaua erit 9. ad 8. aliæ vero ordine erunt inter numeros sub illis positos, & secunda inter 18. & 16. tertia inter 27. & 24. &c.

TERTIO sic reperies omnes proportiones superpartientes cuiuslibet speciei. Post denominatorem partium aliquotarum, quarum in proportione data mentio fit, in supremo latere acceptum numera tot numeros, quot partes in eadem proportione nominantur. Vltimus enim ad denominatorem earundem partium habebit primam proportionem superpartientem propositam. Secunda autem, tertia, quarta, & aliæ ordine, reperientur inter numeros sub illis duobus collocatos. Exempli causa, si quis omnes numeros proportionis superoctupartientis vndecimas desideret, sumat in latere supremo denominatorem partium, id est, 11. post quem numeret hos octo numeros, propter octo partes, 12.13.14.15.16.17.18.19. Vltimus enim 19. ad 11. habet primam proportionem superoctupartientem vndecimas. Secundam habebit numerus 38. ad 22. tertiam 57. ad 33. & aliæ aliũ numeri sub 19. & 11. per rectam lineam descripti.

QVARTO numeros omnes cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis inuenies hac ratione. In supremo latere accipe numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ expressa habeat proportionem multiplicem, cuius mentio fit. Numerus enim proxime insequens habebit ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem propositam: Secundam autem, tertiam, & alias habebunt numeri sub illis duobus positi. Vt autem scias numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ habeat multiplicem proportionem propositam, sumendus est denominator partis in supremo latere, & in sinistro denominator proportionis multiplicis: Vel prior denominator in sinistro latere, & posterior in supremo. In angulo enim communi reperies numerum multiplicem, quem desideras. Exempli gratia. Inueniendi sint omnes numeri proportionis triplæ sesquiquintæ. Primum quæratur numerus ad denominatorem partis aliquotæ, hic est, ad 5. triplus, nimirum 15. quem reperies in communi angulo denominatoris proportionis triplæ, qui est 3. & denominatoris partis aliquotæ, qui est 5. quorum alterutter in supremo latere, & alter in sinistro sumatur. Deinde hic numerus triplus, nimirum 15. accipiatur in latere supremo. Numerus enim 16. proxime insequens ad denominatorem partis aliquotæ, id est, ad 5 habet primam proportionem triplam sesquiquintã. Alias proportiones eiusdem

TABVLA PYTHAGORICA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308

ſpeciei reperies in numeris, qui ſub illis duobus ponuntur, vt de alijs dictum eſt.

QVINTO, & vltimo reperientur omnes numeri cuiuslibet proportionis multiplicis ſuperpartientis hoc modo: In latere ſupremo accipiatur numerus, qui ad denominatorem partium aliquotarum habeat proportionem multiplicem propoſitam: qui quidem inuenietur quoque in angulo communi denominatoris proportionis multiplicis, & denominatoris partium aliquotarum. Deinde poſt acceptum numerum multiplicem numerentur tot numeri, quot partium aliquotarum ſit mentio. Vltimus namque ad denominatorem partium aliquotarum comperietur habere primam datam proportionem multiplicem ſuperpartientem. Alias proportiones eiuſdem ſpeciei reperies ſub illa prima, vt de alijs diximus. Vt ſi cupiat quis omnes proportiones quadruplas ſupertripartientes quintas. Primum inquirat numerum quadruplum denominatoris partium, qui eſt 5. Inueniet autem eum numerum eſſe 20. quippe qui in angulo communi denominatoris proportionis quadruplæ, qui eſt 4. & denominatoris partium quintarum, qui eſt 5. deſcriptus ſit. Deinde poſt numerum hunc 20. inuentum numeret in ſupremo latere tres hos numeros 21. 22. 23. quod tres partes quintæ nominentur. Nam vltimus 23. ad 5. hoc eſt, ad denominatorem partium, habet primam proportionem quadruplam ſupertripartientem quintas. Numeri aliarum proportionum eiuſdem ſpeciei continentur ſub duobus illis numeris, vt in alijs traditum eſt.

INVENTIS hac arte omnibus numeris cuiuslibet proportionis maioris inæqualitatis, ſi minores cum maioribus conferantur, inuenti quoque erunt omnes numeri eiuſdem proportionis minoris inæqualitatis.

NEQVE verò ſilentio tranſiri debet hoc loco admirabilis quædam proprietas cuiuslibet proportionis rationalis; quæ ſic ſe habet. *Inuentis minimis, ſiue primis terminis, numeriſue cuiuslibet proportionis, ſi conſtituatur progreſſio, ſeu proportionalitas Arithmetica incipiens à numero, qui vna vnitate minor ſit, quàm differentia minimorum illorum numerorum, progrediensque per ipſammet eandem differentiam numerorum minimorum, cadent inter primos numeros illius progreſſionis tot numeri in ſerie naturali numerorum, quot vnitates ſunt in primo termino conſtitutæ tuæ proportionalitatis Arithmeticæ; Inter ſecundos verò, qui primorum dupli ſunt, tot, quot in ſecundo termino eiuſdem progreſſionis continentur vnitates; inter tertios autem tot, quot vnitates in tertio termino eiuſdem progreſſionis continentur: atque ita deinceps. Exempli gratia, ſi proponatur proportio dupla, cuius minimi numeri ſunt 2. & 1. conſtituetur progreſſio incipiens ab 0. (quod differentia inter 2. & 1. ſit 1. & figura 0. vna vnitate minor quàm 1.) progrediensque per continuam additionem*

uitatis, nimirum differentia inter 2. & 1. primum ad 0. deinde ad conflatum numerum 1. Postea ad numerum confectum 2. &c. hoc scilicet modo.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. *&c.*

Itaque inter primos numeros dupla proportionis, hoc est, inter 2. & 1. nullus cadit medius numerus: Inter secundos, qui sunt 4. & 2. cadet unus medius, nimirum 3. Inter tertios 6. 3. duo medij intercipiuntur 5. 4. Inter quartos 8. 4. tres medij existunt 7. 6. 5. & sic deinceps. Id quod in hac formula apparet, ubi numeri extremi cuiuslibet lineæ habent proportiones omnes duplas, ut primam, secundam, tertiam, &c. Multitudines autem numerorum series naturalis inter eos cadentium respondent numeris superioris proportionalitatis Arithmeticæ.

						2		1						
					4		3		2					
				6		5		4		3				
			8		7		6		5		4			
		10		9		8		7		6		5		
	12		11		10		9		8		7		6	
14		13		12		11		10		9		8		7
	16		15		14		13		12		11		10	
		18		17		16		15		14		13		12
			20		19		18		17		16		15	

QVOD si superiori proportionalitati Arithmeticæ superponas seriem naturalem numerorum, quæ ab 1. incipiat, ita ut singuli eius terminj singulis terminis constitutæ tuæ Arithmeticæ proportionalitatis respondeant, dicto citius cognoscemus, quotnam numeri cadant medij inter quosuis duos numeros proportionis duplæ. Numeri enim seriei huius naturalis indicabunt, quem locum duo numeri duplæ proportionis obtinent, respondentes verò numeri in proportionalitate Arithmetica constitutæ multitudinem numerorum inter illos cadentium significabunt. Exemplum hic vides.

Ordo

Ordo proportion. duplarum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multit. med. numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

Itaque si scire cupias, quot numeri cadant inter undecimos numeros proportionis duplæ, cape in ferte naturali numerum 12. cui supponitur numerus 10. Dices ergo 10. numeros inter illos intercipi, & sic de cæteris.

PROPONATVR deinde proportio decuplæ, cuius termini minimi sunt 10. & 1. Differentia eorum est 9. & numerus una unitate minor, 8. Progressio ergo Arithmetica incipiet ab 8. progrediturque per continuam additionem 9. primum ad 8. deinde ad numerum conflatum 17. & sic deinceps; Et hic videre licet, ubi suprà scripsimus etiam fertem numerorum naturalem, cuius idem usus hic est, qui suprà fuit in proportione duplæ.

Ordo propor. decuplarum.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multid. med. numerorum.	8	17	26	35	44	53	62	71	&c.

Itaque inter primos numeros decuplæ proportionis cadent 8. numeri medij, Et 17. inter secundos: Et 26. inter tertios. At inter octauos intercipientur 71. numeri medij, & sic de cæteris. Vt hæc formula declarat.

10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2.

RVRSVS detur proportio quæcunque superparticularis. Et quoniam duo minimi numeri differunt sola unitate, quemadmodum & minimis numeris proportionis duplæ, inseruient hic eadem progressiones, quæ in dupla proportione, sua & idem numerus sit numerorum mediorum hic, qui ibi. Vt hic perspicuum est in proportione sesquioctaua.

Ordo propor. sesquioct.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multid. med. numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

				9		8	
			18	17		16	
		27	26	25		24	
	36	35	34	33		32	
	45	44	43	42	41	40	
	54	53	52	51	50	49	48
63	62	61	60	59	58	57	56

OFFERATVR quoque proportio superquadrupartiens septimas, cuius minimi termini sunt 11. *&* 7. *Differentia eorum est* 4. *Progressio ergo Arithmetica incipiet à* 3. *progredieturq; per* 4. *& hic patet, &na cum serie naturali. Ponitur inter primos numeros pro-*

Ordo propor. superquadr.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum..	3	7	11	15	19	23	27	31	&c.

portionis superquadrupartientis septimas comprehendentur 3. *numeri medij. Et* 7. *inter secundos: Et* 23. *inter sextos, atque ita de cæteris, & hic vides.*

						11.	10.	9.	8.	7.			
					22.	21.	20.	19.	18.	17.	16.	15.	14.
				33.	32.	31.	30.	29.	28.	27.	26.	25.	24.	23.	22.	21.
44.	43.	42.	41.	40.	39.	38.	37.	36.	35.	34.	33.	32.	31.	30.	29.	28.

ITEM detur sit proportio dupla sesquisexta, cuius numeri minimi sunt 13. *&* 6. *Differentia eorum est* 7. *Incipiet ergo progressio à* 9. *habebitque differentiam* 7. *inter eius numeros, & hic cernitur,*

Ordo propor. dup. sesquiquint.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multid. med. numerorum.	6	13	20	27	34	41	48	55	&c.

&na cum serie naturali numerorum. Inter primos ergo numeros proportionis duplæ sesquisextæ cadent 6. *medij numeri: inter secundos,* 13. *& inter octauos,* 55. *&c. Vt hic cernitur.*

13. 12.

13.12.11.10.9.8.7.6.

26.25.24.23.22.21.20.19.18.17.16.15.14.13.12.

39 38.37.36.35.34.33.32.31.30.29.28.27.26.25.24.23.22.21.20.19.18.

POSTREMO propositum sit idem experiri in proportione dupla superbipartiente tertias, cuius minimi termini sunt 8. & 3. Et quia eorum differentia est 5. sumet progressio Arithmetica initium à 4 habebuntque eius numeri differentiam 5. Soluti hic manifestum est, vnà cum numerorum naturali serie.

Ordo propor. duplatum superbip. tertias.	1	2	3	4	5	6	7	8 &c.
Multid. med. numerorum.	4	9	14	19	24	29	34	39 &c.

Cadent ergo inter duos primos numeros proportionis duplæ superbipartientis tertias, 4. numeri medij, & inter secundos, 9. & inter septimos, 34. &c. Vt hic perspicuum est.

8. 7. 6. 5. 4. 3.

16.15.14.13.12.11.10.9.8.7.6.

24 23.22.21.20.19.18.17.16.15.14.13.12.11.10.9.

32.31.30.29.28.27.26.25.24.23.22.21.20.19.18.17.16.15.14.13.12.

MANIFESTVM autem est, quod de proportionibus maioris inæqualitatis hoc loco diximus, eorum quoque esse de minoris inæqualitatis proportionibus, cum iidem numeri inter maiorem numerum, ac minorem, & inter minorem, ac maiorem interijciantur.

CAETERVM ex iis, quæ de quinque speciebus proportionis rationalis tam maioris, quàm minoris inæqualitatis diximus, perspicuè colligitur, non posse plura esse genera proportionis rationalis maioris inæqualitatis, quam quinque iam exposita. Cùm enim, vt Euclides demonstrat propos. 5. lib. 10. commensurabiles quantitates quæcunque, inter quas, vt diximus, est proportio rationalis, inter se proportionem eam habeant, quam numerus ad numerum; fit, vt omnis proportio rationalis quarumcunque quantitatum continuarum assignari, seu exhiberi possit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfectè; quæ ratione constituitur proportio multiplex: Aut semel tantummodo, ac præterea vnam eius partem aliquotam; & sic habetur

proportio ſuperparticularis: Aut ſemel duntaxat, & inſuper plures partes eius aliquotas non facientes vnam; & conficitur proportio ſuperpartiens: Aut aliquoties, & vnam eius partem aliquotam, & colligitur proportio multiplex ſuperparticularis; Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes vnam; & exurgit proportio multiplex ſuperpartiens. Neque verò alio modo maior quantitas minorem continere, aut minor quantitas à maiore contineri poteſt. Eadem ratione conſtat, totidem eſſe genera proportionis minoris inæqualitatis. Rectè ergo proportionem rationalem tum maioris inæqualitatis, tum minoris, in quinque genera, qua expoſuimus, partiti ſumus.

DE PROPORTIONVM RATIONALIVM Denominatoribus.

QVONIAM verò non exiguus eſt vſus Denominatorum proportionum rationalium, quas hactenus expoſuimus, non abs re erit, paucis docere, à quibuſnam numeris ſingulæ proportiones denominentur. Denominator ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit diſtinctè, & apertè habitudinem vnius quantitatis ad alteram: Vt denominator proportionis octuplæ eſt 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ continere minorem octies. Similiter denominator proportionis ſeſquiquintæ eſt $1\frac{1}{5}$; quoniam iſte numerus ſignificat, maiorem quantitatem proportionis ſeſquiquintæ, continere minorem ſemel, & quintam eiuſdem partem. Atq; ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum eſt, vt arbitror, quod Euclides lib. 6. & pleriq; alii Mathematici, appellant denominatorem cuiuſuis proportionis quantitatem illius; quia denominator, vt diximus, oſtendit, quanta ſit vna quantitas ad alteram, cum qua confertur, vt ex propoſitis exemplis conſtat.

Ex iis autem, qua diximus, facilè colligi poteſt denominator cuiuſque proportionis. Denominator enim proportionis multiplicis, quacunque ea ſit, eſt numerus integer tot continens vnitates, quoties maior quantitas minorem continere dici-

dicitur in ea proportione, cuius denominatio quæritur. Vt proportionis duplæ denominator est 2. *Nonuplæ,* 9. *Centuplæ,* 100. *Millecuplæ,* 1000. *&c. Denominatores autem proportionum submultiplicium multiplicibus correspondentium, sunt partes aliquotæ à denominatoribus proportionum multiplicium, quibus respondent, denominatæ. Vt denominator proportionis subduplæ, est* $\frac{1}{2}$; *subquintuplæ,* $\frac{1}{5}$. *subnonuplæ,* $\frac{1}{9}$. *subcentuplæ,* $\frac{1}{100}$. *submillecuplæ,* $\frac{1}{1000}$. *Eodem modo, denominatores aliarum proportionum submultiplicium reperiemus. Itaque denominator cuiuscunque proportionis submultiplicis est numerus fractus, cuius numerator perpetuo est vnitas, denominator autem, numerus proportionem multiplicem correspondentem denominans, vt ex prolatis exemplis patet. Neq; vero vlla difficultas est in cuiusque proportionis multiplicis, vel submultiplicis denominatore reperiendo, si ea, quæ dicta sunt, recte intelligantur: quippe cum ipsa prolatio proportionis denominatorem offerat, vt ex datis exemplis manifestum est.*

DENOMINATOR *cuiusuis proportionis superparticularis est vnitas cum parte illa aliquota, quam minor quantitas debet vltra minorem comprehendere. Vt proportionis sesquialteræ denominator est* $1\frac{1}{2}$; *sesquioctauæ,* $1\frac{1}{8}$. *sesquimillesimæ,* $1\frac{1}{1000}$, *&c. Neque difficile erit denominatorem cuiuscunque proportionis superparticularis inuenire; cum ipsa proportionis prolatio denominatorem exprimat per suam partem aliquotam, vt ex datis exemplis perspicuum est. Denominatores autem proportionum subsuperparticularium correspondentium, sunt fractiones, quarum numeratores vna tantum vnitate minores sunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis subsesquialteræ, est* $\frac{2}{3}$; *subsesquioctauæ,* $\frac{8}{9}$. *subsesquimillesimæ,* $\frac{1999}{2000}$; *&c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotæ in proportione expressæ, & pro eiusdem fractionis denominatore, numerus vnitate maior. Vt denominator proportionis subsesquidecimæ est* $\frac{10}{11}$. *cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partem decimam, nimirum* 10. *denominator autem eius-*

dem fractionis numeratorem ſuperet vnitate, &c. Reperiemus quoque denominatorem cuiuſuis proportionis ſubſuperparticularis hoc modo. Denominatorem correſpondentis proportionis ſuperparticularis reuocabimus ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator ſuperabit his ſemper vna vnitate denominatorem, qui etiam denominator eſt partis aliquotæ, cuius mentio fit in oblata proportione. Nam ſi huius fractionis terminos inuertamus, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, habebimus denominatorem propoſitæ proportionis ſubſuperparticularis. Vt ſi offeratur proportio ſubſeſquiſeptima: quoniam denominator proportionis ſeſquiſeptimæ, quæ illi reſpondet, eſt $1\frac{1}{7}$. qui reuocatur ad hanc fractionem $\frac{8}{7}$. cuius numerator vna vnitate maior eſt, quam denominator partis aliquotæ. Quare ſi eam fractionem inuertamus hoc modo $\frac{7}{8}$. dicemus denominatorem proportionis ſeſquiſeptimæ eſſe $\frac{7}{8}$. Facilius denique cuiuſuis proportionis ſubſuperparticularis denominator fortaſsis reperietur, ſi inueniantur primi numeri habentes proportionem ſuperparticularem reſpondentem, vt ſupra docuimus. Nam fractio, cuius numerator ſit eorum numerorum minor, denominator verò maior, erit denominator propoſitæ proportionis. Vt ſi proponatur proportio ſubſeſquiſeptima: quoniam primi, ſiue minimi numeri habentes proportionem ſeſquiſeptimam, ſunt 8. & 7. ſi ex minore fiat numerator, & ex maiore denominator, conficiemus hanc fractionem $\frac{7}{8}$. pro denominatore proportionis ſeſquiſeptimæ propoſitæ, vt prius.

DENOMINATOR cuiuſuis proportionis ſuperpartientis eſt vnitas cum illis partibus aliquotis non efficientibus vnam, quas maior quantitas debet vltra minorem continere. Vt denominator proportionis ſupertripartientis ſeptimas, eſt $1\frac{3}{7}$. ſupertripartientis vigeſimas, $1\frac{3}{20}$. &c. Neque vlla difficultas eſt in huiuſmodi denominatoribus inueniendis: propterea quod ratio ipſa proportionis denominatorem proprium exhibet, vt ex ſuperioribus exemplis liquido conſtat. Denominatores autem proportionum ſubſuperpartientium, ſunt fractiones, quarum numeratores tot vnitatibus minores ſunt, quam earundem fra-

ctionum

ctionum denominatores, quot partibus aliquotis maior quantitas minorem superat. Vt denominator proportionis subsupertripartientis septimas, est $\frac{7}{1}$; subsupertripartientis vigesimas: $\frac{2}{1}\frac{0}{1}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, quæ in proportione exprimuntur, cui si addatur numerus earundem partium, habebitur eiusdem fractionis denominator. Vt denominator proportionis subsuperquadripartientis vndecimas, est $\frac{1}{1}\frac{5}{1}$, cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partes vndecimas, nimirum 11. cui additus est numerus 4. quatuor partium, vt fiat eiusdem fractionis denominator 15. Denominator autem proportionis subsupertripartientis quintas est hæc fractio, $\frac{8}{5}$. Nam eius numerator est numerus denominans partes quintas, nimirum 5. Denominator autem 8. eiusdem fractionis constatus est ex illo numeratore 5. & ex numero 3. trium partium. Eademque ratione reperiemus & aliarum proportionum subsuperpartientium denominatores. Quos hac etiam ratione inuenies. Reuoca denominatorem proportionis cuiusque superpartientis correspondentis ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator denominatorem, qui partes etiam aliquotas expressas denominat, superabit hic semper totidem partibus, quot sunt partes aliquotæ. Nam huius fractionis numeri inuersi, vt e numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, dabunt denominatorem propositæ proportionis subsuperpartientis. Vt denominator proportionis subsuperdecupartientis decimastertias est $\frac{1}{1}\frac{3}{3}$. quia denominator proportionis superdecupartientis decimastertias est $1\frac{1}{3}$. qui ad hanc fractionem $\frac{3}{4}$. reuocatur, cuius numeri inuersi efficiunt hanc fractionem $\frac{1}{1}\frac{3}{3}$. Denique facilius cuiusuis proportionis subsuperpartientis denominator inuenietur sextis, si experiantur primi, vel minimi numeri habentes proportionem superpartientem correspondentem, vt supra tradidimus. Fractio etenim, cuius numerator sit eorum numerorum minor denominatore autem maior, denominator erit propositæ proportionis subsuperpartientis. Velut si proponatur proportio subsuperquadripartiens

undecimas

nonas: quoniam minimi numeri habentes proportionem ſuperquadrupartientem nonas ſunt 13. & 9. faciemus fractionem $\frac{9}{13}$. pro denominatore proportionis ſubſuperquadrupartientis nonas: & ſic de cæteris.

DENOMINATOR *cuiuſuis proportionis multiplicis ſuperparticularis eſt numerus integer multiplicem proportionem expreſſam denominans, cum illa parte aliquota, quam maior quantitas continere debet vltra minorem quantitatem. Vt denominator proportionis triplæ ſeſquiſeptimæ eſt $3\frac{1}{7}$. Quintuplæ ſeſquinonæ, $5\frac{1}{9}$, &c. Vt nullus omnino labor ſit, exhibere denominatorem cuiuslibet proportionis multiplicis ſuperparticularis; quippe cum ipſa prolatio proportionis diſtinctè exprimat & denominatorem multiplicis proportionis, & partem aliquotam, vt exempla propoſita declarant. Denominatores autem proportionum ſubmultiplicium ſuperparticularium, ſunt fractiones, quarum numeratores numeri ſunt denominantes partes aliquotas in proportionibus expreſſas. Vt denominator proportionis ſubtriplæ ſeſquiſeptimæ, eſt $\frac{7}{21}$; ſubquintuplæ ſeſquinonæ, $\frac{9}{45}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperparticularis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partis aliquotæ, qui ſi multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis, addaturq; vnitas numero producto, habebitur denominator eiuſdem fractionis. Vt denominator proportionis ſubquadruplæ ſeſquiſextæ, eſt $\frac{6}{25}$; cum huius fractionis numerator 6. denominet partes ſextas, iiſq; ductus ſit in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, ac producto numero 24. addita vnitas, vt eiuſdem fractionis denominator conficiatur 25. &c. Iidem denominatores proportionum ſubmultiplicium ſuperparticularium inuenientur, ſi denominator cuiuſuis proportionis multiplicis ſuperparticularis reſpondentis reuocetur ad vnã fractionem, vt in Arithmetica docuimus, multiplicando nimirum denominatorẽ multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero vnitatem, id eſt, numeratorem eiuſdem fractionis addendo. Nam ſi huius fractionis termini commutent ordinem inter ſe, fiet denominator proportionis propoſitæ. Vt ſi detur proportio ſubquadrupla*

dupla ſeſquiſexta: quoniam denominator correſpondentis proportionis quadruplæ ſeſquiſextæ eſt $4\frac{1}{6}$. *ducemus* 4. *id eſt, denominatorem multiplicis proportionis, in* 6. *hoc eſt, in denominatorem fractionis adhærentis, numeroque producto* 24. *addemus* 1. *nimirum numeratorem eiuſdem fractionis, vt totum denominatorem* $4\frac{1}{6}$. *reuocemus ad hanc fractionem* $\frac{25}{6}$. *Cuius termini ſi inter ſe ordinem permutent, fiet hæc fractio* $2\frac{6}{25}$. *pro denominatore proportionis ſubquadruplæ ſeſquiſextæ. Eodemque modo in cæteris agendum erit. Denique facilius fortaſſe denominatorem cuiuſque proportionis ſubmultiplicis ſuperparticularis inuenies, ſi duos primos, minimoſue numeros proportionis multiplicis ſuperparticularis correſpondentis reperias, vt ſupra traditum eſt. Nam fractio, cuius numerator ſit minor eorum numerus, denominator autem, maior, erit denominator proportionis propoſitæ. Vt ſi offeratur proportio ſubtripla ſeſquiſeptima: quoniã primi, ſiue minimi numeri proportionis triplæ ſeſquiſeptimæ ſunt* 22. *&* 7. *fiet ex illis fractio hæc* $\frac{7}{22}$. *pro denominatore proportionis ſubtriplæ ſeſquiſeptimæ, atq; ita de cæteris.*

DENOMINATOR *cuiuſuis proportionis multiplicis ſuperpartientis, eſt numerus integer denominans proportionem multiplicem in ea expreſſam, cum illis partibus aliquotis, non conſtituentibus vnam, quas maior quantitas vltra minorem debet comprehendere. Vt denominator proportionis triplæ ſuperquintupartientis octauas, eſt* $3\frac{5}{8}$; *quadruplæ ſuperbipartientis quintas,* $4\frac{2}{5}$. *&c. Nihil enim difficultatis habet hæc inuentio denominatorum in proportionibus multiplicibus ſuperpartientibus, quod aperte, & diſtincte in qualibet earum exprimatur tam denominator proportionis multiplicis in ea contenta, quam partes aliquotæ, vt perſpicuè in exemplis prolatis appareat. Denominatores verò proportionum ſubmultiplicium ſuperpartientium, ſunt fractiones, quarum numeratores numeri ſunt denominantes partes aliquotas, quæ in proportionibus expreſſæ ſunt. Vt denominator proportionis ſubtriplæ ſuperquintupartientis octauas, eſt* $\frac{8}{25}$. *ſubquadruplæ ſuperbipartientis quintas,* $\frac{5}{12}$. *&c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis, ſi pro numeratore fractionis*

fractionis fomatur denominator partium aliquotarum, quem fi multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroque producto à 1 ts partium aliquotarum numerum, obtinebis eiuſdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis ſubdupli ſuperbipartientis tertias decimasertias, eſt $\frac{3}{7}$. quia huius fractionis numerator 13. denominat partes tertiasdecimas: qui ſubduplatur in 2. denominatorem duplæ proportionis, producto numero 26. adiungatur numerus 8. octo partium, conficietur ex iuſdem fractionis denominator 34. &c. Denominatorem quæſtionis cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis ſic reperies. Eſto denominatorem proportionis multiplicis ſuperpartientis, quæ propoſitæ reſpondet, ad vnam fractionem, vt in Arithmetica præcepimus, minimum multiplicando denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero addendo numeratorem eiuſdem fractionis. Nam huius fractionis termini, ſi inter ſe permutent ordinem dabunt fractionem, quæ denominator erit proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis. Veluti ſi proponatur proportio ſubquintupla ſupertripartiens decimas, reducemus denominatorem correſpondentis proportionis quintuplæ ſupertripartientis decimas, hoc eſt, $5\frac{3}{10}$. ad hanc fractionem $\frac{5}{3}$. quod fit ducendo 5. in 10. productoq; numero addendo 3. vt fiat numerator 53. cui idem denominator 10. ſupponendus eſt. Nam ſi hæc fractio terminos permutet, fiet denominator proportionis ſubquintuplæ ſupertripartientis decimas, $\frac{1}{53}$. &c. Sed forſitan facilius denominatorem cuiuſlibet proportionis ſubmultiplicis ſuperpartientis obtinebis, ſi primos, ſiue minimos numeros proportionis multiplicis ſuperpartientis reſpondentis reperias, ex eis $\frac{1}{}$ fractionem conſtituas, ſumendo minorem pro numeratore, & maiorem pro denominatore. Vtrobique enim hæc dabit denominatorem proportionis propoſitæ. Vt ſi proponatur proportio ſubquintupla ſupertripartiens decimas: quoniam minimi numeri in proportione quintupla ſupertripartiente decimas ſunt 53. & 10. conſtituatur ex eis denominator proportionis propoſitæ hæc fractio $\frac{1}{53}$. & ſic deceteris.

DENOMINATOR denig; proportionis æqualitatis perpetuo

petro est vnitas: quia vna quantitas debet in ea proportione esse æqualis alteri, ac proinde vna alteram continere semel, & nihil præterea. quod quidem vnitas significat.

*EX his, quæ de ratione nam denominatæ dictum sunt, perfacile est de proportionum maioris inæqualitatis & minoris inæqualitatis nominibus, quæ ab illis denominationem habent, iudicare. Nam quæ proportiones maiores inæqualitatis appellantur, eæ sunt, quarum denominationes ex numeris constant, quorum maior minorem continet, præter vnitatem, exemplis liquido constat. Nam denominationes habent proportiones triplæ superquadripartientes tertias, quæ maiorem continent semel, & præterea quaternionem partem tertiam minoris. Et sic de cæteris. Quæ autem non partes, sed partium partes maiorem continent, & insuper quantitatem eorum. At vero denominationes habent proportiones subtriplæ superquadripartientes nouas, earum scilicet, quæ nouentesimas primas partes, ex partium ipsa proportionum subtriplam superquadripartientium nouas desumunt, cum vox significet, minorem quantitatem in eo ipso maiore nouies partes tricesimas primas, quod eadem ratione est, ac maiorem quantitatem ad minorem habere proportionem subtriplam superquadripartientem nouas. Verbo autem, plures denominationis proportionum inæqualium maioris inæqualitatis explicas per numerum, ea dicta est, Vetus, quæ eas proportionum quarum denominatio est, ad se inuicem habet denominationes fractionum ad numeratorem: quod per se satis patet ex his, quæ de fractionum per numeratorem. Nam Quotiens denominatio proportionum, prima denominatio fractionis habet adnumeratorem vnitatem. Eadem ratione omnes proportionum datæ denominationis propositas inæqualitatis pronunciabis præpositum vnitatem syllabæ sub positæ denominationi fractionis adnumeratorem appellatum. Vt si quis denominator $\frac{1}{3}$ dicatur eius proportio subtripla. Quando autem denominator fractionis est Vnitas, proportio data denominationis eius habet pro exponente adeandem fractionis denominatorem adnumeratorem, quod datus denominator sit $\frac{2}{2}$ Dupla proportio est ea, quæ per denominatorem fractionem $\frac{1}{2}$ Denominatio quæ fractionem habet numeratorem ternarium habebit proportionem subtriplam, & sic de cæteris. Quæ autem proportiones denominationes habent ex numeris, quorum maior minorem continet, præter vnitatem, & insuper partes eorum, eæ sunt superparticulares, superpartientes, & multiplices superparticulares, & superpartientes. Quæ vero denominationes habent proportiones multiplices superparticulares, & superpartientes, eæ sunt, quarum denominationes ex numeris constant, quorum maior minorem continet, præter vnitatem, & insuper partes eorum, & quidem plures quam vnam. Quæ autem denominationes habent proportiones superparticulares, eæ sunt, quarum denominationes ex numeris constant, quorum maior minorem continet semel, & præterea vnam partem eius. Quæ vero denominationes habent proportiones superpartientes, eæ sunt, quarum denominationes ex numeris constant, quorum maior minorem continet semel, & præterea plures partes eius quam vnam. Quæ autem denominationes habent proportiones multiplices, eæ sunt, quarum denominationes ex numeris constant, quorum maior minorem continet, præter vnitatem, & insuper nullas partes eius. Quæ vero denominationes habent proportiones multiplices superparticulares, eæ sunt, quarum denominationes ex numeris constant, quorum maior minorem continet bis, & præterea vnam partem eius. Quæ vero denominationes habent proportiones multiplices superpartientes, eæ sunt, quarum denominationes ex numeris constant, quorum maior minorem continet bis

minibus appellari possunt, (quis enim proportionem, verbi gratia, 37. ad 1. commodè dixerit triginta septuplam, vel trigecuplam septuplam, vel alio id genus nomine? Quis item commodè proportionem 48. ad 29. dixerit supernonemdecupartientem vigesimasnonas? &c.) solent Geometræ plerumque in suis scriptis exprimere proportionem quamcunque per primos, sive minimos numeros eius proportionis. Vt proportionem 13. ad 1. vel 39. ad 3. vel 390. ad 30. malunt dicere eam, quam habent 13. ad 1. quam tredecuplam. Et vicissim proportionem 1. ad 13. vel 3. ad 39. vel 30. ad 390. potius dicunt eam, quam habet 1. ad 13. quàm subtredecuplam. Itaq; proportionem 52. ad 40. vocant proportionem 13. ad 10. quæ alias diceretur supertripartiens decimas. Proportionem vero 40. ad 52. appellant eam, quæ est 10. ad 13. quæ proprio nomine diceretur subsupertripartiens decimas, & sic de aliis.

QVANQVAM autem proportio qualibet exprimi possit per minimos eius numeros, vt diximus: perneccessaria tamen est cognitio denominatoris eiusdem proportionis, vt habitudinem vnius numeri ad alterum cognoscamus. Nam etiamsi aliquis proportionem numeri 1700. ad 400. dicat esse eam, quæ est numeri 17. ad 4 non intelligam tamen plane, quanam sit illa proportio, nisi eius denominatorem cognouero, qui est $4\frac{1}{4}$. Hic enim manifestè declarat, maiorem numerum continere minorem quater, & insuper quartam eius partem. Atque hic denominator facilius ex minimis numeris alicuius proportionis percipitur, quam ex numeris non minimis. Quòd si quando minimi numeri alicuius proportionis sint ita magni, vt denominator ex illis non facile possit intelligi, recurrendum erit ad præceptum, quod mox subiungam, & ex quo denominator proportionis inter quosuis duos numeros, sive minimi ij sint, sive non, notus efficitur.

QVOD si proportionem quamcunque per eius numeros minimos efferunt Mathematici, licebit nobis multo commodius proportionem quorumlibet duorum numerorum explicare per eius proportionis denominatorem: ita vt proportionem 100. ad 20. dicamus eam, cuius denominator est 5. Item proportionem 48. ad 38. eam, cuius denominator est $1\frac{5}{9}$. quæ dicenda esset superquintupartiens decimas nonas, sic etiam proportio 20. ad 100. dici potest ea, quæ habet denominatorem $\frac{1}{5}$. Et proportio 38. ad 48. ea, cuius denominator est $\frac{1}{2}\frac{9}{4}$. atque ita de reliquis; quoniam videlicet denominator clarissimè demonstrat habitudinem vnius numeri ad alium, vt dictum est.

DENOMINATOR porro proportionis inter duos quosuis numeros ita reperietur. Diuidatur numerus antecedens, qui nimirum ad alium refertur, per consequentem. Quotiens enim numerus, reducta prius fractione, si qua adsit, ad minimos numeros, vt in Arithmetica tradidimus, erit eius proportionis denominator. Veluti proposita proportione 39. ad 3. vel 390. ad 30. dicemus denominatorem eius esse 13. Quotientem videlicet numerum diuisionis 39. per 3. vel 390. per 30.

Quod

Quod ſi Viciſſim conferantur 3. cum 39. Vel 30. cum 390. erit quotiens diuiſionis fractio hac $\frac{3}{39}$. *Vel* $\frac{300}{3900}$. *Nam quando minor numerus per maiorem diuiditur, Quotiens ſemper eſt fractio, cuius numerator eſt minor numerus, & denominator, maior, Vt in Arithmetica explicauimus. Et quia Vtraque fractio, ſi eius numeri ad minimos reuocentur, reducitur ad hanc* $\frac{1}{13}$. *dicemus denominatorem proportionis 3. ad 39. Vel 30. ad 390. eſſe* $\frac{1}{13}$. *Rurſus data proportione 52. ad 40. ex diuiſione 52. per 40. fit Quotiens* $1\frac{12}{40}$. *cuius fractio reducitur ad hanc* $\frac{3}{10}$ *Igitur denominator proportionis 52. ad 40. erit* $1\frac{3}{10}$. *Si autem proportio offeratur 40. ad 52. inuenietur denominator ſiue Quotiens* $\frac{40}{52}$. *hoc eſt, in minimis numeris,* $\frac{10}{13}$. *Praterea proportio 100. ad 20. denominatorem habebit 5. Diuiſis enim 100. per 20. Quotiens eſt 5. Proportionis Verò 20. ad 100. denominator erit* $\frac{1}{5}$. *propterea quod diuiſis 20. per 100. Quotiens eſt* $\frac{100}{1}$. *id eſt, in minimis numeris* $\frac{1}{5}$. *Deinde denominator proportionis 48. ad 10. erit* $4\frac{4}{5}$. *quod diuiſis 48. per 10. Quotiens fit* $4\frac{8}{10}$. *hoc eſt, in numeris minimis,* $4\frac{4}{5}$. *At denominator proportionis 10. ad 48. erit* $\frac{10}{48}$. *id eſt, in minimis numeris* $\frac{5}{24}$. *Et quia denominator fractionis,* $\frac{5}{24}$. *ad numeratorem habet proportionem quadruplam ſuperquadripartientem quintas (quòd diuiſis 24. per 5. Quotiens fiat* $4\frac{4}{5}$. *appellabitur proportio 10. ad 48. ſubquadrupla ſuperquadripartiens quintas. Vt enim ritè efferatur proportio minoris inaqualitatis, denominanda prius eſt proportio denominatoris fractionis ad numeratorem, Vt ſupra diximus.*

INVENTO denominatore proportionis duorum numerorum in minimis numeris, Vt dictum eſt, eoque reducto ad Vnam fractionem, Vt in Arithmetica traditum eſt, erunt numerator, & denominator fractionis, minimi numeri, inter quos illa proportio reperitur. In multiplici tamen proportione, quando nimirum denominator inuentus non habet annexam fractionem, erunt denominator inuentus, & Vnitas, minimi numeri illius proportionis. Vt quoniam denominator proportionis 348. ad 120. eſt $2\frac{90}{120}$. *ſi reducatur ad hanc Vnam fractionem,* $\frac{290}{120}$. *(quod fit, ducendo integrum numerum 2. in denominatorem fractionis 10. productoque numero 20. eiuſdem fractionis numeratorem 9. addendo.) erunt 29. & 10. minimi numeri habentes proportionem eandem, quam 348. ad 120. Sic etiam, quia denominator proportionis 824. ad 1133. eſt* $\frac{8}{11}$. *erunt 8. & 11. minimi numeri proportionis 824. ad 1133. Item quia denominator proportionis 84. ad 12. eſt 7. erunt in ea proportione minimi numeri 7. & 1. Viciſſim numeri minimi proportionis 12. ad 84. cuius denominator eſt* $\frac{1}{7}$. *erunt 1. & 7. Itaque propoſitis duobus numeris quibuſcunque, ſi quarantur minimi numeri eandem, quam illi, habentes proportionem, inueniendus erit denominator proportionis eorum, Vt dictum eſt, iſque ad Vnam fractionem redigendus. Huius enim fractionis numerator, & denominator, erunt minimi numeri quæſiti. Vt ſi quarantur mi-*

minimi numeri proportionis, quam habent 400. ad 90. Diuiso antecedente per consequentem terminum, fit Quotiens $4\frac{4}{9}$. in minimis numeris. Quo reuocato ad hanc fractionem $\frac{40}{9}$. dicemus, minimos numeros proportionis 400. ad 90. esse 40. & 9. Eademque ratio est de caeteris.

IAM verò si, propositis duabus proportionibus, cognoscere velis, vtra earum maior sit, vel minor, dices eam maiorem esse, cuius denominator maior est, minorem verò eam, cuius denominator est minor. Quod si denominatores sint aequales, proportiones quoque aequales esse pronunciabis. Vt si proponantur duae hae proportiones, superoctupartiens decimasquintas, & superdecupartiens decimas septimas, quarum denominatores sunt $1\frac{8}{15}$. & $1\frac{10}{17}$. dices priorem posteriore esse minorem: quia denominator $1\frac{8}{15}$. minor est denominatore $1\frac{10}{17}$. Qua vero arte cognoscas, vtra duarum fractionum maior sit, vel minor, an verò aequales sint, tradidimus in Arithmetica. Eadem ratione, si offerantur duae proportiones, quarum denominatores sint $10\frac{1}{1000}$. $9\frac{100}{101}$. dicemus priorem esse maiorem. Quanquam enim fractio $\frac{1}{1000}$. minor sit fractione $\frac{100}{101}$. numerus tamen integer 10. integro numero 9. maior est. Sic si dentur duae proportiones, vna 17. ad 11. altera 18. ad 12. dices illam hac esse maiorem, quia illius denominator $1\frac{6}{11}$. maior est huius denominatore $1\frac{1}{2}$. Caeterum, quando duae proportiones proponuntur in numeris, dignoscemus facilè, vtra earum sit maior, etiamsi earum denominatores non inquiramus, hac ratione. Multiplicato antecedente termino prioris proportionis in terminum consequentem posterioris, & termino antecedente posterioris in consequentem terminum prioris; cuius proportionis antecedens terminus maiorem numerum produxerit, illa proportio maior est: Et si duo aequales numeri geniti fuerint proportiones inter se aequales erunt. Vt si proponantur duae proportiones 17. ad 11. & 18. ad 12. comperiemus priorem maiorem esse, quia illius antecedens 17. in huius consequentem 12. ductus procreat 204. at antecedens huius 18. in consequentem illius 11. producit tantummodo 198. Rursus si dentur duae proportiones 18. ad 12. & 108. ad 72. producetur idem numerus 1296. tam ex prioris antecedente 18. in posterioris consequentem 72. quàm ex antecedente posterioris 108. in consequentem prioris 12. multiplicato. Quare proportiones ipsa aequales inter se erunt. Ratio huiusce operationis est: quia hac ratione, propositis quatuor numeris, multiplicantur inter se tam extremi duo, quam duo intermedij, vt in datis exemplis patet. Igitur si procreentur numeri aequales, erit eadem proportio primi ad secundum, quae tertij ad quartum, vt ab Euclide demonstratur lib. 7. propos. 19. Hinc fit, si primus in quartum producat maiorem numerum, quam secundus in tertium, maiorem esse primum, quam vt eandem habere possit proportionem ad secundum, quam tertius ad quartum: quandoquidem minor esse deberet, vt eandem mu-

dem numerum posset producere, ac proinde eandem habere proportionem.

DESIDERANTVR nonnunquam duo numeri in quacunque proportione, sive ij primi sint, sive non; hos ergo, ut inuenturi sumus, multiplicabimus quemcunq; numerum assumptum, vel dividemus, per propositæ proportionis denominatorem. Nam productus numerus ad assumptum, qui multiplicatus est, vel assumptus, qui divisus est, ad Quotientem habebit proportionem propositam. Verbi gratia, si sint inveniendi duo numeri in proportione quintupla, ducemus quemcunque numerum, ut 100. in denominatorem 5. Productus enim numerus 500. ad multiplicatum numerum 100. proportionem habebit quintuplam. Vel eundem numerum 100. dividemus per denominatorem 5. Nam divisus numerus 100. ad Quotientem 20. habebit quoque datam proportionem quintuplam. Ita quoque si inveniendi sint duo numeri in proportione dupla sesquitertia, cuius denominator est $2\frac{1}{3}$. multiplicabimus quemvis numerum, ut 24 per $2\frac{1}{3}$. Productus enim numerus 56. ad numerum multiplicatum 24. habet proportionem denominatam à $2\frac{1}{3}$. Item si numerum 24. dividamus per $2\frac{1}{3}$. habebit divisus numerus 24 ad Quotientem $10\frac{2}{7}$ proportionem datam duplam sesquitertium. Sed ut fractiones vitentur, si quidem per multiplicationem rem expedire libet, accipiendus erit numerus multiplicandus, qui numeretur à denominatore partis aliquotæ, vel plurium partium, quarum in proportione fit mentio: In proportione tamen multiplici, quia nullius partis fit mentio, assumi potest quilibet numerus. Ut si desiderentur duo numeri proportionis triplæ superbipartientis nonas, accipiendus erit numerus à 9. numeratus, qualis est 18. vel 27. 36. 45. &c. Quilibet enim horum ductus in denominatorem $3\frac{2}{9}$. gignet numerum integrum: Ut ductus 45 in $3\frac{2}{9}$ fit numerus 145. qui ad assumptum numerum 45. proportionem habet datam. Sic etiam si cupiat quis proportionem subquadruplam, cuius denominator est $\frac{1}{4}$. sumendus erit numerus à 4. numeratus, ut 12. Hic enim ductus in denominatorem $\frac{1}{4}$ producet 3. ut merum integrum, qui ad assumptum 12. habet proportionem subquadruplam. Si vero per divisionem agendum sit, & fractiones vitandæ, sumendus erit in proportione multiplici numerus à denominatore proportionis numeratus. In aliis autem proportionibus, revocandus erit denominator proportionis ad suam fractionem, numerusq; sumendus à numeratore numeratus. Ut si quæratur proportio quintupla, sumendus erit, Verbi gratia, numerus 30. à 5. numeratus. Hic enim divisus per denominatorem 5. facit Quotientem 6. ad quem proportionem habet quintuplam. Si autem desideretur proportio, cuius denominator sit $4\frac{2}{7}$. revocato eo ad fractionem $\frac{7}{7}\frac{1}{7}$. sumendus erit numerus à 31. numeratus, ut 62. Nam hoc divisio per $\frac{7}{7}\frac{1}{7}$ fit Quotiens 14. ad quem acceptus numerus 64. habet proportionem ut $4\frac{2}{7}$. denominatam, nimirum qua-

truplam ſupertripartientem ſeptimas. Caterum ſi duo numeri propo-
nantur, cupiatque quis alios duos in eadem proportione reperire, ſatis
erit, ſi vtrumque per quemuis numerum multiplicet, aut diuidat.
Numeri enim producti, aut Quotientes eandem habebunt proportio-
nem, quam propoſiti duo numeri. Item ſi propoſito quouis numero, in-
ueniendus ſit alius, qui ad eum proportionem habeat datam, vel ad
quem is datum habeat proportionem, aſſequeris primum, ſi propoſitum
numerum per denominatorem proportionis multiplices: at ſecundum
obtinebis, ſi eundem per denominatorem proportionis diuidas. Quòd
ſi proportio detur in duobus numeris, proponaturque tertius quiſpiam
numerus; ſi quidem inueniendus ſit quartus, ad quem tertius datus
eandem habeat proportionem, quam primus datus ad ſecundum: ſi
quidem denominator proportionis duorum numerorum datorum no-
tus eſt, diuidendus erit tertius numerus datus per denominatorem.
Quotiens enim numerus erit, quem quærimus. Vel certè ſiue denomi-
nator cognitus ſit, ſiue non, multiplicandus erit tertius numerus per
ſecundum datum, hoc eſt, per conſequentem terminum data propor-
tionis, productusq; numerus per primum, ſiue per antecedentem termi-
num, diuidendus. Vt ſi dentur duo numeri 4. 7. quorum proportionis
denominator eſt $\frac{4}{7}$. detur item tertius numerus 20. Diuide numerum
20. per denominatorem $\frac{4}{7}$. produceturque quartus numerus quæſitus
35. Vel multiplica tertium numerum 20. per ſecundum 7. & produ-
ctum numerum 140. partire per primum 4. Ad Quotientem enim 35.
habebit tertius numerus 20. eandem proportionem, quam 4. ad 7. Si
verò inueniendus ſit quartus, qui ad tertium eandem habeat propor-
tionem, quam dati duo numeri, ſi quidem denominator notus eſt, du-
cendus is erit in tertium numerum. Productus enim numerus erit,
quem quæris. Vel ſiue notus ſit denominator, ſiue non, multiplicandus
erit tertius numerus per primum datum, nimirum per terminum an-
tecedentem, & numerus productus per ſecundum, id eſt, per conſe-
quentem terminum, diuidendus. Vt datis eiſdem duobus numeris
4. 7. & tertio 20. multiplica 20. per $\frac{4}{7}$. denominatorem, gignetur que
quæſitus numerus $11\frac{3}{7}$. Vel duo tertium numerum 20. in primum 4.
numerum q; productum 80. partire per ſecundum 7. Nam ad tertium
20. habebit Quotiens $11\frac{3}{7}$ eandem proportionem, quam 4 ad 7.

QVIA verò diximus, eam proportionem eſſe maiorem; cuius de-
nominator maior eſt, ſit, vt in proportionibus multiplicibus detur mi-
nima, nimirum dupla, denominata à 2. non autem maxima: pro-
terea quod numerus 2. inter omnes denominatores proportionum
multiplicium eſt minimus, maximus autem dari non poteſt, cum nu-
meri augeantur in infinitum. Efficitur quoque, inter proportiones ſu-
perparticulares reperiri maximam, nimirum ſeſquialteram, denomi-
natam à $1\frac{1}{2}$. non autem minimam: quia numerus $1\frac{1}{2}$. omnium deno-
minatorum proportionum ſuperparticularium maximus eſt, mini-

mus autem

mus autem dari non potest, cum denominatores fractionum progredi possint in infinitum. Constat autem ex iis, quæ in Arithmetica tradidimus, fractionem, cujus denominator major est, minorem esse, si iidem sit numerator; fractionem autem cujus denominator minor est, fore eadem sit numerator, majorem ipsa. Cum ergo denominator 2. sit omnium minimus, erit [illegible] quæ in existentibus sunt 1. quales sunt fractiones [illegible] particularium maximæ. Cum [illegible] rationis, qualitatis neque maximæ neque minimæ. Quod intelligi eadem est demonstratio [illegible]. Nam si [illegible] maximæ, erit [illegible] quæ in existentibus sunt [illegible] superpartientes autem totius [illegible] particulares maximæ erit multiplex [illegible] superparticularis. Inter multiplices denique superpartientes maximæ est multiplex superpartiens tertias [illegible] superpartientes. E contrario in proportionalitate [illegible] nonam sub dupla, [illegible] particulares autem reperiuntur minimæ [illegible] aliis denique proportionibus [illegible] qualitatis neque maximæ, neque minimæ. Hæc [illegible] quæ [illegible] fractionum denominatores proportionem [illegible].

*COLLIGITUR etiam, hanc [illegible] inter proportionem majoris inæqualitatis, quæ [illegible] majoris inæqualitatis quidem, sed [illegible] proportionis majoris inæqualitatis quidem, sed [illegible] quæ [illegible] quidem sunt [illegible] quæ [illegible] quidem sunt [illegible] quæ [illegible] quidem sunt

posse pervenire, etiamsi in infinitum decrescendo ad ipsam accedat. Rursus cum omnis proportio minoris inaqualitatis minor sit proportione aqualitatis, non possit autem in ea reperiri maxima, manifestum quoque est, proportionem minoris inaqualitatis attingere non posse proportionem aqualitatis, licet in infinitum crescendo ad eam accedat. Sed & utrumque exemplo etiam discatur, sciendum est, si inter duos numeros quosuis non proximos interponatur quilibet numerus intermedius, maior scilicet uno eorum, & altero minor; proportionem maioris numeri ad minorem dimissam esse in duas minores, quarum una est maioris numeri ad medium interpositum, altera verò numeri medij ad minorem. Item proportionem minoris numeri ad maiorem dimissam esse in duas maiores, quarum una est minoris numeri ad medium interpositum, altera verò medij ad maiorem. Vt si inter duos numeros 6. 3. ponatur medius 4. hoc modo, 6. 4. 3. proportio 6. ad 3. qua dupla est, divisa erit in sesquialteram 6. ad 4. & sesquitertiam 4. ad 3. quarum utraque minor est proportione dupla 6. ad 3. Contra verò, proportio 3. ad 6. qua subdupla est, divisa erit in subsesquitertiam 3. ad 4. & subsesqualteram 4. ad 6. quarum utraque maior est proportione subdupla 3. ad 6. Idem fit, si inter eosdem numeros 6. 3. interponatur medius 5. hoc modo, 6. 5. 3. Tam enim proportio 6. ad 5. sesquiquintam, quam proportio superbipartiens tertias 5. ad 3. minor est proportione dupla 6. ad 3. Contra verò tam proportio superbipartiens tertias 3. ad 5. quam subsesquiquintam 5. ad 6. maior est proportione subdupla 3. ad 6. Quæ omnia ex denominatoribus probari possunt. Verum utrumque demonstrabitur hac ratione. Quoniam medius numerus minor est maiore dato, & maior minore, habebit maior datus ad minorem datum, maiorem proportionem, quam idem maior ad medium, & quam medius ad minorem. At vero minor ad maiorem habebit minorem proportionem, quam idem minor ad medium, & quam medius ad maiorem, ut manifestum est vel ex defin. 20. lib. 7. ut ibidem explicauimus, vel ex propos. 8. huius lib. 5. ubi demonstrat Euclides, propositis duabus quantitatibus inaqualibus maioris ad tertiam aliquam esse maiorem proportionem, quam minoris: At è contrario, tertiam eandem quantitatem ad maiorem habere minorem proportionem, quam ad maiorem. Ex quo sequitur id, quod diximus: nimirum positis his tribus numeris 6. 4. 3. maiorem esse proportionem eiusdem numeri 6. ad minorem 3. quam ad medium 4. maiorem: Item maiorem esse proportionem maioris numeri 6. ad 3. quam minoris 4. ad eundem 3. Contra verò, maiorem esse proportionem eiusdem numeri 3. ad minorem 4. quam ad maiorem 6. Item maiorem esse proportionem maioris numeri 4. ad 6. quam minoris 3. ad eundem 6. Eademque in cæteris ratio est. His positis, erit proportio dupla 4. ad 2. divisa hic, 4. 3. 2. in duas minores. Et tam proportio 8. ad 6. quæ eadem est, quæ 4. ad 3. divisa hic, 8. 7. 6. quam

proportio

proportio 6. ad 4. quæ eadem est, quæ 3. ad 2. hic 6. 3. 4. in duas minores. Item tam proportio 16. ad 13. quæ eadem est, quæ 8. ad 7. diuisæ hic, 16. 15. 14 & proportio 14. ad 12. quæ eadem est, quæ 7. ad 6. hic, 14. 13. 12. quam proportio 12. ad 10. quæ eadem est, quæ 6. ad 5. hic, 12. 11. 10. & proportio 10. ad 8. quæ eadem est, quæ 5. ad 4. hic, 10. 9. 8. in duas minores: atque ita fieri potest in infinitum. Et contrario modo proportio subsesquitertia 4. ad 3. diuisa erit hic, 4. 5. 6. in duas maiores. Item tam proportio 8. ad 7. quæ eadem est, quæ 4. ad 3. diuisa hic, 8. 9. 12. quam proportio 10. ad 8. quæ eadem est, quæ 5. ad 4. hic, 10. 11. 12. in duas maiores. Item tam proportio 16. ad 15. quæ eadem est, quæ 8. ad 5. diuisa hic, 16. 17. 18. & proportio 18. ad 15. quæ eadem est, quæ 9. ad 5. hic, 18. 19. 20. quam proportio 22. ad 20. quæ eadem est, quæ 11. ad 10. hic, 20. 21. 22. & proportio 22. ad 24. quæ eadem est, quæ 11. ad 12. hic, 22. 23. 24. in duas maiores: atque huius incrementi nunquam erit finis. Idem que experiri licebit in quibuscunque aliis proportionibus. Vt proportio decupla 10. ad 1. diuisa hic est, 10. 6. 1. in duas minores: Et proportio subsuperbipartiens undecimas 11. ad 18. diuisa hic, 11. 15. 18. in duas maiores, &c.

DE PROPORTIONALITATIBUS.

PROPORTIONALITATES ab Euclide definitæ in plura genera diuiduntur, vt videre licet apud Boetium, Iordanum, & alios Arithmeticos: sed præcipuas proportionalitates, quas auctores nominati Medietates vocant, sunt hæ tres; Arithmetica, Geometrica, & Musica, siue Harmonica.

ARITHMETICA proportionalitas, siue Medietas, est, quando tres, vel plures numeri per eandem differentiam progrediuntur. Vt hi numeri 4. 7. 10. 13. 16. quorum quilibet suum antecedentem ternario superat, dicuntur constituere proportionalitatem Arithmeticam. Est autem duplex, continua, & disiuncta. Continua est, quando in progressione numerorum nulla fit interruptio, sed quilibet cum proxime antecedente confertur, vt in dato exemplo fit. Disiuncta autem est, quando in numerorum progressione interruptio fit, ita vt hi tantum inter se conferantur, non autem quilibet cum proxime precedente. Vt in his numeris contingit, 4. 7. 8. 11. 30. 33. Nam eadem differentia est inter binos 4. 7. & 8. 11. & 30. 33. non autem inter 4. 7. & 7. 8. &c.

GEOMETRICA *proportionalitas, ſiue Medietas eſt, quando tres, vel plures numeri eandem proportionem habent; quam quidem Euclides definiuit. Hac enim propriè proportionalitas dicitur, ſiue Analogia: alia verò impropriè, cum non ſit eadem ſemper inter earum terminos proportio, ita vt rectius Mediates dicantur, propter medios terminos, qui certa quadam ratione inter extremos interiiciuntur. Vt hi numeri, 2. 6. 18. 54. quoniam quilibet ad ſuum antecedentem eandem habet proportionem triplam, conſtituunt proportionalitatem Geometricam. Hac duplex quoque eſt, continua, & diſcreta, vt in 4. defin. huius lib. explicauimus. Continua cernitur in datis numeris, diſcreta autem in hiſce ſex, 2. 3. 12. 18. 20. 30. Nam bini tantum 2. 3. & 12. 18. & 20. 30. eandem habent proportionem ſeſquialteram; non autem quilibet ad proximè precedentem.*

MVSICA *ſiue Harmonica proportionalitas, ſiue Medietas eſt, quando tres numeri ita ordinantur, vt eadem ſit proportio extremi ad minimum, quæ differentia inter maiores duos ad differentiam inter duos minores: ita vt nec eadem inter eos ſit differentia, vt in Arithmetica, nec eadem proportio, vt in Geometrica. Vt tres hi numeri, 3. 4. 6. quoniam eadem eſt proportio maximi 6. ad minimum 3. quæ differentia inter maximum 6. & medium 4. nimirum numeri 2. ad differentiam inter medium 4. & minimum 3. id eſt, ad 1. (cum vtrobique proportio ſit dupla) conſtituunt proportionalitatem, ſiue Medietatem Muſicam ſiue Harmonicam: Ipſi verò neque eandem habent differentiam, neque eandem proportionem, vt patet. Sic etiam tres hi numeri 42. 12. 7. Harmonicam proportionalitatem conſtituunt, quia eadem proportio eſt maximi 42. ad minimum 7. quæ differentiæ inter maximum 42. & medium 12. hoc eſt, numeri 30. ad differentiam 5. inter medium 12. & minimum 7. cum vtrobique proportio ſit ſextupla. Dicitur autem huiuſmodi proportionalitas Muſica, ſiue Harmonica, quia plerumque eius numeri habent proportiones eas, in quibus conſonantiæ Muſicæ conſiſtunt. Vt in priori exemplo inter 6. & 4. eſt proportio ſeſquialtera, conſtituens conſonantiam, quæ Diapente dicitur, ſiue Quinta. Item inter 4. & 3. eſt proportio ſeſquitertia, conſtituens conſo-*

consonantiam, quam Diatessaron, siue Quartam vocant. Denique inter extremos 6. & 3. cernitur proportio dupla, quæ Diapason consonantiam, siue octauam constituit. Atque eodem modo in plerisque aliis idem cernitur.

PROPRIETATES ALIQVOT TRIVM proportionalitatum, siue Medietatum, quas explicauimus.

I.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, minor est proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic patet. 2. 4. 6. Nam proportio 6. ad 4. est sesquialtera; & 4. ad 2. dupla.

AT in tribus numeris proportionalitatis Musicæ, maior est proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic vides. 3. 4. 6. Proportio enim 6. ad 4 est sesquialtera; & 4. ad 3. sesquitertia.

IN tribus denique numeris proportionalitatis Geometricæ, eadem est proportio maximi ad medium, quæ medij ad minimum, & ex eius definitione constat, apparetq; in hisce tribus numeris 3. 6. 12. Tam enim 12. ad 6. quàm 6. ad 3. duplam habent proportionem. Quæ in re Geometrica proportionalitas medium locum tuetur inter Arithmeticam, atque Harmonicam, cùm in Arithmetica inter maiores numeros minor sit proportio, quàm inter minores. Contrà verò in Harmonica inter maiores numeros maior, quàm inter minores. In Geometrica autem eadem inter maiores, quæ inter minores, vt explicatum est.

II.

ARITHMETICA proportionalitas habet terminorum differentias æquales, proportiones verò eorundem inæquales.

GEOMETRICA è contrario differentias terminorum habet inæquales, proportiones verò eorundem æquales.

HARMONICA denique neque differentias, neque proportiones terminorum æquales habet: Patet hoc ex superioribus exemplis.

III.

IN tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, & a maiore superatur. Vt hic, 3. 7. 11. Medius 7. superat minorem 3. quatuor vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{4}{7}$ ipsius medij 7. Item medius idem 7. superatur à maiore 11. quatuor quoque vnitatibus, quæ constituunt eiusdem medij, $\frac{4}{7}$. Item hic 15. 20. 25. medius 20. superat minorem 15. quinque vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{1}{4}$. ipsius medij 20. Item medius idem 20. superatur à maiore 25. quinque quoque vnitatibus, quæ constituunt $\frac{1}{4}$. eiusdem medij 20.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, qua parte, vel partibus maior à maiore superatur. Vt hic 4. 6. 9. medius 6. superat minorem 4. binario, qui est $\frac{1}{3}$. medij, superaturq; à maiore 9. ternario, qui quoque est $\frac{1}{3}$. maioris. Sic etiam hic 9. 15. 25. Vbi est continua proportio superbipartiens tertias, medius 15. superat minorem 9. sex Vnitatibus, quæ faciunt $\frac{2}{5}$. ipsius medij 15. Et idem medius 15. superatur à maiore 25. decem Vnitatibus, quæ efficiunt quoque $\frac{2}{5}$. ipsius maioris 25.

IN tribus denique numeris Harmonica proportionalitatis, medius eadem parte, vel partibus minoris minorem superat, qua parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic, 3. 4. 6. medius 4. superat minorem 3. Vnitate, quæ est $\frac{1}{3}$. eiusdem minoris, superaturq; à maiore 6. binario, qui quoque est $\frac{1}{3}$. eiusdem maioris. Rursus in hac proportionalitate Harmonica, 42. 12. 7. medius 12. superat minorem 7. quinque Vnitatibus, quæ sunt $\frac{5}{7}$. ipsius minoris 7. Et idem medius 12. superatur à maiore 42. triginta Vnitatibus, quæ sunt $\frac{5}{7}$. hoc est, in minimis numeris, $\frac{5}{7}$ quoq; ipsius maioris 42.

IV.

IN tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, summa extremorum dupla est medij. Vt hic, 3. 7. 11. summa extremorum 14. dupla est medij 7.

AT in tribus numeris proportionalitatis tam Geometricæ, quàm Harmonicæ, summa extremorum superat duplum medij numero, quo differentia maiorum differentiam minorum superat. Vt hic, 4. 6. 9. & 3. 4. 6. tam summa 13. extremorum 4. 9. superat duplum medij 6. hoc est, 12. Vnitate, qua differentia maiorum, numerum 3. superat 2. differentiam minorum, quam summa 9. extremorum 3. 6. duplum medij 4. id est, 8. superat Vnitate, qua differentia maiorum, numerum 2. superat differentiam minorum, qua est 1. Sic etiam hic, 9. 15. 25. Vbi est continua proportio superbipartiens tertias, summa 34. extremorum 9. 25. superat duplum medij 15. hoc est, 30. numero 4. quo eadem differentia maiorum, 10. differentiam minorum, 6. superat. Item in hac proportionalitate Harmonica, 42. 12. 7. summa 49. extremorum duplum medij 12. id est, 24. superat numero 25. quo differentia maiorum 30. superat differentiam minorum 5.

V.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, extremi inter se multiplicati procreant numerum, qui à quadrato medij superatur numero, qui fit ex differentia minorum in maiorum differentiam. Vt hic 3. 7. 11. numerus 33. factus ex 3. in 11. superatur à 49. quadrato medij, numero 16. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4.

IN tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, numerus ex

ex primo in tertium genitus quadrato medij æqualis est, Sit hic 4. 6. 9. Extremi inter se multiplicati faciunt 36 quadratum medij.

IN tribus numeris deinceps Harmonicè proportionalibus, numerus ex multiplicatione extremorum inter se genitus superat quadratum medij numeri, qui fit ex differentia inter medium & alterum maiorum. Vt hic 12. 8. 6. numerus 72. factus ex 12. in 6. superat 64. quadratum medij numeri 8. qui fit ex differentia 2. in æqualem sui 4. Quæ mirabilis mediandorum multitudo Geometricæ proportionalitati inter Arithmeticam, & Harmonicam, quippe cum in Arithmetica minus prodeant ex primo in tertium, quam ex medio in se, in Harmonica verò plus, & in Geometrica idem numerus ostendatur.

VI.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, summa extremorum in medium duplum producit numerum, qui duplum producti primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum duplicatam. Vt hic, 3. 7. 11. Summa extremorum 14. in medium 7. facit 98. qui numerus superat numerum 66. qui duplus est producti 33. ex primo in tertium numero 32. qui fit ex differentia 4 in differentiam 4. duplicatam, hoc est, in 8.

IN tribus autem numeris Geometricæ proportionalitatis summa extremorum in medium multiplicata producit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum. Vt hic 4. 6. 9. Summa 13. extremorum in mediũ 6. facit 78. qui numerus duplum producti ex 4. in 9. id est, 72 superat numero 6 ex differentia 2 in differentiã 3 genito.

DENIQVE in tribus numeris proportionalitatis Harmonicæ, ex summa extremorum in medium producitur numerus duplus producti ex primo in tertium. Vt hic 3. 4. 6. Ex summa extremorum 9. in medium 4. fit numerus 36 duplus producti 18. ex 3. in 6.

VII.

QVATVOR numeris in proportionalitate Geometrica non continuè proportionalibus datis, si secundus est inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, erit tertius inter eosdem extremos medius in Harmonica proportionalitate: Et si secundus medius est in proportionalitate Harmonica, erit tertius in Arithmetica medius. Vt hic, 6. 9. 8. 12. quoniam ita est 6. ad 9. vt 8. ad 12. Et sunt 6. 8. 12 proportionales Arithmeticè, eosdem habent ex æquo 3. 4. 6. 8 12. Harmonicè proportionales. Est enim ad 8. ut 3. hoc est 12. ad 6. quæ differentiæ sunt 4. ad 2 dispositæ inuicem. Item hic 3. 8. 12. quia ita est 6. ad 9. vt 8. ad 12. Et sunt 8. 12 proportionales Harmonicè, & dicuntur 6. 9. 12. Arithmeticè esse proportionales, eosdem ex æquo habent 3. 4. 6.

ITEM quatuor numeris datis, quorum duo inter medium si

inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica; erunt quatuor dati numeri Geometricè non continuè proportionales. Vt quia datis his 4. numeris, 4.6.8.12. tertius 8. medius est Arithmeticè inter extremos 4.12. & secundus 6. inter eosdem extremos 4.12. medius est Harmonicè; videas ita esse 4. ad 6. vt 8. ad 12. Et 4. ad 8. vt 6. ad 12.

VIII.

PROPOSITIS quotquot numeris continuè proportionalibus sive Arithmeticè, sive Geometricè, sive Harmonicè, (continuantur autem plures numeri in proportionalitate Harmonica, quando tres primi sunt Harmonicè proportionales, item tres primum insequentes, relicto primo; & relictis primis duobus, alij tres, qui sequuntur; nec non primis tribus relictis, subsequentes tres, & sic deinceps.) erunt in eadem proportionalitate constituti numeri, qui in locis tam impariibus, quàm paribus, atque etiam partim in imparibus, partim in paribus alternis locantur, dummodò aqualis multitudo numerorum inter quosuis impares, & pares, vel inter partim impares, partim pares alternis interijciantur: cuiusmodi sunt primus, tertius, quintus, septimus, &c. Item secundus, quartus, sextus, &c. Praterea primus, quartus, septimus, &c. Insuper primus, quintus, nonus, &c. atq; ita deinceps. Id quod in exemplis, qua sequuntur, perspicuum erit.

PROPORTIONALITATES Arithmeticæ.

3.	7.	11.	15.	19.	23.	27.	31.	35.	39.	43.	47.	51.	55.	59.
3.		11.		19.		27.		35.		43.		51.		59.
	7.		15.		23.		31.		39.		47.		55.	
3.			15.			27.			39.			51.		
	7.			19.			31			43.			55.	
3.				19.			35.				51.			

Proportionalitates Geometricæ.

5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120	10240	20480	40960
5		20		80		320		1280		5120		20480	
	10		40		160		640		2560		10240		40960
5			40			320			1560			20480	
	10			80			640			5120			40960
5				80				1280			20480		

Propor-

	252	280	315	360	420	504	630	840	1260	2520	
	252		315		420		630		1260		
		280		360		504		840		2520	
	252			360			630			2520	
		280			420			840			
	252				420			1260			

IX.

QVOTQVOT numeris proportionalibus datis sive in Arithmetica proportionalitate, sive Geometrica, aut Harmonica, singuli per aliquem numerum eundem multiplicentur aut dividantur, habebunt quoque producti numeri, vel Quotientes proportionalitatem Arithmeticam, Geometricam, aut Harmonicam. Vt hic vides singulos multiplicatos per 4. Item divisos per 4.

Arithmetica prop.			*Geometrica prop.*			*Harmonica prop.*		
20	28	36	25	40	80	60	84	140
Producti.			*Producti.*			*Producti.*		
80	112	144	80	160	320	240	336	560
Quotientes.			*Quotientes.*			*Quotientes.*		
5	7	9	5	10	20	15	21	35

CÆTERVM in Geometrica, & Harmonica proportionalitate, numeri producti, & Quotientes retinent eandem speciem proportionem, quam numeri multiplicati, aut divisi habent. At in Arithmetica non seruant eandem differentiam. Sed producti numeri habent differentiam differentiæ multiplicatorum numerorum multiplicem à numero multiplicante denominatam. Vt in dato exemplo quadruplam. Differentia enim inter 20. & 28. est 8. at inter 80. & 112 est 32. Quotientium vero differentia ad differentiam numerorum divisorum habet proportionem sub multiplici eam à numero denominatam, praposita particula, sub. Vt in dato exemplo subquadruplam. Nam differentia inter 20. & 28. est 8. at inter 5. & 7. est 2. Eadem proportio differentiarum inter productos numeros, & multiplicatos, quæ inter Quotientes, numeros, divisos, aut proportionales in proportionalitate Geometrica, & Harmonica. Ita vides differentias numerorum 80. 112. 320. Item numerorum 25. 40. 80. quadruplas esse 5. 7. 20. Item numerorum 60. 84. 140. inter numeros 20. 40. 80. inter quos [illegible] 84. 140. 336. 560. differentias numerorum 5. 10. 20. [illegible] 15. 21. 35. quotientium differentiarum subquadruplas esse.

DE

DE PROPORTIONALITATE Arithmetica.

I.

DATIS duobus numeris quibuscunque, si eorum differentiam maiori addas, habebis tertium terminum in proportionalitate Arithmetica utrique dato maiorem. Et si eandem differentiam huic tertio addas, conficies quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps reperies infinitos alios semper maiores, si differentiam vltimo inuentò semper adijcias. Vt datis duobus numeris 4. 11. quorum differentia est 7. constituetur hac proportionalitas Arithmetica, quæ extendi potest in infinitum.

4. 11. 18. 25. 32. 39. 46. 53. 60. 67. &c.

Quod si eandem differentiam à minori subtrahas, quando subtrahi potest, habebis rursus tertium terminum in eadem proportionalitate Arithmetica maiorem: Et si differentiam eandem à tertio detrahas, reliquus si quis vltimo adhuc minor in eadem proportionalitate, atque ita deinceps reperies alios minores, si differentiam ab vltimo inuento semper demas donec vltra hoc amplius fieri nequeat. Vt datis numeris 30. 34. quorum differentia est 4. constituetur hac proportionalitas Arithmetica vsq; ad 2. qua vlterius progredi nequit, cùm differentia 4. amplius subtrahi nequeat à 2.

34. 30. 26. 22. 18. 14. 10. 6. 2.

EADEM proportionalitas extendetur, etiamsi differentia non assumatur, hoc modo. Datis duobus numeris, à maiore duplicato detrahe minorem. Reliquus enim numerus erit tertius terminus vtroque dato maior. A quo duplicato si proximè præcedentem subtrahas, habebis quartum, & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 4. 15. si a 15 dupl. to, hoc est, a 30. subtrahas 4. reliquus erit tertius terminus 26. Ab huius duplo 52. si quoque demas 15. habebis quartum terminum 37. & sic deinceps, vt hic apparet 4. 15. 26. 37. 48. &c.

RVRSVS datis duobus numeris; si ex duplo minoris detrahas maiorem, relinquetur tertius numerus vtroque minor. Et si ex huius duplo proxime præcedentem demas, relinques quartum terminum adhuc minorem, & sic deinceps, donec amplius subtracto fieri non queat. Vt datis duobus numeris 20. 27. si ex 20. duplicato, id est, ex 40. auferas 27. relinquetur 13. tertius terminus. Ab huius duplo 26. si quoque 20. auferas, manebit quartus terminus 6. Et quoniam ab hoc 6. duplo 12. numeros terminus 13. subtrahi non potest, non potest progressio ultra vlteriùs progredi, vt hic vides. 27. 20. 13. 6.

QVAN-

II.

QVANDO terminorum numerus eſt impar, ſumma extremorum æqualis eſt ſummæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, dupla autem medij termini, à quo extremi æqualiter diſtant. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28.

Summa 4 & 28. Item 7. & 25. Item 10. & 22. Item 13. & 19. Item duplum medij termini 16. ſemper eſt 32.

QVANDO autem numerus terminorum eſt par, ſumma extremorum æqualis ſemper eſt ſummæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter remotorum Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31.

Summa 4 & 31. Item 7. & 28. Item 10. & 25. Item 13. & 22. Item 16. & 19. ſemper eſt 35.

ITAQVE quando numerus terminorum impar eſt, habebit ſumma omnium terminorum ad medium terminum ab extremis æqualiter diſtantem, hoc eſt, ad ſemiſſem ſummæ extremorum, ſui ducrum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, proportionem multiplicem à numero terminorum denominatam. Sit enim ſumma extremorum, vel quorumlibet duorum ab extremis æquali intervallo diſtantium, dupla ſit termini medij, continebitur medius terminus ſemel in ſemiſſi ſummæ extremorum, ideſt in ſumma omnium terminorum totius, quot ſunt termini, vel quotcunque alij medio termino, & bis in qualibet ſumma duorum à medio terminum æqualiter diſtantium: ac proinde omnium terminorum ſumma ad ſemiſſem aggregati extremorum, hoc eſt, ad medium terminum proportionem habebit multiplicem, eiuſdem denominationis cum numero terminorum. Vt in hac ſerie numerorum ſequentium.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30.

Summa omnium terminorum continebit medium terminum 18. hoc eſt, ſemel in ſumma extremorum 6 & 30. Item quinquies in 9. numero terminorum ad extremorum omnium terminorum ad 18 ſemiſſem ſummæ extremorum, nempe ad medium terminum proportionem habebit quinquiplam. Eadem in cæteris eſt ratio.

SVMMAM ipſius omnium terminorum progreſſionalium Arithmeticæ, cuius terminorum numerus impar eſt, ſic invenies: ſemiſſem aggregati extremorum, quod ſemper eſt ſumma extremorum numerum eſt impar, per numerum terminorum multiplicemus. Vt in hac ſerie numerorum.

15.

7. 19. 31 43. 55. 67. 79. 91. 103. 115. 127.

Summa extremorum est 134. *Cuius semissis* 67. *quæ à medio termino* 67. *non differt, in* 11. *numerum terminorum ducta producit* 737. *summam omnium terminorum. Atq; hac ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est par: sed quando extremorum summa impar est (quando enim terminorum numerus est par, potest esse summa extremorum impar, non autem semper par) erit eius semissis, numerus integer cum* $\frac{1}{2}$.

QVANDO autem terminorum numerus est par, habebit summa omnium terminorum ad summam extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, proportionem multiplicem à semisse numeri terminorum denominatam. Cùm enim summa quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium æqualis sit summæ extremorum, continebitur hæc summa extremorum toties in summa omnium terminorum, quoties vnitas in dimidiato numero terminorum continetur, semel nimirum in summa quorumlibet duorum ab extremis distantium æqualiter: atque idcirco summa omnium terminorum ad summam extremorum proportionem habebit multiplicem à dimidiato numero terminorum denominatam. Vt in hac serie 10. *terminorum.*

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33.

Summa omnium terminorum summam extremorum 6. *& 33. quæ est* 39. *continebit quinquies, hoc est, summa omnium terminorum ad* 38. *summam extremorum habebit proportionem quintuplam. Et sic de alijs.*

SVMMAM ergo omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus par est, obtinebimus, si summam extremorum in dimidiatum numerum terminorum (qui terminorum numerus dimidium habebit sine fractione vnitatis, cùm par ponatur) ducamus. Vt in hac serie 10. *terminorum.*

6. 11. 16. 21. 26. 31. 36. 41. 46. 51.

Summa extremorum est 57. *quæ in* 5. *semissem numeri terminorum ducta efficit* 285. *summam omnium terminorum. Hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est impar: sed semissis numeri terminorum semper erit integer cum* $\frac{1}{2}$. *numerus terminorum ponatur impar.*

VIDES igitur satis esse, vt summa inueniatur, si extremi termini, vnà cum terminorum numero cognita sint. Quo facto autem ex cognito altero extremorum terminorum numero, atq; differentia, in cognitionem alterius extremi peruenire possimus, tamiam docebimus.

SI in

III.

SI in proportionalitate Arithmetica quotuis terminorum alterum extremorum, numerum terminorum, & differentiam cognoscamus, reperiemus alterum extremum, hoc modo. Numerum proximè minorem numero terminorum in differentiam datam ducemus, & productum minori extremo cognito adijciemus, vel eundem numerum productum ex maiore extremo noto detrahemus. Nam ibi conficiemus maius extremum, quod quaritur, hic autem reliquum fiet minus extremum ignotum. Exempli causa. Si proponatur minus extremum notum 4. numerus terminorum 12. & differentia 5. multiplicabimus 11. nimirum numerum proximè minorem terminorum numero, per differentiam datam 5. productoq; 55. minus extremum 4. adijciemus. Summa enim 59. erit extremum maius. Vt in his 12. terminis manifestum est, quorum differentia est 5.

4. 9. 14. 19. 24. 29. 34. 39. 44. 49. 54. 59.

Si verò proponatur maius extremum notum 59. & idem terminorum numerus 12. cum differentia eadem 5. auferemus numerum 55. productum ex 11. numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam 5. ex noto maiore extremo 59. Reliquus enim numerus 4. erit minus extremum. Vt in eodem exemplo perspicuum est.

NECESSE autem est, si minus extremum inquiratur, numerum productum ex numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam, maiorem esse maiore extremo cognito, vt subtractio fieri possit. Alioquin quæstio erit impossibilis: hoc est, fieri non poterit, vt datus numerus possit esse maius extremum in progressione illa, cuius differentia, & numerus terminorum ita se habeant, vt proponitur. Vt si quis daret maius extremum 20. numerum terminorum 6. & differentiam 5. non posset inueniri minus extremum; propterea quod numerus 25. productus ex 5. qui proximè minor est terminorum numero, in differentiam 5. maior est dato maiore extremo 20. Quod si quando contingat, productum illum numerum maiori extremo esse æqualem, ita vt subtractione facta, relinquatur 0. erit quidem quæstio possibilis, sed minus extremum erit 0. Vt si in posteriori hoc exemplo maius extremũ proponeretur 25. fieret hæc proportionalitas Arithmetica.

0. 5. 10. 15. 20. 25.

IV.

SI extremi termini noti sint, vnà cum numero terminorum, reperiemus differentiam numerorum hoc pacto. Dempto minore extremo à maiore, diuidemus reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Nam Quotiens erit differentia quæsita. Vt si quis dicat, esse 10. terminos proportionalitatis cuiusdam Arithmeticæ, cuius numeri extremi sint 7. & 52. Dempto minore extremo 7.

ex maiore 52. reliquum numerum 45. partiemur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 5. erit differentia, qua quæritur, vt hic apparet.

7. 12. 17. 22. 27. 32. 37. 42. 47. 52.

VERVM vt fractiones admittantur, progressioq; proposita locum habeat in numeris integris, necesse est, minore extremo detracto ex maiore, vt reliquum numerum possit numerari à numero, qui terminorum numero proximè minor est. Si enim non numeretur, differentia inuenta erit vel fracta, vel numerus integer cum fractione: quæstio tamen erit possibilis. Vt si quis ponat extremos terminos 2. & 38. & numerum terminorum 9. Demptis 2. ex 38. & reliquo numero 36. diuiso per 8. reperitur differentia $4\frac{1}{2}$. vt patet in hoc exemplo.

2. $6\frac{1}{2}$. 11. $15\frac{1}{2}$. 20. $24\frac{1}{2}$. 29. $33\frac{1}{2}$. 38.

V.

SI duo termini extremi, vnà cum differentia, noti sint, eliciemus numerum terminorum hac ratione. Detracto minore extremo à maiore, partiemur reliquum numerum per differentiam. Nam si Quotienti adjiciamus 1. constabimus numerum terminorum quæsitum. Vt datis duobus extremis 10. & 40. cum differentia 3. Ablatis 10 ex 40. & reliquo numero 30 diuiso per 3. fit Quotiens 10. Additâ ergo 1. fit numerus terminorum 11. vt hic videre licet.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34. 37. 40.

SED vt quæstio proposita sit possibilis, hoc est, vt verè in rerum natura existat progressio aliqua, quæ habeat omnes conditiones propositas, necesse est, maiore extremo subducto ex maiore, reliquum numerum à differentia numerari. Si enim non numeretur, Quotiens non erit numerus integer, ac proinde indicare non poterit numerum terminorum, etiamsi addatur 1. Fieri enim non potest, vt detur progressio aliqua, cuius terminorum numerus non sit integer.

VI.

SI duo extremi termini, vnà cum omnium terminorum summa, noti sint, explorabimus, & numerum terminorum, & differentiam, hac arte. Summam omnium terminorum per extremorum summam partiemur. Quotiens enim dabit dimidiatum numerum terminorum, & duplicatus totum numerum indicabit. Inuento autem terminorum numero, cùm & duo extremi termini cogniti sint, inueniemus differentiam, vt in 4. regula traditum est; si nimirum minore extremo dempto ex maiore, reliquum numerum diuidamus per numerum

numerum proximè minorem numero terminorū inuento. Verbi gratia. Si summa proponatur 515. & extremi termini 20 & 83. diuidemus summam 515 per 103 summam extremorum. Quotiens enim 5. duplicatus dabit numerum terminorum 10. quorum differentiam obtinebimus, si dempto minore extremo 20. ex maiore 83. reliquum numerum 63. partiamur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum inuento. Nam Quotiens 7. erit differentia, vt hic cernis.

20. 27. 34. 41. 48. 55. 62. 69. 76. 83.

Vides ergo, vt quæstio sit possibilis, hoc est, vt re vera existat aliqua progressio, in qua omnium terminorum summa, & duo extremi ita se habeant, vt proponitur, necesse esse, vt summa omnium terminorum data à summa extremorum numeretur. Alioquin terminorum numerus erui non poterit, si Quotiens non sit numerus integer: Vel certè, si summa omnium terminorum data à summa extremorum non numeretur, necesse esse, vt diuisa summa omnium terminorum per extremorum summam, Quotiens sit numerus integer cum $\frac{1}{2}$. vt nimirum duplicatus efficere possit numerum terminorum integrum.

VII.

SI trium terminorum extremi habeant proportionem duplam, medius ad differentiam habebit triplam proportionem. Si verò extremorum proportio maior sit quam dupla, proportio medij ad differentiam minor erit quàm tripla. Si denique minor sit extremorum proportio quàm dupla, maior erit proportio medij ad differentiam, quam tripla. Vt hic, 8 12. 16. proportio extremorum 16 & 8. est dupla: & medij 12. ad differentiam 4. tripla. Hic autem, 8. 14. 20 proportio inter extremos 20. & 8 est dupla sesquialtera, nimirum maior quàm dupla: & medij 14. ad differentiam 6 dupla sesquitertia, minor videlicet, quàm tripla. Hic denique 8. 11. 14. extremi 14. & 8 proportionem habent superbipartientem quartas, quæ minor est quàm dupla: & medius 11. ad differentiam 3. triplam superbipartientem tertias, hoc est, maiorem quam triplam.

VIII.

INTER quosuis duos numeros constitues medium proportionalem Arithmeticè, si eorum summæ acceptæ semissem, vt datis duobus numeris 6. & 30. summa eorum est 36. Huius ergo semissis 18 medio loco proportionalis est Arithmetice inter 6 & 30 vt hic manifestum est. 6. 18. 30. Itaque si medius terminus constituendus sit numerus integer, necesse est, vtrumque numerorum datorum (vel parem, vel imparem, vt videlicet summa extremorum semper sit par) hoc est, vt possit habere dimidij sine fractione vnitatis. Nam quando sum-

ma extremorum impar est: quod accidit cùm alter extremorũ par est, & alter impar, erit medius terminus integer numerus cum semisse unitatis. Vt datis numeris duobus 8. 25. summa eorum est 33. Huius ergo dimidium $16\frac{1}{2}$. medius terminus erit hoc modo, 8. $16\frac{1}{2}$. 25.

IX.

INTER quosuis autem duos numeros constitues, quotquot quis iusserit, medios proportionales Arithmeticè, hoc modo. Minorem detrahe ex maiore: Reliquum deinde numerum partire per numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum. Quotiens enim erit differentia proportionalitatis Arithmetica, quam si minori numero proposito adijcias, constabis primum medium. Huic si eandem differentiam addas, conficies secundum, & sic deinceps. Vel si eam differentiam à maiori numero proposito subtrahas, relinquetur vltimus medius. A quo si eandem differentiam demas, remanebit penultimus, & sic deinceps. Veluti si inter 6. & 114. constituendi sint 11. termini medij, detrahemus 6. ex 114. Reliquum numerum 108. per 12. (qui numerus proximè maior est numero mediorum constituendorum) partiemur. Quotiens enim 9. erit differentia terminorum proportionalitatis. Sic ergo se habebunt 11. termini medij inter 6. & 114.

6. 15. 24. 33. 42. 51. 60. 69. 78. 87. 96. 105. 114.

SED quoniam plerunque tales duo numeri proponuntur, inter quos nõ possunt cadere numeri integri medij proportionales, propterea quòd inuentus Quotiens pro differentia non semper numerus integer est; si fractiones vitare velis, necesse est, duos propositos numeros esse eiusmodi, vt dempto minore ex maiore, reliquus à numero, qui proximè maior est numero mediorum constituendorum, numeretur: quos ita facilè reperies. Accipe pro minore extremo quemcunque numerum, eumque adde cuicunque alij numero, quem numerus proximè maior numero mediorum inueniendorum metitur. Conflatus enim numerus maius extremum proportionalitatis erit. Vt si velis duos numeros, inter quos cadant 8. numeri proportionales Arithmeticè primus autem sit, verbi gratia 7. Adde hunc numerum 7. ad quemuis numerum, quem nouenarius, (qui proximè maior est numero mediorum constituendorum) metitur, nimirum ad 72. conficiesque maius extremum 79. Differentiam autem inuenies, vt dictum est, detrahendo 7. ex 79. & reliquum numerum 72. per 9. diuidendo. Quotiens enim 8. erit differentia, vt hic vides.

7. 15. 23. 31. 39. 47. 55. 63. 71. 79.

QVOD

QVOD si quis proponat & minus extremum, & differentiam proportionalitatis, inuenies maius extremum, ita vt inter minus, & maius cadant quotuis medij numeri habentes illam differentiam, si numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum per datam differentiam multiplices, numeroq; producto minus extremum addas. Vt si quis velit inter 5. & quempiam maiorem numerum constituere 9. terminos medios, quorum differentia sit 4. Multiplicanda erunt 10. per 4. & producto numero 40. addendum minus extremum 5. Nam inter conflatum numerum 45. & datum minus extremum 5. intercipiuntur 9. medij termini cum differentia data 4. Vt hic manifestum est.

5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45.

HAC alia etiam iucunda operatione constitues quotuis medios proportionales inter datos duos numeros. Vtrumque datorum numerorum partire per numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum: Quotientes sub illis colloca, quemque sub suo, & ab eisdem Quotientibus ascende per continuam eorum additionem addendo primo quemque ad seipsum, deinde ad numerum conflatum, atque ita desinceps, ita vt duas proportionalitates Arithmeticas instituas à Quotientibus incipientes, & per eosdem progredientes, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini desiderantur. Postremo adde singules terminos vnius ordinis singulis terminis aduersis alterius ordinis, id est, maximum vnius minimo alterius; proximum deinde sub illo, proximo supra hunc, &c. Numeri enim conflati dabunt medios optatos. Exempli gratia. Sint inter 15. & 100. constituendi 4. medij termini Arithmeticè proportionales. Vtroque diuiso per 5. hoc est, per numerum proximè maiorem numero mediorum, fiunt Quotientes 3. & 20. Constitues ergo hos ordines 4. terminorum sub 15. & 100. Arithmeticè proportionalium per eandem Quotientum continuam additionem, addendo primùm 3. ad 3. vt fiant 6. Item 3. ad 6. vt fiant 9. Item 3. ad 9. vt fiant 12. Rursus addendo 20. ad 20. vt fiant 40. Item 20. ad 40. vt fiant 60. Item 20. ad 60. vt fiant 80. vt hic vides.

15	32	49	66	83	100
12					80
9					60
6					40
3					20

EX 12. supremo primi ordinis, & infimo 20. secundi ordinis fiunt

32. pro primo medio Ex 9. & 40. fiunt 49. pro secundo medio. Ex 6. & 60 fiunt 66 pro tertio medio. Denique ex 3 & 80. fiunt 83. pro quarto medio itaq; in primo ordine semper descendendum est à supremo ad infimũ &c. in secundo verò ab infimo ad supremũ &c. ascendendum.

EST autem dignum consideratione, differentiam Quotientum, qui sunt minimi numeri duorum ordinum constitutorum, esse quoq; differentiam proportionalitatis constituenda. Ita videsdifferentiam in proposito exemplo esse 17. qua differentia etiam est inter Quotientes 3. & 20. Quocirca, inuentis Quotientibus, si minor à maiore subtrahatur, & reliquus numerus minori extremo dato adijciatur, & huic composito numero idem ille numerus reliquus addatur, & ita deinceps, constituentur ijdem termini medij, etiamsi duo illi ordines non instituantur.

VIDES ergo, vtrumque numerum propositum numerari debere à numero, qui numerum mediorum vna vnitate superat, si fractiones euitandæ sint. Vel certè inuiendos esse duos extremos, vt in priori parte huius regulæ præcepimus. In ijs enim fractiones quoque vitantur, etiamsi eos numerus numero mediorum proximè maior non numeret: quia minore Quotiente detracto ex maiore, semper numerus integer relinquitur; vt in exemplis prioris illius regulæ apparet. Nam in tertio eorum verbi gratia, inter 5. & 45. constituendi sunt 9. termini medij. Si igitur vterque per 10. diuidatur, fiunt Quotientes $\frac{5}{10}$. & $\frac{45}{10}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. quorum differentia est 4. numerus integer, ex cuius continua additione ad minus extremum datum medij termini optati conficiuntur: qui ijdem reperientur, si per Quotientes $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. duo ordines instituantur ascendentes, vt dictum est, per ipsorum Quotientium additionem continuam, &c.

X.

NVMERVM quemlibet propositum distribuemus in partes quotquot quis inserit, proportionalitatem Arithmeticam seruantes, hac ratione. Diuiso dato numero per semissem numeri terminorum, incidimus Quotientem in duas partes inæquales vtcunque, pro extremis terminis proportionalitatis. Deinde quia tam datis sunt duo termini extremi, cum numero terminorum, detrahemus minus extremum ex maiore, partiemurque reliquum numerum per numerum proxim. à minorem numero terminorum. Ita namque prodibit in Quotiente differentia, vt ex 4. regula patet. Si igitur hac differentia addatur minori extremo assumpto, deinde ad numerum conflatum, atque ita deinceps, constituetur numerus terminorum datus, quorum summa proposito numero æqualis est: ac proinde datus numerus in numerum partium Arithmeticè proportionalium sectus erit. Exempli causa, si numerus 830. distribuendus sit in 10. partes proportionales Arithmeticè; partiemur eum per 5. semissem terminorum, Quotien-

sientemque 166. secabimus in 20. & 146. terminos extremos proportionalitatis constituenda. Deinde deductis 20. ex 146. numerum reliquum 126 dividemus per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 14. (vt in 4. regula dictum est) differentia erit proportionalitatis. Vt hic vides.

20. 34. 48. 62. 76. 90. 104. 118. 132. 146.

Rursus si numerus 10. dividendus sit in 10. partes proportionales Arithmeticè, dividemus eum per 5 semissem terminorum. Quotientem verò 2. in duas partes inaequales secabimus $1\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{2}$. pro extremis terminis proportionalitatis. Dempto deinde minore extremo $\frac{1}{2}$. ex maiore $1\frac{1}{2}$. partiemur reliquum 1 per 9. numerum proximè minorem numero partium constituendarum. Quotiens enim $\frac{1}{9}$. differentia erit continuè addenda minori extremo $\frac{1}{2}$. & numero collato, &c. Quae additio, vt facilior fiat, reducemus minus extremum $\frac{1}{2}$ & differentiam $\frac{1}{9}$. ad eandem denominationem, vt ad $\frac{9}{18}$. & $\frac{2}{18}$. Sic ergo divisus erit numerus 10. in 10. partes Arithmeticè proportionales, quarum prima est $\frac{1}{2}$. sive $\frac{9}{18}$. Ultima verò $1\frac{1}{2}$. sive $1\frac{9}{18}$. & differentia $\frac{2}{18}$.

$$\frac{9}{18}.\ \frac{11}{18}.\ \frac{13}{18}.\ \frac{15}{18}.\ \frac{17}{18}.\ 1\frac{1}{18}.\ 1\frac{3}{18}.\ 1\frac{5}{18}.\ 1\frac{7}{18}.\ 1\frac{9}{18}.$$

Certum autem est, hac ratione variis modis datum numerum dividi posse in propositum numerum partium proportionalium, prout videlicet, diviso dato numero per semissem numeri terminorum, Quotiens in alias partes binas inaequales pro terminis extremis sectus fuerit.

IDEM efficiemus hac ratione. Numero dato, ac si esset summa omnium terminorum constituendorum, diviso per numerum terminorum datum, dabit Quotiens duplicatus summam extremorum: propterea quòd horum extremorum summa semissis, id est, Quotiens inventus ductus in numerum terminorum, hoc est, in divisorem, producit summam omnium terminorum, nimirum datum numerum, & in secunda regula dictum est. Quare si Quotientem duplicatum in duos numeros inaequales secemus pro terminis extremis: & minore detracto ex maiore, reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum dato dividamus, dabit Quotiens differentiam, vt in 4. regula diximus. Quam si ad minus extremum totiens adjiciamus, & iterum ad conflatum numerum, & sic deinceps, constituta erit proportionalitas Arithmetica, qua imperatur. Veluti, si numerus 198. secandus proponatur in 9. partes Arithmeticè proportionales, partiemur eum per 9. terminorum numerum, vt fiat Quotiens 22. qui duplicatus dabit 44. summam extremorum. Constituto igitur

minore extremo 10. ac proinde maiore 34. ſi detrahamus 10. ex 34. & reliquum numerum 24 per 8. numerum proximè minorem numero terminorum partiamur, gignetur differentia 3. Sic ergo ſtabunt 9. termini proportionalitatis Arithmeticæ conficientes ſummam 198.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

Hic etiam manifeſtum eſt, Quòd datus numerus diſtribui poſſit in datum numerum partium, prout videlicet Quotiens primus duplicatus, quem ſummam eſſe diximus extremorum, in alias atq; alias partes binas ſectus fuerit pro extremis duobus terminis.

SED fortaſſe facilius (quanquam operatio aliquanto longior ſit) idem hoc abſolues hac ratione: Cape tot numeros Arithmeticè quomodocunq; proportionales, in quot partes datus numerus diſtribuendus eſt, & ſingulos in datum numerum duc, procreatoſq; numeros per ſummam omnium terminorum ſumptorum ex 2. regula inuentam, partire. Quotientes enim dabunt partes, quas quæris. Verbi gratia. Sit diuidendus numerus 525. in 10. partes proportionales Arithmeticè. Sume 10. numeros Arithmeticè proportionales quoſcunque, 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. quorum ſumma eſt 175. Ductis autem ſingulis in datum numerum 525. creabuntur hi 10. numeri, 2100. 3675. 5250. 6825. 8400. 9975. 11550. 13125. 14700. 16275. quibus ſingulis diuiſis per ſummam 175. tuorum numerorum in proportionalitate Arithmetica acceptorum, gignentur hæ 10. partes, quæ quæris.

12. 21. 30. 39. 48. 57. 66. 75. 84. 93.

IDEM obtinebis, ſi datum numerum per aſſumptorum numerorum ſummam partiaris, Quotientemq; in ſingulos aſſumptos numeros ducas. Producti enim numeri dabunt partes, quas quæris. Vt in dato exemplo, ſi datus numerus 525 diuidatur per 175. ſummam aſſumptorum numerorum, fit Quotiens 3. quo ducto in ſingulos numeros aſſumptos, 4. 7. 10. &c. gignetur eadem partes, quæ prius, 12. 21. 30. &c.

Vt autem operatio fiat facilior, ac breuior, ſatis eſt, priores duos numeros proportionalitatis acceptæ multiplicare per datum numerum, productosque numeros per ſummam omnium terminorum eiuſdem acceptæ proportionalitatis partiri. Vel ſatis eſt, dato numero per ſummam aſſumptorum numerorum diuiſo, Quotientem in duos priores aſſumptos numeros ducere. Ita enim reperientur prima duæ partes numeri dati, quarum differentia addita maiori, fiet tertia, & eadem differentia addita tertiæ faciet quartam, & ſic deinceps. Liquidò autem hic quoque conſtare puto, datum numerum Quotcunq; modis diſtribui poſſe in partes, quotquot quis imperauerit, proportionales: prout ſcilicet alij atq; alij numeri eiuſdem proportionalitatis

Arith-

Arithmetica fuerint assumpti, & ei quorum alia atque alia sit differentia.

HAC sua partes inuenta habent ordinatim eosdem proportiones inter se, quas inter terminos proportionalitatis assumptos eodem ordine reperiuntur. Perpetuo autem singuli numeri accepti proportionalitatis ad singulas partes inuentas, primus ad primam, secundus ad secundam, &c. eandem omnino habent proportionem. Sic ex sex inter primas partes inuentas 12. 21. esse proportionem superbipartientem quartas, qualis est inter primos numeros acceptos 4. 7. &c. Item 4. ad 12. & 7. ad 21. & 10. ad 30. &c. habere eandem prorsus proportionem, nimirum sesquitertiam.

ITAQVE, si accipiatur proportionalitas Arithmetica, cuius primi duo numeri habeant proportionem duplam, ita vt & primus sit differentia omnium terminorum: habebunt primas partes duplam quoque proportionem, atque ita prima erit quoque differentia, ex cuius additione aliæ partes colligentur. Vt si in superiore exemplo accepisses hos 10. terminos, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. quorum summa est 55. Vel hos 10. numeros, 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. quorum summa est 165. multiplicassesque primam quemque datum numerum 55. & productos numeros 55. 110. &c. per summam quemlibet propriam, vt priorem per 55. & posteriorem per 165. diuisisses, inuenisses primam partem $\frac{2}{11}$, quæ eadem esset differentia, quæ partes omnes 10. constituentes proportionalitatem Arithmeticam essent ita.

$9\frac{2}{11}$. $19\frac{1}{11}$. $28\frac{10}{11}$. $38\frac{9}{11}$. $47\frac{8}{11}$. $57\frac{7}{11}$.
$66\frac{6}{11}$. $76\frac{4}{11}$. $85\frac{10}{11}$. $95\frac{5}{11}$.

DE PROPORTIONALITATE Geometrica.

I.

DATIS quibuslibet duobus numeris, si denominatorem proportionis, quam habent, conferendo maiorem cum minore, hoc est, diuidendo maiorem per minorem, Quotientem ducas in maiorem, ipsos tertium terminum in proportionalitate Geometrica vtrique dato maiorem. Et si eundem denominatorem, siue Quotientem in hanc tertium ducas, produces quartum ad hunc maiorem in eadem proportionalitate: atque ita deinceps continue ingressus alios proportionales, si denominatorem, Quotientemue per singulos vicissim ipsos multiplicaueris. Vt datis duobus numeris 4. 12. sit quarta ex proportione 12. ad 4. cui quod diuisis 12. per 4. Quotiens est 3. Nempe ducas 3. in 12. & iterum in productum 36. ipsos 108. 324. 972. 2916. 8748. &c.

Quod si minorem cum maiore conferas, & denominatorem proportionis, quam habent, id est, diuiso minore per maiorem, Quotientem ducas in minorem: Vel, quod idem est, per denominatorem proportionis, quam maior ad minorem habet, diuidas minorem, creabitur tertius numerus proportionalis vtroque minor. Ex quo eadem via reperies quartum adhuc minorem, & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 8. 16. denominator proportionis 8. ad 16. est $\frac{1}{2}$. quod diuisis 8. per 16. Quotiens fiat $\frac{1}{2}$. Denominator autem proportionis 16. ad 8. est 2. quod diuisis 16. per 8. Quotiens fiat 2. Si igitur ducas $\frac{1}{2}$. in 8. Vel diuisis 8. per 2. idemque cum producto numero factas, constituetur hac proportionalitas Geometrica, progrediens quoque in infinitum versus minores numeros, sicut illa in infinitum versus maiores numeros progredtebatur.

16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{64}$. &c.

EXTENDETVR quoq; eadem proportionalitas in infinitum, etiamsi denominator proportionis ignotus sit, hoc modo. Datis duobus numeris, duc maiorem in se, & productum per minorem diuide. Quotiens enim erit tertius terminus vtroque maior. Hunc si iterum in se ducas, productumque per proximè precedentem terminum diuidas, dabit Quotiens quartum terminum, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris, 3. 6. Ducto 6. in se, fit 36. quo diuiso per 3. fit 12. tertius terminus. Rursus ducto 12. in se, fit 144. quo diuiso per 6 fit 24. quartus terminus, atque ita in infinitum, vt hic vides, 3. 6. 12. 24. 48. &c.

RVRSVS datis duobus numeris, si minorem in se duxeris, productumq; per maiorem diuiseris, dabit Quotiens tertium terminum vtroque minorem. Quem si rursus in se duxeris, productumque per proximè precedentem terminum diuiseris, dabit Quotiens quartum terminum adhuc minorem, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris 6. 18. Ducto 6. in se. fit 36. quo diuiso per 18. fit 2. tertius terminus. Rursus ducto 2. in se fit 4. quo diuiso per 6. fit $\frac{4}{6}$ siue $\frac{2}{3}$. in minimis numeris, pro quarto termino: atque ita in infinitum, vt hic apparet.

18. 6. 2. $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{9}$. $\frac{2}{27}$. &c.

IAM verò si quamcunq; proportionem non multiplicem (in multiplici enim, si regulam præscriptam sequaris, nulla est difficultas) extendere velis in numeris integris ad quotlibet terminos maiores, efficies id iucunda hac & facili operatione. Cape tot terminos continuè proportionales eius proportionis multiplicis ab 1. incipientis, cuius denominator denominat partem, vel partes aliquotas, eiusve, vel quarum in data proportione sit mentio; tot, inquam, cape terminos, quot in proposita proportionalitate non multiplices terminos desideras. Vltimus enim

mus enim eorum esse primos terminos tot primos ab unitate, quot sunt partes fractionis, & eos denominatores esse proprios, & eorum numeratores primos inter se, ac denominatori primo, & ad quos ipse denominator primus habet minorem rationem, quam ullus alius numerus ejusdem speciei, qui non sit ejusdem fractionis. Quos si reperiemus, erunt per 6. terminati proportionis duplæ sesquitertiæ, propositi. Quod autem intendimus, ita fiet. Sumatur fractionis $\frac{1}{2}$ cujus numerus primus est 1. ejusdem proportionis duplæ sesquitertiæ. Nam 4. ad 1. habet duplam, & ad 3. sesquitertiam, quæ duæ simul sumptæ faciunt duplam sesquitertiam. Ergo 1. & 3. sunt primi numeri in ea proportione. Quare 4. & 3. sunt primi numeri in proportione sesquitertia. Ergo 1. 3. 4. & 16. 12. 9. Numeri ad datas proportiones 6. terminos proportionalitatis, quæsiti, & ita fiunt, nos numeros.

64. 36. 144. 216. 324. 486. 729.

Inveniuntur autem facile hi termini, si ad primum & ultimum, & ad secundum & penultimum jungatur medium, cujus quadratum &c. Sic quoque si adjungentur 6. termini proportionis sesquialteræ, numerus post 6. terminos proportionis quintuplæ, proportionalis erit 3125. Nam si quæratur 6. terminos in proportione duplæ sesquitertiæ quæsitos,

3125. 7500. 18000. 43200. 103680. 248832.

Quos terminos facile reperiemus, si ab unitate ex partibus primis ad eandem proportionem accommodatis, & primis inter se, ad eandem accommodatum fuerit. Et cujus numeri ultimi minores termini sunt in hac proportione, illi ejusdem proportionis erunt primi, qui minores illis primi sunt ejusdem speciei, non sub fractionis denominatione. Facilius autem termini reperientur, si numeri ultimi termini in eas partes primas per majorem multiplicati primas ex illa proportione multiplicatrice, producant per minorem diminuantur. Ita enim facilius termini reperientur. Quæ si exempli ducatur in majorem numerum, terminos & producentes per minorem diminuatur, minimi termini terminos & producentes in pristinorum exemplo, erunt termini proportionis duplæ sesquitertiæ quæsitos quinque. 6. 12. Si igitur sextum 3125. proportionis quintuplæ quæramus, ducatur in 12. & producatur 37500. per 6. diminuatur producti tertius terminus 18000. per quem ultimus 12. ducatur, & producatur 43200. & diminuatur per eundem tertius terminus 18000. & deinceps semper per penultimum quemque minuatur, novi quotiens per 6. semper ejusdem ultimi 12. & tertius minuatur terminus in proportione quintupla, multiplicantibus 5. 6.

II.

QVANDO numerus terminorum continuè proportionalium impar eſt, numerus genitus ex multiplicatione extremorum inter ſe, æqualis eſt numero, qui ex quorumlibet duorum ab extremis æqualiter diſtantium multiplicatione inter ſe creatur, & ei quoque qui ex medio in ſe ipſum ducto producitur. Vt in his 5. numeris proportionis ſeſquialterę,

16. 24. 36. 54. 81.

tum ex 16. in 81. quàm ex 24. in 54. & ex 36. in ſe, procreatur numerus 1296.

QVANDO autem proportionalium terminorum numerus eſt par, etiamſi non continuè ſint proportionales, dum modo bini continuam proportionem interrumpentes habeant ♎nam eandemque inter ſe proportionem, hoc eſt, dum modo ſecundus & tertius; Item quartus & quintus; nec non ſextus & ſeptimus, &c. (quibus in locis proportio interrumpitur) ſint quoque non continuè proportionales, in diuerſa tamen proportione ab ea, quam primus habet ad ſecundum, & tertius ad quartum, & quintus ad ſextum, &c. Quando, inquam, terminorum numerus eſt par, numerus ex ductu extremorum ♎nius in alterum productus ſemper æqualis eſt numero, qui ex multiplicatione quorumlibet duorum ab extremis æqualiter diſtantium inter ſe gignitur. Vt hic in 6. numeris duplæ proportionis continuæ.

3. 6. 12. 24. 48. 96.

Ex 3. in 96. & ex 6. in 48. & ex 12. in 24. producitur idem ſemper numerus 288.

Item in hac ſeſquitertia non continua 8. terminorum, ♎bi bini proportionem continuam interrumpentes habent ♎nam eandemque proportionem, ♎idelicet triplam, quæ à ſeſquitertia diuerſa eſt.

3. 4. 12. 16. 48. 64. 192. 256.

idem omnino numerus 768. fit ex 3. in 256. & ex 4. in 192. & ex 12. in 64. & ex 16. in 48.

HINC ſequitur, quando terminorum numerus impar eſt, numerum ex ductu extremorum ♎nius in alterum, ♎el ex duorum quorumlibet æqualiter ab extremis, ♎el à medio diſtantium multiplicatione inter ſe procreatum, eſſe quadratum, (Dicitur quadratus numerus is, qui ex multiplicatione alicuius numeri in ſeipſum producitur; numerusque ipſum producens latus eius, ſiue radix appellatur) cuius radix, ſiue latus eſt medius numerus: quia nimirum idem numerus gignitur ex medio in ſeipſum; ac proinde medius eius radix quadratæ eſt. Nu-

est. Numerum verò ex tribus inter se multiplicatis productum, quorum duo sunt vel extremi, vel ab extremis aequaliter remoti, tertius autem, medius, esse cubum, (Numerus ille dicitur cubus, qui producitur ex numero aliquo in seipsum ducto, & iterum in productum numerum: & numerus ille, qui in se ductus, & iterum in productum, cubum producit, latus eius cubicum, siue radix cubica appellatur) cuius latus, siue radix est medius numerus: quia videlicet gignitur ex medio in se cubice ducto, hoc est, primum in se, deinde in productum ex aliis duobus inter se multiplicatis. In se enim facit productum ex aliis duobus: ac proinde in hunc procreatum iterum ductus producit cubum.

SEQVITVR quoque, quando sunt 4. numeri siue continuè, siue non continuè proportionales, numerum ex mutua omnium multiplicatione productum, (Dicuntur tres, vel plures numeri se mutuo multiplicare continuè, quando vnus ducitur in alium, & productus numerus in tertium, & hic productus numerus in quartum, & sic deinceps, donec omnes numeri sint multiplicati) esse quadratum, cuius latus, siue radix est numerus ex primo in quartum, vel ex secundo in tertium genitus. Nam ex multiplicatione mutua omnium 4 numerorum inter se idem procreatur numerus, quem producit numerus factus ex primo in quartum, si in productum ex secundo in tertium (qui producto ex primo in quartum aequalis est) multiplicetur. Quando autem sunt 6. numeri siue continuè, siue non continuè proportionales, dum modo bini numeri proportionem continuam interrumpentes sint quoque non continuè proportionales, fiet cubus ex mutua multiplicatione omnium 6. numerorum inter se, cuius radix, latusue est numerus ex multiplicatione extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis aequaliter distantium, productos: qui videlicet gignitur ex numero, qui fit ex duobus extremis inter se multiplicatis, in se cubice multiplicato: hoc est, semel in se, nimirum in productum ex duobus, qui sunt extremis proximi, & iterum in productum, quando videlicet hic productus numerus ducitur in productum ex duobus mediis: quippe cum tres hi numeri producti sint inter se aequales.

III.

SI, propositis quotcunque terminis continuè proportionalibus, minus extremum à maiore subtrahatur, & reliquus numerus per numerum vnã vnitate minorem denominatore proportionis, (quam quilibet propositorum numerorum ad minorem habet, qui illi proximus est) dividatur, Quotiens denique, maiori extremo adiiciatur, conflabitur summa omnium terminorũ. Vt hic in proportione continua tripla.

2. 6. 18. 54. 162. 486. 1458. 4374. 13122.

Dempto minore extremo 2. *ex maiore* 13122. *& reliquo numero* 13120. *di-*

13120. diuiso per 2. per numerum scilicet vna vnitate minorem denominatore 3. proportionis triplæ, quam quilibet eorum numerorum ad proximè antecedentem minorem habet, fit Quotiens 6560. cui si adiiciatur maius extremum 13122. fit summa omnium 19682. Item in hac sesquitertia continua.

243. 324. 432. 576. 768. 1024.

Subducto minore extremo 243. ex maiore 1024. & reliquo numero 781. diuiso per $\frac{1}{3}$. (qui numerus vna vnitate minor est denominatore $1\frac{1}{3}$) fit Quotiens 2343. Addito ergo maiore extremo 1024. fit omnium terminorum summa 3367.

ITAQVE vt Euclides, ad explorandam summam quotcunque terminorum proportionalitatis Geometricæ satis est, si duo extremi cognoscantur, vna cum proportionis denominatore. Quo verò artificio inuestigandus sit vltimus terminus cuiusuis proportionalitatis Geometricæ quotcunque terminorum, etiamsi medios numeros ignoremus, copiosè tradidimus in progressionibus in nostra Arithmetica practica, vt superuacaneum sit, ea hoc loco repetere.

I V.

PROPOSITIS quotlibet numeris se mutuo æqualiter superantibus id est, Arithmeticè proportionalibus; si totidem alij numeri sumantur habentes easdem proportiones, quas illi eodem ordine sumpti; superabunt se quoque posteriores hi numeri æqualiter, hoc est, erunt Arithmeticè proportionales, sicut illi. Vt si sex hi numeri, 4. 7. 10. 13. 16. 19. Arithmeticè proportionales proponantur, sumanturque alij sex cum iisdem proportionibus, cuiusmodi sunt hi, 20. 35. 50. 65. 80. 95. comperies ipsos quoque Arithmeticè esse proportionales; quippe cum habeant differentiam 15. Sed caue putes, hanc proprietatem posse conuerti: Neque enim si dentur quotuis numeri Arithmeticè proportionales, & totidem alij Arithmeticè quoque proportionales sumantur, etiamsi vtrobique eadem sit differentia, necessario hi illis proportionales erunt. Id quod perspicuum est in hisce duabus proportionalitatibus Arithmeticis.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21.

Vbi prioris duo primi numeri 2. 4. habent proportionem duplam, at posteriorus duo primi 3. 5. superbipartientem tertias. Item primus numerus 3. in posteriore ordine ad primum numerum 2. in ordine priore habet sesquialteram proportionem, secundus autem 5. ad secundum 4. sesquiquartam, &c.

DVOBVS

V.

DUOBUS quibuslibet numeris datis, ſi eorum alterius in quemlibet partes diſtributo, per ſingulas partes alterius ſingulæ numeri producti per totum alterum ſimul addantur, omnes Quotientes ſimul ſumpti poſteriorem numerum, hoc eſt totum eaſdem omnino proportionales inter ſe partes primi numeri inter ſe eaſdem ordine habere ſingulæ ſingulis Quotientes, hoc eſt partes diſtributi numeri ſingulas ſingulis partibus primi numeri reſpondere ſecundum ordinem eaſdem proportionem habentes. Velut, ſint dati duo numeri 285 ſi priori quidem in partes 2 & 10 & 50 ſimul additos numeros 2 & 10 & 50 ſingulas ſingulis, poſteriorem numerum 2850 totum, ſingulæ ſingulis partibus primi numeri reſpondentes habebunt Quotientes 10. 25 & 2. Eaſdem autem habebit ſummam conflatum poſteriorem numerum 2850 ſingulæ partes quadrati partium quas habent partes 2. & 10. & 50. ſingulorum ſcilicet partium numeri, nempe & quadruplum ſimplum & ſextuplum ad ſingulas partes 4. & 100. & 2500. ad 2. & 10. & 50. ad 5. & 50. ad 10. & 250. & 2500. ad 40. eaſdem omnino proportionem habent, nempe quintam ſcilicet.

EADEM patet etiamſi numeri poſteriores ſimul addantur, ſecundum priorem, quam partes diſtributæ ſibi partiantur. Quotientium ſcilicet ſingulis in ſingulas partes ejuſdem primi numeri ductis. Velut in exemplo ſuperiori numeri 285 per 57. ſibi Quotientes 5. qui ducti in 2 & 10. & 50. partes numeri 57. ſunt partes numeri 285. hoc eſt 10 & 50. & 250. &c.

HINC facile eſt, ut non quo pacto duo quilibet numeri ſimul addi ſint in partes componentes, & alterius ſingulæ ſingulis partibus alterius proportionales, ſeu eaſdem proportionales habentes inter ſe ordine ſuo reſpondentes, ac ſingulæ partes primi numeri ſingulis partibus alterius reſpondeant, ac proportionalitatem habeant, ſeu quod eadem eſt, quo pacto duo quilibet numeri Arithmetice proportionales, ſeu quorum differentiæ numerum illum ſtatuant in partes ſimul ſumtos ita ut ſingulæ partes ſingulis partibus alterius numeri reſpondeant, & proportionales habeant differentias, ſeu quod eadem eſt, quo pacto duo quilibet numeri Arithmetice proportionales ſimul addi poſſint, ut ex antecedentibus facile patet.

VI.

QUOTIENTIUM numeros non poſſe habere datis eorum dividendis numeros, qui ſint proportionales inter ſe, ſed ſingulos ſingulis majores, vel minores.

Vt in appoſito exemplo tum numeri, quàm eorum differentia, habeant continuam proportionem ſeſquialteram.

Differentia.	32	48	72	108	162	243	
	64	96	144	216	324	486	729

Eadem ratione in hoc altero exemplo, quod ſequitur, habent & numeri, & eorum differentia, duplam proportionem. Vbi videſ differentias non differre à numeris dupla proportionis, quorum ſunt differentia. Id quod ſoli proportioni dupla cuicunque accidit: quia in ea quilibet numerus maior proximè precedentem minorem ſuperat ipſomet numero proximè antecedente, cuius duplus eſt, hoc eſt, quem bis continet.

Differentia.	7	14	28	56	112	224	448	896
	7	14	28	56	112	224	448	896	1792

VII.

DATIS quotcunque numeris continuè proportionalibus, ſi eorum ſumma per eos ſigillatim dividatur, erunt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continuè proportionales. Et ſi Quotientium ſumma per ipſos Quotientes ſigillatim dividatur, creabuntur iidem prorſus Quotientes ordine conuerſo: atque ita in infinitum. Summa autem eorum Quotientium æqualis erit numero, qui fit ex primo Quotiente in vltimum, vel ex multiplicatione duorum quorumlibet ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique, ſi terminorum numerus eſt impar, ex medio in ſeipſum ducto. Quod ſane incredibile videri poſſit. Exempli cauſa. Si dentur hi 4. numeri continuè proportionales in proportione dupla, 3. 6. 12. 24. ſi eorum ſumma 45. per ſingulos dividatur, erunt Quotientes 15. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{3}{4}$ $1\frac{7}{8}$. conuerſo ordine in eadem proportione dupla continuè proportionales. Et ſi per hoſce Quotientes dividatur eorum ſumma $28\frac{1}{8}$. prodibunt ordine conuerſo iidem omnino Quotientes, & ita deinceps in infinitum. Ipſa verò ſumma $28\frac{1}{8}$. æqualis eſt numero, qui fit ex 15. in $1\frac{7}{8}$. vel ex $7\frac{1}{2}$. in $3\frac{3}{4}$. Sic etiam datis his 5. terminis in continua proportione tripla, 2. 6. 18. 54. 162. ſi eorum ſummam partiemur per eos ſigillatim, efficiemus hos 5. Quotientes, 121. $40\frac{1}{3}$. $13\frac{4}{9}$. $4\frac{1}{2}\frac{7}{7}$. $1\frac{40}{81}$. in eadem continua proportione tripla. Quorum ſumma $180\frac{61}{81}$ producitur vel ex 121. in $1\frac{40}{81}$. vel ex $40\frac{1}{3}$. in $4\frac{1}{2}\frac{7}{7}$. vel denique ex $13\frac{4}{9}$. in ſeipſum. Vbi duo conſiderattone ſunt digna. Primum, quando terminorum numerus eſt impar, ſummam Quottentum eſſe numerum quadratum, cuius radix eſt medius terminus: quippe qui ex medio termino in ſeipſum ducto procree-

procreetur, & dictum eſt. Deinde, eoſdem ſemper Quotientes gigni ex diuiſione ſummæ quotcunque terminorum proportionis eiuſdem continuæ, quantumuis termini illi ſint magni, aut parui, dummodo terminorum numerus idem ſemper ſit. Veluti, ſi ſint tres termini continuè dupli, ſiue magni, ſiue parui, erunt perpetuo hi Quotientes, 7. $3\frac{1}{2}$. $1\frac{3}{4}$. *Si ſint quatuor, hi Quotientes erunt,* 15. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{3}{4}$. $1\frac{7}{8}$. *In quinque numeris continuè triplis, erunt hi ſemper Quotientes,* 121. $40\frac{1}{3}$. $13\frac{4}{9}$. $4\frac{1}{27}$. $1\frac{40}{81}$. *Ac denique in quinque numeris continuam proportionem ſeſquialteram habentibus repe ientur hi Quotientes.* $13\frac{7}{16}$. $8\frac{1}{2}\frac{2}{4}$. $5\frac{7}{8}\frac{1}{6}$. $3\frac{4}{8}\frac{2}{4}$. $2\frac{4}{8}\frac{2}{1}$.

EX hac proprietate inuenientur quotcunq; terminos in data proportione continuè proportionales, quorum ſumma æqualis ſit numero, qui fit ab extremis inter ſe multiplicatis, vel ex duobus mediis quibuslibet æqualiter diſtantibus ab extremis, vel etiam ex termino medio in ſeipſum ducto, ſi numerus terminorum fuerit impar. Nam ſi ſumantur tot termini in data proportione continuè proportionales, quot inueniendi ſunt, ſiue magni, ſiue parui, eorumque ſumma per eoſdem ſeorſum diuidatur, erunt Quotientes numeri, qui deſiderantur. Quòd ſi ſumma debeat eſſe numerus quadratus, accipiendi erunt termini, quorum numerus impar ſit, & dato numero terminorum impari æqualis, &c. Qua res miraculi inſtar quodammodo cenſeri poſſit, dari poſſe in data proportione, quotquot quis iuſſerit, terminos continuè proportionales, quorum ſumma ex multiplicatione primi termini in vltimum gignatur: cum contrarium huius experiamur in omnibus proportionibus continuis inæqualitatis, quarum termini ſint numeri integri; & in alijs etiam omnibus, quarum numeri fractiones habent admixtas, niſi hi numeri Quotientes ſint producti ex diuiſione ſummæ alicuius quotcunque terminorum continuè proportionalium, per ipſos terminos proportionales, vt diximus.

EODEM modo ſatisfaciemus quæſtioni, ſi quis petat duos numeros datum habentes proportionem, quorum ſumma æqualis ſit numero ex eorum multiplicatione vnius in alterum procreato. Nam ſi ſumantur quilibet duo numeri in proportione data, atque eorum ſumma per eoſdem ſigillatim diuidatur, ſatisfiet quæſtioni propoſita per Quotientes inuentos. Vt ſi cupiat quis duos numeros, inter quos reperiatur proportio tripla ſuperbipartiens nonas, accipiemus vel hos duos numeros 29. 9. *vel* 87. 27. *proportionem datam habentes, vel alios quoſuis. Summa etenim priorum* 38. *diuiſa per* 29. & 9. *vel poſteriorum ſumma* 114. *per* 87. & 27. *diuiſa dabit Quotientes,* $1\frac{2}{9}$ & $4\frac{3}{9}$. *proportionem eandem habentes, quam* 29. & 9. *vel* 87. & 27. *ordine tamen conuerſo, & quorum aggregatum eſt* $5\frac{1}{2}\frac{7}{6}\frac{0}{1}$. *qui videlicet numerus ex ductu etiam* $1\frac{9}{29}$. *in* $4\frac{3}{9}$. *gignitur.*

VIII.

INTER duos quoſcunque numeros conſtituemus medium Geo-

metricè proportionalem, si eos inter se multiplicemus, & procreati numeri radicem quadratam accipiamus. Vt datis duobus numeris 6. & 96. ex vno in alterum fit numerus 576. cuius radix quadrata 24. erit medio loco proportionalis inter datos numeros hoc modo, 6. 24. 96. Nam 96. ad 24. habent proportionem quadruplam, qualem etiam habent 24. ad 6. Itaque si inter datos duos numeros constituendus sit numerus medius rationalis, qui videlicet exprimi possit, necesse est, vt numerus ex vno in alterum productus sit quadratus. Nisi enim quadratus sit, non habebit radicem in numeris, sed eius radix erit numerus, quem Arithmetici surdum, vel irrationalem vocant, explicantque hoc modo, radix quadrata talis numeri. Veluti, datis duobus numeris 7. & 9. fiet ex vno in alterum numerus 63. qui radicem non habet. Dicemus ergo radicem quadratam numeri 63. qua quidem numeris exprimi nequit, esse medio loco proportionalem inter numeros datos 7. & 9. hoc modo, qua quidem radix maior est, quam 7. cum huius quadratum sit 49. minor verò quam 8. cum huius quadratum sit 64. Neque verò numerum 7. cum aliqua fractione, qui medius est inter 7. & 8. radix esse potest, etiamsi vnitas in infinitum cogitetur esse diuisa: quia omnis talis numerus cum fractione producit numerum cum fractione, vt ad finem 8. demonstrabimus, cuiusmodi non est numerus 63.

7.	R. 9. 63.	9.

IX.

SI quis inuenire velit tres numeros in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos singuli cadant medij Geometricè proportionales, assequetur id hac ratione. Sumantur tres numeri quicunque, quorum secundus primi sit quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus. Quadrati enim numeri eorum erunt Arithmeticè proportionales, & primus numerus acceptus in secundum ductus producet medium proportionalem Geometricè inter primum quadratum, & secundum, in proportione primi assumpti numeri ad secundum, secundus verò numerus assumptus in tertium ductus gignet medium proportionalem inter secundum quadratum, & tertium, in proportione, quam inter se habent secundus ac tertius numerus assumptus. Id quod perspicuè in hoc exemplo apparet.

Tres num. assumpt.	Primus 8.	quintup. pri. 40.	Septup. prim. 56.
Quad. Arith. pro.	64	1600	3136.
Medij Geometr.	320	2240	

Differentia enim trium quadratorum est 1536. & medij proportionales inter eos, 320. & 2240. producti ex 8. in 40. & ex 40. in 56.

HINC

HINC facile reperies tres numeros quadratos, qui se æqualibus differentiis mutuo superent, si proponatur tres eorum homines tres numeros, quorum secundus sit primi quadratus, & tertius eiusdem primi septuplus, &c. diximus.

PARI ratione, dato quovis quadrato, reperientur duo alii duo numeri cum illo constituentes proportionem Arithmeticam. Si enim dati quadrati latera ducantur primo in secundum, & alio in numerum quorum alter duorum sit quadratus, & triplus alterius: erunt quadrati numeri ex his ductis producti quos quærimus. Ut si detur quadratus numerus 9. cuius radix 3. primo in numerum secundum, 4. & secundo in 5. &c.

INVENTIS autem tribus quadratis Arithmeticè proportionalibus, si eos per quamvis eandem eundem multiplices, vel per quamvis partem aliquotam si quam habent, dividas, erunt producti quique numeri, aut Quotientes Arithmeticæ proportionales, inter quorum binos singuli eorum medij in Geometrica proportionalitate intercipiuntur; qui medij reperientur eodem modo, si numerum medij inter quadratos inuentes per eandem illam numerum multiplicentur, vel per eandem illam partem aliquotam dividantur. Et si superiores quadrati, una cum mediis proportionalibus duplicentur, creabuntur hi numeri.

Arithmet. proportio.	128		3200		6272.
Medij Geometr.		64		4480	

Si verò dividantur iidem per 8. partem aliquotam communem quadratorum, sunt autem quadrati partes aliquotæ quadratorum, partes etiam aliquotæ mediorum, prodibunt hi numeri.

Arith proportio.	8		200		392.
Medij Geometr.		40		280	

Habebunt autem hi numeri hoc modo inuenti eadem semper proportiones, quas quadrati, eorum proximi medij inter se habent. Quod si hos 8. 200 392. dividas per 4. numerum alios 2. 50. 98. Arithmeticè proportionales, inter quos cadunt Geometricè medij 70. & 7 0. Et si denique hos 2. 50. 98. partiaris per 2. habebis alios 1. 25. 49. inter quos medij Geometricè sunt, 5. & 35.

VBI hoc etiam admonitione Sedetur dignum, quandocunque inter tres numeros Arithmeticè proportionales, sive quadrati sint, sive non, cadunt duo medij Geometricè proportionales, unus inter primum & secundum, & inter secundum ac tertium alter: quadratum primi medij, & quadratum secundi numeri Arithmeticè proportionalis.

tutiũ, & quadratum posterioris medij constituere proportionalitatem Arithmeticam. Vt in posteriori exemplo, quadrati numeri horum trium numerorum 40. 200. 280. sunt 1600. 40000. 78400. Arithmeticè proportionales, habentes differentiam eandem communem 30400. & sic de cæteris.

X.

INTER quoscunque duos numeros reperiemus quotcunque medios continuè proportionales, iucunda sane, & artificiosa operatione: quam vt planius explicem, dicenda pauca sunt de radicum generibus, & quo pacto numeri ex suis radicibus gignantur. In omni ergo proportione continua, qua ab 1. incipit, secundus terminus radix est omnium numerorum insequentium. Ea enim radix bis posita, atq; ita in se ipsam ducta producit tertium terminum, qui est numerus quadratus, radix q. ipsa quadrata dicitur. Eadem radix ter posita, & primum in se, & iterum in productum multiplicata gignit quartum terminum, qui cubus est, & propterea radix eius cubica appellatur. Deniq; si eadem radix ponatur quater, & fiant tres multiplicationes, primum in se, deinde in productum, tertio iterum in vltimum productum, fiet quintus terminus: Et si ponatur quinquies fiant q. quatuor ordine multiplicationes, orietur sextus terminus, atque ita in infinitum: Quo pacto autem omnes ha radices nominari debeant, & signari, non est huius loci declarare, sed ad Algebram totu hac res spectat, vbi etiam docebimus, qua arte ex dato numero eruenda sint. Nunc, vt intelligatur res, de qua agimus, notanda sunt tres infrascripta proportionalitates continua, quarum duæ primæ sunt Arithmetica, numerum dua series naturales numerorum ab 1. incipientes, tertia verò Geometrica ab 1. quoq. initiũ ducens. Vbi perspicuè apparebit, quàm egregium vsum habeat series numerorum naturalis in re proposita.

Numerus mediorum.			1	2	3	4	5	6	&c.
Numeri significantes radices.		1	2	3	4	5	6	7	&c.
Numeri Geometr. propor.	1	2	4	8	16	32	64	128	&c.

Prima complectitur numeros mediorum constituendorum, secunda numeros, qui significant genera radicum, hoc est, quoties terminus secundus tertiæ proportionalitatis, quem radicem omnium insequentium diximus, ordine poni debeat, vt multiplicatos numeros proportionalitatis Geometricæ illis respondentes procreet. Verbi gratia, vnitas medij ordinis significat, numerum 2. tertij ordinis, qui radix est omnium aliorum, semel positum non esse multiplicandum, sed ipsummet esse radicem omnium ex nulla sui multiplicatione productum. At numerus 2. eiusdem secundi ordinis indicat, eandem radicem 2. tertij

ordinis

ordinis positam bis hoc modo, 2. 2. Et ita in se multiplicatam gignere 4. tertium terminum eiusdem tertij ordinis. Sic numerus 3. medij ordinis denotat radicem eandem 2. infimi ordinis positam ter hoc modo, 2. 2. 2. atque ita multiplicatam producere 8. quartum terminum infimi ordinis. Nam ex radice 2. primo loco posita in eandem 2. positam secundo loco fit numerus 4. & ex hoc producto in radicem 2. tertio positam loco gignitur numerus 8. quartus nostrum proportionalitatis Geometricæ sub numero 3. ordinis secundi. Idem dicas de aliis. Ut Verbi gratia numerus 7. secundæ proportionalitatis monstrat radicem eandem 2. tertij ordinis positam octies, hoc pacto. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. in se continue octies multiplicatam producere 128. ultimum nostrum Geometricæ proportionalitatis illi numero 7. suppositum. Nam ex 2. primi loci in 2. secundi loci fiunt 4. Et ex 4. in 2. tertij loci fiunt 8. Et ex 8. in 2. quarti loci fiunt 16. Et ex 16. in 2. quinti loci fiunt 32. & ex 32. in 2. sexti loci fiunt 64. Et denique ex 64. in 2. septimi loci fiunt 128. &c. Atque hoc non solum verum est in propositæ proportionis continua dupla, sed in omnibus aliis ab unitate incipientibus, quicunque numerus secundum locum occupet tam quam radix aliorum, & qui proportionem denominat.

ITAQUE si constituere vis quotlibet medios inter duos propositos numeros, cape numerum mediorum constituendorum in primo ordine. Nam ex utroque numero dato extrahenda est radix, quæ toties ordine posita, & continuè multiplicata utrunque producet, quot unitates continentur in numero secundi ordinis qui sit tot numerum mediorum constituendorum in suo ordine acceptum sequitur. Radices numeris subditis nostra regula dabit, quamque sub eo, & ab eisdem ascende per continuam nostram multiplicationem, deducendo primum quamque radicem in se, & inde in numerum productum, & sic de cæteris. Ita & duas proportionalitates Geometricas multiplices institues a radicibus incipientes, & ab eisdem denominatas, tot terminorum, quot exclusis datis duobus numeris, quot medij termini quæruntur. Post hæc singulos terminos unius ordinis duc in singulos terminos alterius ordinis adversos, & oppositos, hoc est, maximum unius ex minimo alterius proximam deinde sub illo in proximum supra hunc, &c. Ita ut in uno ordine semper descendas a supremo ad infimum usque, in altero vero ab infimo usque ad supremum ascendas, ut in exemplis patebit. Nunc exempli causa si inter 9. & 144. inueniendus sit unus terminus medio loco proportionalis, fumentur in primo ordine 1. & sub hoc 2. unius in secundo ordine numerum 2. qui indicat ex utroque numero dato extrahendam esse radicem, quæ videlicet bis posita, per suas multiplicationem utrunque producat, ut declaratissimus. Radices autem quadratæ inuenitæ sunt 3. & 12. Et quia unus tantum medius terminus desideratur, non sunt in-

ſtituenda proportionalitates Geometricæ à radicibus incipientes, quæ plures terminos habeant. ſed ipſa radices inter ſe multiplicanda. Numerus enim procreatus 36. erit medio loco proportionalis inter 9 & 144. Vt hic videſ, 9. 36. 144. Sic etiam ſi inter 18. & 288. conſtituendus ſit unus terminus medius: quoniam hi numeri radices quadratas non habent, ſignabimus priorem hoc modo, R. q. 18. poſteriorem autem ſic. R. q. 288. Hæ autem radices inter ſe multiplicatæ faciunt 72. terminum medium proportionalem inter 18. & 288. hoc modo 18. 72. 288. Vbi etiam admiratione dignum eſt, duos numeros, quorum neuter poteſt efferri, inter ſe multiplicatos gignere numerum rationalem: cuius rei demonſtratio ex lib. 10. petenda eſt. Quo pacto autem inter ſe multiplicandi ſint duo numeri ſurdi, qui nimirum efferri non poſſunt, quales ſunt R. q. 18. & R. q. 288. docebimus in Algebra.

RVRSVS ſi dati ſint duo numeri 16. & 625. inter quos tres medij conſtituendi ſint, accipiemus in primo ordine numerum medium 3. cui in ordine ſecundo ſubſcribitur numerus 4. Igitur ex utroque dato numero extrahenda eſt radix, qua quater poſita, & continuè multiplicata utrumque producat, qua quadrati quadrata, vel zenſizenſica dici ſolet, cuiuſmodi in dato exemplo ſunt 2. & 5. Conſtitues ergo hos ordines trium terminorum ſub 16. & 625. Geometricè proportionalium in proportione multiplici, incipientes ab eiſdem radicibus 2. & 5. à quibus proportiones horum ordinum denominantur, vt hic apparet.

16	40	100	250	625
8				125
4				25
2				5

Ex 8. ſupremo primi ordinis in 5. infimum ſecundi ordinis fiunt 40. pro primo medio. Ex 4. in 25. fiunt 100. pro medio ſecundo. Denique ex 2. in 125. fiunt 250. pro tertio medio.

SCITV autem dignum eſt, medios terminos inuentos cum duobus extremis datis continere proportionem continuam eam, quæ inter radices datorum numerorum reperitur. Sic enim in dato exemplo videſ ita eſſe 625. ad 250. & 250. ad 100. & 100. ad 40. & 40. ad 16. vt 5. ad 2. Quapropter, inuentis radicibus, ſi maior per minorem diuidatur, & per Quotientem, qui denominator eſt proportionis radicum inuentarum, multiplicetur minor numerus datus, & productus numerus rurſum per eundem Quotientem multiplicetur, atque ita deinceps, conſtituentur inter duos extremos datos medij termini iidem, etiamſi duo illi ordines proportionum multiplicium à radicibus denominatarum non inſtituantur. Vt in exemplo dato. Diuiſa radice 5. per radicem

dicem 2. fit Quotiens $2\frac{1}{2}$. *denominator videlicet proportionis 5. ad 2. Si igitur ducas minorem numerum datum 16. in* $2\frac{1}{2}$. *gignes 40. primum medium: Et si rursus ducas 40. in* $2\frac{1}{2}$. *procreabis 100. secundum medium: Et denique si 100. ducas in* $2\frac{1}{2}$. *produces 250. tertium medium.*

PERSPICVVM autem est, inter datos quoslibet numeros non semper constitui posse numerum terminorum propositum, qui sint rationales: propterea quod dati numeri non habent semper illas radices, quæ extrahendæ sunt: aut certè non habent eam proportionem, quam aliqui duo numeri, ex quibus ea radices possunt extrahi, quod etiam satis esset. Sicut enim inter 16. & 625. qui habent radices quadrati quadratas, hoc est, quæ quater posita eos sui multiplicationibus producunt, tres medij termini incidunt: item quoque inter 48. & 1875. qui illis 16 & 625. proportionales sunt, licet non habeant similes radices, cadunt tres medij termini, vt hic patet 48. 120. 300. 750. 1875.

QVÆMOBRÈM si quis desideret duos numeros, inter quos cadant, quotquot voles, termini medij rationales in data proportione, accipiendi sunt duo numeri quomodocunque datam habentes proportionem. Eorum enim vterque si toties ponatur, quot termini medij quærendi sunt, & adhuc semel, & continuè multiplicetur, erunt vltimi duo numeri producti, quos quærimus: Inter eos enim medij termini constituentur eo modo, quem exposuimus; hoc est, vel instituendo sub illis duos ordines proportionum multiplicium, quas assumpti numeri denominent, tot terminorum, quot medij termini quæruntur; vel multiplicando minorem eorum per denominatorem proportionis datæ, quæ est inter acceptos duos numeros, &c. Verbi gratia, si quis velit duos numeros, inter quos constitui possint quatuor termini medij rationales in proportione superbipartiente tertias, cuius denominator est $1\frac{2}{3}$. *sumemus duos numeros 6. & 10. habentes datam proportionem superbipartientem tertias, & vtrumque quinquies ponemus hoc modo, 6. 6. 6. 6. 6. & 10. 10. 10. 10. 10. Ex multiplicatione enim continua vtriusque existent hi numeri 7776. & 100000. inter quos constitues quatuor medios numeros proportionales, vt hic vides.*

7776	12960	21600	36000	60000	100000
1296					10000
216					1
36					
6					10

Qui quidem medij termini inueniuntur vel ex 1296. *in* 10. *&* ex 216. *in* 100. *&* ex 36. *in* 1000. *&* ex 6. *in* 10000. *vel ex denominatore* $1\frac{3}{5}$. *proportionis ſuperbipartientis tertias in minorem numerum inuentum* 7776. *&* iterum *in numerum productum, &c.*

XI.

NVMERVM quemcunq; datum diſtribuemus in quotuis partes proportionales Geometricè in data proportione hoc modo. Cape tot numeros continuè proportionales in data proportione ſiue minimos, ſiue non minimos, in quot partes datus numerus diſtribuendus eſt, & per eorum ſummam datum numerum partire. Quotiens namque per ſingulos terminos in data proportione acceptos multiplicatus procreabit partes dati numeri ſeruantes datam proportionem inter ſe. Veluti ſi datus numerus 756. *ſecandus ſit in* 6. *partes continuè proportionales in proportione dupla; ſi ſumantur* 6. *termini continue dupli,* 3. 6. 12. 24. 48 96. *quorum ſumma eſt* 189. *& per hanc ſummam datus numerus* 756. *diuidatur, Quotiens autem* 4. *per ſingulos acceptos numeros multiplicetur, procreabuntur hi* 6. *numeri continue dupli, conficienteſque ſimul in vnam ſummam collecti datum numerum* 756. *videlicet.*

12. 24. 48. 96. 192. 384.

Eadem partes inuenientur, ſi ſumantur hi alij 6. *numeri continue dupli,* $\frac{1}{100}$. $\frac{2}{100}$. $\frac{4}{100}$. $\frac{8}{100}$. $\frac{16}{100}$. $\frac{32}{100}$. *quorum ſumma eſt* $\frac{63}{100}$. *Vel hi* 6. *alij,* 100. 200. 400. 800. 1600. 3200. *quorum ſumma eſt* 6300. *Nam datus numerus* 756. *diuiſus per ſummam priorem* $\frac{6300}{100}$ *facit* 1200. *qui Quotiens ductus in primum numerum acceptum* $\frac{1}{100}$. *dabit primam partem* 12. *vt prius, &c. At idem numerus datus* 756. *diuiſus per poſteriorem ſummam* 6300. *facit Quotientem* $\frac{756}{6300}$. *qui ductus in primum numerum aſſumptum* 100. *producit eandem partem primam* 12. *& ſic de cæteris.*

QVOD ſi cupias numerum, qui ſecari poſſit in quotuis partes proportionales ſine vlla fractione, (Nam niſi ſeruetur id, quod iam præcipiemus, incidemus plerunque in fractiones) aſſequeris propoſitum, ſi ſumas quemcunque numerum multiplicem ſummæ totidem terminorum proportionalium aſſumptorum. Vt ſi quis quærat numerum, qui poſſit diſtribui in 5. *numeros integros ſeſquialteram proportionem continuam habentes; ſumptis* 5. *terminis in ſeſquialtera proportione continue quibuſcunque, vt* 64. 96. 144. 216. 324. *quorum ſumma eſt* 844. *accipiemus huius ſummæ quemcunque numerum multiplicem, nimirum decuplum* 8440. *Hic enim per præceptum traditum ſecabitur in* 5. *numeros integros proportionis ſeſquialteræ continuæ, cum eo diuiſo per ſummam acceptorum numerorum, Quotiens neceſſario ſit numerus integer.*

HINC

HINC nullo negotio satisfaciemus quæstioni, qua iubeamur in data proportione continua reperire quotus cumque numeros, qui in unam summam collecti constituant numerum quemcunque datum. Nam si datus numerus secetur in tot partes proportionales datæ proportionis, & ut docuimus, soluta erit quæstio. Vt si quis inuenire velit 4 numeros triplæ proportionis continuæ, quorum summa sit 100. secandus erit hic numerus 100. in 4. numeros proportionis triplæ, & erunt $2\frac{1}{2}$. $7\frac{1}{2}$. $22\frac{1}{2}$. $67\frac{1}{2}$. Hi enim conficiunt datum numerum 100. Quod si conficere debeant summam 400. erunt numeri quæsiti in triplæ proportionis continuæ hi 10. 30. 90. 270. Horum enim summa est 400. Si denique summam conficere debeant non superantem 1. erunt huiusmodi numeri, $\frac{1}{40}$. $\frac{3}{40}$. $\frac{9}{40}$. $\frac{27}{40}$. Summa enim horum est $\frac{40}{40}$ hoc est, 1.

DE PROPORTIONALITATE Harmonica.

I.

TRES numeri in proportionalitate Harmonica inuenientur ex tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ quibuscunque si primus in secundum, ac tertium, & secundus in tertium multiplicetur. Vt subiecta exempla demonstrant.

Arit.	1. 2. 3.	3. 7. 11.	4. 6. 8.	10. 60. 110.
Har.	2. 3. 6.	21. 33. 77.	24. 32. 48.	600. 1100. 6600.

In omnibus enim ex primo termino Arithmeticæ proportionalitatis in secundum & tertium fit primus terminus Harmonicæ, & secundus: ex secundo vero in tertium tertius.

ALIO modo, & in eadem recidit, gignitur Harmonica proportionalitas ex Arithmetica. Nam medius terminus Arithmeticæ proportionalitatis ductus in extremos gignit extremos Harmonicæ extremi vero eiusdem Arithmeticæ inter se multiplicati creant medium Harmonicæ. Vt in eisdem exemplis manifestum est.

HINC fit, extremos terminos Harmonicæ proportionalitatis, ac proinde & differentias, eandem habere proportionem, quam extremi Arithmeticæ, ex qua orta est, habent: quia videlicet extremi Arithmeticæ per eundem medium multiplicati produxerunt Harmonicæ extremos.

QVAPROPTER si recipiendi sint tres numeri proportionalitatis Harmonicæ, quorum extremi, atque adeo & differentia, datam habeant proportionem, sumendi sunt duo numeri proportionem datam habentes, & inter eos medius Arithmeticæ proportionalitatis constituendus: ac deinceps exinde vt ex terminis inueniendi sunt in proportionalitate Harmonica, & habebimus quæsitum tres, quo-

rum extremi habeant proportionem ſeſquitertiam, ſumemus 3. & 4. inter quos ea proportio reperitur: ſed quia eorum ſumma 7. impar eſt, non poteſt inter eos collocari medius integer in propòtionalitate Arithmetica, ducemus vtrumque per aliquem numerum parem, nimirum per 2. Inter productos enim 6. 8. cadet integer medius proportionalis Arithmeticè, 7. nimirum ſemiſſis eorum ſummæ. Ex his igitur tribus 6. 7. 8. Arithmeticè proportionalibus orientur hi tres Harmonicè proportionales, 42. 48. 56. quorum extremi, atque adeò & differentia, proportionem ſeſquitertiam datum habent.

SEQVITVR etiam, binos numeros trium terminorum proportionalitatis Harmonicæ binis Arithmeticæ, ex qua orta eſt, conuerſo ordine eſſe proportionales: hoc eſt, in Harmonica ita eſſe ſecundum ad primum, vt in Arithmetica tertius eſt ad ſecundum. Item in illa ſic eſſe tertium ad ſecundum, vt in hac eſt ſecundus ad primum: quia nimirum priores duo in Harmonica producti ſunt ex poſterioribus duobus in Arithmetica per primum eundem multiplicatis: Duo verò poſteriores Harmonica procreati ſunt ex prioribus duobus Arithmetica in tertium ductis. Vt ex ſuperioribus exemplis perſpicuum eſt.

VICISSIM ſi primus numerus Harmonica proportionalitatis ducatur in ſecundum, ac tertium, & ſecundus in tertium, procreati erunt tres numeri Arithmetica proportionalitatis. Vel (quod idem eſt) ſi medius terminus Harmonica in duos extremos ducatur, gignentur duo extremi Arithmetica; duo verò extremi Harmonica inter ſe multiplicati producent medium Arithmetica: eodem ſcilicet prorſus modo, quo ex Arithmetica proportionalitate Harmonicam oriri diximus. Ita vides ex hac Harmonica 2. 3. 6. gigni hanc Arithmeticam, 6. 12. 18. Siue enim ducas primum 2. in ſecundum 3. & tertium 6. Item ſecundum 3. in tertium 6. produces 6. 12. 18. ſiue ducas medium 3. in extremos 2. 6. facies extremos 6. 18. & ex primo 2. in tertium 6. medium 12.

HARMONICA proportionalitas dicitur continuari vltra tres terminos ſiue ad maiores numeros progrediendo, ſiue regrediendo ad minores, quando primi tres numeri ſunt proportionales Harmonicè, & tertio adiunguntur duo cum eo conſtituentes quos, eandem proportionalitatem Harmonicam, & in eadem omnino proportione. Deinde vltimo, qui quintus eſt, adiunguntur eodem modo alij duo; atque vltimo, ſiue ſeptimo, alij duo; & ſic in infinitum. Hoc autem fit verſus maiores numeros progrediendo, ſi poſteriores duo numeri ducantur in denominatorem proportionis, quam tertius ad primum habet. Vt datis his tribus numeris 2. 3. 6. Harmonicè proportionalibus, ſi poſteriores duo, 3. 6. ducantur in 3. denominatorem proportionis 6. ad 2. fient 9. 18. atque ita erunt iam quinque termini 2. 3. 6. 9. 18. Harmonicè proportionales: Et ſi poſteriores duo 9. 18. ducantur iterum in 3. denominatorem proportionis, erunt

ſeptem

Septem hi termini, 2. 3. 6. 9. 18. 27. 54. continuè proportionales Harmonicè: & sic progredi poterimus in infinitum. Nisi fortè, ex Harmonica proportionis datæ continuatione per terminos ejusdem rationis, & per tertios, quintos, &c. ordinum, nonum, & quemque versus minores terminos peti dicat, dividendo semper duos numeros per denominatorem proportionis extremorum, & subtrahendo ab interioribus duos minores numeros deinceps dividendos per eundem denominatorem, & sic deinceps in infinitum. Ut datis hic tribus numeris, 18. 9. 6. si minores duo, 9. 6. dividantur per 3. denominatorem proportionis inter extremos 18. 6. erit 3. 2. atque ita deinceps tam quamcunque terminos, 18. 9. 6. 3. 2. Et si insuper duo interiores numeri 3. 2 dividantur per eundem denominatorem 3. adhuc derivabit 18. 9. 6. 3. 2. 1. & ita deinceps progredi dicetur in infinitum.

ALIO modo, & quidem magis propriè, continuatur proportionalitas Harmonica, sive ad majores numeros progrediendo, sive ad minores, quando primi tres numeri sunt Harmonicè proportionales, Item, relicto primo, alij sequentes tres, & relictis duobus, sequentes alij tres, atque ita deinceps: Sed in hac continuatione non quam erit eadem proportio inter extremos trium, quæ inter extremos aliorum trium. Ut in his 4 numeris, 3. 4. 6. 12. continuata dicitur proportionalitas Harmonica, quoniam tam tres 3. 4. 6. quàm tres 4. 6. 12. Harmonicè proportionales sunt; sed proportio extremorum 3. 6. duplo major habet duplum, ad extremi posterioris 4. 12. triplum. Non continuata esse dicetur Harmonica proportionalitas in his quinque terminis, 18. 12. 8. 6. 3. quia & in tribus, 18. 12. 8. & in tribus, 12. 8. 6. & in tribus, 8. 6. 3. Harmonica proportionalitas reperitur, licet extremi quatuor priorum non habeant eandem proportionem. Quo pacto autem in utramque partem hoc modo continuanda sit, quando continuari potest, neque enim semper ad majores numeros progrediendo potest hoc modo extendi, aut quo pacto quotlibet numeri continuè Harmonicè proportionales, ut exposuimus, reperiri possint ex iis, quæ sequuntur, constabit.

II.

INTER quosvis datos duos numeros constituere medium Harmonicè proportionalem, hac ratione. Numerum, qui fit ex datorum duorum numerorum differentia in eorum minorem, partire per eorundem summam, Quotienti semper minori adde. Conflatus ex in numerus erit medius, quem quæris. Vel eandem differentiam datorum numerorum adde ad majorem, & proindè comparativè per eorundem summam. Si enim Quotientem ex majore dato subtrahas, relinquis set medius terminus quæsitus. Ut inter duos numeros 15. & 60. inveniri

me-

medium duc eorum differentiam 45. in minorem 15. & numerum productum 675. partire per eorum ſummam 75. Nam ſi Quotientem 9. minori 15. adijcias, conflabis medium terminum 24. Vt hic patet, 15. 24. 60. Eundem medium reperies, ſi eandem differentiam 45. ducas in maiorem 60. & productum 2700. per eorum ſummam 75. diuidas. Quotiens enim 36. ex maiore 60. detractus relinquet eundem medium terminum 24.

VIDES ergo, quando ſumma datorum duorum numerorum non metitur productum ex eorundem differentia in minorem eorum, vel in maiorem, medium inuentum eſſe neceſſariò integrum cum fractione. Vt ſi inter 7. & 10. inueniendus ſit medius, duc eorum differentiam 3. in minorem 7. & productum 21. per eorundem ſummam 17. partire. Quotiens enim $1\frac{4}{17}$. additus eidem minori 7. facit medium terminum $8\frac{4}{17}$. Vt hic vides, $7.8\frac{4}{17}.10$. Quia tam 10. ad 7 habent proportionem ſupertripartientem ſeptimas, quam differentia maiorum $1\frac{13}{17}$. ad minorum differentiam $1\frac{4}{17}$. Vel eorum differentiam 3. duc in maiorem 10. productumq; numerum 30. partire per eorum ſummam 17. Quotiens enim $1\frac{13}{17}$ ſubtractus ex maiore 10. reliquum faciet eundem medium terminum $8\frac{4}{17}$.

ALII tradunt medij termini inuentionem inter duos numeros datos in proportionalitate Harmonica hoc modo. Inuentis duobus minimis numeris in proportione duorum numerorum datorum, iubent Quotientem, qui fit ex diuiſione differentiæ datorum duorum numerorum per ſummam minimorum duorum inuentorum, duci in minorem inuentum, & productum numerum minori dato adijci: Vel eundem Quotientem duci in maiorem inuentum, & productum numerum ex maiore dato ſubtrahi. Semper enim vel ille conflatus numerus, vel hic reliquus dabit medium terminum, qui quæritur Vt ſi inter 20. & 30. ſit inueniendus medius: minimi numeri proportionis inter 20. & 30. ſunt 2. 3. Si igitur differentia datorum numerorum 10. diuidatur per inuentorum ſummam 5. fit Quotiens 2. quem ſi ducamus in minorem inuentum 2. & productum 4. minori dato 20. addamus, vel ſi eundem Quotientem 2. ducamus in maiorem inuentum 3. & productum 6. ex dato maiore 30. demamus, inuenietur ſemper medius terminus 24. Vt hic apparet. 20. 24. 30.

BREVIVS ita medius terminus reperietur. Diuidatur datorum numerorum differentia per numerum, qui denominatorem proportionis, quam dati numeri habent, vna vnitate ſuperat. Quotiens enim minori termino additus dabit medium. Vt datis numeris 10. 40. habentibus proportionem quadruplam; ſi eorum differentia 30. diuidatur per 5. qui numerus denominatorem proportionis vna vnitate ſuperat, fiet Quotiens 6. qui additus minori termino 10. conficiet medium terminum 16 hoc modo 10. 16. 40.

SED ad memoriam iuuandam inueniemus fortaſſe commodius, (licet

(licet aliquanto longiore operatione) medium terminum inter duos extremos datos, hoc modo. Si duo extremi non fuerint impares. Vel pares, sed unus par, & alter impar, duplica eos. Et inter duplicatos constitue arithmeticè proportionalem, qui semper est semissis summæ eorum. Verùm deinde per arithmeticè proportionalem quærere ex regula tres Harmonicè proportionales. Inventis enim inventis erit medius terminus inter duos, qui cum extremis se proportionem habent, quæ est inter duo extrema. Quod si per primum inventum adjungatur numerus ex secundo invento in primum datum factus, reperietur medius inter datos duos extremos. Vt si inter 7. & 10. inueniendus sit medius, duplica eos, & sunt 14 & 20. Summa enim horum 34. par est, cujus semissis 17. est medius Arithmetice inter 14 & 20. hoc modo 14.17.20. Ex his tribus inueniuntur hi tres Harmonicè proportionales, 238 280. 340 Si ergo fiat, & primus inuentus 238. ad secundum 280. ita primus datus 7. ad aliud inuenietur numerus 8 $\frac{4}{17}$. qui medius est Harmonicè inter 7. & 10. qui ab initio propositi fuerunt.

III.

PROPOSITIS duobus numeris, reperiemus tertium utroque maiorem in proportionalitate Harmonica, quando id fieri potest, (Pulchra autem operatio docebit, quando id fieri nequeat) hac ratione. Numerum ex vno in alterum genitum partiemur per numerum, qui relinquitur, subtracta ex iisdem differentia ex minore termino dato. Quotiens enim erit tertius terminus vtroque dato maior, quem quærimus. Quod si quando diuisor reperitur esse 0. Vel quando amborum differentia ex minore termino subtrahi nequit, impossibile est, datis duobus numeris posse adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica. Vt si duo termini minores dentur 12. 16. diuidemus numerum ex eis productū 192. per 8. qui numerus relinquitur, si amborū differentia 4 ex minore 12. detrahatur. Quotiens enim 24. cum datis duobus constituit hanc Harmonicam proportionalitatem, 12. 16. 24. Hanc extendemus, si ad duos terminos 16 24. tertium adiungamus, numerum diuidendo 384 numerum ex 16 in 24. factum, per 8. qui numerus remanet facta subtractione differentiæ amborum, quæ est 8. ex minore 16. Inuenietur enim numerus 48. Quare erunt stabunt 4. termini Harmonicè proportionales, 12. 16. 24. 48. Quod si tentemus his adiungere alium maiorem, frustra laborabimus. Nam datis duobus vltimis 24. 48. reperietur diuisor esse 0. Differentia enim amborum, quæ est 24. subtracta ex minore 24. relinquit 0. Quod si quis proponat hos duos numeros, 12. 12. adiungetur illis tertius vtroque maior, 15. Ad hos vero duos 10. 15. apponetur tertius 12 $\frac{3}{8}$. Et ad duos 90. 99. tertius 110. At vero ad 3. 6. nullus adiun-

get-

gi poterit: quia differentia inter ambos, quæ est 3. demptus ex maiore 3. relinquit 0. Atq; eodem modo quando dati numeri habeant proportionem duplam, non potest illis adiungi tertius proportionalis, quia differentia amborum semper est minoris termino æqualis. Multò magis cùm dati numeri habent proportionem dupla maiorem, non inuenietur tertius maior illis proportionalis Harmonicè, quia differentia amborum tunc semper maior est minore termino, atq; idcircò subtractio fieri nequit. Vt si dentur numeri 3. 7. quorum proportio est dupla sesquitertia, nimirum maior, quàm dupla, videsamborum differentiam 4. maiorem esse minore termino 3. Quare illis non adiungetur vllus tertius proportionalis.

ALII ita inuestigant tertium terminum. Ducunt datorum numerorum differentiam in maiorem, numerumq; productum per numerum, qui relinquitur, subtracta eadem differentia ex minore numero, dividunt; Quotientem denique maiori adjiciunt, vt tertium conficiant. Vt datis duobus numeris, 12. 16. si eorum differentia 4. ducatur in 16. & productus numerus 64. dividatur per 8. (qui numerus relinquitur, subtracta eadem differentia 4. ex minore 12.) fit Quotiens 8. qui additus ad minorem 16. facit tertium 24. vt prius.

ITAQVE, vt duobus numeris adiungi possit tertius maior proportionalis, necesse est, illorum proportionem esse vel superparticularem, vel superpartientem, nimirum duplam minorem. Ex quo liquidò constat, Harmonicam proportionalitatem non posse progredi in infinitum versus maiores numeros, si de continuatione secundo modo accepta loquamur, qua propria est, vt in prima regula diximus. Nam cùm primum ventum erit ad duos numeros, quorum proportio dupla est, vel maior, ibi necessariò proportionalitas consistet, & vltra non promouebitur.

SEQVITVR quoque ex priori regula, quando minor terminus superat differentiam amborum sola vnitate, tertium procreari ex primo in secundum: quia productus hic numerus diuisus per illam vnitatem facit tertium numerum, vt diximus. Constat autem numero per vnitatem diuiso, Quotientem esse eundem numerum diuisum. Vt si dentur duo numeri 6. 11. quia minor 6. superat amborum differentiam 5. sola vnitate, erit tertius proportionalis numerus 66. quæ fit ex 6. in 11. Veluti hic vides, 6. 11. 66. Idem cernitur in hisce numeris, 2. 3. 6. & 10. 19. 190. Semper enim tertius fit ex primo in secundum: quia primus superat differentiam priorum duorum sola vnitate.

EX posteriori verò regula sequitur, quando minor terminus superat amborum differentiam sola vnitate, tertium procreari, si productus ex amborum differentia in maiorem, maiori adjiciatur: quia productus ille diuisus per illam vnitatem, non facit diuersum Quotientem ab eo producto, &c. Vt datis iisdem numeris 6. 11. si differentia 5. ducatur in 11. productus 55. addatur maiori 11. fiet tertius terminus 66. vt prius.

QVA-

QVARE facile quoque reperiri possunt tres numeri Harmonicè proportionales, si pro primo sumatur quilibet numerus, pro secundo vero eius duplus, detracta prima unitate, pro tertio denique numerus, qui ex primo fit in secundum. Vt si primus sit 8. erit secundus 15. & tertius 120. & sic de cæteris. Proportio autem tam extremorum hoc modo inuentorum, quàm differentiarum semper erit multiplex à medio, qui perpetuo impar est, denominata. Vt in his proximis tribus, 8.15.120. proportio est quindecupla.

VNDE si quærantur tres minimi numeri integri Harmonicè proportionales in quacunque proportione multiplici, cuius denominator est numerus impar, statuemus eum denominatorem in medio: semissem autem numeri proximè maioris in primo loco, in tertio denique collocabimus eum, qui ex primo in secundum ducitur. Vt si deprehendantur tres numeri integri, & minimi in proportione septupla locabimus 7. in medio, & 4. (id est semissem numeri 8 proximè maioris quàm 7.) in primo loco, & in tertio numerum 28. ex 4. in 7. procreatum, & hic erit, 4. 7. 28. Si vero denominator sit par, statuemus numerum proximè maiorem in primo loco: in tertio verò collocabimus numerum, qui fit ex illo proximè maiore in denominatorem: in medio denique ponemus denominatorem duplicatum. Vt si inueniendi sint tres minimi integri in proportione octupla, constituemus 9. qui numerus proximè maior est denominatore 8. in primo loco, & in tertio numerum 72. ex 9. & 8. gignatur, in medio denique duplum denominatoris, nimirum 16. & hic erunt 9. 16. 72.

QVOD si tres numeri Harmonicè proportionales in data proportione inuestigandi sint, sic illi minimi sint & inter se sint non agendum erit hoc modo. In medio statuemus denominatorem datæ proportionis: In primo vero semissem numeri, qui denominatorem vnitate superat: In tertio denique loco locabimus numerum ex multiplicatione primi per medium factum. Velut si quærantur tres in data proportione dupla superbipartiente septimas; erit denominator huius proportionis $2\frac{2}{7}$. collocandus in medio, & in primo numerus $1\frac{1}{7}$. nimirum semissis numeri $\frac{9}{7}$. qui denominatorem $2\frac{2}{7}$. vnitate superat. Tertius dein sic erit $4\frac{8}{49}$ factus ex primo $1\frac{1}{7}$. in medium $2\frac{2}{7}$. Ita igitur habent tres numeri inuenti, $1\frac{1}{7}$. $2\frac{2}{7}$. $4\frac{8}{49}$. quod ad hos tres eosdem denominatores reuocabuntur, $\frac{8}{7}$. $\frac{16}{7}$. $\frac{32}{7}$. si primus quilibet ad vnitatem fuerit reductus. Numeratores autem 8. 16. 32. erunt numeri integri Harmonicè proportionales, eritq; extremorum proportio, ac primus & differentiarum, simplex superbipartiens septimas, qualem inuestigare data est.

IV.

DVOBVS numeris datis, reperiemus tertium vtrique minorem in proportionalitate Harmonica, hoc modo. Numerum ex vno in alterum

rum productum partiemur per summam ex maiore dato, & amborum differentia collectam. Quotiens enim erit ii, qui quaritur. Vt si dentur duo numeri 6. 12. si dividamus numerum 72. ex 6. in 12. factum, per 18. summam ex 12. & amborum differentia 6. collectam, reperiemus tertium 4. minorem utroque illis proportionalem, ut hic cernis, 4. 16. 12. Hanc extendemus regrediendo versus minores numeros, si duobus 4. 6 minorem tertium adiungemus 3. hoc modo 3. 4 6. 12. qui numerus 3. invenietur, dividendo numerum 24 factum ex 4. in 6. per 8. summam videlicet ex 6. & amborum differentia 2. collectam. Eodem modo duobus minoribus 3. 4 adiungetur tertius minor 2 2/3. Atque in hunc modum decrescet proportionalitas qualibet Harmonica continuè in infinitum. Vbi animadvertere licet admirabilem fane varietatem inter hos tres proportionalitates, Arithmeticam, Harmonicam, & Geometricam; quæ varietas tribus hisce propositionibus explicatur.

I. ARITHMETICA augetur in infinitum, sed in infinitum non decrescit.

II. HARMONICA contrà, decrescit in infinitum, sed in infinitum augeri non potest. Quod intelligendum est, si ita continuari debeat, ut quilibet tres numeri habeant proportionalitatem Harmonicam; hoc est, ut primus, secundus, ac tertius sint Harmonicè proportionales: Item secundus, tertius, & quartus: Item tertius, quartus, & quintus, &c. Nam alias in utramque partem extendi potest in infinitum, sicut Geometrica, ut suprà in regula 1. diximus.

III. GEOMETRICA denique & augetur, & decrescit in infinitum.

EST & hoc notatu dignum, in cubo reperiri quatuor terminos in Harmonica proportionalitate continuos qui varie inter se comparati præcipuas perfectasque consonantias Musicas exprimunt. Nam 6. eius bases quadratæ; 8. anguli solidi; 12 latera; & 24. anguli plani constituant hos 4 terminos 6. 8. 12. 24. continuè proportionales Harmonicè. Proportio autem 8. ad 6. est sesquitertia, qua consonantiam Diatessaron, sive Quartam, constituit. Proportio verò 12 ad 8. sesquialtera est, continens consonantiam Diapenten, sive Quintam. Proportio denique 12. ad 6. vel 24. ad 12. dupla est, explicans consonantiam Diapason, sive Octavam. At proportio 24. ad 8. tripla est, efficiens consonantiam Diapason & Diapenten, hoc est, Duodecimam. Denique proportio 24 ad 6. quadrupla existit, exhibens consonantiam Disdiapason, sive Decimamquintam.

V.

DATIS quotlibet numeris Arithmetica proportionalitate, si quicunque numerus, sive minimus, sive non minimus, ab eo numeratus per singulos dividatur, erunt Quotientes conversò ordine Harmoni-

inuicè proportionales. Et ſiciſſim, datis quotlibet numeris in proportionalitate Harmonica, ſi numerus, quem metiuntur, per ſingulos diuidatur, erunt Quotientes ordine conuerſo Arithmeticè proportionales. Verbi gratia: Sint Arithmeticè proportionales 1. 2. 3. 4. 5. 6. Numerus, quem metiuntur, eſt 720. ex eorum continua multiplicatione inter ſe procreatus. At minimus ab eis numeratus erit 60. quem reperies per ea, quæ in Arithmetica practica cap. 10. ſcripſimus. Priore ergo per ſingulos datos diuiſo, inuenientur hi in proportionalitate Harmonica continua.

720. 360. 240. 180. 144. 120.

Poſteriore autem per eoſdem datos diuiſo, reperientur hi.

60. 30. 20. 15. 12. 10.

Atque hi numeri inuenti eaſdem proportiones habent, quas dati numeri Arithmetica proportionalitatis, bini ac bini, conuerſo tamen ordine: nimirum vt in Harmonica primus ad ſecundum, ita in Arithmetica ſecundus ad primum: Et vt in Harmonica ſecundus ad tertium, ita in Arithmetica tertius ad ſecundum, &c. Numeri quoque per minimum numeratum inuenti, ſunt minimi in ſuis proportionibus. Quòd ſi ſiciſſim numerus ab inuentis numeratus diuidatur per ſingulos inuentos, gignentur totidem numeri Arithmeticè proportionales: & ſi quidem minimus, quem metiuntur, diuidatur, prodibunt ijdem numeri Arithmeticè proportionales, per quos Harmonicè proportionales inuenti ſunt, & eodem quidem ordine, quo dati ſunt, ſed ordine conuerſo, ſi cum inuentis in Harmonica proportionalitate conferantur. Semper enim ſi in vna proportionalitate progrediantur numeri à minoribus ad maiores, in altera à maioribus ad minores progreſſus fit, & contrà.

IGITVR ſi quis cupiat quotcunque terminos continuè Harmonicè proportionales, ſumendi ſunt totidem termini Arithmeticè quomodolibet proportionales, & numerus ab eis numeratus (& minimus quidem, ſi minimi deſiderentur) per ſingulos diuidendus, vt diximus.

VI.

DATIS tribus numeris in proportionalitate Harmonica, tantum fit ex priorum differentia in tertium, quantum ex differentia poſteriorum in primum. Vt hic cernis. Namtum ex 2. in 12. tum ex 4. in 6. fit numerus 24. Ratio huiuſce rei eſt: quòd tam ſit, vt 12. primus ad 6. ſecundum, ita 4. tertius ad 2. quartum; erit numerus ex primo 12. in quartum 2. factus, æqualis numero, qui ex ſecundo 6. fit in

Differentia	2	4
Propor. Har.	6	8	12

tertium 4. & ex 2. regula proportionalitatis Geometrica manifestum est. Idem constat in pluribus terminis, si terni ac terni sumantur cum suis differentijs, vt in hijs 6. terminis apparet.

Differentia.	30	10	5	3	2
Propor. Harm.	60	30	20	15	12	10

Nam ex 30. in 20. & ex 10. in 60. fiunt 600. Item ex 10. in 15. & ex 5. in 30. fiunt 150. Rursus ex 5. in 12. & ex 3. in 20. fiunt 60. Ac denique ex 3. in 10. & ex 2. in 15. fiunt 30. Atq; ita, vt vides, eiusmodi operatione probare potes, num dati quotcunque termini, aut inuenti, seruent continuam proportionalitatem Harmonicam, nec ne. Nam sumptis ternis, ac ternis, cum suis differentijs, si differentia commutato ordine ducantur in primum terminum ac secundum, producantque vtrobique numeros aquales, erunt termini omnes continue proportionales Harmonice, sin minus, nequaquam.

VII.

QVOD si quis reperire velit quinque minimos numeros, in quibus omnes tres proportionalitates existant: ita vt primi tres numeri habeant proportionalitatem Arithmeticam: Relicto autem primo, tres insequentes, proportionalitatem Geometricam, & tres postremi proportionalitatem Harmonicam: ac deinde primus, tertius, & quintus habeant datam proportionem continuam Geometricam. Vel si reperire quis velit tres numeros in data proportione continuè proportionales, ita vt inter primum, ac secundum cadat medius Arithmeticè proportionalis, & inter secundum ac tertium medius Harmonicè proportionalis, medius denique trium datorum numerorum sit inter medios inuentos medius proportionalis Geometricè, atq; quinque numeri ita inuenti sint minimi omnium, in quibus ea contingant; efficiendum id erit hac ratione.

9.	6.	3.	1½.	1.
9.	6.	3.	1½.	1.
18.	12.	6.	3.	2.

Sit data proportio tripla, in qua tres minimi sumantur termini, 9. 3. 1. Inter primos duos statuatur medius Arithmeticè, 6. Per hunc diuidatur quadratus medij numeri 3. assumpti, & Quotiens 1½. inter 3. & 1. statuatur, vt in primo ordine hic posito apparet. Sed quia hic quotiens integer est cum fractione, reuocabimus eum ad vnicam fractionem hanc 3/2. vt in secundo ordine vides. Quòd si eius numeratorem 3. accipiamus, relicto denominatore, & alios numeros secundi ordinis per denominatorem 2. multiplicemus, procreabimus quinque minimos numeros quasitos, vt in tertio ordine cernis. Nam 18. 12. 6. Arithmeticam habent

bent proportionalitatem: 12. 6. 3. Geometricam: & 6. 3. 2. Harmonicam: ac denique 18. 6. 2. triplam datam. Quòd si non inueniendis sint minimi quinque termini in his tribus proportionalitatibus continuatis, accipi possunt quicunque tres numeri datum proportionem habentes continuam, & cum eis duo medij, nimirum secundus, & quartus, inuestigandi, vt dictum est.

SI minores termini cum maioribus conferendi sint, & data sit proportio subtripla, inuenientur eodem artificio ex his tribus minimis, 1. 3. 9. subtripli hos quinque 2. 4. 6. 9. 18. Nam 2. 4. 6. seruant proportionalitatem Arithmeticam: 4. 6. 9. Geometricam: 6. 9. 18. Harmonicam; & 2. 6. 18. subtriplam propositam. Inueniendi modum conspicis in hisce tribus ordinibus appositis.

1.	1	2.	1	3.	1	$4\frac{1}{2}$.	1	9.
1.	1	2.	1	3.	1	$\frac{9}{2}$.	1	9.
2.	1	4.	1	6.	1	9.	1	18.

RVRSVS sit data proportio sesquialtera, in qua tres minimi termini sint, 9. 6. 4. Inter 9. & 6. medius est Arithmeticè $7\frac{1}{2}$ vt in primo ordine, Reuocetur ad vnicam hanc fractionem $\frac{15}{2}$. vt in secundo ordine. Sumpto autem numeratore 15. pro secundo numero, relicto denominatore, ducantur alij in secundo ordine in denominatorem, 2. Vt in tertio ordine factum est: Et quadratus numerus numeri 12. nimirum 144. diuidatur per 15. ac Quotiens $9\frac{3}{5}$. in minimis terminis, statuatur medius inter 12. & 8. eiusdem tertij ordinis. Hunc numerum $9\frac{3}{5}$. reuocabimus ad hanc vnicam fractionem, $\frac{48}{5}$. vt in quarto ordine. Sumpto denique numeratore 48. pro penultimo numero, relicto denominatore, ducemus alios quarti ordinis in denominatorem 5 inuenti q_3 erunt quinque minimi numeri quæsiti, vt in quinto ordine apparet.

9.	1	$7\frac{1}{2}$.	1	6.	1	4.		
9.	1	$\frac{15}{2}$.	1	6.	1	4.		
18.	1	15.	1	12.	1	$9\frac{3}{5}$.	18.	
18.	1	15.	1	12.	1	$\frac{48}{5}$.	18.	
90.	1	75.	1	60.	1	48.	1	90.

Si minores numeri cum maioribus comparandi sint, inuenientur in proportione data sesquialtera quinq; termini minimi, vt hic vides in quarto ordine. Eadem q; in cæteris est ratio.

POTES quoque, si placet, in primo ordine omnes quinque numeros constituere, & fractiones, si quæ sint, ad vnicam denominationem minimam reuocare, & deinde quamlibet ad vnicam fractionem; Nam si numeratores pro illis substituas, denominatore communi relicto, & reliquos numeros integros per communem denominatorem multiplices, efficies quinque numeros minimos integros quæsitos. Vt si sub quadrupla proportio proponatur, erunt minimi tres termini, 1. 4. 16. Additis simul 1. 4. erit summa dimidiū $\frac{21}{2}$. medius Arithmeticè inter eos. Et si diuidatur quadratus numerus numeri 4.

4.	1	1	6.	1	1	9		
4.	1	5.	1	6.	1	$7\frac{1}{5}$.	1	9.
4.	1	5.	1	6.	1	$\frac{36}{5}$	1	9.
20.	1	25	1	30.	1	36.	1	45.

1.	$2\frac{1}{2}$.	4	$6\frac{2}{5}$.	16
1.	$2\frac{5}{10}$	4.	$6\frac{4}{10}$.	16.
1.	$2\frac{25}{10}$	4.	$6\frac{4}{10}$	16.
10.	25.	40.	64.	16.

per 2 $\frac{1}{2}$. fit Quotiens $6\frac{2}{5}$. medius Harmonicè inter 4. & 16. Duæ autem fractiones reducentur ad eandem denominationem, & in secundo ordine. Et fractionibus singulis ad unicam fractionem revocatis, constituetur tertius ordo. Sumptis autem numeratoribus, relinquendo denominatorem communem, & numeris integris per denominatorem communem multiplicatis, constituentur quinque minimi numeri quæsiti, & in quinto ordine vides. Atque in hunc modum quotcunque terminos proportionem aliquam servantes, in quibus permista sunt fractiones, ad totidem terminos integros reduces, quando res exigit.

VIII.

QVANDO quatuor numeri ita ordinantur, & ipsi sint Geometricè proportionales non continuè, & unus autem mediorum cum extremis servet proportionalitatem Arithmeticam, alter verò Harmonicam, ita & in quatuor illis numeris tres proportionalitates, quas diximus, reperiantur, dicuntur quatuor illi numeri constituere Harmoniam maximam. Quando autem quatuor numeri ita ordinantur, & in ipsis reperiantur duæ duntaxat proportionalitates, vel Geometrica, & Arithmetica: vel Geometrica, & Harmonica; vel Harmonica, & Arithmetica, dicuntur illi quatuor numeri Harmoniam minorem constituere.

MAXIMAM Harmoniam, in qua extremi termini habeant etiam proportionem datam, ita constitues. Sit data proportio qua 6. ad 1. quam extremi termini habere debent. Quoniam summa eorum est impar, accipio eorum duplos 12. & 2. inter quos medius Arithmeticè constituatur 7. hoc modo 12. 7. 2. Quòd si eorum summa fuisset par, accepissem statim medium inter eos in proportionalitate Arithmetica. Ex his tribus Arithmeticè proportionalibus inveniantur tres Harmonicè proportionales per primam regulam; 84. 24. 14. quorum extremi habent proportionem datam, nimirum eandem, quam 12. ad 2. vel 6. ad 1. Si igitur inter extremos 84. 14. qui semper sta inventi pares erunt, statuatur etiam medius Arithmeticè, 49. erunt quatuor quæsiti numeri, 84. 49. 24. 14. Nam extremi habent datam proportionem, quam 6. ad 1. Deinde in eis reperiuntur omnes tres proportionalitates. Inter ipsos enim quatuor existit Geometrica proportionalitas non continua, cùm eadem sit proportio 84. ad 49. quæ 24. ad 14. vel 84. ad 24. quæ 49. ad 14. & liquidò constat ex 7. propietate trium harum proportionalitatum. At inter 84. 49. 14. Arithmetica. Ac denique inter 84. 24. 14. Harmonica ex constructione, & hic vides.

Tres

Tres proportio-	84.	49.	24.	14.	*nalitates simul.*
Geometricè prop.	84.	49.	24.	14.	84 49 24 14
Arithmet prop.	84.	49	34.		
Harmonicè prop.	84.	24.	14		

Rursus sit data proportio, quæ 3. ad 2. Quorum trium extremorum summa est impar, sint eorum dupli 6. 4. inter quos situatus medius in Arithmetica proportionalitate, 5. hoc modo, 6. 5. 4. Ex his, ex primam regulam inventis Harmonicè proportionales 30. 24. 20. Constituto autem medio Arithmetico 25. inter 30. & 20. erunt eadem ratione quatuor numeri quæsiti, 30. 25. 24. 20. cum habeant omnes tres proportionalitates, & hic apparet.

Geometricè proport.	30	25	24	20	*Vel*	30	24	25	20
Arithmetic. proport	30.		25.		20.				
Harmon. proport.	30.		24.		20.				

EODEM 4. numeros maximè Harmonia reperiemus, si pro extremis sumamus quosvis duos numeros datam proportionem habentes, pares, vel impares: & inter eos situatus medius Arithmeticè: fiat autem, & numerus à Harmonicè extremus, tria alter extremus ad aliud, erit hic numerus Harmonicè proportionalitate medius inter eosdem extremos. Quando autem 4. numeri Geometricè proportionalibus, quales sunt 4. numeri, sexus medium & medius in proportionalitate Arithmetica, & numerorum medius est in Harmonica inter eosdem extremos, ut demonstravimus in 7. propriete harum trium proportionalitatum. Quæ si negetur de numeris inventi sunt integri: dicam erit, quæ ipsorum fuerint adhuc, & sint fractiones, reducemus eos ad integros, sumendo à quolibet antecedentis regulæ 7. scrupulum. Ut si proportio data sit dupla, statuemus extremos, 12. & 6. Dimidium summæ eorum 9. erit medius terminus inter eos Arithmeticè proportionalis, hoc modo 12. 9. 6. Quæsitum fiat, & 9. ad 6. ita 12. ad aliud. Fiet 8. ad 12. erit adhuc Harmonicè proportionalitate medius. Quare sic habebunt 4. numeri Harmonici, 12. 9. 8. 6. Postremo si in data proportione dupla, esset eorum summa pro extremis, 20. & 10. tum eorum medius Arithmeticè 15. & Harmonicè 13 $\frac{1}{3}$. in numeris vocatis, hic modo 20. 15. 13 $\frac{1}{3}$. 10. Sed ob terminum ad Numerum fractum 13 $\frac{1}{3}$. venientes, & eius numeratorem 4. denominatore relicto, reducemus, sumendo à quolibet 3. multiplicemus, & hic fiet 60. 45. 40. 30.

MINOREM autem Harmoniam si reperiemus. Si in 4 numeris debet reperiri solùs proportionalitas Geometrica cum Arithmetica, cape tres numeros continuè proportionales Geometricè, quorum extremi pares ambo sint. Nota, pares. Si enim inter extremos statuas medium in proportionalitate Arithmetica, habebis 4. numeros quæsitos. Vt si sumantur hi tres numeri sesquialteri, 16. 24. 36 & inter extremos inueniatur medius Arithmeticè proportionalis. 26. erunt 4 quæsiti numeri, 16. 24. 26 36. quorum tres 16. 24. 36. Geometricè, & tres 16 26. 36. Arithmeticè proportionales sunt, ex constructione.

SI vero sola Geometrica cum Harmonica desideretur, cape quoque tres numeros quoscunque continuè proportionales Geometricè. Si enim inter extremos inuenias medium in Harmonica proportionalitate, habebis 4 numeros, qui quæruntur. Vt si sumantur iidem tres sesquialteri, 16. 24 36. inueniatur inter extremos medius in Harmonica proportionalitate, 22 $\frac{2}{5}$. Sic ergo stabunt 4 numeri inuenti, 16. 22 $\frac{2}{5}$. 24. 36. qui reducentur ad hos integros, 208. 286. 312. 468. Si accepisses hos numeros tres duplos, 20. 10. 5. inuenisses inter extremos medium Harmonicum 8 hoc modo, 20. 10. 8 5.

SI denique optes solum Harmonicum cum Arithmetica proportionalitate, accipe tres quoslibet Harmonicè proportionales. Si namq; inter medium, & alterutrum extremorum statuas medium Arithmeticum, inuenti erunt quatuor numeri, quos quærimus. Vt si sumãtur hi tres 6. 8. 12. erit inter priores duos medius Arithmeticè proportionalis 7. Quare 4. inuenti numeri erunt hi, 6. 7. 8. 12. At inter posteriores duos erit medius in Arithmetica proportionalitate, 10. Sic ergo stabunt 4. inuenti numeri, 6. 8. 10. 12. qui omnes (quod casu quodam fortuito in hoc exemplo accidit) sunt Arithmeticè proportionales, & non solùm tres 8. 10. 12. ex constructione: at soli tres accepti 6. 8. 12. habent proportionalitatem Harmonicam.

IX.

SI inueniendi sint quotcunque numeri Arithmeticè proportionales continuè, inter quorum binos ac binos cadant singuli medij Harmonicè proportionales integri, efficietur id hac ratione. Sumantur tot termini Arithmeticè proportionales, quot quæruntur, & bini in proportione binorum proximorum minimi. Si enim accipiatur minimus numerus numeratus à secundis binorum minimorum acceptorum, atque hic 12 singulos acceptos numeros Arithmeticè proportionales ducatur, procreabuntur numeri, qui quæruntur. Sint enim verbi gratia inueniendi quatuor. Cape quatuor quoscunque numeros Arithmeticè proportionales, 3. 6 9. 12 & 1. 2. minimos terminos proportionis 3 ad 6 & 2. 3. minimos proportionis 6. ad 9. & 3 4. minimos in proportione 9. ad 12. eruntq; tres summa binorum minimorum 3. 5. 7. atq; ab his minimus numeratus, 105. Si igitur hunc du-

cas

eas seorsum in singulos acceptos, 3. 6 9. 12. procreabis 4. numeros Arithmeticè proportionales, quos desiderau, 315. 630. 945. 1260. Nam inter primum & secundum in Harmonica proportionalitate medius est, 420. inter secundum & tertium, 756. Inter tertium & quartum, 1080. Vt hic cernis.

Arith. propor.	315	630	945	1260
Medij Harm.	420	756	1080	

ITAQVE si vis duos in data proportione duorum numerorum, inter quos cadat vnus integer medius Harmonicè, sume duos minimos in data proportione, & eorum summam duc in duos data proportionis. Vt si data sit proportio tripla inter 4. & 12. erunt minimi termini, 1. 3. quorum summam 4. si duxeris in 4. & 12. efficies 16. & 48. numeros quæsitos. Medium Harmonicum inter eos erit 24. Vt hic vides, 16. 24. 48. Si data proportionis numeri fuissent minimi 1. 3. duxissemus vtrumq; in eorum summam 4. factiq; essent hi duo numeri. 4. 12. inter quos cadit Harmonicè medius 6.

X.

SI autem volueris quotcunque terminos in continua proportione Geometrica data, inter quorum binos, ac binos, bini medij integri cadant, vnus in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica, assequeris id hoc artificio. Sume tot minimos numeros continuè proportionales Geometricè, quot desiderantur, & singulos multiplica per summam duorum in eadem proportione minimorum: Et si quidem producti fuerint omnes pares, ipsi erunt, quos quærimus; sin minus, eorum dupli dabunt quæsitos numeros. Sint enim inueniendi verbi gratia tres in proportione sesquialtera. Cape totidem minimos in data proportione, 4. 6. 9. & duos minimos in eadem, 2. 3. Horum summam 5. duc in singulos acceptos, & productos numeros, quoniam non omnes pares sunt, dupla, habebisque propositos numeros 40. 60. 90. Nam inter 40. 60. medium Harmonicum est, 48. Arithmeticum, 50. Et inter 60. 90. Harmonicum medium est, 72. Arithmeticum 75. Vt hic vides.

Geom. proportio.	40	1	60	1	90	
Medij Harmo.	1	48	1	1	72	1
Medij Arithm.	1	1	50	1	1	75

HINC facilè reperies duos numeros in data proportione, inter quos intercipiantur duo medij, alter secundū proportionalitatē Arithmeti-

cam, & secundum Harmonicam alter. Sumptis enim minimis terminis datæ proportionis, si eorum summam vel in duos illos minimos terminos, vel in duos quoscunque alios numeros datam habentes proportionem duxeris, erunt numeri producti, si pares sunt, quæsiti: si vero vterque non est par, erunt eorum dupli, quos quærimus. Vt si data sit proportio sesquitertia, cuius minimi numeri sunt 3.4. eorumque summa, 7. Si ergo duces 7. in 3. & 4. vel in 12. & 16. datam quoque habentes proportionem, produces vel 21. 28. vel 84. & 112. Et quia priores duo non sunt pares, erunt eorum dupli, 42. 56. ij, quos quærimus. Posteriores autem duo, quia pares sunt, erunt quæsiti. Tam enim inter illos, quàm inter hos cadunt duo medij, quos quærimus, vt hic manifestum est.

Numeri inuenti.	1	4	2	1	1	5	6	1	1	1	1	8	4	1	1	1	1	2
Medij Harmon.	1		1	8	4	1	1	*Vel*	1	1		1	9	6	1	1		
Medij Arithm.	1		1	1	4	9	1	1		1	1		1	9	8	1		

XI.

Si verò quis petat sibi dari tres numeros in proportionalitate Harmonica, inter quorum binos bini cadant medij, alter in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alter, exequemur id hac methodo. Inueniantur, per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmeticè proportionales 2. 50. 98. inter quorum priores binos sit medius Geometricè, 10. & inter binos posteriores, 70. statuanturq; ordine sic 2. 10. 50. 70. 98. Minimus autem numerus ab his quinque numeratus sit 2450. Quo diuiso per eosdem quinque numeros, Quotientes sint, 1225. 245. 49. 35. 25. Si igitur omnes Quotientes sint pares, vel impares, erunt primus, tertius, & quintus; vt 1225. 49. 25. ij numeri, qui quæruntur. Sunt enim Harmonicè proportionales, vt constat ex 5. regula, cùm sint Quotientes producti ex diuisione numeri 2450. quem numeri 2. 50. 98. Arithmeticè proportionales numerant, per eosdem numeros 2. 50. 98. Inter binos autem cadunt Geometricè proportionales, 245. secundus Quotiens; & 35. tertius Quotiens. Habent enim 1225. 245. 49. easdem proportiones conuerso ordine, quas continuè proportionales 2. 10. 50. habent, vt constat ex 7. regula proportionalitatis Geometricæ. Eodemq; modo 49. 35. 25. easdem habebunt proportiones, quas conuerso ordine habent continuè proportionales 50. 70. 98. cùm tam illi, quàm hi, sint Quotientes producti per diuisionem eiusdem numeri 2450. per 2. 10. 50. & per 50. 70. 98. Certum autem est, inter binos eosdem 1225. 49. & inter 49. 25. cadere quoque singulos Arithmeticè proportionales, cùm omnes pares ponantur, vel impares. Quod si non omnes sint pares, duplicandi erunt omnes 5.

Quotien-

Quotientes, vt pares numeri fiant, qui idem omnino præstabunt, quod quærimus. Habebunt enim easdem proportiones, quas eorum subdupli habent, ac proinde tam inter primum ac tertium secundus, quam inter tertium & quintum quartus medio loco erit Geometricè proportionalis. Cum ergo inter eosdem cadant medij Arithmeticè, conflat propositum. Exemplum superius ob oculos hic propositũ esse vides.

Tres Har. prop. inuenti.	1225			49			25	
Medij Arith.		637			37			
Medij Geometr.			245			35		

XII.

RVRSVS si quarantur tres numeri in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos cadant bini proportionales, Geometricè vnus, & alter Harmonicè, satisfaciemus quæstioni hoc modo. Repetiantur iterum, per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmeticè proportionales, 2. 50. 98. inter quorum binos singuli medij cadant in proportionalitate Geometrica; sumanturque duo minimi 1. 25. in proportione priorum duorum: Item duo minimi 25. 49. in proportione duorum posteriorum; & horum summa 26.74. numerent minimum numerum 692. in quem tres illi inuenti 2. 50. 98. ducantur. Producti enim numeri 1924. 48100. 94276. erunt, quos inquirimus. Cum namque easdem proportiones habeant, quas eorum submultiplices, 2. 50. 98. fit vt quemadmodum inter binos horum singuli cadunt medij Geometricè, ita quoque inter binos illorum singuli intercipiantur medij in eadem proportionalitate Geometrica. Deinde quia summa minimorum numerorum 1. 25. & 25. 49. in proportionibus 2. ad 50. & 50. ad 98. (qui tres, 2. 50. 98. Arithmeticè sunt proportionales) numerant minimum numerum 962. qui in eos tres, 2. 50. 98. ductus produxit 1924. 48100. 94276. cadent inter binos horum trium singuli medij Harmonicè proportionales, vt in 9. regula traditum est. Exemplum ergo cum medijs sic stabit.

Arith. prop. nu.	1924			48100			94276	
Medij Harm.		3700			63700			
Medij Geom.			9620			67340		

XIII.

EX his, quæ diximus, inuenire quis poterit tres numeros proportionales siue Arithmeticè, siue Geometricè, siue Harmonicè, inter quo-

rum binos cadant terni medij, & unus Arithmetice, alter Geometrice, & reliquus Harmonice. Sint enim primum inueniendi tres Arithmetica proportionalitatis. Per antecedentem regulam 12. reperiantur tres numeri Arithmetica proportionalitatis, inter quorum binos cadant bini medij, & unus in Geometrica proportionalitate, & in Harmonica alter. Qui tres numeri si fuerint omnes pares, vel impares, cadent quoque inter binos singuli Arithmeticè proportionales, atq; adeo quæstioni satisfacient. Si verò non omnes pares sint, aut impares, eorum dupli erunt, quos quærimus. Exemplum hic habes in tribus numeris antecedentis regulæ, qui omnes pares sunt, vt hic appares.

Arith. prop.	1924				48100				94276			
Medij Har.		3700				63700						
Med. Geo.			9620				67340					
Med. Arith.				25012				71188				

DEINDE inueniendi sint tres numeri in Geometrica proportionalitate, inter quorum binos cadant terni medij, in singulis proportionalitatibus singuli, sitque proportio data, quam medij Geometrica proportionalitatis efficere debent, nimirum sesquialtera. Cape quinque numeros minimos data proportionis continuè proportionales, 16. 24. 36. 54. 81. & duos minimos 4. 9. in proportione primi 16. ad tertium 36. & tertij 36. ad quintum 81. Horum minimorum summam 13. duc in eundem primum 16. tertium 36. & quintum 81. Producti enim numeri 208. 468. 1053. duplicati, (quoniam ipsi non omnes pares sunt, aut impares; alias non essent duplicandi) nimirum 416. 936. 2106. (vt inter binos cadere possint singuli medij Arithmeticè) sunt ij quos quærimus. Nam inter binos cadunt bini medij, alter Harmonice, & Arithmetice alter, vt ex 10. regula patet: Et inter eosdem cadunt medij Geometrice, nimirum dupli eorum, qui fiunt ex eadem summa 13. duorum minimorum in secundum 24. & tertium 54. ab initio acceptos: quemadmodum hic manifestum est.

Geom. prop.	1416				1936				2106			
Med. Harm.		1576				12296						
Med. Geom.			1624				11404					
Med. Arith.				1676				11521				

POSTREMO sint inueniendi tres in Harmonica proportionalitate. Inuentis tribus in Harmonica proportionalitate, 1225. 49. 25. inter quorum binos cadant bini Medij, & unus Arithmetice & alter Geome-

Geometricè, & in 11. *regula docuimus, sint proportionis priorum duorum minimi duo numeri* 25. 1. *& proportionis duorum posteriorum minimi duo numeri* 49. 25. *quorum summa* 26. 74. *numerent minimum numerum* 962. *Hunc si in tres inuentos duxeris, gignes tres quasitos* 1178450. 47138. 24050. *Nam inter binos cadent, bini medij, & unus Arithmetice, & alter Geometrice, quemadmodum inter eorum submultiplices* 1225. 49. 25. *nimirum numeri, qui fiunt ex eodem* 962. *in medios supra inuentos. Item inter eosdem binos cadent singuli medij Harmonice, & ex* 12. *regula constat, cum producti sint ex minimo numerato à summis minimorum terminorum, in omnes tres. Exemplum hic habes.*

Har prop.	1178450	1	1	471381	1	1	124050	
Med. Ar.	1	612794	1	1	1	355941	1	1
Med. Geo.	1	1	235690	1	1	133670	1	
Med. Har.	1	1	190650	1	1	131850		

XIV.

PARI ratione comperiemus duos numeros proportionem habentes duplicatam datæ proportionis, inter quos cadant tres medij, & unus in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alius, & tertius in Harmonica. Sit enim datæ proportio 6. *ad* 3. *& tres minimi in ea numeri,* 4. 2. 1 *erit q; ex defin.* 10. *huius lib. proportio* 4. *ad* 1. *duplicata proportionis* 2. *ad* 1. *vel* 6. *ad* 3. *data. Ducatur summa* 5 *ex* 4. *& 1. collecta in duos quosuis numeros habentes eandem proportionẽ, quam* 4. *ad* 1. *hoc est, duplicatum datæ proportionis, & in* 12. *& 3. Producti autem numeri* 60. 15. *duplicentur, si ambo non sint pares, vel impares. Dupli enim* 120. 30. *sunt quos quærimus. Et si vterque esset par, aut impar, ipsi essent quæsiti, & duplicatio non foret necessaria. Ita autem se habent tres medij inter* 120. *& 30. vt hic apparet.*

Duo numeri inuenti.	1	120	1	1	1	1	30	
Medius Arith.	1	1	75	1	1	1		
Medius Geometr.	1	1	1	60	1	1		
Medius Harmon.	1	1	1	1	48	1		

XV.

POSTREMO si lubeat numerum quemcunq; propositum distribuere in quotuis partes Harmonicam proportionalitatem seruantes, efficies id hac ratione. Cape per 5. *regulam tot numeros Harmonice proper-*

proportionales, in quot partes numerus eſt diſtribuendus. Si enim per eorum ſummam diuides numeros, qui ex dato numero in numeros acceptos fiunt, erunt Quotientes partes, quas quæris, erunt que accepti numeri eodem ordine proportionales. Vel ſi per ſummam acceptorum numerorum partiaris datum numerum, & Quotientem in ſingulos numeros acceptos ducas, erunt numeri procreati, quos quæris. Vt ſi numerus 130. diſtribuendus ſit in tres partes Harmonice proportionales; ſi ſumantur tres numeri 6. 8. 12. ex 5. regula inuenti, & per eorum ſummam 26 diuidantur numeri 780. 1040. 1560. qui ex dato numero 130. in aſſumptos numeros 6. 8. 12. gignuntur, erunt Quotientes 30. 40. 60. partes, quas inquirimus. Vel ſi datum numerum 130. per 26. ſummam acceptorum numerorum diuidas, & Quotientem 5. ducas in ſingulos acceptos, 6. 8. 12. erunt procreati numeri 30. 40. 60. eadem partes, quas inquirimus. Conſtituunt enim datum numerum 130. ſuntque Harmonice proportionales, ſicuti aſſumpti numeri, 6. 8. 12. Eodem modo diuidetur numerus 10. in has tres partes $2\frac{4}{17}$. $3\frac{1}{17}$. $4\frac{8}{17}$. eodem modo proportionales. Eademque ratio eſt de pluribus partibus.

QVO PACTO EX PROPORTIONE æqualitatis omnes inæqualitatis proportiones rationales oriantur.

POSITIS tribus terminis æqualibus, ſiue Vnitatibus, ſiue numeris, mirabile dictu eſt, quam facili, & iucunda ratione, ex Varia illorum inter ſe additione, omnes proportiones rationales inæqualitatis in tribus terminis gignantur, hoc ordine.

ÆQVALES termini, ſiue numeri, procreant numeros duplos: DVPLI triplos: TRIPLI quadruples: QVADRVPLI quintuplos; & ſic in infinitum.

DEINDE ex multiplicibus terminis inuentis, ſi ordinem inuertant, gignentur omnes ſuperparticulares, hoc ſeruato ordine. DVPLI inuerſi producunt ſeſquialteros: TRIPLI inuerſi ſeſquitertios: QVADRVPLI inuerſi ſeſquiquartos: atque ita deinceps.

TERTIO ex terminis ſuperparticularibus inuentis, ſi inuertant quoque ordinem, producentur omnes ſuperpartientes, hac ſerie. SESQVIALTERI inuerſi exhibent ſuperbipartientes. SESQVITERTII inuerſi ſupertripartientes: SESQVIQVARTI inuerſi ſuperquadrupartientes, &c.

QVARTO ex iiſdem terminis ſuperparticularibus eo ordine, quo inuenti ſunt, naſcentur omnes multiplices ſuperparticulares, hoc ordine.

SESQVIALTERI dant duplos ſeſquialteros: DVPLI ſeſquialteri triplos ſeſquialteros: TRIPLI ſeſquialteri quadruplos ſeſquialteros, &c. SESQVITERTII item gignunt duplos ſeſquiter-

quintertios: DVPLI ſeſquitertij triplos ſeſquitertios: TRIPLI ſeſquitertij quadruplos ſeſquitertios, &c. SESQVIQVARTI ruſſus efficiunt duplos ſeſquiquartos: DVPLI ſeſquiquarti triplos ſeſquiquartos: TRIPLI ſeſquiquarti quadruplos ſeſquiquartos, &c.

QVINTO ex terminis ſuperpartientibus inuentis eliciuntur omnes multiplices ſuperpartientes hoc ordine.

SVPEREIPARTIENTES generat duplos ſuperbipartientes: DVPLI ſuperbipartientes triplos ſuperbipartientes. TRIPLI ſuperbipartientes quadruplos ſuperbipartientes, &c. SVPERTRIPARTIENTES quos, parium duplos ſupertripartientes: DVPLI ſupertripartientes, triplos ſupertripartientes. TRIPLI ſupertripartientes, quadruplos ſupertripartientes, &c. SVPERQVADRIPARTIENTES item generant duplos ſuperquadripartientes: DVPLI ſuperquadripartientes, triplos ſuperquadripartientes. TRIPLI ſuperquadripartientes, quadruplos ſuperquadripartientes atque ſic deinceps.

MODVS autem, quo omnes hæ proportiones ex tribus terminis æqualibus generantur eo ordine, quem expoſuimus, oſtendes, ſi quæ facillimus, animum adhibeas.

SVMMA collecta ex primo termino datæ proportionalitatis, ex qua alia generari debet, ſemel ſumpto, & ſecundo bis, & tertio ſemel exhibet priorum terminum proportionalitatis Geometricæ conſtituendæ.

SECVNDVS terminus Geometricæ proportionalitatis conſtituendæ oritur ex ſecundo, & tertio termino datæ proportionalitatis, ex qua alia oriri debet, ſemel ſumpto.

TERTIVM terminum proportionalitatis Geometricæ conſtituendæ offert tertius terminus datæ proportionalitatis, ex qua alia erui debet, ſumptus ſemel.

ATQVE hoc præceptum triplex ſub oculos ponitur hoc appoſito typo, vbi liquido conſtat, quot termini datæ proportionalitatis ſumendi ſint vel ſemel, vel bis, vel omittendi, vt termini alterius proportionalitatis conſtituantur.

TYPVS PROCREATIONIS VNIVS proportionis Geometricæ ex alia Geometrica.

Ordo terminorum datæ proportionalitatis	1 Primus	1 Secundus	1 Tertius
Primus conſtituendæ proportionalitatis ſumatur	1 Semel	1 Bis	1 Semel
Secundus conſtituatur ſi terminus datæ ſumatur	1	1 Semel	1 Semel
Tertius conſtituatur ſi terminus datæ ſumatur	1	1	1 Semel

SEQVEN-

SEQVVNTVR iam exempla generationis omnium proportionum ex æqualitatis proportione. Proponimus autem duas æqualitatis proportiones, vnam in vnitatibus, alteram verò in binarijs. Vbi hoc notatione dignum videtur, ex vnitatibus procreari semper minimos terminos cuiusque proportionalitatis trium terminorum.

GENERATIO MVLTIPLICIVM.

Æqualitatis proportio.	1	1	1	1	1	2	2	2
Dupli ex æqualibus creati.	1	4	2	1	1	8	4	2
Tripli ex duplis.	1	9	3	1	1	18	6	2
Quadrupli ex tripliis.	1	16	4	1	1	32	8	2
Quintupli ex quadruplis.	1	25	5	1	1	50	10	2

GENERATIO SVPERPARTICVLARIVM.

Dupli inuerso ordine.	1	1	2	4	1	2	4	8
Sesquialt. ex duplis inuersis	1	9	6	4	1	18	12	8
Tripli ordine conuerso.	1	1	3	9	1	2	6	18
Sesquiter. ex triplis inuersis.	1	16	12	9	1	32	24	18
Quadrupli ordine conuerso.	1	1	4	16	1	2	8	32
Sesquiquat. ex quad. conuersis.	1	25	20	16	1	50	40	32

GENERATIO SVPERPARTIENTIVM.

Sesquialteri inuersi.	1	4	6	9	1	8	12	18
Superb. ex sesquial. inuersis.	1	25	15	9	1	50	30	18
Sesquiter. ordine inuerso.	1	9	12	16	1	18	24	32
Superr. ex sesquit. inuersis.	1	49	28	16	1	98	56	32
Sesquiquartr. conuerso ordine.	1	16	20	25	1	32	40	50
Superquadr. ex sesquip. cõuersis.	1	81	45	25	1	162	90	60

GENERATIO MVLTIPLICIVM Superparticularium.

Sesquialteri directo ordine.	1	0	6	4	1	18	12	8
Dupli sesquialteri ex sesquialt.	1	25	10	4	1	50	20	8
Tripli sesquial. ex dupl. sesquial.	1	49	14	4	1	98	28	8
Quadrupl. sesquial. ex tripl. sesquial.	1	81	18	4	1	162	36	8

Sesqui-

Seſquitertij ordine recto.	1	16	12	9	1	32	24	18
Dupli ſeſquiter. ex ſeſquit.	1	49	21	9	1	98	42	18
Tripli ſeſquit. ex dup. ſeſquit.	1	100	30	9	1	200	60	18
Quadr. ſeſquit. ex trip. ſeſquit.	1	169	39	9	1	338	78	18
Seſquiquarti ordine recto.	1	25	20	16	1	50	40	32
Dupli ſeſquiquar. ex ſeſquiqua.	1	81	36	16	1	162	72	32
Tripl. ſeſquiq. ex dup. ſeſquiq.	1	169	52	16	1	338	104	32
Quadr. ſeſquiq. ex trip. ſeſquiq.	1	289	68	16	1	578	136	32

GENERATIO MVLTIPLICIVM Superpartientium.

Superbipart. ordine recto.	1	25	15	9	1	50	30	18
Dupli ſuperbip. ex ſuperbip.	1	64	24	9	1	128	48	18
Tripli ſuperbi. ex dup. ſuperbip.	1	121	33	9	1	242	66	18
Quadr. ſuperb. ex trip. ſuperbip.	1	196	42	9	1	392	84	18
Supertripart. directo ordine.	1	49	28	16	1	98	56	32
Dupli ſupertrip. ex ſupertrip.	1	121	44	16	1	242	88	32
Trip. ſupertri. ex dup. ſupertrip.	1	225	60	16	1	450	120	32
Quadr. ſupertri. ex trip. ſupertr.	1	361	76	16	1	722	152	32
Superquadrup. recto ordine.	1	81	45	25	1	162	90	50
Dupli ſuperquad. ex ſuperq.	1	196	70	25	1	392	140	50
Trip. ſuperq. ex dup. ſuperq.	1	361	95	25	1	722	190	50
Quad ſuperq. ex trip. ſuperq.	1	576	120	25	1	1152	240	50

HIC enim perſpicuè cernis, quilibet tres terminos ex tribus proximè antecedentibus procreatos eſſe ex præſcripto tripticis præcepti ſuperioris. Vt verbi gratia poſtremi hi tres, 576. 120. 25. *ita producti ſunt ex tribus antecedentibus* 361. 95 25. *Primus* 576. *concreuatus eſt ex primo* 361. *ſemel, & ex ſecundo* 95. *bis, & ex tertio* 25. *ſemel. Secundus autem* 120. *conflatus eſt ex ſecundo* 95 *ſemel, & ex tertio* 25 *ſemel. Tertius denique* 25. *eſt tertius* 25. *ſemel ſumptus, vt hac appoſita formula demonſtrat. Atque hoc eodem modo omnes alij geniti ſunt, initio facto à terminis æqualibus,* 1. 1. 1. *vel* 2. 2. 2.

361		
95		
95	95	
25	25	25
576	120	25

QVO

QVO PACTO VICISSIM OMNIS proportio inæqualitatis ad æqualitatis proportionem reuocetur.

PROPOSITIS rursus tribus terminis inæqualibus in quæcunque proportione, restituetur vicissim proportio æqualitatis, non minus iucunda, quam facili ratione, per crebram subtractionem terminorum inæqualium, vnius ab altero. Ita autem res expedietur triplici hoc præcepto.

MINIMVS trium terminorum inæqualium datorum statuatur vnum extremum proportionis, ad quam reductio fit.

MINIMO eodem subtracto ex medio, reliquus numerus constituatur in medio loco proportionis, ad quam fit reductio.

SVMMA collecta ex constituto iam extremo semel, & medio termino bis sumpto, subtrahatur ex maximo datorum trium numerorum, & reliquus numerus alterum extremum nouæ proportionis fiat.

HAC ratione quauis proportio trium terminorum inæqualium reuocatur ad aliam proportionem, conferendo semper maiores numeros cum minoribus; & hac rursus eodem modo ad aliam, atque ita deinceps, donec tres termini æquales occurrant. Quod si tres dati termini habeant continuam proportionem duplam, reducentur ij prima statim operatione ad æqualitatem. Id quod exempla, quæ sequuntur, planum facient.

Quintupla proportio.	150	30	6
Quadrupla.	96	24	6
Tripla.	54	18	6
Dupla.	24	12	6
Æqualitatis proportio.	6	6	6

HOC enim exemplum monstrat, quintuplam proportionem reuocatam esse ad quadruplam, quadruplam ad triplam, triplam ad duplam, & denique duplam ad æqualitatem. In hoc altero verò exemplo videsproportionem (supertripartientem quartas reduci ad sesquitertiam, sesquitertiam ad triplam, triplam ad duplam, ac duplam eandem ad æqualitatem.

Proper-

Proportio ſupertripartiens quartas.	49	28	16
Seſquitertia.	9	12	16
Tripla.	9	3	1
Dupla.	4	2	1
Proportio æqualitatis.	1	1	1

VIDES ergo vltimam proportionem inæqualitatis ſemper eſſe duplam, hanc verò ſtatim ad æqualitatem reduci.

EST autem animadverſione dignum, ſi tres numeri dati fuerint in ſua proportione minimi, proportionem æqualitatis, ad quam ſit reductio, conſiſtere in tribus vnitatibus: Si verò non fuerint minimi, proportionem illam æqualitatis conſiſtere in tribus numeris æqualibus, quorum quilibet tot vnitates continet, quotum locum occupant tres termini dati inter omnes tres terminos eiuſdem generis proportionis. Item vides in poſteriori exemplo tres datos numeros 49. 28. 16. minimos eſſe in proportione ſupertripartiente quartas, atque reductionem factam eſſe ad hanc æqualitatem, 1. 1. 1. At in priori exemplo occupant tres numeri dati, 150. 30. 6. ſextum locum inter omnes tres numeros continua proportionis quintupla, propterea que æqualitas inuenta eſt inter hos tres ſequarios, 6. 6. 6. Minimi enim ſiue primi numeri quintupla proportionis ſunt, 25 5. 1. Secundi, 50. 10. 2. Tertij, 75. 15. 3. Quarti, 100. 20. 4. Quinti 125. 25. 5. Sexti autem, 150. 30. 6. vt manifeſtum eſt. Idem experiri licebit in omnibus aliis proportionibus.

SED & hoc obſeruatione non indignum videtur, quamlibet proportionem primo loco ad eam reduci, ex qua ortum habuit. Vt in priori exemplo quintupla reducta eſt ad quadruplam, ex qua orta eſt: quadrupla ad triplam. Hac enim illam genuit, & ſic de cæteris, vſque ad æqualitatem. In exemplo verò poſteriori, Supertripartiens reuocata eſt ad ſeſquitertiam ordine inuerſo. Conſtat autem, numeros ſeſquitertios conuerſo ordine gignere ſupertripartientes, vt ſupra dximus. Item ſeſquitertia hac, conferendo maiores numeros cum minoribus, reducta eſt ad triplam ordine inuerſo, quemadmodum tripla inuerſa generat ſeſquitertiam. Deinde tripla, conferendo maiores item numeros cum minoribus, reducta eſt ad duplam, & hac ad æqualitatem, &c.

NEQVE verò ſilentio prætereundum cenſeo, ex tribus terminis tuinſcunq; proportionalitatis Geometricæ, ſiue ea æqualitatis ſit ſiue inæqualitatis, gigni poſſe quamlibet trium proportionalitatum, quas ſupra explicauimus, ſi ipſi termini variis modis inter ſe coagmententur. Proportionem enim trium terminorum Geometricam procreare aliam Geometricam trium terminorum, ſi primus terminus ſemel, ſecundus bis, & tertius ſemel pro primo termino ſumatur; pro ſecundo

autem secundum, & tertium semel, pro tertio denique ipse tertium semel. perspicuè constat ex iis, quæ paulo ante scripsimus de ortu omnium proportionum inæqualitatis ex æqualitatis proportione.

AT verò vt ex eadem Geometrica proportionalitate gignatur Arithmetica trium terminorum, seruabis hoc præceptum triplex.

SVMMAM ex primo, & secundo termino bis, & tertio semel collectam fac primum terminum Arithmeticæ proportionalitatis.

SVMMAM verò ex primo, secundo, & tertio semel confectam, statue secundo loco.

TERTIVM denique terminum constitue tertium.

Cuius quidem productionis typum hic vides.

TYPVS PROCREATIONIS PROportionis Arithmeticæ ex Geometrica.

Ordo terminorum datæ proportionalitatis.	Primus	Secundus	Tertius
Primus fit ex datis term. ita coaceruatis.	1 Bis,	1 Bis.	1 Semel.
Secundus vero fit.	1 Semel.	1 Semel.	1 Semel.
Tertius denique hoc modo.	1	1	1 Semel.

NIHIL porrò interest, vtrum minimum numerum proportionalitatis Geometricæ facias primum terminum, an verò maximum, vt ex sequentibus exemplis apparebit.

GENERATIO ARITHMETICÆ PROportionalitatis ex Geometrica.

Geomet. prop.	1	1	1.	1	1	1	1	4	1	4	1	4	1	9	1	6	1	4	1	1	4	1	6	1	9
Arith. propor.	1	5	1	3	1	1	1	20	1	12	1	4	1	13	4	1	19	1	4	1	1	29	1	19	1	9

CONSIDERATIONE autem dignissimum est, differentiam constituta proportionalitatis Arithmeticæ semper æqualem esse summæ primorum duorum terminorum Geometricæ proportionalitatis, per quam constituitur. Sic vides in primo exemplo differentiam esse 2. summam ex 1. 1. In secundo, 8. summam scilicet ex 4. 4. In tertio 15. quæ summa conficitur ex 9. 6. In quarto denique, 10. minimum summam ex 4. 6. collectam, atque ita in aliis.

ITAQVE si Arithmetica proportionalitas constituatur ex proportione æqualitatis, erit differentia dupla vnius termini æqualis: vt perspicuum est in prioribus duobus exemplis.

DENI-

DENIQVE Harmonicam proportionalitatem oriri quoque ex Geometrica, hoc alio præcepto triplici planum fiet.

SVMMAM collectam ex primo bis, & secundo ter, & tertio semel sumpto, statue in primo loco proportionalitatis Harmonicæ.

SVMMAM vero confectam ex secundo bis, & tertio semel sumpto, in secundo loco.

SVMMAM deniq; secundi & tertij, in tertio loco.

VBI etiam nihil interest, Verum minimum terminum dicatur primum, vel maximus. Typum porrò huius generationis hic expressum vides.

TYPVS PROCREATIONIS HARmonicæ proportionalitatis ex Geometrica.

Ordo terminorum proportionalitatis.	1 Primus	1 Secundus	1 Tertius
Primus fit ex ter. datis sic in vnum collect.	1 Bis	1 Ter	1 Semel
Secundus vero sic.	1	1 Bis	1 Semel
Tertius denique hoc modo.	1	1 Semel	1 Semel

GENERATIO PROPORTIONALLtatis Harmonicæ ex Geometrica.

Geomet. propor.	1	1	1	1	1	1	1	4	1	4	1	4	1	9	1	6	1	4	1	1	4	1	6	1	9
Harmo. propor.	1	6	1	3	1	2	1	1	2	4	1	1	2	1	8	1	1	4	0	1	6	1	1	0	1	1	3	5	1	2	1	1	5

IAM Verò è contrario reducetur Harmonica proportionalitas quacunque ad æqualitatem hoc pacto.

DETRAHE minimum terminum ex medio, & quod relinquitur, fac medium terminum proportionalitatis constituendæ.

HOC medio inuento sublato ex minimo datæ proportionalitatis Harmonicæ, erit reliquus numerus, vnum extremorum proportionalitatis.

DENIQVE minimus datus semel, & medius inuentus bis in vnam summam collecti, & ex maximo dato subtracti, dabunt duplum alterius extremi. Semissis ergo huius erit ipsum alterum extremum.

HAC ratione revocabitur Harmonica proportionalitas vel ad æqualitatem, vel ad proportionalitatem aliquam Geometricam, quæ ad æqualitatem redigetur, vt supra docuimus. Semper autem Harmonica proportionalitas propositæ oritur ex illa Geometrica, si superius præceptum adhibeatur, ad quam per hoc præceptum revocata est. Exempla hic vides.

Harm. propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15
Geom. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9.

ALIA EXEMPLA.

Harmon. propor.	1	3	4	6	11	60	40	30	11	24	16	12
Geometr. propor.	1	2	1	2	$\frac{1}{2}$	11	5	10	20	11	2	4	8
Æqualitas.	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	11	5	5	5	11	2	2	2

AT proportionalitas Arithmetica revocabitur ad æqualitatem, vel ad Geometricam proportionalitatem, per quam constituitur, hoc modo.

MINIMVM terminum fac vnum extremorum. Subducto deinde eodem minimo ex medio, erit reliquus numerus conflatus ex medio constituendæ proportionalitatis, & altero extremo. Igitur si hic numerus reliquus duplus est minimi, secto eo bifariam, erit dimidiata pars tam medius terminus, quam alterum extremorum; reductaque erit data proportionalitas Arithmetica ad æqualitatem, ex qua ortum traxit.

3	9	15
3	3	3

VT detur Arithmetica proportionalitas, 3. 9. 15. si in Geometrica constituenda facias vnum extremum 3. ex minimo proportionalitatis Arithmetica data, & hunc eundem numerum demas ex dato medio 9 supererunt 6. qui numerus duplus est minimi 3. Redigitur ergo data proportionalitas ad æqualitatem hanc 3. 3. 3. ex qua oritur secundum superius præceptum.

SI verò reliquus ille numerus non est duplus minimi, secandus erit in duas partes, quæ cum minimo constituant proportionalitatem Geometricam continuam. Ad hanc enim illa reuocata erit.

38	19	4
9	6	4

VT si data sit Arithmetica proportionalitas, 34. 19. 4. Facto in Geometrica extremo vno, 4. minimo data Arithmetica proportionalitatis, eoque subducto ex medio 19.

dio 19. relinquitur numerus 15. qui non eſt duplus minimi. Quare ſecto eo in 6. & 9. reducetur illa Arithmetica ad hanc Geometricam 9.6. 4. ex qua rurſus ortum ducet, ex præſcripto ſuperioris præcepti.

SED quoniam reliquus ille numerus non poteſt ſemper diuidi in tales duas partes, qua cum minimo conſtituant continuam proportionalitatem Geometricam, (quo pacto autem ea diuiſio facienda ſit, & quando fieri in numeris nequeat, docebimus ad propoſ. 17. lib. 6.) niſi numeri ſurdi, irrationaleſue adſciſcantur; reuocabimus quamcunque proportionalitatem Arithmeticam ſtatim ad æqualitatem, ex qua, ſi termini æquales cum differentia propoſita coacernentur, ortum duxit; hoc pacto.

MINIMVS terminus datus fiat vnus ex duobus extremis. Differentia autem proportionalitatis ſubducta ex medio, reliquus numerus fiat medius: & eadem differentia duplicata, atque ex maximo termino ſublata, fiat reliquus numerus alter extremorum.

VT ſi data ſit Arithmetica proportionalitas, 20. 27. 34. cuius differentia eſt 7. ſi 20 fiat ſynum extremorum, & differentia 7. dematur ex 27. & eadem duplicata ex 34. reliqui erunt alij duo terminj æquales, 20. 20. Ex hac æqualitate, cognita differentia 7. quam termini Arithmetica proportionalitatis habere debent, conficietur ipſa proportionalitas Arithmetica, hac ratione.

20	27	34
20	20	20

VNVS terminorum æqualium fiat minus extremum. Huic addatur differentia data, vt fiat ſecundus terminus. Eidem deniq; minori extremo adiiciatur data differentia duplicata, vt efficiatur maius extremum.

VT in dato exemplo, minus extremum erit 30. cui ſi differentia 7. addatur, fiet medius terminus 27. Et ſi eadem differentia 7. duplicata adiiciatur eidem minimo extremo 20. conflabitur maius extremum 34. Eodem pacto data hac æqualitate 15. 15. 15. ſi ex ea conſtitui debeat proportionalitas Arithmetica, cuius differentia ſit 20. addatur hac differentia ad 15. ſynum terminorum æqualium, vt habeas ſecundum terminum 35. Quòd ſi eadem differentia duplicata, hoc eſt, numerus 40. ad eundem terminum æqualem adiiciatur, fiet tertius terminus, 55. Primus autem eſt 15. ſynus terminorum æqualium, vt hic vides.

Differentia 20.

15	15	15
15	35	55

ATQVE pauca hac prælibasse hoc loco sufficiat ex infinitis, quæ de immensa proportionum, proportionalitatumque vi ac natura, innumerabilibusque proprietatibus dici possent. Plura enim & quidem forte periucunda in plenior nostra Arithmetica, Deo annuente, explicabimus. Nunc ad Euclidem interpretandum reuertamur.

V.

RATIONEM habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se se mutuo superare.

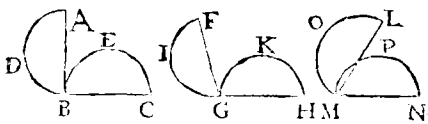
QVONIAM Euclides in tertia definitione habitudinem duarum magnitudinum eiusdem generis, vocauerat rationem, quam nos cum aliis auctoribus proportionem dicimus; explicat nunc definitione hac 5. quidnam requirant duæ quantitates eiusdem generis, vt proportionem dicantur habere. Neque enim omnes lineæ, neque etiam omnes anguli plani, quamuis sint eiusdem generis quantitatis, proportionem habent inter se, vt mox dicemus. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quarum vtrauis multiplicata ita augetur, vt alteram tandem superet, adeo vt si alterutra quantumuis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiusdem quadrati, dicuntur habere proportionem; (licet irrationalem, qua nullo possit numero exprimi) quia latus multiplicatum per 2. hoc est, bis sumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter constituant triangulum Isosceles, 2 erunt duo latera quadrati

2 20 pri mi.

diametro eiusdem maiora. Ita quoque circumferentia circuli, & diameter eiusdem, proportionem habent, (quamuis nondum sit nobis explorata, at q3 cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc est, sumpta quater, circumferentiam superat, cum omnis circumferentia circuli, vt ab Archimede demonstratur, ter duntaxat comprehendat diametrum eiusdem, & particulam adhuc paulo minorem septima parte diametri. Eodem modo multæ curuilineæ cum rectilineis proportionem habebunt, quia & æqualitas & inæqualitas inter ea reperitur, cum & Hippocrates Chius Lunulam quandam, qua figura est contentus duobus arcubus circulorum instar Lunæ nouæ, quando falcata esse cernitur; & Archimedes parabolam quadrarit; hoc est, ille cuidam lunulæ, hic verò parabolæ quadratum inuenerit æquale. Hinc enim fit, vt & quadratum detur maius ea lunula, ac parabola; Atque è contrario lunula & parabola maior eo quadrato. Huc accedit, quod Archimedes in lib. de Spiralibus demonstrauit, lineam aliquam rectam esse circumferentiæ circuli æqualem, & aliam duplam, triplam aliam, &c. ac proinde & quadratum aliquod circulo esse æquale, vt in libello de dimensione circuli demonstrauit. De æqualitate verò lineæ rectæ, & circularis; quadrati, & circuli, ad calcem

lib. 6.

lib. 6. agemus. Adde, à Proclo quoque inter angulos rectilineos, ac curvilineos æqualitatem demonstrari. Ostendit enim lib. 3. in primum Euclidis, ad 12. Axioma, quod ipsi est 4. Postulatum, tam recto angulo, quam obtuso, & acuto, exhiberi posse angulum curvilineum æqualem. Sit enim angulus rectus A B C, contentus rectis æqualibus A B, B C, circa quas semicirculi describantur A D B, B E C. Quoniam igitur anguli semicirculorum A B D, C B E, sunt æquales; addito communi angulo mixto A B E, fiet angulus totus curvilineus D B E, toti angulo recto A B C, æqualis. Similiter ostendes, angulum curvilineum I G K, æqualem esse obtuso F G H; nec non



curvilineum O M P, acuto L M N, dummodo hic ab angulis semicirculorum L M O, N M P, auferas communem angulum mixtum, qui continetur rectâ linea L M, & curva M P. Ex quibus constat, alterutrum angulorum multiplicatum posse alterum excedere; quare proportionem inter se habebunt. At vero linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomodocunque multiplicata, infinitam nequit superare. Sic neque linea cum superficie, neque superficies cum corpore, eandem ob causam, ullam habebit proportionem. Denique non censebitur habere proportionem angulus contactus cum angulo rectilineo, quia angulus contactus, quantumvis multiplicatus, minor adhuc semper existit quovis angulo rectilineo, etiam minimo, ut propos. 16 lib. 3. demonstravimus. Itaque ut apertius Euclides explicaret, quænam magnitudines eiusdem generis proportionem dicantur habere, hoc est, quas magnitudines eiusdem generis in definitione 3. intellexerit, voluit hac definitione eas intelligi, quæ hanc conditionem habeant, ut alterutra multiplicata alteram possit superare, alias vero non, etiamsi in eodem quantitatis genere videantur comprehendi, quales sunt linea finita, & infinita, angulus rectilineus, & angulus contactus, &c. Hanc ob causam in plerisque demonstrationibus proportionum, iubet toties multiplicare unam propositarum magnitudinum, quæ proportionem ponuntur habere inter se, donec alteram excedat. Quod etiam facit propos. 1. lib 10. & in plerisque aliis propositionibus. Taceant igitur, qui putant, per magnitudines eiusdem generis in definitione Proportionis, quam Euclides Rationem dixit, intelligendas esse, quæ sub eodem genere proximo, sive infimo continentur. Hac enim ratione non esset proportio inter angulos rectilineos, & curvilineos, aut inter figuras rectilineas, curvilineasque, cum non sub eodem contineantur genere proximo: quod falsum esse diximus. Sileant quoque, qui existimant, intelligendas esse magnitudines

in eadem genere quantitatis, siue in eodem genere subalterno, & Logici loquuntur; ita & factum sit, & dua quantitates dicantur habere proportionem, si sint vel linea, vel superficies, vel corpora, vel anguli, vel numeri. Itaenim proportio esset inter angulum rectilineum, & angulum contactus, cum in genere anguli contineantur: Item proportionem haberent inter se, linea finita, & linea infinita, cum in genere linea existant: quorum vtrumque falsum esse, liquido ex hac definitione constat.

PERSPICVVM est ex his, quam ineptè, & quàm falsò, hanc definitionem exposuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, seu docere, quanam magnitudines proportionem dicantur habere, sed qualem proportionem dua quacunq; proposita quantitates habeant. Itaque, inquit, vult Euclides, si magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & amba multiplicentur aqualiter, hoc est, ambarum sumantur quacunque aque multiplicia, nempe C, tam multiplex ipsius A, quam multiplex D, ipsius B; habere magnitudines A, & B, eam inter se proportionem, quam earum aque multiplicia C, & D. Non aduertit autem, hoc, quod ait, non esse definitionem, sed Theorema decimumquintum huius 5. lib. vbi demonstratur ab Euclide, Partes cum pariter multiplicibus in eadem proportione esse, hoc est, A, B, magnitudines eandem habere proportionem, quam earũ aque multiplicia C, & D. Non ergo ita est intelligenda hac definitio, præsertim cum tam ignota sit hac proportio inter C, & D, quam illa inter A, & B; quandoquidem semper eadem est. Quare non rectè nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B. Est ergo sensus huius definitionis ille, quem exposuimus, vt liquido constat ex verbis Euclidis.



VI.

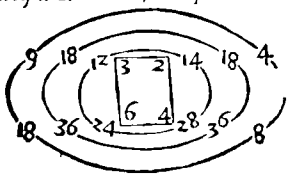
IN eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, à secundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, vtrumque ab vtroque vel vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, vel vna exeedunt; si ea sumantur, quæ inter se respondent.

EXPLICAT hoc loco Euclides, quasnam conditiones requirant, apud Geometras, magnitudines, vt eandem dicantur habere proportionem. Quod vt exequatur, cogitur confugere ad earum aque multiplicia, vt complectatur omnes proportiones magnitudinum, tum rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B, secunda; C, tertia; & D, quarta, sumanturq; prima, & tertia

tertia aquè multiplicia quacunque; E, quidem ipſius A; & F, ipſius C: Item ſumantur ſecunda, & quarta alia quacunque aquè multiplicia; G, quidem ipſius B; & H, ipſius D, ſi- ne hac duo poſteriora ſint ita multiplicia ſecunda, & quarta, ſicut priora duo multiplicia ſunt prima, & tertia, ſine nom. Quòd ſi iam inter ſe conferantur ſumpta aquè multiplicia eo, quæ inter ſe reſpondent, vt multiplex prima, & multiplex ſecunda inter ſe, hoc eſt, E, & G; Item multiplex tertia, & multiplex quarta inter ſe, hoc eſt, F, & H; deprehenſumq; fuerit perpetuò, ea inter ſe habere, vt ſi E, multiplex prima magnitudinis A, minus fuerit, quàm G, multiplex ſecunda magnitudinis B; etiam F, multiplex tertia magnitudinis C, minus ſit quàm H, multiplex quarta magnitudinis D: Aut ſi E, aquale fuerit ipſi G; etiam F, aquale ſit ipſi H: Aut denique ſi E, maius fuerit quàm G; etiam F, maius ſit quàm H: (quod eſt vtrumque ab vtroque vel vnà deficere, vel vnà aqualia eſſe, vel vnà excedere) ita vt in nullo genere multiplicium contrarium poſſit reperiri, id eſt, vt nunquam E, minus ſit quàm G, quin & F, minus ſit quàm H; & vt nunquam E, aquale ſit ipſi G, quin & F, ipſi H, ſit aquale. Denique vt nunquam E, maius ſit quàm G, quin & F, maius ſit quàm H. Si, quam, deprehenſum fuerit, aquè multiplicia quanis accepta, perpetuò ſeſe ita habere, vt dictum eſt; dicetur eadem eſſe proportio prima magnitudinis A, ad ſecundam magnitudinem B, quæ eſt proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quod ſi deprehenderetur aliquando, etiam in ſolo vno genere multiplicium, multiplex D, deficere à multiplici G, non autem multiplex E, deficere à multiplici H; Aut E, aquale eſſe ipſi G, at F, non aquale ipſi H; Aut denique E, excedere ipſum G, at F, non excedere ipſum H, quamuis in infinitis alijs multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates propoſitæ eandem habere proportionem, ſed diuerſas, vt ex defin. 8. fiet perſpicuum.

ITAQVE vt demonſtratione aliqua, per hanc 6. definitionem, concludantur quatuor quantitates eandem habere proportionem, oſtendendum erit, (quod quidem diligenter ab Euclide & hoc 5. lib. & in alijs ſeruatur) quacunque aquè multiplicia prima, & tertia collata cum quibuſcunque aquè multiplicibus ſecunda, & quarta, habere ſemper conditionem prædictam defectus, aqualitatis, aut exceſſus; ita vt nunquam contrarium eius inueniri poſſit. Similiter ſi quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedatur quoq; neceſſe eſt, qualibet aquè multiplicia prima, & tertia collata cum quibuslibet aquè multiplicibus ſecunda, & quarta, habere eandem defectum, aqualitatis, aut exceſſus conditionem. Debent enim definitio & definitum reciprocari. Vt autem perſpiciatur, quonam pacto, propoſitis quatuor magnitudinibus eandem proportionem

habentibus: quædam aquè multiplicia prima, & tertia magnitudinis, à quibusdam aquè multiplicibus secunda & quarta magnitudinis, vtrumque ab vtroque vnà deficiunt; alia verò vnà æqualia sint; alia denique vnà excedant, si ea sumantur, quæ inter se respondent; placet vnum exemplum proferre in numeris. Sint igitur quatuor numeri 3. 2. 6. 4. sumanturq; primi & tertij æquè multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item secundi & quarti sumantur alij æquè multiplices, vt septupli 14. & 28. Vides igitur tum 12. multiplicem primi deficere à 14. multiplice secundi, quam 24. multiplicem tertij à 28. multiplice quarti. Rursus primi, & tertij sumantur alij æquè multiplices, nimirùm sextupli, 18. & 36. Item secundi, & quarti sumantur alij æquè multiplices, vt nonupli 18. & 36. Vides ergo, tum 18. multiplicem primi æqualem esse 18. multiplici secundi, quam 36. multiplicem tertij, 36.

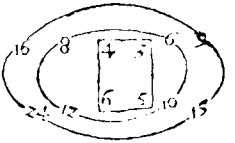


multiplici quarti. Postremò primi, & tertij sumantur alij æquè multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item secundi, & quarti alij æquè multiplices, vt dupli 4. & 8. Vides igitur tum 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem secundi, quam 18. multiplicem tertij, superare 8. multiplicem quarti. Si igitur in omnibus æquè multiplicibus, in quacunque sumantur multiplicatione, semper deprehendatur, vnum trium horum verum esse, dicetur eadem esse proportio 3. ad 2. quæ est 6 ad 4. alias non.

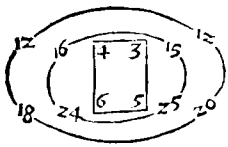
CAMPANVS verò atque **Orontius, longè aliter definitionem hanc exponunt. Dicunt enim Euclidem velle, tum demum quatuor magnitudines eandem habere proportionem, cùm prima, & tertia æquè multiplicia, à secunda & quarta æquè multiplicibus, vtrumque ab vtroque, vel vnà deficiunt proportionaliter, hoc est, in eadem proportione, vel vnà æqualia sunt, vel vnà excedunt proportionaliter, si ea sumantur, quæ inter se respondent. Clarius, vt ait Campanus, quando earum æquè multiplicia proportionalia sunt, id est, cùm eandem proportionem habet multiplex primæ ad multiplicem secundæ, quam multiplex tertiæ ad multiplex quartæ. Sed quis non videt, si ita intelligatur definitio, Euclidem eadem per idem definire? Quod sanè absurdum est. Præterea si Euclides vult, eas magnitudines in eadem esse proportione, quarum æquè multiplicia (si sumantur, & inter se conferantur eo ordine, quo dictum est) in eadem proportione existunt; cur, obsecro, in 4. Theoremate huius libri demonstrat, si fuerint quatuor magnitudines in eadem proportione, earum æquè multiplicia eo ordine, quem diximus, sumpta, eandem quoque habere proportionem? Immò cùm illud Theorema per hanc definitionem ostendatur perspicuum est, id non per idem demonstrari, quod ridiculum*

lum est, veluti eo loco admonebimus. Accedit etiam, si ita interpretemur definitionem, plurima Theoremata quinti huius lib non posse demonstrari, & propris locis monebimus. Intelligenda est igitur definitio, & exponemus; nimirum propositis quatuor magnitudinibus, si quotiescunque multiplex prima deficit a multiplici secunda, vel aquale est, vel excedit; necessario etiam multiplex tertiæ tunc deficiat a multiplici quartæ, vel æquale sit, vel excedat, quicunque sit ille defectus, excessusve, non considerando, an proportionalis sit, an non; ita & nunquam contingat, multiplicem primæ à multiplici secundæ deficere, multiplicem verò tertiæ non deficere à multiplici quartæ: aut multiplicem primæ æqualem esse multiplici secundæ, multiplicem verò tertiæ multiplici quartæ non æqualem: aut denique multiplicem primæ maiorem esse multiplice secundæ, at multiplicem tertiæ multiplicis quartæ non maiorem. Propositis, inquam, quatuor magnitudinibus, quarum aque multiplicia sumpta, & dictum est, perpetuò eam conditionem in defectu, æqualitate, & excessu servant, dicuntur quatuor illæ magnitudines eandem habere proportionem; quicquid sit de earum aque multiplicium proportione, quæ nunc non consideratur: sed quarto postea Theoremate demonstrabitur, eum defectum, excessumve esse proportionalem.

PORRO Campanus conatur ostendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & excessu. Nam si de quocunque intelligeretur, essent, ait, quatuor hi numeri 4. 3. 6. 5. in eadem proportione. Si enim primi & tertij, utpote 4. & 6. sumantur æque multiplices numeri, & dupli, 8 & 12. Item secundi & quarti nempe 3. & 5. æque multiplices, dupli quoque, 6. & 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplicem secundi, quam 12. multiplex tertij 10. multiplicem quarti. Idemque cernitur, si primi, & tertij sumantur quadrupli 16. & 24. secundi verò, ac quarti capiantur tripli 9. & 15. Si igitur sufficit, & æque multiplicia accepta sua excedant sese quomodocunque, & non requiritur, & proportionaliter se mutuo superent, erit eadem proportio 4. ad 3. quæ est 6. ad 5. quod falsum est, cum proportio 4. ad 3. sit sesquitertia, proportio verò 6. ad 5. sesquiquinta. Intelligendus igitur est defectus, aut excessus æque multiplicium, proportionalis: ita enim fiet, non esse eandem proportionem 4. ad 3. quæ est 6. ad 5. quod eorum æque multiplices non sese excedant proportionaliter, & constat. Verumtamen dicendum est, Campanum mirum in modum hallucinatum fuisse. Quamvis enim numeri æque multiplices ab eo prolati sese sua excedant, tamen quam plurimi alij reperientur, quorum multiplex primi exce-



excedet quidem multiplicem secundi, vel **æqualis erit**; *at* **multiplex** *tertij deficiet à multiplice quarti. Si enim* **in eius exemplo, primus & tertij** *sumantur quadruplices 16 & 24. At* **secundi & quarti, quintuplices** *sumantur,* 15. *&* 25. **excedet** *quidem* 16. **multiplex primi,** 15. **multiplicem** *secundi; At* 24. **multiplex tertij non excedet** 25. *multiplicem quarti;* **, sed deficiet.** *Quod si primi* **, & tertij** *sumantur tripli* 12. *&* 18. **At secundi, & quarti** *sumantur* **quadrupli,** 12. *&* **20. erit** 12. **multiplex** *primi* **æqualis** 12. *multiplici secundi;* **At verò** 18. **multiplex** *tertij,* **æqualis non erit** 20. *multiplici quarti,* **sed ab eo deficiet. Cùm igitur non deprehendantur quælibet æque multiplicia dictorum numerorum sic se habere, vt si multiplex primi excedit multiplex secundi, multiplex tertij excedat quoque necessariò multiplex quarti; quamuis id in nonnullis æquè multiplicibus ita esse contingat: non dicentur, iuxta hanc definitionem* 6. *dicti numeri eandem habere proportionem, vt adhuc clarius ex* 8. *definitione constabit.**

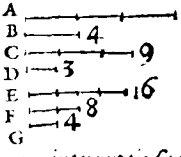


CÆTERVM definitio ista complectitur etiam tres magnitudines eandem habentes proportionem, si modò secunda bis ponatur, vt quatuor habeantur. Exempli causa; Eadem dicetur proportio 9 *ad* 6. *quæ* 6. *ad* 4. *quoniam æquè multiplicia* **quæcunque sumpta ad** 9. *&* 6. *vel vna deficiunt ab æquè multiplicibus sumptis ad* **6. & 4.** *vel æqualia sunt, vel vna excedunt, &c.*

VII.

EANDEM autem habentes **rationem magnitudines**, Proportionales vocentur.

VT si magnitudinum A, B, C, D, eadem **sit proportio** *A,* **ad** *B,* **quæ** *C, ad D; dicentur ea magnitudines* **proportionales. Eadem ratione, si eadem sit proportio** *E, ad F, quæ F, ad G,* **dicentur magnitudines** *E, F, G, proportionales.* **Sunt autem quædam** *magnitudines* **proportionales continuè,** *inter quas reperitur* **proportionalitas continua,** *quales sunt magnitudines* **E, F, G: Quædam** *verò proportionales sunt nõ* **continuè,** *sed discretè, cuiusmodi sunt magnitudines A, B; CD. In his enim interruptio fit proportionum; in illis verò nequaquam, vt dictũ est in* 4. *definitione.*



VIII.

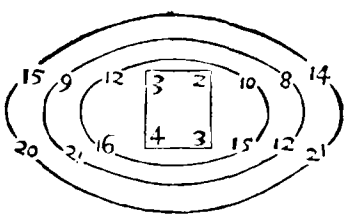
CVM verò æquè multiplicium **multiplex** primæ magnitudinis excesserit multiplicem **secundæ; At multiplex**

tiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ; tunc prima ad secundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

DECLARAT hic Euclides, quaminam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, vt maiorem dicatus habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, dicens. Si sumpta sint æquè multiplicia primæ & tertiæ, item alia æquè multiplicia secundæ & quartæ; deprehensumq; fuerit aliquando, (licet non semper) multiplex primæ maius esse multiplice secundæ, multiplex autem tertiæ non esse maius multiplice quartæ, sed vel minus, vel æquale; dicetur maior esse proportio primæ magnitudinis ad secundam, quam tertiæ ad quartam; Vt perspicuum est in apposito exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertiæ C, sumpta sunt tripliciæ E, & F; secundæ verò B, & quartæ D, quadrupliciæ G, & H. Et quoniam E, multiplex primæ maius quidem est quam H, multiplex secundæ; At F, multiplex tertiæ maius non est quam H, multiplex quartæ, immò minus; dicetur maior esse proportio A, primæ magnitudinis, ad B, secundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.



NON est autem necesse, vt quatuor magnitudinum, prima ad secundam dicatur maiorem habere proportionem, quàm tertia ad quartam, æque multiplicia secundum quamuis multiplicationem sic se habere, vt multiplex quidem primæ excedat multiplex secundæ, at multiplex tertiæ non excedat multiplex quartæ; sed satis est, vt secundum aliquam multiplicationem ita se habeant. Potest namque interdum fieri, vt tam multiplex primæ maius sit multiplice secundæ, quam multiplex tertiæ multiplice quartæ: Item vt & multiplex primæ minus sit multiplice secundæ, & multiplex tertiæ multiplice quartæ: Tamen quia hoc non contingit in omni multiplicatione, sed aliquando multiplex primæ superat quidem multiplex secundæ, at multiplex tertiæ vel minus est, vel æquale multiplici quartæ: propterea maiorem dicetur habere proportionem prima magnitudo ad secundam, quam tertia ad quartam, non autem eandem, vt perspicuum est in apposito exemplo



ITAQVE vt quatuor magnitudines dicantur proportionales, necesse est, vt æque multiplicia earum, iuxta quascunq; multiplicationes acceptæ,

vel

vel vnà deficiant, vel vnà æqualia sint, vel vnà excedant, vt in 6. definit. fuit expositum: Vt autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, satis est, vt secundam aliquam multiplicationem, multiplex prima excedat multiplex secunda, multiplex verò tertia non superet multiplex quarta, quamuis iuxta innumeras alias multiplicationes, æque multiplicia prima, ac tertia vnà excedant æque multiplicia secunda, & quarta.

QVOD si quando è contrario multiplex prima deficiat à multiplici secunda, non autem multiplex tertia à multiplici quarta, dicetur prima magnitudo ad secundam minorem habere proportionem, quam tertia ad quartam: quamuis secundum plurimas alias multiplicationes, æque multiplicia prima & tertia vnà deficiant ab æque multiplicibus secunda, & quarta. Vt in eisdem numeris propositis exempli, minor dicetur proportio 2. ad 3. quàm 3. ad 4. &c.

CVR EVCLIDES IN DEFIN. VI. ET VII. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æquè multiplicia definierit.

QVONIAM mirum alicui videri possit, cur Euclides tum demum quatuor magnitudines eandem dixerit habere proportionem, hoc est, ita esse primam ad secundam, vt est tertia ad quartam, cùm æque multiplicia prima ac tertia iuxta quamcunque multiplicationem, & æque multiplicia secunda ac quarta iuxta quamcunque etiam multiplicationem accepta ita se habent, vt quotiescunque multiplex prima maius est quàm multiplex secunda, multiplex quoque tertia maius sit quàm multiplex quarta; quotiescunque verò multiplex prima æquale est multiplici secundæ, multiplex etiam tertia æquale sit multiplici quartæ; quotiescunque denique multiplex prima minus est quàm multiplex secunda, multiplex etiam tertia minus sit quàm multiplex quarta: Item quare tum demum quatuor magnitudinum prima ad secundam maiorem esse proportionem voluerit, quàm tertia ad quartam, cùm aliqua æque multiplicia prima ac tertia, & alia æque multiplicia secunda ac quarta accepta ita se habent, vt multiplex prima sit maius quàm multiplex secunda, at multiplex tertia maius non sit, quàm multiplex quarta, sed vel æquale, vel minus. Quoniam, inquam, mirum alicui videri hoc possit, quòd ex illo excessu, æqualitate, & defectu æque multiplicium eo ordine sumptorum non statim appareat similitudo proportionum, dissimilitudove: aperiendum videtur hoc loco, quare ita magnitudines tum proportionales, tum non proportionales definire voluerit Euclides.

AD hanc difficultatem respondetur, Euclidem eas magnitudines voluisse appellare proportionales, quarum æque multiplicia ita se habent,

habent, & dictum est, quia non habuit quid notius, per quod explicare potuisset magnitudines tam incommensurabiles, quàm commensurabiles eandem proportionem, vel non eandem habentes: neq; verò opus esse, vt ratio afferatur, cur res aliqua hoc aut illo modo definiatur, sed satis esse, vt nunquam res definita asseratur alicui conuenire, nisi prius, definitionem traditam eidem conuenire, demonstretur. Id quod in aliis etiam definitionibus cernitur. Nam quemadmodum Euclides defin. 10. lib. 1. angulum rectum appellauit eum, qui fit à linea super aliam lineam ad angulos æquales cadente, ita vt nunquam ei concedendum sit, angulum quempiam esse rectum, nisi prius ostenderit, eum ab eiusmodi linea effici. Item quemadmodum definitione vltima lib. 3. definiuit similia circulorum segmenta esse, in quibus anguli existentes sunt æquales, ita vt tunc solum ea concedendum sit, segmenta esse similia, cum probauerit angulos in eis existentes esse æquales: sic etiam defin. 6. & 8. huius lib. vocauit quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales, quarum æque multiplicia eam conditionem habent, quam explicauit, ita vt nunquam ei credendum sit, cùm quatuor magnitudines appellabit eandem habere proportionem, vel non eandem, nisi prius demonstrauerit, conditionem eam illis magnitudinibus conuenire. Sed quanquam responsio hæc vera sit, ac propria, tamen quia ex illa definitione non videtur colligi posse, vere magnitudines, quarum æque multiplicia illam conditionem habent, esse proportionales, vel non proportionales; etiamsi eas solum Euclides velit appellare proportionales, vel non proportionales: explicabimus paulo accuratius, Euclidem recte eo modo definiuisse magnitudines proportionales, atq; adeò sine vlla dubitatione concedi posse à quouis, illas, quibus defin. 6. conuenit, vere eandem habere proportionem; illas verò, quibus definitio 8. conuenit, non eandem proportionem habere.

QVOD vt planius fiat, reuocandum ad memoriam est, duplicem esse proportionem; Rationalem, quæ inter quantitates incommensurabiles existit, atque adeò omnis in numeris reperiri potest. Et irrationalem, quæ inter quantitates incommensurabiles existit, & nullo modo in numeris potest reperiri. Si igitur Euclides de Rationalibus duntaxat proportionibus disputationem instituisset, potuisset quatuor magnitudines proportionales definire eo modo, quo lib. 7. defin. 20. proportionales quatuor numeros definiuit, nimirum: Magnitudines proportionales sunt, cum prima secunda, & tertia quarta, æque multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe (vt nos ad eam defin. addidimus) cum prima secundam, & tertia quartam, æqualiter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes. Non proportionales verò magnitudines ita definire potuisset: Magnitudines non proportionales sunt, hoc est prima ad secundam habet maiorem proportionem, quam tertia ad quartam, cum prima secunda

magis multiplex est, vel maior pars, maiores ve partes, quàm tertia quarta: Vel certè cum prima secundam sæpius continet, quàm tertia quartam, sine eadem pars, aut partes vtrobique superfint, sive non; Vel cum prima secundâ toties continet, quoties tertia quartam, sed prima maiorem insuper partem, maiores ve partes secunda includit, quàm tertia quarta. Potuisset, inquam, Euclides ita definire magnitudines proportionales, ac non proportionales, si de solis rationalibus proportionibus ageret: quia omnes proportiones magnitudinum exhiberi possent in numeris, ac proinde definiri, vt numerorum proportiones eadem, vel diuersa, vt diximus. Nam proportio numerorum (vt ex Campano, aliisque scriptoribus, defin. 24. lib. 7. adiunximus) est habitudo quadam vnius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partesve: Vel certè secundum quod illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes. Quæ omnia perspicua sunt tum ex definitionibus quinque specierum proportionis rationalis tam maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, de quibus suprà egimus; tum ex ijs, quæ in defin. 20. & 24. lib. 7. scripsimus.

QVONIAM verò Euclides, non solùm proportiones Rationales, sed Irrationales etiam complecti voluit, non potuit eo modo quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales definire: propterea quòd in proportione irrationali maior magnitudo neque multiplex esse potest minoris, neque eam semel aut aliquoties, & insuper aliquam eius partem aut partes continere: Minor item maioris neque pars esse potest, neque partes, quippe cùm magnitudines irrationalem habentes proportionem incommensurabiles sint, ita vt nullam partem aliquotam communem, quamuis minimam, possint habere. Quocirca coactus est se se conuertere ad proportiones magnitudinum rationales, hoc est, ad proportiones numerorum, cùm omnis proportio rationalis, sive magnitudinum commensurabilium sit, vt proportio numeri ad numerum, vt lib. 10 propos. 5. demonstratur: Coactus, inquam, est inuestigare aliquid, quod certum sit conuenire quibuslibet quatuor numeris sive magnitudinibus commensurabilibus, eandem habentibus proportionem, vel non eandem: adeò vt si idem illud conuenire demonstretur quatuor magnitudinibus, etiam incommensurabilibus iure optimo magnitudines illæ quatuor proportionales etiam dici possint, vel non proportionales: quandoquidem eandem habent proprietatem, quam quilibet quatuor numeri proportionales, vel non proportionales, immò quam qualibet quatuor magnitudines commensurabiles eandem habentes proportionem, vel non eandem, necessariò habere demonstratur. Neque enim aliunde cognoscere, vel explicare aliter possumus magnitudines incommensurabiles proportionales esse, aut non proportionales, nisi per aliquid, quod certum sit conuenire, vt diximus, numeris quibuscunque, vel magni-

magnitudinibus commensurabilibus, eandem, vel non eandem habentibus proportionem, in quibus eadem est similitudo, dissimilitudove proportionum cernitur. Quemadmodum quæ quasdam inæqualium segmentis angulo æquales existentes, sint circulorum incommensurabilium quatuor rectis, hoc est, quando partes ipsis rectis non eadem, vel eandem partes circulorum, & ad ipsum centrum, & circumferentias similia appellentur, ac præterea ejusmodi segmenta alia, in quibus sunt anguli æquales, circumferentiæ similiter quatuor rectis, dicantur quo ad proportionem eandem, quando ut quatuor rectis commensurabilibus partes, & ipsa segmenta similia sunt, hoc est, eadem parte circumferentiæ, & ea basis segmenti, quæ basi anguli in eo existentes æquales respondeat, ea ipsis circumferentiæ, quæ ipsis rectis commensurabilibus, vel incommensurabilibus existant. Neque enim aliter ullo modo habere possunt segmenta similia esse aut dissimilia, nisi eadem in eis, sint aut æqualitatem, vel majoritatem, aut minoritatem segmentorum rectis incommensurabilibus subtendentes. Quam ob rem jam non similia fuisse hæc segmenta in dubium revocat, quæ quasdam has circulorum segmenta, quæ circulis incommensurabilibus, & segmentis, quæ circulis sunt communi, sensibili ratione non recte facere, quæ similitudinem proportionum magnitudinibus incommensurabilibus in dubium revocat, quæ tale conficit, non commune, quod omnibus magnitudinibus proportionem eandem rationalem habentibus conuenire certum sit, licet hæc proportionum similitudo non tam evidens sit in magnitudinibus incommensurabilibus.

ITAQUE quoniam propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi & tertij æque multiplicibus tantæ quamvis multiplicationem, item secundi & quarti æque multiplicibus secundum quamvis earum multiplicationem, semper servatur est, & nos demonstrabimus, si multiplex primi metiatur multiplicem secundi, multiplicem tertij metiri eam quæ ipsi secundi, multiplici quarti; Et si ille æqualis est, hanc quoque ipsi æqualem, & similiter innotuerit: Et contra, quia propositis quatuor numeris, sumptisque æquè multiplicibus primi & tertij tantæ quamvis multiplicationem æquè multiplicibus secundi & quarti tantam eandem multiplicationem, si multiplex primi conficiat numerum, quam multiplex secundi, multiplex tertij metiri quæ ipsi quarti multiplex quæ: Et si illo existente æquali, hunc quoque æqualem fuisse existente minore, hic similiter minorem existere proportionales esse, quatuor numeros ostendit proportionales esse. Rursus quia propositis quatuor numeris, primum ad secundum majorem proportionem habere, quam tertium ad

quartum, ſumptiſque æquè multiplicibus primi ac tertij, item æquè multiplicibus ſecundi ac quarti, neceſſariò interdum accidit, & multiplex primi maior ſit multiplice ſecundi, multiplex verò tertij non ſit maior multiplice quarti: Et contrà, quia quatuor propoſitis numeris, ſumptiſque æquè multiplicibus primi ac tertij, item æquè multiplicibus ſecundi ac quarti, ſi accidat nonnunquam, multiplicem primi maiorem eſſe multiplice ſecundi, at multiplicem tertij non maiorem multiplice quarti, ſine vlla dubitatione verum eſt, maiorem eſſe proportionem primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum. Quoniam, inquam, ita ſe res ſemper habet in numeris, atque adeò & in magnitudinibus commenſurabilibus, ita vt contrarium nunquam inueniatur, non immeritò dicentur quæcunque quatuor magnitudines, etiam incommenſurabiles, eandem habere proportionem, cum ſumptis æquè multiplicibus prima ac tertia iuxta quamuis multiplicationem, item æquè multiplicibus ſecunda ac quarta ſecundum quamuis etiam multiplicationem, perpetuò deprehenditur, multiplicem tertiæ maiorem eſſe multiplice quartæ, quotieſcunque multiplex primæ maior eſt multiplice ſecundæ; multiplicem verò tertiæ æqualem eſſe multiplici quartæ, quando multiplex primæ æqualis eſt multiplici ſecundæ; multiplicem denique tertiæ minorem eſſe multiplice quartæ, hoc ipſo, quòd multiplex primæ minor eſt multiplice ſecundæ. Eadem ratione iure optimo dicentur quatuor quæcunq; magnitudines tam commenſurabiles, quàm incommenſurabiles, non habere eandem proportionem, ſed maiorem eſſe proportionem primæ ad ſecundam, quàm tertiæ ad quartam, cum ſumptis æquè multiplicibus, vt dictum eſt, interdum contingit, multiplicem primæ eſſe maiorem multiplice ſecundæ, multiplicem verò tertiæ non maiorem multiplice quartæ: quandoquidem prior conditio in omnibus numeris proportionalibus, poſterior autem in non proportionalibus perpetuò reperitur, vt iamiam demonſtrabimus; nullumque aliud indicium habere poſſumus, quo magnitudines incommenſurabiles cognoſcantur eſſe proportionales, vel non proportionales: præſertim cùm magnitudines incommenſurabiles alijs magnitudinibus, qua hoc modo proportionales eſſe demonſtrantur, ſæpenumero alia via oſtendantur eandem habere proportionem, quam numerus ad numerum, vt nullo modo dubitandum ſit, quin omnes magnitudines, etiam incommenſurabiles, quarum æquè multiplices ita ſe habent, vt in 6. defin. dictum eſt, ſint proportionales, &c. Niſi enim hoc verum eſſet, ſequeretur haud dubiè ex illa proportionalitate aliquando abſurdū aliquod manifeſtum: quod tamen hactenus non accidit, ſed potiùs ea, quæ ex magnitudinibus in eo ſenſu proportionalibus demonſtrantur, veriſſima eſſe plerunque alia via, vt diximus, oſtenduntur; vt poſtea etiam demonſtrabimus. Quæ cùm ita ſint, liquidò conſtare exiſtimo, cur Euclides in duabus illis defin. adhibuerit (& quidem recte) magnitudinum

dinum propoſitarum æquè multiplices magnitudines. Sed iam id, quod polliciti ſumus, Geometricè demonſtremus, adſcitis nonnullis propoſitionibus lib. 7. quæ nullo modo ex 6. & 8. defin. aut ex demonſtrationibus huius lib. 5. pendent, & commodiſſimè ante lib. 5. poſſint demonſtrari; atque adeò hic aſſumi, & iam demonſtrata. Hoc autem efficiemus quatuor propoſitionibus, quæ ſequuntur.

I.

PROPOSITIS quatuor numeris proportionalibus, ſumptiſque primi ac tertij æquè multiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item ſecundi & quarti æque multiplicibus iuxta quamcunque etiam multiplicationem; ſi multiplex primi maior ſit multiplice ſecundi, erit quoque multiplex tertij maior multiplice quarti; & ſi multiplex primi æqualis ſit multiplici ſecundi, erit & multiplex tertij æqualis multiplici quarti; ſi denique multiplex primi ſit multiplice ſecundi minor, erit & multiplex tertij multiplice quarti minor.

HABEAT numerus primus A, ad ſecundum B, eandem proportionem, quam tertius C, ad quartum D; ſumanturque primi A, & tertij C, æquè multiplices E, F: Item ſecundi B, & quarti D, æquè multiplices G, H, qualiſcunque hæc multiplicatio ſit. Dico ſi E, multiplex primi A, maior eſt quàm G, multiplex ſecundi B, maiorem quoque eſſe F, multiplicem tertij C, quàm H, multiplicem quarti D. Et ſi E, æqualis ſit ipſi G, æqualem quoque eſſe F, ipſi H. Si denique E, minor ſit quàm G, minorem quoque eſſe F, quàm H. Quoniam enim eſt, & A, ad B, ita C, ad D; a erit permutando etiam, & A, ad C, ita B, ad D: b Vt autem A, ad C, ita eſt E, ad F; quòd idem numerus ipſos A, C, multiplicans produxerit ipſos E, F, quippe cùm E, & F, ipſorum A, & C, ſumpta ſint æquè multiplices. Et eadē de cauſa, & B, ad D, ita eſt G, ad H.

E, 9.	A, 3.	C, 6.	F, 18.
G, 4.	B, 2.	D, 4.	H, 8.
E, 18.	A, 3.	C, 6.	F, 36.
G, 18.	B, 12.	D, 4.	H, 36.
E, 12	A, 3	C, 6	F, 24
G, 14	B, 2	D, 4.	H, 28

a 13. ſeptimi.
b 17. ſeptimi.

Igitur ex lemmate propoſ. 14. lib. 7. erit quoq; & E, ad F, ita G, ad H, c *Et permutādo, & E, ad G, ita F, ad H. Quocirca ſi E, maior eſt quàm G, erit quoq; F, maior quàm H, & in primo exemplo. Si verò F, æqualis eſt ipſi*

c 13 ſeptimi.

est ipsi G, erit quoque F ipsi H æqualis, & in secundo exemplo: Si denique E minor est quam G erit quoq; F, minor quàm H, & in tertio exemplo. Quod erat demonstrandum.

II.

PROPOSITIS quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum, si sumantur æquè multiplices primi ac tertij, item æquè multiplices secundi ac quarti, fieri potest, vt multiplex primi maior sit, quam multiplex secundi, multiplex autem tertij non maior, quàm multiplex quarti.

HABEAT primus numerus A, ad secundum B, maiorem proportionem, quam tertius C, ad quartum D. Dico fieri posse, & sumptis æque multiplicibus primi A, & tertij C, item æquè multiplicibus secundi B, & quarti D, multiplex ipsius A, primi sit maior quàm multiplex ipsius B, secundi, at multiplex ipsius C, tertij maior non sit, quàm multiplex ipsius D, quarti. Multiplicantes enim se mutuò numeri B, D, faciant E. Et quoniã D, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur genitum ex C, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque D, eundem genitum ex C, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur D genitum ex C, in E, per F; fiet q; propterea ex D, in F, numerus, quem D, per F, metitur, ex pronũ. 9. lib. 7. hoc est, numerus idem, qui fit ex C, in E. Quia igitur idem numerus gignitur ex D, primo in F, quartum, qui ex C, secundo fit in E, tertium, a *erit & D, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad F, quartum: Et conuertendo, & C, ad D, ita F, ad E.*

K, 56	H, 7.		O, 21.	L, 28.			
F, 8	G, 1.		A, 3	C, 4			
	E, 6.		B, 2	D, 3.			
M, 54	N, 6.		P, 20.	L, 30.			
K, 160	H, 40.		O, 60	L, 80.			
F, 8.	G, 2.		A, 3.	C, 4.			
	E, 80.		B, 8.	D, 10.			
M, 160.	N, 80.		P, 24.	L, 32.			

a 19. septimi.

RVRSVS quia F, metitur E, ex pronunc. 7 lib. 7. & E, metitur procreatum ex A, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoq; B, eundem procreatum ex A, in F, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur B, procreatum ex A in F, per F G, fiet q; adeuro ex B, in F G, numerus, quem B, metitur per F G, ex pronunc. 9. lib. 7. hoc est, numerus idem, qui fit ex A, in E. Quia igitur idem numerus ex B, primo in F G, quartum, & b 19. septimi. *ex A, secundo in E, tertium gignitur,* b *erit & B, primus ad A, secundum, ita E, tertius ad F G, quartum: Et conuertendo, & A, ad B, ita*

ita F G, ad E. Quoniam ergo est, ut F G, ad E, ita A, ad B, Est autem proportio A, ad B, posita maior, quam C, ad D: erit quoque proportio F G, ad E, maior quam C, ad D: Ostensum autem est, esse ut C, ad D, ita F, ad E. Igitur proportio F G, ad E, maior quoque erit proportione F, ad E, ac proinde numerus F G, maior erit numero F: quæ omnia ex iis, quæ in defin. 20. lib. 7. scripsimus, perspicue conijci possunt. Superet igitur F G, ipsum F, numero G.

SIT MANIFESTUM ipsorum F, G, C, æquè multiplices K, H, secundum eam legem, ut H, sit quidem maior quam F, at I, non minor quam D, eritq; ex scholio propos. 5. lib. 7. totius K H, ita multiplex totius F G, ut est multiplex K, unius F, sic H, ipsius C. Sumantur rursus ipsorum D, E, æquè multiplices L, M N, ea lege, ut L, sit multiplex ipsius D, proximè maior quam I, hoc est, tales æquè multiplices, ut subtracto numero D, ex L, reliquus numerus maior non sit, quam I, sed vel æqualis, ut in secundo exemplo, vel minor, ut in primo exemplo contingit. Ut quoniam ostensum est ita esse D, ad C, ut E, ad F, & ita est C, ad I, ut F, ad K, ex constructione, quod I, K, sumpti sint ipsorum C, F, æque multiplices; erit quoque ex æquo, ut D, ad I, ita E, ad K.

K, 56	H, 7		D, 21	I, 28
F, 8	G, 1		A, 3	C, 4
	F, 6		B, 2	D, 3
M, 54	N, 6		P, 20	L, 50
N, 160	H, 440		O, 60	I, 20
I, 8	G, 22		A, 3	C, 1
	F, 80		B, 2	D, 10
M, 160	N, 8		P, 24	L, 59

a 14. septim.

PRÆTEREA quoniam ostensum est esse D, ad C, ut I, ad F; erit permutando quoque D, ad E, ut C, ad F. Ut autem D, ad E, ita est L, ad M N: quod idem numerus ipsos D, E, multiplicans fecerit L, M N, quippe cum L, M N, sumpti sint ipsorum D, E, æquè multiplices: Et eadem de causa, ut C, ad F, ita est I, ad K. Igitur ex lemmate propos. 14. lib. 7. erit quoque, ut L, ad M N, ita I, ad K, & permutando, ut L, ad I, ita M N, ad K.

QUIA ergo est, ut totius L, ad I, ita totius M N, ad K: Et ut D, ex L, ablatus ad eundem I, ita E, ex M N, ablatus ad eundem K; erit quoque ex 5. coroll. 6. scholij propos. 22. lib. 7. ut reliquus ex L, ad I, ita reliquus ex M N, ad K. Vel autem reliquus ex L, non maior, quam I, sed vel minor, ut in primo exemplo, vel æqualis, ut in posteriori; propterea quod reliquus ex L, cum D, facit ipsum L, multiplicem ipsius D, proximè maximum ipso I, ex constructione. Igitur & reliquus ex M N, maior non erit quam K, atque idcirco si ex M N, detrahatur ipsi E, æqualis, erit reliquus M, vel minor ipso K, ut in primo exemplo, vel æqualis, ut in posteriori. Cum ergo H, multiplex

G, sit maior quàm E, vel N, ex constructione; erit totus K H, toto M N maior.

DENIQVE sumpto O, ita multiplici ipsius A, vt K H, multiplex est ipsius F G, vel I, ipsius C: item P, ita multiplici ipsius B, vt M N, multiplex est ipsius E, vel L, ipsius D: quoniam ostensum est, ita esse F G, ad E, vt A, ad B, sumptiq; sunt ipsorum F G, & A, primi ac tertij, aquè multiplices K H, & O; item ipsorum E, & B, secundi ac quarti aquè multiplices M N, & P, sequitur ex antecedente propos. si K H, maior est quàm M N, ipsum quoq; O, maiorem esse quàm P. Cùm ergo K H, ostensus sit maior quàm M N, erit quoq; O, maior quàm P. Quocirca cùm O, I, sint aquè multiplices ipsorum A, C, primi ac tertij; & P, L, aquè multiplices ipsorum B, D, secundi ac quarti, demonstratumq; sit, maiorem esse O, quàm P, sit autem I, minor quàm L, ex constructione; fieri potest, vt existente maiore proportione primi A, ad secundum B, quàm tertij C, ad D, quartum, sumptisque aquè multiplicibus, vt dictum est, multiplex primi, nempe rum O, maior sit quàm P, multiplex secundi, multiplex autem tertij, nimirum I, maior non sit quàm L, multiplex quarti. Quod demonstrandum erat.

QVOD si minor sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum, sumanturq; aquè multiplices primi ac tertij, item aquè multiplices secundi ac quarti, fieri quoque potest, vt nonnunquam multiplex primi sit minor multiplice secundi, multiplex verò tertij non sit multiplice quarti minor.

IN eodem enim exemplo, minor est proportio C, primi ad D, secundum, quàm A, tertij ad B, quartum, demonstratumq; est, I, multiplicem primi C, minorem esse, quàm L, multiplicem secundi D, at O, multiplicè tertij A, maiorem esse quàm P, multiplicem quarti B.

III.

PROPOSITIS quatuor numeris, sumptisque æque multiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æque multiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem, si multiplice primi existente maiore, quàm multiplex secundi, multiplex tertij maior quoque sit necessariò, quàm multiplex quarti: & illo existente æquali, hic quoque semper sit æqualis; illo denique existente minore, hic quoq; perpetuò minor sit: erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, sumanturq; primi A, & tertij C, aquè multiplices qualescunq; E, F. Itè secundi B, & quarti D, aquè mul-

multiplices G, H, qualifcunq; etiã hæc ſit multiplicatio. Dico ſi E, F, multiplices primæ tertiæ eſſent per ſint vel maiores, quam G, H, multiplices ſecundæ & quartæ vel æquales, vel minores, itaq; E, primum ad F, ſecundum, vt G, tertium ad H, quartum ſecundum foret maior proportio A ad B, vel minor, quam C ad D. ſi enim poſſet, ſeluti in antecedente propoſitione monſtratum eſt, vt E, multiplex primi eſſet aliquando maior, aut minor, quàm G, multiplex ſecundi, at F, multiplex tertij non maior, aut minor quàm H, multiplex quarti. Quod eſt contra hypotheſin. Eſt ergo A, ad B, vt C, ad D. Quod erat oſtendendum.

E, 9	A, 3	C, 6	F, 18.
G, 4	B, 2	D, 4	H, 8.
E, 18	A, 3	C, 6	F, 36
G, 12	B, 2	D, 4	H, 24.
E, 12	A, 3	C, 4	F, 24.
G, 14	B, 2	D, 4	H, 28.

IV.

PROPOSITIS quatuor numeris, ſumptiſque primi ac tertij æque multiplicibus, item ſecundi & quarti æque multiplicibus; ſi quando contingat, multiplicem primi maiorem eſſe multiplice ſecundi, multiplicem verò tertij non maiorem multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, ſumptiſque ipſorum A, & C, primi ac tertij æque multiplicibus E, & F, item ipſorum B, & D, ſecundi ac quarti æquè multiplicibus G, & H, ſit E, multiplex primi A, maior quam G, multiplex ſecundi B, at F, multiplex tertij C, non maior quam H, multiplex quarti D. Dico maiorem eſſe proportionem primi A, ad B, ſecundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Quoniam enim maior eſt E, quàm G, at F, non maior quam H, erit maior proportio E, ad G, quam F, ad H, cum illa ſit proportio maioris inæqualitatis: hæc verò vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Igitur ex theor. 10. propoſ. 22. lib. 7. erit quoque permutando maior proportio E ad F, quam G ad H. Eſt autem, vt a 17. ſ. *E, ad F, ita A, ad C, quod idem numerus ipſos A, C, totidemq; ipſorum primi creauerit I, & I, quippe cum E, F, æquè multiplices ſint ipſorum A, C. Eademq; de cauſa eſt vt G, ad H, ita B, ad D. Maior igitur erit quoque proportio A, ad C, quàm B, ad D: Et permutando, ex theor. 10. propoſ. 22. lib. 7. maior erit etiam proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod oſtendendum erat.*

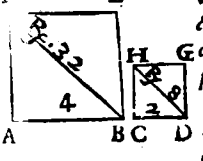
E, 21	A, 3	C, 4	F, 28.
G, 20	B, 2	D, 3	H, 30.

QVOD si multiplex primi sit minor multiplice secundi, sed multiplex tertij non sit minor multiplice quarti; minor erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

EADEM enim omnino demonstratio est, si pro maiore proportione dicatur vbique minor proportio, nulla alia re mutata. Vt in hoc exemplo apparet, vbi quatuor numeri sunt A, B, C, D, & E, multiplex primi A, minor est quàm G, multiplex secundi F, sed F, multiplex tertij C, minor non est, quàm H, multiplex quarti &c.

E	28.	A, 4.	C, 3.	F, 21.
G	30.	B, 3.	D, 2.	H, 20.

SED demonstremus iam, in magnitudinibus, quæ alijs incommensurabiles sunt, & quæ ex defin. 6. proportionales sunt, eam plerunque reperiri proportionem, quæ in numeris exhiberi possit: adeo vt fere proportionales sint magnitudines, quibus definitio 6. conuenit, quandoquidem ex magnitudinibus proportionalibus in eo sensu sumptis verum consequitur, & nihil absurdi inde inferri potest. Hoc enim paulò antè demonstraturos nos etiam recepimus. Sit ergo recta A B, verbi gratia, recta C D, dupla, & super ipsas rectas describantur quadrata A B E F, C D G H; cum diametris B F, D H. Et quia ex scholio propos. 47. lib. 1. tam quadratum diametri B F, quadrati lateris A B, hoc est, quadrati A B E F, quàm quadratum diametri D H, quadrati lateris C D, hoc est, quadrati C D G H, duplum est; si ponatur latus A B, 4. & latus C D, 2. erit quadratum A B E F, 16. & quadratum diametri B F, eius duplum, 32. ac proinde diameter ipsa B F, erit radix quadrata numeri 32. quæ numeris exprimi nequit, cùm ea maior sit quàm 5. minor autem quàm 6. nullus q; numerus inter 5. & 6. medius, hoc est, compositus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, in se ductus possit numerum integrum 32. producere, vt ex Lemmate sequenti perspicuum fiet. Quadratum autem C D G H, erit 4. & quadratum diametri D H, eius duplum, 8. ac proinde diameter ipsa D H, erit radix quadrata numeri 8. quæ numeris etiam exprimi nequit, cùm ea maior sit quàm 2. minor autem, quàm 3 &c. ita vt proportio tam A B, ad B F, quàm C D, ad D H, sit irrationalis, diameterq; propterea B F, lateri A B, & diameter D H, lateri C D, incommensurabilis. Vides igitur, id quod Euclides propos. vltima lib. 10. demonstrauit ex ijs, quæ lib. 6. de magnitudinibus proportionalibus per defin. 6. huius 5. lib. demonstrata sunt, Diametrum nimirum quadrati lateri eiusdem quadrati esse incommensurabilem, esse re ipsa verissimum, quippe cùm idem nos alia via sine proportionibus hoc loco ostenderimus.



RVRSVS quoniam diametri B F, D H, diuidunt angulos rectos qua-

quadratorum bifariam, & in scholio propos. 34. lib. 1. & in coroll. 2. propos. 4. lib. 2. ostendimus, erunt anguli A B F, A F B, C D H, C H D, semirecti, ideoque inter se æquales. Cum igitur & rectianguli A, C, sint æquales, & quiangula erunt triangula A B F, C D H. Quare a erit, 24. sep. & A B, ad B F, ita C D, ad D H; Et permutando, & A B, ad C D, ita B F, ad D H. Est autem posita recta A B, rectæ C D, dupla. Igitur & B F, ipsius D H, dupla erit. Itaque cum ex defin. 6. huius lib. ea deducta simus, & credamus diametrum B F, diametri D H, ipsam, quamvis & utraque diameter ad suum latus habeat proportionem irrationalem, (Nam propos. 4. lib. 6. ex qua ostendimus, ita esse A B, ad B F, & C D, ad D H, pendet ex propos. 2. & hæc ex 1. eiusdem lib. 6. Prima autem propos. lib. 6. sua fidem accipit ex defin. 6. huius. 5. lib. Item permutata proportio, qua hic etiam usi sumus, sine eadem defin. 6. demonstrari non potest in magnitudinibus incommensurabilibus, & ex propos. 16. lib. 5. constat.) videamus, an aliunde cognoscere possimus, diametrum B F, diametri D H, circa duplam esse, & ex defin. 6. concluſum est, hoc ipſo, quod latus A B, lateris C D, duplum portetur, etiamsi proportio tam lateris A B, ad diametrum B F, quam lateris C D, ad diametrum D H, irrationalis sit. Hoc autem sine proportionibus facile ita cognoscimus. Quantum latus A B, lateris C D, duplum est, erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum A E, quadrati C G, quadruplum. Posito ergo quadrato A F, 4. erit quadratum C G, 1. Et quia tam quadratum diametri B F, quadrati A E, quam quadratum diametri D H, quadrati C G, ex scholio propos. 47. lib. 1. duplum est; erit quadratum diametri B F, 8. & quadratum diametri D H, 2. atque ideo illud huius quadruplum erit. Quare ex scholio propos. 4. lib. 2. recta B F, rectæ D H, dupla erit. Videsne igitur, si procedamus per ea, quæ ex defin. 6. huius lib. de magnitudinibus proportionalibus demonstrata sunt, nos pervenisse ad conclusionem veram, nimirum diametros duorum quadratorum habere proportionem inter se duplam, si latus unius sit lateris alterius duplum: & dubium non sit, quin magnitudines circa proportionales sint, quarum æque multiplices eam conditionem habent, quam definitio 6 præscribit. Porro ex regulis quoque numerorum irrationalium, quæ in Algebra traduntur, constat diametrum B F, hoc est, R. 32. habere duplam proportionem ad diametrum D H, id est, ad R. 8. Nam sive R. 32. dividatur per R. 8. Quotiens fit R. 4. hoc est, numerus 2. qui proportionem diametri B F, ad diametrum D H. denominat, sive R. 8. multiplicetur per 2 producatur R. 32. Atq; hac modo omnia, quæ de magnitudinum incommensurabilium proportionibus demonstrantur ex defin. 6. huius lib. explicari poterunt per regulas numerorum irrationalium. Quæres argumento unum sit, magnitudines, quibus definitio 6. huius lib. conveniat, circa esse proportionales; quando quidem calculus numerorum irrationalium cum demonstrationibus, quæ ex eo

desinentes, perpetuo consentire comperitur, cuius quæ in Algebra præcepta versata sunt, notissimum est.

LEMMA.

QVOD autem nullus numerus compositus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, quamuis vnitas in infinitum secetur, gignere possit integrum numerum 32. hoc modo facile demonstrabimus. Sit enim numerus 5. cum quacunq; fractione $\frac{3}{7}$. hoc modo $5\frac{3}{7}$. reuocetur, vt in Arithmetica tradidimus, ad hanc vnicam fractionem $\frac{38}{7}$. Certum autem est, denominatorem 7. non metiri numeratorem 38. Aliquin diuisis 38. per 7. fieret Quotiens numerus integer sine fractione, quod est contra hypothesin. Multiplicetur iam fractio $\frac{38}{7}$. in se, (quod fiet, vt in Arithmetica diximus, demonstrabimusq; ad finem lib. 9. si tam numerator 38. in se, quam denominator 7. in se ducatur) gignatur fractio $\frac{1444}{49}$. ita vt numerator huius 1444. sit quadratus numeratoris illius 38. & denominator 49. quadratus denominatoris 7. Et quia latus 7. non metitur latus 38. vt
ostendimus, a non metietur quoque quadratus 49. quadratum
1444. Quare diuiso quadrato 1444. per quadratum 49. Quotiens non erit numerus integer, sed ei adhærebit fractio aliqua. Alias quadratus 49. metietur quadratum 1444. cuius contrarium demonstrauimus. Atque eadem ratione demonstrabitur, quemcunque numerum integrum cum fractione qualibet in seipsum ductum gignere numerum integrum cum fractione. Quòd si fractio, cuius numerator denominatore minor sit, in se ducatur, producetur semper fractio, cuius numerator etiam minor est denominatore. Nam cum numerator fractionis productæ sit numerus quadratus numeratoris datæ fractionis, denominator autem quadratus numeri denominatoris, sit autem datæ fractionis numerator minor denominatore, erit quoque illius quadratus numerus quadrato huius minor. Ita ex $\frac{3}{5}$. in se gignitur fractio numeri $\frac{9}{25}$. cuius numerator denominatore minor est. Ita, quatenus fractio in se multiplicata gignit numerum non integrum, nisi quando numerator datæ fractionis à denominatore numeratur, sed ea fractio numerus integer potius est: qualis est fractio $\frac{32}{5}$. quæ 4. integras vnitates constituit.

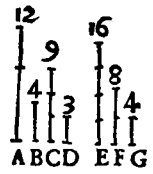
a 10. 9. Elem.

PRO-

IX.

PROPORTIO autem in tribus terminis pauciſſimis conſiſtit.

QVONIAM omnis Analogia ſeu proportionalitas, quam interpres, & dictum eſt, proportionem nominat, ſimilitudo eſt duarum, vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedentem terminum, & conſequentem, neceſſe eſt, in omni proportionalitate reperiri, & minimum, duos terminos antecedentes, ac duos conſequentes. Quare ſi proportionalitas fuerit non continua, requirentur ſaltem quatuor termini, ſiue magnitudines; At vero ſi fuerit continua, erunt cum minimum tres termini; quoniam terminus medius bis ſumitur, cum ſit conſequens terminus vnius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic eſt minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuſcunque ſolum proportio, non autem proportionalitas reperitur.



X.

CVM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: Et ſemper deinceps, vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

VELVTI ſi ſint magnitudines A, B, C, D, E, continuè proportionales, ita vt ea ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D; & D, ad E: proportio A, magnitudinis prima ad C, magnitudinem tertiam, dicitur duplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones reponuntur, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B, & B, ad C, & propterea proportio A, ad C, intercipiat quodammodo proportionem A, ad B, duplicatam, id eſt, bis ordine poſitam. At proportio A, magnitudinis prima ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quia inter A, & D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B; B, ad C, & C, ad D, atque idcirco proportio A, ad D, includit quodam-



quod eo modo proportionem A, ad B, triplicatam, id eſt, ter ordine poſitam: Sic quoque proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B: propterea quod quatuor proportiones interſciuntur inter A, & E, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B, &c.

QVOD ſi è contrario ea ſit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B, & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D. At vero proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; ſic quoque proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

INTERPRETES nonnulli colligunt ex hac definitione, ſi proponantur plures quantitates continuè proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, eſſe duplam proportionis primæ quantitatis ad ſecundam, eo quod Euclides illam vocet duplicatam proportionem huius. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartam, eſſe triplam proportionis, quam habet prima quantitas ad ſecundam, &c. Quod tamen nulla eſt ratione concedendum. Neque enim Euclides hoc ſignificare voluit, ſed docuit tantummodo, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, appellari duplicatam eius proportionis, quam habet prima quantitas ad ſecundam; propterea quod inter primam quantitatem, ac tertiam reperitur quodammodo proportio primæ quantitatis ad ſecundam duplicata; quippe cum inter primam quantitatem, ac tertiam interponantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad ſecundam, & ſic de cæteris, vt diximus. Non autem intelligit, illam duplam eſſe huius, ne Theorema proponeret, quod merito quiſpiam concedere recuſaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continuè proportionalibus 25. 5. 1. proportionem 25. ad 1. duplam eſſe proportionis 25. ad 5. cum potius eam quis dixerit eſſe quincuplam? At verò, illam dici huius duplicatam ad ſenſum expoſitum, nemo inficiabitur, eo quod bis ſit poſita, & continuè, proportio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cum illa minor ſit, hæc autem maior? Nam per propoſ. 8. huius lib. quantitas 1. ad quantitatem 5. maiorem proportionem habet, quam ad quantitatem 25. propterea quod 25. maior eſt, quam 5. Dicetur tamen illa huius duplicata, ob cauſam iam explicatam, licet ſit eius quinta pars. Quare etſi proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ, tamen decuplæ proportio eſt eiuſdem duplæ. Quemadmodum etiam proportio octuplæ duplæ eſt proportionis quadruplæ, cum tamen quadruplæ duplicata, ſit ſedecuplæ, vt hic patet 16. 4. 1. Denique in tribus magnitudinibus æqualibus, vel in tribus æqualibus numeris, 4. 4. 4. atque adeo continuè proportionalibus, quæ fieri poteſt, vt proportio primi ad tertium dupla ſit proportionis primi ad ſecundum, cum ſit omnino eadem? duplicata tamen dicetur illa huius, propterea quod hac ordine bis poſita eſt continuè inter primum numerum & tertium.

SED

SED auctores, qui proportionem primæ quantitatis ad tertiam volunt esse compositam proportionis, quam primæ quantitas habet ad secundam, inter quos auctores est etiam Federicus Commandinus hoc loco: quod addo minus cum antiqui Mathematici, ut præstantissimi ferme omnes dicunt in hac usus, nequam terminos incognitos, primum quæ debeat esse maiorem, tametsi ex sententia hic intelligenda non sit præcipua proportione contenta maioris inæqualitatis. Quæ autem non sit, vt statim, neque proportionem 9. ad 25. proportionis 3. ad 5. compositam ex proportionem 4. ad 5. proportionis 4. ad 4. duplam esse. Verum hæc expositio non tam vera non est, sed Euclidi prorsus est contraria: quippe qui idcirco ait plures quemlibet, triplicatam proportionem existere proportionis quam habet primus ad secundum. Locus clarissimus est, vt alios omittam, in quo 12. lib. 12. demonstrat, similes conos, & cylindros in triplicata esse proportione diametrorum, quæ in basibus. Nam si referatur ad maiorem, necessario in secunda parte propositionis, assumunt Euclidem demonstratum esse prop. 12. pyramides similes, etiamsi minor ad maiorem existat, in triplicata esse homologorum laterum ratione, vt ea in locum assumunt. Hinc redit, propositiones illas, in quibus figura aliqua demonstratur habere rationem laterum homologorum duplicatam, vel triplicatam earumdem esse 9. & 20. lib. 6. & 11 12. 18. 19 lib. 12. & 33. lib. 11. & 2. 3. 15. 12. non fore vniuersales, si solum de proportione maioris inæqualitatis essent intelligenda. Explicanda ergo est hæc definitio, vt nos exponimus.

ITAQVE hoc loco Euclides explicat tantum, quidnam intelligendum sit nomine proportionis duplicatæ, triplicatæ, &c. vt demonstrationes sequentium librorum percipiantur, rebusque possint materialibus accommodari. Non autem determinat, quænam proportio sit alterius dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. Exempli gratia, quoniam ex propos. decima 20. lib. 6. euadit proportionem quadrati ad quadratum duplicatam esse proportionis, quam habet latus prioris quadrati ad latus posterioris, colligendum erit si continuetur proportio laterum in tribus terminis, proportionem quadrati ad quadratum, esse eam, quæ est primi termini ad tertium; ita vt si prioris quadrati latus fuerit trium palmorum, posterioris autem vnius palmi: prius quadratum ad posterius, habeat proportionem quam 9. ad 1. ita vt illud nomen hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ est nonupla, dicitur iuxta hanc definitionem duplicata proportionis triplæ, qualis est 9. ad 3. vel 3. ad 1. vt in his numeris 9. 3. 1. perspicuum est. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo esse maiorem proportione laterum ad latus, sic etiam quadratum posterius ad prius proportionem habebit, quam 3. ad 9. ita vt illud sit huius nonæ pars propterea quod proportio 3. ad 9. dicatur duplicata proportionis 1. ad 3. vt in eisdem his numeris 1. 3. 9. manifestum est.

Simili

Simili ratione, quoniam lib. 12. propoſ. vltima, demonſtratur ſpharas inter ſe rationem habere ſuarum diametrorum triplicatam, colligendum erit, ſpharam illam, cuius diameter continet tres palmos, ad ſpharam, cuius diameter eſt vnius palmi tantum, proportionem habere quam 27. ad 1. Hæc enim triplicata dicitur tripla proportionis, vt hic apparet, 27. 9. 3. 1. &c. Sic etiam propoſitis duabus ſpharis, quarum diametri proportionem habent decuplam, habebunt ſpharæ ipſæ proportionem millecuplam, cum hæc ſit decupla triplicata, vt hic patet, 1000. 100. 10. 1. Quis autem dixerit vnquam, millecuplam proportionem eſſe triplo tantummodo maiorem proportione decupla, & non potius tregecuplam decupla eſſe triplam?

CÆTERVM propoſita quacunque proportione rationali, ſi eius denominator in ſe ipſum multiplicetur, exurget denominator proportionis, qua duplicata dicitur propoſita proportionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatore ſcilicet proportionis quadruplæ, in ſe, producuntur 16. ideo proportio ſedecupla dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt hic cernitur 16. 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E contrario, cum ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. denominatore videlicet proportionis ſubquadruplæ, in ſe, producatur $\frac{1}{16}$. dicetur proportio ſubſedecupla, duplicata proportionis ſubquadruplæ. Quod ſi denominator rurſus in illud productum multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicatæ; vt in priori exemplo, ex multiplicatione 4. in 16. producuntur 64. denominator proportionis, quæ quadruplæ dicitur triplicata, vt hic videre eſt, 64. 16. 4. 1. Item hic 192. 48. 12. 4. Rurſus ſi in poſterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inuenietur denominator proportionis quadruplicatæ, atque ita de cæteris. Itaque proportionis duplicatæ denominator producitur ex denominatore propoſitæ proportionis bis poſito, atque ita multiplicato. Vt numerus denominans proportionem duplicatam proportionis triplæ, producitur ex 3. denominatore triplæ proportionis bis poſito, in hunc modum 3. 3. ac ſic multiplicato: Nam ter tria faciunt 9. denominatorem noncuplæ proportionis, quæ duplicata dicitur triplæ, vt hic cerni poteſt 9. 3. 1. Item hic 18. 6. 1. At verò denominator proportionis triplicatæ gignitur ex propoſitæ proportionis denominatore ter poſito, & ſic multiplicato. Vt in dato exemplo, denominator triplicatæ proportionis, nempe 27. procreatur ex 3. ter poſito ſic 3. 3. 3. atque ita multiplicato, dicendo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicatæ exoritur ex denominatore quater poſito: Quintuplicata ex eodem quinquies poſito, atque ita multiplicato, &c. Itaque duplicatio, triplicatio, quadruplicatio, &c. proportionis cuiuslibet, de qua in hac defin. agitur, nihil aliud eſt, quam multiplicatio denominatorum proportionum intermediarum inter ſe. Ex hac enim multiplicatione procreatur denominator proportionis, quam extremi termini inter ſe habent, qua propterea illius proportionis, cuius denominator multiplicatus eſt, duplicata dicetur, vel triplicata,

plicata, sel quadruplicata, &c. prout videlicet denominator bis positus est, sel ter, sel quater, &c. atque sic multiplicatus fuit, ut exposuimus. Verbi gratia, propositis hisce quatuor numeris continuè proportionalibus in proportione quadrupla, primus 192. ad quartum 3. proportionem habet denominatam a 64. quæ proportio dicitur triplicata proportionis quadruplæ: quia denominator 64. proportionis extremorum 1, 2 & 3 producitur ex denominatore 4 proportionis quadruplæ ter posito ob tres proportiones quadruplas inter extremos interstitas, atque ita multiplicato, dicendo, quater quatuor sunt 16 & quater 16 sunt 64. Sic etiam inuersis iisdem numeris, ut sint continuè proportionales in proportione subquadrupla, primus 3. ad quartum 192. proportionem habet denominatam a $\frac{1}{64}$. quæ proportio dicitur triplicata proportionis subquadruplæ: quia denominator $\frac{1}{64}$. proportionis primi numeri 3. ad quartum 192 producitur ex denominatore $\frac{1}{4}$. proportionis subquadruplæ ter positio, & sic multiplicato, ob tres proportiones subquadruplas inter extremos interpositas. Nam ex $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{16}$ & ex $\frac{1}{16}$ in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{64}$. Nihil obstat ergo, quo minus proportio 3. ad 192. a $\frac{1}{64}$. denominata dici possit triplicata proportionis subquadruplæ 3. ad 12. quamquam illa minor sit, quam hæc: quia videlicet denominator $\frac{1}{64}$. productus est ex denominatore $\frac{1}{4}$. ter posito, & sic multiplicato, ut diximus. Non tamen proportio 3. ad 192. a $\frac{1}{64}$. denominata dici potest triplo maior proportione subquadruplæ 3. ad 12. quia denominator $\frac{1}{4}$. triplicatus non facit denominatorem $\frac{1}{12}$. sed $\frac{1}{4}$. atque ita proportio subsesquitertia triplicata proportionis subquadruplæ: sicut etiam non proportio 64. denominata, sed proportio duodecupla, est proportionis quadruplæ triplicatæ, propterea quod denominator 4. triplicatus non producit denominatorem 64. sed 12. Porro continuatis quotcunque numeris proportionalibus, sive maiores cum minoribus, sive minores cum maioribus conferantur, denominatorem proportionis primi ad ultimum gigni ex denominatoribus intermediarum proportionum inter se multiplicatis, demonstrabimus ad defin. 5. lib. 6. Proportionem autem alicuius tam demum esse alterius duplam, sel triplam, &c. cum iterus denominatio huius denominatoris duplex est, sel triplex, &c. ita ut proportio decuplæ sit duplæ quintuplæ. & sextuplæ sit triplæ duplæ, &c. Ut videamus ad finem lib. 9. tractationisque est hoc argumentum copiosè Rodulphus Snellius in Disputatione de proportione proportionum. Nunc satis sit, hoc ipsum cum mente hominum inditio ex sensibilibus rebus consummare. Si igitur agens

Denominatores	4	4	4
Num. propor.	1	2	48	192	3

Denominatores	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Num propor.	3	12	48	192

aliquod ad Patiens proportionem habeat Verbi gratia decuplam, ita Vt Agens sit 10. & Patiens 1. quis tam mente captus erit, qui non statim intelligat, si idem Agens augeatur, Vt fiat 20. Patiens autem maneat 1. Agens tunc duplo maiorem habere potentiam respectu eiusdem Patientis, quàm prius? Quare proportio Vigecupla, cuius denominator 20. duplus est denominatoris 10. dupla est proportionis decuplæ, non autem proportio centupla, Vt auctores contraria sententia Volunt: sed tamen hæc proportio centupla dicetur duplicata proportionis decuplæ propter multiplicationem denominatoris 10. in se, & propter duas proportiones decuplas, quæ inter numeros centuplam proportionem habentes intersiciuntur, Vt hic apparet, 100. 10. 1. Sic etiam si è contrario, Agens aliquod ad Patiens habeat proportionem Verbi gratia subdecuplam, ita Vt Agens sit 1. & Patiens 10. quis tam hebes fuerit, ac rudis, qui non intelligat, Agens, quod sit 2. duplo esse potentius respectu eiusdem Patientis 10. quàm Agens 1? Cum ergo Agens 2. ad Patiens 10. habeat proportionem subquintuplam, cuius denominator $\frac{1}{5}$. Vel $\frac{2}{10}$. conflatur ex denominatore $\frac{1}{10}$. bis sumpto, erit profectò proportio subquintupla proportionis subdecuplæ dupla, non autem illa, quæ subcentupla est, Vt prædicti auctores Volunt, cum hæc longè minor sit, quam subdecupla. Dicetur tamen proportio subcentupla proportionis subdecuplæ duplicata, propter causam sæpius explicatam, Vt hic patet, 1. 10. 100.

EX his, quæ diximus, non obscure colligi potest, proportionem duarum quantitatum, quibus nullum interponitur medium, sapere naturam quodammodo lineæ, cum ex nulla alia proportione producatur Proportionem Verò, cuius quantitates interciptunt Vnicum medium in continua proportionalitate, habere conditionem superficiei quadratæ, quoniã gignitur ex duabus proportionibus æqualibus; quemadmodum & quadratum ex duabus lineis æqualibus conficitur. Denique proportionem, cuius quantitatibus duo media in continua proportionalitate intersiciuntur, obtinere naturam solidi, atque adeo cubi, cum oriatur ex tribus æqualibus proportionibus, quemadmodum etiam cubus ex tribus lineis æqualibus consurgit. Verum de his plura invenies apud Arithmeticos, qui Algebra regulam exposuerunt.

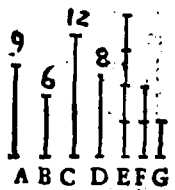
XI.

HOMOLOGÆ, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes verò consequentibus.

DEFINIVIT supra proportionalitatem, proportionum esse similitudinem. Docet iam, non solum in proportionalitate quauis proportiones dici similes; Verum etiam terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologasue; dicens, antecedentes magnitudines appellari he-

lari homologas, seu similes proportione inter se, nec non consequentes inter se, vt intelligeremus in quam plurimis demonstrationibus, quanam latera figurarum inter se comparata, antecedentia debeant esse proportionum, & quanam consequentia, vt in 6. lib. perspicuum fiat.

Si igitur est proportio A, ad B, qua C, ad D; dicetur quantitas A, similis quantitati C; & B, similis ipsi D. Propter similitudinem enim proportionum, necesse est, vtramque magnitudinem antecedentem vel aqualem esse vtriq; consequenti, vel eodem modo maiorem, aut minorem: Alias non haberet vtraque antecedens ad vtramq; consequentem proportionem eandem.



Exemplum habes in magnitudinibus propositis, in quibus antecedentes maiores sunt eodem modo consequentibus, vtpote dimidio maiores. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, continuè proportionalibus, vbi tam E, & F, homologa sunt, quam F, & G, vt constat. Atque hanc ob causam Euclides in defin. 6. & 8. iussos accipi aque multiplicia prima & tertia magnitudinum, hoc est, antecedentium: Item alia aque multiplicia secunda, & quarta magnitudinum, nimirum consequentium. Ha enim similes sunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione constat: in magnitudinibus vero non proportionalibus dissimiles.

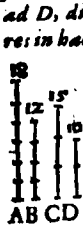
ORONTIVS, & nonnulli alij interpretes, longe aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus varie inter se conferri posse & antecedentes magnitudines, & consequentes; veluti in sequentibus definitionibus patebit. Verum si verba definitionis diligentius ponderentur, & vsus eiusdem in 6. lib consideretur, nostram expositionem huic anteferendam esse, nemo dubitabit.

XII.

ALTERNA ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

EXPLICAT hic quosdam modos argumentandi in proportionibus, quorum frequentissimus est vsus apud Geometras. Hi autem sunt numero sex. Primus dicitur proportio alterna, sive permutata: Secundus, inuersa seu proportio è contrario: Tertius, compositio rationis, seu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuisio rationis, vel disiuncta proportionalitas; Quintus, conuersio rationis, sive inuersa proportionalitas: Sextus denique vocatur proportio ex aqualitate, seu aqua proportio. Alterna igitur seu permutata proportio, inquit, est, cum propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandem esse proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem

dentem posterioris, quam habet consequens illius ad consequentem huius. Vt si penamus proportionem A, ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem esse proportionem A, ad C, quæ est B, ad D, dicemur argumentari a permutata proportione. Græci scriptores in hac argumentatione ὑπάγειν hoc fere modo loquendi: Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, seu ἐναλλὰξ, erit quoque A, ad C, vt B, ad D. Firmam autem esse huiusmodi illationem, demonstrabitur propos. 16. lib. huius. Caeterum in hoc modo argumentandi, necesse est, omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, vt inter binas vt vt assumptas proportio esse possit. Non enim rectè infertur. Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D, ergo permutando, vt linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum D; cum nulla sit proportio lineæ ad numerum, aut contra, vt perspicuum est ex defin. 5. In aliis autem modis argumentandi, quæ sequuntur: possunt esse priores magnitudines in vno genere magnitudinis, & posteriores in alio genere magnitudinis, vt ex demonstrationibus huius lib. 5. constabit.



XIII.

INVERSA ratio, est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.



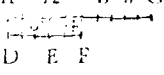
VT si ex eo, quod est A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita esse B, ad A, vt D, ad C, hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuersa proportione. In hac argumentatione sic fere loquuntur auctores. Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur conuertendo, vel è contrario, erit quoque B, ad A, vt D, ad C; Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur in coroll. propos. 4. huius lib. Porro duæ priores magnitudines possunt esse vnius generis, & posteriores alterius. Recte namque licebit inferre: Vt se habet linea A, ad lineam B, ita se habet triangulum, seu numerus C, ad triangulum, seu numerum D; Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum, seu numerus D, ad triangulum, seu numerum C, vt ex coroll propos. 4. constabit.

XIV.

COMPOSITIO rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu vnius, ad ipsam consequentem.

SIT propositio AB, ad BC, quæ DE, ad EF; Si igitur ex hac colligatur,

ligatur, eam quoque esse proportionem totius A C, nempe antecedentis cum consequente, ad B C, consequentem, quam habet tota D F, antecedens nimirum cum consequente, ad E F, consequentem; dicetur huiusce modi argumentatio compositio rationis, ex quod ex antecedente, & consequente componatur aliud nouum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Graecos scriptores reperies in hac argumentatione; Vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, componendo ergo erit & A C, ad B C, vt D F, ad E F. Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propos. 18.



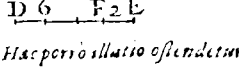
HVIC modo argumentandi per compositionem rationis addi possunt alij duo. Primus dicitur est Compositio rationis conuersa; quando nimirum sumitur antecedens & consequens, relicta vna, quae cum antecedente conseruatur. Vt si est, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, inferemusque; Ergo vt A C, ex antecedente, & consequente constans, ad antecedentem A B, ita est D F, ex antecedente & consequente composita, ad antecedentem D E. Quam argumentationem esse validam, demonstrabimus, ad propos. 19. huius lib. In qua quidem hoc modo dicendi vti poterimus. Ergo per compositionem rationis conuersam.

ALTER modus dicitur est Compositio rationis contrariae; quando nimirum refertur eadem magnitudo antecedens ad antecedentem, & consequentem, cum alia magnitudine. Vt si est, vt A B, ad F C, ita D E, ad E F, inferemusque per compositionem rationis contrariam; Igitur erit vt A B, antecedens ad alterum C F, ex antecedente, & consequente compositam, ita D E, antecedens ad E F, ex antecedente, & consequente compositum. Atque hanc argumentandi formulam valere, ad propos. 18. huius lib. ostendemus.

XV.

DIVISIO rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.

VT si dicatur, qua proportio est totius A B, ad C B, ea est totius D E, ad F E; Igitur erit & A C, excessus, quo antecedens consequentem superat, ad C B, consequentem, vt D F, excessus, quo consequentem excedit antecedens, ad F E, consequentem. In diuisione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo diuidendo, &c. Haec porro illatio ostenditur propos. 17. huius lib.



POSSVNT etiam huic argumentandi modo adiungi alij duo. Primum Diuisionem rationis conuersam dicere possumus; quando nimirum consequens ad excessum, quo consequentem superat antece-

dens, refertur. Vt si est, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E, concludimusque per diuisionem rationis conuersam; Ergo erit, vt C B, consequens ad A C, excessum, quo antecedens consequentem superat, ita F E, consequens ad D F, excessum, quo antecedens superat consequentem. Valere autem hanc argumentationem, ostendemus ad 17. propos. huius lib.

PERSPICVVM autem est, vt vtraque harum argumentationum per Diuisionem rationis locum habeat, nimirum & illa Euclidis, & nostra, antecedentem debere esse maiorem consequente. Aliàs Diuisio fieri non posset.

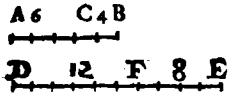
ALTER modus appellari potest Diuisio rationis contrariè; quãdo videlicet construitur antecedens cum excessu, quo consequens antecedentem superat. Vt cum dicimus. Ita se habet A C, ad A B, vt D F, ad D E. Igitur erit quoque per diuisionem rationis contrariam vt A C, antecedens ad C B, excessum, quo consequens antecedentem superat, ita D F, antecedens ad F E, excessum, quo antecedentem superat consequens. Qui modus argumentandi demonstrabitur etiam a nobis ad propos. 17. huius lib.

PORRO manifestum est, in hac Diuisione rationis contrariè consequentem debere esse maiorem antecedente, vt summa possit excessus, quo consequens antecedentem superat.

XVI.

CONVERSIO rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

QVOD si colligamus hoc modo. Sicut est tota magnitudo A B, ad C B, ita tota D E, ad F E; Igitur ita etiam erit eadem A B, ad A C, excessum, quo consequentem superat antecedens, vt D E, ad D F; Dicemus per conuersionem rationis argumentari. Vnde sic fere loquuntur scriptores. Igitur per conuersionem rationis, &c. Confirmabitur autẽ hic argumentandi modus in coroll. propos. 19. huius lib.



LIQVIDO etiam constat, in hoc modo argumentandi per conuersionem rationis antecedentem debere consequentem superare, vt excessus, quo antecedens consequentem superat, sumi possit.

XVII.

EX æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad vltimam sese habuerit.

VEL

VEL aliter. Sumptio extremorum, per ſubductionem mediorum.

SINT plures magnitudines duabus A, B, C, & totidem D, E, F, ſintque binæ ac binæ in eadem proportione, hoc eſt, A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam eſſe proportionem A, ad C, prima ad vltimam in primis magnitudinibus, quæ eſt D, ad F, prima magnitudinis ad vltimam in ſecundis magnitudinibus; dicetur huiuſmodi argumentandi formula deſumpta ex æquo, ſiue ex æqualitate, in qua ſcilicet extremæ magnitudines, ſub duobus mediis, colliguntur habere vnam, eandemq; inter ſe proportionem, vt in altera definitione exprimitur. Quoniam verò duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vno quidem, quando ſumimus binas ac binas magnitudines in eadem proportione, ordinate procedendo, altero verò, cum ordo inuertitur; explicat Euclides duabus ſequentibus definitionibus, quid ſit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.



XVIII.

ORDINATA proportio eſt, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem: fuerit etiam, vt conſequens ad aliud quidpiam, ita conſequens ad aliud quidpiam.

VT quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rurſus vt B, conſequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, conſequens ad F, aliud quidpiam; dicetur talis proportio, Ordinata: quia idem ordo tam in primis tribus magnitudinibus, quam in ſecundis ſeruatur; cum vtrobique conferatur primum prima cum ſecunda; deinde ſecunda cum tertia. Quando ergo in modo argumentandi ex æqualitate ſeruatur Ordinata proportio, demonſtratur propoſ. 22. huius lib. eam argumentationem eſſe bonam.



XIX.

PERTVRBATA autem proportio eſt, cum tribus poſitis magnitudinibus, & aliis, quæ ſint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus ſe habet antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: Vt autem

in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

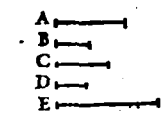
SI autem sit, quemadmodum A, ad B, ita E, ad F; Deinde & in primis magnitudinibus B, consequens ad C, aliud quidpiam, ita in secundis magnitudinibus aliud quidpiam D, ad E, antecedentem magnitudinem, nuncupabitur huiusce modi proportio, Perturbata: quòd non seruetur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe cum in primis magnitudinibus conferatur prima cum secunda, at in secundis secunda cum tertia; deinde in primis secunda cum tertia, at in secundis prima cum secunda. Quando igitur in modo argumentandi ex aequalitate seruatur Perturbata proportio, demonstratur, eam argumentationem esse bonam, propos. 23. huius lib. Porrò tam perturbata proportio, quam ordinata, semper infert ex aequalitate eandem extremorum proportionem, etiam si plures magnitudines ponantur, quam tres, & ex propos. 22. & 23. huius lib perspicuum fiet.



VTVNTVR Euclidis interpretes hoc libro, & in alijs, & hic subiicere mus, non inutile fore iudicauimus. Illud autem eiusmodi est.

QVAM proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo proposita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamuis magnitudinem propositam.

VT, quam proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo proposita C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quapiam alia E, ad propositam C. Quamuis enim ignoremus interdum, quanam sit quarta illa magnitudo, dubitandum tamen non est, eam esse posse in rerum natura, cum id contradictionem non implicet, & Philosophi loquuntur, neque absurdi aliquid ex eo consequatur.

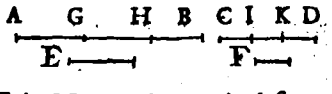


1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices; quam multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudinum

tudinum E, F, æque multiplices. Dico magnitudines A B, C D, ſimul, tam eſſe multiplices magnitudinum E, F, ſimul, quam eſt multiplex A B, ipſius E, vel C D, ipſius F. Cum enim A B, C D, ſint æque multiplices ipſarum E, & F, ſi A B, diuidatur in magnitudines A G, G H, H B, ipſi E, æquales, & C D, quoque in magnitudines C I, I K, K D, ipſi F, æquales; (Diuidi autem poterit quælibet in partes omnino æquales, cum A B, C D, ſint ipſarum E, F, æque multiplices, atque ideo toties E, in A B,



perfectè contineatur, quoties F, in C D, vt ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. ſcripſimus, conſtat) erunt magnitudines A G, G H, H B, tot numero, quot ſunt magnitudines C I, I K, K D. Quoniam vero A G, & E, æquales inter ſe ſunt, ſi ipſis addantur æquales C I, & F, *a* erunt A G, C I, ſimul, æquales ipſis E, & F, ſimul. Eodem modo erunt G H, & I K, ſimul æquales ipſis E, & F, ſimul; Nec non H B, & K D, eiſdem E, & F. Quoties igitur E, in A B, vel F, in C D, continetur, toties & E, F, ſimul, in A B, C D, ſimul comprehenduntur: Ideoque, quam multiplex eſt A B, ipſius E, tam ſunt multiplices A B, C D, ſimul, ipſarum E, & F, ſimul, vt conſtat ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. ſcripſimus. Quare ſi ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 2 *prænun.*

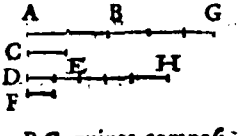
SCHOLIVM.

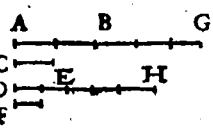
HOC idem demonſtrabitur Vniuerſe propoſ. 12. in omni genere proportionis, tam rationalis, quam irrationalis. Neceſſarium autem fuit, idipſum prius hoc loco in proportione multiplici demonſtrare, quia ex eo alia propoſitiones demonſtrandæ ſunt, antequam propoſitio 12. poſſit demonſtrari.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI prima ſecundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex, atque ſexta quartæ; erit & compoſita prima cum quinta, ſecundæ æque multiplex, atque tertia cum ſexta, quartæ.

SIT magnitudo prima A B, tam multiplex ſecundæ C, quam eſt multiplex D E, tertia, quartæ F; Rurſus tam ſit multiplex B G, quinta ipſius C, ſecundæ, quam multiplex eſt E H, ſexta ipſius F, quartæ. Dico A B, primam cum B G, quinta compoſi-

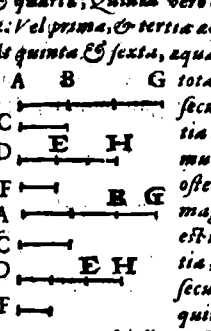




tam, tam multiplicem esse secundæ C, quam multiplex est, D E, tertia composita cum sexta E H, ipsius F, quartæ. Cum enim A B, sint æque multiplices ipsarum C, F, erunt in A B, tot magnitudines ipsi C, æquales, quot sunt in D E, æquales ipsi F. Eadem ratione erunt & in B G, tot æquales ipsi C, quot sunt in E H, æquales ipsi F. Si igitur æqualibus multitudinibus A B, D E, addantur æquales multitudines B G, E H, erunt totæ multitudines A G, D H, æquales. Quare toties comprehenditur C, in A G, quoties F, in D H: Ideoque tam multiplex est A B, (prima composita cum quinta) ipsius C, secundæ, quam multiplex est D H, (tertia composita cum sexta) ipsius F, quartæ. Si prima itaque secundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD si prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint secundæ, & quartæ; Quinta vero & sexta, æque multiplices secundæ, & quartæ: Vel prima, & tertiæ æque multiplices fuerint secundæ, & quartæ; At quinta & sexta, æquales secundæ, & quartæ: Erit eadem ratione,



tota A G, (prima & quinta) tam multiplex secundæ C, quam multiplex est tota D H, (tertia ac sexta) ipsius F, quartæ. Semper enim A G, multitudo magnitudinum æqualium ipsi C, ostendetur æqualis esse ipsi D H, multitudini magnitudinum ipsi F, æqualium, vt perspicuum est in appositis figuris. Si vero tam prima & tertia, quam quintæ, & sextæ æquales ponantur secundæ, & quartæ, luce clarius est, primam & quintam simul, atque tertiam & sextam simul, æque multiplices esse, nimirum duplices, secundæ & quartæ magnitudinum.

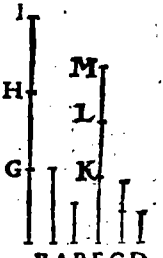
HOC quoque ab Euclide concludetur, in omni genere proportionis vniuersæ propos. 24. sed operæ pretium fuit, idipsum prius in proportione multiplici demonstrare, vt ea, quæ sequuntur, demonstrare possint.

iij. ## THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI sit prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum vtraque vtriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera autem quartæ.

SIT prima magnitudo A, tam multiplex secundæ B, quam multiplex

tiplex est C, tertia quartæ D; sumanturque E, F, æquè multiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem esse E, ipsius B, secundæ, quam est F, ipsius D, quartæ. Nam cùm E, & F, sint æquè multiplices ipsarum A, & C; si distribuantur E, & F, in magnitudines ipsis A, & C, æquales, vt in E G, G H, H I, & F K, K L, L M, erunt tot partes in E, æquales ipsi A, quot sunt in F, æquales ipsi C. Quoniam verò E G, F K, æquales sunt ipsis A, & C; sunt autem A, & C, æquè multiplices ipsarum B, & D, ex hypothesi; Erunt & E G, E K, earundem B, & D, æquè multiplices. Pari ratione erunt G H, K L. Item H I, L M, æquè multiplices earundem B, & D; Quoniam igitur E G, prima magnitudo, tam est multiplex secundæ B, quàm est multiplex F K, tertia quartæ D; Item G H, quinta tam multiplex est eiusdem secundæ B, quàm multiplex est K L, sexta eiusdem quartæ D, a Erit & E H, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quàm est multiplex F L, composita ex tertia & sexta, quartæ D. Rursus cùm sit E H, prima tam multiplex secundæ B, quàm multiplex est F L, tertia quartæ D, vt proximè demonstratum est; sit autem & H I, quinta tam multiplex secundæ B, quàm est L M, sexta multiplex quartæ D; b Erit & E I, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quàm est F M, composita ex tertia ac sexta, multiplex quartæ D. Eademque est ratio, si plures fuerint partes in E, & F. Si sit ergo prima secundæ æquè multiplex, atque tertia quartæ, &c. Quod ostendendum erat.



a 2. *quinti.*

b 2. *quinti.*

SCHOLIVM.

OSTENDETVR hoc theorema, propos. 22. non solùm in magnitudinibus æquè multiplicibus, sed etiam in omnibus, quæ bina sumpta eandem habent proportionem, sive rationalem, sive irrationalem, sed necessarium fuit ipsum prius hic in proportione multiplici demonstrare, vt insequens propos. 4. demonstrari possit.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iiij.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æquè multiplices primæ & tertiæ, ad æquè multiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

SIT proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æquè multiplices E, & F; Item secundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, iuxta quamuis multiplicationem:

siue E, F, ita multiplices sint ipsarum A, C, sicut G, H, ipsarum B, D, siue non. His positis, constat ex defin. 6. huius lib. si E, deficit à G, etiam F, deficere ab H: Et si E, æqualis est ipsi G, etiam F, æqualem esse ipsi H: Et denique si E, excedit G, etiam F, excedere H. Alioquin non esset, per defin. 6. eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, si earum æquè multiplicia non semper ita se haberent. Dico tam, multiplicia primæ ac tertiæ non solùm vnà deficere à multiplicibus secundæ ac quartæ, aut vnà æqualia esse, aut vnà excedere, vt diximus, sed eandem quoque inter se proportionem habere, nimirum ita esse E, multiplicem primæ A, ad G, multiplicem secundæ B, vt F, multiplicem tertiæ C, ad H, multiplicem quartæ D. Hoc est, si rursus E, statuatur prima magnitudo; G, secunda; F, tertia, & H, quarta; sumanturque ipsarum E, F, æquè multiplicia qualiacunque; item ipsarum G, H, quæcunque etiam æquè multiplicia; Multiplicia ipsarum E, F, à multiplicibus ipsarum G, H, vel vnà deficere, vel vnà æqualia esse, vel vnà excedere, vt vult definitio 5. Idem namque est, quatuor magnitudines eandem habere proportionem, & earum æquè multiplicia sumpta diximus, vel vnà deficere, vel vnà æqualia esse, vel vnà excedere. Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æquè multiplices; Item L, M, æquè multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, prima ipsius A, secundæ, quam F, tertia ipsius C, quartæ; sumptæ sunt autem & I, K, æquè multiplices ipsarum E, F, primæ ac tertiæ: *b* Erunt quoque ex æquo I, K, æquè multiplices ipsarum A, C, secundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipsarum B, D, æquè multiplices. Et quia ponitur proportio A, primæ ad B, secundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam, ostensæque sunt I, K, æquè multiplices primæ & tertiæ A, C. Item L, M, æquè multiplices secundæ & quartæ B, D, *c* fit vt si I, multiplex primæ deficit ab L, multiplici secundæ, etiam K, multiplex tertiæ necessario deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I, æqualis est ipsi L, etiam K, ipsi M, sit necessariò æqualis: & denique si I, excedit ipsum L, etiam K, excedat necessariò ipsum M: Idemque ostendetur in quibuscunque æquè multiplicibus magnitudinum E, & F, nec non magnitudinum G, & H, quia semper hæc æquè multiplicia, quæcunque sint, *d* æquè multiplicia quoque erunt magnitudinum A, C, & B, D. Itaque cùm I, & K, sint æquè multiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, æquè multiplices secundæ G, & quartæ H; ostensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quàm L, multiplex secundæ, multiplicem



23. quinti.

b 5. quinti.

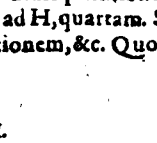
c 6. defi. quinti.

d 5. quinti.

eem tertiæ K, minorem quoque esse, quàm M, multiplicem quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione; a Erit, vt E, prima ad G, secundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum. a 6. def. quinti.

COROLLARIVM.

HINC facilè demonstrabitur Inuersa ratio, quam Euclides defin. 13. explicauit, hoc est, si quatuor magnitudines fuerint proportionales, easdem & contra, seu inuersa ratione proportionales esse. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico esse conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, F, æque multiplicibus ipsarum A, C, primæ ac tertiæ; Item G, H, æque multiplicibus ipsarum B, D, secundæ & quartæ: quoniam ex eo, quod A, prima ad B, secundam se habet, vt C, tertia ad D, quartam,



b necessariò sequitur, si E, multiplex primæ minor fuerit quàm G, multiplex secundæ, vel æqualis, vel maior, etiam F, multiplicem tertiæ minorem esse, vel æqualem, vel maiorem, quàm H, multiplicem quartæ; Perspicuum est, si è contrario G, maior fuerit quàm E, vel æqualis, vel maior, etiam H, maiorem fore, vel æqualem, vel maiorem, quàm F, secundum quamcunque multiplicationem sint sumpta hæc æquè multiplicia. Nam si vtraque E, F, minor est, quàm vtraque G, H, erit contra vtraque G, H, maior quàm vtraque E, F, & si vtraque E, F, æqualis est vtrique G H, erit è contrario, vtraque G, H, vtrique E, F, quoque æqualis: Et denique si vtraque E, F, maior est, quàm vtraque G, H, erit vice versa, vtraque G, H, minor, quàm vtraque E, F. Itaque quoniam primæ B, & tertiæ D, sumpta sunt, æquè multiplicia G, H; Item secundæ A, & quartæ C, æquè multiplicia E, F, ostensumque est; G, H, vel vnà excedere E, F, vel vnà æqualia esse, vel vna deficere, secundum quamcunque multiplicationem ea multiplicia sumantur; c erit vt B, prima ad A, secundam, ita D, tertia ad C, quartam. Quod erat demonstrandum. b 6. def. quinti. c 6. def. quinti.

SCHOLIVM.

HÆC propositio cum suo corollario vera est, siue duæ magnitudines A, B, sint eiusdem generis cum duabus magnitudinibus C, D, siue non, vt ex demonstratione liquet.

ORONTIVS *quartum hoc Theorema sic conatur demonstrare. Postquam ex 3. propositione huius libri ostendit I, K, esse æquè multiplices magnitudinum A, G; item L, M, esse æquè multiplices magnitudinum B, D, infert statim per conuersum 6. definitionis, iuxta suam expositionem, ita esse I, ad L, vt K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, vt F, ad H. Qua quidem demonstratio admodum est vitiosa, tum quia secundum hunc sensum demonstratur idem per idem, nimirum datis quatuor magnitudinibus* proper-

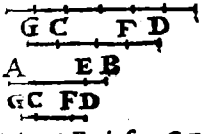


proportionalibus, aque multiplices prima ac tertia ad aquè multiplices secunda & quarta eandem habere proportionem, ex eo, quod ex 6. defin. vt ipse explicauit, aquè multiplices prima ac tertia ad aquè multiplices secunda & quarta eandem habent proportionem: quod est absurdum: tum etiam, quia eodem modo statim à principio licuisset illi inferre, sic esse, per 6 defin. E, ad G, vt F, ad H, sine acceptione nouarum magnitudinũ aquè multiplicium. Non enim est maior ratio in illis, quàm in his. Reijcienda est ergo huiusmodi demonstratio, vna cum expositione & definitione, vt supra diximus. At iuxta nostram interpretationem eiusdem definitionis constat solum, si I, minor est, quàm L, vel aqualis, vel maior, etiam K, minorem esse, vel aqualem, vel maiorem, quàm M; quemadmodum & idem constat in aquè multiplicibus E, F, G, H, & in quibuscunque alijs, si sumantur, prout inter se respondent. Vnde ex 6 defin. rectè colligitur, ita esse E, primã ad G, secundam, vt est F, tertia ad H, quartam, quandoquidem illis 6. definitio conuenit.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

SIT A multiplex sit tota A B, totius C D, vt est multiplex A E, ablata ablatæ C F, sive A E, C F, ablatæ sint totis A B, C D, commensurabiles, vt in prima figura, sive incommensurabiles, vt in secunda figura. Item sive A E, C F, compositæ sint ex eisdem partibus, ex quibus totæ A B, C D, componuntur, vt in priori figura, sive non ex eisdem, vt in posteriori figura. Dico reliquam E B, ita esse multiplicem reliquæ F D, vt est tota A B, totius C D. Ponatur enim E B, ita multiplex cuiuspiam magnitudinis, videlicet ipsius G C, vt est A E, multiplex ipsius C F, vel tota A B, totius C D. Quoniam igitur A E, E B, æquè sunt multiplices ipsarum C F, G C; *a* erit tota A B, totius G F, ita multiplex, vt A E, ipsius C F, hoc est, omnes omniũ, vt vna vnius. Sed tam multiplex etiam ponitur A B, ipsius C D, quàm est multiplex A E, ipsius C F. Igitur A B, tam est multiplex ipsius G F, quàm multiplex est ipsius C D; *b* atque idcirco æquales sunt G F, C D. Ablata igitur communi C F, æquales erunt G C, F D. Tam multiplex igitur erit E B, ipsius F D, quàm multiplex est ipsius

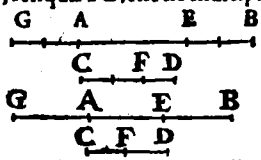


a 1. quinti.

b 6. primi.

pſius G C. Sed ita multiplex poſita fuit E B, ipſius G C, vt A E, ipſius C F, hoc eſt, vt tota A B, totius C D. Quare tam multiplex eſt reliqua E B, reliquæ F D, quàm eſt tota A B, totius C D : quod eſt propoſitum.

ALITER. Sit ita multiplex tota A B, totius C D, vt ablata A E, ablatæ C F. Dico reliquam E B, reliquæ F D, eſſe ſic multiplicem, vt eſt tota totius. Poſita enim G A, ita multiplici ipſius F D, vt eſt A E, ipſius C F, vel vt tota A B, totius C D: quoniam A E, G A, æquè multiplices ſunt ipſarum C E, F D; erit tota G E, ſic multiplex totius C D, vt A E, ipſius C F: Sed ita quoque multiplex eſt A B, eiuſdem C D, vt A E, ipſius C F, ex hypotheſi. Aequè multiplices ſunt igitur G E, A B, ipſius C D; atque adeò inter ſe æquales. Quare, dempta communi A E, æquales erunt G A, E B: Ideoque æquè multiplices ipſius F D; cùm G A, ſit multiplex poſita ipſius F D. Atqui ita eſt multiplex poſita G A, ipſius F D, vt A B, ipſius C D. Igitur & E B, reliqua ſic erit multiplex ipſius F D, reliquæ, vt A B, tota totius C D; quod eſt propoſitum. *Si* magnitudo itaque magnitudinis æquè fuerit multiplex, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 1. *quinti.*

b *6. prop. num.*

SCHOLIVM.

VNIVERSE idipſum demonſtrabitur propoſ. 19. in magnitudinibus cuiuſcunque proportionis, & non tantùm multiplicium, vt hic eſt factum.

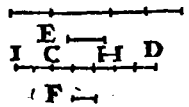
THEOR. 6. PROPOS. 6. vj.

SI duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æquè multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æquè multiplices: & reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æquè ipſarum multiplices.

SINT magnitudines A B, C D, æquè multiplices ipſarum E, F; & detractæ A G, C H, earundem E, F, æquè multiplices. Dico reliquas G B, H D, aut eſſe æquales eiſdem E, F, aut certè earundem æque multiplices. Cùm enim A B, ſit multiplex ipſius E, & ablata quoque A G, eiuſdem E, multiplex; erit reliqua G B, vel æqualis ipſi E, vel eius multiplex; alias inæqualis, vel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod eſt abſurdum. Sit igitur primum G B, æqualis ipſi E. Dico etiam H D, ipſi F, eſſe æqualem. Ponatur enim C F, æqualis ipſi F. Et quia prima A G, tam eſt multiplex ſecundæ E, quàm C H, tertia multiplex eſt quartæ F;



tæ F; & quinta GB, æqualis est secundæ E, sicut & CI, sexta æ-
a 2. quinti. qualis est quartæ F; a erit AB, prima cum quinta, ita multiplex secundæ E, vt HI, tertia cum sexta, multiplex est quartæ F: Atqui CD, ipsius F, erat quoque tam multiplex, quàm AB, multiplex est ipsius E. Aequè multiplices igitur sunt HI, CD, ipsius F.
b 6. prem. b Ideoque æquales inter se. Quare, dempta CH, communi, remanebunt CI, HD, æquales. Cùm igitur CI, posita sit æqualis ipsi F, erit quoque HD, eidem F, æqualis. Quod est propositum.



SIT deinde GB, multiplex ipsius E. Dico ita quoque esse multiplicem HD, ipsius F. Posita namq; CI, ita multiplici ipsius F, vt est multiplex GB, ipsius E; c erit, vt prius
c 2. quinti. AB, ita multiplex ipsius E, vt HI, multiplex
d 6. prem. est ipsius F. d Quare iterum æquales erunt HI, CD; atq; adeò dempta communi CH, & reliquæ CI, HD, æquales erunt: Sed CI, est ita multiplex ipsius F, vt GB, ipsius E, multiplex est, ex hypothesi. Igitur & HD, tam multiplex erit ipsius F, quàm GB, ipsius E, multiplex est. quod est propositum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum sint æquè multiplices, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

HOC quoque ostendemus Vniuersè propos. 24. in omni genere proportionis.

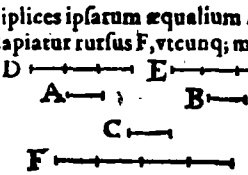
BREVIVS totam propos. ita demonstrabimus. Quoniam AB, CD, sunt ipsarum E, F, æquè multiplices; erunt in AB, tot magnitudines æquales ipsi E, quot sunt magnitudines in CD, æquales ipsi F. Rursus quia AG, CH, earundem E, F, æquè multiplices sunt; erunt quoque in AG, tot magnitudines ipsi E, æquales, quot sunt magnitudines in CH, ipsi F, æquales. Si igitur ex æqualibus multitudinibus AB, CD, demantur multitudines æquales AG, CH; remanebunt multitudines GB, HD, æquales. Quare toties continebitur E, in GB, quoties F, continetur in HD: ac proinde si GB, æqualis sit ipsi E, erit quoque HD, ipsi F, æqualis: Si autem GB, multiplex sit ipsius E; erit ita multiplex HD, ipsius F, vt GB, multiplex est ipsius E: quandoquidem totes E, in GB, continetur, quotes F, in HD, existit, vt ostensum est.

vij. THEOR. 7. PROPOS. 7.

ÆQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

SINT duæ magnitudines A, B, æquales inter se, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C. Item C, vicissim ad A, & B, eandem quoque proportionem habere.

bere. Sumantur D, E, æquè multiplices ipſarum æqualium A, B; a eruntq; D, E, æquales inter ſe. Capiatur rurſus F, vtcunq; multiplex ipſius C. Quoniam igitur D, E, æquales ſunt, ſit vt vtraque vel minor ſit, quàm F, vel æqualis, vel maior, iuxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia ſumantur. Quare cùm D, E, æquè multiplices primæ A, & B, tertiæ, minores ſint ipſa F, multiplice ſecundæ & quartæ C, (eſt enim C, inſtar duarum magnitudinum, &c.) vel æquales, vel maiores; b erit ea proportio primæ A, ad C, ſecundam, quæ tertiæ B, ad C, quartam.



a 6 prop. huius.

b 6 def. quinti.

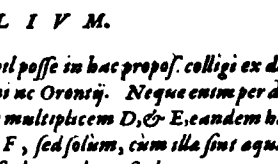
EODEM pacto oſtendemus F, vel minorem eſſe vtraque D, E, vel vtrique æqualem, vel maiorem. Igitur cùm F, multiplex primæ & tertiæ C, vnà deficiat à D, & E, æquæ multiplicibus ſecundæ A, & quartæ B; vel vnà æqualis ſit, vel maior; c Erit quoque ea proportio primæ C, ad ſecundam A, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod eſt propoſitum. Poſſet breuius ſecunda hæc pars oſtendi per coroll. 4. propoſ. ex inuerſa ratione. Cùm enim oſtenſum iam ſit, eſſe A, ad C, vt B, ad C, erit conuertendo C, ad A, vt C, ad B. Aequales ergo ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. quod erat demonſtrandum.

c 6. def. quinti.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM eſt, nihil poſſe in hac propoſ. colligi ex definit. 6. tuxta expoſitionem Campani ac Orontij. Neque enim per demonſtrationem conſtat, vtramque multiplicem D, & E, eandem habere proportionem ad multiplicem F, ſed ſolùm, cùm illa ſint æquales, vtramque eſſe vel minorem, vel æqualem, vel maiorem multiplici F. Idemque ceruitur in omnibus ferè propoſitionibus, quæ per 6. definitionem propoſitum colligunt: Vt meritò illa expoſitio reiecta ſit à nobis.

EODEM ferè modo oſtendemus, æquales magnitudines ad aliàs inter ſe æquales, eandem habere rationem, ſi loco multiplicis F, ſumantur duæ æquè multiplices: quod Euclides, ob facilitatem omiſit, vtitur tamen eo nonnunquam in ijs, quæ ſequuntur, perinde ac ſi in hac propoſ. 7. eſſet demonſtratum.



Sunt enim tam A, & B, inter ſe æquales, quàm C, & D, inter ſe. Dico eſſe A, ad C, vt B, ad D. Sumptis enim E, & F, æquè multiplicibus ipſarum A, & B, prima & tertiæ. Item G, & H, æquè multiplicibus ipſarum C, & D, ſecundæ & quartæ; d erunt tam

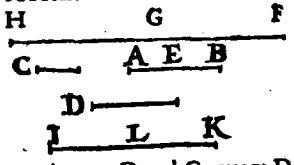
d 5 prop. huius.

E, &

E, & F, inter se æquales, quàm G, & H, inter se. Quære si E, multiplex prima deficit à G, multiplice secunda, etiam F, multiplex tertia, ab H, multiplice quarta deficiet; & si æqualis, æqualis; & si superat, superabit. a *Eadem ergo est proportio A, prima ad C, secundam; quæ B, tertia ad D, quartam. Quod est propositum.*

THEOR. 8. PROPOS. 8.

INÆQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem.



SINT magnitudines inæquales, A B, maior, & C, minor, Tertia autem quælibet D. Dico proportionem A B, ad D, maiorem esse proportione C, ad D. At è conuerso, maiorem esse proportionem D, ad C, quam D, ad A B. Intelligatur enim in A B, magnitudine maiore, magnitudo A E, æqualis minori C, vt sit reliqua E B. Vtraque deinde E B, A E, æqualiter multiplicetur, hac lege, vt G F, multiplex ipsius E B, maior quidem sit, quàm D; At H G, multiplex ipsius A E, non sit minor eadem D, sed vel maior, vel æqualis. In priori figura necesse fuit sumere G F, H G, triplas ipsarum E B, A E; quia dupla ipsius A E, esset minor, quàm D. Loco triplarum potuissent accipi quæcunque aliæ æquè multiplices maiores. In posteriori autem figura satis est, sumere ipsarum E B, A E, duplas G F, H G; quia vtraque G F, H G, maior est quàm D. Possent tamen pro duplis sumi quæcunque aliæ maiores æquè multiplices. Quoniam igitur duæ F G, G H, æquè multiplices sunt duarum B E, E A; erit & tota F H, ita multiplex totius A B, vt H G, ipsius A E, hoc est, ipsius C, cùm æquales sint positæ C, & A E. Capiatur quoque ipsius D, multiplex I K, quæ proximè maior sit, quàm H G, nempe dupla, vt in priori figura. Quod si dupla maior non fuerit quàm H G, sumatur tripla, vel quadrupla, &c. In posteriori figura accepta est I K, ipsius D, quadrupla, quia tam dupla, quàm tripla minor est, quàm H G, at quadrupla iam maior est. Abscissa ergo L K, quæ æqualis sit ipsi D, non erit I L, maior, quàm H G, (aliàs I K, non esset multiplex ipsius D, proximè maior quàm H G; sed & I L, maior quoq; esset quàm H G. Quod si I K, dupla sit ipsius D, perspicuum est, I L, non esse maiorem, quàm H G, cùm H G, posita sit non minor quàm D, hoc est, quàm I L,) & idcirco H G, erit vel æqualis ipsi I L, vel maior. Et quia F G, maior est posita quàm D; L K, vero æqualis eidem D; erit quoque F G, maior quàm L K. Cùm ergo H G, non

HG, non minor ſit quàm IL, vt demonſtratum eſt, ſed vel æqualis, vel maior; erit tota FH, maior quàm IK. Itaque cùm FH, HG, ſint æquè multiplices primæ AB, & tertiæ C; atque IK, multiplex ipſius D, quæ inſtar eſt ſecundæ & quartæ: ſit autem FH, multiplex primæ, maior quàm IK, multiplex ſecundæ; At HG, multiplex tertiæ, non ſit maior quàm IK, multiplex quartæ, immò minor, ex hypotheſi; (ſumpta enim eſt IK, multiplex ipſius D, maior quàm HG,) erit maior proportio AB, primæ ad D, ſecundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.



QVONIAM verò è contrario IK, multiplex primæ D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertia; At C, ſecunda & AB, quarta) maior eſt quàm HG, multiplex ſecundæ C; At IK, multiplex tertiæ D, maior non eſt, quàm FH, multiplex quartæ AB, immò minor, cùm FH, maior ſit, quàm IK, vt oſtenſum eſt; erit maior proportio D, primæ ad C, ſecundam, quam D, tertiæ ad AB, quartam: quod eſt propoſitum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

RECTE autem animaduertit Petrus Nonius in ſua Algebra de Proportione agens, per hanc propoſ. 9. probari non poſſe, angulum rectum maiorem habere proportionem, ad quemuis alium angulum, quàm angulum ſemicirculi ad eundem illum angulum, quanquam rectus angulus maior ſit angulo ſemicirculi: quia exceſſus anguli recti ſupra angulum ſemicirculi, qui eſt angulus contingentiæ, quantumuis multiplicatus ſuperare nequit tertium illum angulum, quod tamen in huius propoſ. demonſtratione requiritur. Nam FG, multiplex exceſſus EB, ſuperare debet tertium magnitudinem D, vt patuit. Neque hoc mirum cuipiam videatur. Nam angulus rectus ad angulum ſemicirculi non dicitur propriè habere proportionem, cùm eum excedat angulo contactus, qui eiuſdem naturæ non eſt cum vtroque angulo, quòd ita multiplicari non poſſit, vt alterutrum illorum tandem excedat. Quemadmodum enim, ſi ad lineam vnius palmi addi poſſet punctum, vt fieret linea vno puncto lineam vnius palmi excedens, non diceretur propriè linea illa compoſita maior, quam linea vnius palmi, propterea quòd exceſſus eſt indiuiſibilis, & alterius naturæ; Item quemadmodum ſi ad figuram planam quamcunque apponeretur linea vnius palmi, non diceretur haec magnitudo ex diuerſis magnitudinibus conflata ad figuram illam planam habere propriè proportionem maioris inæqualitatis: quòd exceſſus non ſit eiuſdem naturæ cum plana illa figura; ita quoque non habet angulus

rectus propriè ad angulum semicirculi proportionem maiorem inæqualitatis, quippe cum angulo semicirculi adiectus sit angulus contactus, & efficiatur angulus rectus; atque adeò rectus angulus angulum semicirculi excedat quantitate diuersæ naturæ, & dictum est. Itaque non solum ex magnitudines proportionem proprie non habent, quarum alterutra multiplicata alteram superare nequit, & ad defin. 5. huius lib. diximus: sed neque eæ propriè dicentur habere proportionem, vt idem Petrus Nonius annotauit, quarum excessus diuersam ab eis naturam habet, cuiusmodi sunt angulus rectus, & angulus semicirculi. Adeo vt tunc solum propriè magnitudines dicantur habere proportionem inter se, quando & alterutra multiplicata alteram superare potest, & excessus earum multiplicatus superare quoque potest vtramque. Fateor rem hanc esse perobscuram, & qua vix rectè intelligi possit: Verum hoc prouenit ex indiuisibilitate anguli contactus per lineam rectam. Huius generis sunt alia nonnulla in rebus Geometricis, quæ verissima quidem sunt propter demonstrationem euidentem, sed alia ex parte talem inducunt difficultatem, vt ab eo non facilè intellectus se expediat. Verbi gratia, Verissimum est, sphæram tangere planum in puncto, vt à Theodosio demonstratur propos. 3. lib. 1. Sed qua ratione fiat, vt hinc non sequatur, si globus contingat moueatur super planum, lineam rectam describi compositam ex punctis, nemo ad hunc vsque diem sic explicauit, vt omni ex parte difficultas sit sublata.

ix. THEOR. 9. PROPOS. 9.

QVÆ ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoq; sunt inter se æquales.

HABEANT primum A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, esse inter se æquales. Sit enim, si fieri potest, altera, nempe
a 8. quinti. A, maior, & B, minor. a Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quàm B, minoris ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales. Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B; Dico rursus A, & B, esse æquales. Nam
b 8. quinti. si altera, nempe A, esset maior, & B, minor; b haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quàm ad A, maiorem: quod est contra hypothesin. Non igitur maior erit A, quàm B, sed æquales. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat.

A ——— B ———
C ———

SCHOLIVM.

CONVERTIT hæc propositio 9. vtramque partem theorematis 7. vt manifestum est.

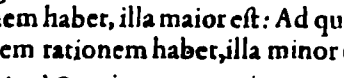
THEOR.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

x.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

HABEAT primum A, ad C, maiorem proportionem, quàm B, ad eandem C. Dico A, maiorem esse, quàm B: Si enim A, foret ipsi B, æqualis, *a* haberent A, & B, eandem proportionem ad C: Si autem A, minor esset, quàm B, *b* haberet B, maior ad C, proportionem maiorē, quàm A, minor ad eandem C, quod est contra hypothesin. Nō est igitur A, æqualis vel minor quàm B, sed maior. Habeat secundò C, ad B, maiorem proportionem, quàm ad A. Dico B, minorem esse quàm A. Non enim æqualis erit B, ipsi A; *c* alioquin haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod est contra hypothesin. Neque verò B, maior erit quàm A, *d* aliàs haberet C, ad minorem A, maiorem proportionem quàm ad B, maiorem: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est B, quàm A, quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.



a 7. quinti.
b 8. quinti.
c 7. quinti.
d 8. quinti.

SCHOLIVM.

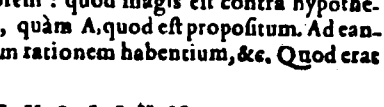
HÆC quoq; propositio conuertit vtramque partem theorematis 8. vt perspicuum est.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

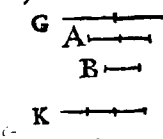
xj

QVÆ eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem.

SINT proportiones A, ad B, & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, easdem esse inter se, secundum definitionem 6. hoc est, sumptis æquè multiplicibus ipsarum A, C; Item æquè multiplicibus ipsarum B, D; semper contingere, vt multiplices ipsarum A, C, à multiplicibus ipsarum B, D, vel vnà deficiant, vel vnà æquales sint, vel vnà excedant. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æquè multiplices quæcunque G, H, I, & ad omnes consequentes B, D, F, aliæ quæcunque æquè multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur esse A, prima ad B, secundam, vt E, tertia ad F, quartam; *e* fit, vt si G, multiplex primæ deficit à K, multiplice secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, mul-



e 6 def. quinti.



M, multiplice quartæ; Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque sit I, ipsi M, vel maior: a Sed (vt eodem modo ostendetur) si I, minor est, quàm M, vel æqualis, vel maior est quoque H, minor quàm L, vel æqualis, vel maior: propterea quòd ponitur esse E, prima ad F, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quare si G, multiplex primæ A, deficit à K, multiplice secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D. Et si G, æqualis est, vel maior quàm K, etiam H, æqualis erit, vel maior quàm L. Idemque ostendetur accidere in quibuscunque alijs æquè multiplicibus. b Quapropter erit A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. Quod erat ostendendum.

a 6. de-fi. quin. 11.

b 11. def. quinti.

SCHOLIVM.

EADEM ratione, Quæ eisdem sunt eadem rationes; & inter se sunt eadem. Vt si sit, & vt A, ad B, ita C, ad D, sit autem E, ad F, & vt A, ad B, & G, ad H, & vt C, ad D: erit quoque L, ad F, vt G, ad H. Quia enim proportiones E, ad F, & C, ad D, eadem sunt proportioni A, ad B, c *erit & vt E, ad F, ita C, ad D. Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eadem sunt proportioni C, ad D,* d *erit quoque & vt E, ad F, ita G, ad H.*

A, 3. B, 2: C, 6. D, 4. E, 9. F, 6: G, 12. H, 8.

c 11. quinti. d 11. quinti.

RVRSVS, si sint proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, eadem inter se: sit autem & vt A, ad B, ita G, ad H; & & vt C, ad D, ita I, ad K; & & vt E, ad F, ita L, ad M: erunt quoque proportiones G, ad H: I, ad K; & L, ad M, eadem inter se. Nam & proximè in quatuor proportionibus ostensum est, & vt G, ad H, ita est I, ad K; propterea quòd hæ proportiones similes sunt proportionibus A, ad B, & & C, ad D. Eodem modo erit, & vt I, ad K, ita L, ad M; cùm proportiones I, ad K, & & L, ad M, eadem sint proportionibus C, ad D, & & E, ad F, quæ æquales sunt. Item erit, & vt G, ad H, ita L, ad M; cùm hæ proportiones eadem sint proportionibus A, ad B, & & E, ad F, quæ æquales ponuntur. Eadem ratio est de pluribus.

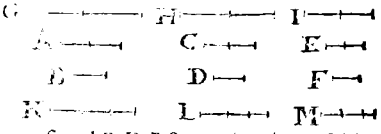
A, 3. B, 2: C, 6. D, 4: E, 9. F, 6. G, 12. H, 8. K, 12. L, 30. M, 20.

XII. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI sint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam

nam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

QVOD in propos. 4. de proportione multiplici demonstrauit, ostendit hic de omni genere proportionis, etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B, C, D, E, F, proportionales, hoc est, sicut A ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico vt est vna antecedentium G, ad vnam consequentium, nimirum A, ad B, ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æquè multiplicibus antecedentium, & K, L, M, æquè multiplicibus consequentium, *a* erunt omnes G, H, I, simul omnium A, C, E, simul ita multiplices, vt vna vnius, nempe vt G, ipsius A, & omnes K, L, M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, vt vna vnius, nimirum vt K, ipsius B. Quoniam verò ponitur esse A, primæ ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam, & vt alia E, tertia ad aliam F, quartam; *b* fit vt si G, multiplex primæ deficit a K, multiplice secundæ, deficiat quoque H, multiplex tertiæ ab L, multiplice quartæ, & I, ab M. Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque sit H, ipsi L, & I, ipsi M, vel maior. Ac proinde si G, minor est, vel æqualis, vel maior quam K, & omnes G, H, I, simul omnibus K, L, M, simul minores sint, vel æquales vel maiores *c* Quocirca vt est A, prima ad B, secundam, ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si sint itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.



a 1. *quinti.*

b 6. *def. quinti.*

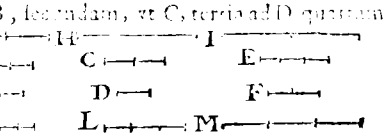
c 6 *def. quinti.*

xiij.

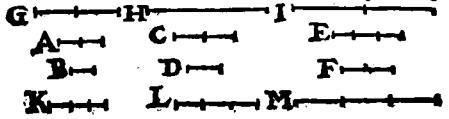
THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia verò ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

SIT prima A, ad B, secundam, vt C, tertia ad D quartam: sit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quam E, quintæ ad F, sextam. Dico & proportionem A, primæ ad B, secundam esse maiorem quàm E, quintæ ad F, sextam. Fa-



ſecundum definitionem 8. hoc eſt, ſumptis æquè multiplicibus ipſarum A, F, item æquè multiplicib. ipſarum B, F, contingere poſſe, vt multiplex ipſius A, excedat multiplicem ipſius B, at multiplex ipſius E, multiplicem ipſius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, æquè multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æque multiplicibus conſequentium, cùm ſit A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam; a ſit vt ſi G, multiplex primæ, excesſerit K, multiplicem ſecundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipſam L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipſam L, b non neceſſariò I, excedit ipſam M, ſed æqualis aliquando erit, vel minor; quòd maior ponatur proportio C, primæ ad D, ſecundam, quàm E, tertiæ ad F, quartam. Igitur ſi G, excedit K, non neceſſariò I, excedit M. c Maior eſt ergo proportio A, primæ ad B, ſecundam, quàm E, tertiæ ad F, quartã. Quam ob rem ſi prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod oſtendendum erat.



a 6. def. quinti.

b 8. def. quinti.

c 8. def. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD ſi proportio C, tertia ad D, quartam minor fuerit, quàm E, quinta ad F, ſextam; erit quoque proportio A, prima ad B ſecundam minor quàm E, quinta ad F, ſextam. Si enim proportio C, ad D, minor eſt quàm E, ad F, hoc eſt, proportio E, prima ad F, ſecundam maior quàm C, tertia ad D, quartam; d *fit vt ſi I, excedit ipſam M, non neceſſariò H, excedat ipſam L, ſed aliquando deficiat, vel ei æqualis ſit.* e *Sed ſi H, deficit ab L, vel æqualis eſt, etiam G, deficiet à K, vel ei erit æqualis, eò quòd ponatur C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam. Quare ſi I, excedat ipſam M, non neceſſariò G, excedet ipſam K,* f *atq; idcirco maior erit proportio E, prima ad F, ſecundam, quam tertia ad B, quartam, hoc eſt, proportio A, ad B, minor erit quàm E, ad F. Quod eſt propoſitum.*

d 8. def. quinti.

e 8. def. quinti.

f 8. def. quinti.

EODEM modo. Si prima ad ſecundam, maiorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quàm quinta ad ſextam: Prima quoq; multò magis ad ſecundam, maiorem rationem habebit, quàm quinta ad ſextam.

QVOD ſi prima ad ſecundam, minorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam, tertia autem ad quartam, minorem habuerit, quàm quinta ad ſextam: Prima quoq; multò magis ad ſecundam, minorem rationem habebit, quàm quinta ad ſextam.

xiiij. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam

quam tertia ad quartam; Prima verò quàm tertia maior fuerit, erit & ſecunda maior quàm quarta. Quod ſi prima fuerit æqualis tertiæ, erit & ſecunda æqualis quartæ: Si verò minor, & minor erit.

SIT enim A, prima ad B, ſecundam, vt C, tertia ad D, quartam. Dico ſi A, maior fuerit quàm C, fore quoque B, maiorem quàm D. Quod ſi A, æqualis fuerit ipſi C, æqualem quoque eſſe B, ipſi D: *Si* deniq; A, minor fuerit quàm C, minorem quoq; eſſe B, ipſa D. Sit primum A, maior quàm C, *a* eritq; propterea proportio A, maioris ad B, maior quàm C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecũdam, vt A, tertia ad B, quartam; Proportio autẽ A, tertiæ ad B, quartã, maior eſt, vt oſtendimus, quàm C, quintæ ad B, ſextam: *b* Maior quoq; erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quàm C, quintæ ad B, ſextam. *c* Minor eſt ergo D, quàm B; Ideoq; B, maior erit quàm D. Quod eſt propoſitum.

a 8. *quinti.*
b 13. *quinti.*
c 10. *quinti.*

SIT deinde A, æqualis ipſi C, *d* eritq; idcirco A, ad B, vt C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem ſunt proportioni A, ad B, *e* erunt quoq; inter ſe eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; *f* Ideoq; æquales erunt B, & D. Quod eſt propoſitũ.

d 7. *quinti.*
e 11. *quinti.*
f 9. *quinti.*

SIT tertiò A, minor quàm C, *g* eritq; ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quàm A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur eſt C, prima ad D, ſecundam, vt A, tertia ad B, quartam; eſt autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quàm C, quintæ ad B, ſextam: *h* Minor quoq; erit proportio C, primæ ad D, ſecundam, quàm C, quintæ ad B, ſextam; *i* Ideoq; B, minor erit, quàm D, quod eſt propoſitum. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum.

g 8. *quinti.*
h 13. *quinti.*
i 10. *quinti.*

SCHOLIVM.

QVOD ſi ſecunda maior ſit, vel æqualis, vel minor, quàm quarta: erit quoque eadem ratione prima maior, vel æqualis, vel minor, quàm tertia. Sit enim primum B, maior, quàm D, vt in prima figura Dico & A, maiorem eſſe, quàm C. Cùm enim B, maior ſit, quàm D; k erit maior proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur eſt, vt prima A, ad ſecundam B, ita tertia C, ad quartam D. Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam oſtenſa eſt maior, quàm C, quintæ ad B, ſextam; l erit quoque proportio A, primæ ad B, ſecundam maior, quàm C, quintæ ad B, ſextam: m ac proinde A, maior erit, quàm C. quod eſt propoſitum.

k 5. *quinti.*
l 13. *quinti.*
m 10. *quinti.*

DEINDE ſit B, æqualis ipſi D, vt in ſecunda figura. Dico & A, ipſi

ipsi C, esse aqualem. Cùm enim B, ipsi D, sit aqualis; erit C, ad B, ut C, ad D: Est autem quoque A, ad B, ut C, ad D. a Igitur erit
a 11. quinti. quoq; ita A, ad B, ut C, ad B; b propterea A, ipsi C, aqualis erit.
b 9. quinti. quod est propositum.

TERTIO sit B, minor quàm D, ut in tertia figura. Dico & A, minorem esse, quàm C. Cùm enim B, minor sit quàm D, c erit minor
c 8. quinti. proportio C, ad D, quam C, ad B. Quia igitur est, ut A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam: Proportio autem C, tertia ad
d 13. quinti. D, quartam ostensa est minor, quàm C, quinta ad B, sextam, d erit quoq; proportio A, prima ad B, secundam minor, quàm C, quinta ad
e 10. quinti. B, sextam. e Igitur maior erit C, quàm A, ac proinde A, minor erit, quàm C. quod est propositum.

BREVIVS. Si B, maior est, quàm D, & A, dicatur non maior,
f 14. quinti. quàm C, sed vel minor, vel aqualis, f erit quoque B, minor, quàm D, vel aqualis, quod est contra hypothesin. Eademque ratio est in alijs casibus.

VEL sic. Si est A, ad B, ut C, ad D; erit convertendo B, ad A, ut
g 14. quinti. D, ad C. Ergo si B, maior est, vel minor, vel aqualis ipsi D; g erit quoque A, maior, vel minor, vel aqualis ipsi C.

NON demonstrauit autem Euclides, si prima maior est, vel aqualis, vel minor, quàm secunda, tertiam quoque maiorem esse vel aqualem, vel minorem, quam quartam; (quo tamen argumentandi modo plerique Geometrarum tum veterum, tum recentiorum vtuntur) quia id perspicuum est ob similitudinem proportionum. Hinc enim fit, si vtraque est proportio maioris inaqualitatis, vtramq; antecedentem magnitudinem, id est, primam ac tertiam, maiorem esse vtraque magnitudine consequente, hoc est, secunda ac quarta: Si verò vtraque proportio est aqualitatis, vtramq; magnitudinem antecedentem vtriq; consequenti aqualem esse. Si denique vtraq; proportio est minoris inaqualitatis, vtramq; antecedentem magnitudinem vtraq; consequente esse minorem.

VERBI gratia, si est ut A, ad B, ita C, ad D; erit vtraque proportio vel maioris inaqualitatis, vel aqualitatis, vel minoris inaqua-

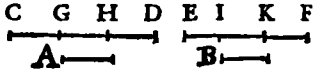
litatis. Quocirca si A, prima maior est quàm B, secunda, erit & C, tertia maior quàm D, quarta; Et si aqualis, aqualis; Et si minor, minor. Quod est propositum. Quod tamen Geometricè ostendemus cum Federico Commandino, licet id non sit necessarium, ad propos. 16. huius lib.

XV. THEOR. 15. PROPOS. 15.

PARTES cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuò respondent, ita sumantur.

SINT partium A, & B, æquè multiplices C D, & E F. Dico ita esse

esse C D, ad E F, vt A, ad B. Cum enim C D, & E F, sint æque multiplices ipsarum A, & B, continebitur A, toties in C D, quoties B, in E F. Diuidatur ergo C D, in partes C H, G H, H D, æquales ipsi A, & E F, in partes E I, I K, K F, æquales ipsi B, *a* eritque C G, ad E I, vt A, ad B, quod C G, & A, æquales inter se sint, nec non E I, & B. Eadem ratione erit G H, ad I K, & H D, ad K F, vt A, ad B, *b* ideoque C G, G H, H D, ad E I, I K, K F, eandem habebunt proportionem. Quocirca vt C G, ad E I, hoc est, vt A, ad B, *c* ita erit C D, ad E F, nempe omnes C G, G H, H D, simul ad omnes E I, I K, K F, simul, quod est propositum. Partes itaque cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonstrandum.

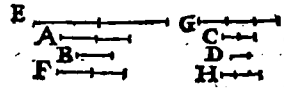


a 7. quinti.
b 8. quinti.
c 12. quinti.

THEOR. 16. PROPOS. 16. xvj.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.

HIC demonstratur Alterna, siue Permutata proportio, seu ratio, quæ defin. 12. explicata est. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico vicissim, seu permutando, esse quoque A, ad C, vt B, ad D. Sumantur enim ipsarum A, B, primæ ac secundæ, æque multiplices E F; Item ipsarum C, D, tertiæ & quartæ æque multiplices G, H; *d* eritque E, ad F, vt A, ad B, cum E, & F, sint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, vt C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F, & C, ad D, sint eædem proportioni A, ad B; erunt & ipsæ inter se eædem. Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem sunt proportioni C, ad D; *f* erunt & ipsæ eædem inter se; hoc est, vt est E, prima ad F, secundam, ita erit G, tertia ad H, quarta. *g* Quare si E, prima maior est quam G, tertia, vel æqualis, vel minor, erit quoq; F, secunda maior quam H, quarta, vel æqualis, vel minor, in quacunque multiplicatione accepta sint æque multiplicia E, F, & æque multiplicia G, H. *h* Est igitur A, prima ad C, secundam, vt B, tertia ad D, quarta (cum E, & F, sint æque multiplices primæ A, ac tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, secundæ, & D, quartæ, & illæ ab his vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant, &c.) quod est propositum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt. Quod ostendendum erat.



d 15. quinti.
e 11. quinti.
f 11. quinti.
g 14. quinti.
h 6. defin. quinti.

SCHOLIVM.

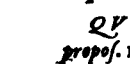
PORRO demonstratio huius propos. locum solum habet quando quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Nam si duæ A, B, essent

Vnius generis, & duæ C, D, alterius; essent quoque multiplices E, F, vnius generis, in quo videlicet sunt A, B, & multiplices G, H, alterius; in quo nimirum existunt C, D. Quare non posset dici E, maior quam G, vel æqualis, vel minor; ac proinde nihil colligeretur ex defin. 6. huius lib. Vsurpanda igitur erit permutata proportio in solis quatuor magnitudinibus eiusdem generis. Quod nonnulli philosophi non aduertentes in graues errores incidunt, cum eam adhibeant in rebus diuersorum generum.

EX hoc & illud demonstrabitur, quod ad finem scholij propos. 14. ex ipsa similitudine proportionem ostendimus, recepimusque nos demonstraturos hoc loco, videlicet.

SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima vero, quam secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

QVANQVAM id, quod hic proponitur, per se notum sit, vt ad propos. 14. diximus, demonstrabimus tamen illud cum Federico Commandino, hoc modo. Sit vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, si A, prima maior est, quam B, secunda; & C, tertiam maiorem esse quarta D, & si est æqualis, æqualem; & si minor, minorem.



a 16. quinti. *a Erit enim permutando, vt A, ad C, ita B, ad D.* b 14. quinti. *b Quare si A, prima maior est, quam B, tertia, erit & C, secunda maior, quam D, quarta; & si æqualis, æqualis, & si minor, minor. Quod est propositum.*

SED & hac demonstratio locum duntaxat habet, cum quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Quare satis est illud ex natura proportionum monstrare, vt à nobis ad propos. 14. factum est. Ita enim verum erit semper id, quod proponitur, etiamsi magnitudines A, B, in vno genere, & C, D, in alio contineantur: immò verò licet A, B, sint quantitates continuæ, & C, D, numeri, &c.

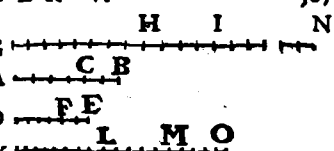
xvij. THEOR. 17. PROPOS. 17.

SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.

HOC loco demonstrat Euclides Diuisionem rationis, quam defin. 15. explicauit. Sint enim compositæ magnitudines AB, CB, & DE, FE, proportionales, hoc est, sit AB, ad CB, vt DE, ad FE. Dico & diuisas easdem proportionales esse, hoc est, vt est AC, ad CB, ita esse DF, ad FE, in eo sensu, quem definitione 6. exposuimus. Ipsarum enim AC, CB, DF, FE, æque multiplices capiantur eodem ordine GH, HI, KL, LM; eritque GI, ita multiplex

a 1. quinti.

plex ipſius A B, vt eſt G H, ipſius A C, hoc eſt, vt K L, ipſius D F. Sed vt eſt multiplex K L, ipſius D F, *a* ita quoq; multiplex eſt K M, ipſius D E. Æque multiplices ergo ſunt G I, K M,



a 1. quinti.

ipſarum A B, D E. Capiantur rurſus I N, M O, æque multiplices ipſarum C B, F E. Quoniam igitur ſic eſt multiplex H I, prima ſecundæ C B, vt L M, tertia quartæ F E: Item tam eſt multiplex I N, quinta ſecundæ C B, quam multiplex eſt M O, ſexta quartæ F E; *b* erit & H N, ſic multiplex ſecundæ C B, vt L O, multiplex eſt quartæ F E. Itaque cum ſit A B, prima ad C B, ſecundam, vt D E, tertia ad F E, quartam; ſumptæque ſint æque multiplices G I, K M, primæ ac tertiæ A B, D E; Item ſecundæ & quartæ C B, F E, æque multiplices H N, L O, *c* ſit vt ſi G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplice ſecundæ C B, etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficiat ab L O, multiplice quartæ F E; & ſi æqualis, æqualis; & ſi excedit, excedat. Quod ſi deficiat tam G I, ab H N, quam K M, ab L O, ablatis communibus H I, L M, deficiet quoque G H, ab I N, & K L, ab M O. Et ſi G I, æqualis fuerit ipſi H N, & K M, ipſi L O, ablatis communibus H I, L M, erit & G H, æqualis ipſi I N, & K L, ipſi M O. Et ſi denique G I, exceſſerit ipſam H N, & K M, ipſam L O, ablatis communibus H I, L M, excedet quoque G H, ipſam I N, & K L, ipſam M O. Quam ob rem cum G H, K L, ſumptæ ſint æque multiplices primæ A C, & tertiæ D F; Item I N, M O, æque multiplices ſecundæ C B, & quartæ F E, oſtenſumq; ſit, (in quacunq; multiplicatione illæ æque multiplices fuerint acceptæ) æque multiplices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus ſecundæ & quartæ vel vna deficere, vel æquales eſſe, vel vna excedere; *d* Erit A C, prima ad C B, ſecundam, vt D E, tertia ad F E, quartam. quod eſt propoſitum. Si compoſitæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

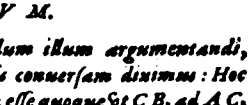
b 2. quinti.

c 6. def. quinti.

d 6. def. quinti.

SCHOLIVM.

EX his facile demonſtrabimus modum illum argumentandi, quem definitione 15. *Diuiſionem rationis conuerſam diximus: Hoc eſt, ſi eſt, vt A B, ad C B, ita D E, ad E F; eſſe quoque vt C B, ad A C, ita F E, ad D F, quod ita patet. Quoniam eſt vt A B, ad C B, ita D E, ad F E; e erit diuidendo, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Igitur conuertendo erit quoque, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F. Quod eſt propoſitum.*



e 17. quinti.

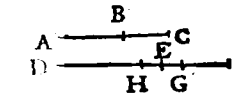
NVLLO etiam negotio demonſtrabitur modus ille argumentandi, quem ad eandem defin. 15. *Diuiſionem rationis contrariam appellauimus,*

tantum, & in quo antecedens magnitudo minor est quam consequens, non autem maior, vt in Diuisione rationis, quam Euclides definiuit, & ea, quam proximè demonstrauimus. Sit enim vt A C, ad A B, ita D F, ad D E. Dico esse quoque per Diuisionem rationis conuertam, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quoniam enim est, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E; erit conuertendo, vt A B, ad A C, ita D E,
a 17. quinti. *ad D F.* a *Ergo diuidendo, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F: Atque proinde conuertendo rursus, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quod est propositum.*

xviij. THEOR. 18. PROPOS. 18.

SI diuisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoque compositæ proportionales erunt.

DEMONSTRAT hoc loco Euclides compositionem rationis, quam definitione 14. descripsit. Sint enim diuisæ magnitudines A B, B C, & D E, E F, proportionales, hoc est, A B, ad B C, vt D E, ad E F. Dico & compositas proportionales esse, hoc est, vt est A C, ad B C, ita esse D F, ad E F. Si enim non est, vt A C, ad B C, ita D F, ad E F, habebit D F, ad aliquam magnitudinem minorem ipsa E F, vel maiorem, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Habeat primum D F, ad G F, minorem ipsa E F, si fieri potest, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur est, vt A C, ad B C, ita



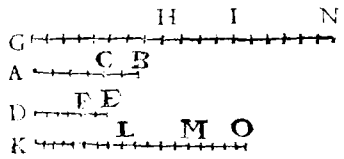
b 17. quinti. D F, ad G F; *b* Erit diuidendo quoque, vt A B, ad B C, ita D G, ad G F: Sed vt A B, ad B C, ita posita quoque est D E, ad E F. *c* Igitur
c 11. quinti. erit etiam, vt D G, prima ad G F, secundam, ita D E, tertia ad E F, quartam. Cum ergo D G, prima maior sit, quàm D E, tertia, *d* erit
d 14. quinti. quoque G F, secunda maior quàm E F, quarta, pars quàm totum. Quod est absurdum.

HABEAT deinde, si fieri potest, D F, ad H F, maiorem ipsa E F, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur
e 17. quinti. est, vt A C, ad B C, ita D F, ad H F; *e* erit diuidendo quoque vt A B, ad B C, ita D H, ad H E. Sed vt A B, ad B C, ita posita etiam
f 11. quinti. est D E, ad E F. *f* Igitur erit quoque, vt D H, prima ad H F, secundam, ita D E, tertia ad E F, quartam. Cum ergo D H, prima minor sit quàm D E, tertia, erit quoque H F, secunda minor quàm E F, quarta, totum quàm pars. quod est absurdum. Non igitur habebit D F, ad minorem ipsa E F, aut ad maiorem, eandem proportionem, quam A C, habet ad B C. Ergo D F, ad ipsam E F, erit, vt A C, ad B C, quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

HANC propositionem demonstrant nonnulli cum Campano eadem ser-

dem ferme ratione, qua antecedentem propositionem Euclides demonstrauit, hoc & dicet modo. Sint duæ magnitudines AC, CB, DF, FE, proportionales, hoc est, AC, ad CB, vt DF, ad FE. Dico eas etiam compositas proportionales esse, vt AB, quidem ad CB, ita DE, ad FE. Sumantur enim, vt in antecedente propositione, ipsarum AC, CB, DF, FE, æque multiplices GH, HI, KL, LM. Item ipsarum CB, FE, aliæ æque multiplices IN, MO, accipiantque rursus GI, KM, ipsarum AB, DE, æque multiplices.



a 1. quinti.

b Item HN, LO, ipsarum CB, FE, vt in præcedenti Theoremate ostensum est.

b 2. quinti.

Quoniam vero portio est AC, primæ ad CB, secundam, vt DF tertiæ ad FE, quartam, sumptæque sunt GH, KL, æque multiplices primæ ac tertiæ AC, DF. Item secundæ & quartæ CB, FE æque multiplices IN, MO, c fit, vt GH multiplex primæ AC, desicit ab IN, multiplice secundæ CB, etiam KL, multiplex tertiæ DF, desicient ab MO, multiplice quartæ FE, & si æquales, æqualis; & si excedit, excedat. Quod si desiciat tam GH, ab IN, quam KL, ab MO, additis communibus HI, LM, desiciet quoque GI, ab HN, & KM, ab LO. Et si GH, æqualis fuerit ipsi IN, & KL, ipsi MO; additis communibus HI, LM, erit & GI, ipsi HN, æqualis, & KM, ipsi LO. Et denique si GH, excesserit ipsam IN, & KL, ipsam MO, additis communibus HI, LM, excedet quoque GI, ipsam HN, & KM, ipsam LO. Quoniam ergo si GI, multiplex primæ AB, desicit ab HN, multiplice secundæ CB, etiam KM, multiplex tertiæ DE, desicit ab LO, multiplice quartæ FE, & si æqualis, æqualis, & si excedit, excedit; d erit AB, primæ ad CB, secundam, vt DE, tertia ad FE quartam. Quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

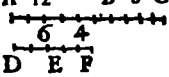
c 6. def. quinti.

d 6. def. quinti.

VERVM hæc demonstratio non recte colligit propositum ex defin. 6. propterea quod HN, LO, non sunt eiusdem multiplices ipsarum CB, FE, vt multiplices acceptæ sunt IN, MO, earundem CF, FE. Vnde merito dubitare quis possit, an secundum quamcunque multiplicationem æque multiplices sequentur eam conditionem defectus, æqualitatis, atque excessus, quam includes in 6. defin. postulabant; quandoquidem in hac demonstratione liberum non est assumere ipsarum CB, FE, quascunque æque multiplices, sed tales duntaxat quales consurgunt ex HI, IN, & ex LM, MO, multiplicibus acceptis. Id quod in antecedentis propositionis demonstratione oluere non potest: quippe cum IN, MO, semper sint ipsarum CF, FE, æque multiplices qualescunque, si æque ceteræ remanent æque multiplices earundem CB, FE, in diuisa proportionalitate. Quam ob rem præferenda est huiusdis de-

dis demonſtratio huic demonſtrationi Campani. Libuit autem eam quoque explicare, ne eam ſtudioſus Lector, relicta illa Euclidis, arriperet, & bonam: præſertim cum oſtenſiua ſit, illa verò Euclidis ducat nos ad id, quod fieri non poteſt.

HINC facile etiam confirmabimus duos illos modos argumentandi, quos ad defin. 14. deſcripſimus. Priorem diximus compoſitionem rationis conuerſam. Sit enim & A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compoſitionem rationis conuerſam, eſſe quoque & A C, ad A B, ita D F, ad D E. Quoniam enim eſt, & A B, ad B C, ita D E, ad E F, erit conuertendo, & B C, ad B D, ita E F, ad D E. a Igitur & componendo erit, & A C, ad A B, ita D F, ad D E, quod eſt propoſitum.



a 18. quinti.

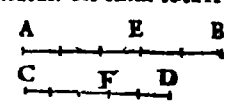
POSTERIOREM modum vocauimus compoſitionem rationis contrariam. Sit ergo rurſus, & A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compoſitionem rationis contrariam, eſſe quoque & A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quoniam enim eſt, & A B, ad B C, ita D E, ad E F, erit conuertendo, & B C, ad A B, ita E F, ad D E. b Igitur & componendo erit, & A C, ad A B, ita D F, ad D E: ac proinde conuertendo rurſus erit, & A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod eſt propoſitum.

b 18. quinti.

XIX. THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, ſe habebit.

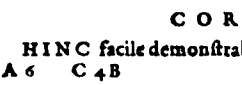
QVOD in propoſ. 5. demonſtratum eſt de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonſtratur. Sit enim tota A B, ad totam C D, vt ablata A E, ad ablatam C F. Dico & reliquam E B, eſſe ad reliquam F D, vt eſt tota A B, ad totam C D. Cum enim ſit A B, ad C D, vt A E, ad C F, *c* erit & permutando A B, ad A E, vt C D, ad C F. *d* Diuidendo ergo erit E B, ad A E, vt F D, ad C E. *e* Quare permutando rurſus erit E B, ad F D, vt A E, ad C F, hoc eſt, vt tota A B, ad totam C D, cum poſita ſit A B, ad C D, vt A E, ad C F. *Si igitur quemadmodum totum ad totum &c.* Quod demonſtrandum erat.



c 16. quinti. d 17. quinti. e 16. quinti.

COROLLARIVM.

HINC facile demonſtrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui ſumitur à conuerſione rationis, iuxta 16. defin.



SIT enim, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E. Dico per conuerſionem rationis eſſe quoque

quoque, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Cum enim sit, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E, *a* erit quoque diuidendo, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Igitur & conuertendo, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F: *b* ac propterea componendo quoque, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod est propositum. a 17. *quinti*, b 18. *quinti*.

SCHOLIVM.

OMNES Euclidis interpretes conuersionem rationis demonstrant hac ratione. Quoniam est, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E; erit permutando, vt tota A B, ad totam D E, ita C B, ablata ad ablatam F E. d Igitur vt tota A B, ad totam D E, ita erit quoque reliqua A C, ad reliquam D F. Et proinde permutando rursus, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod est propositum. c 16. *quinti*. d 19. *quinti*.

SED quis non videt, hanc demonstrationem conuenire solum magnitudinibus eiusdem generis, cum in ea sumpetur alterna, siue permutata proportio, quæ vim tantum habet in eiusdem generis magnitudinibus, vt ex 5. in defin. 12. & in propos. 19. monuimus? Quare cum Euclides, & alij Geometræ modum hunc argumentandi a conuersione rationis adhibeant in omnibus magnitudinibus, etiam non eiusdem generis, reiecta hac communi interpretum demonstratione, nostram aliam excogitauimus, quæ omnibus magnitudinibus congruit. Ea enim locum habet, etiamsi priores duæ quantitates A B, C B, sint vnius generis, nimirum lineæ, posteriores vero duæ D E, F E, alterius generis, nimirum vel superficies, vel anguli, vel corpora, vel denique numeri: propterea quod in ea non assumpta fuit alterna, siue permutata proportio.

THEOR. 20. PROPOS. 20. XX.

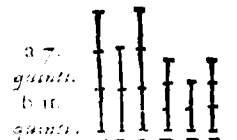
SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quam tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F, ut autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem F, sexta. Cum enim A, maior sit quam C, *e* erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E. *f* Maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B. At vt C, ad B, ita est F, ad E. (Cum enim sit B, ad C vt E, ad F, erit conuertendo vt C, ad B, ita F, ad E.) Maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E. *g* Quare D, maior erit, quam F. Quod est propositum.



e 8. *quinti*. f 13. *quinti*. g 10. *quinti*.

SIT



SIT deinde A, æqualis ipsi C. Dico & D, æqualem esse ipsi F. Cum enim A, sit ipsi C, æqualis, *a* erit A, ad B, vt C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E. *b* Igitur erit & D, ad E, vt C, ad B: At vt C, ad B, ita est F, ad E, per inuersam rationem, vti prius. Quare erit quoque D, ad E, vt F, ad E; *c* Ideoque æquales erunt D, & F. Quod est propositum.

a 7. quinti. b 11. quinti. c 9. quinti.

SIT tertio A, minor quam C. Dico & D, minorem esse, quam F. Cum enim A, minor sit quam C, *d* erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B. Sed vt A, ad B, ita est D, ad E. *e* Minor ergo quoque proportio est D, ad E, quam C, ad B. Est autem conuertendo, vt prius, vt C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor est quoque proportio D, ad E, quam F, ad E, *f* propterea que D, minor erit quam F. Quod est propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c.

d 8. quinti. e 13. quinti. f 10. quinti.

SCHOLIVM.

PORRO propositione 22. ostendet Euclides, A, & D, magnitudines non solum esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & E, vt hic demonstrauit, sed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem demonstrare non poterat, nisi prius theorema hoc ostendisset, vt ex eadem propositione 22. erit perspicuum.

xxj. THEOR. 21. PROPOS. 21.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.

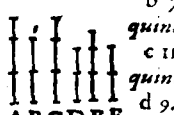


SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; sitque earum proportio perturbata, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E: Sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sexta, F. Cum enim A, maior sit quam C, *g* erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B: Est autem vt A, ad B, ita E, ad F. *h* Maior ergo quoque proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero vt B, ad C, ita est D, ad E, erit

g 8. quinti. h 13. quinti.

E, erit conuertendo vt C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D. *a* Ideoque maior erit D, quam F. Quod eſt propoſitum. a 10. *quinti.*

SIT deinde A, ipſi C, æqualis. Dico D, quoque ipſi F, eſſe æqualem. Cum enim A, ſit æqualis ipſi C, *b* erit A, ad B, vt C, ad B: Sed vt A, ad B, ita eſt E, ad F. *c* Igitur erit vt C, ad B, ita E, ad F: Eſt autem ex inuerſa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoque vt E, ad F, ita E, ad D; *d* atque idcirco D, ipſi F, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.



b 7. *quinti.* c 11. *quinti.* d 9. *quinti.*

SIT tertio A, minor, quam C. Dico & D, minorem eſſe quam F. Cum enim A, ſit minor quam C, *e* erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Vt autem A, ad B, ita eſt E, ad F. *f* Minor eſt ergo proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero, vt ante, ex inuerſa ratione, eſt vt C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; *g* ac propterea D, minor erit quam F, quod eſt propoſitum. Si igitur ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, &c. Quod oſtendendum erat.



e 8. *quinti.* f 13. *quinti.* g 10. *quinti.*

SCHOLIVM.

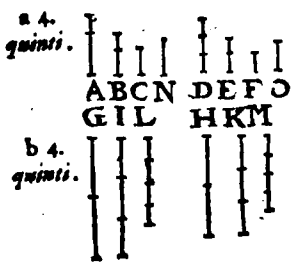
CÆTERVM propoſ. 23. oſtendet Euclides duas magnitudines A, & D, non ſolum eſſe maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & F, ſed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem ſine auxilio huius theorematis demonſtrare non poterat, vt ex propoſ. illa 23. patebit.

THEOR. 22. PROPOS. 22. xxij.

SI ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

IAM hic demonſtrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando proportio eſt ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F: ſitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate eſſe A, ad C, vt D, ad F. Sumptis enim ipſarum A, D, æque multiplicibus G, H: Item ipſarum B, E, æque multiplicibus I, K: Item ipſarum C, F, æque multiplicibus L, M; cum ſit A, prima ad B, ſecundam, vt D, tertia





a 4. *quinti.* ad E, quartam, *a* erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem ſecundæ B, vt H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicem quartæ E. Eadem ratione cum ſit B, prima ad C, ſecundam, vt E, tertia ad F, quartam; *b* erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem ſecundæ C, vt K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur ſunt tres magnitudines, G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione ſumuntur; *c* ſit vt ſi G, prima ſuperat tertiam L, ſuperet neceſſario quoque H, quarta ſextam M; Et ſi æqualis, æqualis; Et ſi deficit, deficiat. Itaque cum G, H, æque multiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiant vna ab L, M, æque multiplicibus ſecundæ C, & quartæ F, vel vna æquales ſint, vel vna excedant: in quacunque multiplicatione ſumpta ſint ea multiplicia; *d* erit A, prima ad C, ſecundam, vt D, tertia ad F, quartam. Quod eſt propoſitum.

b 4. *quinti.*

c 10. *quinti.*

d *6. def. quinti.*

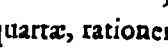
DEINDE ſint plures magnitudines tribus, ita vt ſit etiam C, ad N, vt F, ad O. Dico adhuc eſſe vt A, ad N, ita D, ad O. Cum enim iam ſit conſtitutum in tribus magnitudinibus, eſſe A, ad C, vt D, ad F: ponatur autem C, ad N, vt F, ad O, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione ſumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus oſtenſa, rurſus erit, vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem oſtendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor; ſicut id in quatuor demonſtratum fuit per tres; Et ſic de pluribus. Itaque ſi ſint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

CÆTERVM non videtur hoc loco diſſimulandum Theorema quoddam antiquis Mathematicis valde familiare, quamquam à nemine, quod ſciam, ſit adhuc demonſtratum. Id autem eiuſmodi eſt.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Habebunt etiam æque multiplices primæ ac tertiæ, ad ſecundam & quartam eandem rationem: Item æque multiplices ſecundæ & quartæ ad primam & tertiam, eandem rationem habebunt. Et contra, eandem rationem habebunt ſecunda & quarta ad æque multiplices primæ & tertiæ: Item prima ac tertia

tertia ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, rationem habebunt eandem.



SIT enim ☿t *A, prima ad B, ſecundam, ita C, tertia ad D, quartam; ſumanturque E, F, ipſarum A, C, æque multiplices: Item G, H, æque multiplices ipſarum B, D. Dico ita eſſe E, ad B,* ☿t *F, ad D: Item ita G, ad A,* ☿t *H, ad C. Et contra, ita eſſe B, ad E,* ☿t *D, ad F: Item ita A, ad G,* ☿t *C, ad H. Quoniam enim eſt,* ☿t *E, ad A, ita F, ad C, ex conſtructione, cum* ☿trobique *ſit eadem proportio multiplex; ponaturque* ☿t *A, ad B, ita C, ad D;* a *erit ex æquo,* ☿t *E, ad B, ita F, ad D. Rurſus quia eſt,* ☿t *G, ad B, ita H, ad D, quod* ☿trobique *ſit eadem proportio multiplex, ex conſtructione; eſtque* ☿t *B, ad A, ita D, ad C; (Cum enim ponatur,* ☿t *A, ad B, ita C, ad D, erit conuertendo,* ☿t *B, ad A, ita D, ad C)* b *erit ex æquo,* ☿t *G, ad A, ita H, ad C.*

a 22. *quinti.*

b 22. *quinti.*

DEINDE, quia eſt ☿t *B, ad A, ita D, ad C, per inuerſam rationem; Et* ☿t *A, ad E, ita C, ad F, quod ex conſtructione* ☿trobique *ſit eadem proportio ſubmultiplex;* c *erit ex æquo,* ☿t *B, ad E, ita D, ad F. Rurſus quia ponitur,* ☿t *A, ad B, ita C, ad D; eſtque* ☿t *B, ad G, ita D, ad H, quod ex conſtructione ſit* ☿trobique *eadem proportio ſubmultiplex;* d *erit ex æquo,* ☿t *A, ad G, ita C, ad H. Quod eſt propoſitum.*

c 22. *quinti.*

d 22. *quinti.*

EX quo conſtat modus argumentandi, quo frequentiſſime ☿untur *Geometra, maximè Archimedes, Apollonius Pergæus, Theon, & alij. Videlicet,* ☿t *A, ad B, ita eſt C, ad D. Ergo* ☿t *E, dupla,* ☿el *tripla,* ☿el *quadrupla, &c. ipſius C, ad D. Item* ☿t *A, ad B, ita eſt, C, ad D. Igitur* ☿t *A, ad duplum,* ☿el *triplum,* ☿el *quadruplum, &c. ipſius B, nimirum ad G, ita erit quoque C, ad duplum,* ☿el *triplum,* ☿el *quadruplum, &c. ipſius D, videlicet ad H.*

THEOR. 23. PROPOS. 23. xxiij.

SI ſint tres magnitudines, aliæque ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEMONSTRATVR hic ratio ex æqualitate, quando proportio eſt perturbata. Sint enim tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, ſitque perturbata earum proportio, hoc eſt, ſit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate eſſe vt A, ad C, ita D, ad F. Sumptis enim ipſarum A, B, D, æque multiplicibus G, H, I; Item ipſarum C, E, F, æque multiplicibus K, L, M; e Erit vt A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, *quinto.*

e 15.



sint ipsarum A, B, æque multiplices: A t vt A, ad B, ita est E, ad F; *a* Igitur vt G, ad H, ita quoq; est E, ad F; *b* Sed vt E, ad F, ita est quoque L, ad M; quod L, M, sint ipsarum E, F, æque multiplices. *c* Igitur erit quoque vt G, ad H, ita L, ad M. Rursus quoniam est B, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad E, quartam; *d* erit quoque vt H, multiplex primæ B, ad K, multiplicem secundæ C, ita I, multiplex tertiæ D, ad L, multiplicem quartæ E. Quia igitur sunt tres magnitudines G, H, K, & aliæ tres I, L, M, quæ binæ in eadem ratione sumuntur, estque earum proportio perturbata; cum ostensum sit esse vt G, ad H, ita L, ad M: Et vt H, ad K, ita I, ad L; *e* fit vt si G, prima superat tertiam K, superet quoque quarta I, sextam M; & si æqualis, æqualis; & si deficit, deficiat. Itaque cum G, & I, æque multiplices primæ A, & tertiæ D, a K, & M, æque multiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant; *f* erit vt A, prima ad C, secundam, ita D, tertia ad F, quartam. quod est propositum. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod demonstrandum erat.

e 21. quinti.

f 6. def. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, fueritque earum proportio perturbata, nimirum si fuerit A, ad B, vt F, ad O; & B, ad C, vt E, ad F; & C, ad N, vt D, ad E. Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O, quanquam proportio ex aqualitate, quando proportio est perturbata, apud Geometras in vsu non sit in pluribus magnitudinibus, quàm in tribus, qua causa fuit, cur Euclides antecedentem propositionem de quotquot magnitudinibus, hanc autem de tribus duntaxat proposuerit, quamuis vera etiam sit de pluribus. quod ita probatur. Cum iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt E, ad O; Ponatur autem esse ita C, ad N, vt D, ad E, erunt tres magnitudines A, C, N, & alia tres, D, E, O, quæ binæ in eadem sumuntur proportione, & earum proportio est perturbata Ergo rursus ex aqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, erit vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, sicut id in quatuor fuit demonstratum, per tres. Et sic de pluribus. Quod est propositum.

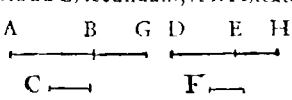
xxiv. THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam:

Etiam

Etiam compoſita prima cum quinta, ad ſecundam eandem habebit rationem, quam tertia cum ſexta, ad quartam.

QVOD propoſitione 2. demonſtrauit Euclides de ſola proportione multiplici, demonſtrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim A B, prima ad C, ſecundam, vt D E, tertia ad F, quartam; Item B G, quinta ad C, ſecundam, vt E H, ſexta ad F, quartam. Dico ita eſſe A G, compoſitam ex prima ac quinta, ad ſecundam C, vt eſt D H, compoſita ex tertia & ſexta, ad quartam F. Cum enim ſit vt B G, ad C, ita E H, ad F; erit conuertendo vt C, ad B G, ita F, ad E H. Quoniam igitur eſt A B, ad C, vt D E, ad F; & C, ad B G, vt F, ad E H, *a* erit ex æquali A B, ad B G, vt D E, ad E H. *b* Componendo igitur erit vt tota A G, ad B G, ita tota D H, ad E H. Itaque cum rurſus ſit A G, ad B G, vt D H, ad E H; & B G, ad C, vt E H, ad F; *c* erit ex æquali A G, ad C, vt D H, ad F. quod eſt propoſitum. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 22. *quinti.*
b 18. *quinti.*
c 22. *quinti.*

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio vera eſt, ſiue magnitudines A B, B G, & C, ſint eiuſdem generis cum magnitudinibus D E, E H, & F, ſiue non, vt ex demonſtratione conſtat.

EODEM fere modo oſtendetur in omni genere proportionis id, quod Theoremate ſexto huius lib. demonſtratum eſt in multiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet.

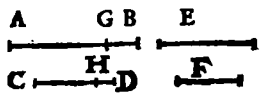
SI duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habeant ad eaſdem eandem proportionem: & reliquæ ad eaſdem eandem proportionem habebunt.

HABEANT enim A G, D H, ad C, & F, eandem proportionem, hoc eſt, ſit A G, ad C, vt D H, ad F. Item detractæ A B, D E, ad eaſdem C, F, eandem habeant proportionem; ita vt ſit quoque A B, ad C, vt D E, ad F. Dico & reliquas E G, E H, eandem habere proportionem ad eaſdem C, F, hoc eſt, eſſe B G, ad C, vt E H, ad F. Cum enim ſit vt A B, ad C, ita D E, ad F, erit conuertendo vt C, ad A B, ita F, ad D E. Quoniam igitur eſt A G, ad C, vt D H, ad F, & C, ad A B, vt F, ad D E: erit ex æqualitate A G, ad A B, vt D H, ad D E. Diuidendo ergo erit quoque vt B G, ad A B, ita E H, ad D E; & A B, ad C, vt D E, ad F: erit ex æquali B G, ad C, vt E H, ad F. Quod eſt propoſitum.

d 22. *quinti.*
e 17. *quinti.*
f 22. *quinti.*

XXV. THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.



SIT enim AB, ad CD, vt E, ad F, sitque AB, omnium maxima, & F, minima. Dico duas AB, & F, simul esse maiores duabus CD, & E, simul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, æqualis ipsi E; & ex CD, alia CH, æqualis ipsi F. Erit igitur AG, ad CH, vt E, ad F, hoc est, vt AB, ad CD. Quare cum sit tota AB, ad totam CD, vt ablata AG, ad ablatam CH: a erit quoque vt tota AB, ad totam CD, ita reliqua GB, ad reliquam HD: Est autem AB, (cum sit omnium maxima) maior, quam CD. Igitur & GB, maior erit quam HD. Quoniam vero AG, & E, æquales sunt; si ipsis addantur æquales F, & CH, nimirum F, ipsi AG, & CH, ipsi E; fient AG, & F, simul æquales ipsis E, & CH, simul. Additis igitur inæqualibus GB, & HD, fient AB, & F, simul maiores quam E, & CD, simul, cum GB, sit maior quam HD. Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

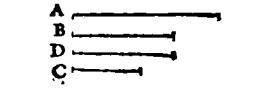
a 19. quinti.

SCHOLIVM.

NECESSARIO autem sequitur, si antecedens magnitudo vnius proportionis fuerit omnium maxima, consequentem alterius esse omnium minimam; vt in proposito exemplo cernere licet. Cum enim sit vt AB, ad CD, ita E, ad F; & AB, prima maior quam tertia E; b erit quoque CD, secunda maior quam F, quarta. Item quia maior est AB, quam CD, erit quoq; E, maior quam F, ob eandem proportionem AB, ad CD, & E, ad F, vt in scholio propos. 14. ostendimus. Quod si è contrario antecedens vnius proportionis fuerit omnium minima, erit consequens alterius omnium maxima, vt constat, si dicatur esse F, ad E, vt CD, ad AB. Debent quoque omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, alias non posset vna magnitudo componi ex maxima & minima; imò neque ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non multum dissimile, videlicet.

b 14. quinti.

SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt quam dupla reliquæ.



SIT vt A, ad B, ita B, ad C, sitque A, maxima, & C, minima. Dico A, & C, simul maiores esse dupla ipsius B. Sumpta enim

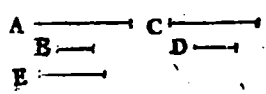
enim D, ipſi E, æquali, erit, vt A, ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, ſimul maiores erunt, quam B, & D, ſimul, a *vt proxime demonſtratum eſt, hoc eſt, quam dupla ipſius B. Quod eſt propoſitum.* a 25. *quinti.*

HIC finem Euclides imposuit quinto libro. Verum quia Campanus, & nonnulli alij adiecerunt aliàs quaſdam propoſitiones, quibus ſæpenumero grauiſſimi Scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, eaſque quaſi eſſent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, qua fieri poteſt, breuitate demonſtrare, nec non in numerum, ac ſeriem propoſitionum Euclidis referre. Omnes autem traduntur de magnitudinibus improportionalibus, quarum prima hæc eſt.

THEOR. 26. PROPOS. 26. XXVI.

SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

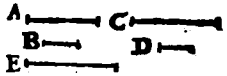
HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem eſſe proportione D, ad C. Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior quoque quam E, ad B; *b* ac propterea A, maior erit quam E. *c* Quare minor erit proportio B, ad A, maiorem, quam B, ad E, minorem: Sed vt eſt B, ad E, ita eſt conuertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor eſt quoque, quam D, ad C. Quod eſt propoſitum.



b 10. *quinti.* c 8. *quinti.*

SCHOLIVM.

EODEM fere modo demonſtrabimus, ſi prima ad ſecundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam, conuertendo maiorem eſſe proportionem ſecunda ad primam, quam quarta ad tertiam; dummodo vocem, maioris, mutemus in vocem, minoris, & contra.

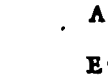


SIT enim minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico, conuertendo, B, ad A, maiorem habere proportionem, quam D, ad C. Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D; Eritque proportio A, ad B, etiam minor, quam E, ad B, d *ac propterea A, minor erit, quam E.* e *Quare maior erit proportio B, ad A, minorem, quam B, ad E, maiorem: Sed vt B, ad E, ita eſt conuertendo D, ad C. Igitur & proportio B, ad A, maior eſt, quam D, ad C. Quod eſt propoſitum.* d 10. *quinti.* e 8. *quinti.*

ALITER. Quoniam minor eſt proportio A, ad B, quam C, ad
g 26. quinti. *D; erit maior proportio C, ad D, quam A, ad B.* g *Igitur conuertendo minor erit proportio D, ad C, quam B, ad A, ac proinde maior erit proportio B, ad A, quam D, ad C. Quod eſt propoſitum.*

xxvij. THEOR. 27. PROPOS. 27.

SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque viciſſim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam ſecunda ad quartam.

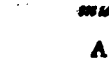


HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorem eſſe quoq; proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque eſſe E, ad B,
b 10. quinti. vt C, ad D, eritque proportio A, ad B, maior etiam quam E, ad B: b Ideoque A, maior erit quam E. c Quare maior erit proportio A, ad C, quam E, ad C. d Quoniam vero permutando eſt, vt
c 8. quinti. E, ad C, ita B, ad D, (cum poſita ſit E, ad B, vt C, ad D) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit quam B, ad D. Quod eſt pro-
d 16. quinti. poſitum.

SCHOLIVM.

SIMILITER oſtendemus, ſi prima ad ſecundam minorem habuerit proportionem, quam tertia ad quartam, & viciſſim prima ad tertiam minorem eſſe proportionem, quam ſecunda ad quartam.

SIT namque minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico permutando, minorem quoque eſſe proportionem A, ad C, quam B, ad D.



Intelligatur enim eſſe E, ad B, vt C, ad D; Eritque proportio A, ad B, minor quoq;
e 10. quinti. *quam E, ad B;* e *Ac propterea A, minor erit, quam E.* f *Quare minor erit propor-*
f 8. quinti. *tio A, ad C, quam E, ad C.* g *Sed permutando, vt E, ad C, ita B, ad D (cum poſita ſit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, mi-*
g 16. quinti. *nor quoque erit, quam B, ad D. Quod eſt propoſitum.*

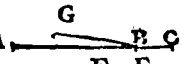
ALITER. Quoniam minor eſt proportio A, ad B, quam C, ad
h 27. quinti. *D, erit maior proportio C, ad D, quam A, ad B.* h *Ergo permutando, maior etiam erit proportio C, ad A, quam D, ad B:* i *ac proinde*
i 26. quinti. *conuertendo, minor erit proportio A, ad C, quam B, ad D. Quod eſt propoſitum.*

xxviij. THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI prima ad ſecundam habuerit maiorem proportionem,

tionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam maiorem proportionem, quàm compoſita tertia cum quarta, ad quartam.

SIT maior proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Dico & componendo maiorem eſſe proportionem A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Intelligatur enim eſſe G B, ad B C, vt D E, ad E F; eritque proportio A B, ad B C, maior quoque, quàm G B, ad B C; a Ideoque A B, maior quàm G B. Addita ergo communi B C; fiet A C, maior quàm G C; b maiorque proinde erit proportio A C, ad B C, quàm G C, ad B C. Sed componendo, c vt eſt G C, ad B C, ita eſt D F, ad E F. (quod poſita ſit G B, ad B C, vt D E, ad E F.) Maior ergo etiam erit proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Quod eſt propoſitum.

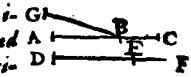


a 10. quinti. b 8. quinti. c 18. quinti.

SCHOLIVM.

EADEM ratione oſtendemus, ſi proportio prima ad ſecundam minor fuerit, quàm tertia ad quartam, minorem quoque eſſe proportionem prima & ſecunda ſimul, ad ſecundam, quàm tertia & quarta ſimul, ad quartam.

SIT enim minor proportio A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Dico & componendo minorem eſſe proportionem A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Intelligatur enim eſſe G B, ad B C, vt D E, ad E F; eritq; proportio A B, ad B C, minor quoque, quàm G B, ad B C; d ideoq; A B, minor erit, quàm G B. Addita ergo communi B C; fiet A C, minor, quàm G C; e minorq; propterea erit proportio A C, ad B C, quàm G C, ad B C. Sed componendo, vt G C, ad B C, ita eſt D F, ad E F. (quòd poſita ſit G B, ad B C, vt D E, ad E F.) Minor ergo etiam erit proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Quod eſt propoſitum.



d 10. quinti. e 8. quinti.

ALITER. Quoniam minor eſt proportio A B, ad E C, quàm D E, ad E F; erit maior proportio D E, ad E F, quàm A B, ad B C. f Igitur componendo, maior quoque proportio erit D F, ad E F, quàm A C, ad B C, ac propterea, minor erit proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. quod eſt propoſitum.

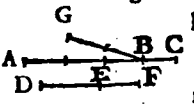
f 28. quinti.

THEOR. 29. PROPOS. 29. XXIX.

SI compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam maiorem habuerit proportionem, quàm compoſita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad ſecundam maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam.

SIT maior proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Dico & diuidendo maiorem esse proportionem A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Intelligatur enim esse G C, ad B C, vt D F, ad E F, eritque proportio A C, ad B C, maior quoque proportione G C, ad B C: a ideoque maior erit A C, quàm G C. Ablata ergo communi B C; maior erit A B, quàm G B: b Ac propterea maior erit proportio A B, ad B C, quàm G B, ad B C. c Sed diuidendo, vt est G B, ad B C, ita est D E, ad E F. (Posita namque est G C, ad B C, vt D F, ad E F.) Igitur maior quoque erit proportio A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Quod est propositum.

a 10. quinti.
b 8. quinti.
c 17. quinti.

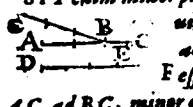


SCHOLIVM.

QVOD si prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem habuerit, quàm tertia cum quarta, ad quartam; habebit & diuidendo prima ad secundam, proportionem minorem, quàm tertia ad quartam.

SIT enim minor proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Dico diuidendo quoque minorem esse proportionem A B, ad B C, quam D E, ad E F. Intelligatur enim F esse G C, ad B C, vt D F, ad E F; erit d *proportio A C, ad B C, minor quoque, quàm G C, ad B C:* d *ideoque minor erit A C, quàm G C. Ablata ergo communi B C; minor erit A B, quàm G B:* e *Ac propterea minor erit proportio A B, ad B C, quàm G B, ad B C:* f *Sed diuidendo est, vt G B, ad B C, ita D E, ad E F, (Posita namque est G C, ad B C, vt D F, ad E F) Igitur minor quoque proportio erit A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Quod est propositum.*

d 10. quinti.
e 8. quinti.
f 17. quinti.

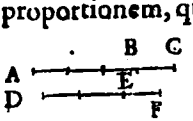


ALITER. Quoniam minor proportio est A C, ad B C, quàm D F, ad E F; erit maior proportio D F, ad E F, quàm A C, ad B C. g *Igitur & diuidendo, maior erit proportio D E, ad E F, quàm A B, ad B C: atque idcirco minor erit proportio A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Quod est propositum.*

g 29. quinti.

XXX. THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI composita prima cum secunda, ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quàm tertia cum quarta, ad tertiam.



SIT maior proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Dico per conuersionem rationis, minorem esse proportionem A C, ad A B, quàm D F, ad D E. Cùm enim sit A C, ad B C, ma-

BC, maior proportio, quam DF, ad EF; a erit & diuidendo, maior proportio AB, ad BC, quàm DE, ad EF. b Quare conuertendo, minor erit proportio BC, ad AB, quàm EF, ad DE; c Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius AC, ad AB, quàm totius DF, ad DE. Quod erat propositum. a 29. quinti. b 26. quinti. c 28. quinti

SCHOLIVM.

NON dissimili ratione ostendemus, si composita prima cum secunda minorem habuerit proportionem ad secundam, quam composita tertia cum quarta ad quartam, per conuersionem rationis, maiorem esse proportionem prima & secunda ad primam, quàm tertia & quarta ad tertiam.

SIT enim minor proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. Dico per conuersionem rationis maiorem esse proportionem AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Cùm enim minor sit proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF, d *erit & diuidendo minor proportio AF, ad BC, quàm DE, ad EF. Quare* e *conuertendo, erit maior proportio BC, ad AB, quàm EF, ad DE:* f *Ac proinde & componendo maior proportio erit AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Quod erat propositum.*



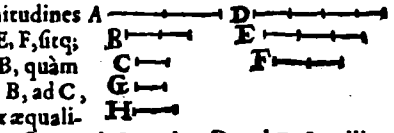
d 19. quinti. e 20. quinti. f 18. quinti.

ALITER. Quoniam minor est proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF; erit maior proportio DF, ad EF, quàm AC, ad BC. g *Ergo per conuersionem rationis minor erit proportio DF, ad DE, quàm AC, ad AB: Hoc est, maior proportio erit AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Quod erat propositum.* g 30. quinti.

THEOR. 31. PROPOS. 31. XXXI.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quàm primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quàm secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiam.

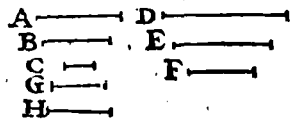
SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; maior proportio A, ad B, quàm D, ad E: Item maior B, ad C, quàm E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque esse A, ad C, quàm D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt E, ad F; eritque propterea proportio B, ad C; maior, quàm G, ad C; b Ideoque B, maior erit quàm G. Quare i maior erit proportio A, ad G, minorem quàm



h 10. quinti. i 8. quinti.

quàm A, ad B, maiorem: Ponitur autem proportio A, ad B, maior, quàm D, ad E. Multò ergo maior erit proportio A, ad G, quàm D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; erit-
a 10. quinti. que propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G; a Ideo-
b 8. quinti. que A, maior erit, quàm H. b Quare maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quàm minor quantitas H, ad
c 22. quinti. eandem C: c Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniã vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C, quàm D, ad F. Quod est propositum.

SCHOLIVM.



EADEM ratione ostendemus, si fuerit proportio A, ad B, qua D, ad E; At B, ad C, maior quàm E, ad F, Vel contrà, si proportio A, ad B, fuerit maior quàm D, ad E; At B, ad C, eadem, qua E, ad F, ex æqualitate maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quàm D, ad F.

SIT enim primùm A, ad B, vt D, ad E, sed maior proportio B, ad C, quàm E, ad F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F, erit q_5 *propterea*
d 10. quinti. *proportio B, ad C, maior, quam G, ad C:* d *Ideoque B, maior erit*
e 8. quinti. *quàm G.* e *Quare maior erit proportio A, ad G, quàm A, ad B. Ponitur autem A, ad B, vt D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior*
f 10. quinti. *erit, quàm D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E, erit* q_5 *propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G.* f *Ideoque A, ma-*
g 8 quinti. *ior erit, quàm H.* g *Quare maior erit proportio A, ad C, quàm H, ad*
h 22. quinti. *C.* h *Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoq; erit A, ad C, quàm D, ad F. Quod est propositum.*

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quàm D, ad E, sed B, ad C, vt E, ad F. Intelligatur esse C, ad C, vt E, ad F, erit q_5 *propterea etiam*
i 9. quinti. *B, ad C, vt G, ad C:* i *Ideoque B, ipsi G, æqualis erit.* k *Quare*
k 7. quinti. *erit A, ad G, vt A, ad B. Ponitur autem proportio A, ad B, maior quàm D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit quàm D, ad E. Intel-*
l 10. quinti. *ligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E. erit* q_5 *propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G,* l *Ideoq; A, maior erit, quàm H.* m *Quare maior proportio erit A, ad C, quàm H, ad C:* n *Atqui vt H, ad C,*
m 8. quinti. *ita est ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior erit quoq;* q_5 *proportio A, ad C,*
n 22. quinti. *quàm D, ad F. Quod est propositum.*

NON dissimiliter demonstrabimus, si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam proportionem extremarum esse minorem. Idemque eueniet, si fuerit A, ad B, vt D, ad E; sed minor sit proportio B, ad C, quàm E, ad F: Aut contrà, si proportio A, ad B,

fuerit

fuerit minor, quàm D, ad E, at B, ad C, ſit, vt E, ad F. Eadem namq; ſemper erit demonſtratio, ſi modo vocem, maioris, vbique permutes in vocem, minoris, vt patet.

QVOD ſi plures fuerint magnitudines tribus, ſine omnes proportiones in vno ordine magnitudinum ſint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum, ſine vna tantùm maior, quàm vna, vel duæ, &c. oſtendemus maiorem vel minorem quoque eſſe proportionem prima priorum ad vltimam, quàm prima poſteriorum ad vltimam, ea methodo, quam propoſ. 22 tradidimus: adhibendo propoſ. 12. loco huius propoſ. 31 quando tres magnitudines vnius ordinis proportionales ſunt tribus magnitudinibus alterius ordinis. Item vſurpando hoc ſcholium, quando vna tantùm proportio in tribus magnitudinibus æqualis eſt vnitatum proportioni in tribus magnitudinibus alterius ordinis.

NAM ſi maior eſt proportio A, ad B, quàm E, ad F, & maior B, ad C, quàm F, ad G, & maior C, ad D, quàm G, ad H; a *erit ex æquo maior proportio A, ad C, quàm E, ad G. Quia igitur rurſus maior proportio eſt A, ad C, quàm E, ad G; & maior C, ad D, quàm G, ad H;* b *erit quoq; ex æquo maior proportio A, ad D, quàm E, ad H.*

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

a 31. quinti.
b 31. quinti.

QVOD ſi tres magnitudines A, B, C, tribus E, F, G, proportionales ſint, ſed maior ſit proportio C, ad D, quàm G, ad H: c *erit ex æquo A, ad C, vt E, ad G. Ergo ex hoc ſcholio, maior proportio erit A, ad D, quàm E, ad H.*

c 22. quinti.

SI verò maior proportio ſit A, ad B, quàm E, ad F; ſed tres B, C, D, proportionales ſint tribus F, G, H, erit hoc ſcholio, maior proportio A, ad C, quàm E, ad G; Et rurſus maior A, ad D, quàm E ad H.

SI autem maior ſit proportio A, ad B, quàm E, ad F: ſed B, ad C, vt F, ad G; at maior proportio C, ad D, quàm G, ad H. Vel A, ad B, vt E, ad F, ſed maior proportio B, ad C, quàm F, ad G; at C, ad D, vt G, ad H, erit ſemper ex hoc ſcholio, maior proportio A, ad C, quàm E, ad G: ac proinde rurſus maior A, ad D, quàm E, ad H, &c.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

IDEM Euclides, ſi omnes proportiones vnius ordinis ſint minores omnibus proportionibus alterius ordinis, vel vna vel duæ. Item ſi ſint plures magnitudines, vt propoſitione 22. diximus.

THEOR. 32. PROPOS. 32. xxxij.

SI ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quam ſecundæ poſteriorum ad tertiam; Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quàm primæ poſteriorum ad ſecundam: Erit quoque ex æqualitate, maior propor-

proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque maior proportio A, ad B, quam E, ad F, Item maior B, ad C, quàm D, ad E, Dico esse quoque maiorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt D, ad E,

eritque propterea proportio B, ad C, maior quàm G, ad C. *a* Ideoque maior erit B, quam G. *b* Quare maior erit proportio A, ad G, minore, quàm eiusdem A, ad B, maiorem; Est autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Maior igitur ergo maior est proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt E, ad F, Quare propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G; *a* 10. *quinti.* *b* 8. *quinti.* *c* 10. *quinti.* *d* 8. *quinti.* *e* 23. *quinti.*

c eo ipso maior erit A, quam H. *d* Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quàm H, minor ad eandem C. *e* At vt H, ad C, ita est ex æqualitate, D, ad F. (Quoniam vt D, ad E, ita est G, ad C, & vt E, ad F, ita est H, ad G,) Maior ergo etiam est proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

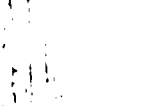
EADEM ratione, si fuerit proportio A, ad B, quæ E, ad F, At B, ad C, maior quam D, ad E. Vel contrà, proportio A, ad B, maior, quam E, ad F, At B, ad C, eadem, quæ D, ad E, ostendemus, ex æqualitate maiorem esse proportionem A, ad C, quàm D, ad F. Vt in proposita figura perspicitur.

HAVD secus ostendemus, si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam extremarum proportionem esse minorem, &c.

QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, demonstrabimus, maiorem quoque, vel minorem esse proportionem primæ priorum ad vltimam, quam primæ posteriorum ad vltimam, ea arte, qua & si summa propos. 23. &c. Quæ omnia perspicua sunt, si diligenter demonstrationes scholij præcedentis propè considerentur.

xxxiij. THEOR. 33. PROPOS. 33.

SI fuerit maior proportio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quàm totius ad totum.



SIT maior proportio totius AB, ad totam CD, quam ablatæ AE, ad ablatam CF. Dico & proportionem reliquæ EB, ad reliquam FD, maiorem esse, quàm totius AB, ad totam CD. Cùm enim maior sit propor-

proportio AB, ad CD, quàm AE, ad CF; *a* erit quoque permutando, maior proportio AB, ad AE, quàm CD, ad CF; *b* ac propterea, per conuersionem rationis, minor erit proportio AB, ad EB, quàm CD, ad FD, *c* Permutando igitur, minor quoque erit proportio AB, ad CD, quàm EB, ad FD, hoc est, EB, reliqua ad reliquam FD, maiorem habebit proportionem, quàm tota AB, ad totam CD. Quod est propositum.

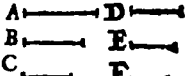
a 27. quinti. b 30. quinti. c 27. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si tota ad totam habuerit minorem proportionem, quàm ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam maiorem proportionem, quàm tota ad totam, & ex modo demonstrandi liquet, ponendo semper Vocem, minoris, pro Voce maioris; & Vocem, maioris, pro Voce, minoris.

THEOR. 34. PROPOS. 34. xxxiiij.

SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quàm secundæ ad secundam; & hæc maior, quàm tertiæ ad tertiam; & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem; quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoq; prima; minorem autem, quàm prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quàm vltima priorum ad vltimam posteriorum.



SINT primùm tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sit autem maior proportio A, ad D; quàm B, ad E; Item maior B, ad E, quàm C, ad F. Dico proportionem ipsarum A, B, C, simul ad ipsas D, E, F, simul maiorem esse proportione ipsarum B, C, simul ad ipsas E, F; simul; minorem verò, proportione A, ad D; maiorem denique etiam proportione C, ad F. Cùm enim maior sit proportio A, ad D, quàm B, ad E; *d* erit permutando maior A, ad B, quàm D, ad E, *e* Igitur componendo, maior erit proportio ipsarum A, B, simul ad B, quàm ipsarum D, E, simul ad E; *f* Permutando ergo rursus, maior erit proportio A, B, simul ad D, E, simul, quam B, ad E. Itaque cùm tota AB, ad totam DE, maiorem habeat proportionem, quàm ablata B, ad ablatam E; *g* habebit quoq; reliqua A, ad reliquam D, maiorem proportionem, quàm tota A, B, ad totã D, E. Eadem ratione, maior erit proportio

d 27. quinti. e 28. quinti. f 27. quinti. g 33. quinti.

tio B, ad E, quam totius B, C, ad totam E, F: Multò ergo maior e-
a 27. rit proportio A, ad D, quam B, C, totius ad totam E, F. *a* Permu-
quinti. tando igitur, maior erit proportio A, ad B, C, quàm D, ad E, F; *b* &
b 28. componendo ergo maior est proportio totius A, B, C, ad B, C,
quinti. quam totius D, E, F, ad E, F. *c* Et rursus permutando, maior pro-
c 27. portio omnium A, B, C, simul ad omnes D, E, F, simul quàm B, C,
quinti. ad E, F. quod est primum.

ITAQVE cùm sit maior proportio totius A, B, C, ad totam
d 33. D, E, F, quam ablatæ B, C, ad ablatam E, F, *d* erit & maior pro-
quinti. portio reliquæ A, ad reliquam D, quàm totius A, B, C, ad totam D, E, F, quod est secundum.

QVONIAM verò maior est proportio B, ad E, quàm C, ad
e 27. F; *e* erit permutando maior quoq; B, ad C, quàm E, ad K; *f* & co-
quinti. ponendo, maior totius B C, ad C, quàm totius E, F, ad F; *g* & rur-
f 27. sus permutando, maior B, C, ad E, F, quàm C, ad F. Est autem ma-
quinti. ior proportio A, B, C, ad D, E, F, vt ostendimus, quàm B, C, ad E, F.
g 27. Multò ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D,
quinti. E, F, quàm vltimæ C, ad vltimam F, quod est tertium.



DEINDE sint quatuor magnitudines vtrobiq; cum eadem hypothesi, hoc est, sit quoque maior proportio tertiæ C, ad F, tertiam, quàm G, quartæ ad H, quartam. Dico eadem consequi. Vt enim iam in tribus est ostensum, maior est proportio B, ad E, quàm B, C, G, ad E, F, H.
h 27. Multò ergo maior erit A, ad D, quàm B, C, G, ad E, F, H. *h* Per-
quinti. mutando ergo minor erit A, ad B, C, G, quàm D, ad E, F, H, *i* & co-
i 28. ponendo maior A, B, C, G, ad B, C, G, quàm D, E, F, H, ad E, F, H,
quinti. *k* & permutando A, B, C, G, ad D, E, F, H, maior quàm B, C, G, ad
k 27. E, F, H. quod est primum.
quinti.

ITAQVE cùm sit maior proportio totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quàm ablatæ B, C, G, ad ablatam E, F, H, *l* erit &
l 33. reliquæ A, ad reliquã D, maior proportio, quàm totius A, B, C, G,
quinti. ad totam D, E, F, H. quod est secundum.

QVONIAM. verò, vt in tribus est demonstratum, maior est proportio B, C, G, ad E, F, H, quàm G, ad H, & maior A, B, C, G, ad D, E, F, H, quàm B, C, G, ad E, F, H, vt fuit ostensum; multò maior erit proportio A, B, C, G, ad D, E, F, H, quàm vltimæ G, ad vltimam H; quod est tertium.

EADEM arte concludes, eadem consequi in quinque magnitudines per quatuor, & in sex, per quinque, & in septem, per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. Constat ergo totum Theorema, &c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM SEXTVM.

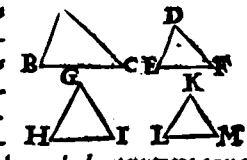
DEFINITIONES.

I.

SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

TRiangula ABC, DEF, similia dicentur, si fuerint aquiangula, ita vt angulus A, angulo D; & B, ipsi E; & C, ipsi F, aqualis sit: item latera circa aquales angulos proportionalia, hoc est, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF; & vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, & vt AC, ad CB, ita DF, ad FE.

QVOD si anguli vnius aquales fuerint angulis alterius, singuli singulis, at latera circa aquales angulos non proportionalia, aut contrà; non dicentur tales figuræ similes: cuiusmodi sunt quadratum, & figura altera parte longior. Ha etenim figuræ habent quidem angulos aquales, vtpote rectos, at latera vnius lateribus alterius proportionalia nõ sunt, quippe cùm latera quadrati circa quemuis angulum rectum habeant proportionem aqualitatis; latera verò figuræ altera parte longioris circa quemuis angulum rectum, proportionem inaqualitatis. Ex quibus constat, omnes figuras rectilineas aquiangulas, & aquilateras, qua & angulos & latera habent numero aqualia, esse similes, quamquam inter se maximè sint inaquales. Cuiusmodi sunt triangula aquilatera GHI, KLM. Propter laterum enim aqualitatem, erit GH, ad GI, vt KL, ad KM. Item GH, ad

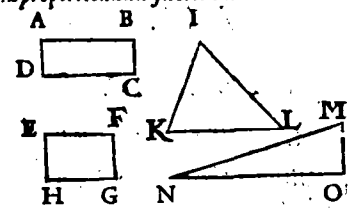


H I, & K L, ad L M, & G I, ad I H, & K M, ad M L, cùm semper sit proportio aqualitatis. Idem dicendum est de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de alijs id genus figuris rectilineis æquiangulis, atque æquilateris.

II.

RECIPROCÆ autem figuræ sunt, cùm in vtraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

VT si in parallelogrammis A B C D, E F G H, latera A B, B C, sint proportionalia lateribus E F, F G, & vtrobique sit & antecedens, & consequens diuersarum proportionum, hoc est, & sit ea proportio A B, ad E F, quæ F G, ad B C, seu eadem A B, ad F G, quæ E F, ad B C; (vtroque enim modo A B, est antecedens vnius proportionis & B C, consequens alterius, in figura A B C D, quemadmodum & primo modo E F, est consequens vnius, & F G, antecedens alterius; vel secundo modo F G, consequens, & E F, antecedens, in figura E F G H,) dicentur huiusmodi parallelogramma reciproca, quamuis similia non sint. Similiter erunt triangula I K L, M N O, reciproca, si fuerit & I K, ad M N, ita M O, ad I L; vel & I K, ad M O, ita M N, ad I L. Neque memini me inuenisse apud Geometras vsum reciprocarum figurarum in alijs figuris, quàm in parallelogrammis, & triangulis.



III.

SECVNDVM extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cùm vt tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.

SI linea recta quauis A B, ita diuidatur in C, inæqualiter, & sit, quemadmodum tota A B, ad maius segmentum A C, ita A C, maius segmentum ad C B, minus segmentum;



dicetur diuisa esse secundum extremam, & mediam rationem. Quam quidem diuisionem docebit Euclides propos. 30. huius lib. eamq; sub alijs verbis iam docuit lib. 2. propos. 11. & fiet perspicuum propos. 30. huius lib. Sunt autem penè innumeræ dignitates, atque & stellatæ lineæ hoc modo diuisæ, vt ex libris Stereometron constabit, præsertim Lib. 13. & non immeritò à quibusdam dicta sit diuina proportio, in quam linea eo modo est diuisa.

ALTI-

IV.

ALTITVDO cuiusque figuræ est linea perpendicularis à vertice ad basin deducta.

SI à Vertice A, trianguli A B C, ad basin B C, perpendicularis ducatur A G, dicemus hoc triangulum habere altitudinem, altitudinem A B C; ita vt tantam dicatur habere altitudinem triangulum, quanta est perpendicularis A G. Sic etiam perpendicularis D H, ducta à D, vertice trianguli D E F, ad basin E F, aut ad eius protractam, appellabitur altitudo trianguli D E F. Itaque si duo, aut plura perpendiculares à Verticibus ad bases, (siue hæ protractæ sint, siue non) demissa fuerint æquales, eandem dicentur huiusmodi figuræ habere altitudinem. Tunc autem huiusmodi perpendiculares erunt æquales, cum bases figurarum, ac vertices in eisdem constituti fuerint parallelis, eiusmodi sunt perpendiculares A G, D H, triangulorum A B C, D E F, in eisdem parallelis constitutorum. Cum enim anguli A G H, D H G, intra alternè eadem parte sint duobus rectis æquales, nempe duo recti, a erunt recta A G, D H, parallelæ; sunt autem & A D, G H parallelæ eo quòd ponantur triangula in eisdem esse parallelis constituta. Igitur parallelogrammum erit A D H G, & ob id latera opposita A G, D H, æqualia erunt. Rursum quia duo ex triangula habere altitudinem. Quod si bases æquales non fuerint, vt C, & F, bases vero A B, & D E, alterutra alterutri æqualis, altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex D in E F, aut ad eius protractam, ea dem non est perpendicularis ex G ad B C, aut ad eius protractam, hoc est triangula isosceles in eisdem parallelis posita, non æquabuntur, nisi &c.

a 28. primi.

b 34. primi.

RECTE vero ab Euclide dictum est, eam esse figuræ altitudinem, quæ per lineam perpendicularem, quæ à vertice ad basin ducitur, quoniam, vt fusius explicauimus in libello de Analemmate, linea, recte simplex, in libro de Analemmate, inquam, cum recte debet esse illata, determinata, per vnum punctum tantum, à quo ad reliquas lineas, potest quasi radius, circumferri, & sua extremitate describere, sola linea perpendicularis recte determinata, respondet, alia autem omnes recte inclinatæ, &c. Quæ dicere placuit, ut ostenderemus ad intimam considerationem, quæ nos fuerant lon. ac facio hoc eo diximus.

V.

RATIO ex rationibus componi dicitur, cùm rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QVONIAM denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem; (vt denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. ostendit, in quauis proportione quadruplæ antecedentem magnitudinem quater continere consequentem; denominator vero proportionis subquadruplæ, videlicet $\frac{1}{4}$. indicat antecedentem esse partem quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominator à Geometris, quantitas proportionis; vt idem significet quantitas alicuius proportionis, quod denominator. Vult igitur hæc definitio, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicatæ effecerint illam proportionem, seu (vt vertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, siue denominatorem. Vt proportio duodecuplæ componi dicitur ex duplæ, & sextuplæ; quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem sextuplæ, hoc est, in 6. Sic eadem proportio duodecuplæ dicitur componi ex triplæ & quadruplæ. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producitur idem denominator 12. duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecuplæ componi dicitur ex duplæ, triplæ, & quintuplæ. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 10. denominatorem illius. Sic etiam proportio duplæ dicetur componi ex sesquialtera, & sesquitertia: quia sesquialteræ denominator $1\frac{1}{2}$. ductus in $1\frac{1}{3}$. denominatorem sesquitertiæ gignit 2. denominatorem duplæ. Rursus eadem proportio duplæ componetur ex sesquiseptimæ, & supertripartientis quartas. Nam harum proportionum denominatores $1\frac{1}{7}$. $1\frac{3}{4}$. inter se multiplicati procreant 2. denominatorem duplæ. Item eadem duplæ proportio componi dicetur ex subsesquiquartæ, & duplæ sesquialteræ; propterea quod harum denominatores $\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{2}$. inter se multiplicati producunt quoq; eundem denominatorem 2. proportionis duplæ. Atque ita ex infinitis alijs proportionibus componi dicetur duplæ proportio: quod etiam de quauis alia proportione dici potest, vt paulò post patebit.

PORRO quemadmodum in magnitudinibus continuè proportionalibus, proportio primæ ad vltimam componi dicitur ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. cùm illa ex his intermedijs conflet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter se multiplicatis producatur, vt 5. libro defin. 10. exposuimus: ita & si fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, ex quibus dicitur componi, dicatur proportio primæ magnitudinis ad vltimam duplicata proportionis primæ ad secundam; si tres, triplicata, &c. Sic etiam in magnitudinibus quibuscunq; ordine positis, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c.

denec

donec exiterit proportio; quoniam denominator proportionis prima magnitudinis ad vltimam consurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter se multiplicatis. Quod quidem primum inductione quadam Theonis Alexandrini, quam hoc loco adducit, confirmabimus: Deinde verò idem duabus demonstrationibus, quarum vna traditur ab Eutocio Ascalonita lib. 2. Archimedis de sphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1. lib. Apollonij Pergæi de conicis elementis propos. 11. Altera autem à Vitellione lib. 1. propos. 13. sua Perspectiua, comprobabimus.

THEON igitur rem propositam ita conatur absoluere Habeat AB, ad CD, rationem datam, veluti duplam, aut triplam, aut quamlibet aliam; & CD, ad EF, eandem quoq; datam. Dico quòd ipsius AB, ad EF, ratio constat ex AB, ad CD, & ex CD, ad EF, ratione, vel quòd ipsius AB, ad CD, rationis quantitas multiplicata in ipsius CD, ad EF, rationis quantitatem efficit ipsius AB, ad EF, rationis quantitatem. Sit enim primum AB, quàm CD, maior; & CD, quàm ER; & sit quidem AB, ipsius CD, dupla, & CD, ipsius EF, tripla. Quoniam igitur CD, ipsius EF, tripla est, ipsius autem CD, dupla est AB; erit AB, ipsius EF, sextupla. Quoniam si triplum alicuius duplicauimus, fit sextuplum; hoc enim est propriè compositio. Vel sic. Quoniam AB, dupla est ipsius CD, dimidatur AB, in ipsis CD, æqualia, hoc est, AG, & GB: & quoniam CD, ipsius EF, tripla est; æqualis autem est AG, ipsi CD; & AG, igitur ipsius EF, tripla est: Id propterea & GB, ipsius EF, tripla est. Tota igitur AB, ipsius EF, sextupla est. Ipsius igitur AB, & EF, ratio connectitur per CD, medium limitem, composita ex ipsius AB, ad CD, & CD, ad EF, ratione.



SIMILITER autem, & si minor fuerit CD, vtraque ipsarum AB, & EF, idipsum colligitur. Sit enim rursus AB, ipsius CD, tripla, At CD, ipsius EF, sit dimidia. Et quoniam CD, ipsius EF, dimidia est, ipsius autem CD, tripla est AB, erit AB, sesquialtera ipsius EF. Si enim alicuius dimidium triplicauimus, habebit ipsum semel, & dimidium. At quoniam AB, ipsius CD, tripla est, & CD, ipsius EF, dimidia: qualium AB, æqualium ipsi CD, trium, talium est EF, duorũ. Quare sesquialterum est AB, ipsius EF. Igitur ratio ipsius AB, ad EF, connectitur per CD, medium limitem, composita ex ipsius AB, ad CD, & CD, ad EF, ratione.



SED tam rursus sit CD, vtraque ipsarum AB, & EF, maior, & sit quidem AB, ipsius CD, dimidiũ, & CD, ipsius EF, sesquitertium. Quoniam igitur, qualium est AB, duorum, talium est CD, quatuor, qualium autem CD, quatuor, talium EF, trium. Et qualium igitur AB, duorum, talium

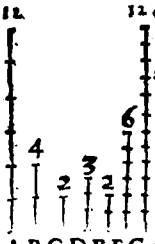


talium EE, trium. Connectitur igitur rursus ratio ipsius A B, ad E F, per C D, medium limitem, qua duorum est ad tria. Similiter quoque & in pluribus, & in reliquis casibus. Et manifestum est, quod si à composita ratione quauis vna compositarum auferatur, vno simplicium electo, reliqua compositarum assumetur.

Hac ad verbum desumpsimus ex Theone, iuxta interpretationem Zamberti.

EVTOCII verò demonstratio ita se habet.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Quod quidem facilè demonstrabitur, assumpto prius hoc principio. Quantitatem seu denominatorem cuiusuis proportionis multiplicatum in consequentem magnitudinem proportionis eiusdem, producere antecedentem. Cum enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad consequentem, necesse est, consequentem sumptum secundum denominatorem, hoc est, multiplicatum in denominatorem, restituere antecedentem. Vt quia 12. ad 3. habent proportionem quadruplam, idcirco 3. multiplicatu in 4. producunt 12. Item quia 4. ad 20. habent proportionem subquintuplam, cuius denominator est $\frac{1}{5}$. sit, vt $\frac{1}{5}$ in consequentem 20. 12 efficiat 4. &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D, proportionis verò B, ad C, denominator sit E, & D, multiplicans E, producat F. Dico F esse quantitatem, siue denominatorem proportionis A, ad C, hoc est, si multiplicetur F, in C, produci A. Producatur namq; G, ex multiplicatione F, in C. Dico G, ipsi A, aequalem esse, ac proinde & A, fieri ex F, in C. Cum enim D, sit denominator proportionis A, ad B, si multiplicetur D, in B, producetur A. Eadem ratione si E, multiplicetur in C, producetur B. Quoniam igitur F, & E, multiplicantes C, producũt G, & B, (nam ex F, in C, fit G, & ex E, in C, fit B, vt dictum est) a erit vt F, ad E, ita G, ad B. Rursus quia D, multiplicans E, & B, producit F, & A, b erit vt E, ad B, ita F, ad A, & permutando vt E, ad F, ita B, ad A, & conuertendo rursus, vt F, ad E ita A, ad B. Vt autem F, ad E, ita ostensum est esse G, ad B. Igitur vt A, ad B, ita G, ad B; Ideoq; aequales erunt quantitates A, & G. Quam ob rem cùm G, producatur ex F, in C, producetur quoq; A, ex F, in C: propterea q; F, quantitas erit proportionis A, ad C. Quod est propositum.



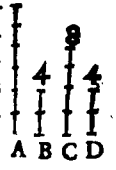
a 18. septimi.

b 17. septimi.

A, 100. E, 20. C, 5.
D, 5. E, 4.
G, 100. F, 20.

SIMILIS ratio est in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio prima ad vltimam componetur ex proportionibus prima ad secundam, & secunda ad tertiam, & tertia ad quartam, &c. Vt si fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, componetur proportio A, ad D,

ad D, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Nam si intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio 12. *A, ad D, ex proportionibus A, ad C, & C, ad D, vt ostensum est. At vero eadem ratione proportio A, ad C, componetur ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoq; ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Quod est propositum. Idem cernes in 5. 6. 7. vel quotcunq; magnitudinibus.*



VITELLIO denique huiusmodi affert demonstrationem.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Hoc autem demonstrabitur, assumpto eodem principio Eutocij. Denominatorē videlicet proportionis multiplicatum in magnitudinem consequentem proportionis producere antecedentem magnitudinem. Sit namq; D, denominator proportionis A, ad B; & E, denominator proportionis B, ad C, At F, denominator proportionis A, ad C. Demonstrandum est igitur F, produci ex D, in E, quod ita fiet. Quoniam quod ex F, prima quantitate in C, quartam producitur, aquale est ei, quod ex D, secunda in B, tertiam gignitur, cùm semper producatur A; (nam ex F, denominatore in C, consequentem producitur A, antecedens;) similiter ex D, denominatore in B, consequentē producitur antecedens A,) 2 erit. Vt F, prima ad D, secundam, ita B, tertia ad C, quartā. Cùm igitur E, sit denominator proportionis B, ad C; erit quoq; E, denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans consequētem D, producet antecedentem F. Quod est propositum. Hac Vitellio. 12



A, 100. B, 20. C, 5. D, 5. E, 4. F, 20. a 19. *septimi.*

IDEM ostendetur in pluribus magnitudinibus, vt prius ex Eutocio. Velut, datis 6. magnitudinibus A, B, C, D, E, F, componetur proportio A, ad F, ex proportionibus A, ad B; B, ad C, C, ad D; D, ad E; & E, ad F. Nam vt ostensum est, proportio A, ad F, componitur ex proportione A, ad B, & B, ad F. Hac autem proportio B, ad F, componitur ex proportione B, ad C, & C, ad F: Et hac proportio C, ad F, componitur ex proportione C, ad D, & D, ad F: Atq; hac tandem proportio D, ad F, componitur ex proportione D, ad E, & E, ad F. Igitur proportio A, ad F, ex omnibus proportionibus intermedijs componitur: hoc est, denominator proportionis A, ad F, gignitur ex quinque denominatoribus quinq; proportionum intermediarum inter se multiplicatis.

A. B. C. D. E. F.
12. 6. 3. 2. 1. 4.

EX his liquidò constat id, quod ad defin. 10. lib. 5. docuimus: nimirum, Continuatis quotlibet quantitatibus continuè proportionalibus, proportionem primæ ad vltimam componi ex omnibus proportionibus intermedijs æqualibus, hoc est, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex denominatore proportionis, quam prima habet ad secundam, in seipsum multiplicato, & ex eodem in numerum productum, & sic deinceps, donec tot multiplicationes fiant quot sunt, quot proportiones inter primam quantitatem, & vltimam sunt interpositæ: Adeò vt duplicata proportio alicuius proportionis consurgat, cùm huius proportionis denominator bis ponatur, (propter duas æquales proportiones inter primam quantitatem, & tertiam positas) atq; ita in se multiplicatur; triplicata verò, quando idem denominator ter ponitur, (propter tres proportiones æquales inter primam quantitatem, & tertiam positas) atq; ita multiplicatur, primùm in se, deinde iterum in numerum productum. Et sic de quadruplicata, quintuplicata, & de alijs dicendum est in infinitum. Est enim eadem demonstratio in magnitudinibus continuè proportionalibus, & in magnitudinibus non proportionalibus: Solùm in illis denominatores æquales erunt. Vt si A, B, C, ponantur continuè proportionales, æquales erunt denominatores D, E; & F, erit denominator proportionis duplicatæ, &c.

ETSI autem demonstratio tam Eutocij, quàm Vitellionis propriè quadrat in proportiones tantùm rationales, cum vtraq; propositionibus lib. 7. Euclidis nitatur: quia tamen, quæ de numerorum proportionibus demonstrantur, conueniunt quoque magnitudinibus incommensurabilibus, hoc est, proportionibus irrationalibus, dici potest vtraque demonstratio omnibus proportionibus conuenire.

VERVM etiamsi non constaret, propositis pluribus magnitudinibus, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex multiplicatione denominatorum intermediarum proportionum inter se, vt demonstrauimus, non tamen propterea demonstrationes, in quibus compositio proportionum adhibetur, minus certæ erunt: quippe cùm in illis hac denominatorum multiplicatio nō vsurpetur. Nam quemadmodum, propositis pluribus magnitudinibus continuè proportionalibus, primam ad tertiam dixit Euclides defin. 10. lib. 5. habere proportionem duplicatam eius, quam prima habet ad secundam; nimirum compositam ex duabus proportionibus intermedijs, æqualibus: primam verò ad quartam habere proportionem triplicatam eius, quam prima ad secundam habet, hoc est, compositam ex tribus intermedijs proportionibus æqualibus, & sic deinceps; nulla facta mentione multiplicationis denominatorum: ita quoque, si ponantur ordine plures magnitudines, eiusdem generis non continuè proportionales, dicetur prima ad vltimam habere proportionem compositam ex omnibus proportionibus intermedijs, licet inter se non sint

omnes

omnes æquales, siue aliqua sint maioris inæqualitatis, & aliqua æqualitatis, & aliqua minoris inæqualitatis, siue omnes eiusdem generis sint, solum eam ob causam, quod illæ proportiones intermediæ sint inter extremas duas magnitudines interiectæ; quemadmodum defin. 10. lib. 5. proportio primæ ad tertiam dicebatur duplicata, hoc solo nomine, quia duæ proportiones æquales interpositæ sunt inter extremas duas magnitudines: Adeo vt non sit aliud discrimen inter hanc compositionem proportionum, & illam duplicationem, triplicationem, &c quæ lib 5. explicata est, quam quod in duplicatione, triplicatione &c. proportionum interiiciuntur proportiones omnes æquales, in compositione vero proportionum non necesse est, interpositas proportiones æquales esse. Multiplicatio tamen denominatorum vtilis est, vt scíamus, quænam sit illa proportio, quæ alterius dicitur duplicata, triplicata &c vel quæ ex propositis proportionib. composita esse dicitur.

VERBI gratia. Vt sciamus, quæ proportio sit illa, quæ dicitur duplicata proportionis decuplæ, ponemus 10. denominatorem decuplæ proportionis bis hoc modo, 10. 10. & vnum in alterum ducemus. Numerus enim genitus 100. denominator est proportionis, quæ decuplæ est duplicata. Vt autem habeamus denominatorem proportionis, quæ eiusdem decuplæ triplicata dicitur, ponemus 10. denominatorem ter hoc modo 10 10. 10. & primum in secundum ducemus, & numerum productum 100. in tertium. Nam numerus hic procreatus 1000. denominat proportionem decuplæ triplicatam. Quod de aliis quoque proportionibus dicendum est. Sed hoc etiam discemus absque denominatorum multiplicatione. Nam si continuentur tres numeri in proportione data, vt in tractatu proportionum, cum de proportionalitate Geometrica agebamus, docuimus, habebunt duo extremi numeri proportionem datæ proportionis duplicatam: si verò continuentur quatuor numeri, habebunt extremi duo triplicatam proportionem datæ proportionis. Conferendus autem est maior cum minore, quando data proportio est maioris inæqualitatis; minor vero cum maiore, cum data proportio minor inæqualitatis est. Veluti si desideretur proportio decuplæ proportionis duplicata, continuabimus tres numeros in proportione decuplæ hoc modo, 1. 10. 100. Vel 3. 10. 300. Nam proportio 100. ad 1. vel 300. ad 3. quæ centuplæ est, dicetur decuplæ duplicatæ. Eodem modo proportio 1. ad 100. vel 3. ad 300. quæ subcentuplæ est, dicitur duplicata proportionis subdecuplæ 1. ad 10. vel 3. ad 30.

EADEM ratione vt cognoscamus, quænam sit proportio illa, quæ verbi gratia compons dicitur ex tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia, statuemus ordine harum denominatores hoc modo, 3. 2. 1½. 1⅓. eosque inter se multiplicabimus, primum 3. in 2. deinde productum numerum 6. in 1½. & hunc rursus numerum procreatum 9. in 1⅓. & sic deinceps, si plures essent denominatores. Vltimus enim productus 12. est denominator proportionis, quæ ex datis

proportionibus componi dicitur; ita vt propertio duodecupla componi dicatur ex tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia. Hos autem intelligemus etiam sine hac multiplicatione denominatorum. Si namque proportiones componentes continuentur in numeris, ita vt primus ad secundum habeat primam proportionem componentem, secundus ad tertium secundam, tertius ad quartum tertiam, quartus ad quintum quartam, & ita deinceps; erit proportio, quam primus numerus habet ad vltimum, composita ex datis proportionibus. Vt in proximo exemplo proportiones datæ, videlicet triplæ, duplæ, sesquialteræ, & sesquitertiæ, continuantur in his numeris 36. 12. 6. 4. 3. Vel in his 108. 36. 18. 12. 9. Vel in his 12. 4. 2. $1\frac{1}{2}$. 1. Vbique enim primus numerus ad secundum proportionem habet triplam, secundus ad tertium duplam, tertius ad quartum sesquialteram, & quartus ad quintum sesquitertiam. Proportio ergo primi ad vltimum, quæ duodecupla est, componi dicitur ex quatuor illis proportionibus, vt prius. Quo pacto autem quotuis proportiones continuandæ sint in numeris integris minimis, docet Euclides lib. 8. propos. 4.

ITAQVE cum Euclides demonstrat hoc lib. propos. 23. æquiangula parallelogramma habere proportionem compositam ex duabus proportionibus, quas duo latera circa vnum angulum vnius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, nihil aliud intelligit, quàm si duæ illæ proportiones laterum continuentur in tribus quantitatibus, eam proportionem parallelogramma inter se habere, quam prima quantitas ad tertiam habet. Vt si proportio vnius lateris primi parallelogrammi ad vnum latus secundi fuerit, vt 8. ad 3, proportio verò alterius lateris ad alterum latus, vt 1. ad 2. nihil aliud est intelligendum, quam si sumantur tres numeri, 24. 9. 18. quorum primus ad secundum est, vt 8. ad 3. & secundus ad tertium, vt 1. ad 1. proportionem parallelogrammi primi ad secundum esse eandem, quam habet primus numerus 24. ad tertium 18. quæ est sesquitertia. Proportio enim 24. ad 18. componitur, vt dictum est, ex proportionibus 24. ad 9 & 9 ad 18. hoc est, ex proportionibus 8. ad 3. & 1. ad 2. quas inter latera esse diximus.

PORRO quemadmodum interpretes nonnulli Euclidis volebant in defin. 10. lib. 5. duplicatam proportionem, & triplicatam, &c. verè esse maiorem illa, cuius duplicata, vel triplicata dicitur, nimirum duplam, vel triplam, &c. ac propterea eam definitionem esse intelligendam de magnitudinibus continuè proportionalibus in proportione maioris inæqualitatis; quod tamen falsum esse ibi indicauimus: ita videri volunt etiam in hac compositione proportionum, extremarum proportionem, quæ ex proportionibus intermediis componi dicitur, verè esse maiorem qualibet intermediarum componentium, vtpotè conflatam ex additione omnium intermediarum proportionum inter se, ac proinde omnes intermedias proportiones debere esse minores extremarum pro-

vnam proportione. Verum hoc falsum est, & Euclidi omnino repugnans, vt ex proximo exemplo, quod ex propos. 23. huius lib. protulimus, perspicuum est. Nam propositis tribus hisce numeris, 24. 9. 18. quæ habent easdem proportiones ordine inter se, quas latera vnius parallelogrammi ad latera alterius parallelogrammi habent; erit proportio parallelogrammi ad parallelogrammum eadem, quæ 24. ad 18. nimirum ex laterum proportionibus composita, vt Euclides demonstrat. Quis autem non videt, proportionem 24. ad 18. quæ sesquitertia est, multo minorem esse proportione 24. ad 9. quæ dupla est superbipartiens tertias? Sed de hac re plura scribemus ad finem lib. 9.

HÆC cum ita sint, si quis velit habere quotlibet proportiones datum proportionem componentes, id est, quarum denominatores inter se multiplicati gignant data proportionis denominatorem, statuendi erunt inter duos numeros data proportionis quoscunque, tot numeri medij quicunque, quot proportiones componentes desiderantur, minus vno. Vt si quis velit tres proportiones, ex quibus centupla proportio componatur, satisfiet quæstioni, si inter 100. & 1. duos numeros ponamus medios, hoc modo, 100. 50. 10. 1. Nam extremorum proportio 100. ad 1. componitur ex intermedijs tribus, hoc est, ex dupla, quintupla, & decupla. Ita quoque si alios numeros statuas medios hoc modo, 100. 10. 3. 1. componetur eadem proportio 100. ad 1. ex decupla, tripla sesquitertia, & tripla. Sic etiam vides hic, 2. 3, 1. 10. 1. duplam proportionem compositam esse ex quatuor, nimirum ex subsesquialtera, tripla, subdecupla, & decupla. Quod si quis petat quotuis proportiones datam proportionem componentes, quæ etiam omnes datæ sint præter vnam, continuabimus ab vno extremo datæ proportionis omnes datas proportiones componentes ordine. Ha enim cum proportione, quam vltimus medius ad alterum extremum datæ proportionis habet, component datum proportionem. Vt si quis dicat, da mihi quinque proportiones, quarum quatuor sint, dupla, tripla, sesquialtera, & quintupla sesquitertia, componentes proportionem sesquialteram inter 9. & 6. statuemus hos quatuor numeros medios, 9. $4\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{10}$. 6. ita vt 9. ad $4\frac{1}{2}$. habeant proportionem duplam, & $4\frac{1}{2}$. ad $1\frac{1}{2}$. triplam, & $1\frac{1}{2}$. ad 1. sesquialteram: & 1. ad $\frac{1}{10}$. quintuplam sesquitertiam. Ex his etenim quatuor, vna cum proportione $\frac{1}{10}$. ad 6. quæ eadem est, quæ 1. ad 32. componitur proportio sesquialtera 9. ad 6. Idem eueniet, si data quatuor proportiones continuentur à minori extremo 6. hoc modo, 6. 12. 36 54. 288. 9. ita vt 12. ad 6. habeant proportionem duplam; & 36. ad 12. triplam; & 54. ad 36. sesquialteram; & 288. ad 54. quintuplam sesquitertiam. Nam quinta proportio 9. ad 288. eadem est, quæ prius $\frac{1}{10}$ ad 6. qualis est 1. ad 32.

EX hu nullo negotio satisfaciemus quæstioni, qua quispiam postulat sibi dari quotuis numeros, qui inter se multiplicati procreent datum quemcunque numerum. Si namque sumantur duo numeri habentes

bentes proportionem à dato numero denominatam, & inter eos ſtatuantur tot numeri quicunque minus vno, quot numeri deſiderantur, erunt denominatores proportionum intermediarum, qua quaruntur. Nam ij inter ſe multiplicati producunt denominatorem proportionis extremorum, vt demonſtratum eſt, hoc eſt, numerum datum. Velut ſi quis petat tres numeros, ex quorum mutua multiplicatione gignantur 100. ſtatuemus inter duos numeros 500. 5. centuplam proportionem habentes, duos medios numeros quoſcunque, hoc modo 500. 250. 50. 5. eruntque tres quaſiti numeri, 2. 5. 10. nimirum denominatores proportionum 500. ad 250. & 250. ad 50. & 50. ad 5. Nam ex 2. in 5. fiunt 10. & ex 10. in 10. fiunt 100. Quod ſi quis poſtulet vnum numerum, qui vna cum quotlibet aliis datis, ſi inter ſe multiplicentur, producat datum quemcunq; numerum: Sumendi erunt rurſus duo numeri proportionem habentes à dato numero, qui producì debet, denominatam, & ab alterutro eorum continuanda proportiones à datis aliis numeris denominata. Denominator enim proportionis inter alterum numerum, & vltimum continuatorum erit numerus, quem quarimus. Vt ſi dentur hi quatuor numeri, 2. 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. quaraturque quintus alius, qui in numerum ex illorum mutua multiplicatione productum ductus gignat datum hunc numerum $1\frac{1}{2}$. accipiemus duos numeros 9. & 6. proportionem ſeſquialteram habentes à dato numero $1\frac{1}{2}$. denominatam; & à 9. continuabimus quatuor proportiones à 2. 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. denominatas, hoc modo, 9. $4\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{16}$. 6. Quintus enim numerus quaſitus erit denominator proportionis $\frac{3}{16}$. ad 6. nimirum $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2}$. Nam quinque hi numeri 2. 3. $1\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{3}$. $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$. quorum priores quatuor dati ſunt, quintus autem inuentus, inter ſe multiplicati procreant datum numerum $1\frac{1}{2}$. Idem quintus numerus $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$. inuenietur, ſi quatuor proportiones à datis numeris denominatæ continuentur à numero 6. hoc modo, 6. 12. 36. 54. 288. 9. Denominator enim proportionis 9. ad 288. eſt $\frac{1}{3}\frac{1}{2}$. vt prius. Sic etiam ſi quarendi ſint quatuor numeri, qui inter ſe multiplicati procreent 1. ſtatuemus inter quoſuis duos numeros æquales proportionem æqualitatis ab 1. denominatam habentes, tres medios numeros quoslibet, vt hic vides, 4. 2. 1. 3. 4. Nam denominatores proportionum 4. ad 2. & 2. ad 1. & 1. ad 3. & 3. ad 4. nimirum, 2. 2 $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{4}$. ſunt quatuor numeri, qui quaruntur, quippe cum inter ſe multiplicati gignant 1.

FACILIVS huiuſmodi quæſtiones ſoluuntur, ſi tot numeri quicunq;, minus vno, quot petuntur, inter ſe multiplicentur. & per vltimum numerum productum, diuidatur datus numerus, qui gigni debet. Quotiens enim & aſſumpti numeri, qui multiplicati inter ſe ſunt, erunt quos quarimus. Vt in proxima quæſtione, ſi hi tres numeri, verbi gratia, 4. 5. 6. inter ſe multiplicentur, & per numerum productum 120. diuidatur 1. qui produci debet, fiet Quotiens $\frac{1}{120}$. Quatuor ergo

Auer ergo numeri quæsiti sunt 4. 5. 6. $7\frac{1}{2}\frac{1}{0}$. *Nam ex* 4. *in* 5. *fiunt* 20. *& ex* 20 *in* 6. *fiunt* 120. *& ex* 120. *in* $7\frac{1}{2}\frac{1}{0}$ *fit* 1.

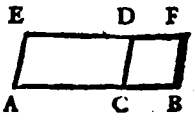
POSTREMO neq; hoc prætermittendum est, videlicet: Quemadmodum, ordine posito quotcunque numeris, denominator proportionis extremorum producitur ex omnibus denominatoribus intermediarum proportionum, vt demonstrauimus; ita posito quotcunq; numeris ordine, ita tamen, vt quilibet insequens sit suo antecedente maior, differentia extremorum coacernatur ex omnibus differentiis intermediorum numerorum. Vt hic 3. 7. 12. 20. 30. 100. 713. *differentia inter* 3. *&* 713. *est* 710. *At differentia inter* 3. *&* 7. *est* 4. *Inter* 7. *&* 12. *est* 5. *Inter* 12. *&* 20. *est* 8. *Inter* 20. *&* 30. *est* 10. *Inter* 30. *&* 100. *est* 70. *Inter* 100. *denique &* 713. *est* 613. *qua omnes differentia* 4. 5. 8. 10. 70. 613. *conficiunt* 710. *differentiam extremorum.*

ATQVE hæc dicta sint de quinque definitionibus ab Euclide hoc 6. *lib. positis, quibus addendam esse censemus sequentem sextam, qua multum conducet, vt facilius intelligantur* 27. 28. 29. *&* 30. *propositiones huius libri, & quam plurima alia decimi libri. Ea autem est eiusmodi.*

VI.

PARALLELOGRAMMVM secundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat maiorem lineam, quam sit ea, secundum quam applicatur: ita tamen, vt parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, constituatque cum eo totum vnum parallelogrammum.

SIT data recta linea A B, supra quam constituatur parallelogrammum A C D E, quod non occupet totam lineam A B, sed desit C B; & ducta B F, parallela ipsi C D, donec cum E D, protracta conueniat in F, compleatur totum parallelogrammum A B F E. Parallelogrammum igitur A D, applicatum secundum rectam A B, deficere dicitur parallelogrammo D B, ita vt D B, appelletur defectus.



RVRSVS sit data recta linea A C, supra quam constituatur parallelogrammum A B F E, quod habeat latus A B, maius recta data A C; & ducatur C D, ipsi B F, parallela. Parallelogrammum igitur A F, applicatum secundum rectam A C, excedere dicitur parallelogrammo D B, ita vt D B, vocetur excessus.

HIC autem defectus D B, vel excessus, in rectangulis quidem esse

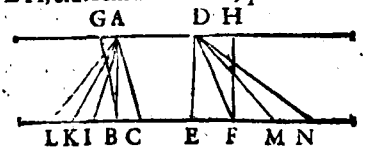
potest

potest vel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem vel Rhombus, vel Rhomboides, vt persæpenumero est.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.

SINT duo triangula ABC, DEF, eandem habentia altitudinem, quorum bases BC, EF. Item duo parallelogramma CG, EH, eiusdem altitudinis, quorum eædem bases BC, EF. Dico ita esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH, vt est basis BC, ad basin EF. Hoc est, si basis BC, statuatur prima magnitudo, & basis EF, secunda: At triangulum ABC, vel parallelogrammum CG, tertia, & triangulum DEF, vel parallelogrammum EH, quarta, æque multiplicia primæ ac tertiæ ab æque multiplicibus secundæ & quartæ vel vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere, vt definitio 6. lib. 5. exigit. Collocentur enim tam triangula, quam parallelogramma inter easdem parallelas GH, LN. (Nam vt in defin. 4. dictum est, triangula & parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter easdem fuerint constituta parallelas: sic enim perpendiculares à verticib. ad bases demissæ æquales erunt,) & ex BL, sumantur quotcunq; rectæ BI, IK, KL, ipsi BC, æquales; Item ex FN, abscindantur quotcunque rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ AI, AK,



a 38. primi. AL; DM, DN. a Erunt igitur triangula ABC, AIB, AKI, ALK, super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, inter se æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula DEF, DFM, DMN. Quam multiplex est ergo recta CL, rectæ BC, tam multiplex quoque erit triangulum ACL, trianguli ABC; & quam multiplex est recta EN, rectæ EF, tam quoque multiplex erit triangulum DEN, trianguli DEF, quia in tot triangula æqualia sunt diuisa tota triangula ACL, DEN, in quot rectas æquales sectæ fuerunt totæ rectæ CL, EN. Quoniam vero si basis CL, æqualis fuerit basi EN, b necessario triangulum ACL,

b 38. primi. æquale est triangulo DEN, ac proinde si CL, maior fuerit quam EN, necessario ACL, maius est quam DEN, & si minor, minus; deficient propterea vna CL, recta, & triangulum ACL, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ ABC, ab EN, recta triangulo DEN, æque multiplicibus secundæ EF, & quartæ DEF,

DEF, vel vna æqualia erunt, vel vna excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. a Quare quæ proportio est primæ BC, ad secundam EF, basis ad basim, ea est tertiæ ABC, ad quartam DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad basin, ita est triangulum ad triangulum. quod est propositum. a 6. def. quint.

QVONIAM autem b vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est parallelogrammum CG, (c quod duplum est trianguli ABC) ad parallelogrammum EH; (d quod est duplum trianguli DEF) perspicuum est, e ita quoque esse parallelogrammum ad parallelogrammum, vt est basis ad basin. Quod tamen eodem argumento confirmari potest, quo vsi sumus in triangulis, si prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipsi BG; nec non ex punctis M, N, parallelæ ipsi FH, &c. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo; ita se habent inter se, vt bases. Quod erat demonstrandum. b 15. quint. c 34. primi. d 34. primi. e 11. quinti.

SCHOLIVM.

SED & conuersum huius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt bases, æquales habent altitudines, vel eandem. h

SIT triangulum ABG, ad triangulum DEF; & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt basis BC, ad basin EF. Dico eorum altitudines, nimirum perpendiculares AI, DK, esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit AI, si fieri potest, maior, quam DK. Abscissa igitur IL, ipsi DK, æquali, ductaque LM, ipsi BC, parallela, quæ latus AC, secet in N, connectaque recta BN; f erit NBC, triangulum ad triangulum DEF, vt basis BC, ad basin EF; cum altitudines LI, DK, ponantur æquales: Sed fuit etiam ABC, ad DEF, vt BC, ad EF. g Igitur triangula NBC, ABC, ad triangulum DEF, eandem habent proportionem; h Ac proinde æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt altitudines AI, DK, sed æquales. Eadem est ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento ostendemus parallelogramma NMBC, AGBC, æqualia esse, si altitudines AI, DK, inæquales dicantur, & LI, DK, æquales.



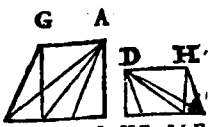
f 1. sexti. g 11. quinti. h 9. quinti.

ADDIT hoc loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuius demonstrabimus. Videlicet.

TRIAN-

TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum æquales sunt bases, vel eadem, ita se habent inter se, vt altitudines.

SINT duo triangula A B C, D E F; & parallelogramma A G B C, D E F H, habentia bases æquales B C, E F. Dico esse triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum A G B C, ad parallelogrammum D E F H, vt altitudo A I, est ad altitudinem D K. Si enim sumantur rectæ I L, K M, basibus B C, E F, æquales, ducanturque rectæ L A, M D;



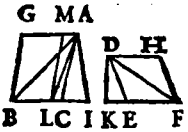
a 38. pri mi. *a erit triangulum A L I, triangulo A B C, æquale, cum sint super bases æquales*
b 7. quinti. *L I, B C, & inter easdem parallelas A G, I B. Eodem modo æquale*
c 1. sext. *erit triangulum D K M, triangulo D E F. b Quare erit, vt A B C, ad D E F, ita A L I, ad D K M. c Est autem, vt A L I, ad D K M, ita A I, ad D K. (Nam si bases ponantur A I, D K, erunt rectæ æquales L I, K M, altitudines.) Igitur & A B C, ad D E F, erit, vt A I, ad D K. Quod est propositum.*

d 15. quinti. *QVONIAM verò est, d vt A B C, ad D E F, ita parallelogrammum A G B C,*
e 34. primi. *e quod trianguli A B C, duplum est, ad parallelogrammum D E F H, f quod trianguli D E F, est duplum. g Erit quo-*
f 34. pri mi. *que A G B C, ad D E F H, vt A I, ad D K. Quod tamen eodem modo confirmari potest, si rectæ ducantur L G, M H. Idem sequetur, si*
g 11. quinti. *triangula, & parallelogramma eandem habuerint basim.*

HOC verò conuertemus etiam, ad hunc modum.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt altitudines, æquales habent bases, si vnam & eandem non habeant.

SIT triangulum A B C, ad triangulum D E F; & parallelogrammum A G B C, ad parallelogrammum D E F H, vt altitudo A I, ad altitudinem D K. Dico eorum bases B C, E F, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit B C, si fieri potest, maior, quam E F. Abscissa igitur B L, ipsi E F, æquali, ductaque rectâ L A; erit, vt proxime demonstrauimus, A B L, ad D E F, vt A I, ad D K. Sed vt A I, ad D K, ita ponitur esse A B C, ad D E F.



h 11. quinti. *h Igitur A B L, A B C, ad D E F,*
i 9. quinti. *eandem habent proportionem; i Ac proinde inter se æqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases B C, E F, sed æquales. Eademque est ratio de parallelogrammis. Simili enim argumento ducta L M, ipsi G B, parallela, ostendemus, parallelogram-*

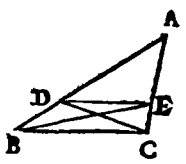
logramma MGBL, AGBC, aqualia esse, si bases BC, EF; dicantur inæquales, & BL, EF, æquales.

IN omnibus autem his non variabitur demonstratio, etiamsi triangula, & parallelogramma sint rectangula, itu vt altitudines sint ipsorum latera, vel vnum fuerit rectangulum, alterum vero non. Nam assumpsimus casum difficiliorem, quando scilicet neutrum est rectangulum. Ita enim demonstratio maiore indiget nonnunquam constructione.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

IN triangulo ABC, ducatur primum recta DE, parallela lateri BC. Dico latera AB, AC, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est, esse vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. Ductis enim rectis CD, BE, *a* erunt triangula DEB, DEC, super eandem basin DE, & inter easdem parallelas DE, BC, constituta, inter se æqualia. *b* Quare vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triangulum DEC: *c* Atqui vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est basis AD, ad basin DB; (cum hæc triangula sint eiusdem altitudinis, vt constat, si per E, agatur parallela recta ipsi AB) & eadem ratione, vt triangulum ADE, ad triangulum DEC, ita est basis AE, ad basin EC. *d* Vt igitur AD, ad DB, ita est AE, ad EC, (cum hæ duæ proportiones eædem sint proportioni trianguli ADE, ad triangulum DEB, & eiusdem trianguli ADE, ad triangulum DEC) quod est propositum.



a 37. *primi.*
b 7. *quinti.*
c 1. *sex.*
d 11. *quinti.*

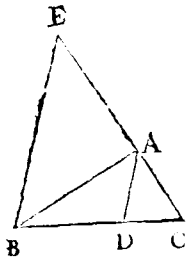
SECET deinde recta DE, latera AB, AC, proportionaliter. Dico DE, parallelam esse reliquo lateri BC. Ductis enim rursum rectis CD, BE, *e* erit vt basis AD, ad basin DB, ita triangulum ADE, ad triangulum DEB, cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autem vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. *f* Igitur erit vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita AE, ad EC: Sed rursus *g* vt basis AE, ad basin EC, ita est triangulum ADE, ad triangulum DEC, cum sint altitudinis eiusdem. *h* Igitur vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triangulum DEC. *i* Æqualia ergo sunt triangula DEB, & DEC: Ac propterea, cum eandem habeant basin DE, *k* inter

e 1. *sext.*
f 11. *quinti.*
g 1. *sex.*
h 11. *quinti.*
i 9. *quinti.*
k 39. *primi.*

eadem erunt collocata parallelas. **Igitur parallela est D E, ipsi** B C. quod est propositum. Si itaque **ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit**, &c. Quod erat **ostendendum.**

iij. THEOR. 3. **PROPOS. 3.**

SI trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.



a 17. *pri mi.* b 29 *pri mi* c 29. *pri mi* d 6. *sexti.* e 7. *quinti.* f 2. *sext.* g 11. *quinti.* h 2. *sex.* i 11. *quinti.* k 9. *quinti.* l 5. *pri mi.* m 29 *primi.*

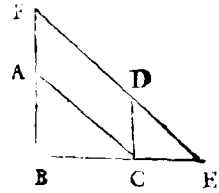
IN triangulo A B C, recta A D, secet primo angulum B A C, bifariam. **Dico esse vt** B A, ad A C, **ita B D, ad D C, Agatur enim per** B, recta B E, parallela ipsi A D, donec cum C A, producta conueniat in E; (coibunt autem coibunt B E, C A, propterea quod anguli C, & C B E, minores sunt duobus rectis. Cum enim C, & C D A, *a* minores duobus rectis sint; *b* sit autem angulus C D A, angulo C B E, externus interno, æqualis: erunt quoque C, & C B E, duobus rectis minores) erit; angulus E B A, æqualis alterno B A D; & angulus E, externo D A C. Cum igitur duo anguli B A D, D A C, æquales ponantur; erunt & anguli E B A, & E, inter se æquales; *d* Ideoque & rectæ B A, E A, inter se æquales. *e* Vt igitur E A, ad A C, ita B A, ad eandem A C. *f* Atqui vt E A, ad A C, ita est B D, ad D C, cum in triangulo B C E, recta A D, sit parallela lateri B E. *g* Igitur vt B A, ad A C, ita est B D, ad D C. quod est propositum.

SIT deinde vt B A, ad A C, ita B D, ad D C. **Dico rectam A D,** bifariam secare angulum B A C. Agatur enim rursus per B, recta B E, ipsi A D, parallela, coiens cum C A, protracta in E. Quoniam igitur vt B A, ad A C, ita posita est B D, ad D C. *h* Vt autem B D, ad D C, ita est E A, ad A C; quod *i* in triangulo B C E, recta A D, sit lateri B E, parallela; *f* Erit vt B A, ad A C, ita E A, ad eandem A C. *k* Æquales igitur sunt B A, & E B, inter se, *l* ac propterea anguli A B E, & E, æquales quoque erunt. *m* Cum igitur angulus A B E, æqualis sit alterno B A D, & angulus E, externo D A C, erunt & duo anguli B A D, D A C, inter se æquales, quod est propositum. Itaque si trianguli angulus bifariam sectus sit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 4. IV.

ÆQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualib. angulis subtenduntur.

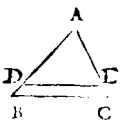


SINT æquiangula triangula ABC, DCE, sintque æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC, & BAC, CDE. Dico esse AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC, ad CA, vt CE, ad ED, & AB, ad AC, vt DC, ad DE: Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaq; sunt ea latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos, & consequentia similiter. Constituantur latera BC, CE, secundum lineam rectam, ita vt angulus DCE, externus sit æqualis interno ABC, patieturque externus ACB, interno DEC. Et quia duo anguli ABC, ACB, *a* minores sunt duobus rectis: est autem angulo ACB, æqualis angulus DEC, erunt & anguli B, & E, duobus rectis minores. *b* Quare rectæ BA, & ED, productæ ad partes A, D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniam vero angulus externus DCE, æqualis est interno opposito ABC; *c* parallelæ erunt CD, & BF. Eadem ratione parallelæ erunt CA, & EF: quod angulus externus ACB, sit æqualis interno DEC. Parallelogrammum est igitur ACDF, *d* propterea quæ recta AF, æqualis rectæ CD; & recta CA, rectæ DF. Quoniam igitur in triangulo BEF, recta AC, parallela est lateri EF, *e* erit AB, ad AF, hoc est, ad DC, (quæ æqualis est ipsi AF,) vt BC, ad CE. Permutando *f* igitur erit AB, ad BC, vt DC, ad CE. Rursus quoniam in eodem triangulo BEF, recta CD, parallela est lateri BF, *g* erit BC, ad CE, vt FD, hoc est, vt CA, (quæ æqualis est ipsi FD,) ad ED. Permutando *h* igitur erit BC, ad CA, vt CE, ad ED. Cum igitur sit AB, ad BC, vt DC, ad CE, & BC, ad CA, vt CE, ad ED: *i* erit & ex æquali AB, ad CA, vt DC, ad ED. Quod est propositum. Æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

a 17 *pri mi.*
b 13 *pri num.*
c 28 *pri mi.*
d 34 *pri mi.*
e 2. *sex.*
f 16. *quinti.*
g 2 *sex.*
h 16. *quinti.*
i 22. *quinti.*

COROLLARIVM.

HINC fit, lineam eidem, quæ parallela ducitur vni laterum in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Ducatur enim in triangulo ABC, lateri BC, parallela DE. Dico triangulum ADE, toti triangulo ABC, esse simile. Æquiangula namque sunt, (cum anguli ADE, AED, æquales sint angulis ABC, ACB, externis & angulus A, communis. Quare vt demonstratum est, habent latera circa æquales angulos proportionalia; Atque adeo, ex definitione, similia sunt.



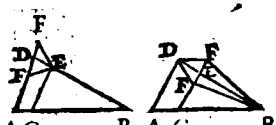
k 29. *pri mi.*
l 4. *sex.*

SCHOLIVM.

NON alienum à noſtro inſtituto eſſe puto, ſi hic demonſtremus duo theoremata, quorum primum Federicus Commandinus demonſtrat in libello Archimedis de iis, quæ vehuntur in aqua; Secundum verò in commentariis in Apollonij Conica. Horum primum eſt.

SI ex duobus punctis cuiuſuis rectæ, quorum alterum ſit extremum, alterum vero intra lineam, duæ parallelæ inter ſe ad eaſdem partes educantur, ita proportionem habeant eandem, quam rectæ inter ipſas, & alterum extremum punctum incluſæ: Recta coniungens extremũ vnius earum cum extremo prioris lineæ tranſibit per extremum alterius lineæ.

SIT recta AB, & ex punctis A, & C, educantur duæ parallelæ AD, CE, proportionem habentes, quam AB, BC, ita vt ſit AD, ad CE, ſicut AB, ad BC, vel CE, ad AD, vt BC, ad AB. Dico rectam, quæ coniungit extrema B, & E, tranſire per punctum D. Item rectam, quæ coniungit extrema B, & D, tranſire per punctum E. Si enim recta BE, non tranſit per D, coeat cum AD, in F, puncto, quod ſit vel ſupra D, vel infra, vt in prima figura. Quoniam igitur per coroll. huius propoſ. triangula BAF, BCE, ſimilia ſunt; a *erit, vt AB,*



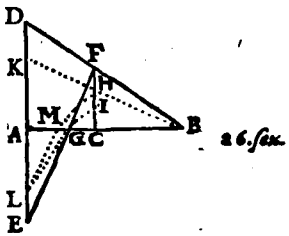
a 4. ſex. *ad AF, ita BC, ad CE: Et permutando,* b *vt AB, ad BC, ita AF,*
b 16. quinti. *ad CE: Vt autem AB, ad BC, ita erat quoque AD, ad CE.*
c 11. quinti. *Igitur erit, vt AF, ad CE, ita AD, ad CE;* d *Ac propterea aquales erunt rectæ AF, AD, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſit*
d 9. quinti. *ergo recta BE, per punctum D. Quod eſt primum.*

RVRSVS ſi recta BD, non tranſit per E, tranſeat per F, punctum, quod ſit vel ſupra E, vel infra, vt in ſecunda figura. Quoniam ergo per coroll. huius propoſ. triangula BAD, BCF, ſimilia ſunt;
e 4. ſex. e *erit, vt AB, ad AD, ita BC, ad CF:* f *& permutando, vt AB, ad*
f 16. quinti. *BC, ita AD, ad CF: Vt autem AB, ad BC, ita quoque erat AD, ad CE.* g *Igitur erit, vt AD, ad CF, ita AD, ad CE:* h *Ac proinde*
g 11. quinti. *æquales erunt rectæ CF, CE, pars & totum. Quod eſt abſurdum.*
h 9. quinti. *Tranſit ergo recta BD, per E. Quod eſt ſecundum.*

HOC etiam verum eſt, quando duæ parallelæ in diuerſas partes ducuntur, habentes eandem proportionem, quam ſegmenta rectæ inter parallelas conterminas, & punctum idem intra datum rectam. Vt in figura problematis 7. ſcholij propoſ. 17. ſi fuerint parallelæ AE, FC, in diuerſas partes ductæ, fueritque vt AE, ad CF, ita AG, ad CG,

tranſibit

transibit recta EF, per G, hoc est, duæ rectæ EG, FG, vnam rectam constituent. Cum enim sit, vt AE, ad CF, ita AG, ad CG; erit permutando quoque, vt AE, ad AC, ita CF, ad CG. Cum ergo anguli alterni A, C, æquales sint; a erunt quoque anguli AGE, CGF, æquales. Cum ergo AC, sit linea recta, constituent EG, FG, lineam quoque rectam ex iis, qua ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. demonstrauimus.

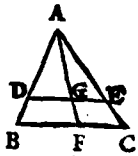


a 6. sex.

ALTERVM vero est.

SI in triangulo quouis vni lateri parallela recta agatur; & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppositum recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus illud, in easdem rationes.

IN triangulo ABC, ducta sit DE, lateri BC, parallela, & ex puncto F, quocunque ad angulum A, recta extendatur FA, secans DE, in G. Dico esse, vt BF, ad FC, ita DG, ad GE. Quoniam enim triangula AFB, AGD, ex coroll. huius propos. similia sunt; b erit vt AF, ad BF, ita AG, ad DG, c & permutando, vt AF, ad AG, ita BF, ad DG. Atque eodem argumento concludemus esse, vt AF, ad AG, ita FC, ad GE. d Igitur erit, vt BF, ad DG, ita FC, ad GE, & permutando, vt BF, ad FC, ita DG, ad GE. Quod est propositum.



b 4. sex.
c 16. quinti.
d 11. quinti.

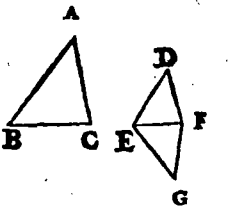
ALITER. Quoniam triangula ABF, ADG, similia sunt, nec non triangula AFC, AGE, per coroll. huius propos. e erit, vt BF, ad FA, ita DG, ad GA: Item vt FA, ad FC, ita GA, ad GE. f Ex æquo igitur, vt BF, ad FC, ita erit DG, ad GE. Quod erat demonstrandum.

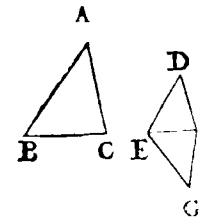
e 4. sex.
f 22. quinti.

THEOR. 5. PROPOS. 5. V.

SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

HABEANT triangula ABC, DEF, latera proportionalia, sitq; AB, ad BC, vt DE, ad EF, & BC, ad CA, vt EF, ad FD, & AB, denique ad AC, vt DE, ad DF. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D, & angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æqua-





a 32 *primi.*

b 4 *sex.*

c 11. *quinti.*

c 9. *quinti.*

c 4. *sex.*

f 11. *quinti.*

g 9. *quinti.*

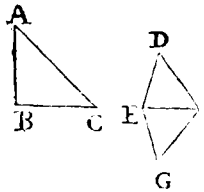
h 8. *primi.*

i 4 *primi.*

les respiciunt homologa latera. **Fiat** angulus F E G, æqualis **angulo B, & angulis** E F G, angulo **C, conueniantque** rectæ E G, F G, in G: **ac eritque reliquus** angulus G, reliquo **angulo A, æqualis.** Æquiangula igitur **sunt triangula A B C,** G E F. Quare *b* vt **A B, ad B C, ita est** G E, ad E F: Vt autem **A B, ad B C, ita** ponitur D E, ad E F. *c* **Igitur vt G E, ad** E F, ita est D E, ad E F, eandem, *d* propterea que **æquales erunt G E,** D E. Rursus, *e* quoniam vt B C, ad C A, ita est **E F, ad F G: Vt au-**tem B C, ad C A, ita ponitur E F, ad F D; *f* **erit vt E F, ad F G, ita** eadem E F, ad F D, *g* ideoque æquales erunt **F G, F D. Itaq; cum** latera E G, F G æqualia sint lateribus D E, D F, **vtrumque vtri-**que; & *h* basis communis E F; *b* erunt anguli G, **& D, æquales;** *i* **ac** proterea & reliqui anguli G E F, G F E, **reliquis angulis D E F,** D F E, æquales erunt. Quamobrem cum **angulus G, æqualis sit** angulo A, erit & angulus D, eidem angulo A, **æqualis, eodemque** modo angulus D E F, angulo B, & angulus D F **E, angulo C, æqua-**lis erit. quod est propositum. Si duo igitur **triangula latera pro-**portionalia habeant, &c. Quod ostendendum **erat.**

vj. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duo triangula vnum angulum vni **angulo æqua-**lem, & circum æquales angulos latera **proportionalia** habuerint: æquiangula erunt triangula, **æqualesque ha-**bebunt angulos, sub quibus homologa **latera subten-**duntur.



SIT angulus B, **trianguli A B C,** æ-qualis angulo E, **trianguli D E F, sintque** latera A B, B C, **proportionalia lateribus** D E, E F, hoc est, **sit A B, ad B C, vt D E,** ad E F. Dico reliquos **angulos reliquis** angulis æquales esse, **angulum** scilicet A, angulo D, & **angulum C, angulo F;** Ita enim æquales anguli **homologa la-**tera respiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus **F E G; & angulo** C, angulus E F G, eritque, vt in præcedenti **propos. dictum est,**

k 4 *sex.* triangulum G E F, triangulo A B C, æquiangulum. **Quare** *k* **vt**

l 11. A B, ad B C, ita est G E, ad E F: Sed vt A B, ad B **C, ita ponitur D E,**

quinti ad E F. Igitur vt D E, ad E F, ita est G E, ad **eandem E F; ac atque**

m 9. idcirco D E, G E æquales erunt. Itaque cum **latera D E, E F, æqua-**

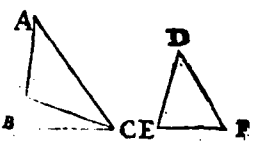
quinti. lia sint lateribus G E, E F, & anguli ipsis conteati **æquales quoque,**

(nam

(nam angulo B, cui factus est æqualis angulus F E G, æqualis est positus angulus D E F, propterea quæ æquales ad inuicem erunt anguli D E F, G E F) a erunt reliqui anguli D, E F D, reliquis angulis G, E F G, æquales. Cum ergo angulus G, sit æqualis angulo A, & angulus E F G, angulo C; erunt etiam angulis A, C, æquales anguli D, E F D. & ob id æquiangula erunt triangula A B C, D E F, quod est propositum. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod erat demonstrandum. a 4. pri.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum verò simul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.



SIT angulus A, trianguli A B C, æqualis angulo D, trianguli D E F, & latera A C, C B, circa angulum A C B, proportionalia lateribus D F, F E, circa angulum F, hoc est, sit vt A C, ad C B; ita D F, ad F E, hac tamen lege, vt quilibet reliquorum angulorum B, & E, sit vel minor recto, vel non minor. Dico æquiangula esse triangula, angulos scilicet A C B, & F, circa quos sunt latera proportionalia, & angulos B, & E, æquales esse. Sit enim primum tam B, quam E, recto minor: Quo posito, si anguli A C B, & F, non sunt æquales, sit A C B, maior, quam F: fiatque ipsi F, æqualis A C G. Cum igitur, & angulus A, angulo D, ponatur æqualis, a erit & reliquus A G C, reliquo E, æqualis; ideoque triangula A G C, D E F, æquiangula erunt. Quare b vt A C, ad C G, ita erit D F, ad F E: Sed vt D F, ad F E, ita ponitur A C, ad C B. c Vt igitur A C, ad C G, ita erit eadem A C, ad C B, ac propterea æquales erunt C G, C B, e & anguli C B G, C G B, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & C G B, minor recto, ideoq; ei deinceps A G C, recto maior; f cum A G C, C G B, sint duobus rectis æquales: Est autem ostensus angulus A G C, angulo E, æqualis. Maior igitur recto est quoque angulus E: Sed positus est etiam recto minor. Quod est absurdum.

a 32. pri
b 4. sex.
c 11. quinti.
d 9. quinti.
e 5. pri.
f 13. pri.

SIT deinde tam B, angulus, quam E, recto non minor; eritq; vt prius, angulus B, angulo C G B, æqualis, ideoque & C G B, recto non minor erit; ac propterea anguli C B G, C G B, in triangulo B C G, non minores erunt duobus rectis, sed vel maiores, vel

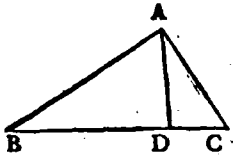
a 17. pri mi. æquales duobus rectis. quod eſt abſurdum. *a* Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales ſunt anguli A C B, & F, ſed
b 32. pri mi. æquales, atq; *b* idcirco reliqui etiam anguli B, & E, æquales erunt. quod eſt propoſitum. Si duo itaque triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

ADDIDIT Euclides, vtrumque angulum reliquorum B, & E, debere eſſe vel minorem recto, vel non minorem. Nam alias, manente tota hypotheſi, non ſequeretur, triangula eſſe aquiangula. Si enim in eodem triangulo A B C, ſit C G, æqualis ipſi C B, (quod fieri poteſt,
c 19. pri mi. *quando angulus B, acutus eſt, & maior angulo A. Sic enim c erit latus C A, latere C B, maius. Si igitur ex C, ad internallum C B, circulus deſcribatur, ſecabit is rectam A B, priuſquam rectam A C, quæ longior eſt, quam C B, ſecet. Secabit autem ille circulus neceſſario rectam A B, propterea quod ob acutum angulum B, recta A B, intra eum circulum cadit: quippe cum infra contingentem lineam ducatur, quæ ad B, angulum rectum conſtituit cum C B, vt patet ex propoſ. 16. lib. 3.) habebunt duo triangula A B C, A G C, vnum angulum vni angulo æqualem, imò angulum A, communem; & circum alios an-*
d 7. quinti. *gulos A C B, A C G, latera proportionalia, hoc eſt, d vt A C, ad C B, ita erit eadem A C, ad C G, cum æquales ponantur rectæ C B, C G, & tamen non ſunt vllo modo aquiangula triangula A B C, A G C, vt*
e 5. pri. *conſtat. Quod ideo euenit, quia non vterq; angulorum A B C, A G C,*
f 17. vel *minor eſt recto, vel non minor. Imò A B C, eſt quidem recto minor,*
32. pri. *A G C, verò recto maior. Cum enim C G, C B, latera æqualia ſint,*
g 13. pri mi. *e & ideo anguli C B G, C G B, æquales; f erit vterque eorum recto minor, g ac propterea A G C, recto maior.*

viij. ## THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt.



IN triangulo A B C, angulus B A C, ſit rectus, à quo ad baſin perpendicularis agatur A D. Dico triangula A D B, A D C, ſimilia eſſe & toti triangulo A B C, & inter ſe. Cum enim in trian-
h 32. pri mi. gulis A B C, D B A, anguli B A C, & A D B, ſint recti, & angulus B, commu-
i 4. ſex. nis; *b* erunt & reliqui anguli A C B, & D A B, æquales. Æquian-gulum eſt igitur triangulum D B A, triangulo A B C, *i* ac propterea habe-

habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, &c. hoc est, erit vt C B, ad B A, ita B A, ad B D; & vt B A, ad A C, ita B D, ad D A; & vt B C, ad C A; ita B A, ad A D. Ita enim latera homologa æqualibus angulis opponuntur, vt vult propos. 4 huius lib. Quare simile est triangulum A D B, toti triangulo A B C. Eodem modo ostendetur triangulum A D C, simile eidem triangulo A B C. Nam anguli B A C, & A D C, sunt recti, & angulus C, communis *a* ac propterea reliqui anguli A B C, & CAD, æquales. Quare *b* vt B C, ad C A, ita est C A, ad C D; & vt C A, ad A B, ita C D, ad D A; & vt C B, ad B A, ita C A, ad A D. Sic enim opponuntur quoque homologa latera angulis æqualibus, ex præscripto propos. 4. huius lib. Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangula A D B, & A D C, cùm anguli A D B, A D C, sint recti, & anguli A B D, C A D, ostensi æquales, nec non anguli B A D, A C D; Atq; idcirco fit *c* vt B D, ad D A, ita D A, ad D C; & vt D A, ad A B, ita D C, ad C A; & vt A B, ad B D, ita C A, ad A D. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit, &c. Quod erat demonstrandum.

a 32. primi.
b 4. sexti.
c 4. sexti.

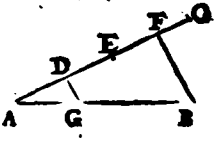
COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basin demittitur, esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta: Item vtrumlibet laterum angulum rectum ambientium, medium proportionale inter totam basin, & illud segmentum basis, quod ei lateri adiacet.

OSTENSVM est enim, esse vt B D, ad D A, ita D A, ad D C; ac propterea D A, esse mediam proportionalem inter B D, & D C; Item esse vt C B, ad B A, ita B A, ad B D: & idcirco B A, mediam esse proportionalem inter C B, & B D: Denique esse vt B C, ad C A, ita C A, ad C D; ideoque C A, esse proportionalem mediam inter B C, & C D. Quod est propositum.

PROBL. 1. PROPOS. 9. 12.

A DATA recta linea imperatam partem auferre.



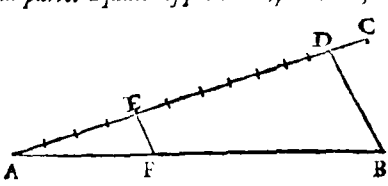
IMPERETVR, vt ex linea A B, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta A C, vtcunque faciens angulum C A B; & ex A C, abscindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detracta henda est ex A B, vt in proposito exemplo tres A D, D E, E F. Deinde ex F, ad B, recta ducatur F B, cui per D, parallela agatur D G. Dico A G, esse partem tertiam imperatam rectæ A B. Nam cùm in triangulo A B F, lateri F B, parallela sit recta D G; *d* erit vt F D, ad D A, ita B G, ad G A. *e* Componendo igitur, vt F A, ad D A, ita B A, erit ad G A: Sed F A, ipsius A D, est tripla, ex constructione. Igitur & B A, ipsius A G, erit tripla;

d 2. sexti.
e 18. quinti.

pla; ideoque AC, tertia pars erit ipsius AB, quæ imperabatur. Ad-da ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat.

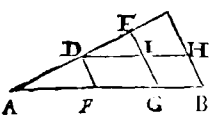
SCHOLIVM.

QVOD si ex AB, auferenda sit pars non aliquota, sed quæpiam aliquotas non efficientes vnam complectatur, nisi rursum quæ contineat quatuor vndecimas ipsius AB, sumenda erunt ex AC, vndecim partes æquales vsque ad D, punctum, ex quo ad B recta ducatur DB; & huic parallela EF, ex E, termino quatuor partium. Nam AF, erit pars imperata. Erit enim rursus vt DA, ad AE, ita BA, ad AF. Quare, & conuertendo vt AE, ad AD, ita AF, ad AB: Est autem AE, pars continens quatuor vndecimas ipsius AD, ex constructione. Igitur & AF, eadem pars erit rectæ AB. Quod est propositum. Non aliter detrahetur ex AE, pars complectens quotcunque partes ipsius aliquotas non facientes vnam.



xij. PROBL. 2. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.



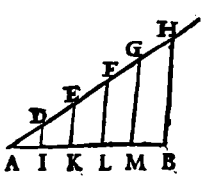
SIT recta AB, secanda similiter, vt secta est recta AC, in D, & E, hoc est, in partes, quæ sint partibus AD, DE, EC, proportionales. Coniungantur datæ duæ lineæ ad A, facientes angulum quemcunque BAC, & connectatur recta BC. Deinde ex D, E, agantur DF, EG, parallelæ ipsi BC. Dico rectam AB, similiter esse sectam in F, & G, vt est secta AC, in D, & E. Nam vt AD, ad DE, ita est AF, ad FG. Proportionales ergo sunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod si ducatur DH, ipsi FB, parallela, secans EG, in I; erit rursus, vt DE, ad EC, ita DI, ad IH, hoc est, ita FG, ad GB; quòd FG, ipsi DI, & GB, ipsi IH, æqualis sit. Quare proportionales quoq; erunt partes EG, GB, partibus DE, EC. Eademque ratio est de pluribus partibus, si ex E, & C, ipsi AB, parallelæ agantur, &c. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, vt data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.

a 2. sexti.
b 2. sexti.
c 34. primi.

SCHOLIVM.

EX hoc problemate colligi potest facilis admodum via, ac ratio diuidendi lineam rectam datam in partes quotcunque æquales: id, quod

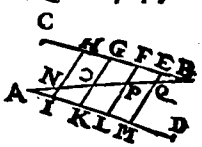
quod nos ad propoſ. 10. lib. 1. facturos recepimus, & alia iam via idem ad propoſ. 40. lib. 1. demonſtrauimus. Sit enim data recta AB, diuidenda in quinq; partes aquales. Ducta recta AC, faciente cum AB, quemcunque angulum CAB, ſumantur ex ea quinque partes aquales AD, DE, EF, FG, GH. Quia igitur linea recta AH, & cunq; eſt diuiſa, ſi ex H, ad B, ducatur recta HB, & huic ex punctis D, E, F, G, parallela agantur DI, EK, FL, GM; erit AB, ſimiliter diuiſa, & AH, & conſtat ex demonſtratione huius problematis. Cùm igitur AH, ſit diuiſa in quinque partes aquales, erit & AB, in totidem aquales partes diuiſa. Haud aliter in plures partes aquales diuidetur eadem recta AB.

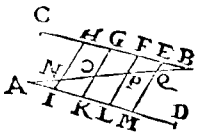


HVIC rationi dividenda linea recta in quotcunque partes aquales, adiungi poſſunt alia non inuncunda, & propoſ. 10. lib. 1. ſumma pollicitis, atque ad propoſ. 40. lib. 1. demonſtrauimus. Sit enim rurſum data linea recta AB, dividenda in quinq; partes aquales. Ducatur ex B, recta BC, & cunq; faciens angulum cum AB; Deinde ex aſſumpto puncto D, ſiue ſupra B, ſiue infra, agatur DE, parallela ipſi AB, ex qua abſcindantur quinque aquales partes DF, FG, GH, HI, IE, ea lege tamen, vt ſi D, eſt ſupra B, recta DE, ex quinq; partibus aqualibus conſtans, minor ſit, quàm AB, maior verò, ſi D, exiſtit infra B. Poſtremò ex A, per E, recta ducatur AC, occurrens ipſi BC, in G, puncto. A que per puncta F, G, H, I, recta ducantur CK, CL, CM, CN, quae dico diuidere rectam AB, in quinq; partes aquales. Cùm enim DE, ſit parallela ipſi AB, diuidentur EH, & AM, in triangulo CAM, proportionaliter, ex ſcholio propoſ. 4. huius lib. Cùm ergo EM, ſecta ſit biſariam in I, ſecta quoq; erit AM, biſariam in N. Eadem ratione recta NL, in triangulo CNL; & recta MK, in triangulo CMK; & recta LB, in triangulo CLB, ſecta erit biſariã. Eſt ergo AN, ipſi NM; & NM, ipſi ML; & ML, ipſi LK; & LK, ipſi KB, aquales; ac proinde AB, ſecta erit in quinq; partes aquales. Quod eſt propoſitũ.



ALITER. Ab extremis punctis A, & B, educantur duo recta BC, AD, inter ſe parallela; hoc eſt, conſtituentes angulos AB, aquales: Et ex BC, abſcindantur quatuor partes aquales BF, EF, FG, GH, & ſint tot partes, & una minus, in quot eſt linea dividenda; His autem ex AD, totidem aquales reſecentur AI, IK, KL, LM. Ductis igitur rectis EM, FL, GK, HI,

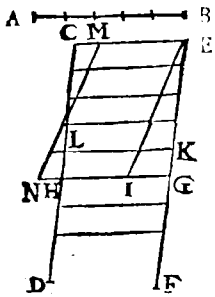




GK, HI, secantibus rectam AB, in N, O, P, Q, dico ipsam AB, sectam esse in quinque partes æquales. Cùm enim æquales sint, & parallelæ GH, IK, a *erunt & HI, GK, parallelæ; Eademque ratione parallelæ erunt GK, EL, EM. Quare cùm AM, secta sit in quatuor æquales partes, erit & AQ, similiter in quatuor partes æquales diuisa, & constat ex demonstratione huius* 10. *propos. Eadem ratione diuisa erit & BN, in quatuor partes æquales, eò quòd BH, in totidem est partes æquales diuisa. Quare cùm tam AN, quàm BQ, æqualis sit singulis partibus NO, OP, PQ; erunt omnes quinque partes AN, NO, OP, PQ, QB, inter se æquales. Quod est propositum.*

a 33. primi.

ALITER. Præparetur prius instrumentum huic rei accommodatum, in hunc modum: Ductis duabus rectis inter se parallelis & cuneq; CD, EF, ex & *traq; abscindãtur partes inter se æquales quotcunq;, saltem tot, in quot partes diuidenda proponitur linea, & bina puncta correspondentia lineis rectis iungantur. Deinde beneficio circini capiatur lõgitudo rectæ AB, diuidendæ, eaq; ex aliquo puncto lineæ CF, & ex E, transferatur in instrumentum ad punctum I; illius lineæ transuersæ, quæ tot spatia terminat, in quot partes linea proponitur diuidenda, qualis in exemplo est recta GH; ea enim includit quinq; spatia. Postremo ex E, ad I, recta ducatur EI, quam dico diuisam esse in quinque æquales partes. Cùm enim GK, HL, æquales sint, & parallelæ;* b *erunt quoq; GH, KL, parallelæ. Eodemq; modo omnes lineæ inter rectas CD, EF, inter se parallelæ ostendentur. Quare, & ex demonstratione huius* 10. *propos. liquet, quemadmodũ EG, diuisa est in quinque partes æquales, ita similiter in totidem diuisa erit EI. Nam si punctum E, sumptum non fuerit idem quod E, sed C, producenda est IE, donec cum FE, vel DC, coeat. Tunc enim & in hac* 10. *propos. probatum est, erunt rectæ EI, EG, similiter diuisæ. Quod si forte IE, nec cum FE, nec cum DC, concurrat, sed utrique sit parallela,* c *erunt singulæ partes rectæ EI, singulis partibus rectæ EG, æquales, ob parallelogramma inter parallelas inclusa. Cùm ergo omnes partes rectæ EG, sint æquales, erunt quoque omnes partes rectæ EI, æquales. Si igitur beneficio circini singulæ partes lineæ EI, transferantur in rectam propositam AB, ipsi EI, æqualem, diuisa erit & AB, in quinque partes æquales. Quod est propositum.*



b 33. primi.

c 34. primi.

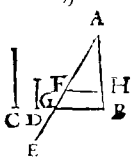
EST autem nonnunquam necesse lineas parallelas extra instrumentum

mentum producere. Vt ſi eadem linea transferatur ab M ſ/ſ, ad N. punctum lineæ G H, prætacta, erit quoque M N, diuiſa in quinque partes æquales. Vt conſtat, ſi ducatur ex M, ipſi E G, parallela, &/g, ad rectam G H: Vel ſi N M, producatur, donec cum G E, producta conueniat. Quod ſi linea diuidenda fuerit admodum breuis, accipiende erunt partes parallelarum C D, E F, minores, &c. Si vero linea ſit longiuſcula, & diuidenda in paucas partes æquales; transferre poterit in duplo plura ſpatia, Vel in triplo plura, Vel quadruplo plura, &c. Nam duo, Vel tria, Vel quatuor ſpatia, &c. dabunt vnam partem. Vt ſi diuidenda ſit in tres partes, transferaturq; in ſex ſpatia, dabunt duo ſpatia vnam partem: ſi transferatur in quindecim ſpatia, dabunt quinque ſpatia vnam partem, propterea quod quinque ſpatia conſiciunt tertiam partem quindecim ſpatiorum. Sic ſi linea diuidenda in duas æquales partes transferatur in octodecim ſpatia, dabunt nouem ſpatia vnam partem; quippe cum nouem ſpatia conſtituant ſemiſſem octodecim ſpatiorum: & ſic de cæteris.

EODEM modo, ad ſimilitudinem huius propoſitionis, licebit nobis facile negotio ſequens problema, quod non raro a Geometris adhibetur, demonſtrare. quod eſt eiuſmodi.

DATAM rectam ſecare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunque datam.

SIT ſecanda recta A B, in duas partes, quæ habeant proportionem inter ſe, quam rectæ C & D. Ex A, ducatur linea A E, faciens angulum A, quemcunque, ex qua abſcindatur recta A F, ipſi C, & F G, ipſi D, æqualis. Ducta deinde G B, ducatur ei per F, parallela F H. Dico A B, ſectam eſſe in H, ſecundum proportionem C ad D. Hoc autem manifeſtum eſt, a cum ſit, & A F, ad F G, atque adeo, & C ad D, ita A H, ad H B.



a 2. ſexti.

POSTREMO inferemus huic loco theorema quoddam ad linearum etiam ſectiones pertinens, deſumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de iis, quæ vehuntur in aqua. Nimirum.

SI duæ rectæ lineæ ſecentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ ſectiones in eadem proportione cum quibuslibet ſegmentis duobus.

SECENTVR rectæ A B, C D, proportionaliter in binis punctis E, F, & G, H, ita vt ſit A E, ad E B, ſicut C G, ad G D, Item A F, ad F B, vt C H, ad H D. Dico ſectiones intermedias E F, G H, proportionales quoque eſſe cum duobus ſegmentis F B, H D, Vel cum duobus



duobus A E, C G, hoc eſt, eſſe F B, ad E F, & H D, ad G H. Item A E, ad E F, & C G, ad G H. Cùm enim ſit, & A E, ad E B, ita C G, ad G D, erit componendo, & A B, ad E B, ita C D, ad G D. Item cùm ſit, & A F, ad F B, ita C H, ad H D, erit **componendo**, *& A B, ad F B, ita C D, ad H D, &* **conuertendo**, *& F B, ad A B, ita H D, ad C D. Itaq; cùm ſit, & F B, ad A B, ita H D, ad C D; Et & A B, ad E F, ita C D,* **ad G D.** a *Erit ex æquo, & F B, ad E B, ita H D, ad G D. Et conuertendo,* **& E B,** *ad F B, ita G D, ad H D: Et per conuerſionem rationis,* **& E B, ad** *E F, ita G D, ad G H, & diuidendo, & F B, ad E F,* **ita H D, ad G H.** *Quod eſt primum.*

a 22. quinti.

RURSUS, quia eſt & A E, ad E B, ita C D, **ad G D. Et & E B,** *ad E F, ita G D, ad G H, & oſtenſum eſt, erit ex æquo,* **& A E, ad E F,** *ita C G, ad G H. Quod eſt ſecundum.*

BREVIVS item demonſtrabitur hoc modo **Conueniant duo** *puncta A, & C, in unum & ſint anguli B C D, vel* **B A D** *tangentes, rectæ D B, H F, G E. Quia igitur parallela eſt* **A E, ad E B,** *ita* b *C G, ad G D,* b *Parallela erit G E, ipſi D B. Rurſus, cùm ponatur,* c *A F, ad F B, ita C H, ad H D;* c *Parallela erit quoq; H F, ipſi* d *D B.* d *Quare & G E, H F, inter ſe, parallelæ erunt:* **Ac propterea** e *erit, & A E, ad E F, ita C G, ad G H. Quod eſt ſecundum.*

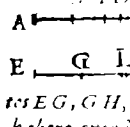
b 2. ſexti. c 2. ſexti. d 30 primi. e 2. ſexti.

EODEM modo, ſi puncta extrema B, D, conueniant in unum, &c. oſtendemus eſſe, & B F, ad E F, ita H D, ad G H, **& conuertendo,** *& F B, ad F B, ita G H, ad H D. Quod eſt primum.*

IDEM Verum eſt, ſi magnitudines A B, C D, **ſint diuerſæ, & g.** *A B, ſuperficies, & C D, linea, vel corpus, & ex priori demonſtratione conſtat.*

SED neque omittendum videtur hoc loco **theorema quod ſequitur.**

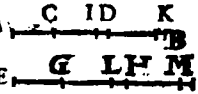
Si linea recta ſit ſecta in quotcunque **partes Arithmeticè** proportionales, & alia recta ſecetur **in totidem** partes, quæ eaſdem inter ſe, quæ illæ **proportiones habeant**; erunt quoque partes huius lineæ **Arithmeticè** proportionales.



RECTA linea **A B,** *ſecta ſit in partes A C, C D, D B,* **Arithmeticè** *proportionales, hoc eſt habentes eundem exceſſum: & ſecetur autem* **recta E F** *in partes E G, G H, H F, illis proportionales. Dico has partes eundem quoq; habere exceſſum, hoc eſt, Arithmeticè eſſe proportionales:* **Si enim C I, ipſi**

f 10. ſexti.

GI, ipsi AC, & DK, ipsi CD, aqualis: vt ID, sit excessus inter CD, AC; & KB, excessus inter DB, CD, atq; adeò ipsi ID, aqualis. Sit quoque GL, ipsi EG, & HM, ipsi GH, aqualis; vt LH, excessus sit inter GH, EG, & MF, excessus inter HF, GH. Probandum est, excessus LH, MF, aquales esse. Quoniam igitur est, vt AC, ad CD, ita EG, ad GH, erit permutando quoque vt AC, ad EG, ita CD, ad GH. Item quoniam est, vt CD, ad DB, ita GH, ad HF, erit quoque permutando, vt CD, ad GH, ita DB, ad HF. Atque ita si plures fuerint partes, habebunt semper partes linea AB, ad partes linea EF, singula ad singulas, eandem proportionem, quamuis partes vnius lineæ non sint continuè proportionales. Itaque cùm sit, vt CD, ad GH, ita AC, ad EG, hoc est, ita CI, ad GL, a *erit quoque reliqua ID,* a 19. quinti. *ad reliquam LH, vt tota CD, ad totam GH. Rursus quia est, vt* b 19. quinti. *DB, ad HF, ita CD, ad GH, hoc est, ita DK, ad HM,* b *erit quoque reliqua KB, ad reliquam MF, vt tota DB, ad totam HF, vel vt ablata DK, ad ablatam HM, hoc est, vt CD, ad GH. Erat autem quoque ID, ad LH, vt CD, ad GH.* c *Igitur erit vt ID, ad LH, ita KB, ad MF. Est autem ID, ipsi KB, aqualis.* d *Igitur & LH, ipsi MF, aqualis erit: atque idcirco EG, GH, HF, Arithmeticè proportionales erunt, cùm excessus habeant aquales. Quod est propositum.*



HOC theorema nullo modo conuerti potest. Nõ enim sequitur, si duæ lineæ scissæ sint in partes Arithmeticè proportionales, partes vnius habere eadem proportiones, quas partes alterius habent. Nam si linea EF, secunda pars statuatur GM, ita vt excessus inter EG, GM, sit LM. Deinde ipsi GM, posit M, sumatur portio ipsi GM, aqualis, eique adijciatur idem excessus LM, fient tres partes Arithmeticè proportionales in linea EF, & tamen non habent eadem proportiones inter se, quas habent partes linea AB: e *quippe cùm minor sit portio EG, ad GM, quàm EG, ad GH, hoc est, quàm AB, ad CD.* e 8. quinti.

INFERTVR hinc aliud hoc theorema.

SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem, erit quoque excessus priorum ad excessum posteriorum, vt priorum vna ad vnam posteriorum.

VT in superiori figura, quoniam erat, vt AC, ad EG, hoc est, vt CI, ad GL, ita CD, ad GH: ostensum est, ita quoque esse excessum ID, ad excessum LH. Vt CD, ad GH, itaque si AC, CD, sint dupla, aut dimidiata partes ipsarum EG, GH, erit quoq; ID, dupla, vel pars dimidiata ipsius LH, &c.

EX his quoque hoc problema absolutum.

LINEAM

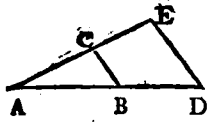
LINEAM rectam datam in quotuis partes Arithmeticè proportionales secare.

SIT enim recta EF, secanda in tres partes Arithmeticè proportionales. Sumantur tres rectæ AC, CD, DB, quomodocunque Arithmeticè proportionales componentes rectam lineam AB. Si igitur
a 10. se. xii. *data recta EF, à secetur similiter in G, H, vt AB, in CD, secta est, erunt partes EG, GH, HF, Arithmeticè proportionales, vt demonstratum est.*

HÆC omnia vera etiam sunt, in numeris, & in quibuscunq; aliis magnitudinibus, cùm semper eadem sit demonstratio. Atque ex his desumpsimus in 10. regula proportionalitatis Arithmetica postremam rationem distribuendi datum numerum in quotuis partes Arithmeticè proportionales. Nam per eam diuiditur datus numerus in partes, quæ easdem habent proportiones, quas assumpti numeri proportionalitatis Arithmetica, cùm semper fiat vt summa assumptorum numerorum, ad datum numerum, ita singuli numeri assumpti ad alium. Hinc enim fit, numeros assumptos cum partibus dati numeri inuentis eandem habere proportionem. Quare vt hic ostensum est, partes inuentæ sunt Arithmeticè proportionales.

1. PROBL. 3. PROPOS. 11.

DVABVS datis rectis lineis tertiam proportionalem adinuenire.

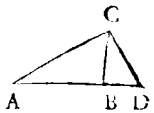
SINT duæ rectæ AB, AC, ita dispositæ, vt efficiant angulum A, quemcunque, vtq; inuenienda illis tertia proportionalis, sicut quidē AB, ad AC, ita AC, ad tertiam. Producatur AB, quam volumus esse antecedentem, & capiatur BD, æqualis ipsi AC, quæ consequens esse debet, siue media. Deinde ducta recta BC, agatur illi ex D, parallela DE, occurrens ipsi AC, productæ in E. Dico CE, esse tertiam proportionalem, hoc est, esse vt AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cùm enim in triangulo ADE, lateri DE, parallela


b 2. se. xii. sit recta BC; *b* erit vt AB, ad BD, ita AC, ad CE. *c* Sed vt AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, æqualem ipsi BD. Vt igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE: quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.
c 7. quinti.

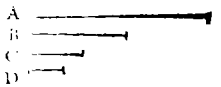
SCHOLIVM.

ALITER idem demonstrabimus, hoc modo. Duæ rectæ datæ AB, BC, constituantur ad angulum rectum ABC, & coniungatur recta AC. Producta autem AB, antecedente, ducatur ex C, ad AC, per-

AC, perpendicularis CD, occurrens ipsi AB, producta in D. Dico BD, esse tertiam proportionalem. Cum enim in triangulo ACD, angulus ACD, sit rectus, & ab eo ad basin AD, deducta perpendicularis CB, erit per coroll. propos. 8. huius lib. BC, media proportionalis inter AB, & BD, hoc est, BA, ad AE, ita BC, ad BD. Quod erat propositum.

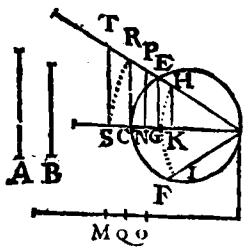


INVENTA autem tertia linea continue proportionali ipsarum AB, & BC, ex aliis duabus tertium inuenies, tabulis quatuor lineis continue proportionalibus existentibus, ut si lineæ A, & B, ad inuentam tertiam proportionalis C, & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Eodem modo reperietur quinta proportionalis, sexta, septima, octaua, & sic in infinitum.



EXPEDITIUS reperiemus quotlibet lineas continue proportionales in data proportione, hoc modo. Sint primum datæ proportionis lineæ, maioris ad minorem AB. Circa vertices C, D, ipsi A, æqualem describatur circulus CEDF, in quo applicetur diameter DE, ipsi B æqualis. Deinde ducta recta EF, quæ ad CD, perpendicularis erit. Cum enim recta DC, per centrum ducta bifariam secet aream ECF, bifariam, (abiatis enim æqualibus arcubus DE, DF, ex semicirculis æqualibus DEC, DFG, relinquentur arcus CE, GF, æquales) secabit eadem & rectam ipsam EF, bifariam, per ea, quæ in scholio propos. 27. lib. 3. ostendimus. a Igitur & ad angulos rectos. Et quoniam, si b tertiæ circumferentiæ rectæ EC, b anguli ad E, in semicirculo rectus esset, ipsi erit ex coroll. propos. 8. huius lib. DE, media proportionalis inter CD, DG; ac proinde DG, erit tertia proportionalis ipsis CD, DE, hoc est, datis ipsis A, & B. Quod si ex D, per G, arcus describatur secans rectam DE, DF, in H, I, applicatæque regulæ ad puncta H, I, ducatur recta HK, erit DK, quarta proportionalis. Nam propter tertij. arcus HD, ID, ipsi CD, b æquales arcus EC, FG, æquales d 26. sunt, & arcus HG, IG, æquales erunt, ac propterea ex secunda tertij. propos. 27. lib. 3. recta ducta HI, secabit rectam CG, e ad angulos rectos. Quare ipsa HI, est ipsi EF, æqualis, & parallela, ac propterea recta HD, ad DG, ita erit DI, ad DG, hoc est, DK, ad DE, quæ cum sint primæ lineæ CD, DE, DK, quarta proportionalis, existente DG, ipsi B, æquali. Eodem modo quinta proportionalis, sexta, & sic deinceps.

DEINDE sit data proportio lineæ B, minoris, ad maiorem A. Ductis duabus rectis B C, L M, ad D L, perpendicularibus, abscindantur rectæ D N, L O, minori B, æquales, applicatumq; regulæ ad
a 12. pri. *puncta O, N, ducatur recta N P,* a *quæ ad D C, perpendicularis erit,*
ax. b *cùm sit parallela ipsi D L. Sumpta deinde recta D C, æqualis ipsi*
b 33. pri. *A; maiori describatur ex D, per C, arcus secans rectã N P, in P ex-*
ax. tendaturque ex D, per P, recta D P T, eritq; D P, ipsi D C, hoc est, ipsi A, æqualis. Abscissa quoque L Q, ipsi D C, æquali, applicatáq; ad puncta Q, C, regula, ducatur recta C R, quæ eadem ratione ad D C,
c 2. Sol *perpendicularis erit, & ipsi N P, parallela.* c *Et quoniam est, vt*
4. sexti. *N D, ad D P, hoc est, vt B, ad A, (quod N D, D P, ipsis B, A, acceptæ sint æquales) ita C D, ad D R, hoc est, ita D P, ad D R; erunt tres rectæ N D, D P, D R, continuè proportionales; ideoque D R, ipsis B, A, tertia proportionalis erit. Quod si ex D, per R, arcus describatur secans D C, in S, & rectæ D S, æqualis auferatur L M, applicatumq; regulæ ad puncta M, S, recta ducatur S T, erit D T, quarta proportionalis. Nam eadem ratione erit S T, ipsi C R, parallela, & ad D C, per-*
d 2. Sol *pendicularis.* d *Quare erit, vt C D, ad D R, hoc est, vt A, ad D R, ita*
4. sexti. *S D, id est, D R, ad D T. Sunt ergo quatuor lineæ N D, B P, D R, D T, continuè proportionales. Quod si ex D, per T, alius arcus describatur secans rectam D C, protractam, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atq; ita in infinitum.*



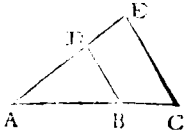
EX his sine magno labore inter duas rectas datas reperiemus duas medias proportionales, non quidem Geometricè omnino, sed quasi attentando, & praxin ipsarum iterum atq; iterum repetendo, donec id, quod quærimus, assequamur. Vt si inter C D, D K, inuenienda sint duæ mediæ proportionales, descripto circa maiorem C D, circulo C E D F, erigemus in K, ad C D, perpendicularem K H, ducemusq; D H, ea lege, vt ex puncto E, (vbi D H, circumferentiæ occurrit) perpendicularis ad D C, demissa E G, auferat rectam D G, rectæ D H, æqualem, hoc est, vt arcus ex D, per H, descriptus transeat per punctum G. Hoc enim facto, erunt D E, D H, inter C D, D K, mediæ proportionales. Nam vt ostendimus, est vt C D, ad D E, ita D E, ad D G, ex coroll. propos. 8.
c 2. Sol *huius lib.* c *Et vt D E, ad D G, ita D H, hoc est, D G, ad D K. Sunt*
4. sexti. *ergo quatuor rectæ C D, D E, D H, D K, continuè proportionales, ac proinde D E, D H, inter C D, D K, mediæ proportionales sunt. Quod si rectæ D H, D G, comperiantur non esse æquales, si quidem D H, fuerit minor, elongãda erit D H, magis; si verò maior, magis deprimenda, donec deprehendantur æquales D H, D G.*

PROBL.

PROBL. 4. PROPOS. 12.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

SINT tres lineæ rectæ A B, B C, A D, quibus inuenienda sit quarta proportionalis; hoc est, quæ sit A B, ad B C, vt A D, ad quartam. Disponantur primùm duæ A B, B C, secundum lineam rectam, quæ sit A C: Tertia verò D A, cum prima A B, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur B D, cui per C, parallela ducatur C E, occurrens rectæ A D, productæ, in E, punctum. Dico D E, esse quartam proportionalem. Cum enim in triangulo A C E, ducta C E, ipsi fit parallela B D; a erit vt A B, ad B C, ita A D, ad D E. Quare D E, inuenta est proportionalis; ac propterea tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat.



a 2. sexti.

SCHOLIVM.

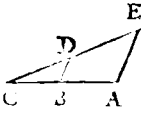
HINC facile elicetur, quomodo puta, datis duabus rectis lineis, aux alia in eadem ratione proportionè reperiri possit. Si enim dentur duæ rectæ lineæ A, B, inquacunque proportione, si tertia quædam recta adiungatur C, & ei quarta proportionalis inuenienda D, erit per quæ modum dictum est, quarta proportionalis. Eadem ratione inuenietur quinta proportionalis, & sexta, & deinceps, &c. quarum linearum semper eadem ratio erit proportionis.



OSTENDIMVS etiam cum Pappo sequens problema. Videlicet

TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam.

SINT tres datæ A B, B C, C D, oporteat ipsi inuenire quartam, quæ sit ad C D, vt A B, prima ad B C, secundam. Disponantur primùm duæ A B, B C, vt angulum contineant quemcunque A B C: Tertia verò C D, cum secunda B C, faciat angulum C, quemcunque: deinde ex B, ad C D, recta ducatur B D, cui per A, parallela ducatur A E, occurrens rectæ C D, productæ in E. Dico D E, esse quartam ipsi, scilicet E D, ad C D, tertiam, vt est A B prima ad B C, secundam. Hæc autem manifestum est, b cùm A C, E C, proportionales sint, & ad easdem partes D, & E, punctis.



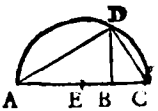
b 2 sexti.

AD hanc R. Tertiæ B C, sint primæ, & ex prima A B, sint secundæ, & ex inuenta tertia C D, quarta proportionalis E D, ita vt C D, sit secundæ C B, ad primam B A, & tertiæ C D, ad quartam c 12 sexti.

tam D E. Erit enim & conuertendo A B, prima ad B C, secundam, & D E, quarta ad C D, tertiam.

ix. PROBL. 5. PROPOS. 13.

DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.



SINT duæ rectæ A B, B C, quibus media inuenienda est proportionalis, dispositæ secundum lineam rectam A C. Diuisa A C, bifariam in E, ex E, centro, & interuallo E A, vel E C, semicirculus describatur A D C: Deinde ex B, ad A C, perpendicularis educatur B D, ad circumferentiam vsque. Dico B D, esse mediam proportionalem inter A B, & B C. Ductis enim rectis A D, C D; a erit angulus A D C, rectus in semicirculo. Cùm igitur ex angulo recto A D C, trianguli rectanguli A D C, deducta sit ad basin A C, perpendicularis D B; erit per corollarium propos. 8. huius lib. B D, media proportionalis inter A B, & B C. Duabus ergo datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenimus Quod erat faciendum.

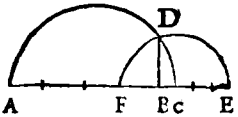
a31. tertij.

SCHOLIVM.



PERSPICVVM hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam vsque, mediam esse proportionalem inter duo diametri segmenta, quæ à perpendiculari facta sunt. Detur enim semicirculus A B C, & ex puncto D, diametri A C, ducatur ad circumferentiam recta D B, perpendicularis ipsi A C. Dico D B, esse proportionalem mediam inter A D, & D C: Id quod liquidò constat ex demonstratione huius problematis. Si enim ducantur recta A B, C B; b fiet angulus A B C, rectus. Quare per coroll. propos. 8 constat propositum. Eadem ratione erit perpendicularis E F, media proportionalis inter A E, & E C. Item G H, inter A G, & G C, atq; eodem modo de alijs quibuscunq; dicendum est, quæ ex quibuscunque punctis diametri ad ipsam diametrum perpendiculares ducentur.

b31. tertij.



QVANDO minor data linea est valde exigua, secabit perpendicularis B D, nimis obliquè circumferentiam in D. Quare vt exquisitius tunc punctum D, inueniatur, multiplicabimus minorem lineam B C, quoties libuerit. V.g. sumemus B E, ipsius B C, quadruplam, maiorem verò lineam A B, in tot partes æquales secabimus, quotuplex est B E, ipsius B C: sitque vna pars B F: sta vt eam-

eandem proportionem habeat AE, ad BF, quam BF, ad BC. Ac tandem circa EF, circulus describatur secans lD, in D. erit $\frac{1}{2}$ *BD, media proportionalis inter BF, BE, vt in hoc scholio demonstrauimus. Dico eandem esse mediam proportionalem inter AB, BC. Cum enim sit vt prima AB, ad secundam BE, ita tertia BE, ad quartam BC, erit rectangulum sub AB, prima, & BC, quarta,* a *aequale rectangulo sub BE, secunda, & BE, tertia.* b *Sed hoc aequale est quadrato lD. igitur &c. reliqua.* c *Quapropter lD media proportionalis est inter AB, BC. Si autem demonstrare velis, quod ita sit, ex primo propos. 16. & 17. huius, ea demonstranda sunt demonstrata: quia hac demonstratio eadem prorsus ratione differt potest post propos. 17. huius, ita vt nullam pertractationis petitionis principij, vt Philosophi loquuntur.*

a 16. *sexti.*
b 17. *sexti.*
c 14. *sexti.*

EX PELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam, (quæ minor non sit, quàm dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.

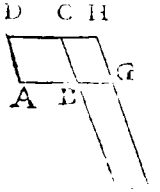


SIT data recta AC, & diuidenda lapropona-
tur recta AB, quæ minor non sit quàm dupla ipsius AC, sed vel dupla, vel maior: ita vt inter huius segmenta, media proportionalis sit AC. Diffonantus rectæ AB, AC, ad angulum rectum BAC, & diuisa AB, bifariam in D. ex D, centro, interuallo autem DA, vel DB, semicirculus describatur AEB. Deinde per C, ducatur ipsi AB, parallela CE, quæ AEB, vel tangat in E, puncto: vel secabit autem in duobus punctis E, F. circumferentiam, vel tanget. Nam si minor sit quàm semidiameter rectæ AB, hoc est, minor, quàm semidiameter ad angulos rectos erecta ex D, secabit circumferentiam, tanget autem eandem circumferentiam, si æqualis sit dimidio rectæ AB, hoc est, æqualis semidiametro ex D, ad angulos rectos eductæ. Cum ergo possimus sit, AC, non esse maiorem dimidio rectæ AB, secabit necessario AC, circumferentiam, aut tanget à quo demittatur ad AB, perpendicularis FE. Dico AC, esse mediam proportionalem inter segmenta AE, EB. Ductis enim rectis AE, BE, erit & iam est demonstratum, ex coroll. propos. 8. huius lib. EF, media proportionalis inter AE, & EB. d *Cum igitur EF, æqualis sit ipsi AC, eo quod parallelogrammum sit ACEF, (Est enim CE, ipsi AF, parallela per constructionem,* e *& AC, ipsi EF, propter angulos rectos CAF, & EFA,) erit & AC, media proportionalis inter AE, & EB. Quod erat propositum.*

d 35. *primi.*
e 34. *primi.*

xiij. THEOR. 9. PROPOS. 14.

ÆQVALIVM & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.



SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Conueniantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt AB, & BG, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cùm anguli ABC, EBG, sint æquales, erunt & EB, BC, vna recta linea, vt ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur iam DC, & FG, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia sunt parallelogramma DB, EF: *a* erit vt DB, ad BH, ita EF, ad eadem BH: Sed vt DB, ad BH, *b* ita est AB, basis ad basin BG: quòd parallelogramma sint eiusdem altitudinis; & similiter vt EF, ad BH, ita est basis EB, ad basin BC. Igitur vt AB, ad BG, ita est EB, ad BC Quod est propositum.

a 7. quinti. b 1. sext.

E CONTRARIO sint iam latera circa æquales angulos ABC, EBG, reciproca, hoc est, vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Dico parallelogramma DB, EF, esse æqualia. Facta enim eadem constructione; cùm sit, vt AB, ad BG, ita EB, ad BC: *c* Vt autem AB, ad BG, ita DE, ad BH; & vt EB, ad BC, ita BF, ad eandem BH; erit quoque vt DB, ad BH, ita BF, ad eandem EH. *d* Atqueidcirco æqualia erunt parallelogramma DB, EF. Æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

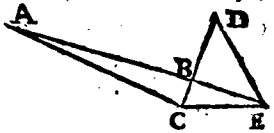
c 1 sext. d 9. quinti.

xiiij. THEOR. 10. PROPOS. 15.

ÆQVALIVM, & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

SINT duo triangula æqualia ABC, DBE, habentia angulos

los, qui ad B, æquales. Dico latera circa hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt AB, ad BE, ita DB, ad BC. Coniungantur enim triangula ad angulos æquales, ita vt AB, BE, vnam efficiant lineã rectam. Quo facto, cùm anguli ABC, DBE, sint æquales; erunt & DB, BC, vna recta linea, vt demonstratum est ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta CE, quoniam æqualia sunt triangula ABC, DBE, *a* erit vt ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE. Sed vt triangulum ABC, ad triangulum BCE, *b* ita est basis AB, ad basin BE, quòd hæc triangula eiusdem sint altitudinis; & similiter vt DBE, ad BCE, ita est basis DB, ad BC. Quare vt AB, ad BE, ita est DB, ad BC. Quod est propositum.



a 7. quint.

b 1. sexti.

IAM verò contrà, sint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc est, vt AB, ad BE, ita DB, ad BC. Dico triangula ABC, DBE, esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cùm sit vt AB, ad BE, ita DB, ad BC; vt autem AB, ad BE, *c* ita triangulum ABC, ad triangulum BCE; & vt DB, ad BC, ita triangulum DBE, ad triangulum idem BCE; Erit vt ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE, *d* propterea; æqualia erunt triangula ABC, DBE. Aequalium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod ostendendum erat.

c 1. sexti.

d 9. quinti.

THEOR. 11. PROPOS. 16. XV

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

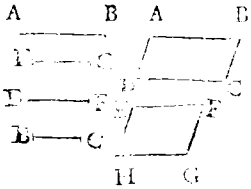
SINT quatuor rectæ proportionales AB, FG, EF, BC; vt quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC: Sitq; rectangulum ABCD, comprehensum sub extremis AB, BC; rectangulum verò EFGH, comprehensum sub medijs EF, FG: Dico rectangula AC, EG, esse æqualia. Cùm enim anguli recti B, & F, sint æquales, & sit vt AB, ad FG, ita EF, ad BC; erũt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca, *e* Quare parallelogramma AC, EG, æqualia erunt. Quod est propositũ.

e 14. sexti.

CONTRA verò, sint iam æqualia rectangula AC, EG Dico quatuor rectas lineas AB, FG, EF, BC, esse proportionales, hoc est, esse vt AB, ad FG, ita EF, ad BC. Cùm enim æqualia sint rectangula AC, EG, habeantq; angulos æquales, nempe rectos B, & F, *f* erunt latera circa hosce angulos reciproca; sicut quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC. Iraq; si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

f 14. sexti.

SCHOLIVM.

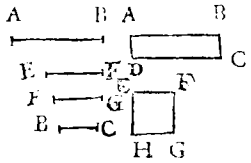


IDEM verum est, etiamsi parallelogramma A C, E G, non sint recta, dummodo sint æquiangula, & vt anguli dictus rectus lineis comprehensis sint æquales. Veluti manifestum est in hac figura. Eadem enim prorsus est demonstratio.

XVI.

THEOREMA PROPOS. 17.

SI tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT tres lineæ rectæ A B, E F, & B C, proportionales: vt quidem A B, ad E F, ita E F, ad B C: sitque rectangulum A B C D, contentũ sub extremis A B, B C, & quadratum mediæ E F, sit E F G H. Dico æqualia esse rectangulum A C, & quadratũ E G. Sumpta enim recta F G, quæ æqualis sit ipsi E F, erunt quatuor lineæ A B, E F, F G, B C, proportionales; vt quidem A B, ad E F, ita F G, ad B C; eritq; quadratũ E G, comprehensum sub medijs E F, F G, propter æqualitatem rectarum E F, F G. *a* Quare rectangulum A C, comprehensum sub extremis A B, B C, æquale est quadrato E G, hoc est, rectangulo sub medijs E F, F G, comprehenso. Quod est propositum.

a 16. *sexti.*

SED sint iam æqualia rectangulum A C, & quadratum E G. Dico esse vt A B, ad E F, ita E F, ad B C. Cum enim æqualia sint rectangula A C, & E G, *b* erit vt A B, ad E F, ita F G, ad B C: *c* Vt autem F G, ad B C, ita est E F, ipsi F G, æqualis ad eandem B C. Quare vt A B, ad E F, ita est E F, ad B C. Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

b 16. *sexti.*

c 7. *quinti.*

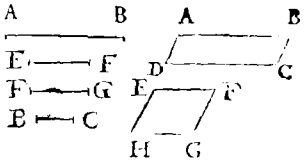
COROLLARIVM.

EX posteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem inter quotuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato dictæ æquale. Ex eo enim quod rectæ A B, B C, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ E F, ostensum fuit, esse vt A B, ad E F, ita E F, ad B C. Quare E F, media est proportionalis inter A B, & B C.

SCHO-

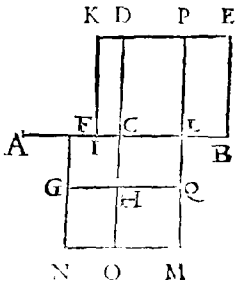
SCHOLIVM.

EADEM omnino consequuntur, etiamsi parallelogramma non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ut si FC, sit Rhombus, & AC, Rhomboides. Non enim desiderabis esse in his demonstratio, vt figura indicat.

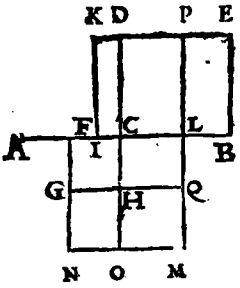


LIBET hoc loco cum Peletario demonstrare problema non inutile ad lineas proportionales speciatim: quod est eiusmodi.

SECTA linea recta in duas partes vtcunque, alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continuè proportionales.



SIT recta AB, diuisa in C, vtcunque, oporteatque partem CB, ita secare in duas alias partes, vt omnes tres partes continuè proportionales sint. Secetur AC, bifariam in F, & FC, rursum bifariam in I, vt CI, quarta pars sit primæ partis AC; & ex B, I, erigantur duæ perpendiculares BE, IK, primæ parti AC, æquales, ducaturque recta EK, ita vt rectangulum IE, comprehensum sit sub AC, primaparte, & rectaIB, compositæ ex altera parte BC, & ex CI, quarta parte primæ partis: Et quoniam AC, diuisa est bifariam in F, eique addita in rectum CB, a erit rectangulum sub AB, BC, vna cum a 6. secundi *quadrato ex CF, æquale quadrato ex FB: Est autem rectangulum IE, minus rectangulo sub AB, BC, vna cum quadrato ex CF. (Ducta enim CD, ad AE, perpendicularis, erit rectangulum CE, contentum sub AC, CB, minus rectangulo sub AB, BC:) At rectangulum CK, quadrato ex CI, æquale, cum & tertiumque quarta pars sit quadrati ex AC; rectangulum quidem CK, b quæ sit est rectangulum* b 1. sex. *CK, ad quadratum ex AC, hoc est, ad rectangulum sub AC, CD, & CI, ad CA; ac proinde cum CI, sit quarta pars rectæ AC, erit & CK, quarta pars quadrati ex AC: At verò quadratum ex CF, quarta pars est eiusdem quadrati ex AC, ex scholio propos. 4 lib. 2.) Igitur minus quoque erit quadrato ex BF. Si igitur c fiat quadratum rectangulo IE, æquale, erit eius latus minus recta FB, maius autem quam FC, quippe cum quadratum ex FC, æquale sit ostensum rectangulo CK, ac propterea minus rectangulo IE. Sit regulatus illud FL. Duo partem CB, ita scilicet esse in L, vt tres partes* c 14. secundi.



A C, C L, L B, sint continuè proportionales. Describatur enim ex F L, quadratum F M, rectaq; D C, extendatur ad O, & latus M L, ad P: sumptisq; duabus F G, H Q, ipsi C F, aqualibus, ducatur recta G Q, secans C O, in H. Eritq; C G, quadratum rectæ C H, ob aqualitatem rectarum C F, F G. Et quia ablatis aqualibus F C, F G, ex aqualibus F L, F N, reliqua C L, G N, aquales sunt; a & est C L, ipsi H Q, & G N, ipsi H O, aqualis; aquales quoque erunt H Q, H O; ideoq; H M, quadratum erit rectæ C L. Rursus quia tum rectangulum C Q, comprehenditur sub C L, & C H, sive C F, semisse ipsius A C, quam rectangulum G O, sub G N, sive C L, & G H, sive C F, semisse eiusdem A C, sive C D, b erunt duo rectangula C Q, G O, simul aqualia rectangulo C P, comprehenso sub eadem C L, & C D, quæ ipsis C H, G H simul aquales est. Itaq; cum rectangulum I E, quadrato F M, æquale sit; & rectangulum C K, quadrato C G; & rectangulum C P, duobus rectangulis C Q, G O, simul: erit reliquum rectangulum L E, comprehensum sub B E, sive A C, & B L, reliquo quadrato H M, aquale. Quocirca, cum data tribus rectis A C, C L, L B, rectangulum L E, sub extremis A C, B L, comprehensum aquale sit quadrato H M, mediæ C L; c erunt ipsa tres linea A C, C L, L B, continuè proportionales. Quod est propositum.

a 34. primi.

b 2. secundi.

c 17. sexti.

IN numeris idem problema ita perficietur. Posteriori parti numeri propositi adiiciatur prioris partis pars quarta, & conflatus numerus in priorem partem ducatur. Huius deinde producti numeri quadratæ radix eruatur. Nam si ex radice inuenta dematur semissis prioris partis, reliqua fiet secunda pars proportionalis, quam si ex posteriori parte dati numeri subtrahas, reliqua erit tertia pars. Veluti si linea A B, ponatur 76. pars autem A C, 36. & C B, 40. adiiciemus C I, hoc est, 9. quartam partem prioris partis 36. ad C B, id est, ad 40. posteriorem partem, & conflatum numerum 49. lineam scilicet I B, in priorem partem 36. sive in lineam A C, ducemus, atq; ex producto numero 1764. hoc est, ex rectangulo I E, radicem quadratam eruemus 42. pro linea F L, ex qua si detrahemus C F, semissem partis A C, nimirum 18. reliqua erit pars C L, 24. Hac ablata ex tota posteriori parte C B, 40 remanebit tertia pars L B, 16. Sunt ergo tres partes A C, C L, L B, numeri A B, 76. hæ tres, 36. 24. 16. continuè proportionales. Ex quo constat, quando radix quadrata extrahi nequit ex eo producto, problema effici non posse in numeris. Atque hinc intelligentur ea, quæ lib. 5. in tractatione proportionum prope finem scripsimus, cum de ortu proportionalitatis Geometricæ ex Arithmetica proportionalitate ageremus.

SED quando hactenus cum Euclide de lineis proportionalibus disputa-

disputauimus, non alienum erit à nostro instituto, de eisdem quoque cum Pappo Alexandrino disserere, qui datis duobus terminis extribus eiusdemque Medietatis siue Arithmeticæ, siue Geometricæ, siue Harmonicæ, tertium inquirit. Et in Geometrica proportionalitate aliter, quam ab Euclide factum est. Hæc autem exequemur, quantibus propositionibus quarum prima hæc sit.

I.

DATIS duabus rectis lineis, medias proportionales in Arithmetica proportionalitate inuenire.

SINT datæ rectæ AB, & C, quarum B sit maior, & figuræ planæ rectis hic repræsentantes inter quas media proportionalis Arithmetica sit inuenienda. Diuisa C, quæ sit æqualis EH, & exacerato AB, tali recta æqualis AD: Diuisa autem secundum F, ita ut FB sit æqualis ipsi DE, æqualis erit EG, excessui quo AF Arithmeticæ proportionalem media superat AB, etiam FG, excessui quo AB superat C. Excessui C æqualis ponatur HG, quæ ipsi EH, sit æqualis: dico AF, FG, & C, Arithmeticè proportionales esse.

HINC ostenditur mediam lineam FG, esse semissem extremis constitutæ. Quoniam enim AD, quæ ipsi EH, æqualis erit summæ AD, C, æqualis ipsi AF, duplæ, AF autem & FB, ipsius HG, duplæ, AF, tum & summæ AB, & C, tum FG, & HG, æquabit; ac proinde FG, semissis erit summæ extremarum. Quod erat propositum. 2. quinti.

II.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura, datæ duæ rectæ AB, & FG, quibus inuenienda sit tertia minor in Medietate Arithmetica. Ex minore FG, detrahatur recta GH, excessui BE, quo AB, ipsam FG, superat, æqualis, & ipsi EH, ponatur æqualis C. Dico C, esse tertiam proportionalem minorem. Excedit enim AB, ipsam FG, excessu BE, & FG, ipsam C, excessu GH: qui quidem duo excessus BE, GH, ex constructione, æquales sunt.

III.

DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire.

SINT in eadem figura datæ duæ rectæ C, & FG, quibus inuenienda sit tertia maior in Medietate Arithmetica. Sumatur AE, ipsi FG, æqualis, eique addatur EF, excessui GH, quo FG, ipsam C, superat, æqualis,

æquales. Dico A B, esse tertiam proportionalem maiorem; ita vt tres A B, F G, & C, sint proportionales Arithmeticè. Nam A B, excedit ipsam F G, excessu B E; & F G ipsam C, excessu G H. Cum ergo duo excessus B E, G H, ex constructione, sint æquales, patet propositum.

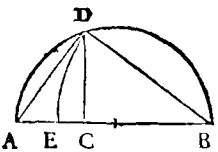
I T A Q V E data duabus maioris inæqualibus 30. 16. *si semissis excessus, nimirum* 7. *minori* 16. *adiungatur, conflabitur medium proportionalis Arithmetica,* 23. *vt hic apparet,* 30. 23. 16. *Vel medium terminus habebitur, si summa extremorum semissis sumatur; vt in eodem exemplo patet. Summa enim extremorum est* 45. *& eius semissis* 23. *medium terminum constituit.*

S I vero ex minore 16. *detrahatur excessus* 14. *reliquum erit minor extremus* 2. *in Medietate Arithmetica, vt hic vides,* 30. 16. 2.

S I denique maiori 30. *adiungatur excessus* 14. *conficietur maior extremus* 44. *in proportionalitate Arithmetica, vt hic patet,* 44. 30. 16.

IV.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire.



S I N T datæ rectæ A B, B C, eundem terminum B, habentes, inter quas inuenienda sit media Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem A B, semicirculo A D B, excitetur ex C, ad A B, perpendicularis C D; & ex B, per D, arcus describatur secans A B, in E. Dico B E, mediam proportionalem esse inter A B, B C, in proportionalitate Geometrica: 31. ter *Ductis enim rectis A D, B D; erit angulus A B D, rectus. Igitur ex* 3. *coroll. propos.* 8. *huius lib. recta B D, hoc est, ipsi æqualis B E, media proportionalis erit inter A B, B C. Quod est propositum.*

V.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire.

S I N T in eadem figura datæ rectæ A B, B E, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem A B, semicirculo A D B, describatur ex B, per E, arcus secans circumferentiam A D B, in D, puncto, ex quo ad A B, perpendicularis demittatur D G. Dico B C, tertiam pro- 31. ter *portionalem esse ipsis A B, B E. Ductis enim rectis A D, B D; erit angulus A D B, rectus. Igitur ex coroll. propos.* 8. *huius lib. erit B D, hoc est, ipsi æqualis B E, media proportionalis inter A B, B C: Id est, ex A B, in B E, vt B E, ad B C. Quod est propositum.*

DATIS

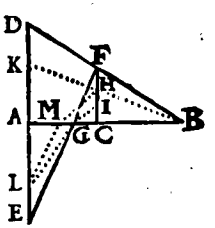
VI.

DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura data recta C B, B E, eundem terminum B, possidentes, quibus inuenienda sit maior tertia Geometricè proportionalis. Ex C, termino minoris excitetur ad E B, perpendicularis C D, quam arcus ex B, per E, descriptus secet in D. Ducta autem recta B D, excitetur ad eam in D, perpendicularis D A, secans B E, productam in A. Dico A B, tertiam proportionalem esse ipsis C B, B E. Quoniam enim angulus A D B, rectus est; erit ex coroll. propos. 8. huius lib. B D, hoc est, B E, ipsi aequalis, media proportionalis inter B C, & A B: Hoc est, erit C B, ad B E, vt B E, ad A B. Quod est propositum.

VII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.



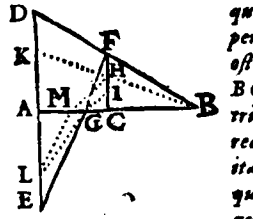
SINT data recta A B, B C, eundem terminum B, possidentes, inter quas inuenienda sit media Harmonicè proportionalis. Ducta per A, ad A B, perpendiculari D E, ponantur aequales A D, A E, quantacunq; Excitetur quoq; ex C, ad A B, perpendicularis C F, secans ductam rectam B D, in F, puncto, ex quo ad E, recta ducatur F E, secans A B, in G. Dico B G, esse mediam Harmonicè proportionalem inter A B, B C. Hoc est, esse A B, primam ad tertiam B C, vt A G, excessum inter primam A B, ac mediam B G, ad G C, excessum inter mediam B G, & tertiam B C. a Quoniam enim C F, parallela est ipsi D E, ob rectos angulos A, C, erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum B C F, triangulo B A D, simile: hoc est, erit vt A B, ad A D, ita B C, ad C F; & permutando, vt A B, ad B C, ita A D, ad C F, hoc est, ita A E, ad C F. Rursus ob similitudinem triangulorum A E G, C F G, b erit vt A E, ad A G, ita C F, ad C G; & permutando vt A E, ad C F, ita A G, ad G C. Erat autem vt A E, ad C F, ita A B, ad B C. Igitur erit quoque A B, ad B C, prima linea ad tertiam, vt A G, excessus inter primam A B, & mediam B G, ad G C, excessum inter mediam B G, & tertiam B C. Quod est propositum.

a 28. quinti.

b 4. sexti

NON determinantur autem magnitudines rectarum A D, A E, quia vtcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadem media B G, inuenietur. Sint enim aliæ aequales A K, A L. Ducta autem recta B K, secet perpendicularem C F, in H, iungaturque recta L H:

quam



quam dico per G, transire. Si enim transeat per aliud punctum, vt per M, inter A, & G, ostendemus eodem modo, esse vt A B, ad B C, ita A M, ad M C. Fient enim rursus triangula aquiangula A L M, M H C, si recta est H M L. Est autem vt A B, ad B C, ita A G, ad G C, vt ostensum est. Igitur erit quoque A M, ad M C, vt A G, ad A C, quod est absurdum. Nam a minor est proportio A M, ad G C, quam A G, ad G C: Sed adhuc minor est proportio A M, ad M C, quam ad G C. Multo ergo minor erit proportio A M, ad M C, quam A G, ad G C. Non ergo ita est A M, ad M C, vt A G, ad G C: ac propterea H L, non secabit A G, in M. Eodem modo non secabit G C. Transit igitur per G: atque idcirco eadem media B G, inuenietur per rectas A K, A L, aequales.

a 8. quinti.

VIII.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Harmonica Medietate inuenire.

SINT in eadem figura data recta A B, B G, eundem possidentes terminum B, quibus inueniendus sit minor tertia Harmonicè proportionalis. Ducta D E, ad A B, perpendiculari, ponantur aequales A D, A E, quantacunque: iuncta autem recta B D, ducatur ex E, per F, recta secans B D, in F, puncto, ex quo ad A B, perpendicularis agitatur F C. Dico B C, ipsis A B, B G, esse Harmonicè proportionales. Hoc est, esse A B, primam ad B C, tertiam, vt est A G, excessus primam & secundam, ad G C, excessum inter secundam ac tertiam. Quod quidem demonstrabitur, vt in praecedenti propositione.

NON determinantur etiam hic magnitudines rectarum A D, A E, quia vtcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadem tertia B C, reperietur. Sint enim aliae aequales A K, A L: Ducta autem recta B K, secet perpendicularem C F, in H, iungaturque recta L G, quam dico cadere in H. Si enim cadat infra, vt in I, ostendemus eodem modo, esse vt A B, ad B C, ita A K, ad C H hoc est, ita A L, ad G H. Vt autem A B, ad B C, ita erat A C, ad G C. Erit igitur quoque vt A L, ad G C, ita A L, ad G H. Et quia si recta linea est L G I, ob similitudinem triangulorum A L G, C I G, b *est vt A L, ad A G, ita C I, ad G C, erit permutando, vt A L, ad C I, ita A G, ad G C. Cum ergo ostensum sit esse vt A G, ad G C, ita A L, ad C H, erit A L, ad C H, vt ad C I.* c *Aequales sunt igitur C H, C I, totum & parti, quod est absurdum. Non ergo cadet L G, infra H: eodemque modo ostendemus non cadere supra. Cadit ergo in H, vbi B K, perpendicularem C F, secat; ac proinde ex H, demissa perpendicularis H C, ad A B, ex-*

b 4. sex.

c 9. quinti.

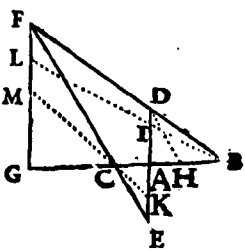
AB, exhibebit eandem tertiam minorem BC, proportionalem Harmonicè.

HINC sequitur, datis tribus rectis Harmonicè proportionalibus, minimam esse maiorem excessu, quo media minimam superat. Cum enim sit, vt AB, ad BC, ita AG, ad GC; sit autem AB, prima maior quam AG, excessu inter primam AB, & mediam BG; a erit quoq; BC, tertia maior qu GC, excessu inter mediã BG, & minimam BC. a 14. quinti.

IX.

DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire.

SINT data recta AB, BC, eundem habentes terminum B, quibus inuenienda sit maior tertia Harmonicè proportionalis. Ducta per A, ad BC, perpendiculari DE, ponantur aequales AD, AE, quantacunque, ducaturque recta BD, quam productam secet EG, producta in F, puncto, (quod autem conueniant BD, EC, mox demonstrabimus) ex quo ad BC, productam demittatur perpendicularis FG. Dico GB, ipsis CB, BA, Harmonicè proportionalem esse: Hoc est, esse GB, primam ad BA, tertiam, vt GC, excessum inter primam GB, & mediam BC, ad CA, excessum inter mediam CB, & tertiam BA. b *Quoniam enim GF, ipsi AD, parallela est, ob angulos rectos G, A; erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum BAD, triangulo BGF, simile: id est, erit vt GB, ad GF, ita BA, ad AD; & permutando, vt GB, ad BA, ita GF, ad AD, hoc est, ad AE. Rursus ob similitudinem triangulorum FGC, EAC, c erit vt FG, ad GC, ita EA, ad CA; & permutando vt FG, ad AE, ita GC, ad CA. Erat autem vt FG, ad AE, ita GB, ad BA. Igitur erit quoque vt GB, prima, ad BA, tertiam, ita GC, excessum inter primam GB, & mediam BC, ad CA, excessum inter mediam BC, & tertiam BA. Quod est propositum.*



b 28. primi.

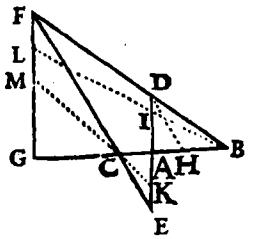
c 4. sexti.

QVOD autem BD, EC, conueniant, sic probabitur. Quoniam BC, ponitur media, & BA, tertia; siue minima, maior erit BA, tertia quam CA, excessu, quo media BC, minimam BA superat, vt ad finem antecedentis problematis ostendimus. Nisi enim maior esset AB, quam AC, non posset reperiri tertia maior; cum ea inuenta, semper demonstraretur tertia AB, maior excessu AC, quo media tertiam superat. Abscindatur ergo AH, ipsi AC, aequalis, connectaturque recta HD. Quoniam igitur latera AE, AC, lateribus AD, AH, aequalia sunt, angulosque comprehendunt aequales, vtpote rectos, siue ad verticem A; d erunt & anguli ACE, AHD, aequales: qui cum alterni

d 4. primi

a 27. pri alterni sint; a erunt recta EC, HD, parallela; b ac proinde anguli
xxi. interni DHC, HCF, duobus rectis aequales erunt. Cum ergo c an-
b 29. pri gulus DHC, maior sit interno angulo B, erunt duo anguli BCF,
xxi. CBF, duobus rectis minores. d Quocirca BD, EC, coibunt. Quod est
c 16. pri propositum.

xxii. NON determinantur quoque hic magnitudines rectarum AD,
d 13. pro AE: quia vtcunque sumantur sive maiores, sive minores, eadem ter-
xxi. tia BG, reperietur. Sint enim aliae aequales AI, AK: Ducta autem recta
BI, qua producta secet perpendicularem FG, in L, ducatur KC, quam
productam dico cadere in L. Si enim cadat infra, vt in M, ostendemus eo-
dem modo, esse vt GB, ad BA, ita GL, ad AI, id est, ad AK. Vt autem GB,
ad BA, ita erat GC, ad CA. Erit igitur, vt GC, ad CA, ita GL, ad AK.



Et quia, si recta linea est KCM, ob similitudinem triangulorum
c 4. sex. GMC, AKC, c est vt GM, ad GC, ita KA, ad AC, erit permutando, vt GM, ad KA, ita GC, ad CA. Cum ergo ostensum sit, esse
vt GL, ad AK, ita GC, ad CA, erit quoque GM, ad AK, vt GL,
f 9. ad AK. f Aequales sunt igitur GM, GL, pars & totum, quod est ab-
quinti. surdum. Non ergo cadet KC, infra L: eademque ratione neque supra
cadet. Cadit ergo in L, vbi BI, producta perpendicularem FC, secat;
ac proinde ex L, demissa perpendicularis LG, ad GB, cadet in G, ex-
hibebita, eandem tertiam GB, maiorem, Harmonicè proportionalem.

EX his perspicuum est, quando duo numeri proportionem habent
duplam, vel duplae maiorem, illis non posse adiungi tertium maiorem
in proportionalitate Harmonica, vt in tractatione proportionum in 3.
regula proportionalitatis Harmonica diximus. Quia enim ostendi-
mus, BA, minimam lineam esse maiorem excessu AC, quae media
BC, minimam AB, superat; erit AB, maior semisse ipsius BC; ac
proinde BC, ad AB, media ad minimam, minorem proportionem ha-
bebit, quam duplam. Quod si BC, ad AB, esset dupla, vel maior quam
dupla, esset AB, vel aequalis ipsi AC, vel minor. Quare vt ostensum
est, non posset reperiri tertia maior in Harmonica proportionalitate:
quia EC, cum BD, non coiret.

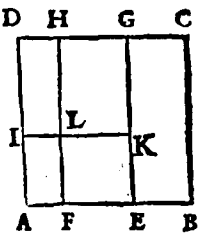
SED demonstremus etiam cum Io. Baptista Benedicto, qua ratio-
ne iidem termini proportionalitatis Harmonica in numeris reperian-
tur. Hinc enim patebit ratio quarundam praxium, quas in tractatio-
ne proportionum in lib. 5. explicauimus. Vtemur autem nonnullis
propositionibus libri 7. cum ea ex lib. 5. & 6. non pendeant, atque id-
circo ante hos libros demonstrari possint. Hinc igitur exordium su-
memus.

EX datis

X.

EX datis quibuſuis duobus numeris, tres numeros Harmonice proportionales, quorum extremi eandem proportionem habeant, quã dati duo numeri, reperire.

EX qualibet recta AB, deſcribatur quadratum ABCD, Sumptiquè duabus partibus æqualibus BE, EF, in latere AB, ducantur EG, FH, ipſis AD, BC, parallela. Item ſumpta recta AI, æquali ipſi BE, & vel EF, agatur IK, ipſis AB, DC, parallela ſecans FH, in L. Erit rectangulum AG, contentum ſub AB, (id eſt, ſub ſumma rectarum AE, EB; a cum EG, ſit ipſi BC, ideoque ipſi AB, æqualis) & AE (maiore ſcilicet parte ſummæ AB,) Rectangulum verò EC, continebitur ſub AB, (hoc eſt, ſub eadem ſumma rectarum AE, EB,) & EB, (minore videlicet parte eiuſdem ſummæ AB) Tam deniq; rectangulum AK, quam GL, ſub partibus AE, EB, comprehendetur; propterea quod AI, ſumpta eſt ipſi EB, æqualis; & HL, LK, ipſis AE, EB, æquales. b Cum enim FH, ipſi AD, hoc eſt, ipſi AB; & FL, ipſi AI, hoc eſt, ipſi EB, ſit æqualis: erit reliqua HL, reliquæ AE, æqualis: at c KL, ipſi EF, ſiue ipſi EB; æqualis eſt. Ex quo fit, duo rectangula AK, KH, ſimul continere duplum eius, quod ſub partibus AE, EB, continetur. Dico rectangulum AG; & ſummam duorum rectangulorum AK, KH; & rectangulum EC, conſtituere proportionalitatem Harmonicam: hoc eſt, vt eſt AG, primum, ad EC, tertium, ita eſſe IH, exceſſum inter primum AG, & ſecundum HLIAEG, ad AL, exceſſum inter ſecundum HLIAEG, & tertium EC, ſiue FG, d quod ipſi EC, æquale eſt. Nam cum HL, ipſi AE; & LF, ipſi EB, æqualis ſit, vt oſtendimus; e erit AE, ad EB, vt HL, ad LF. Vt autem AE, ad EB, ſ ita eſt AG, ad EC: Et vt HL, ad LF, ita eſt HI, ad AL. Igitur erit quoque AG, primum ad EC, tertium, vt HI, exceſſus inter primum ac medium, ad AL, exceſſum inter medium ac tertium. Quod eſt propoſitum.



a 34. primi.

b 34. primi.

c 34. primi.

d 36. primi.

e 7. quinti.

ſ 11. ſexti.

ITAQVE ſi AE, ponatur 6 & EB, 4. erit ſumma AB, 10. quam ſi ducamus in AE, & EB, fiet AG, 60. & EC, 40. Duplum autem eius, quod fit ex AE, in EB, hoc eſt, HLIAEG, fiet 48. medium Harmonicum. Tres igitur numeri Harmonicè proportionales erunt 60. 48. 40. quorum extremi eandem proportionem habent, quam dati numeri 6. 4. Cum enim eadem ſumma 10. ex 6. & 4. collecta multiplicans vtrumque 6. 4. produxerit extremos 60. 40. g erit 60. ad 40. vt 6. ad 4. Quod etiam patet ex figura. h Eſt enim AG, id eſt, 60. ad EC, id eſt, ad 40. vt AE, id eſt, 6. ad EB, id eſt, ad 4.

g 17 ſe. 6. primi.

h 1. ſex.

HAC arte, si summa quorumlibet duorum numerorum dati detur in utrumque seorsum, gignentur extremi terminis proportionalitatis Harmonicæ eandem habentes proportionem, quam dati duo numeri: Medius autem terminus erit numerus duplus eius, qui fit ex multiplicatione datorum duorum numerorum inter se.

EX his facile etiam inuenietur tres numeros Harmonicè proportionales, quorum extremi proportionem habeant datam, & medius sit dato numero æqualis. Vt si extremi debeant habere proportionem quintuplam, mediusque sit 30. sumendi sunt 5. & 1. in data proportione. & eorum summa 6. in utrumque ducenda, vt fiant 30 & 6. inter quos statuatur medius 10. qui duplus est producti ex multiplicatione datorum numerorum 5. & 1 vnius in alterum: erunt q; 30. 10. 6. Harmonicè proportionales, vt dictum est. Deinde datus medius 30. diuidatur per medium inuentum 10. & Quotiens 3. per tres inuentos 30. 10. 6. multiplicetur. Ita enim fient tres numeri quæsiti 90. 30. 18.

ALITER.

INTER datos duos numeros 6. 4. statuatur medius Arithmeticè proportionalis, 5. nimirum semissis eorum summæ, hoc modo, 6. 5. 4. Deinde medius 5. in extremos 6. & 4. ductus gignat 30. & 20. inter quos statuatur medius 24. quem extremi inter se multiplicati producunt, hoc modo, 30. 24. 20. Dico hos tres esse Harmonicè proportionales. Quoniam enim tres numeri 60. 48. 40. qui fiunt ex summa 10. datorum numerorum 6. 4. in datos numeros 6. & 4. & ex 4. in 6. bis, dupli sunt trium numerorum hic inuentorum, quod hi producti sint ex semisse summæ datorum numerorum in datos numeros, & ex 4 in 6. semel, vt perspicuum est: erit quæ

60. 48. 40.
30. 24. 20.

que tum excessus inter 60. & 48. duplus excessus inter 30. & 24. quàm excessus inter 48. & 40. ipsius excessus inter 24. & 20. vt ad propos. 10. ostendimus. Cum ergo tres numeri 60. 48. 40. sint Harmonicè proportionales, vt in præcedenti problemate demonstrauimus; erunt quoque eorum semisses, 30. 24. 20.

a 15. quinti. *a easdem habentes proportiones, Harmonicè proportionales: quandquidem & excessus eandem proportionem habent, quam excessus numerorum 60. 48. 40. quippe cum excessus numerorum 30. 24. 20. semisses sint horum numerorum 60. 48. 40. excessuum, vt dictum est.*

XI.

DATIS duobus numeris, medium Harmonicè proportionalem inuenire.

SINT duo numeri dati AB, 15. & BC, 10. inter quos inueniendus sit medius proportionalis Harmonicè. Dematur ex maiore AB, 15. numerus ED, minori BC, 10. æqualis, & reliquus numerus AD, 5. nimirum differentia datorum numerorum, ducatur in minorem BC, 10.

B C, 10. *productusque numerus* 50. *divisus per A C*, 25. *summam datorum numerorum, fit ex Quotiente D E*, 2. *qui additus minori B D*, 10. *facit D E*, 12. *Dico B E, esse medium proportionalem Harmonicè inter A B, B C, hoc modo*, 15. A ... E .. D ..... B C

12. 10. *Quoniam enim numerus, qui ex A D, in B C, fit, divisus per A C, Quotiens est D E, producetur idem numerus divisus ex D E, Quotiente in divisorem A C, & constat ex defin. Divisionis. Quia igitur idem numerus fit ex A C, primo, in D E, quartum, qui ex B C, vel B D, secundo, in A D, tertium*; a erit *A C, primus ad B C, secundum, & A D, tertius ad D E,* a 19. *sequartum: Et dividendo, A B, ad B C, primus datus ad tertium datum, & A E, excessus inter primum A B, & medium inventum B E,* vel 16. *ad D E, excessum inter medium B E, & B D, sive tertium B C. Sunt sexti. ergo A B, B E, B C, numeri* 15. 12. 10. *Harmonicè proportionales. Quod erat propositum.*

ITAQUE si differentia datorum numerorum ducatur in minorem, numerique producti dividatur per datorum numerorum summam, ac denique Quotiens minori adiciatur, constabit medius terminus Harmonica proportionalitatis.

XII.

DATIS duobus numeris, minorem extremum in proportionalitate Harmonica invenire.

SINT duo numeri dati A B, 15. *& A C*, 12. *quibus inveniendus est minor Harmonicè proportionalis. Dividatur B D, æqualis ipsi B C, excessui inter datos numeros. Per hanc summa A D,* A ..... E .. C ... B ... D

18. *colligatur ex maiore numero, & differentia datorum numerorum dividatur numerus* 36. *factus ex minore dato A C, in B C, differentiam datorum numerorum*; *& Quotiens C E, ex minore dato A C, detrahatur. Dico reliquam A E*, 10. *esse terminum tertium minorem quæsitum, hoc modo*, 15. 12. 10. *Quoniam enim numerus, qui ex A C, in B C, fit, divisus per A D, Quotiens sit C E, producetur idem numerus divisus ex C E, Quotiente in divisorem A D, multiplicato. Et ex Divisionis defin. manifestum est. Quare igitur idem numerus gignitur ex A D, primo, in C E, quartum, qui ex B C, secundo in A C,* A ..... E .. C ... B ... D

tertium; b erit *A D,* b 19. *sæprimus ad B C, secundum, hoc est, ad B D, & A C, tertius ad C E, quartum. Et dividendo, A B, ad B D, hoc est, ad B C, & A E, ad* vel 16. *C E: Et permutando, A B, primus datus ad A E, tertium inventum, sexti. & B C, excessus inter primum A B, & medium A C, ad C E, ex-*

cessum inter medium AC, & tertium AE. Sunt igitur tres numeri AF, AC, AE, id est, 15. 12. 10. *Harmonicè proportionales. Quod est propositum.*

ITAQVE si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam dividatur numerus ex minore numero, & differentiâ eorundem datorum numerorum procreatus, Quotiens semper ex minore dato detrahatur, reliquus fiet minor extremus in proportionalitate Harmonica.

ALITER.

SINT rursum dati duo numeri AF, 15. *& AC,* 12. *quibus inveniendus sit maior in Harmonica Medietate. Maiori AB, addatur BD, æqualis differentiæ BC,* 3. *datorum numerorum. Et per summam AD,* 18. *dividatur numerus* 180. *ex multiplicatione datorum numerorum AB, AC, hoc est,* 15. 12. *inter se procreatus, sitque Quotiens AE,* 10. *Dico AE, minorem extremum esse in Medietate Harmonica. Quoniam enim numero, qui ex AB, in AC, gignitur, diviso per AD, Quotiens sit AE. producetur idem numerus divisus ex AE, Quotiente in divisorem AD, multiplicato, & ex definitionis Divisionis constat. Quia igitur idem numerus fit ex AD, primo in AE, quartum, qui ex AB, secundo in AC, tertium; a erit AD, primus ad AB, secundum, & AC, tertius ad AE, quartum; ac proinde cum AD, maior sit, quam AB, erit quoque AC, maior quam AE. Quare erit & dividendo BD, id est, BC, ad AB, & CE, ad AE: Et convertendo AB, ad BC, & AE, ad CE; Et permutando AB, primus ad AE, tertium inventum, & BC, excessus inter primum AB, & medium AC, ad CE, excessum inter medium AC, & tertium AE. Sunt igitur tres numeri AB, AC, AE, hoc est,* 15. 12. 10. *Harmonicè proportionales. Quod est propositum.*

a 19. sep. & vel 16. sexti.

ITAQVE si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam dividatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter se procreatus, erit Quotiens minor terminus extremus Harmonicæ Medietatis.

XIII.

DATIS duobus numeris, maiorem extremum in Harmonica proportionalitate invenire.

SINT dati duo numeri AB, 10. *& AC,* 12. *quibus inveniendus sit tertius maior in Medietate Harmonica. Ex minore AB, detrahatur BD, æqualis differentiæ BC,* 2. *datorum numerorum. Et per reliquum numerum AD,* 8. *dividatur numerus* 24. *factus ex maiore numero AC,* 12. *in differentiam datorum numerorum BC,* 2. *vel BD.*

Quo-

Quotiens autem C E, 3. maiori numero A C, 12. adiiciatur. Dico ſummam A E, 15. eſſe terminum maiorem in proportionalitate, ſiue Medietate Harmonica, hoc eſt, tres numeros A E, A C, A B, nimirum 15. 12. 10. eſſe Harmonicè proportionales. Quoniam enim numero, qui ex A C, in B D,

A ..... D .. B .. C ... E

fit diuiſo per A D, Quotiens fit C E, producetur idem numerus diuiſus ex C E, Quotiente in diuiſorem A D, multiplicato. Quia igitur idem numerus gignitur ex A C, primo in B D, quartum, qui ex C E, ſecundo in A D, tertium, a erit A C, primus ad C E, ſecundum, & A D, tertius ad B D, quartum: Et componendo A E, ad C E, & A B, ad B D, a 19. ſep. vel 16. ſexti. *hoc eſt, ad B C: Et permutando A E, primus ad A B, tertium, & C E, exceſſus inter primum A E, & medium A C, ad exceſſum B C, inter medium A C, & tertium A B. Sunt ergo tres numeri A E, A C, A B, nimirum 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod eſt propoſitum.*

ITAQVE datis duobus numeris, ſi eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex maiore numero in differentiam datorum numerorum procreatus, Quotiensq; maiori numero adiiciatur, conflabitur maior terminus extremus Medietatis Harmonicæ.

ALITER.

SINT rurſum duo dati numeri A B, 10. & A C, 12. quibus inueniendus ſit maior in Harmonica Medietate. Ex minore A B, dematur B D, aqualis exceſſui B C, datorum numerorum: Et per reliquum numerum A D, 8. diuidatur numerus 120. factus ex multiplicatione datorum numerorum A B, 10. & A C, 12. procreatus, Quotiensque ſit A E, 15. Dico A E, eſſe terminum maiorem in proportionalitate Harmonica. Quoniam enim numero, qui fit ex A B, in A C, diuiſo per A D, Quotiens eſt A E, producetur idem numerus diuiſus ex A E, Quotiente in diuiſorem A D, ex defin. Diuiſionis. Quia igitur idem numerus gignitur ex A B, primo in A C, quartum, qui ex A D, ſecundo in A E, tertium;

A ..... D .. B .. C ... E

b *erit A B, primus ad A D, ſecundum, & A E, tertius ad A C, quartum; ac proinde cum A B, maior ſit quam A D, erit & A E, maior quam A C. Et cum ſit, & A E, ad A C, ita A B, ad A D, erit per conuerſionem rationis A E, ad C E, & A B, ad B D, hoc eſt, ad B C: Et permutando A E, primus inuentus ad A B, tertium, & C E, exceſſus inter primum A E, & medium A C, ad B C, exceſſum inter medium A C, & tertium A B. Igitur tres numeri A E, 15. A C, 12. A B, 10. Harmonice proportionales ſunt. Quod eſt propoſitum.* b 19. ſep. vel 16. ſexti.

ITAQVE datis duobus numeris, ſi eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex mul'si-

plicatione datorum numerorum inter se genitus, dabit Quotiens maiorem terminum extremum Medietatis Harmonicæ.

POSTREMO libet quoque ex Pappo praxes illas demonstrare, quibus ad finem tractationis proportionum ex æqualitatis proportione omnes proportiones rationales, & vicissim ex inæqualitatis proportione qualibet æqualitatem, ac denique ex quauis proportionalitate Geometrica & Geometricam, & Arithmeticam, & Harmonicam oriri docuimus. Sic ergo ex proportionalitate Geometrica tam æqualium terminorum, quam inæqualium, gignitur proportionalitas alia Geometrica inæqualium terminorum.

XIV.

PROPOSITIS tribus terminis Geometricè proportionalibus siue æqualibus, siue inæqualibus: Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta: ac summa conflata ex secundo & tertio semel: ac tertius semel, sunt Geometricè proportionales.

SINT tres termini continuè proportionales Geometricè, A, B, C: sitque D, summa ex A, semel, & B, bis, & C, semel collecta: At E, summa ex B, & C, semel conflata, ac denique F, ipsi C, æqualis. Dico

A, 1. *B*, 1. *C*, 1. *A*, 12. *B*, 6. *C*, 3.

D, 4. *E*, 2. *F*, 1. *D*, 27. *E*, 6. *F*, 3.

D, E, F, Geometricè quoque proportionales esse. Cum enim sit A, ad B, vt B, ad C; erit quoque componendo A, B, simul ad B, vt B C, simul ad C. a *Igitur omnes antecedentes simul, nimirum A, B, & B, C, ad omnes consequentes simul, nimirum ad B, C, vt vna antecedens, hoc est, B, C, ad vnam consequentem C. Est autem D, æqualis ipsis A, B, & B, C: Et E, ipsis B, C: ac denique F, ipsi C. Igitur erit quoque D, ad E, vt E, ad F: ac proinde D, E, F, Geometricè sunt proportionales. Quod est propositum.*

a 12. quinti.

HINC manifestum est, si termini A, B, C, sint

A.	*B.*	*C.*
1.	1.	1.
D.	*E.*	*F.*
4.	2.	1.

æquales; D, E, F, esse duplos, Nam B, C, simul dupli erunt ipsius C; ac propterea & E, ipsius F: quòd E, ipsis B, C; & F, ipsi C, sit æqualis. Cum ergo D, E, F, sint continuè proportionales, ipsi erunt in dupla proportione. Quod si termini æquales A, B, C, sint vnitates, generabitur dupla proportionalitas D, E, F, in minimis terminis 4. 2. 1. propterea quòd F, æqualis est ipsi C, hoc est, vnitati.

SI verò

SI verò A, B, C, sint dupli, erunt geniti D, E, F, tripli. Nam si B, ipsius C, duplus est; erit summa ex B, C, collecta, id est, E, ipsius C, hoc est, ipsius F, triplus: ac proinde D, E, F, continuam proportionem triplã habebunt. Atq; eodem modo ex triplis orientur quadrupli, ex quadruplis quintupli, & sic in infinitũ.

A.	*B.*	*C.*	
4.	2.	1.	
D.	*E.*	*F.*	
9.	3.	1.	

AT si termini A, B, C, sint dupli inuerso ordine, erunt D, E, F, geniti, sesquialteri. Nam cum B, sit semissis ipsius C; erit summa ex B, C, collecta, hoc est, E, ipsius C, siue ipsius F, sesquialtera. Eodem modo, si A, B, C, sint conuerso ordine tripli, erunt procreati D, E, F, sesquitertij. Nam B, erit ipsius C, tertia pars. Igitur summa ex B, C, conflata, id est, E, continebit C, siue F, semel, & insuper eius partem tertiam: ac propterea D, E, F, habebunt continuam proportionem sesquitertiam. Pari ratione ex quadruplis inuersis nascentur sesquiquarti, & ex inuersis quintuplis sesquiquinti, atque ita in infinitum. Non aliter monstrabimus, aliarum proportionum generationes ex aliis proportionibus rectè esse præscriptas in tractatione proportionum. Item rectè quamcunque proportionem inæqualitatis ad æqualitatem reuocari: quippe cum in ea reductione retexamus quodammodo operationem, qua inæqualitatis proportionem ex æqualitate gigni tradidimus.

A.	*B.*	*C.*	
1.	2.	4.	
D.	*E.*	*F.*	
9.	6.	4.	
A.	*B.*	*C.*	
1.	3.	9.	
D.	*E.*	*F.*	
16.	12.	9.	

XV.

PROPOSITIS tribus terminis siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta: ac summa ex primo, secundo, & tertio semel conflata: ac deniq; tertius semel, sunt Arithmeticè proportionales.

SINT tres termini Geometricè proportionales A, B, C: sitque D, summa collecta ex A, bis, ex B, bis, & ex C, semel: At E, summa conflata ex A, B, C, semel: Ac denique F, ipsi C, æqualis. Dico D, E, F, esse Arithmetice proportionales. Quoniam enim summa ex A, bis, & B, bis, & C, semel, hoc est, terminus D, superat summam ex A, B, C, semel, hoc est, terminum E, aggregato ex A, B, semel collecto. Item summa ex A, B, C, hoc est, terminus E, superat terminũ C, siue F, eodem aggregato ex A, B, semel collecto; erit idem excessus inter D, & E, qui inter E, & F; ac propterea D, E, F,

A, 1. B, 1. C, 1. *A, 12. B, 6. C, 3.*

D, 5. E, 3. F, 1. *D, 39. E, 21. F, 3.*

A.	*B.*	*C.*	
3.	19.	1.	
D.	*E.*	*F.*	
47.	24.	1.	

Arithmeticam proportionalitatem, siue Medietatem constituent. Quod est propositum.

EADEM prorsus ratione orietur proportionalitas Arithmetica ex tribus terminis quibuscunque, etiamsi non sint proportionales: vt in hoc exemplo perspicuum est.

XVI.

PROPOSITIS tribus terminis siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa collecta ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel: ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel: & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coacernata, Harmonicè proportionales sunt.

SINT tres termini Geometrice proportionales A, B, C: sitque D, summa collecta ex A, bis, ex B, ter, & ex C, semel: At E, summa ex B, bis, & C, semel conflata: Ac denique F, summa ex B, semel, & C, semel collecta. Dico D, E, F, constituere proportionalitatem, siue Me-

A, 1. *B*, 1. *C*, 1. *A*, 12. *B*, 6. *C*, 3.

D, 6. *E*, 3. *F*, 2. *D*, 45. *E*, 15. *F*, 9.

dietatem Harmonicam. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita B, ad C, erunt ex scholio propos. 22. lib. 5. vt A, bis, ad B, ita B, bis, ad C. Igitur componendo, vt A, bis, & B, semel, ad B, ita B, bis, & C, semel ad C.

a 12. quinti. *a Igitur vt omnes antecedentes simul, nimirum A, bis, & B, ter, & C, semel, hoc est, terminus D, ad omnes consequentes simul, nimirum ad summam ex B, C, id est, ad F, ita vnum antecedens, nimirum A, bis, & B, semel ad B. Est autem A, bis, & B, semel excessus, quo A, bis, & B, ter, & C, semel, superant B, bis, & C, semel, hoc est, excessus inter D, primum terminum, & medium E: At B, excessus, quo B, bis, & C, semel, superant summam ex B, C, hoc est, excessus inter E, medium, & F, tertium. Igitur erit vt D, primus ad F, tertium, ita excessus inter primum & medium, ad excessum inter medium ac tertium; ideoque D, E, F, Harmonicè proportionales erunt. Quod est propositum.*

SEMPER autem minimi termini procreantur D, E, F, quando dati termini A, B, C, sunt vnitates; vt in exemplis prolatis manifestum est. Quando autem A, B, C, non sunt vnitates, etiamsi in sua proportione minimi sint, non semper creantur minimi termini D, E, F.

A, 9. *B*, 6. *C*, 4. | *A*, 1. *B*, 4. *C*, 16. | *A*, 9. *B*, 12. *C*, 16.

D, 40. *E*, 16. *F*, 10. | *D*, 30. *E*, 24. *F*, 20. | *D*, 70. *E*, 40. *F*, 28.

Id quod

Id quod liquidò constat in his exemplis. In primo enim exemplo, ex minimis terminis proportionis sesquialterę, & in secundo ex minimis terminis subquadruplę proportionis, & in tertio ex minimis terminis subsesquitertię proportionis, gignuntur tres in proportionalitate Harmonica non minimi. Quod si termini inuertantur, tum demum, (quod mirum est) minimi termini Mediętatis Harmonicę procreabuntur, vt hæc exemplа demonstrant.

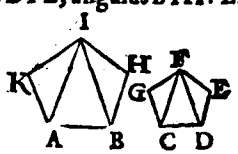
A, 4. *B*, 6. *C*, 9. | *A*, 16. *B*, 4. *C*, 1. | *A*, 16. *B*, 12. *C*, 9.

D, 35. *E*, 21. *F*, 15. | *D*, 45. *E*, 9. *F*, 5. | *D*, 77. *E*, 33. *F*, 21.

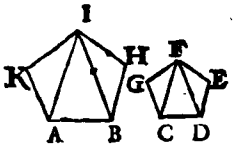
PROBL. 6. PROPOS. 18. xix.

A DATA recta linea dato rectilineo simile, similiterq; positum rectilineum describere.

SIT data recta AB, super quam describendum sit rectilineum rectilineo CDEFG, simile similiterque positum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex F, ad singulos angulos oppositos rectæ lineæ, quæ rectilineum resoluant in triangula CDF, DEF, FGC. Deinde angulo DCF, æqualis fiat angulus BAI; & angulo CDF, angulus ABI, coeantq; rectæ AI, BI, in puncto I; (coibunt enim omnino, propterea quòd duo anguli IAB, IBA, duobus rectis minores sint, cùm æquales sint duobus angulis FCD, FDC, *a* qui duobus rectis sunt minores.) *b* eritque reliquo angulo CFD, reliquus angulus AIB, æqualis; totumque triangulum AIB, toti triangulo CFD, æquiangulum. Rursus angulo FDE, æqualis fiat angulus IBH; & angulo DFE, angulus BIH: Et *c* quia duo anguli EDF, EFD, minores sunt duobus rectis; erunt quoq; duo anguli HBI, HIB, duobus rectis minores; ac proinde rectæ BH, IH, coibunt. Coeant ergo in puncto H, eritq; eadem ratione triangulum BHI, triangulo DEF, æquiangulum. Præterea angulo CFG, fiat æqualis angulus AIK; & angulo FCG, angulus IAK: *d* Et quia duo anguli GCF, GFC, minores sunt duobus rectis: erunt & duo anguli KAI, KIA, duobus rectis minores; atque idcirco rectæ AK, IK, conuenient in aliquo puncto. Conueniant ergo in K: eritque triangulum quoque AKI, triangulo CGF, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absoluantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura extiterint. Dico igitur, rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG, simile esse, similiterque positum. Cùm enim angulus IAB, constitutus sit æqualis angulo



a 17. primi.
b 32. primi.
c 17. primi.
d 17. primi.

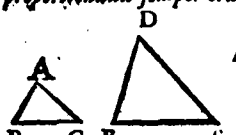


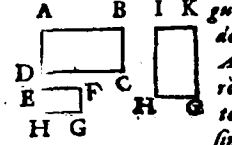
FCD; & angulus IAK, angulo FCG; erit totus angulus BAK, toti angulo DCG, æqualis: Eademque ratione angulus ABH, angulo CDE, æqualis erit; & reliqui reliquis, vt constat ex constructione; cùm singulæ partes vnius singulis partibus alterius factæ sint æquales. Quare æquiangulum erit rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG. Quoniam verò *a* ita est AB, ad BI, vt CD, ad DF: & ita BI, ad BH, vt DF, ad DE: *b* erit ex æquo ita AB, ad BH, vt CD, ad DE. Quare latera circa æquales angulos ABH, CDE, proportionalia sunt, *c* quemadmodũ & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia sunt, ob triangula æquiangula BHI, DEF. *d* Rursus ita est HI, ad IB, vt EF, ad FD: & ita IB, ad IA, vt FD, ad FC: & ita IA, ad IK, vt FC, ad FG. *e* Igitur ex æquo erit ita HI, ad IK, vt EF, ad FG, & ideo latera quoq; circa æquales angulos HIK, EFG, proportionalia erunt, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cùm sint æquiangula, habeantq; latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterq; descripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterq; positum rectilineum describimus. Quod faciendum erat.

a 4. sexti.
b 22. quinti.
c 4. sexti.
d 4. sexti.
e 22. quinti.

SCHOLIVM.

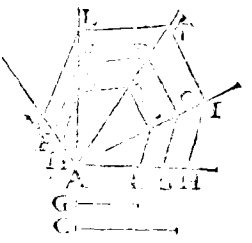
DICVNTVR autem rectilinea super lineas rectas descripta, esse similia & similiter posita, quando anguli æquales constituuntur super ipsas rectas lineas, & tam reliqui æquales anguli, quàm latera proportionalia semper ordine sese consequuntur. Vt triangula ABC, DEF, non solùm erunt similia, sed etiã super rectas BC, EF, similiter q; descripta, si anguli B, C, æquales fuerint angulis E, F; & ita sit AB, ad BC, vt DE, ad EF, &c. At supra rectas BC, DE, non dicentur similiter esse descripta, (quanquam similia sint,) cùm anguli B, C, nõ sint æquales angulis D, E. Similiter rectangula AC, EG, similia, dicentur similiter esse descripta super rectas DC, HG, quoniam vt AD, ad DC, ita est EH, ad HG, &c. At verò rectangula AC, IG, non dicentur similiter descripta super rectas DC, HG, quamuis sint similia, vt manifestũ est. Eadem tamen similiter erũt descripta super rectas DC, IH, vel super rectas AD, HG.





CÆTERVM omnes figuræ secundum constructionem huius problematis descriptæ, sunt necessariò similiter positæ, vt patet in rectilineis ABHIK, CDEFG, super lineas AB, & CD, descriptis. Item omnes æquilaterę figuræ, & æquiangulæ, sunt quæ q; positæ similiter super quælibet earum latera.

FOR-

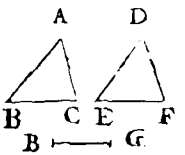


FORTASSIS autem expeditius **Problema** propositū construemus ad hunc **modum. Sit** data rectilinea **A B C D E F, super datam** rectā **G** similem, & æqualem, **describendum** simile rectilineum, **similiterq; positum** alicui ex datis rectilineis, **ut lateribus A B, A F, circa angulum A, educantur ex A** per omnes alios angulos rectæ **A C A D, A E** quotcunque libet. Deinde ex **A B, abscindatur A H,** æqualis datæ rectæ **G,** & per **H** ducatur **H I** parallela ipsi **B C,** & per **I,** recta **I K,** latori **C D,** parallela, & ſic deinceps, donec occurrant latera **ſuas habeant parallelas, demptis duobus lateribus ex productis A B, A F. Fiatq; erit, quod proponitur: hoc eſt figura A H I K L M, ſuper rectam A H,** datæ rectæ **G,** æqualem ſimilis erit figuris **datis, similiterq; poſita figuræ propoſitæ A B C D E F. Fiat** rectam **A B** coniungens. **Cùm enim** anguli **H A M, ſint** communes, & anguli **A B C, A F E,** æquales ſint anguli **A H I, A M L.** Item anguli **A C B, A C D** æquales ſint anguli **A I H, A I K,** hoc eſt toti angulo **B C D,** æqualis ſit **angulum totus H I K.** Eodemq; modo anguli **C D E, D E F** æquales ſint anguli **I K L, K L M.** Æquiangula erunt rectilinea **A B C D E F, A H I K L M.** Sed & latera circum æquales angulos habent proportionalia. Cum enim triangula **A H I, A I K, A K L, A L M** ſimilia ſint per corol. propoſ. 4 huius lib. triangulis **A B C, A C D, A D E, A E F; Erit,** b vt **A B,** ad **B C,** ita **A H,** ad **H I.** Rurſus, vt **B C,** ad **C A,** ita **H I,** ad **I A.** Et vt **C A,** ad **C D,** ita **I A,** ad **I K** æquiangula. Proinde ex æquo, vt **B C,** ad **C D,** ita **H I,** ad **I K,** &c. Igitur ex definitione ſimilia ſunt rectilinea **A B C D E F, A H I K L M,** atq; adeo ſimiliter poſita, quæ proximè hoc problema ſcripſimus. 29. pri mi.

b 4. ſexti.

THEOR. 13. PROPOS. 19. xvij.

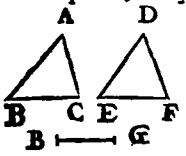
SIMILIA triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.



SINT triangula ſimilia **A B C, D E F,** habentia angulos æquales **B,** & **E:** Item **C,** & **F,** &c. **Et ſit** vt **A B,** ad **B C,** ita **D E,** ad **E F,** &c. **Dico** triangula inter ſe rationem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa **B C,** & **E F,** vel **A B,** & **D E** vel **A C,** & **D F: Hoc eſt,** ſi homologis lateribus **B C, E F** inuenta ſit tertia proportionalis **B G,** ita eſſe triangulum **A B C,** ad triangulum **D E F,** vt recta **B C,** ad rectā **B G:** Quæ proinde cùm ex definitio. lib. 5. proportio **B C,** ad **B G,** dicatur duplicata proportionis **B C,** ad **E F,** proportionem

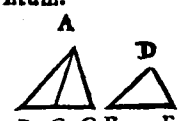
tionem trianguli ad triangulum dici quoque duplicatam proportionis laterum homologorum B C, E F. Ita vt nihil aliud sit, triangula duo, vel duas quaslibet figuras similes, similiterque positas, habere proportionem duorum laterum homologorum duplicatam, quàm ita esse triangulum ad triangulum, vel figuram ad figuram, vt est prima linea ad tertiam, cùm tres lineæ fuerint continuè proportionales in proportione duorum laterum homologorum: quales hic sunt tres lineæ rectæ B C, E F, B G, continuè proportionales in proportione homologorum laterum B C, E F. Sint ergo primùm latera B C, E F, æqualia, ac proinde & tertia proportionalis B G, illis æqualis: ita vt proportio B C, ad B G, quæ duplicata dicitur proportionis lateris B C, ad latus E F, sit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula A B C, D E F, habent quoque proportionem æqualitatis, *a* quòd ipsa inter se æqualia sint, ob angulos B, C, angulis E, F, æquales, & æqualitatem laterum B C, E F, quibus adiacent: erit triangulum ad triangulum, vt recta B C, ad rectam B G. Cùm ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum B C, E F; dicetur quoque proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, proportionis, quam latus B C, ad latus E F, habet, duplicata. Quod etiam hinc constare potest. Quoniam, vt dictum est, triangula A B C, D E F, æqualia sunt, hoc est, proportionem æqualitatis habent, sicut & latera homologa B C, E F: Proportio autem æqualitatis duplicata solùm efficit proportionem æqualitatis: (Positis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad secundam, vt constat ex definitione 10. lib. 5. cùm tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, sicuti & prima ad secundam,) habebit triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem duplicatam eius, quam habet latus B C, ad latus E F. Quod est propositum.

a 26. primi.



SIT deinde B C, latus latere E F, maius; & ex B C, *b* abscindatur rectis B C, E F, tertia proportionalis B G, ducaturq; recta A G. Quia igitur est vt A B, ad B C, ita D E, ad E F; erit permutando vt A B, ad D E, ita B C, ad E F: Vt autem B C, ad E F, ita est per constructionem E F, ad B G. Vt ergo A B, ad D E, *c* ita erit E F, ad B G. Quare cùm triangula A B G, D E F, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, *d* ipsa inter se æqualia erunt; & propterea vt triangulum A B C, ad triangulum D E F, *e* ita erit

b 11. sexti.



c 11. quinti.

d 15. sexti.

e 7. quinti.

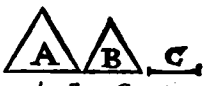
idem

idem triangulum A B C, ad triangulum A B G. Vt autem triangulum A B C, ad triangulum A B G, eiuſdem altitudinis, a ita eſt baſis B C, ad baſin B G. Igitur vt triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita eſt B C, ad B G. Atqui cùm tres lineæ B C, E F, B G, ſint continuè proportionales, proportio primæ B C, ad tertiam B G, duplicata dicitur proportionis B C, primæ ad E F, ſecundam. Igitur & triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem habet duplicatam proportionis lateris B C, ad latus E F. Similia igitur triangula inter ſe ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum. a 21. ſext.

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint; vt eſt prima ad tertiam, ita eſſe triangulum ſuper primam deſcriptum ad triangulum ſupra ſecundam ſimile ſimiliterq; deſcriptum.

SINT enim tres recta proportionales A, B, C; & ſuper primam A, & ſecundam B, conſtituta triangula A, & B, ſimilia, ſimiliterq; deſcripta. Dico, vt eſt recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita eſſe triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio recta A, ad rectam C, eſt, per definitionem, duplicata proportionis recta A, ad rectam B. b *Cùm igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat ſequoque proportionem duplicatam recta A, ad rectam B; erit vt recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.* b 19. ſexti.



EODEM modo oſtendes, ita eſſe triangulum ſupra ſecundam ad triangulum ſupra tertiam ſimile ſimiliterque deſcriptum, vt eſt prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C. B, A, & ſuper B, ſecundam, & A, tertiam conſtituantur triangula ſimilia ſimiliterq; poſita B, & A. Dico, vt eſt recta C, ad rectam A, ita eſſe triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata eſt proportionis C, ad B, hoc eſt, recta B, ad rectam A. c *Cùm igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam recta B, ad rectam A, quoniam B, & A, ſunt latera homologa: Erit vt C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.* c 19. ſexti.

SCHOLIVM.

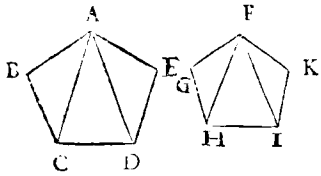
ITAQVE ſi proportio lateris B C, ad latus E F, notæ ſit in numeris, numerum vt 6. ad 5. cognoſcemus quoque ex hac propoſ. 19. in numeris, quam proportionem habeat triangulum A B C, ad triangulum D E F. Si enim proportio 6. ad 5. continuetur in tribus numeris, hoc modo 36. 30. 25. erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. hoc eſt, habebit proportionem, cuius denominator eſt $1\frac{1}{2}\frac{1}{5}$. *Quia enim proportio 36. ad 25. eſt duplicata proportionis 36. ad 30. ſine 6. ad 5. quam latera homologa ponuntur habere: Habent autem & triangula*

gula proportionem laterum homologorum duplicatam, & hoc theoremate ostensum est: erit triangulum ad triangulum, vt 36. *ad* 25. *Eandem proportionem triangulorum cognoscemus, si denominatorem proportionis laterum homologorum, nempe* $\frac{6}{5}$ *in se multiplicemus. Producitur enim numerus* $\frac{36}{25}$. *id est,* $1\frac{11}{25}$. *erit denominator proportionis, quæ duplicata est proportionis laterum, ac proinde & denominator proportionis triangulorum, quod hæc etiam duplicata sit eiusdem proportionis laterum.*

SIC etiam, si latera homologa haberent proportionem, quam 10. *ad* 9. *haberent triangula proportionem, quam* 100 *ad* 1. *cum hæc illius sit duplicata, & hic appareat,* 100. 19. 1 *Videlicet quia denominator denominationis, id est,* 10 *in se multiplicatus* $\frac{1}{9}$ *mit* 100. *denominatorem proportionis, quæ decupla duplicata est.*

xviij. THEOR. 14. PROPOS. 20.

SIMILIA polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis. Et polygona duplicatum habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.



SINT polygona similia A B C D E, F G H I K, habentia angulos æquales B A E, G F K; item angulos B, G, & sic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; vt quidem A B, ad B C, ita F G, ad G H, & vt B C, ad C D, ita G H, ad H I, &c. Dico primum, hæc polygona diuidi in triangula similia, quæ sint numero æqualia. Ab angulis enim B A E, G F K, rectæ educantur ad singulos angulos oppositos, quæ sint A C, A D, F H, F I; diuisaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniã verò angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia, æquiangula erunt triangula A B C, F G H, habentia angulos B A C, G F H, æquales. Cum anguli A C B, F H G, lateribus ad homologis oppositi: *b* Ideoq, latera habebunt circa æquales angulos proportionalia, ac propterea inter se similia erũt: Eadem ratione erunt similia triangula A E D, F K I, habentia angulos E A D, K F I, & angulos A D E, F I K, æquales. Deinde *c* quia est vt A C, ad C B, ita F H, ad H G, ob triangulorum A B C, F G H, similitudinem; vt autem C B, ad C D, ita ex hypothesi, H G, ad H I, ob similitudinem polygonorum: *d* erit ex æquo vt A C, ad C D, ita F H, ad H I. Et quoniam angulus B C D, æqualis ponitur

a 6. *sexti*
b 4. *sexti*
c 4. *sexti*
d 22. *quinti*

mitur angulo GHI; est autem & ablatus ACB, ostensus æqualis ablato FHG; erit & reliquus ACD, reliquo FHI, æqualis. a Quare triangula ACD, FHI, cùm habeant latera circa æquales angulos ACD, FHI, proportionalia, æquiangula erunt, ideoque similia. Eademque ratio est de alijs omnibus triangulis, si plura fuerint. a 6. sexti.

DICO præterea, triangula hæc esse homologa totis polygonis, hoc est, ita esse quodlibet triangulum in vno polygono ad suum correspondens triangulum in altero polygono, vt polygonum ad polygonũ. Quoniam enim similia sunt triangula ABC, FGH, erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum AC, FH. Atque eodem argumento proportio triangulorum ACD, FHI, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum AC, FH. Quare vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita erit triangulum ACD, ad triangulum FHI, cùm vtraque harum proportio triangulorum sit duplicata eiusdem proportionis lateris AC, ad latus FH. Neq; dissimili ratione concludetur quoq; esse triangulum ADE, ad triangulum FIK, vt ACD, ad FHI: Atque ita deinceps, si plura fuerint triangula. Sunt igitur proportionalia triangula vnius polygoni cum triangulis alterius, ita vt triangula vnius sint antecedentia, & triangula alterius consequentia proportionum. Vt autem vnum antecedens ad vnum consequens, b ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia. Igitur vt quodlibet triangulum vnius polygoni ad sibi respondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis. b 12. quinti.

DICO postremò, polygona inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa, hoc est, si homologis lateribus, verbi gratia, AB, FG, inueniatur tertia linea proportionalis, ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt est prima linea AB, ad tertiam inuentam: ac proinde, cùm proportio AB, ad illam tertiam, dicatur duplicata proportionis AB, ad FG, dici quoque proportionem polygoni ad polygonum duplicatam proportionis laterum homologorum AB, FG. Cùm enim sit, vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK; Triangulum verò ABC, ad triangulum FGH, c habeat proportionem duplicatam eius, quam habent latera homologa AB, FG, hoc est, eandem quam habet AB, ad illam tertiam inuentam; habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG, hoc est, eandem quam habet AB, ad illam tertiam inuentam. Itaque similia polygona in si- c 19. sexti. xii.

in ſimilia triangula diuiduntur, &c. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.



HINC manifeſtum eſt, ſi fuerint tres rectæ proportionales, vt eſt prima ad tertiam, ita eſſe polygonum ſuper primam deſcriptum, ad polygonum ſuper ſecundam ſimile ſimiliterque deſcriptum: Vel ita eſſe polygonum ſuper ſecundam deſcriptum ad polygonum ſuper tertiam ſimile ſimiliterq; deſcriptum.

HOC non aliter demonſtrabitur ex hoc theoremate, quam oſtenſum fuit corollarium præcedentis theorematis ex ſuo theoremate. Vt perſpicuum eſt in hac figura appoſita.

SCHOLIVM.

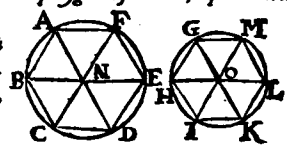
QVANDO polygona ſimilia ſunt pentagona, & in figura demonſtrabitur etiam hoc modo triangula media ACD, FHI, ſimilia eſſe. Quoniam anguli ACB, FGH, æquales ſunt, ob ſimilitudinem triangulorum ABC, FGH; ſi auferantur ex angulis BCD, GHI, qui æquales etiam ſunt, ob ſimilitudinem polygonorum: æquales erunt & reliqui anguli ACD, FHI. Eademque ratione æquales oſtendentur anguli ADC, FIH: ac propterea a *& reliqui CAD, HFI, æquales erunt. Igitur cùm æquiangula ſint triangula ACD, FHI,* b *habebunt latera circa angulos æquales proportionalia, ac proinde ſimilia erunt.*

a 32. primi.
b 4. ſexti.

AT verò quando polygona habent plures angulos, demonſtrandum eſt, triangula media ſimilia eſſe, ex æqualitate, & propoſ. 6 huius lib. & in propoſitione factum eſt: quia non poſſunt probari anguli æquales, præter vnum, qui videlicet propè præcedens triangulum ſimile exiſtit, qualis eſt angulus ACD, & FHI. Nam angulus ADC, oſtendi non poteſt æqualis angulo FIH; quòd tunc alia adhuc triangula ſuperſint vſque ad triangula ſimilia AED, FKI &c. Hoc ideo dixerim, ne quis exiſtimet, fruſtra in propoſ. nos dixiſſe, ita eſſe AC, ad CB, vt FH, ad HG: Et ita CB, ad CD, vt HG, ad HI; ac proinde ex æqualitate ita AC, ad CD, vt FH, ad HI; ideoque cùm anguli ACD, FHI, ſint æquales, ſimilia eſſe triangula ACD, FHI. Hæc enim demonſtratio eſt omnino neceſſaria, connexaq; omnibus polygonis quotcunque angulorum; cùm omnia triangula media eo modo oſtendantur eſſe ſimilia, vt perſpicuum eſt. Nam ſi triangula ADE, FIK, non eſſent vltima, demonſtrarentur ſimilia hoc modo. Quoniam eſt vt AD, ad DC, ita FI, ad IH, ob ſimilitudinem triangulorum ACD, FHI: Item vt DC, ad DE, ita IH, ad IK, ob ſimilitudinem polygonorum; erit ex æquo, vt AD, ad DE, ita FI, ad IK: Et quia angulus CDE, æqualis ponitur angulo HIK: Eſt autem & ablatus ADC, oſtenſus ablato FIH,

FIH, aqualis; erit & reliquus ADE, reliquo FIK, aqualis. a *Quare* a 6. *sext.*
triangula ADE, FIK, similia erunt, cùm habeant latera circa aquales angulos ADE, FIK, proportionalia. Atq; ita deinceps, si fuerint plura triangula.

QVOD si polygona similia, fuerint aquilatera, & aquiangula, dividentur quoque in similia triangula, & numero aqualia, & homologa totis; ductis è centris circulorum ipsa circumscribentium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona similia, aquilatera, & aquiangula ABCDEF, GHIKLM, qua circumscribantur à circulis circa centra N, O, ex quibus recta ducantur NA, NB, &c. Dico triangula NCD, OIK, similia esse, & homologa totis polygonis. Quoniam enim anguli CND, IOK, aquales sunt; (quod aquè submultiplices sint quatuor rectorum. Nam utrumq; spatium N, & O, quatuor rectis aquivalens, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. dividitur in angulos & numero, & magnitudine aquales. Cùm enim anguli in centro N, insistant aqualibus arcubus, b *ipsi inter se aquales erunt: eademque ratione anguli in centro O, aquales erunt.) Sunt autem & latera circum ipsos proportionalia, cùm utrobiq; sit proportio aqualitatis;* c *Similia erunt triangula NCD, OIK. Eademq; est ratio de cateris. At verò hac triangula esse homologa totis polygonis, nullo negotio demonstrabitur. Cùm enim tota polygona sint ipsorum triangulorum aquè multiplicia, & patet,* d *habebunt utique eandem cum ipsis proportionem.*



b 27. *tertij.*

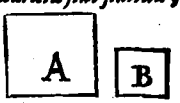
c 6. *sexti.*

d 15. *quinti.*

PORRO ex hoc theoremate perfacilè demonstrabimus theorema illud, quod iam aliter in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus. Nimirum.

SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius: Et contrà, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.

SIT primùm recta A, dupla rectæ B. Dico quadratum A, quadruplum esse quadrati B. Cùm enim omnia quadrata sint similia, & constat ex defin. 1. huius lib. erit, per hanc propos. proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B; qua cùm inter se proportionem habeant duplam; erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata est dupla proportionis, & hic apparet. 1. 2. 4.



SIT deinde quadratum A, quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum esse lateris B. Cùm enim proportio quadratorum, quæ ponitur

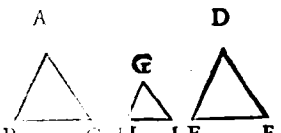
mitur quadrupla, duplicata sit proportionis laterum homologorum; & dictum est; habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata est proportionis duplæ, & in exemplo ad ducto superius apparet.

ITAQVE si proportio lateris AB, ad latus FG, in polygonis, quas inscripsimus, describendis, nota sit in numeris, nimirum 5. ad 4. eorundem; ideoque ex hac propos. 20. in numeris, quam proportionem habeat polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK. Si enim proportio 5. ad 4. continuetur in tribus numeris, hoc modo, 25. 20. 16. erit polygonum ad polygonum, & 25. ad 16. hoc est, habebit proportionem, cuius denominator est $1\frac{9}{16}$. Quia enim proportio 25. ad 16. est duplicata proportionis 25. ad 20. sive 5. ad 4. quam homologa latera habere, ponuntur; demonstratum a nobis est hoc theoremate, polygona quoque habere duplicatam proportionem eius, quam latera homologa habent, erit polygonum ad polygonum, & 25 ad 16. Eius denominator proportionis polygonorum, cognoscetur, si denominator proportionis laterum homologorum, nimirum $1\frac{1}{4}$. in se multiplicetur. Productus enim numerus $2\frac{5}{16}$ id est, $1\frac{9}{16}$. erit denominator proportionis, qua duplicata dicitur eius, quam latera homologa habent, ex ijs, quæ in defin. 10. lib. 5. scripsimus; ac proinde & denominator proportionis polygonorum, cùm hac sit etiam duplicata eiusdem proportionis laterum homologorum.

SIC etiam, si latera homologa haberent proportionem decuplam, haberent polygona proportionem centuplam, cùm hac illius sit duplicata, & hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator 10. proportionis decuplæ in se multiplicatus gignit denominatorem 100. proportionis centuplæ, qua decupla duplicata dicitur.

XX. THEOR. 15. PROPOS. 21.

QVÆ eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.



SINT rectilinea ABC, DEF, rectilineo GHI, similia. Dico & ipsa inter se esse similia. Cùm enim propter similitudinem, anguli rectilinei ABC, æquales sint angulis rectilinei GHI; Item eadem de causa anguli rectilinei DEF, æquales angulis eiusdem rectilinei GHI; *a* erunt anguli rectilinei ABC, æquales angulis rectilinei DEF. Rursus cùm ob eandem similitudinem, latera rectilinei ABC, proportionalia sint lateribus rectilinei GHI, ea videlicet quæ circum æquales sunt angulos: Item eandem ob causam, latera rectilinei DEF, proportionalia lateribus eiusdem rectilinei GHI; *b* erunt quoq; latera rectilinei ABC, lateribus

a 11. *quinti.*

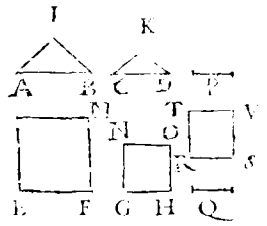
b 11. *quinti.*

recti-

rectilinei DEF, proportionalia, ea nimirum iis, quæ angulos ambiunt æquales. Atq; adeò per definitionem, similia existent rectilinea ABC, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

THEOR. 16. PROPOS. 22. xxij.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterq; descripta, proportionalia erunt. Et si a rectis lineis similia similiterq; descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.



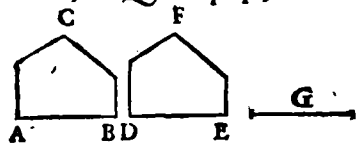
SINT primum quatuor rectæ AB, CD, EF, GH, proportionales, vt quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH; Constituantur q; super AB, CD, duo quæcunq; rectilinea similia similiterq; descripta AKB, CLD, Item super EF, GH, alia duo quæcunq; rectilinea similia similiterq; descripta, EMF, GOH. Dico & hæc rectilinea esse proportionalia, vt quidem AKB, ad CLD, ita EMF, ad GOH. *a* Inueniatur enim rectæ AB, CD, tertia proportionalis P; & rectis EF, GH, tertia proportionalis Q. *b* erit q; ex æquo, vt AB, ad P, ita EF, ad Q. Vt autem AB, ad P, ita AKB, ad CLD, nempe rectilineum AKB, ad rectilineum CLD, hæc enim ex corollario propositionis 20. huius libri facta sunt similia & similiter descripta, ex corollario propos. 19. Et eadem ratione vt EF, ad Q, ita erit EMF, ad rectilineum GOH. *c* Igitur vt AKB, ad CLD, ita erit EMF, ad GOH. Quod est propositum.

a 11 *sexti.*
b 22. *quinti.*
c 11. *quinti.*

DEINDE sint AKB, CLD, EMF, GOH, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas AB, CD, EF, GH, esse quoque proportionales, vt quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH. *d* Inueniatur enim rectis AB, CD, EF, quarta proportionalis R S, super quam describatur rectilineum TRSV, simile & similiter positum; *e* & ob id rectilineum TRSV, ipsi GOH

LEMMA.

QVOD autem æqualia rectilinea similia similiterque descripta, qualia sunt GO, RV, consistant super rectas æquales, ita ostendetur. Si enim inæquales sunt GH, RS; sit GH, maior. Cùm igitur ob similitudinem rectilineorum, sit vt GH, ad HO, ita RS, ad SV, ponatur autem GH, maior quàm RS, erit quoq; HO, maior quàm SV, & propterea rectilineum GO, maius rectilineo RV, cùm hoc intra ipsum posit constitui; quod est absurdum, cùm sit contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt rectæ GH, RS. Quod est propositum.



ALITER. Sint duo rectilinea ABC, DEF, æqualia, & similia similiterq; posita. Dico latera homologa, cuiusmodi sunt rectæ AB, DE, esse æqualia. Si enim non credantur æqualia, sit AB, maius, quàm DE, inueniaturq; rectis AB, DE, tertia proportionalis G. Quoniam ergo est, vt AB, ad DE, ita DE, ad G. Est autem AB, maior quàm DE, Erit quoq; DE, maior, quàm G, ac propterea multò maior AB, quàm G. Vt verò AB, ad G, ita est rectilineum ABC, ad rectilineum CEF, per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. Igitur cùm AB, maior sit, quàm G, erit quoq; rectilineum ABC, maius rectilineo DEF, quod est absurdum, cùm positum sit æquale. Non ergo maior est AB, recta quàm recta DE. Sed neq; maior erit eadem ratione; quia & rectilineum ABC, minus ostenderetur rectilineo DEF, quod est contra hypothesin. Quare æquales sunt rectæ AB, DE.

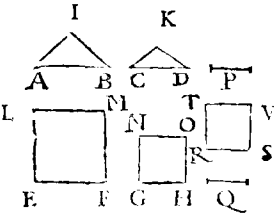
SCHOLIVM.



EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales; erunt & rectilinea similia similiterq; descripta ab eis, proportionalia, &c. Si enim sumatur linea media, eiusq; rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, vt hic Euclides demonstrauit. Cùm igitur id, quod à secunda est descriptum, æquale sit ei, quod à tertia, immò idem; manifestum est, quod proponitur.

BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur, hoc modo. Ponatur primum esse vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. Dico esse quoq; vt AB,

A B I, ad C D K, ita E M, ad G O, a *Cùm enim sit proportio rectilineæ A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D. Item proportio rectilineæ E M, ad rectilineum G O, duplicata proportionis E F, ad G H, erunt proportiones A B I, ad C D K, & E M, ad G O, æquales; quandoquidem duplicatæ sunt proportionis æqualium A B, ad C D, & E F, ad G H. Quod est primum.*



a 19. vel 20. sexti.

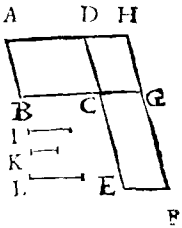
PONATUR deinde esse ut A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Dico esse quoq; ut A B, ad C D, ita E F, ad G H. b *Cùm enim sit proportio A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D: Item proportio E M, ad G O, duplicata proportionis E F, ad G H: Erunt proportiones A B, ad C D, & E F, ad G H, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ A B I, ad C D K, & E M, ad G O, æquales ponuntur. Quod est secundum.*

b 19. vel 20. sexti.

THEOR. 17. PROPOS. 23. xxiiij.

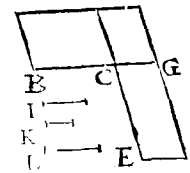
ÆQVIANGVLA parallelogramma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

SINT parallelogramma æquiangula A C, C F, habentia angulos B C D, E C G, æquales. Dico proportionem eorum esse compositam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera vnius circa angulũ æqualem, ad duo latera alterius circa angelum æqualem, ita vt antecedentia proportionum sint in vno parallelogrammo, & consequentia in altero; hoc est, proportionem A C, parallelogrammi ad parallelogrammum C F, compositam esse ex proportionibus rectæ B C, ad C G, rectam, & rectæ D C, ad rectam C E; Vel etiam ex proportionibus rectæ B C, ad rectam C E, & rectæ D C, ad rectam C G. Id est, si sumantur tres lineæ I, K, L, ita vt I, ad K, sit, sicut B C, latus ad latus C G, & K, ad L, vt latus D C, ad latus C E; ita esse parallelogrammum A C, ad parallelogrammum C F, vt est recta I, ad rectam L: ac proinde cùm ex defin. 5. huius lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L: proportionem quoq; parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F, illi compositam esse ex eisdem proportionibus, hoc est, ex proportionibus B C, ad C G, & D C, ad C E. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt B C, C G, efficiant vnam lineam rectam: Quo posito, cùm anguli B C D, E C G, sint æquales, erunt & D C, C E, vna



C E, vna recta linea, vt ad propos. 12. lib. 1. ex Proclo demonstratus. Producatur deinde A D, F G, donec conueniant in H; Sumptaq; recta I, quacunque, a inueniatur tribus B C, C G & I, quarta proportionalis K: Itē tribus D C, C E, & K, quarta proportionalis L.

a 12. sexti.



Quoniam igitur est, b vt B C, ad C G, ita A C, ad C H. Vt autem B C, ad C G, ita posita est I, ad K, c erit quoq; vt A C, ad C H, ita I, ad K. Eodem q; argumēto ostendes esse, vt H C, ad C F, ita K, ad L. Nam vt D C, ad C E, d ita est H C, ad C F. Cum ergo posita sit K, ad L, vt D C, ad C E, erit quoq; H C, ad C F, vt K, ad L: e Ex æquo igitur erit vt A C, ad C F, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionib. B C, ad C G, & D C, ad C E. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur quoq; proportio parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F. Eademq; ratione ostendemus, proportionem A C, ad C F, componi ex proportionibus B C, ad C E, & D C, ad C G, quamobrem si parallelogramma ita coniungantur ad angulos æquales, vt B C, C E, efficiant vnam rectam lineam, &c. Aequiangula itaq; parallelogramma inter se rationem habent, &c. Quod erat ostendendum.

b 1. sexti. c 11. quinti. d 1. sexti. e 22. quinti.

SCHOLIVM.

EXPEDITIVS idem demonstrabitur hoc modo. Coniunctis parallelogrammis, & prius; f Cum sit vt A C, ad C H, ita B C, ad C G, & vt C H, ad C F, ita D C, ad C E; Proportio autem A C, ad C F, componatur, per diffinitionem, ex inter medijs proportionibus A C, ad C H, & C H, ad C F; componetur quoq; eadem proportio A C, ad C F, ex proportionibus B C, ad C G, & D C, ad C E, quæ illis intermedijs sunt æquales. Quod est propositum.

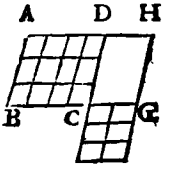
f 1. sext.

HANC porro propos. demonstrat Euclides in numeris lib. 8. propos. 5.

ITAQVE si proportiones laterum, nimirum B C, ad C G, & D C, ad C E, notæ fiant in numeris, sentemus quoq; ex hac propos. 23. in cognitionem proportionis parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F, in numeris, hoc modo. Sit proportio B C, ad C G, eadem, quæ 11. ad 5. & D C, ad C F, eadem, quæ 7. ad 11. atq; hæ duæ proportiones continuentur in tribus numeris 77. 35. 55. ita vt sit 77. ad 35. sicut 11. ad 5. & 55. ad 25. & 7. ad 11. Et quia proportio 77. ad 55. componitur ex proportionibus 77. ad 35. & 35. ad 55. hoc est, ex proportionibus Laterum, erit vt 77. ad 55. ita parallelogrammum A C, ad parallelogrammum C F, g quod propositio parallelogrammorum sit etiam composita ex eisdem proportionibus laterum: hoc est, proportio parallelogrammorum denominabitur à $\frac{7}{5}$. Continuabuntur autem duæ datæ proportiones in tribus numeris vel ex ijs, quæ propos. 4. lib. 8. demonstrantur,

g 23 sexti.

sunt, vel certè hoc modo. Positis priore proportione 11. *ad* 5 *fiat vt* 7, *ad* 11. *(quæ est posterior proportio) ita* 5 *ad aliud, inuenietur q3 numerus* $7\frac{6}{7}$. *Ita ergo stabunt tres numeri habentes duas illas proportiones,* 11 5 $7\frac{6}{7}$. *Quod si tertius reuocetur ad hanc vnicã fractionem* $\frac{5}{7}$. *& alij duo numeri per denominatorem* 7. *multiplicentur, erunt duo producti numeri* 77. 35. *& numerator* 55. *tres numeri integri in eisdem proportionibus.*



SIC etiam si proportiones laterum sint, vt 4. *ad* 2. *& 3. ad* 3. *continuabuntur duæ hæ proportiones in hisce tribus numeris* 4. 2. 2. *Vel in hisce minimis* 2. 1. 1. *Et quia primus ad tertium est duplus, erit quoq3 parallelogrammorum proportio dupla. Id quod ex hac figura perspicuum est. Nam si latus B C, diuidatur in* 4. *partes æquales, & C G, in* 2. *At D C, in* 3. *& C E, in* 3. *ita vt B C, ad C G, proportionem habeat duplam, at D C, ad C E, proportionem æqualitatis, vt positum est: ducantur autem per puncta diuisionum lateribus parallelæ, continebit parallelogrammum A G,* 12. *rhombos æquales, at C F, solùm* 6. *atq3 adeò parallelogrammum A G, ad parallelogrammum C F, duplam proportionem habebit, vt dictum est.*

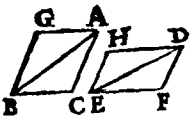
PERSPICVVM autem est, alteram proportionum componentium posse esse maiorem proportione compositæ, & æqualem. In priori enim exemplo proportio lateris B C, ad C G, est vt 11. *ad* 5. *hoc est, cuius denominator est* $2\frac{1}{5}$. *qua maior est proportione parallelogrammorum, cùm huius denominator sit* $1\frac{3}{5}\frac{3}{5}$. *In posteriori verò exemplo proportio lateris B C, ad C G, est dupla, quemadmodum & proportio parallelogrammorum. Vt vel hinc etiam constare possit, hanc proportionum compositionem non esse additionem, vt nonnulli interpretes volunt: Item proportionem maioris inæqualitatis posse componi tum ex proportione minoris inæqualitatis, tum ex æqualitatis proportione, quod ijdem interpretes negant. In exemplo namq3 priori proportio lateris D C, ad C E, est minoris inæqualitatis, in posteriori verò, æqualitatis. Sed hæc de re plura scribemus ad finem libri* 9.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus nonnulla alia, quæ vel ad compositionem proportionum pertinent, vel ex ea demonstrantur, non inutilia, quæ nos quoq3 afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonstrationibus; Sunt autem ea, quæ sequuntur.

I.

TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositam.

SINT triangula A B C, D E F, angulũ C, angulo F, habentia æqualẽ.



Dico proportionem trianguli A B C, ad triangulum D E F, compositam esse ex lateribus, hoc est, ex proportione B C, ad E F, & ex proportione A C, ad D F; Vel ex proportione B C, ad D F, & ex proportione A C, ad E F. Compleris enim parallelogrammis C G, F H, erunt ea aequiangula; a *atque adeò eorum proportio ex lateribus componetur. Cùm ergo triangula A B C, D E F, cum ipsis,* b *quorum sunt dimidia,* c *eandem habeant proportionem; Erit quoque proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, composita ex proportionibus laterum B C, A C, ad latera E F, D F.*

a 23. sexti.
b 34. primi.
c 15. quinti.

II.

PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, vel pluribus componere.

H O C, quo modo fiat, facilè colligitur ex demonstratione huius propos. 23 Sint enim tres proportiones A, ad B, C, ad D; & E, ad F, in lineis exhibita. Oportet iam ex ipsis vnam proportionem componere.



d 12. sexti.
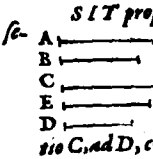
d *Fiat vt A, ad B, ita G, ad H; & vt C, ad D, ita H, ad I; & vt E, ad F, ita I, ad K. Dico proportionem G, ad K, compositam esse ex tribus datis proportionibus. Cùm enim ea composita sit ex proportionibus G, ad H: H, ad I: & I ad K, per defin. 5. huius lib. composita etiam erit ex proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F; quòd his illa sumpta sint aequales.*

III.

PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.

S I T proportio A, ad B, minor auferenda ex proportione maiore C, ad D. e *Fiat, vt A, ad B, ita C, ad E; fiatque vt E, terminus medius inter C, & D. Dico ablatam esse proportionem A, ad B, ex proportione C, ad D, reliquamq; esse proportionem E, ad D. Cùm enim proportio C, ad D, componatur ex proportionibus C, ad E, & E, ad D: Si proportio C, ad E, hoc est, A, ad B, auferatur, relinquetur proportio E, ad D.*

e 12. sexti.



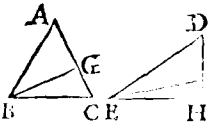
V E R V M hac compositio, & detractio proportionum non est additio, & subtractio propriè, quia aliàs totum esset aequale parti, & minus, & maior proportio posset detrahi ex minore, vt ad finem lib. 9. ostendemus.

IV.

TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqua-

æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ sub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.

SINT trianguli ABC, DEF, æqualem angulum A, angulo D, habentia æqualem. Dico esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Ducatur enim ad AC, DF, perpendiculares BG, EH; erunt triangula ABG, DEH, æquiangula, & constat ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. Nam duo anguli A, AGB, duobus angulis D, DHE sunt æquales. a *Igitur erit, vt* a 4. *sex.* *GB, ad BA, ita HE, ad ED: Vt autem GB, ad BA,* b *ita est rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub AB, AC, (Nam si bases ponantur GB, BA, erit eorum eadem altitudo AC,) Et eadem ratione, & HF, ad ED, ita est rectangulum sub EH, DF, ad rectangulum sub DE, DF. Rectangulum igitur sub BG, AC, ad rectangulum sub AB,* c 11. *quinti.* *AC, est vt rectangulum sub EH, DF, ad rectangulum sub DE, DF; & permutando, rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH,* *DF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Sed vt rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF, ita est* d 11. *quinti.* *triangulum ABC, ad triangulum DEF,* e *quod hæ triangula sint* e 41 *primi.* *rectangulorum illorum dimidia. (Habent enim eadem cum illis bases AC, DF, altitudinesque eadem BG, EH; ac proinde inter easdem cum illis parallelas sunt constituta) Igitur erit quoque triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Quod est propositum.*



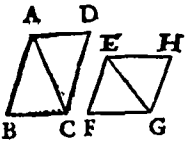
b 1 *sex.*

ALITER, & facilius. Ex theorem. 12. huius libri, proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, composita est ex proportionibus AB, ad DE, & AC, ad DF: Sed & proportio rectanguli sub f 23 *sexti.* *AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF, ex eisdem proportionibus AB, ad DE, & AC, ad DF, composita est. Igitur erit triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF, quod est propositum.*

V.

PARALLELOGRAMMA inter se æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulum continentibus comprehensa.

SINT parallelogramma ABCD, EFGH, æquiangula inter se, quorum anguli E, & F, sint æquales. Dico esse, vt parallelogram-



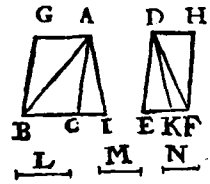
mum BD, ad parallelogrammum FH, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Ductis enim diametris AC, EG, quæ angulos æquales B, F, subtendant; habebunt triangula ABC, EFG, angulum B, angulo F, æqualem. Quare, vt iam demonstrauimus, erit, vt triangulum ABC, ad triangulum EFG, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. a Cum ergo parallelogramma BD, FH, eandem habeant proportionem, quam triangula ABC, EFG: b quòd hæc ipsorum sint dimidia; c Erit quoque vt parallelogrammum BD, ad FH, parallelogrammum, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG Quod est propositum.

a 15. quinti.
b 34. primi.
c 11. quinti.

VI.

TRIANGVLA, & parallelogramma inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

SINT triangula ABC, DEF, & parallelogramma CG, EH, quorum altitudines AI, DK. Dico eorum proportionem compositam esse ex proportione basis BC, ad basin EF, & proportione altitudinis AI, ad altitudinem DK. Sint enim primum altitudines æquales, bases verò vel æquales etiam, vel inæquales: Fiatque, vt BC, ad EF, ita L, ad M; Vt autem AI, ad DK, ita M, ad N. Quo facto erit M, ipsi N, æqualis, quòd & AI, ipsi DK, æqualis ponatur: d Ac proinde erit L, ad N, vt L, ad M, hoc est, vt BC, ad EF. e At verò, vt BC, ad EF, ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH. f Igitur quoq; erit, vt L, ad N, ita triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH: Sed proportio L, ad N, composita est ex proportione L, ad M, hoc est, ex proportione basis BC, ad basin EF, & ex proportione M, ad N, hoc est, altitudinis AI, ad altitudinem DK. Proportio ergo trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi CG, ad parallelogrammum EH, ex eisdem proportionibus est composita. Quod est propositum.

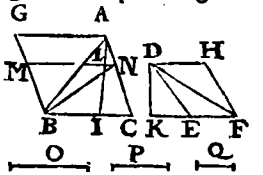


d 7. quinti.
e 1. sex.
f 11. quinti.
g

SINT iam altitudines AI, DK, inæquales, & AI, maior; bases verò BC, EF, vel æquales, vel etiam inæquales. Fiat, vt AI, ad DK, ita O, ad P; & vt BC, ad EF, ita P, ad Q. Abscissa deinde IL, æqualis ipsi DK, ducatur per L, ipsi BC, parallela LM, secans AC, in N, iungaturque recta BN. Quoniam igitur est triangulum

ABC,

A B C, ad triangulum N B C; & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum C M, vt altitudo A I, ad altitudinem I L, vel ad D K, ipſi I L, æqualem, hoc eſt, vt O, ad P, per ea, quæ ad 1. propoſ. huius lib. ex Commandino oſtendimus; quòd triangulorum, & parallelogrammorum eadem ſit baſis B C: Et vt triangulum N B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum E H, a *ita eſt baſis B C, ad baſin E F, (cum eadem ſit altitudo) hoc eſt, ita P, ad Q:* b *erit ex æquo A B C, ad D E F, & C G, ad E H, vt O, ad Q.*



a 1. ſex.
b 22. quinti.

Quare cum proportio O, ad Q, componatur ex proportione O, ad P, hoc eſt, ex proportione altitudinis A I, ad altitudinem D K, & ex proportione P, ad Q, hoc eſt, ex proportione baſis B C, ad baſin E F. Ex eiſdem proportionibus componetur proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammi C G, ad parallelogrammum E H. Quod eſt propoſitum.

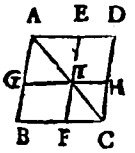
E O D E M pacto oſtendetur proportio trianguli D E F, cuius altitudo minor eſt, ad triangulum A B C, & parallelogrammi E H, ad parallelogrammum C G, compoſita eſſe ex proportione baſis E F, ad baſin B C, & proportione altitudinis D K, ad altitudinem A I. Si enim fiat, vt E F, ad B C, ita Q, ad P; & vt D K, ad A I, ita P, ad O, & reliqua fiant, vt prius; c *erit triangulum D E F, ad triangulum N B C, & parallelogrammum E H, ad parallelogrammum C M, vt E F, ad B C, hoc eſt, vt Q, ad P. Item triangulum N B C, ad triangulum A B C, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum C G, vt L I, ſeu D K, ad A I, hoc eſt, vt P, ad O; ex iis, quæ ad propoſ. 1. huius lib. ex Commandino demonſtrauimus.* d *Ex æquo igitur erit, vt D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ita Q, ad O. Quocirca cum proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc eſt, ex proportione baſis E F, ad baſin B C; & ex proportione P, ad O, id eſt, ex proportione altitudinis D K, ad altitudinem A I; componetur etiam proportio D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ex eiſdem proportionibus. Quod eſt propoſitum.*

c 1. ſex.
d 22. quinti.

THEOR. 18. PROPOS. 24. xxij.

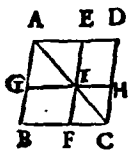
IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, parallelogramma & toti, & inter ſe ſunt ſimilia.

ESTO parallelogrammum A B C D, in quo ducatur diameter A C, & per quodlibet eius punctum I, ducantur duæ rectæ E F, G H, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma F G, F H, circa diametrum, ſimilia eſſe & toti parallelogrammo, & inter ſe ſe. Quod enim æquiangula ſint toti,



facile

facile oſtendetur. Nam angulus GAE, idem eſt, qui angulus
a 29. primi. BAD; *a* & angulus externus AEI, æqualis interno ADC; & angulus AGI, externus interno ABC, & angulus EIG, externus interno BFI; & hic externus interno BCD. Quare æquiangulum eſt EG, parallelogrammum parallelogrammo BD: Et eadem ratione eidem BD, æquiangulum erit FH. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonſtrabimus. Cum triangulum AGI, æquiangulum ſit triangulo ABC, & triangulum AEI, triangulo ADC, vt perſpicuum eſt ex 29. propoſ. lib. 1. vel etiam ex co-

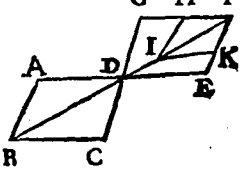


b 4 ſex. roll. propoſ. 4. huius lib. *b* erit vt AB, ad BC, ita AG, ad GI, atque ita latera circa æquales angulos B, & G, proportionalia ſunt.
c 4. ſex. Rurſus *c* erit, vt BC, ad CA, ita GI, ad IA; Item vt CA, ad CD,
d 22. quinti. ita IA, ad IE. *d* Ex æquo igitur, vt BC, ad CD, ita eſt GI, ad IE, ac propterea & latera circa æquales angulos BCD, GIE, proportionalia exiſtunt. Non aliter demonſtrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, eſſe proportionalia. Quare per definitionem, ſimile erit parallelogrammum EG, toti parallelogrammo BD. Eadem arte oſtendes parallelogrammum FH, ſimile eſſe ei-
e 21. ſexti. dem parallelogrammo BD; *e* atque adeo & ipſa inter ſe ſimilia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

INTELLIGENDA autem ſunt parallelogramma circa diametrum totius eſſe talia, quæ habeant ℊnum angulum cum toto parallelogrammo communem, ℊt manifeſtum eſt ex forma demonſtrationis.

QVOD ſi circa diametrum alicuius parallelogrammi producta conſiſtat parallelogrammum aliud, ita ℊt duo huius latera recta duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, ℊel certe illa his ſint parallela, iiſdem fere mediis oſtendetur, hoc illis eſſe ſimile. Pa-



rallelogrammi enim ABCD, diameter BD ſit producta ad F, circa quam conſiſtat parallelogrammum DEFG, cuius duo latera DE, DG, rectas lineas efficiant cum AD, DC, lateribus parallelogrammi AC. Dico parallelogrammum GE, ſimile eſſe parallelogrammo AC. Quod enim ambo inter ſe ſint aquiangula, facile
f 29. primi. *oſtendetur. f Nam quia angulus A, æqualis eſt angulo alterno ADG, huic autem æqualis quoque eſt alternus angulus G; erunt æquales anguli*

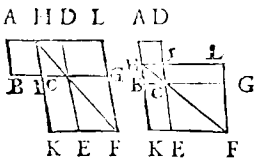
unguli A, & G. a *Quare* & *oppositi C, & F, æquales quoque erunt.* a 34 pri
b *Rursus quia anguli A D C, G D E, ad verticem, sunt æquales,* mi.
erunt & **hi quoque oppositi B C, G F E, æquales. Igitur & triangula** b 15. pri
sunt G E, A C, *parallelogramma. Quod autem latera habeant pro-* mi.
portionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perspicuum. Cum c 34 pri
triangulum E A D, *æquiangulum sit triangulo D G F, & triangu-* mi.
lum B C D, *triangulo D E F, & constat ex propos. 29 lib. 1.* d *Erit & t* d 4. sex.
B A, ad A D, *ita D G, ad G F. Rursus & t A D, ad D E, ita G F, ad* **F D, & t D B,** *ad D C, ita F D, ad F E,* e *ac propterea ex æquo & t* e 22.
A D, ad D C, *ita G F, ad F E. Sunt igitur latera circa angulos A,* quinti.
A D C, proportionalia lateribus circa angulos G, G F E, quibus æqua-
les sunt. Non secus ostendes, reliqua latera circa angulos æquales pro-
portionalia esse. Quare similia sunt parallelogramma A C, G E.

QVOD *si circa eandem diametrum consistat parallelogrammum* **H I K F,** *habens latera parallela lateribus parallelogrammi A C,* **idem demonstrabitur. Nam productis A D, C D, donec occurrant re-**
ctis F K, F H, *productis in E, & G, erit H K,* f *simile ipsi G E, & t Eu-* f 24.
clides demonstrauit: Atqui eidem G E, *simile est quoque A C, & t* sexti.
nunc ostendimus. g *Igitur & H K, A C, inter se similia sunt. Quod* g 21.
est propositum. sexti.

SED & absoluemus cum Peletario sequens problema.

DATIS duobus parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus: ex quouis illorum alteri simile resecare.

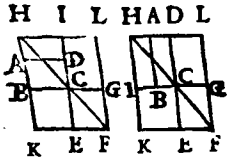
DVO *parallelogramma æquiangula, sed non similia sint A B C D,* **C E F G, & ex A B C D, abscindendum sit parallelogrammum ipsi**
C E F G, simile. Coniungantur ambo



ad angulos æquales B C D, E C G, ita & sit vna linea recta B C G, & propterea, & ad propos. 15. lib. 1. demon-
stratum est, E C D, quoque vna recta linea. Deinde ducta diameter
F C, producatur, donec in H, secet vel latus A D, vel latus A B, (*Neque enim in punctum A, cadet: quia A C, esset simile ipsi C F, & demonstratum est, quod est contra hypothesim*) **& per H, ducatur H L,** *parallela ipsi A B, vel ipsi A D. Dico parallelogrammum abscissum H C, simile esse ipsi C F. Si enim totum parallelogrammum K L, compleatur, erunt H C, C F, circa diametrum.* **Quare inter se similia erunt, & Euclides demonstrauit in hac propositione.**

EADEM *autem arte fere alterutrum ipsorum augeri poterit, & fiat simile alteri. Sit enim augendum A F C D, & fiat ipsi C F F G, simile.* **Constituantur & primi, & diameter F C, extendatur, donec in H, secet vel latus D A, protractum, vel latus D A, protractum.**

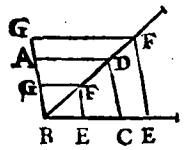
Neque



Neque enim in punctum A, cadet: quia A C, esset ipsi C F, simile, & vt demonstratum est, quod non ponitur. Deinde per H, ducatur H I, parallela ipsi A D, vel ipsi A B, donec secet vel latus C D, protractum, vel C B, protractum in I. Dico parallelogrammum auctum H C, simile esse parallelogrammo C F. Nam si compleatur totum parallelogrammum K L, consistent H C, C F, circa diametrum; a *Quare similia inter se erunt.*

a 24. *sexti.*

PERSPICVVM autem est ex demonstratione huius theorematis facta ab Euclide, & ex probatione theorematis à nobis propositi in hoc scholio, parallelogramma circa eandem diametrum non solum esse similia, verum etiam similiter posita. Vnde proposito quouis parallelogrammo A B C D, si maius debeat describi illi simile similiterque positum, producendum erit latus vnum, nempe B C; Atque ex E, quolibet puncto vltra C, ipsi C D, parallela E F, ducenda, secans diametrum B D, productam in F, & per F, ducenda F G, parallela ipsi A D, occurrens rectæ B A, productæ in G. b *Erit enim parallelogrammum G E, simile similiterq; positum ipsi A C, & maius eodem. Quod si minus debeat describi, sumendum erit punctum E, citra C, & reliqua peragenda, vt prius, vt figura indicat.*



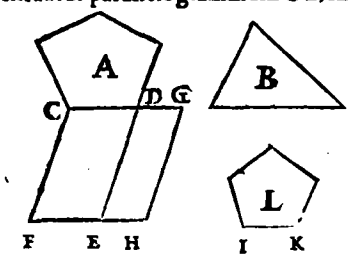
b 24. *sexti.*

xxv. **PROBL. 7. PROPOS. 25.**

DATO rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituere.

SINT data duo rectilinea A, & B; sitq; constituendum aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A, æquale vero ipsi B. Super C D, vnum latus rectilinei, cùm simile debeat constitui, *c* constituatur parallelogrammum C E, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam D E, in angulo E D G, qui æqualis sit angulo D C F, parallelogrammum D H, æquale ipsi B, eritque tam C D G, quam F E H, linea vna recta, vt demonstratum est propos. 45. lib. I. *d* Inueniatur iam inter rectas C D, D G, media proportionalis I K; *e* super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi A, similiterq; positum. Dico L, æquale esse alteri rectilineo B.

c 44. *Sext. 45. primi.*



d 13. *sexti.*
e 18. *sexti.*

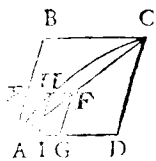
Cum

Cum enim sint proportionales tres rectæ C D, I K, D G, erit per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. vt C D, prima ad D G, tertiam, ita A, rectilineum super primam C D, ad rectilineum I, super I K, secundam simile similiterque descriptum: *a* Vt autem C D, ad D G, ita est parallelogrammum C E, ad parallelogrammum D H, eiusdem altitudinis. *b* Igitur erit vt C E, ad D H, ita A, ad I. *c* Vt autem C E, ad D H, ita est A, ad B: propterea quod parallelogrammum C E, rectilineo A, & parallelogrammum D H, rectilineo B, constructum est æquale. *d* Quare erit vt A, ad B, ita A, ad I. *e* proptereaque æquale erunt rectilineum B, & I. Fiat autem & I, simile ipsi A, similiterque positum per 18. huius. Dato igitur rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.

a 1. *sexti.*
b 11. *quinti.*
c 7. *quinti.*
d 11. *quinti.*
e 9. *quinti.*

THEOR. 19. PROPOS. 26. xxiij.

SI à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, similiterque positum, communem cum eo habens angulum; circa eandem cum toto diametrum consistit.



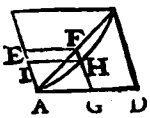
EX parallelogrammo B D, abscissum sit parallelogrammum E G, simile ei similiterque positum, habens cum ipso angulum communem E A G. Dico E G, consistere circa diametrum totius B D. Ducantur enim rectæ A F, C F, quæ si fuerint vna linea recta; perspicuum est, cum A I, sit diameter ipsius I G, & A C, diameter ipsius B D, parallelogrammum E G, consistere circa diametrum A F G, totius parallelogrammi. Quod si A F, C F, non dicantur efficere lineam rectam, ducatur totius parallelogrammi diameter A C, secans latus E F, in H, puncto, per quod ipsi F G, parallela agatur H I. Quoniam igitur parallelogramma B D, E I, sunt circa eandem diametrum A H C, *f* simila erunt similia, similiterque posita. *g* Quare erit vt B A, ad A D, ita E A, ad A I. Sed vt B A, ad A D, ita quoque est E A, ad A G, quod parallelogrammum B D, E G, ponatur simile similiterque positum. *h* Igitur erit vt E A, ad A I, ita E A, ad A G. *i* Ac propterea æquales erunt rectæ A I, A G. pars, & totum, quod est absurdum.

f 24. *sexti.*
g 1. *def.* *sexti.*
h 11. *quinti.*
i

QVOD si dicatur recta A H C, secare alterum latus F G. Tunc ducta H B, parallela ipsi F E, erunt rursus similia parallelogramma B D, E G, similiterque posita. Quare erit vt D A, ad A B, ita G A, ad A E, c



a 11. *quinti.* b 9. *quinti.*

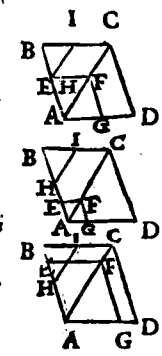


morum BD, EG. a Igitur erit vt GA, ad AI, ita GA, ad AE, b ideoque æquales erunt rectæ AI, AE; pars & totum: Quod est absurdum. Constituunt ergo rectæ AF, FC, vnam rectam lineam; hoc est, ducta diameter AC, transit per punctum F; & ducta diameter AF, cadit in punctum C. Itaque si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

ALITER idem theorema demonstrabimus ostensiue, hoc modo. Diuisis lateribus AB, BC, bifariam in punctis H, I, siue punctum H, cadat in punctum E, siue supra, siue infra, ducantur rectæ HI, AF. Quoniam igitur, propter similitudinem parallelogrammorum, est vt AB, ad BC, ita AE, ad EF; Vt autem tota AB, ad totam BC, c ita est dimidia HB, ad dimidiam BI; d Erit vt HB, ad BI, ita AE, ad EF. Triangula igitur HBI, AEF, cum habeant circa angulos B, E, (qui æquales sunt, ob similitudinem parallelogrammorum BD, EG: Vel quia vnus est internus, & alter externus in parallelis BC, EF, e qua parallela sunt, cum vtraque parallela sit ipsi AD,) latera proportionalia, f erunt æquiangula, habebuntq; æquales angulos BHI, EAF, externum, & internum inter rectas HI, AF. g Quare parallelæ erunt rectæ HI, AF. Quoniam verò recta, qua ex puncto A, ad punctum C, duci concipitur, h parallela quoque est rectæ HI, propterea quod latera AB, BC, triangulis tunc constituti ABC, proportionaliter essent secta in H, & I, vtpote bifariam; efficitur, vt ducta recta AC, eadem fiat quæ AF, transeatq; per punctum F, cum ex puncto A, solum vna linea parallela rectæ HI, possit duci, vt manifestum est. Consistunt ergo BD, EG, parallelogramma similia, similiterque posita circa eandem diametrum AFC. Quod est propositum.

c 15. *quinti.* d 11. *quinti.* e 30. *primi.* f 6. *sex.* g 28. *primi.* h 2 *sex.*



QVOD si duo parallelogramma similia similiterque posita non habeant angulum communem, sed vnum sit extra aliud, hac tamen lege, vt ita sint connexa inter se secundum duos eorum angulos æquales, vt duo latera vnius cum duobus lateribus alterius duas rectas lineas constituant: demonstrabimus iisdem fere mediis, ea circa eandem consistere diametrum. Sint enim duo parallelogramma similia similiterque posita BD, EG, quæ ad angulos æquales BCD, GCE, ita coniungantur, vt lineæ BC, CG, in directum iaceant, & ob id, per ea, quæ ad propos. 15. lib. 1. ostendimus, lineæ DC, CE vnam quoque lineam

lineam rectam componant. Dico parallelogramma BD, EG, circa eandem consistere diametrum, hoc est, diametrum AC, cum diametro FC, cuius rectam lineam conficere. Si enim AC, FC, non faciunt cuiam lineam rectam, ducatur ex A, ad F, linea recta secans BC, in H, puncto, per quod agatur HI, parallela ipsi CD, occurrens rectæ FE, productæ in K. Quoniam igitur parallelogramma BI, KG, circa eandem diametrum AHF, producta consistunt, efficiuntque duo rectas BH, HI, cum duabus rectis HG, HK, duas lineas rectas, ipsæ erunt similia similiterque positæ, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Quare erit ut HB, ad BA, ita FK, ad KH. a Habet autem CB, maior ad BA, proportionem maiorem, quam HB, minor ad eandem BA; & est ut CB, ad BA, ita FE, ad EC, eo quod parallelogramma BD, EG, ponuntur similia similiterque descripta. Igitur & FE, ad EC, hoc est, ad sibi æqualem KH, maiorem habebit proportionem, quam HB, ad BA, hoc est, quam FK, ad KH. Quam ob rem si FE, ad KH, maiorem habeat proportionem, quam FK, ad eandem KH; b erit EF, maior quam FK; pars quam totum. Quod est absurdum.

a 8. quinti.

b 10. quinti.

QVOD si quis dicat, rectam AHF, secare latus CD. Tunc per H, ducta recta BC, parallela HI, quæ occurrat rectæ FG, protractæ in K; erunt rursus similia similiterque posita parallelogramma ID, EK, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. ostendimus. Quare erit ut HD, ad DA, ita FK, ad KH. c Habet autem CD, ad DA, maiorem proportionem, quam HD, ad DA; Et est ut CD, ad DA, ita FG, ad GC; propterea quod parallelogramma BD, EG, similia similiterque posita sunt concessa. Igitur & FG, ad GC, hoc est, ad sibi æqualem KH, maiorem habebit proportionem, quam FK, ad KH; d ideoque FG, maior erit, quam FK; pars quam totum: Quod est absurdum.

c 8. quinti.

d 1. quinti.

OSTENSIVE idem hac ratione ostendetur. Quoniam propter similitudinem parallelogrammorum BD, FG, anguli, B, E, sunt æquales, estque ut AB, ad BC, ita CE, ad EF; habebunt triangula ABC, CEF, circa angulos æquales B, & E, latera proportionalia; e atque idcirco æquiangula erunt, habebuntque angulos BCA, EFC, æquales. Addito ergo communi angulo BCF, erunt duo anguli BCA, BCF, duobus angulis EFC, BCF, æquales: f Sed hi inter parallelas BC, EF, æquales sunt duobus rectis. Igitur & BCA, BCF, duobus erunt rectis æquales; g Ac propterea

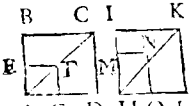
e 6 sex.

f 29 primi.

g 14. primi.

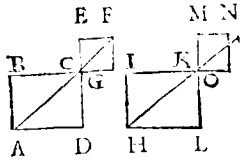
propterea A C, F C, vnam componet rectam lineam. **Quod erat propositum.**

RECTE autem Euclides in theoremate dixit, **parallelogrammum a toto ablatum non solum esse toti simile, verum etiam similiter positum, vt ostendatur circa eandem esse cum toto diametrum. Nam si ex altera parte longioris B D, abscindatur altera parte longius E G,**



circa eandem cum toto diametrum consistens, 26. 6. sexti. *erit E G, simile similiterque positum.* **At vero si in rectangulo I L, quod sit aequilaterum, & aequiangulum ipsi B D, sumatur H M, aequalis ipsi E F, & M N, aequalis ipsi A E, &c. erit quidem rectangulum M O, aequale & simile rectangulo E G, propter aequalitatem laterum, & angulorum, qui sunt recti; & ob id simile rectangulo I L; sed tamen quia non est similiter positum, non consistit circa eandem cum toto I L, diametrum.**

IDEM quoque hic perficitur in rectangulis similibus, **quorum vnum est extra alterum, secundum tamen angulos eorum sita inter se connexa. Et duo latera vnius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualia sunt parallelogramma rectangula B D, E G; & I L, M O; in quibus E G, quidem consistit circa eandem diametrum cum rectangulo B D, quoniam est similiter positum: At verò M O, minime consistit circa eandem diametrum cum rectangulo I L, quia non est similiter positum, quamuis simile sit, cum prorsus sit aequale ipsi E G. Nam K M, aequalis est ipsi E F, & M N, ipsi F C, &c.**

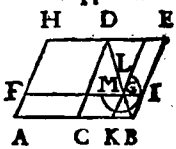


xxvj. THEOR. 20. PROPOS. 27.

OMNIVM parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus similiterque positis, ei, quod à dimidia describitur; maximum id est, quod ad dimidiam applicatur parallelogrammum simile existens defectui.

DETVR recta A B, diuisa bifariam in C, superque eius dimidiam B C, constet quodcunq; parallelogrammum C D E B, cuius diameter B D. Si igitur compleatur totum parallelogrammum A B E H, erit parallelogrammum A D, super dimidiam A C, consistens, applicatum secundum A B, deficiens parallelogrammo C E & existens simile defectui C E. Dico parallelogrammum A D, ad dimidiam A C, applicatum deficiensq; parallelogrammo C E, maximum esse omnium, quæ secundum A B, rectam applicantur,

cantur, deficiuntq; parallelogrammis ſimilibus ſimiliterque poſitis ipſi C E. Sumpto enim puncto G, vtcunque in diametro B D, & ductis per G, rectis F G I, K G, quæ ſint parallelæ rectis A B, B E; erit parallelogrammum F K, ſecundum rectam A B, applicatum, deficiens parallelogrammo K I, *a* quod ipſi C E, ſimile eſt, ſimiliterque poſitum, cum ſit circa eandem cum C E, diametrum. *b* Quoniam vero complementa C G, G E, æqualia ſunt; ſi addatur commune K I, erunt quoq; æqualia C I, K E: *c* Eſt autem C I, æquale ipſi C F, propter baſes æquales A C, C B. Igitur & C F, K E, æqualia erunt; additoq; communi C G, æqualia erunt parallelogrammum A G, & gnomon L M. Quare cum C E, maius ſit gnomone L M, (continet enim C E, propter gnomonem, parallelogrammũ adhuc D G,) erit quoque A D, *d* æquale exiſtens ipſi C E, propter baſes æquales A C, C B, maius quam parallelogrammũ A G; eodem parallelogrammo D G. Eodemque modo oſtendetur A D, maius eſſe omnibus parallelogrammis, quæ ita ſecundum rectam A B, applicantur, vt punctum G, ſit inter puncta B, & D, hoc eſt, quæ occupant maiorem lineam ſemiſſe A C, habentque minorem altitudinem, quam A D; dummodo defectus ſimiles ſint ipſi C E.

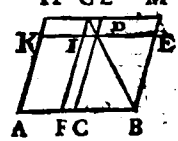


a 24. *ſexti.*
b 43. *primi.*
c 36. *primi.*
d 36. *primi.*

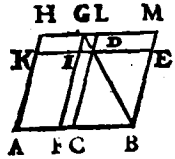
ALITER demonſtrabitur A D, maius eſſe parallelogrammo A G, hoc modo. *e* Parallelogramma F D, D I, ſunt æqualia, cum baſes H D, D E, ſint æquales: Eſt autem D I, maius quam G E, hoc eſt, quam complementum C G, (*f* quod ipſi G E, æquale eſt,) parallelogrammo D G. Igitur & F D, maius erit, quam C G, parallelogrammo eodem D G. Atq; idcirco addito communi C F; maius erit A D, quam A G, parallelogrammo eodem D G.

e 36. *primi.*
f 43. *primi.*

QVOD ſi punctum G, ſumatur in diametro B D, producta extra parallelogrammum C E. Tunc ducta per G, recta H M, quæ ſit parallela ipſi A B, occurratque rectis A K, B E, protractis in H, & M. Item ducta G F, parallela ipſi A H, erit parallelogrammum A G, applicatũ ſecundum rectam A B, deficiens parallelogrammo F M, *g* quod ipſi C E, eſt ſimile ſimiliterque poſitum, cum ſit circa eandem diametrum cum C E. Dico adhuc maius eſſe A D, ipſo A G. Protracta enim C D, ad L, erunt æquales rectæ H L, L M, *h* cum æquales ſint æqualibus A C, C B; *i* ideoque æqualia parallelogramma H D, D M. *k* Cum igitur D M, ſit æquale complemento D F; erit & H D, æquale ipſi D F. Eſt autem H D, maius quã H I, parallelogrammo I L. Quare & D F, maius erit quam H I, eodem parallelogrammo I L. Ac propterea communi addito A I, maius erit A D, quam A G, eodem parallelogrammo



g 4. *ſex.*
h 34. *primi.*
i 36. *primi.*
k 43. *primi.*



IL. Iisdem argumentis concludes A D, maius esse quocunq; parallelogrammo, ita applicato secundum rectam A B, vt punctum G, sit vltra D, in diametro B D, producta; hoc est, quod occupat minorem lineam semisse A C, haberque maiorem altitudinem, quam A D, dummodo defectus similis existat parallelogrammo C E. Itaque omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

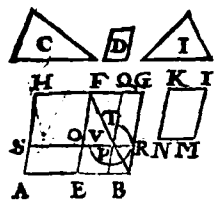
MANIFESTVM autem est, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, esse vel maiorem dimidiata A G, qualis est A K, in priori figura, vel minorem; cuiusmodi est A F, in figura posteriori: prout punctum G, sumitur vel in diametro B D, vel in ea producta ad partes D.

xxvi). PROBL. 8. PROPOS. 28.

AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus, & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

AD datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo, quod sit simile dato alteri parallelogrammo D. Secta A B, bifariam in E, super medietatem E B. a describatur parallelogrammum E F G B, simile ipsi D, similiterque positum; & compleatur totum parallelogrammum A H G B. Si igitur A P, æquale est ipsi C; cum sit applicatū ad A B, deficiens parallelogrammo E G, simili ipsi D; factum erit, quod iubetur. Si autem A F, maius est quam C. (Neque enim minus esse debet. Nam cum per propos. præcedentem, ipsum sit omnium applicatorum maximū, dummodo defectus sint similes, non posset applicari vllum ad A B, quod esset ipsi C, æquale, sed omnia essent minora. Propterea adiunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoque sibi æquale E G, maius quam C. Sit igitur

a 18. *sexti.*

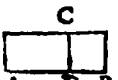


igitur maius rectilineo I. (Qua vero ratione excessus duorum rectilineorum sit inquirendus, docuimus ad propos. 45. lib. I.) *a* & constituatur parallelogrammum K L M N, simile quidem simi- a 25. *sexti.*
literque positum ipsi D, seu ipsi E G, æquale vero excessui inuento I; vt sit E G, æquale rectilineo C, & parallelogrammo K M, simul; & ob id maius quam K M. Cum igitur ob similitudinem sit vt E F, ad F G, ita N K, ad K L; erunt quoque latera E F, F G, maiora lateribus N K, K L. Si enim his illa forent æqualia, vel minora, esset etiam E G, æquale ipsi N L, vel minus, vt constat. Quare abscissis rectis F O, F Q, quæ sint æquales ipsis K N, K L, & completo parallelogrammo F Q P O; erit hoc ipsi L N, æquale, & eidem simile similiterque positum, & propterea ipsi E G: *b* atque adeo b 26.
circa eandem diametrum cum E G, consistet, quæ sit B F. Produ- *sexti.*
ctis iam rectis Q P, O P, erit parallelogrammum A P, ad rectam A B, applicatum deficiens parallelogrammo P B, *c* quod simile c 24.
est ipsi E G, similiterque positum, & propterea ipsi D. Dico igitur *sexti.*
A P, æquale esse ipsi C, rectilineo. *d* Nam cum P G, æquale sit com- d 43.
plemento P E; si addatur commune P B, erit & B Q, æquale ipsi *primi.*
E R, hoc est, ipsi E S, *e* quod æquale est ipsi E R, propter bases e 36.
æquales E A, E B. Quare si æqualibus A O, B Q, commune adda- *primi.*
tur E P, erit A P, æquale gnomoni T V. Sed gnomon T V, æqualis est rectilineo C. (Nam cum E G, parallelogrammum æquale sit ipsi C, vna cum L N; si auferantur æqualia Q O, L N, remanebit gnomon T V, ipsi C, æqualis.) Igitur & A P, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo A B, applicatum est parallelogrammum A P, deficiens parallelogrammo P B, quod simile est dato parallelogrammo D, & æquale existens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

MOVENT hoc loco dubium quoddam Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta nostram constructionem locum non habet, cum super E B, constituerimus E G, parallelogrammum non solum simile ipsi D, verum etiam similiter positum; quod ipsi minimè fecerunt. Qua de re, si placeat, consule eorum commentarios.

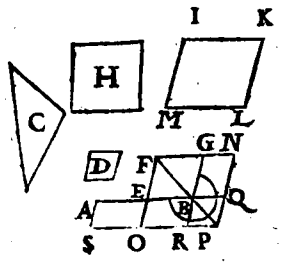
PERSPICVVM autem est, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipsum applicatum æquale esse rectangulo, quod sub segmentis lineæ per applicationem factis continetur. Vt si ad D B, applicetur A C, deficiens quadrato C B, erit A C, applicatum, rectangulum contentum sub A D, & D C. Cum ergo D C, æqualis sit ipsi D B, propter quadratum C B; continebitur quoque A C, sub segmentis A D, D B, per applicationem factis. Quod est propositum.



xxviij. PROBL. 9. PROPOS. 29.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

AD datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Diuisa A B, bifariam in E; *a* super dimidiam E B, constituatur parallelogrammum E F G B, simile ipsi D, similiterque positum. *b* Deinde rectilineo C, & parallelogrammo E G, constituatur quadratum H, æquale; *c* cui quidem fiat parallelogrammum I K L M, æquale, simile vero ipsi E G, similiterque positum; eritq; propterea I K L M, maius quam E F G B, quandoquidem æquale est quadrato H, quod constructum est rectilineo C, vna cum parallelogrāmo E G, æquale. Cum igitur ob similitudinem M K, E G, sit vt M I, ad I K, ita E F, ad F G, erunt quoque latera M I, I K, lateribus E F, F G, maiora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, esset quoque M K, vel æquale ipsi E G, vel minus, vt perspicuum est. Productis igitur F E, F G, vt rectæ F O, F N, æquales sint rectis I M, I K, & completo parallelogrammo O N; erit hoc simile, similiterque positum ipsi E G, cum sit æquale ipsi M K, & simile, similiterque positum. *d* Quare O N, E G, circa eandem diametrum consistent, quæ sit F P. Productis iam A B, G B, ad Q, R; & P O, donec cum A S, ipsi F O, parallela conueniat in S, erit parallelogrammum A P, applicatum ad rectam A B, excedens parallelogrammo Q R, *e* quod simile est ipsi E G, ac propterea ipsi D. Dico igitur A P, æquale esse rectilineo C. *f* Nam cum A O, E R, sint æqualia, *g* & E R, æquale complemento B N, erit & A O, ipsi B N, æquale. Addito ergo communi O Q, fiet A P, æquale gnomoni E P G. Atqui gnomon E P G, æqualis est rectilineo C. (Nam cum M K, hoc est, O N, æquale sit rectilineo C, vna cum E G; si auferatur commune E G, remanebunt æqualia gnomon E P G, & rectilineum C.) Igitur & A P, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam A B, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est A P, excedens parallelogrammo R Q, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.

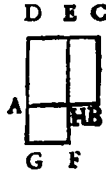


a 18. *sexti.*
b 14. *secund.*
c 25. *sexti.*
d 26. *sexti.*
e 24. *sexti.*
f 36. *primi.*
g 43. *primi.*

PROBL.

PROPOSITAM rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.

SIT recta AB, secanda extrema ac media ratione. Descripto super eam quadrato ABCD; *a* ad latus DA, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC, & excedens parallelogrammo AF, simili ipsi quadrato, ita vt sit AF, quoque quadratum, cum quadrato solum quadratum sit simile. Secet autem recta EF, rectam AB, in H. Dico AB, in H, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint DF, & AC, si demat-



tur commune AE, remanebunt æqualia GH, HC, quæ cum habeant angulos æquales AHF, BHE, vtpote rectos, *b* erunt latera circa illos reciproca, hoc est, erit vt EH, hoc est, vt AB, ipsi EH, æqualis, ad HF, hoc est, ad AH, ipsi HF, æqualem, vt AH, ad HB. Quare cum sit, vt tota AB, ad segmentum AH, ita segmentum AH, ad segmentum HB, secta est AB, extrema ac media ratione, per definitionem. Propositam ergo rectam lineam terminatam, &c. Quod erat faciendum.

a 29. *sexti.*

b 14. *sexti.*

ALITER quoque ostendemus AB, esse sectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur AB, AH, HB, sitque rectangulum HC, comprehensum sub prima AB, & tertia HB, æquale quadrato mediæ AH; *c* erunt ipsæ proportionales: vt AB, quidem prima ad AH, secundam, ita AH, secunda ad HB, tertiam. Quare per definitionem secta est AB, in H, extrema ac media ratione.

c 17. *sexti.*

ALITER totum problema conficiemus. *d* Diuidatur AB, in C, ita vt rectangulum sub tota AB, & segmento CB, æquale sit quadrato alterius segmenti AC. Dico AB, in C, esse sectam extrema ac media ratione. *e* Erunt enim rursus, vt prius, tres lineæ AB, AC, CB, continuè proportionales. Constat ergo propositum.



d 11. *secundi.*

e 17. *sexti.*

SCHOLIVM.

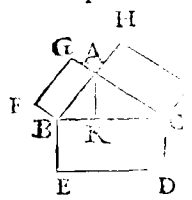
PRAXIS diuisionis lineæ rectæ extrema ac mediæ ratione instituendæ est, vt ad propos. 11. lib. 2. tradidimus.

HABET autem admiranda hæc sectio lineæ extrema ac mediæ ratione insignes vtilitates, proprietatesque, vt in libris Stereometricis manifestum erit, vt non sine causa à plerisque Mathematicis linea ita diuisa diuinam quodammodo, ob admirabilem eius vim, ac naturam, dicatur habere proportionem: Ab aliis verò simpliciter vocetur diuisa proportionaliter.

THEOR. 21. PROPOS. 31.

IN rectangulis triangulis, figura quæuis à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

TRIANGVLVM rectangulum sit A B C, **habens angulum** B A C, rectum; describaturque super B C, **quæcunque figura rectilinea** B C D E, *a* cui similes similiterque **positæ super A B, A C,** constituantur A B F G, A C I H. Dico **figuram B D, æqualem esse** duabus figuris A F, A I. Demissa enim A, **ad B C, perpendiculari** A K, erit per corollarium propos. 8. huius **lib. vt B C, ad C A, ita** C A, ad C K. Quare **vt B C, ad C K,** prima linea ad tertiam, **ita figura B D,** super primam, ad figuram **C H,** super secundam similem similiterque positam, per coroll propos. 19. vel **20. huius lib. & conuertendo vt** C K, **ad B C, ita figura C H,** ad figuram B D. **Non secus ostendetur,** esse quoque vt B K, **ad B C, ita figuram** B G, ad figuram B D; cum tres lineæ B C, B A, **B K, sint quoque** proportionales, &c. Quoniam igitur est vt **C K, prima quantitas** ad B C, secundam, ita C H, tertia ad B D, **quartam; Item vt B K,** quinta quantitas ad B C, secundam, ita B G, **sexta ad B D, quar-**



a 18. *sexti.*

b 24. *quinti.* tam; *b* erit vt prima C K, cum quinta B K, **ad B C, secundam,** ita tertia C H, cum sexta B G, ad B D, quartam: **Sunt autē prima C K,** & quinta B K, simul æquales secundæ B C. **Igitur tertia C H, & sexta** B G, simul æquales quoq; erūt quartæ B D. **Quod est propositū.**

c 8. *sex.* ALITER. *c* Cum triangulo A B C, simile **sit triangulum K A C,** sintque homologa latera ipsorum B C, C A; (**Nam est vt B C, ad**

d 19. *sexti.* C A, in triangulo A B C, ita C A, ad C K, in **triangulo K A C,**) *d* habebit triangulum K A C, ad triangulum **A B C, duplicatam pro-**

e 19. & 20 *sex.* portionem eius, quam habet C A, ad B C. *e* **Habet autem & figura** C H, ad figuram B D, proportionem **duplicatam proportionis** C A, ad B C. *f* Quare erit vt triangulum **K A C, ad trian-**

f 11. *quinti.* gulum A B C, ita figura C H, ad figuram **B D. Eadem ratione** ostendetur esse, vt triangulum K B A, ad **triangulum A B C, ita figuram** B G, ad figuram B D. Quoniam ergo **rursus est, vt K A C,** prima quantitas ad A B C, secundam, ita **C H, tertia ad B D,** quartam; Item vt K B A, quinta ad A B C, **secundam, ita B G, sexta**

g 24. *quinti.* ad B D, quartam; *g* erit & prima K A C, **composita cum quinta** K B A, ad secundam A B C, ita **composita tertia C H,** cum sexta B G, ad quartam B D: Sunt autem **K A C, K B A,** prima & quinta

quinta simul, æquales secundæ A B C. Igitur C H, B G, tertia & sexta simul, æquales quoque erunt quartæ B D. Quod est propositum.

ALITER. Vt quadratum rectæ A C, prima quantitas, ad quadratum rectæ B C, secundam quantitatem, ita est figura C H, tertia quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem; *a* cùm vtraque proportio sit duplicata proportionis A C, ad B C. Similiter erit vt quadratum rectæ A B, quinta quantitas, ad quadratum rectæ B C, secundam quantitatem, ita figura B G, sexta quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem. *b* Quocirca erit, vt prima quantitas cum quinta, nimirum quadratum rectæ A C, cum quadrato rectæ A B, ad secundam, hoc est, ad quadratum rectæ B C, ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura C H, cum figura B G, ad quartam, videlicet ad figuram B D. *c* Sunt autem quadrata rectarum A C, A B, simul æqualia quadrato rectæ B C. Igitur & figuræ C H, B G, figuræ B D, æquales erunt. Quod est propositum. In rectangulis igitur triangulis, figura quæuis, &c. quod erat ostendendum.

a 19. Sel 20. sexti.

b 24. quinti.

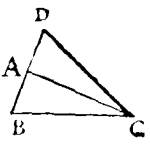
c 47. primi.

SCHOLIVM.

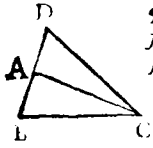
VIDES igitur, longè esse Vniuersalius theorema hoc Euclidis, quod sese ad omnes figuras similes similiterque descriptas extendit, quàm illud Pythagoræ inuentum, quod solis quadrata includit, & propos. 47 primi lib. monuimus. Videtur tamen & theorema illud, quod ibi ex Pappo demonstrauimus, aliqua ex parte adhuc esse Vniuersalius quam hoc, cum illud de omni triangulo, parallelogrammisq; etiam non similibus; Hoc verò de triangulo tantummodo rectangulo, figuris q; similibus, & similiter positis proponatur.

CONVERTEMVS etiam theorema hoc ex Campano non aliter, quam 47 propositionem primi lib. in hunc modum.

SI figura, quæ ab vno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, figuris similibus similiterque positis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.



DETVR triangulum A B C, sitq; figura quæuis super latus B C, descripta æqualis duabus figuris sibi similibus similiterq; descriptis super reliqua latera A B, A C. Dico angulum B A C esse rectum. Ducatur enim A D, ad A C, perpendicularis, quæ sit ipsi A B, æqualis, & connectatur recta C D. Quoniam igitur angulus C A D, rectus est, d *erit figura super C D, (quæ similis sit ei,* d 31. sexti.

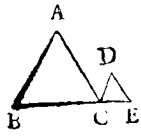


quæ super B C, similiterq; posita) descripta æqualis figuræ super A D, A C, descriptis, quæ ex similes sint, similiterque posita. Est autem figura super A D, æqualis figuræ super A B, ob æqualitatem laterum. Igitur figura super C D, æqualis erit figuræ super A E, A C. Cum igitur figura super B C, eisdem figuris super A B, A C æquale ponatur, erunt figura super C D, B C, inter se æquales, ac propterea C D, B C, æquales erunt, & constat ex lemmate propos. 22 huius lib. Quoniam igitur latera A D, A C, trianguli D C, æqualia sunt lateribus A B, A C, trianguli

a 8 primi. *A B C; & basis D C, ostensa est quoque æqualis basi B C;* a *erunt anguli D A C, B A C, æquales. Quare cum D A C, rectus sit, ex constructione, rectus quoque erit B A C. Quod est* ***propositum.***

xxx. ## THEOR. 22. PROPOS. 32.

SI duo triangula, quæ duo latera **duobus lateribus** proportionalia habeant, secundum vnum **angulum** cõposita fuerint, ita vt homologa eorum **latera** sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum **latera** in rectam lineam collocata reperientur.



HABEANT triangula **A B C, D C E,** latera A B, A C, lateribus D C, D E, **proportionalia,** vt quidem A B, ad A C, ita D C, **ad D E, componanturq;** ad angulum A C D, **ita vt latera homologa** A B, D C; Item A C, D E, **inter se sint parallela.** Dico duo latera reliqua B C, **C E, rectam com-**

b 29 primi. **ponere lineam.** Cùm enim parallelæ sint A **B,** D C, *b* **erit** angulus A, alterno A C D, æqualis. Eadem q; ratione **angulus D,** eidem A C D, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter **se quoque existent** æquales. Quoniam igitur triangula A B C, D C E, **habent latera**

c 6 sext. circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa *c* **erunt** inter se æquiangula, habebuntque æquales angulos **B, & D C E. Additis** ergo æqualibus A, & A C D, erunt duo anguli **B, & A,** duobus angulis D C E, A C D, hoc est, angulo A C E, **æquales.** Rursus addito communi A C B, fient tres anguli **trianguli A B C,** duobus

d 32 primi. angulis A C E, A C B, æquales: *d* Sed illi tres **æquales** sunt duobus rectis. Ergo & duo A C E, A C B, duobus **erunt rectis** æqua-

e 14 primi. les: *e* Atq; ideirco B C, C E, vnam rectam **lineam constituent.** Itaq; si duo triangula, quæ duo latera duobus **lateribus proportionalia** habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

DEBENT autem prædicta duo triangula ita secundum vnum angulum esse composita, vt homologa angulorum à lateribus proportionali-

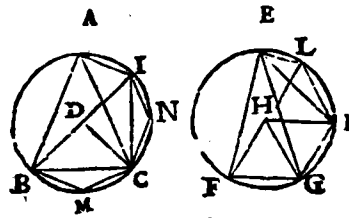
nalibus comprehensus, alterum sit illi angulo secundum quem tri-angula componuntur, Selecti in figura theorematis factum. Secundi. Nam angulo ACD, secundum quem triangula sunt constituta, alterum est tam angulus A, quam angulus D, quia ambo vtrique, lateribus proportionalibus continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, esse æquales, & propterea triangula esse æquiangula, atque adeo ex EC, CE, & mani festa linearum compositione, vt ex demonstratione liquet.

QVOD si vterque angulorum A, D, lateribus proportionalibus contentus non fuerit alterius angulo, secundum quem triangula componuntur, hucusque reliqua hypothesis eadem seruantur, ac erit triangulum ABC simile non ipsi, Nam duo triangula ABC, DEF habent duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF proportionalia, & positum AB ad AC, vt DE ad DB; cumque æquales sint ad angulum CBD, vtrique ipsarum ad latera AB, DE, quam ad CA, FD sint parallela: Nihilominus duo quæ duo latera CB, BE non constituant, nam tum anguli ad latera quod angulo CBD, non sit alternus. Vterque angulorum A, D, immoneuter eorum, vt postulatum est. Quamobrem demonstratio theorematis locum non habet.

THEOR. 23. PROPOS. 33. xxxij.

IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper verò & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SINT duo circuli æquales ABC, EFG, quorum centra D, H; sumanturque ex circulis duo arcus quicunque BC, FG, quibus ad centra quidem insistant anguli BDC, FHG; ad circumferentias verò anguli BAC, EFG. Dico esse ex sententia defin. 6. lib. 5. vt arcum BC, ad arcum FG, ita angulum BDC, ad angulum FHG, & angulum BAC, ad angulum EFG. & sectorem insuper BDC, qui rectis BD, DC, & arcu BC, continetur ad sectorem IHG; quem comprehendunt rectæ IH, HG, & arcus IG. Iungantur enim rectæ IC, IG, *a* applicenturque ipsis circulis æquales a 1. *quarti.* rectæ CL, GK, æquales ipsi IC, ac rectæ GK, KE, ipsi IG: deb 28. *tertij.* centrisque rectis EH, KH, LH. Quoniam igitur æquales sunt



27. tertij. ac propterea & anguli BDC, CDI, æquales erũt. Eadem ratione æquales erũt & arcus FG, GK, KL, & anguli KFHG, GHK, KHL. Quàm multiplex ergo est arcus BCI, ipsius arcus BC, tam multiplex erit angulus BDI, seu aggregatum angulorum prope centrum D, insistentium arcui BCI, anguli BDC: Et quàm multiplex est arcus FGKI, ipsius arcus FG, tam multiplex erit angulus FHL, seu aggregatum angulorum prope centrum H, arcui FGKL, insistentium, anguli FHG, quia in tot angulos æquales diuisi sunt anguli BDI, FHL, in quot arcus æquales secti sunt arcus BCI, FGKL. Quoniam verò si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, b necessariò angulus BDI, b 27. tertij. angulo FHL, æqualis est: Ac proinde si arcus BCI, maior fuerit arcui FGKL, necessariò angulus BDI, maior est angulo FHL, & si minor, minor: Deficient propterea vna arcus BCI, & angulus BDI, æquè multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab FGKL, arcu, & angulo FHL, æquè multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG, vel vnà æqualia erunt, vel vnà excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. c Quare quæ c 6. def. quinti. proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit anguli BDC, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem.

ATQVE hoc verum etiam est de spatijs circa centra, hoc est, ita erit arcus BAC, ad arcum FEG, vt spatium ad centrum D, insistens arcui BAC, ad spatiũ ad centrum H, insistens arcui FEG, vt ex demonstratione patet. Nam & hæc spatia, si æqualia sunt, insistunt æqualibus arcubus, & si inæqualia, inæqualibus, &c.

d 15. quinti. e 20. tertij. f 33. quinti. QVONIAM verò vt angulus BDC, ad angulum FHG, d ita est angulus BAC, ad angulum FEG, e cùm illi horum sint dupli, perspicuum est, f ita esse quoque angulum BAC, ad angulum BMC, vt est arcus FG. Quod tamen eisdem argumentis demonstrari potest, quibus vsi sumus in angulis ad centra constitutis, si priùs ducantur rectæ IA, KE, LE, &c.

QVOD si ad circumferentias constituti sint anguli eiusmodi BAC, FEG, vt rectæ ductæ BD, CD; FH, GH, non constituant angulos in centris versus arcus BMC, FG; sumenda erunt spatia BDC, FHG, quæ dupla etiam sunt angulorum ad circumferentias, ex scholio propos. 20. lib. 3.

g 27. tertij. h 11. tertij. CONSTITVANTVR iam in segmentis BC, CI, anguli BMC, CNI, g qui æquales erunt, cùm insistant arcubus æqualibus BAC, CBAI. Quare similia erunt segmenta BMC, CNI, h atque adeò

adeò inter se æqualia, propterea quòd sunt super rectas B C, C I, æquales. Additis igitur triangulis B D C, C D I, *a* quæ æqualia quoque sunt, fient sectores B D C, C D I, æquales. Quapropter tam multiplex erit sector B D I, sectoris B D C, quam est multiplex arcus B C I, ipsius arcus B C. Similiter ostendemus, sectorem F H L, tam multiplicem esse sectoris F H G, quàm multiplex est arcus F G K L, ipsius arcus F G. Quoniam verò si arcus B C I, æqualis fuerit arcui F G K L, sector quoque B D I, sectori F H L, æqualis est; (vt in sectoribus B D C, C D I, ostensum fuit,) & si maior, maior; & si minor, minor: Deficient propterea vna arcus B C I, & sector B D I, æque multiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ B D C, ab arcu F G K L, & sectore F H L, æquè multiplicibus secundæ magnitudinis F G, & quartæ F H G; vel vna æqualia erunt: vel vna excedent; si ea sumantur, quæ inter se respondent. *b* Quamobrem quæ proportio est arcus B C, primæ magnitudinis, ad arcum F G, secundam magnitudinem, ea erit sectoris B D C, tertiæ magnitudinis, ad sectorem F H G, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, &c. Quod demonstrandum erat.

a 4 prim.

b 6. def. quinti.

COMMODIVS fortasse instituetur demonstratio hoc modo. Sumantur (saltem cogitatione) quotuis circuli æquales circulo A B C, atque in singulis capiantur singuli arcus arcui B C, æquales, quibus insistant anguli tam ad centra, quàm ad circumferentias. Erunt enim omnes hi anguli æquales angulis B D C, B A C, ob æqualitatem arcuum, quibus insistunt: ac proinde eorum aggregata ita multiplicia erunt angulorũ B D C, B A C, vt est multiplex aggregatum omnium arcuum ipsius arcus B C. Deinde sumantur etiam quotuis circuli æquales circulo E F G, & in singulis accipiantur singuli arcus arcui F G, æquales, &c. Hac enim ratione vitabitur confusio linearum, & angulorum in circulis A B C, E F G, quæ necessariò oritur, quando arcus B C, F G, sunt magni, & eorum multiplices accipiendi sunt, vt perspicuum est. Nam si arcus essent B C I, F G L, quibus insistunt anguli B D I, F H L, ad centra, & B A I, F E L, ad circumferentias; non poterunt eorum multiplices sumi sine confusione, vt patet. Hæc autem confusio vitatur, si plures circuli æquales adhibeantur, vt diximus.

COROLLARIVM I.

HINC manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, vt est angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem est proportioni arcus ad arcum. *c* Quare & inter se eadem erunt.

c 11. quinti.

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque est, vt est angulus in centro ad quatuor rectos, ita esse arcum subtensum ipsi angulo ad totius circumferentiam.

Et con-

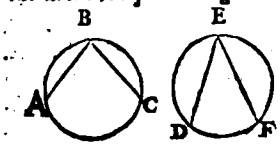
Et contrà, vt sunt quatuor recti ad angulum in centro, ita esse totam circumferentiam ad arcum illi angulo subtensum.

NAM vt est angulus in centro ad angulum rectum in centro, a 33. sexti. *ita est arcus illi angulo subtensus ad quadrantem angulo recto subtensum. Quamobrem erit vt angulus in centro ad quadruplum angulis rectis, nempe ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circumferentiam, per ea, quæ ad 22. propos. lib. 3. demonstrauimus. Quod est primum. Quoniam igitur est vt angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad totam circumferentiam; erit & conuertendo, vt quatuor recti ad angulum in centro, ita totus circumferentia ad arcum angulo in centro subtenſum. Quod est secundum. Verum* b 33. sexti. *hoc etiam ita demonstrabitur.* b *Cum sit, vt angulus rectus in centro ad angulum in centro, ita quadrans angulo recto subtensus ad arcum illi angulo subtensum; erit quoq; per ea, quæ ad propos. 22. lib. 3. ostendimus, vt quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita quadruplum quadrantis, nimirum totus circumferentia, ad arcum illi angulo subtensum. Quod est propositum.*

IDEM verum est de spatio in centro: hoc est, vt est spatium in centro ad quatuor rectos, ita est arcus subtensus illi spatio ad totam circumferentiam, &c. vt ex demonstratione patet.

SCHOLIVM.

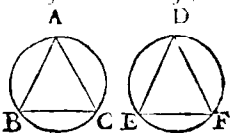
CÆTERVM ex theoremate hoc luce clarius colligitur, angulum qui circumferentia alicui insistit, referendum esse ad arcum, qui basis est ipsius anguli, non autem ad arcum, in quo existit. Non enim eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum, si sumantur arcus, in quibus anguli existunt, vt vult Euclides in proposito hoc



theoremate. Sint enim circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentiam constituti sint B, E; maior quidem B, minor autem E. Quo posito, erit arcus AC, maior arcus DF, ex scholio propos. 26. lib. 3. ac propterea reliquus arcus ABC, minor reliquo arcu DEF. Quare proportio anguli B, ad angulum E, est maioris inæqualitatis, proportio verò arcus ABC, ad arcum DEF, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum. Quod si semianimes arcus super quos anguli ascenderunt, quales sunt arcus AC, DF, tum demum erit angulus B, ad angulum E, vt arcus AC, ad arcum DF, vt rectè demonstrauit Euclides. Quocirca cùm dicimus angulum esse in segmento, aliud intelligere debemus, quàm cùm dicimus, angulum insistere segmento seu arcui. Id quod in expositione definitionis 8. lib. 3. monuimus.

NON

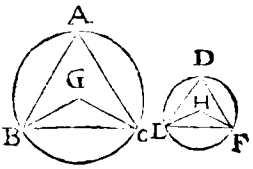
NON obscurè quoq; ex hac theoremate demonstrari potest, similitudinem segmentorum in circulis similium, quæ Euclides definitione 10. lib. 3. definiuit per angulos æquales in ipsis segmentis existentes, consistere in eo, quod segmenta, seu circumferentiæ similes, ad integras circumferentias circulorum eandem habeant proportionem, & propterea quando segmenta totis circulis commensurabilia sunt, quale pars est una circumferentia totius suæ circumferentiæ talis quoq; sit alia circumferentia similis totius suæ circumferentiæ. Soluti in expositione 7 prædicta declarationis docemus. Sint enim primùm duo circuli æquales A B C, D E F, in eorum autem angulis ad circumferentias constituantur æquales B A C, E D F. Quo posito, segmenta B A C, E D F, iuxta Euclidis definitionem inuicem ipsis dicentur similia. Manifestum autem est, eorum circumferentias habere eandem proportionem, quam integras circulorum circumferentias. Cum enim ob circulorum æqualitatem, arcus B C, E F, quibus anguli æquales insistunt, sint æquales; efficitur reliquas circumferentias B A C, E D F, esse quoq; æquales. Quare ad totas circumferentias, quæ æquales etiam ponuntur, b eandem proportionem habebunt; Atq; ad eo, quæ pars est arcus B A C totius circumferentiæ A B C A, eadem pars erit arcus E D F, totius circumferentiæ D E F D.



a 26 tertij.

b 7. quinti.

SINT deinde duo circuli inæquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circumferentias constituantur æquales B A C, E D F. Quo posito, dicentur segmenta B A C, E D F, ex Euclidis sententia, similia. Dico rursus arcus B A C, E D F, eandem habere proportionem ad integras seu circumferentias. Ducantur enim ad centra G, H, rectæ B G, C G, E H, F H. Quoniam igitur anguli A, & D, æquales ponuntur, erunt quoq; ad centra anguli G & H æquales, c cum duplum



c 20. tertij.

sint angulorum ad circumferentias duplum, ex 20. lib. 3. d Quare quatuor recti ad angulum, seu spatium G, eandem habebunt rationem, quam ad angulum, seu spatium H æquales quatuor rectis ad angulum, seu spatium G, ita est tota circumferentia A B C A, ad arcum E C. Et quatuor rectis ad angulum, seu spatium H, ita est tota circumferentia D E F D, ad arcum E F ex corollario 2. huius propos. 33. e Igitur ut tota circumferentia A B C A, ad arcum E C, ita erit tota circumferentia D E F D, ad arcum E F. Et conuertendo, f ut arcus E C, ad totam circumferentiam A B C A, ita erit arcus E F, ad totam circumferentiam D E F D. Et componendo, ut arcus B A C, ad to-

d 7. quinti.

e 11. quinti.

f 14. quinti.

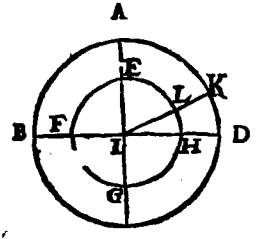
ad totum circumferentiam A B C A, ita arcus E D F, ad totum circumferentiam D E F D. Quocirca qua pars est arcus B A C, totius circumferentiæ A B C A, eadem pars erit arcus E D F, totius circumferentiæ D E F D. Quod est propositum.

CONSTAT igitur, rectè Euclidem & omnes eas circulorum segmenta similia, in quibus anguli existentes inter se sunt æquales: quandoquidem huiusmodi segmenta eandem habent proportionem ad circulos suos integros.

FACILE ex his demonstrabitur theorema illud, quod & ad calcem cap. 1. in sphæram, & ad propos. 22. lib. 3. sine proportionibus ostendimus, & videlicet.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duæ aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas interceptí similes.

SINT duo circuli A B C D, E F G H, circa idem centrum I, descripti. Si igitur egrediantur è centro I, duæ rectæ I B, I D, efficientes & unam lineam rectam B D, manifestum est, arcus B A D, F E H, similes esse, cùm sint semicirculi. Rursus si ex I, egrediantur duæ rectæ I A, I D, constituentes angulum rectum A I D, perspicuum quoq; est, arcus A D, E H, similes esse, cùm ex scholio propos. 27. lib. 3. sint Quadrantes suorum circulorum.



EMITTANTVR iam ex I, duæ rectæ I D, I K, facientes quemcunq; angulum non rectum D I K. Dico adhuc arcus D K, H L, similes esse, hoc est, ita esse arcum D K, ad totum circumferentiam A B C D, & ut est arcus H L, ad totum circumferentiam E F G H. Quoniam enim & anguli D I K, ad quatuor rectos, ita est ex coroll. huius propos. tam arcus D K, ad totum circumferentiam A B C D, quam arcus H L, ad totum circumferentiam E F G H; a erit & ut arcus D K, ad totum circumferentiam A B C D, ita arcus H L, ad totum circumferentiam E F G H, ac proinde arcus D K, H L, similes erunt. Quod est propositum.

a 11. quinti.

BREVIVS idem confirmabitur hoc modo. Quoniam arcubus D K, H I, insistunt in centro I, anguli æquales, immò iidem; erunt ex scholio propos. 22. lib. 3. arcus D K, H L, similes: ac proinde ad totas circumferentias eandem proportionem habebunt, & paulò antè ostensum est.

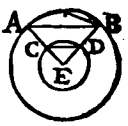
EADEM ratione ostendemus, arcus B A K, F E L, similes esse, id est, habere ad totas circumferentias eandem proportionem.

SED

SED placet etiam hic demonſtrare lemma, quod ad propoſ. 6. lib. 3. Theodoſij propoſuimus, cùm ad multa alia conducat. Illud autem eſt eiuſmodi.

ÆQVALES rectæ lineæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maiorq; eſt arcus minoris circuli, quàm vt ſimilis ſit arcui circuli maioris.

SINT circuli inæquales A B, C D, circa idem centrum E, deſcripti. Ducantur autem ex E, duæ rectæ & vtrumq; E A, E B, ſecantes circulos in A, B, & C, D, punctis; eruntq; arcus A B, C D, ſimiles, & proximè demonſtrauimus. Et quoniam rectæ E A, E B, ſectæ ſunt in C, D, proportionaliter, quòd tam E A, E B, quàm E C, E D, inter ſe æquales ſint; a erunt duæ rectæ A B, & C D, parallelæ; atq; ideo triangula E A B, E C D, ex coroll. propoſ. 4. huius lib. ſimilia erunt. b Erit igitur vt E A, ad A B, ita E C, ad C D. Eſt autem E A, maior quàm E C. c Igitur & A B, maior erit quàm C D. Accommodetur ergo ipſi C D, in circulo A B, æqualis B F; eritq; ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. arcus A B, maior arcus F B. Quare cùm arcus C D, arcui A B, ſimilis ſit; erit arcus C D, maior, quàm vt ſimilis ſit ipſi F B. Æquales igitur rectæ C D, B F, ex circulis inæqualibus A B, C D, arcus inæquales auferunt, maiorq; eſt arcus C D, circuli minoris, quàm vt ſimilis ſit arcui F B, circuli maioris. Quod eſt propoſitum.



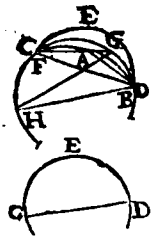
a 2. ſexti.
b 4. ſexti.
c 14. quinti.

HINC perſpicuum eſt, multò magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem, quàm vt ſimilis ſit ei, quem ex circulo maiore aufert linea minor. Cum enim recta C D, æqualis ipſi B F, auferat arcum C D, maiorem, quàm vt ſimilis ſit arcui F B; multò magis linea maior quàm C D, auferet maiorem arcum, quàm vt ſimilis ſit arcui F B, cùm illa maiorem arcum abſcindat, quàm C D, vt in ſcholio propoſ. 28. lib. 3. oſtendimus.

HÆC autem demonſtratio propoſitum tantum colligit, quando arcus abſciſſi ſunt ſemicirculo minores, quales ſunt B F, C D, vt ex ipſa demonſtratione conſtat. Nam aliàs non conſtitueretur angulus in E, centro communi: quòd tamen ad demonſtrationẽ requiritur. Verum nihilominus erit, ſi arcus ſemicirculo minor circuli minoris maior eſt, quàm vt ſimilis ſit arcui ſemicirculo minori circuli maioris, multò maiorem eſſe arcum ſemicirculo maiorẽ circuli minoris, quàm vt ſimilis ſit arcui ſemicirculo minori circuli maioris. Quod ſi quando contingat, rectam C D, ex minori circulo auferre ſemicirculum, vt quando eſt diameter circuli; liquidò conſtat, ſemicirculum minoris circuli maiorem eſſe, quàm vt ſimilis ſit arcui ſemicirculo minori circuli maioris; neq; opus tunc erit alia demonſtratione.

HINC etiam nullo negotio ostendemus, æquales rectas lineas ex circulis inæqualibus auferre arcus simpliciter, & absolutè inæquales, ita vt arcus minoris circuli simpliciter maior sit arcûs circuli maioris, & non solùm maior, quàm vt similis sit. Sint enim rectæ lineæ CD, BF, æquales, auferat quæ CD, arcum minoris circuli CED, & FB, arcum circuli maioris FGB. Dico simpliciter arcum CED, maiorem esse arcu FGB. Congruente enim recta CD, recta FB, cadet necessariò arcus CED, extra arcum FGB; atque idcirco arcus CED, maior erit arcu FGB, cùm ille hunc totum intra se contineat, sintque ambo arcus in eandem partem cavi, atque eadem extrema puncta habeant, vt vult Archimedes in suppositionibus ante lib. 1. de sphæra & cylindro. Neque verò arcus CED, arcui FGB, congruet, aut intra ipsum cadet. Nam si dicatur congruere, congruet etiam tota circumferentia circuli CED, toti circumferentiæ circuli FGB, atque adeò æquales erunt circuli. quod est absurdum, cùm inæquales ponantur. Si verò arcus CED, dicatur cadere intra arcum FCB, cuiusmodi est arcus CAD; quoniam vt paulò antè ostendimus, arcus CED, id est, CAD, maior est, quàm vt similis sit arcûs FGB; sumatur arcus BFH, arcui CAD, similis, atque ideo maior arcu FGB: Assumpto autem in arcu CAD, puncto A, & ducantur rectæ AF, AB, productaque recta FA, donec arcum FGB, secet in G, ducantur rectæ GH, GB. (In figura per incuriâ recta GB, ducta non est: igitur studiosus lector eam ducat, oportet.) Itaque quoniam arcus CAD, HFB, similes sunt; erunt anguli CAD, HGB, in illis segmentis existentes æquales. a Quia verò angulus CAD, angulo CGB, maior est, externus interno; & angulus CGB, angulo HGB, maior quoque, totum parte; erit multò maior angulus CAD, angulo HGB, quod est absurdum. Ostensus enim est æqualis. Non ergo arcus CED, cadet intra arcum FGB; sed neque ei congruit, vt demonstratum est. Cadet ergo extra; atque ideo maior erit arcus CED, arcu FGB, vt dictum est. Quod est propositum.

a 16. primi.



EX quo liquidò constat, multò magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem simpliciter eo, quem minor linea ex circulo maiore abscindit.

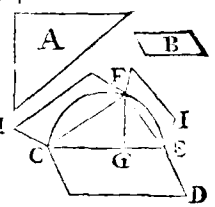
QVONIAM verò Euclides multa dixit de inuentione linearum proportionalium, nihil verò de superficierum, vel planorum proportionalium inuestigatione nobis præscripsit; non absre me facturum existimo si nonnulla problemata, atque theoremata, quorum multa circa inuentionem superficierum proportionalium versantur, scitu nè iniucunda, loco appendicis, partim ex peritis Geometris, partim ex inuentis propriis, huic sexto libro annectam: quippe qua ex demonstratis ab Euclide facilè negotio deducantur. Hinc autem exordiũ capiemus.

A DA-

I.

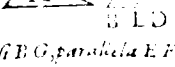
A DATO rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, vt & ablatum, & id quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato similiterq; positum.

SIT ex rectilineo *A, auferenda imperata pars, quæ similis sit, similiterq; posita rectilineo* ***B, relinquatq;*** *rectilineum eidem* ***B.*** *simile, & similiter positū. a Constituatur rectilineum* C D, *æquale quidem ipsi* ***A,*** *simile verò, & similiter positum ipsi* ***B;*** *superq; ipsius latus* C F, *semicirculus describatur* C F E. *b Deinde ablata parte tertia* G E, *imperatæ* (*videlicet, ex* C E, *agatur* G I, *ad* C E, *perpendicularis, connectantur q; recta* C F, E F, *c super quas constituantur rectilinea* F H, F I, *similia similiterq; posita ipsi* C D. *Dico igitur factum esse, quod iubetur.* *d Cùm enim angulus* C F E, *rectus sit (quippe qui in semicirculo existat;* *e erit rectilineum* C D, *æquale rectilineis* H F, F I, *atq; adeo si auferatur rectilineū* F I, *simile similiterq; positū ipsi* B, *ex rectilineo* C D, *hoc est, ex æquali* ***A,*** *relinquetur rectilineū* H F, *simile quoq; ipsi* B, *similiterq; positum. Quòd autem rectilineū ablatum* F I, *sit tertia pars rectilinei* C D, *ita ostendetur. f Quantum est, vt recta* C G, *ad* G F, *ita recta* C E, *ad* F E; *g quod triangula* C G F, C F E, *sint similia. Habet autem* C G, *ad* G E, *proportionem data, (dictam proportionis* C G, *ad* G F, *propterea quod proportionales sint tres rectæ* C G, G F, G E, *ex coroll. propos. 8. huius libri) h* *item rectilineum* H F, *ad rectilineum* F I, *proportionem quoq; habet duplicatam proportionis lateris homologorum* C F, F E; *Est vt recta* C G, *ad* G E, *ita rectilineum* H F, *ad rectilineū* F I; *quandoquidem hæ proportiones eadem æqualium proportionum replicatæ sunt. Componendo igitur erit, vt* C E, *ad* G E, *ita duo rectilinea* H F, F I, *simul, hoc est, rectilineum* C D, *quod est illis æquale, ad rectilineum* F I. *Est autem* C E, *ipsius* G E, *tripla, per constructionem. Igitur & rectilineum* C D, *tripluum erit rectilinei* F I. *Ac præterea hoc illius tertia pars existet. Quod est propositum.*



a 29. sexti.
b 4. sexti.
c 18. sexti.
d 31. sexti.
e 14. quinti.
f 4. sext.
g 8. sexti.
h 19. vel 20. sexti.

QVOD *si pars imperata, nempe tertia, simpliciter sit auferenda, fiet id breuius, hoc modo.* *i Rectilineum datum* ***A,*** *reperiatur ad parallelogrammum* G D, *æquale, & ex latere* B D *asseratur* D E, *tertia pars imperata. k Per* F, *agatur ipsi* B G, *parallela* E F. *Dico* D F, *tertiam esse partem ipsius* D G, *hoc est, rectilinei datæ* ***A.*** *Cùm enim sit* k *vt* D E, *ad* D B, *ita* D F, *ad* D G. *Sit autem per constructionem* D E, *ipsius* D B *pars tertia, erit & D F, ipsius D G tertia pars. Quod est propositum.*



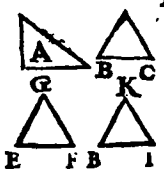
i 45. primi.
k 2. sext.

II.

DVOBVS datis rectilineis, tertium proportionale inuenire.

SINT data duo rectilinea A, & BCD, quibus inueniendum

a 25 sexti. *sit tertium proportionale.* a *Constituatur ipsi A,*



rectilineum aquale EFG, simile verò similiterq; positum ipsi BCD. Deinde lateribus homologis

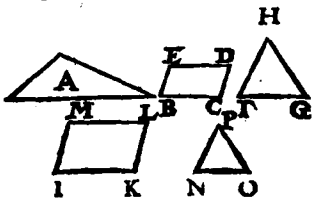
b 11. sexti. *EF, BC,* b *inueniatur tertia linea proportionalis HI;* c *super quam constituatur rectilineum*

c 18. sexti. *HIK, simile similiterque positum ipsis EFG, BCD. Dico HIK, esse tertium proportionale. Cùm*

d 22 sexti. *enim proportionales sint recta EF, BC, HI;* d *erunt & rectilinea EFG, BCD, HIK, ab illis descripta (cùm sint similia, similiterq; posita) proportionalia. Cùm ergo EFG, per constructionem, aquale sit ipsi A; erunt & rectilinea A, BCD, HIK, proportionalia. Quod erat propositum.*

III.

TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire.



TRIA rectilinea data sint A, BCDE, FGH, quibus quartum sit inueniendum proportionale.

e 25 sexti. e *Constituatur rectilineum IKLM, aquale quidem ipsi A, simile verò similiterque positum ipsi BCDE. Tribus deinde rectis IK, BC, FG,*

f 12. sexti. f *inuenta quarta proportionali NO;* g *constituatur super NO, rectilineum*

g 18. sexti. *NOP, ipsi FGH, simile similiterq; positum. Dico NOP, rectilineum esse quartum proportionale. Cùm enim quatuor recta IK, BC, FG, NO, sint proportionales;*

h 22. sexti. h *erunt & rectilinea similia similiterq; posita ab ipsis descripta IL, BD, FGH, NOP, proportionalia. Cùm igitur IL, constructum sit aquale ipsi A; erunt & quatuor rectilinea A, BD, FGH, NOP, proportionalia. Quod erat propositum.*

IIII.

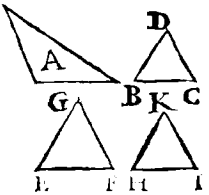
i 25. sexti. DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire.

k 13. sexti. *SINT duo rectilinea A, BCD, quibus medium inueniendum*

l 22 sexti. *est proportionale.* i *Constituatur rectilineum EFG, aquale ipsi A, & simile similiterq; positum ipsi BCD. Duabus deinde rectis EF, BG,* k *inuenta media proportionali HI;* l *constituatur super HI, re-*

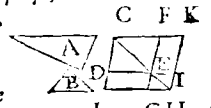
ctili-

rilineum H I K, simile similiterq; positum ipsis E F G, B C D. Dico H I K, medium esse proportionale quæsitum. Cum enim proportionales sint tres rectæ E F, H I, B C, a *erunt quoque rectilinea ab ipsis descripta E F G, H I K, B C D, proportionalia, cum sint similia similiterq; posita. Cum ergo E F G, constructum sit æquale ipsi A; erunt quoq; rectilinea A, H I K, B C D, proportionalia, hoc est, erit vt A, ad H I K, ita H I K, ad B C D: ac proinde H I K, medium proportionale erit inter A, & B C D. Quod erat propositum.*



a 22. sexti.

ALITER. Sit rursus inter rectilinea A, & B, perquirendum medium proportionale. b *Constituatur ipsi A, æquale parallelogrammum quodcunq; C D E F, ipsi vero B, æquale parallelogrammum E G H I, simile vero similiterq; positum ipsi C D E F, Connectantur*q; *hæc parallelogramma ad angulos æquales, vt D E, E I, efficiant* c *vnam lineam rectam, ac propterea per ea, quæ ad propos. 15. lib. 1. demonstrauimus, tota quoq; linea recta componatur ex F E, E G; perficiaturq; totum parallelogrammum K L. Dico vtcunlibet E K, vel L L, medium esse proportionale inter D F, G I, hoc est, inter A, & B. Cum enim similia sint similiterq; posita D F, G I; erit vt D E, ad E F, ita G H, ad H I, hoc est, ita E I, ad E G,* d *quod rectæ E I, E G, rectis G H, H I, æquales sint. Permutando ergo vt D E, ad E I, ita I E, ad E G,* e *Vt autem D E, ad E I, ita est D F, ad E K, & vt F E, ad E G, ita F K, ad G L. Igitur vt D F, ad E K, ita E K, ad G L, ac proinde E K, medium proportionale erit inter D F, G I, hoc est, inter A, & B. Quod erat propositum.*



b 45. primi.

c 25 sexti.

d 34. primi.

e 15. sexti.

QVOD etiam in hunc modum conficiemus. Ponatur f *C M, G I, similia sint, similiterq; posita, & consistent ea circa eandem diametrum. Quare complementa E K, E L, æqualia erunt. Vt autem D E, ad E K, ita est E L, ad G I,* g *quod vtraq; vtriq; proportio eadem sit proportionis D E, ad E I. Igitur erit, vt D E, ad E K, ita E K, ad G I. Quod erat propositum.*

f 26. sexti.

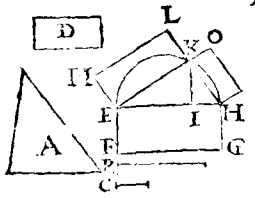
g 1. sext.

V.

DATO rectilineo duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterq; descripta cuicunq; rectilineo, habeantq; inter se proportionem propositam quamcunque.

*SIT datum rectilineum A, dataq; proportio recta B, ad C, oporteat*q; *constituere duo rectilinea, quæ ipsi A, æqualia sint, habeantq; proportionem, quam B, & C, habent, similiterq; posita sint rectilineo cuius D.* h *Constituatur rectilineum E F G H, æquale ipsi A, & simile similiterq; positum ipsi D. Diuiso deinde latere eius E H, in I,*

h 25 sexti.



a 18. sexti.

secundum proportionem B, ad C, ex ijs, quæ ad propos. 10. huius lib demonstrauimus: describatur circa E H semicirculus E K H, & ex I, ducatur ad E H, perpendicularis I K, connectantur q; rectæ E K, H K. a Describantur iam super E K, K H, rectilinea E K L M, K H N O, ipsi E G, vel ipsi D, similia, similiterq; posita; quæ dico æqualia etiam esse

b 31. tertij. c 31. sexti. d 2. sexti. e 19. vel 20. sexti.

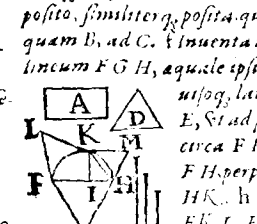
ipsi E G, seu ipsi A habere q; proportionem datam B, ad C. b Cum enim angulus E K H, in semicirculo existens rectus sit, c erunt rectilinea E L, H O, æqualia rectilineo E G, cum sint similia inter se, similiterq; descripta. d Quoniam vero est, vt E I, ad I K, ita E K, ad K H, cum triangula E I K, E K H, similia sint; Est autem E I, ad I H, in proportione duplicata proportionis E I, ad I K, quod tres E I, I K, I H, sint, ex coroll. propos. 8. huius lib. proportionales. e Item E L, ad H O, in proportione duplicata eius, quam habet latus E K, ad latus homologum K H; erit vt E I, ad I H, hoc est, vt B, ad C, ita E L, ad H O. Dato ergo rectilineo A, exhibuimus duo simul æqualia E L, H O, quæ similia sunt, similiterq; posita dato rectilineo D, habentq; proportionem inter se datam B, ad C. Quod erat propositum.

VI.

DATO rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia sint similiterq; descripta, lateraq; eorũ homologa habeãt inter se proportionẽ datã.

DETVR rectilineum A, & proportio rectæ B, ad rectam C; oportet q; constituere duo rectilinea ipsi A, æqualia, & similia ipsi D, proposito, similiterq; posita, quorũ latera homologa proportionem habeãt, quam B, ad C. f *Inuenta ipsis B, C, tertia proportionali E,* g *fiat rectilineum F G H, æquale ipsi A, & simile similiterq; positum ipsi D. Di-*

f 11. sexti. g 25. sexti.



h 18 sexti.

uisoq; latere F H, in l secundum proportionem B, ad E, vt ad propos. 10. huius lib. ostendimus; describatur circa F H, semicirculus F K H; & ex I, ducatur ad F H, perpendicularis I K, connectanturq; rectæ F K, H K. h *Describãtur iam super F K, H K, rectilinea F K L, H K M, ipsi F G H, vel ipsi D similia, similiterque posita. Dico hæc rectilinea æqualia esse ipsi F G H, vel ipsi A, eorumq; latera homologa F K, H K, proportionẽ habere datam rectæ B, ad rectam C.* i *Cum enim angulus F K H, in se-*

i 31. tertij. k 31. sexti. l 4 sexti.

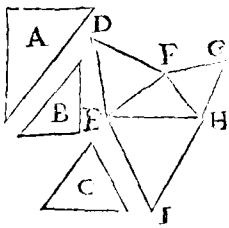
micirculo rectus sit, k *erunt rectilinea F K L, H K M, rectilineo F G H, ideoq; & rectilineo A, æqualia.* l *Quoniam vero est, vt F I, ad I K, ita F K, ad H K, ob similitudinem triangulorum F I K, F K; Est au-*

tem

tem F I, ad I H, in proportione duplicata proportionis F I, ad I K, (quod tres F I, I K, I H, proportionales sint, ex coroll. propos. 8. huius lib.) ac propterea in proportione duplicata proportionis laterum homologorum F K, H F. Item & proportio B, ad E, (aequalis proportionis F I, ad I H, ex constructione) in duplicata est proportione proportionis B, ad C, ex defin. igitur eadem erit proportio F K, ad H K, quæ B, ad C, quando quidem ipsarum duplicatæ proportiones F I, ad I H, & D, ad E, æquales sunt. Constat ergo propositum.

VII.

DVOBVS datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuiuis rectilineo dato.

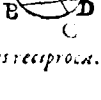


DVO rectilinea data sint A, & B, quibus æquale sit constituendum, simile, similiterq; positum ipsi C. a Fiat ipsi A, æquale D E F, simile autem, similiterq; positum ipsi C. Item ipsi B, æquale constituatur G E H, simile vero eriam C, similiterq; positum. Deinde rectilinea D E F, G E H, ita inter se connectantur, vt latera eorum homologa E F, F H, constituant angulum E F H, rectum, cui subtendantur recta E H, b super quam describatur rectilineum I H E, simile, similiterq; positum ipsis D E F, G E H, hoc est, ipsi C. c Perfectum autem est E H I, æquale esse duobus D E F, G E H, atq; ideo duobus A, & B. Quod est propositum. a 25. sexti. b 18. sexti. c 31. sexti.

BREVIVS. Constituatur parallelogrammum æquale duobus rectilineis A, & B, per ea, quæ ad propos. 45. lib. 1. docuimus. d Si enim huic parallelogrammo construxerimus æquale rectilineum E H I, quod simile sit similiterq; positum alteri dato rectilineo C; Constitutum erit rectilineum E H I, æquale duobus rectilineis A, B, & simile, similiterq; positum rectilineo C. Quod erat faciendum. d 25. sexti.

VIII.

SI in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuò secuerint: erunt segmenta vnius segmentis alterius reciproca.

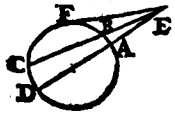


IN circulo A B C D, se mutuo secent rectæ A C, B D, in E. Dico segmenta A E, E C, esse reciproca segmentis B E, E D: Hoc est, esse vt A E, ad E D, ita B E, ad E C. e Comprehendunt enim rectangulum sub A E, E C, comprehendum æquale sit rectangulo sub B E, E D, contento, f erunt latera circa æquales angulos reciproca. Quod est propositum. e 25. tertij. f 14. sexti.

IX.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab

eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum secantes: Erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodē puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectā, quæ circulum secet, & eius segmentum exterius.

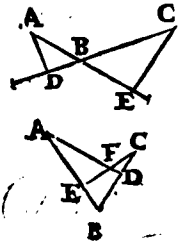


EXTRA circulum ABCD, sumatur punctum E, à quo cadant rectæ EC, ED, secantes circulum in A, & B. Dico rectas EC, EB, esse reciprocas rectis ED, EA: Hoc est, esse, vt EC, ad ED, ita EA, ad EB Vel vt EC, ad EA, ita ED, ad EB. Ducta enim EF, tangente circulum in F, a *erit rectangulum sub EC, EB, quadrato rectæ EF, æquale; Item rectangulum sub ED, EA, eidem quadrato rectæ EF, æquale. Quare & rectangula sub EC, EB, & sub ED, EA, æqualia erunt.* b *Ac propterea latera eorū circa angulos æquales reciproca.* c *Quoniam autem quadrato rectæ EF, æquale est tam rectangulum sub EC, EB, quàm rectangulum sub ED, EA,* d *erunt tam tres rectæ EC, EF, EB, quàm tres ED, EF, EA, proportionales, atq; adeò EF, media proportionalis inter quamlibet lineam, quæ circulum secet, & segmentum eius exterius. Quod est propositum.*

a 36. tert. 3.
b 4. sexti.
c 36. tert. 3.
d 17. sexti

X.

SI duæ rectæ lineæ seſe mutuò secuerint, & à duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuò demittantur: erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum & sectionem, altera verò inter sectionem, & prioris lineæ assumptæ perpendicularem interjicitur, alijs duabus eodem modo inclusis reciprocæ.



DVÆ rectæ AB, CB, seſe mutuò secent in B, & ex terminis A, C, ad ipsas demittantur perpendiculares; AD, quidē ad CB, at verò CE, ad AB; quæ perpendiculares cadant in AB, CB, protractas vltra B, si angulus ABC, fuerit obtusus; in ipsis verò introrsum, si idem angulus acutus fuerit, vt figuræ indicant. Dico rectas AB, BE, (quarum prior interjicitur inter terminum A, & sectionem B; posterior verò inter sectionē B, & perpendicularem CE, quæ nimirum ad ipsam AB, assumptam ducitur) reciprocas esse duabus CB, BD, (quæ inter similes terminos includuntur) hoc est, esse vt AB, ad BC, ita BD, ad BE: Vel vt AB, ad BD, ita BC, ad BE. Cùm enim anguli ABD, ADB, trianguli ABD, æquales sint angulis CBE, CEB, trianguli CBE. (Nam ADB, CEB, recti sunt;

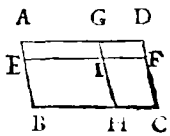
a & ABD,

a & ABD, CBE, ad verticem in priori figura æquales; in posteriori autem anus & idem angulus) erunt triangula ABD, CBE, æquiangula. Quare erit vt AB, ad BD, ita CB, ad BE: Ac propterea b permutando quoque, vt AB, ad BC, ita BD, ad BE. Quod est propositum. a 15. pri. b 4 sex.

PORRO eadem ratione segmenta perpendicularium AD, CE, in posteriori figura se mutuo secantium in F, erunt reciproca. Cum enim triangula AFE, CFD, sint æquiangula; c erit vt AF, ad FE, ita CF, ad FD: Et permutando quoque, vt AF, ad CF, ita FE, ad FD. Quod est propositum. c 4. sex.

XI.

IN parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelæ se mutuo secantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.



IN parallelogrammo ABCD, duæ rectæ EF, GH, lateribus AD, DC, parallelæ se mutuo secent in I. Dico quatuor parallelogramma EG, GF, BI, IC, esse proportionalia. d Cum enim sit vt EI, ad IF, ita EG, ad GF: Item vt EI, ad IF, ita BI, ad IC; e erit quoque vt EG, ad GF, ita BI, ad IC. Quod est propositum. d 1. sex. e 11. quinti.

XII.

OMNE quadrilaterum à duabus diametris se mutuo secantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.



DIVIDANT diametri AC, BD, se mutuo secantes in E, quadrilaterũ ABCD. Dico quatuor triangula AED, CED, AEB, CEB, esse proportionalia. f Erit enim vt AE, ad EC, ita triangulum AED, ad triangulum CED, & triangulum AEB, ad triangulum CEB. g Quare vt triangulum AED, ad triangulum CED, ita triangulum AEB, ad triangulum CEB. Eadem ratione ostendes esse, vt BEA, ad DEA, ita BEC, ad DEC; h cum vtraque proportio eadem sit proportioni BE, ad ED. Constat ergo propositum. f 1. sex. g 11. quinti. h 1. sex.

XIII.

IN triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione, tria latera sunt continuè proportionalia. Et si tria latera trianguli rectanguli sunt continuè proportiona-

lia, perpendicularis ad basim ex angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione.

IN rectangulo triangulo A B C, ex angulo recto A, demissa perpendicularis A D, secet basim B C, in D, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum B D: ac propterea ex theoremate 9. ad propos. 47. lib. 1. latus A B, latere A C, maius. Dico tria latera B C, B A, A C, esse continuè proportionalia. Quoniam enim per hypothesin est, vt B C, ad B D, ita B D, ad D C: a *erit quadratum ex B D, rectangulo sub B C, C D, aequale. Rursus quia ex coroll. propos. 8. huius lib. A C, media proportionalis est inter B C, C D:* b *erit quoque quadratum ex A C, eidem rectangulo, sub B C, C D, aequale. Quare quadrata ex B D, A C, aequalia inter se erunt, ac proinde & rectae ipsa aequales erunt. Est autem ex coroll. propos. 8. huius lib. A B, inter B C, B D, media proportionalis. Igitur eadem A B, media proportionalis erit inter B C, A C, hoc est, erit, vt B C, ad A B, ita A B, ad A C. Quod est propositum.*



a 17. sexti.

b 17. sexti.

SINT deinde tria latera B C, A B, A C, in triangulo rectangulo A B C, continuè proportionalia, hoc est, sit B C, ad A B, vt A B, ad A C, demittaturque perpendicularis A D, ad basim B C. Dico B C, sectam esse in D, extrema ac media ratione. Quoniam enim est, vt B C, ad A B, ita A B, ad A C: Est autem vt B C, ad A B, ita quoque A B, ad B D: quod A B, media proportionalis sit inter B C, B D, ex

c 11. quinti. *coroll. propos. 8. huius lib.* c *erit vt A B, ad A C, ita A B, ad B D:* d *ac proinde aequales erunt A C, & B D.* e *Vt igitur A C, ad C D, ita erit*

d 9. quinti. *B D, ad C D. Sed vt A C, ad C D, ita est B C, ad A C, quod ex coroll. propos. 8. huius lib. A C, sit media proportionalis inter B C, & C D.*

e 7. quinti. f *Igitur erit quoque B C, ad A C, hoc est, ad B D, vt A C, hoc est, vt B D, ad C D: ac propterea B C, in D, secta erit extrema ac media ra-*

f 11. quinti. *tione. Quod est propositum.*

IT A QVE si super datum rectam B C, construendum sit triangulum rectangulum, cuius tria latera continuè proportionalia sint, secanda erit data recta B C, extrema ac media ratione in D. Descripto deinde semicirculo B A C, circa eandem datam B C, erigenda erit ad B C, perpendicularis D A, iungendaque rectae B A, C A. Trian-

g 31. tertij. *gulum enim A B C, rectangulum erit,* g *cum angulus B A C, in semicirculo rectus sit; ac proinde cum perpendicularis A D, secet basim extrema ac media ratione; tria latera continuè proportionalia erunt, vt proximè demonstratum est.*

XIV.

A DATO puncto in latere trianguli lineam rectam ducere,

ducere, quæ triangulum diuidat in duo ſegmenta ſecundum proportionem datam.

SIT triangulum A B C, oporteatque à dato puncto D, in eius latere B C, lineam rectam ducere, quæ triangulum ſecet in duo ſegmenta ſecundum proportionem datam E, ad F. Diuidatur B C, in G, ſecundum proportionem E, ad F, cadatq; primò punctum G, in datum punctum D, & in prima figura, ducatur q; recta D A. a *Quoniam igitur eſt* ut *B D, ad D C, ita triangulum B D A, ad triangulum C D A, ſecabit recta D A, triangulum datum ſecundum proportionem datam B G, ad G C, hoc eſt, E, ad F. Quod erat faciendum.*



a 1. ſeu.

CAD AT deinde punctum G, inter C, & D, ut in ſecunda figura. Ducatur ergo recta D A, cui per G, parallela agatur G H, coniungaturque recta D H. Dico rectam D H, ſecare triangulum datum ſecundum proportionem datam, hoc eſt, eſſe trapezium B D H A, ad triangulum C D H, ut E, ad F, ſeu ut B G, ad G C. Ducta enim recta G A, b *erunt triangula H G A, G H D, æqualia, cum ſint ſuper eandem baſin G H, & inter eaſdem parallelas G H, D A. Addito igitur communi triangulo C G H, fient æqualia triangula C G A, C D H:* c *Ac proinde triangulum A B C, eandem habebit proportionem ad C G A, & ad C D H.* d *Diuidendo igitur, erit ut triangulum B G A, ad triangulum C G A, ita trapezium B D H A, ad triangulum C D H.* e *Eſt autem B G A, ad C G A; ut B G, ad G C. Igitur erit & trapezium B D H A, ad triangulum C D H, ut B G, ad G E, hoc eſt, ut E, ad F. Quod eſt propoſitum.*

a 37.
c 7.
d 17. quinti.
e 1. ſeu.



CAD AT tertio punctum G, inter B, & D, ducatur q; recta D A, cui rurſus per G, agatur parallela G H. Dico igitur rurſus, rectam ductam D H, ſecare triangulum A B C, ſecundum proportionem datam E, ad F, hoc eſt, eſſe triangulum cum B D H, ad trapezium C D H A, ut E, ad F. Ducta enim recta G A, f *erunt, ut prius, triangula H G A, G H D, æqualia; addatoque communi B G H, æqualia fient B G A, B D H.* g *Quare erit A B C, ad B G A, ut ad B D H.* h *Diuidendo ergo erit ut C G A, ad B G A, ita trapezium C D H A, ad triangulum B D H, & conuertendo, ut B G A, ad C G A, ita B D H, ad trapezium C D H A.* i *Eſt autem B G A, ad C G A, ut B G, ad G C. Igitur & B D H, ad trapezium C D H A, erit ut B G, ad G C, hoc eſt, ut E, ad F. Quod eſt propoſitum.*

f 37. prim.
g 7. quinti.
h 17. quinti.
i 11. ſeu

HINC perſpicuum eſt, quenam modo imperata pars ex triangulo ſit auferenda per lineam rectam, quæ à quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam à dato puncto ductam diuidatur triangulum ſecundum proportionem multiplicem, enim denominator

unitate

Vnitate minor sit denominatore partis imperatæ, (& secundum proportionem triplam, si quarta pars imperetur, &c.) factum erit, quod iubetur, & manifestum est. Habebit enim tunc totum triangulum ad segmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator æqualis est denominatori partis propositæ, cum priori denominatori proportionis multiplicis assumpta addatur Vnitas, qua ante deerat.

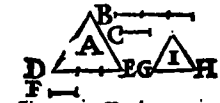
XV.

DATO rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere, maius, vel minus, secundum proportionem datam.



SIT rectilineum datum A, cui simile similiterque positum sit describendum maius, secundum proportionem datam B, ad C. Tribus rectis B, C, & D E, (sit autem D E, vnum latus rectilinei dati quodcunque) a inueniatur quarta proportionalis F. Deinde duabus D E, & F, b inueniatur media proportionalis G H; c super quam ipsi A, describatur rectilineum I, simile, similiterque positum. Dico I, maius esse quam A, secundum proportionem datam B, ad C. Cum enim proportionales sint tres rectæ D E, G H, & F, erit per coroll. propos. 19. vel 20. libri huius, vt D E, prima ad F, tertiam, hoc est, per constructionem, vt B, ad C, ita rectilineum A, super primam ad rectilineum I, super secundam, illi simile similiterque positum. Quod erat faciendum.

a 12. sexti.
b 13. sexti.
c 18. sexti.



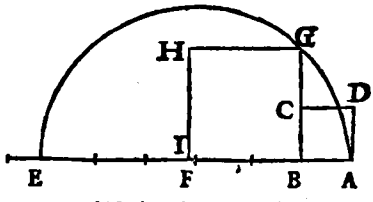
NON secus dato rectilineo A, minus rectilineum I, describemus, illi simile similiterque positum, secundum proportionem datam B, ad C. Veluti in hac figura factum esse cernis. Eadem enim prorsus est constructio, atque demonstratio.

FACILE igitur ex his quadratum quodcunque, vel aliud rectilineum duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus, &c. Atque aliud constituemus, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, vel quinta, &c. seruata nihilominus semper eadem rectilineorum similitudine, quemadmodum quadratorum eadem remanet similitudo. Si namque proportio B, ad C, sumatur vt 1. ad 2. vel 1. ad 3. vel 1. ad 4. &c. Item vt 2. ad 1. vel 3. ad 1. vel 4. ad 1. &c. reliqua verò perficiantur, vt prius; habebitur rectilineum simile similiterque descriptum, quod propositi rectilinei duplum existet, vel triplum, vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertia pars, vel quarta, &c. eius, quod proponitur.

NON videtur autem omittenda praxis Alberti Durери, qua ipse facile duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, seu parallelogrammum quodcunque oblatum. Ex hac enim construemus quoque rectili-

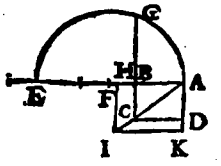
rectilineum ſimile, ſimiliterque deſcriptum cuicunque rectilineo dato; maius, aut minus, ſecundum datam proportionem quamcunque. Tametſi autem Albertus huius praxis nullam affert rationem, ſed eam ſimpliciter proponit; non multum tamen eius demonſtratio à precedenti differt, vt mox oſtendemus.

SIT igitur quadratum A B C D, quintuplicãdum. Producto latere A B, ad partes B, quantumlibet, ſumantur quinque partes ipſi A B, aquales, à puncto B, incipiendo, vſque ad E, vt ſit B E, quintupla ipſius A B. Diuiſa deinde tota A E, biſariam in F, deſcribatur ex F, ad internallum F A, vel F E, ſemicirculus A G E, producaturque latus B C, ad circumferentiam vſque in G. Dico quadratum B G H I, ex B G, deſcriptum, quintuplum eſſe quadrati A B C D. Erit enim per coroll. propoſ. 13. huius lib. B G, media proportionalis inter E B, B A. Igitur erit vt E B, prima ad B A, tertiam, ita B H, quadratum ſecunda, ad A C, quadratum tertia, ex coroll. propoſ. 20. huius lib. Eſt autem E B, per conſtructionem, ipſius A B, quintupla. Igitur & quadratum B H, quadrati A C, quintuplum erit. Quod eſt propoſitum.



QVOD ſi recta B E, ſumatur ſextupla lateris A B, erit & quadratum recta B G, quadrati A B C D, ſextuplum: Si autem B E, fuerit tertia pars ipſius A B, erit & quadratum B H, tertia pars quadrati A C. Deniq; in quacunque proportione ſumatur B E, ad A B, eandem habebit quadratum B H, ad quadratum A C.

SIT rurſus rectangulum A B C D, cui inueniendam ſit ſimile ſimiliterque poſitum, quod duplum ſit ipſius. Ex latere A B, producta ſumatur B E, dupla ipſius A B. Diuiſa deinde tota A E, biſariam in F; & ex F, deſcripto ſemicirculo, vt prius, & producta C B, ad G; erit B G, vnum latus rectanguli quaſiti. Quare ſi abſcindatur A H, æqualis ipſi B G, & per H, agatur ipſi B C, parallela H I, occurrens diametro A C, protracta in I, perficiaturque parallelogrammum H K; a erit H K, ipſi B D, ſimile ſimiliterq; poſitum; quod etiam ait duplum eſſe ipſius B D. Cum enim proportionales ſint tres recta E B, B G, B A, ex corollario propoſ. 13. huius lib. Erit vt prima, ſicut E B, prima ad B A, tertiam, ita rectangulum H K, ſupra A H, ſecundam (ſumptum enim fuit A H, ipſi B G, ſecunda æqualis) ad rectangulum B D, ſupra tertiam A B, quod eſt ſimile ſimiliterque deſcriptum. Quod eſt propoſitum.



a 24. ſexti.

EODEM

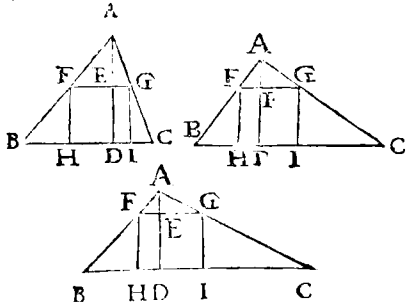
EODEM modo, si supra AB, constitutum fuerit **quodcunq; rectilineum**, *erit quod ex BG, illi simile, similiterque positum describetur, ipsius duplum. Atque in hunc modum semper eam* **proportionem habebit rectilineum ex BG, ad rectilineum simile ex AB, quam habere** *potest recta EB, ad rectam BA, ex constructione.*

PERSPICVVM autem est, hanc praxim & eam cum eius demonstratione à nostra antea tradita non differre, nisi quod **hac simul tradit inventionem** *lineæ mediæ proportionalis. Hanc enim ob causam Albertus coniungit in rectum, & continuum lineas EB,* **BA, quæ proportionem habent datam**, *vt statim, & operatione,* **medianam proportionalem obtineat**, *&c.*

XVI.

IN dato triangulo quocunque quadratum describere.

SIT datum triangulum ABC, acutangulum. **Ex angulo quocunque A, ad BC, perpendicularis demittatur AD, quæ intra triangulum cadet**, ex *scholio propos. 13. lib. 2. Hæc autem in E, ita secetur, per ea, quæ in scholio propos. 10. huius libri docuimus, vt eadem sit proportio AE, ad ED, quæ AD, ad BC. Deinde per* **E, agatur FG**, *ipsi* **BC, parallela**. *Postremo ex F, & G, ipsi* **DE, parallelæ ducantur FH, GI**. *Dico* **FGIH, rectilineum triangulo ABC, inscriptum esse quadratum. Cum enim FG, ipsi BC, sit parallela**; **erit vt BD, ad DC, ita FE, ad FG**, *ex scholio propos. 4. huius lib. & componendo, vt BC, ad DC,* **ita FG, ad EG.**

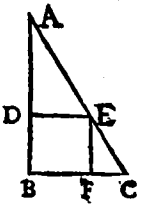


a 24 *sex.* a *Sed vt DC, ad AD, ita est FG, ad AE, quod per* **coroll. propos. 4.**
b 22. *huius lib. triangula ADC, AEG, sint similia.* b *Igitur* **erit ex æquo**,
quinti. *vt BC, ad AD, ita FG, ad AE. Quia vero per* **constructionem est vt**
c 22. *AD, ad EC, ita AE, ad ED,* c *erit rursus ex æquo,* **vt BC, ad BC,**
quinti. *ita FG, ad ED: Est autem BC, ipsi BC, æqualis,* **imò eadem. Et-**
d 34. *quare æqualis est & FG, ipsi ED.* d *Quare cum FG,* **ipsi HI**; &
primi. *FD ipsi GI, æqualis existat*; *Erunt quatuor latera* **FG, GI,**
e 29. *IH, HF, æqualia inter se.* e *Et quia anguli EDH, FHD,* **duobus re-**
primi. **ctis æquales sunt**; *Est autem EDH* **per constructionem, rectus**; **erit &**
FHD, rectus. Quocirca per ea, quæ ad finem 1. lib. 2. **demonstrauimus**, & *reliqui anguli HFG, FGI, GIH, recti* **sunt ita parallelogram-**

logrammo FGIH; Ac propterea FI, quadratum eſt. Quod eſt propoſitum.

NON ſecus idem problema abſoluemus, ſi datum triangulum fuerit rectangulum, vel obtuſangulum, dummodo ex angulo recto, vel obtuſo perpendicularem demittamus, vt in poſterioribus duobus triangulis apparet. Ita enim ſemper cadet perpendicularis AD, intra triangulum, ex ſcholio propoſ. 13. lib. 2.

QVOD ſi in triangulo rectangulo quadratum deſcribere libeat, ita vt duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulum rectum nitantur; diuidemus perpendicularem AB, in D, ita vt eadem ſit proportio AD, ad DB, quæ AB, ad BC, & per D, quidem ipſi BC, parallelam ducemus DE; per E, vero ipſi AB, aliam parallelam EF. a Quoniam igitur eſt, vt BC, ad AB, ita DE, ad AD, quod triangula ABC, ADE, ſimilia ſint, per coroll. propoſ. 4. huius lib. Eſt autem per conſtructionem, vt AB, ad BC, ita AD, ad DB, b erit ex æquo, vt BC, ad BC, ita DE, ad DB: Eſt autem BC, ſibi ipſi æqualis, imò eadem. Æqualis igitur eſt & DE, ipſi DB. Quare vt prius, DEFB, quadratum eſt. Quod eſt propoſitum.



a 4. ſex.

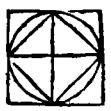
b 22. quinti.

VERVM hoc problemate Commandini multo ingenioſius eſt id, quod ſequitur.

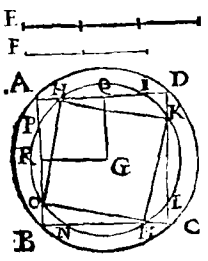
XVII.

INTRA datum quadratum, aliud quadratũ deſcribere in data proportione maioris inæqualitatis. Oportet autem datam proportionem dupla non eſſe maiorem.

SIT quadratum ABCD, intra quod deſcribendum ſit quadratum, ad quod habeat quadratũ ABCD, proportionem eandem maioris inæqualitatis, quam recta E, ad rectam F, quacunq; ea ſit, dummodo maior non ſit, quam dupla. Nam ſi latera quadrati ſecentur biſariam, punctaque diuiſionum rectis iungantur lineis, inſcriptum erit quadratum intra aliud, vt ad finem lib. 4. demonſtrauimus, idem cum eo centrum habens. Et quia circulus intra quadratum ABCD, deſcriptus eſt quadrato illi inſcripto circumſcriptus, vt in hac figura perſpicuum eſt, erit quadratum ABCD, alterius quadrati inſcripti duplum, ex ſcholio propoſ. 9. lib. 4. Cum ergo minus quadratum intra quadratum ABCD, deſcribi nequeat, quam illud, cuius circuli circumſcriptus latera quadrati ABCD, tangit, vt patet: liquido conſtat quadratum ABCD, ad nullum quadratum inſcriptum proportionem poſſe habere dupla maiorem. Sit igitur data proportio E, ad F, minor quam dupla; nimirum ſeſquialtera. Inueniatur ex



propoſ.



propos. 15. huius scholij **quadratum, ad quod habeat datum quadratum A B C D, proportionem datam E, ad F. Eritque eius semidiameter maior, quam semidiameter quadrati, cuius circulus circumscriptus latera quadrati A B C D,** ***tangit, quod nimirum quadrati A B C D,*** **subduplum est, &** *ut diximus, minor vero* **semidiametro quadrati A B C D. Igitur si ex centro G, quadrati dati describatur** **circulus aequalis ei,** *qui circa inuentum* **quadratum describitur, secabit is latera quadrati A B C D, in punctis H, I, K, L, M, N, O, P. Iungantur rectæ H K, K M, M O, O H, relictis quatuor punctis I, L, N, P, in medio. Dico H K M O, esse quadratum in circulo H I K L M N O P, descriptum, atque adeo æquale ei, quod inuentum est, ita** *&* **ut quadratum A B C D, ad quadratum H K M O, habeat datam proportionem, E ad F. Descripto enim circulo circa datum quadratum A B C D, ex centro G, ductisque ex G,** ***ad latera A D, A B,***

a 3. tertij. *perpendicularibus G Q, G R, a sectæ erunt tam* **rectæ A D, A B, quam** *rectæ H I, O P, bifariam in Q, R. Et quia A D,* **A B, æquales sunt,**

b 14. tertij. *b æqualiter distabunt à centro G, propterea que &* **H I, O P, æquales**

c 14. tertij. *ab eodem centro distabunt. c Quare æquales erunt* **H I, O P,** *ideoque & earum semisses Q H, Q I, R O, R P, inter se* **erunt æquales. Sunt** *autem & semisses Q A, Q D, R A, R B, æqualium* **laterum æquales.** *Igitur si illa ab his demantur, reliquæ erunt æquales* **H A, I D, P A,** *O B. Eademque ratione, si ducantur alia perpendiculares* **ad latera** *B C, C D, ostendentur æquales N B, M C, L C, K D, &* **inter se, &** *illis quatuor H A, I D, P A, O B. Item quia æquales* **sunt H I, O P,** *si addantur æquales I D, P A, fient totæ æquales* **H D, A O. Atque** *eadem de causa æquales erunt B M, K C, &* **inter se, & illis duabus** *H D, A O. Itaque quia duo latera A O, A H,* **duabus lateribus D H,** *D K, æqualia sunt, anguloque continent æquales,* **nimirum rectos;**

d 4 pri. *d erunt & bases H K, H O, æquales. Eodemq; modo* **demonstrabuntur** *K M, M O,* **æquales** *& inter se, &* **duabus H K, H O. Æquilatera** *ergo est figura H K M O. Dico &* **rectangulam esse. Cum enim late-**

e 28. tertij. *ra H K, K M, M O, O H, æqualia sint, e erunt &* **quatuor arcus,**

f 30. ter. *quos subtendunt, æquales, ac proinde Quadrantes* **erunt. Semicirculi** *ergo sunt O H K, H K M, K M O, M O H, f ac proinde* **quatuor an-**

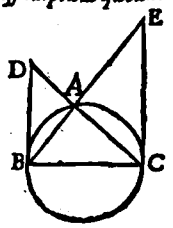
guli H, K, M, O, in illis semicirculis recti erunt. **Igitur H K M O,** *quadratum est, atque adeo inuento quadrato æquale, cum idem circulus utrumque circumscribat. Circulus enim H K M O, descriptus est ad internallum semidiametri circuli inuento* **quadrato circumscripti.** *Quod est propositum.*

SI ad

XVIII.

SI ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eisdem extremis per vnum idemque punctum circumferentiæ duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus: erit rectangulum comprehensum sub vtralibet secantium, & eius segmento interiore, quadrato diametri æquale.

HÆC propositio est Cardani lib. 16. de Subtilitate cap. 1. sicut & quæ sequitur. Vtramque autem demonstrauit Io. Baptista Benedictus. Sit ergo circulus A B C, cuius diameter B C, ad quam in B, C, excitentur duæ perpendiculares B D, C E, ac per assumptum quodvis punctum A, in circumferentia ex eisdem punctis B, C, eductæ rectæ B A, C A, secent perpendiculares in E, D. Dico tam rectangulum sub E B, B A, quam sub D C, C A, quadrato diametri B C, æquale esse. Quoniam enim in triangulo rectangulo B C E, ex angulo recto C, demissa est C A, ad basin B E, perpendicularis; a quod angulus B A C, in semicirculo rectus sit: erit ex coroll. propos. 8. huius lib. B C, media proportionalis inter E B, B A. Quare b rectangulum sub extremis E B, B A, æquale erit quadrato mediæ B C. Eademque ratione eidem quadrato æquale erit rectangulum sub D C, C A: ac propterea quod B C, media quoque proportionalis est inter D C, C A, ex eodem coroll. propos. 8. huius lib. Constat ergo id, quod proponitur.



a 1. tertij.

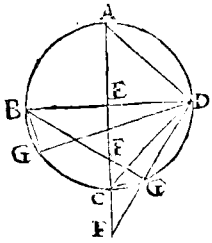
b 17. sexti.

XIX.

SI in circulo duæ diametri se se ad rectos angulos secent, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque secans circumferentiam, & alteram diametrum siue productam, siue non productam: erit rectangulum comprehensum sub duobus segmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum punctum prioris diametri, & secundam diametrum, alterum vero inter idem punctum extremum, & circumferentiam interijcitur, æquale quadrato intra circulum descripto.

IN circulo A B C D, cuius centrum E, secant se ad angulos rectos diametri A C, B D, ducaturque ex puncto D, recta vtcunque D F,

secans diametrum A C, in F, & circumferentiam in G. Dico rectangulum sub F D, D G, quadrato intra circulum descripto esse aequale. Ductis enim rectis D C, C G, erunt triangula D C F, D C G, aequiangula inter se. Nam angulus C D F, communis est, & angulus D C F, angulo D G C, aequalis: a ac proinde & reliquus D F C, reliquo D C G, aequalis. Quod autem anguli D C F, D G C, aequales sint, sic ostendemus. Si punctum quidem F, est intra circulum;



a 32. primi.

b 27. tertij. b *erunt anguli D C F, D G C, insistentes quadrantibus aequalibus A D, D C, aequales: Si verò punctum F, est extra circulum, ducta recta A D,* c 27. tertij. *erunt anguli D A C, D C A, insistentes quadrantibus aequales:* d 22. tertij. d *sed tum D A C, D G C, quam D C A, D C F, aequales sunt duobus rectis. Igitur ablatis aequalibus D A C, D C A, reliqui D G C,* e 13. pri. *D C F, aequales quoque erunt. Quam ob rem, cum triangula D C F,* f 4. sex. *D C G, aequiangula sint;* f *erit vt D F, ad D C, ita D C, ad D G: hoc* g 17. sexti. *est, tres lineae D F, D C, D G, continuè proportionales erunt.* g *Igitur rectangulum sub extremis D F, D G, aequale est quadrato mediae D C, hoc est, quadrato intra circulum descripto, cum D C, latus sit quadrati circulo inscripti, vt constat ex propos. 6. lib. 4. Quod est propositum.*

h 31. tertij. *ALITER. Ducta recta B G,* h *erit angulus B G D, in semicirculo rectus; atque idcirco duo triangula B G D, D E F, cum habeant angulos rectos B G D, D E F, & angulum B D G, vel E D F, commu-*
i 32. pri. *nem,* i *aequiangula erunt.* k *Igitur erit, vt D F, ad D E, ita D B, ad*
k 4. sex. *D G.* l *Rectangulum ergo sub D F, D G, aequale erit rectangulo sub*
l 16. sex. *D B, D E.* m *Sed rectangulo sub D B, D E, aequale est quadratum rec-*
m 17. sexti. *ta A D, hoc est, quadratum circulo inscriptum; propterea quod ex coroll. propos. 8. huius lib. A D, media proportionalis est inter D B, D E,*
n 31. tertij. *vt patet, si ducatur recta A B.* n *Fiet enim triangulum rectangulum B A D, & ex angulo recto perpendicularis demissa erit A E. Igitur & rectangulum sub D F, D G, eidem quadrato rectae A D, aequale erit. Quod est propositum.*

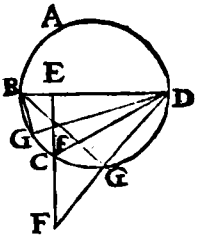
VNIVERSALIVS hoc ita proponetur.

SI in circulo à quouis puncto diametri ad diametrum perpendicularis excitetur, ad quam ex alterutro terminorum diametri duae rectae ducantur, vna ad eius interfectionem in circumferentia, altera vero vt libet, secans circumferentiam in alio puncto: Erit rectangulum sub segmentis huius posterioris lineae, quorum vnum sit inter praedictum terminum, & perpendicularem, alterum vero inter eundem terminum, & circumferentiam, aequale

quadrato

quadrato prioris rectæ inter eundem terminum, & circumferentiam, seu perpendicularem interceptæ.

IN circulo enim A B C D, ad diametrum B D, sit perpendicularis E F, secans circumferentiam in C, iungantur q; rectæ D C, D F, quarum posterior perpendicularem E F, secet in F, & circumferentiam in G. Dico rectangulum sub D F, D G, æquale esse quadrato D C. Iunctæ enim rectæ B G, erunt triangula B G D, F D E, æquiangula, propter angulos rectos G, E, & communem angulum F D E. a Igitur erit, vt F D, ad D E, ita B D, ad D G. b Quare rectangulum sub F D, D G, rectangulo sub D E, B D, æquale erit: c Sed hoc æquale est quadrato D C; quod ex coroll. propos. 8. huius, D C, sit media proportionalis inter B D, D E: quia ducta recta B C, d angulus, B C D, foret rectus in semicirculo. Igitur & rectangulum sub F D, D G, quadrato D C, æquale erit. Quod est propositum.



a 4. sexti.
b 16. sexti.
c 17. sexti.
d 31. tertij.

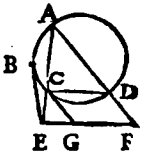
COROLLARIVM.

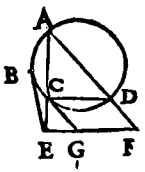
HINC fit, priorem lineam D C, esse mediam proportionalem inter posterioris segmenta F D, D G, quorum vnum est inter terminum D, & perpendicularem, alterum vero inter eundem terminum, & circumferentiam.

XX.

DATO circulo, & duobus punctis siue extra circulum, siue intra, dummodo neutrum sit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam secant, parallela sit rectæ data duo puncta connectenti.

HOC problema non minus acutum quam curiosum in tres propositiones Pappus distribuit: quod nos in vnam redigentes multo clarius demonstrabimus. Sit ergo circulus A B C D, & primum duo data puncta E, F, extra circulum, quæ per rectam E F, coniungantur. Si igitur ex E, F, ducenda sint rectæ ad aliquod punctum concauæ circumferentiæ, &c. ita agemus. Ex E, ducatur recta E B, tangens circulum in B, & duabus E F, E B, tertia proportionalis inuentatur, cui æqualis sit E G, cadatque primum G, punctum inter E, & F, quod fit, quando E F, maior est, quam E B. Ducta igitur G C, recta circulum

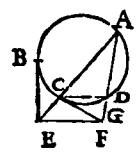




tangente in C, versus priorem tangentem E B, ducatur ex E, per C, recta secans concauam peripheriam in A, iungaturque recta A F, secans circumferentiam in D. Dico ductam rectam C D ipsi E F, parallelam esse. Quoniam enim tres rectæ E F, E B, E G, continuè proportionales sunt, a erit rectangulum sub E F, E G, quadrato ex E B, æquale: b Est autem eidem quadrato ex E B, æquale rectangulum sub E A, E C, igitur rectangulum sub E A, E C, æquale erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, G, F, circulus describi poterit. c Duo ergo anguli C A F, C G F, oppositi in quadrilatero A C G F, intra eum circulum descripto æquales sunt duobus rectis, ideoque duobus angulis ad G, d qui duobus etiam rectis æquales sunt, æquales. Dempto igitur communi C G F, erit reliquus C G E, reliquo A, æqualis: e Est autem & angulus D C G, angulo A, in alterno segmento æqualis. Igitur anguli D C G, C G E, inter se æquales erunt; atque ideo, cum sint alterni, f rectæ C D, E F, parallelæ erunt. Quod est propositum.

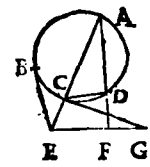
a 17. sexti. b 36. tertij. c 32. tertij. d 13. primi. e 32. tertij. f 27. primi.

C A D A T deinde punctum G, in punctum F, quod accidit, quando E F, ipsi E B, æqualis est. Ducta igitur rursus recta G C, circulum tangentem C, versus priorem tangentem E B, ducatur ex E, per C, recta concauam peripheriam secans in A, iungaturque recta A F, secans circumferentiam in D. Dico rursus ductam rectam C D, ipsi E F, esse parallelam. Quoniam enim æquales sunt E B, E F; g estque rectangulum sub A E, E C, quadrato ex E B, æquale: erit quoque idem rectangulum quadrato sub E F, æquale. Quare h si circa triangulum A C F, circulus describatur, cum eum secet recta E A, recta autem E F, eidem applicetur, i tanget recta E F, eum circulum. k Angulus ergo E F C, angulo A, in alterno segmento illius circuli æqualis erit: l Est autem & angulus F C D, eidem angulo A, in alterno segmento circuli A B C D, æqualis. Igitur æquales inter se erunt anguli E F C, F C D: qui cum sint alterni, m erunt rectæ C D, E F, parallelæ. Quod est propositum.



g 36. tertij. h 5. quarti. i 37. tertij. k 32. tertij. l 32. tertij. m 27. primi.

C A D A T tertio punctum G, ultra F, quod contingit, quando E F, minor est quam E B. Facta igitur eadem constructione, quoniam tres rectæ E F, E B, E G, continuè proportionales sunt, n erit rectangulum sub E F, E G, quadrato ex E B, æquale: o Est autem eidem quadrato ex E B, æquale rectangulum sub A E, E C. Igitur rectangulum sub E F, E G, hoc est, sub E G, E F, rectangulo sub E A, E C, æquale erit: ac

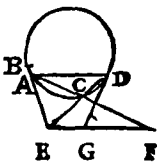


n 17. sexti. o 36. tertij.

erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, F, G, circulus describi poterit. a Duo ergo anguli A, G, in eodem segmento C A G F, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta C F, inter se aquales erunt: b Est autem angulus G C D, angulo A, in alterno segmento dati circuli A B C D, aqualis. Igitur idem angulus G C D, angulo G, aqualis erit: ac proinde, cum duo hi anguli sint alterni, c parallela erunt C D, E F. Quod est propositum. a 21. tertij. b 32. tertij. c 27. primi.

QVOD si à principio ex puncto F, ducta fuisset linea circulum tangens, & reliqua fierent, vt prius, inueniretur idem omnino punctum A: quia nullum aliud punctum absolnere potest problema. Concipiatur enim mente quodcunque aliud punctum H, prope A, inter A, & D. (h illud punctum H, atramento signaueris, facilior erit demonstratio, quod etiam de aliis punctis H, mente concipiendis intelligatur, nec non de puncto I, in vltima figura) Igitur recta F H, secabit circulum supra D, at verò recta E H, eundem infra C, secabit; ac propterea recta contingens puncta sectionum rectam C D, secabit. Producta ergo secabit quoque illius parallelam E F. Non igitur ipsi E F, parallela erit. Contrarium accidet, si punctum H, sumatur inter A, & C. Nam recta F H, cadet infra D, & E H, supra C, &c.

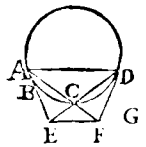
SI verò ex eisdem punctis datis E, F, ducenda sint duo recta ad aliquod punctum connexa circumferentiæ, quæ producta secent concauam peripheriã in duobus punctis, ita vt recta per ea transiens sit parallela rectæ puncta E, F, connectenti, hoc modo procedemus. Ducta recta E B, circulum tangente in B, inueniatur duabus rectis E F, E B, tertia proportionalis E G, cadatque primum G, punctum inter E, F. Ducta igitur ex G, recta G D, tangente circulum in D, non tamen versus priorem tangentem E B, ducatur E D, secans circumferentiam in C, puncto, per quod recta eiiciatur ex F, secans circumferentiam in A. Dico rectam A D, ductam esse rectæ E F, parallelam: Quoniam enim tres rectæ E F, E B, E G, continuè sunt proportionales, d erit rectangulum sub E F, E G, quadrato ex E B, aquale: e Est autem & rectangulum sub D E, E C, eidem quadrato ex E B, aquale. Igitur aqualia inter se erunt rectangula sub E F, E G, & sub E D, E C: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta C, D, F, G, circulus describi potest. f Duo ergo anguli C D G, & F, in eodem segmento C D F G, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta C G, inter se erunt aquales. g Est autem angulus C D G, angulo A, in alterno segmento dati circuli A B C D, aqualis. Igitur & angulus F, angulo A, alterno aqualis erit, h ideoque parallela erunt A D, E F. Quod est propositum.



d 17. sexti. e 36. tertij. f 21. tertij. g 32. tertij. h 17. primi.

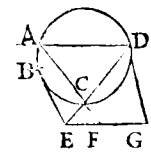
CADAT deinde punctum G, in F. Ducta igitur rursus recta GD, tangente circulum in D, non tamen versus priorem tangentem EB, ducatur recta ED, secans circumferentiam in C, puncto per quod recta ducta ex F, secet circumferentiam in A. Dico ductam rectam AD, rectæ EF, parallelam esse. Cum enim æquales sint EB, EF, (quod sit EF, ad EB, & EB, ad EF,) erunt earum quadrata æqualia: Est autem rectangulum sub ED, EC, quadrato ex EB, æquale. Igitur & quadrato ex EF. Quare ergo, si circa triangulum CDF, circulus describatur, recta ED, cum secat, & EF, applicata est, tanget EF, cum circulum. Angulus ergo EFC, angulo FDE, in alterno segmento eius circuli æqualis erit: Est autem angulus FDE, angulo A, in alterno segmento circuli ABCD, æqualis. Igitur & anguli EFC, eidem angulo A, alterno æquales erunt. Quare parallelæ erunt AD, EF. Quod est propositum.

a 5. quarti.
b 37. tertij.
c 32. tertij.
d 32. tertij.
e 27. primi.



CADAT tertio punctum G, ultra F. Facta ergo eadem constructione, cum tres rectæ EF, EB, EG, sint continuè proportionales, erit rectangulum sub EF, EG, sive sub EG, EF, æquale quadrato ex EB: Est autem eidem quadrato æquale rectangulum sub ED, EC. Igitur rectangulum sub EG, EF, rectangulo sub ED, EC, æquale erit, propterea que ex scholio propos. 36. lib. 3. circa quatuor puncta C, D, G, F, circulus potest describi. Duo ergo anguli EDG, CFG, oppositi in quadrilatero CDGF, intra eum circulum descripto æquales erunt duobus rectis, ac proinde æquales duobus angulis ad F, si quis etiam duobus sunt rectis æquales. Dempto ergo communi CFG, reliquus CDG, reliquo CFE, æqualis erit: Est autem angulus GDC, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus CFE, eidem angulo CAD, alterno æqualis erit: atque idcirco parallelæ erunt AD, EF. Quod est propositum.

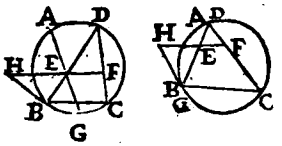
f 17. sexti.
g 36. tertij.
h 22. tertij.
i 13. pri.
k 32. tertij.
l 27. primi.



QVOD si à principio ex F, duceretur linea circulum tangens, & alia fierent, ut prius, inueniretur idem omnino punctum C, eo quod nullum aliud possit problema conficere. Nam sit aliud punctum H, quodcunque tuxta C, mente conceptum inter A, & C. Cadet ergo recta FH, infra A, & recta EH, supra D. Recta igitur connectens puncta sectionum secabit rectam AD; ac proinde, ut supra dictum est, ipsi EF, parallela esse non potest. Si punctum H, sumptum foret inter D, & C, caderet FH, recta supra A, & recta EH, infra D, &c.

SED sint iam data puncta E, F, intra circulum ABCD. Ducatur recta

da recta A G, per E, vtcunque, inueniatur tribus rectis E F, E A, E G, quarta proportionalis, cui æqualis ſit E H, (cadetque neceſſario punctum H, extra circulum a Quoniam enim rectangulum ſub A E, E G, ſecunda & tertia, æquale eſt rectangulo ſub E F, E H, prima ſexti. & quartæ; deſcribi poterit circulus circa 4. puncta A, F, G, H, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 3. ſecans circulum A B C D, in A, G. Cum ergo eius arcus per F, tranſiens ſit intra hunc circulum, erit alter arcus per H, tranſiens, extra: b quandoquidem circulus circulũ in duobus tantum punctis ſecat, ac proinde circulus per A, F, G, deſcriptus poſt puncta A G, extra circulum cadet; ideoque punctum H, in eo circulo exiſtens extra circulum cadet) ducaturque H B, circulum tangens in B. Ducta enim recta ex B, per E, ſecante circumferentiam in D, & ex D, per F, recta ſecante circumferentiam in C; dico ductam rectam B C, parallelam eſſe rectæ E F. Quia enim ita eſt E F, ad E A, vt E G, ad E H, c erit rectangulum ſub E F, E H, æquale rectangulo ſub E A, E G: d Eſt autem rectangulum ſub E A, E G, æquale rectangulo ſub E D, E B. Igitur & rectangulum ſub E F, E H, eidem rectangulo ſub E D, E B, æquale erit: ac propterea ex ſcholio propoſ. 35. lib. 3. circa quatuor puncta B, H, D, E, circulus poterit deſcribi. e Quare duo anguli H B D, & D F H, in eodem ſegmento D F B H, illius circuli, cuius chorda eſſet ducta recta D H, æquales erunt. f Eſt autem angulus H B D, angulo C, in alterno ſegmento dati circuli A B C D, æqualis. Igitur & angulus D F H, angulo eidem C, æqualis erit, externus interno. g Parallelæ ergo ſunt rectæ B C, E F. Quod eſt propoſitum.



b 10. tertij.

a 16. ſexti.

c 16. ſexti.

d 35. tertij.

e 21. tertij.

f 32. tertij.

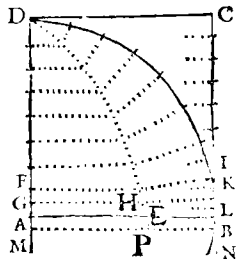
g 28. primi

QVOD ſi contingat, tangentem H B, cadere in punctum G, non erit ducenda alia linea B D, ſed A G, quæ in principio ducta eſt, propoſitum concludet, vt perſpicuum eſt in ſecunda figura.

I A M. ſi ſolutio problematis inciperet à puncto F, non autem ab E, reperiretur idem omnino punctum D; quod nullo alio problema confici poſſit. Si enim ſumatur quodcunque aliud punctum I, prope D, inter D, & C, cadet recta F I, infra C, & E I, ſupra B. Recta ergo connectens ſectionum puncta rectam B C, ſecabit. Igitur vt ſupra dictum eſt, recta E F, parallela non erit. Si punctum I, ſumeretur inter D, & B, caderet recta F I, ſupra C, & E I, infra B, &c.

DE MIRABILI NATVRA LINEÆ cuiusdam inflexæ, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium inscribitur, & circulus quadratur, & plura alia scitu iucundissima perficiuntur.

FORTE superiori anno incidi in librum 4. Pappi Alexandrini, vbi lineam quandam inflexam explicat, quam, vt ait, Dinostratus, & Nicomedes, & nonnulli iuniores excogitarunt ad circuli quadraturam, ideoq; ab effectu τετραγωνίζουσα ab eisdem appellata est, à nobis eadem de causa Quadratrix dicetur. Quamquam autem predicti auctores huiusmodi lineam conentur describere per duos motus imaginarios duarum rectarum, quæ in re principium petunt, vt propterea a Pappo reiiciatur, tanquam inutilis, & quæ describi non possit; nos tamen eam sine illis motibus Geometrice describemus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat, quemadmodum in descriptionibus conicarum sectionum fieri solet. Hanc inuentionem Epilogi loco huic sexto libro adiungendam esse censuimus; propterea quod beneficio huius lineæ problemata Geometrica scitu perjucunda, & quæ ad hunc vsque diem desiderata sunt, summa facilitate conficiuntur. Id quod ad finem lib. 4. facturos nos hoc loco recepimus, reiiciendo tamen pleniorem Quadraturæ tractationem in nostram Geometriam Practicam. Sic ergo descriptio lineæ Quadratricis fiet.



IN quadrato A B C D, describatur quadrans B D. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam semidiameter A D, æquabiliter ferri intelligatur circa centrum A, quam latus supremum C D, deorsum versus æquabiliter quoque, itaq; vt quo tempore punctum D, circumferentiam D B, vniformi semper motu percurrit, eodem recta D C, vniformi etiam motu descendens ad latus A B, perueniat, sic tamen, vt perpetuo lateri A B, sit parallela, & cum lateribus A D, B C, angulos rectos efficiat; secabunt se continue semidiameter in circumferentia D B, circumacta, & recta D C, deorsum lata, in punctis, quæ lineam Quadratricem describent, hoc est, per quæ linea Quadratrix transibit, cuiusmodi est linea inflexa D E. Sed quia duo isti motus vniformes, quorum vnus per circumferentiam D B, fit, & alter per lineas rectas D A, C B, effici non possunt, nisi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, inuentio a Pappo descriptio hæc reprehenditur: quippe cum ignota adhuc sit ea proportio, & quæ per hanc lineam

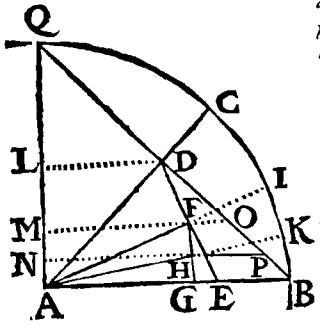
lineam inuestiganda proponatur. Quare nos Geometricè eandem lineam Quadratricem describemus hoc modo. Arcus B D, in quotuis partes æquales diuidatur. & latus vtrumq; A D, B C, in totidem æquales partes. Facillima diuisio erit, si & arcus D B, & vtrumq; latus A D, B C, secetur primum bifariam, deinde vtraque semissis iterum bifariam, & singula rursum partes iterum bifariam, atque ita deinceps, quantum libuerit. Quo autem plures extiterint diuisiones, eo accuratius Quadratrix linea describetur. Nos ad confusionem vitandam fecimus tam arcum D B, quam duo latera A D, B C, in 8. partes æquales.

D E I N D E bina puncta laterum A D, B C, æqualiter distantia a latere D C, vel A B, coniungantur lineis rectis occultis atque ex centro A, aliæ rectæ occultæ ad singula diuisionum puncta Quadrantis D B, extendantur. Vbi enim hæ rectæ priores rectas inter se secabunt, prima primam, secunda secundam, &c per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda est, ita vt non sit sinuosa, seu a puncto ad punctum semper progrediatur nullam efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis est linea inflexa D E, secans semidiametrum A B in E.

S E D quia punctum E, in latere A B, inuenire Geometricè non potest, cum ibi omnis sectio rectarum cesset, vt aliud sine notabili errore, qui scilicet sub sensum cadat, reperiamus, vtemur hoc artificio. Infimam partem A F, lateris A D, si satis exigua non sit, secabimus bifariam continuè, donec infima particula sit perexigua. Eodemque modo infimam partem E I, arcus D B, bifariam continuè diuidemus, donec tot fiant subdiuisiones, quot in parte A F, factæ sunt, vt particula B K talis pars sit totius arcus D B, qualis pars est A F totius lateris A D. Particulæ deinde A G, æquales abscindemus E L, E N, A M, ducemusq; rectas occultas G L, M N. Ducta vero ex A, contra recta occulta A K, quæ secet G L, in H, puncto, quod accuratissimè notetur, sumemus ipsi G H, æqualem M P. Si enim Quadratricem vsque ad H, descriptam continuabimus æquabili atque vniformi extensione vsque ad P, secabit Quadratrix linea latus A B, in E puncto, quod quæritur. Nam propter paruam rectarum G H, A E, M P, inter se distantiam, efficitur, vt fermè sint æquales, licet Geometricè loquendo, recta A E, semper maior sit aliquanto, quantumuis parum ea rectæ inter se distent: sed excessus ille circino deprehendi nõ potest. Id quod etiam in circumferentia circuli contingit. Rectæ namque G L, A B, M N, si parum inter se distent, in circulo omnino æquales iudicabuntur, quamuis vere A B, aliquanto maior sit. Itaq; si tres illæ rectæ G H, A E, M P, perexiguam habeant distantiam inter se, dubitari non potest, punctum F, in quo Quadratrix linea semidiametrum A B, secat, ab eo, quod vere in Quadratrice ibi existit, non differre: dummodo puncta H, P, exquisite, & summa adhibita diligentia, inuenta sint.

RECTAM porrò *AD*, *vocabimus latus Quadratricis*, *& rectam AE*, *eiusdem basim*, *ac deinceps*, *punctum A*, *centrum*.

TERTIUM puncta Quadratricis propè basim certius inueniemus, *siue intersectionibus linearum*, *hoc modo*. *Ducta chorda BQ*, *in quadrante secetur in D*, *bifariam*: *quod fiet*, *si ex A*, *ad C punctum medium quadrantis recta ducatur AC*. *Hæc enim ex scholio propos. 27. lib. 3. rectam BQ. secabit bifariam*. *Deinde rectæ AD*, *sumatur æqualis AE*; *iunctaq; recta DE*, *secetur bifariam in F*: *quod etiam fiet*, *si ex A*, *ad I*, *punctum medium arcus BC*, *ducatur AI*. *Hæc enim chordam BC*, (*si duceretur*) *secaret bifariam*, *ex scholio propos. 27. lib. 3. ac proinde & rectam DE*, *ex*



a 2. sexti. *scholio propos 4. huius*, *a cum chorda BC*, *sit parallela*; *propterea quod latera AB*, *AC*, *proportionaliter secantur in D*, *E*: *quippe cum tam AB*, *AC*, *quam AE*, *AD*, *æquales sint*. *Rursus rectæ AP*, *sumatur æqualis AG*; *iunctaq; FG*, *secetur bifariam in H quod etiam fiet per rectam AK*, *ductam ad K punctum medium arcus BI*. *Atque hoc modo si rectæ AH*, *æqualis sumatur*, *& reliqua fiant*, *vt prius*, *inueniretur aliud punctum inter H & G*. *Et sic deinceps quotuis alia puncta reperiemus versùs ipsi AB*, *per lineas perpendiculares*, *non autem per obliquas sectiones*.

b 3. tertij. *b Est enim AD*, *ad DB perpendicularis*; *& AF*, *ad DE*; *& AH*, *ad FG*, *&c. Omnia vero hæc puncta inuenta D*, *F*, *H*, *&c. sunt in Quadratrice*. *quod ita ostendo*. *Ductis DL*, *FM*, *HN*, *ipsi AB*, *parallelis secantibus BD*, *in*

c 2. sexti. *O*, *P*; *c erit vt BD*, *ad DQ*, *ita AL*, *ad LQ*: *ideoq; & AQ*, *secta erit in L*, *bifariam*. *Sectus autem est & arcus BQ*, *in C*, *bifariam*. *Igitur*, *vt ostensum est*, *punctum D*, *est in Quadratrice*. *Rursus quia*

d 2 sexti. *DE*, *secta est bifariam in F*, *d erit quoque DB*, *secta bifariam in O*;

e 2. sexti. *e idemque erit vt EF*, *ad FD*, *ita BO*, *ad OD*. *Sed vt BO*, *ad OD*, *ita est AM*, *ad ML*: *Et vt EF*, *ad FD*, *ita arcus BI*, *ad IC*, *quod* (*vt obiicit proportio sit æqualitatis*) *erit igitur quoque vt AM*, *ad ML*, *ita BI*, *ad IC*. *Ergo*, *vt ostendimus*, *secabunt se AI*, *MO*, *in puncto Quadratricis*. *Eademque ratio est de aliis punctis hac arte inuentis*.

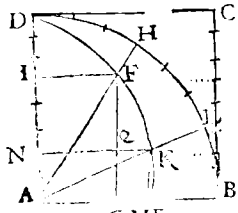
ESSE autem hanc lineam inflexam DE, *à nobis per puncta descriptam Geometricè eandem*, *quam Dinostratus & Nicomedes per duos illos motus imaginarios describi concipiebant*, *perspicuum est*. *Nam*

eſt. Nam ſi ſemidiameter AD, circa centrum A, per arcum DE, eodem tempore moueatur ſuiformi motu, quo latus DC, deorſum fertur motu quoque ſuiformi; ſit, & quando ſemidiameter AD, pertranſiuit quamcunque partem arcus DB, tunc latus DC ſimilem partem laterum DA, CB, percurrerit: Alias aut cuoſlibi motus non eſſent ſuiformes, aut non eodem tempore ad latus AB, tam ſemidiameter AD, quam latus DC, perueniret. Cum ergo rectæ ex centro A, per partes arcus DB, emiſſæ, & lineæ parallelæ per partes laterum DA, CB, ductæ, abſcindant ſemper ex arcu DB, & ex lateribus DA, CB, partes ſimiles: ex conſtructione ſupradicta conſtat, puncta lineæ inflexæ DE, a nobis Geometricè inuenta à punctis, quæ à duobus illis motibus repertuntur, non differre. Hæc igitur eſt deſcriptio lineæ Quadratricis, quæ Geometrica quodammodo appellari poteſt, quemadmodum & conicarum ſectionum deſcriptiones, quæ per puncta etiam fiunt, & ab Apollonio traditur, Geometricæ dicuntur, cum tamen magis errori ſint obnoxiæ, quam noſtra deſcriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quæ ad eas deſcriptiones ſunt neceſſaria, quibus in Quadratricis deſcriptione opus non eſt. Quare niſi quis totam ſectionum conicarum doctrinam, quam tanto ingenij cumine Apollonius Pergæus perfecit, & propterea Magnus Geometra appellatus ſit, reijcere ſolet tanquam inutilem, & non Geometricam, (quod neminem facturum exiſtimo) cum ſectiones conicas ad demonſtrationes adhibuerint præſtantiſſimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbolæ, ac Parabolæ uſus eſt in duarum linearum mediarum proportionalium inter quaſuis duas rectas inuentione: & Archimedes ipſe multa præclarè de eiſdem ſectionibus conicis demonſtrauit: ac denique eiuſmodi ſectiones inſignem uſum habent in re Gnomonica, & ex noſtra Gnomonica apparet) amittere omnino cogetur deſcriptionem hanc noſtram Quadratricis lineæ, eſſe quodammodo Geometricam. Adde quod linea conchilis, qua Nicomedes duas medias lineas proportionales acutiſſimè inueſtigat, per puncta etiam deſcribitur, vt in libro de menſurationibus dicemus. Sed iam lineæ Quadratricis uſum nonnullis propoſitionibus exponamus.

I.

SI ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis **rectæ ducantur** vſq; ad circumferentiam Quadrantis **ex eodē centro** deſcripti, & ex eiſdem punctis ad baſin **demittantur** perpendiculares; & aliæ rectæ eidē baſi parat-

parallelæ: erunt arcus Quadrantis inter semidiametros interiecti perpendicularibus, vel segmentis semidiametri inter parallelas positis, proportionales.



EX centro A, per puncta F, K, in Quadratrice sicunque accepta ducantur rectæ occurrentes arcui Quadrantis in H, L, demittanturq; ad basim A E, perpendiculares F G, K M: & ducantur F I, K N, eidem A E, parallelæ. Dico, sicut est totus arcus D B, ad arcũ H B, ita esse totum latus D A, ad perpendicularem F G, vel ad segmentum I A, &c. Quia enim eadem pars est arcus D H, totius arcus D B, quæ pars est recta D I, totius lateris D A, sicut ex descriptione lineæ Quadratricis manifestum est, sive ea cogitetur descripta duobus illis motibus proportionalibus Dinostrati, & Nicomedis, sive ea ratione, quam nos præscripsimus, cum in ea semper arcus D H, tot particulas totius arcus D B, complectatur, quot partes totius rectæ D A, rectæ D I, continet, propterea quod rectæ A H, i F, se intersecant in puncto F, Quadratricis: Neque hæc similitudo impeditur, etiamsi tam arcus D H, toti arcui D B, quàm recta D I, toti lateri D A, sit incommensurabilis, eam perpetuo Quadratrix eadem uniformitate progrediatur per omnia sua puncta. Si enim recta D I, non est talis pars sive commensurabilis, sive incommensurabilis, totius lateris D A, qualis pars est arcus D H, totius arcus D B, si cogitetur talis pars minor quam D I, vel maior, secabit parallela ex puncto eius extremo ducta rectã A H, vel supra F, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix describenda est, ac proinde ea non transibit per F. quod est absurdum, & contra hypothesin. Quia, inquam, eadem pars est arcus D H, totius arcus D B, quæ pars est recta D I, totius lateris D A, erit quoque reliquum arcus H B, eadem pars totius arcus D B, quæ pars est reliqua recta I A, totius lateris D A, Quocirca erit, sicut totus arcus D B, ad arcum H B, ita totum latus D A, ad rectam I A. hoc est, ad rectam F G,
a 34 pri a quæ ipsi I A, æqualis est, ac proinde & tam diutidendo erit, sicut arcus D H, ad arcum H B, ita recta D I, ad rectam I A, vel F G, quam conuertendo, sicut arcus H B, ad arcum D B, ita recta F G, vel I A, ad rectam D A, &c.

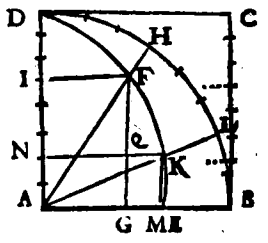
EADEM ratione erit, sicut arcus D B, ad arcum L B, ita recta
b 34. primi. D A, ad rectam N A, sive ad K M, b quæ ipsi N A, æqualis est: Et sicut arcus D L, ad arcum L B, ita recta D N, ad rectam N A, sive K M: Et sicut arcus L B, ad arcum D B, ita recta K M, vel N A, ad rectam D A. Quo-

D A. Quoniam igitur eſt, ꝙt L B, ad D B, ita K M, ad D A: Et ꝙt D B, ad H B, ita D A, ad F G, erit ex æquo, ꝙt L B, ad H B, ita K M, ad F G: Et conuertendo, ꝙt H B, ad L B, ita F G, ad K M, hoc eſt, ita I A, ad N A: Et diuidendo ꝙt H L, ad L B, ita I N, ad N A, vel ita F Q, ad Q G.

RVRSVS quia eſt ꝙt D H, ad H B, ita D I, ad I A: Et ꝙt H B, ad L B, ita I A, ad N A; erit ex æquo, ꝙt D H, ad L B, ita D I, ad N A, ſiue ad K M. Semper ergo arcus inter ſemidiametros intercepti perpendicularibus, ſine ſegmentis ſemidiametri inter parallelas poſitas proportionales ſunt. Quod eſt propoſitum.

II.

DATVM arcum circuli in datam proportionem diuidere.



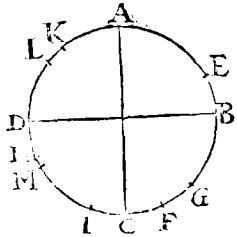
SIT primum arcus H B, in figura antecedente diuidendus in proportionem datam rectæ O, ad rectam P. Ducta ex puncto H, ad centrũ A, recta H A, ſecante Quadratricem in F, ducatur F I, baſi A F, parallela. Deinde recta I A, ita ſecetur in N, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. ꝙt ſit I N, ad N A, quemadmodum O, ad P, ductaq; N K, baſi A E, parallela ſecante Quadratricem in K, emittatur q; ex centro A, per K, recta ſecans arcum H B, in L. Dico arcum H B, in L, ſectum eſſe in proportionem datam O, ad P. Quoniam enim ꝙt propoſ. 1. oſtendimus, ꝙt H L, ad L B, ita eſt I N, ad N A: Eſt autem I N, ad N A, ex conſtructione, ꝙt O, ad P; a erit quoq; H L, ad L B, ꝙt O, ad P. a 11. quinti.

DEINDE totus quadrans D B, ſecandus ſit in proportionem R, ad S. Diuiſa ſemidiametro D A, in I, ꝙt ſit D I, ad I A, ſicuti R, ad S, ducatur I F, ipſi A F, parallela ſecãs Quadratricem in F. Ducta igitur recta A F H, erit ex propoſ. 1. D H, ad H B, ꝙt D I, ad I A, hoc eſt, ꝙt R, ad S.

O —— B
P —— 2
R —— 3
S —— 5
T —— 8
V —— 2

TERTIO ſit idem Quadrans D B, ſecandus in duos arcus, ita ꝙt totus Quadrans ad vnum eorum habeat proportionem datam T, ad V. Tribus rectis T, V, D A, inueniatur quarta proportionalis, cui æqualis abſcindatur A N. Ducta autem N K, ipſi

ipsi AT, parallela secante Quadratricem in K, ducatur ex A, per K, recta AKL. Dico Quadrantem in L, sectum esse, & proponitur. Erit enim ex propos. 1. DE, ad LB, & DA, ad NA, hoc est, & T, ad V.



QVARTO semicirculus ABC, dividendus sit in datam proportionem, videlicet in triplam. Secetur & eorum Quadrans AB, BC, secundum datam proportionem triplam in F, I, & arcui AE, vel IF, aequalis abscindatur arcus EG. Si igitur ex arcu communi ABC, aequalia demantur, nimirum duo arcus AE, BF, simul, & arcus AG, reliqua aequalia fient, nimirum duo arcus EL, FC simul, & arcus GC. Et quoniam CI, & AF, ad EB, ita BF, ad FC, a erunt AE, BF, simul, ad EB, FC, simul hoc est, arcus AG, ad arcum GC, & AE, ad EB: Habet autem AE, ad EB, datam proportionem triplam. Igitur & arcus AG, ad arcum GC, eandem proportionem datam habebit.

a 12. quinti.

QVINTO in eandem proportionem secandus sit arcus ACD, tres Quadrantes continens. Divisis tribus Quadrantibus AB, BC, CD, in eam proportionem in E, F, H, sumantur arcus EG, ipsi BF, & arcus GI, ipsi CH, aequalis. Si igitur ex communi arcu ACD, demantur aequalia, nimirum tres arcus AE, BF, CH simul, & arcus AB I, reliqua sient aequalia, nimirum tres arcus EB, FC, HD, simul, & arcus ID, Et quia tres arcus AE, BF, CH, ad tres arcus EB, FC, HD, eandem habent proportionem; b habebunt omnes tres simul ad omnes tres simul, hoc est, arcus ABI, ad arcum ID, eandem proportionem, quam unus arcus AE, ad unum arcum EB, videlicet datam.

b 12. quinti.

POSTREMO sit eodem modo dividendus arcus ACK. Divisis rursus tribus quadrantibus, & arcu DK, sit proportus, ut E, F, H, L: sumatur arcus EG, arcui BF, & arcus GI, arcui CH, & arcus IM, arcui DL, aequalis. Si igitur ex communi arcu ACK, aequalia auferantur, videlicet quatuor arcus AE, BF, CH, DL, simul, & arcus ABM, reliqua aequalia fient, quatuor scilicet arcus EB, FC, HD, LK simul, & arcus MK. Et quia quatuor arcus AE, BF, CH, DL, ad quatuor arcus EB, FC, HD, LK, eandem proportionem habent: c habebunt omnes quatuor simul ad omnes quatuor simul, id est, arcus ABM, ad arcum MK, eandem proportionem, quam unus AE, ad unum EB, eam videlicet, quæ data est. Constat ergo id, quod proponitur.

c 12. quinti.

COROLLARIVM.

EX his facile quemuis angulum rectilineam in duos angulos datam habentes proportionem partiemur, atq; adeo & quemlibet arcum, & anguium in quotvis partes æquales.

DESCRI-

DESCRIPTO namq; arcu ex angulo dato, eoq; arcu diuiso, ꝙt imbetur, si ex angulo ad punctum diuisionis recta ducatur, erit angulus diuisus, ꝙt arcus: a cùm sit ꝙt arcus ad arcum, ita angulus ad angulum in centro. a 33. sexti.

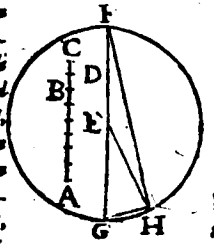


QVOD si arcus, ꝟel angulus secandus sit in quotuis æquales partes, diuidendus erit in duas partes proportionem habentes multiplicem denominatam à numero, qui ꝟna ꝟnitate minor sit numero partium propositarum. Vt si arcus B C, ꝟel angulus B A C, diuidendus sit in quinque partes æquales, secandus erit arcus B C, in G, in proportione quadruplam. Nam G C, arcus erit quinta pars arcus B C, cui si quatuor æquales abscindantur G F, F E, E D, D B, diuisus erit arcus B C, in quinque partes æquales. Et si ex A, ducantur rectæ A G, A F, A E, A D, sectus quoque erit angulus B A C, in quinque angulos æquales. Quod erat propositum.

III.

ISOSCELES triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam.

SIT data proportio recta A B, ad rectam B C. Diuisa B C, in D, bifariam, & descripto ex centro E, circulo quantocunq; F G H, ducaq; in eo diametro F G; secetur ita semicircumferentia F H G, in H, ꝙt eadem sit proportio arcus F H, ad arcum H G, quæ recta A B, ad rectam B D, iungantur que rectæ H E, H G. Dico isosceli trianguli E G H, ꝟtrumque angulorum æqualium ad basin G H, habere ad reliquũ angulum G E H, proportionem datam A B, ad B C. Cùm enim sit ꝙt A B, ad B D, ita arcus F H, ad arcum H G; Et ꝙt arcus F H, ad arcum H G, b *ita anguli F G H, ad angulum G F H;* c *erit ꝙt A B, ad B D, ita angulus F G H, ad angulum G F H: Vt autem B D, ad B C, ipsius B D, duplam, ita est angulus G F H, ad angulum G E H,* d *qui duplus est anguli G E H. Igitur ex æquo erit, ꝙt A B, ad B C, ita angulus E G H, ad angulum G E H. Quod est propositum.*



b 33. sexti.
c 11. quinti.
d 10. tertij.

COROLLARIVM.

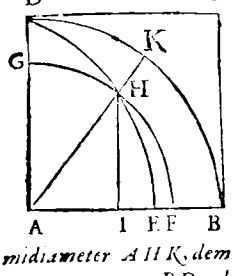
ITAQVE si construantur triangula Ioscelia, in quibus anguli æquales ad basin, ad reliquum proportiones habeant tum multiplices sesquialteras, tum multiplices ordine, describentur per priora omnes figuræ

guræ æquilateræ parium laterum, per posteriora verò figuræ æquilateræ laterum imparium in circulo, vt ad finem lib 4. ostendimus.

IDEM efficiemus sine huiusmodi triangulis, si totam circumferentiam in tot æquales partes secemus, vt in coroll. proximè antecedente docuimus, quot latera angulosue figura inscribenda habere debet, &c.

IIII.

SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit, erunt arcus Quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis continuè proportionales.

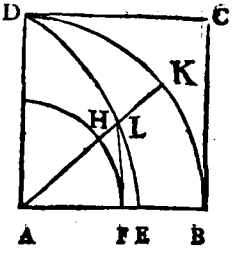


SIT Quadrans & Quadratrix ex eo descripta, vt supra. Dico arcum B D, semidiametrum D A, & Quadratricis basin A E, continuò esse proportionales. hoc est, esse B D, ad D A, vt D A, ad A E. Siminus, sit vt B D, ad D A, ita D A, ad A F, maiorem ipsa A E, minorémue sitq; primum A F, maior quàm A E. Descripto ex centro A, quadrante F G, per F, secante Quadratricem in H, ducatur per H semidiameter A H K, demittaturq; perpendicularis H I. Quoniam igitur ponitur arcus B D, ad rectam D A, & vt D A, hoc est, vt A B, ad A F, estque vt A B, semidiameter ad semidiametrum A F, ita arcus B D, ad arcum F G, (Cum enim sit ex Pappi demonstrationibus, vt & nos in libro de mensurationibus ostendemus, diameter ad diametrum, vt circumferentia circuli ad circumferentiam circuli; a *erit quoq; semidiameter A B, ad semidiametrum A F, vt eadem circumferentia ad eandem circumferentiam;* b *ac proinde etiam vt quarta pars circumferentiæ ad quartam partem circumferentiæ, hoc est, vt arcus B D, ad arcum F G.) c Erit quoq; arcus B D, ad rectam D A, vt idem arcus B D, ad arcum F G,* d *ac propterea æquales erunt rectæ D A, & arcus F G. Quia verò ex theor. 1. est, vt arcus B D, ad arcum B K, ita recta D A, ad rectam H I; & vt arcus B D, ad arcum B K, ita arcus F G, ad arcum F H, quod arcus B D, B K, arcubus F G, F H, similes sint, vt supra in hoc scholio ostensum est:* e *Erit quoque recta D A, ad rectam H I, vt arcus F G, ad arcum F H. Cum ergo recta D A, ostensa sit arcui F G, æqualis;* f *erit quoq; recta H I, arcui F H, æqualis. quod est absurdum. Est enim recta A I, minor arcu F H, cum ea sit semissis chordæ subtendentis arcum duplum arcus F H: (Nam recta A F,* g *secat eam chordam bifariam, ac proinde & arcum, ex scholio propos. 27. lib. 3. chorda autem semper suo arcu minor*

a 15. quinti.
b 15. quinti.
c 11. quinti.
d 9. quinti.
e 11. quinti.
f 14. quinti.
g 3. tertij.

minor sit. Non ergo est arcus B D, ad semidiametrum D A, vt D A, ad rectam maiorem basi A E, Quadratricis.

SIT deinde, si fieri potest, A F, minor quam A E. Descripto igitur ex centro A, per F, Quadrante F G, erigatur ex F, ad A E, perpendicularis F L, secans Quadratricem in L, puncto, per quod semidiameter ducatur A L K, secans arcum F H, in H. Ostendemus ergo, vt prius, arcum F G, rectæ D A, æqualem esse: Item eum esse arcum B D, ad arcũ B K, hoc est, arcum F G, ad arcum F H, vt est recta D A, ad rectam L F. Quare cùm arcus F G, ostensus sit æqualis rectæ D A, erit quoq; arcus F H, æqualis rectæ L F. Quod est absurdum. Est enim recta L F, maior arcu F H: Nam si ex L, duceretur versus G, alia recta tangens circulum F G, sicut L F, eundem tangit in F, essent hæ tangentes æquales, ex schol. propos. 36. lib. 3. arcus q; inter eas interceptus secaretur bifariam in H, propterea quòd ex scholio propos. 37. lib 3. angulus ab eis comprehensus bifariam divideretur, a ac proinde & angulus in centro A, si ad alterum punctum contactus recta adiungeretur: b ideoq; & arcus quibus insistunt, æquales forent. Igitur cùm ex Archimede ad initium de Sphæra & Cylindro, duæ illæ tangentes simul maiores sint arcu ab eis comprehenso, erit & earum semissis L F, maior semisse F H, illius arcus. Non est ergo arcus B D, ad semidiametrum D A, vt D A, ad rectam minorem basi A E, Quadratricis: Sed neque vt D A, ad maiorem, vt ostensum est. Igitur vt D A, ad ipsam basim A E. Quod est propositum.



a 4. vel 8. primi.
b 26. tertij.

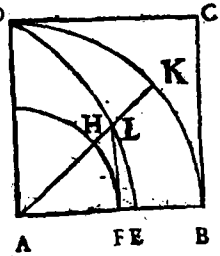
COROLLARIVM I.

HINC facilè reperiemus rectam cuilibet arcui circuli, cuius quadrans est B D, ex quo Quadratrix descripta est, æqualem.

QVONIAM enim est arcus B D, ad D A, vt D A, ad A E: erit conuertendo quoq; A E, ad D A, vt D A, ad arcum Quadrantis B D. Si igitur duabus rectis A E, A D, inueniatur tertia proportionalis; c erit A D, ad eam tertiam, vt ad arcum B D, cùm vt aq; proportio sit eadem, quæ A E, ad A D. d Quare tertia illa proportionalis arcui Quadrantis B D, æqualis erit: Et si duplicetur, fiet recta æqualis semicircumferentiæ eiusdem circuli; si verò quadruplicetur, fiet recta toti circumferentiæ æqualis. Quod si arcus B K, qui minor est Quadrante, inuenienda sit recta æqualis; fiet vt D A, ad perpendicularem L F, ex L, ad A B, demissam, ita tertia illa proportionalis ad aliud, inuentaq; erit quarta hac recta æqualis arcus B K. Nam cùm sit ex theor. 1. vt D A, ad perpendicularem L F, ita arcus D B, ad ar-

c 11. quinti.
d 9. quinti.

a 11. quinti.



b 14. quinti.

cum B K; a erit quoque tertia illa proportionalis ad quartam lineam inuentam, & vt arcus D B, ad arcum B K: Est autem tertia illa proportionalis aqualis arcui Quadrantu D B. b Igitur & quarta linea inuenta aqualis erit arcui B K. Si verò arcus, qui maior sit quadrante, inuenienda sit recta aqualis, reperienda primùm erit recta aqualis Quadranti, vel semicirculo, vel trebus Quadrantibus, prout arcus datus includit vnum, aut duos, aut tres quadrantes: Deinde alia recta aqualis reliquo arcui, qui minor Quadrante est. Nam dua hæ rectæ coniuncta erunt toti arcui proposito aquales.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR quoque ex his, si basis Quadratricis A E, statuatur semidiameter alicuius circuli, eius latus A D, Quadranti eiusdem circuli esse æquale, & lineam lateris duplam esse æqualem semicircumferentiæ eiusdem circuli; & lineam quadruplam toti circumferentiæ esse æqualem.

CVM enim vt suprà ex Pappo diximus, semidiametri semicircumferentijs circulorum, atque adeò & quadrantibus sint proportionales; erit vt D A, ad A E, hoc est, vt tertia illa proportionalis ad D A, ita Quadrans B D, ad Quadrantem semidiametri A E. Est autem tertia illa proportionalis aqualis Quadranti B D, vt ostensum est: c Igitur & recta D A, Quadranti semidiametri A E, aqualis erit. Dupla linea ergo ipsius D A, semicircumferentia circuli, cuius semidiameter A E, & quadrupla toti circumferentia erit aqualis.

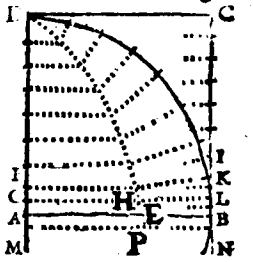
c 14. quinti.

EADEM ratione, si dua rectæ eandem proportionem habeant, B [illegible] quam D A, A E, & minor ponatur semidiameter alicuius circuli, ostendetur maior aqualis quadranti illius circuli, &c. Sit enim vt D A, ad A E, ita recta aliqua B, ad rectã C. Eritque permutando, vt D A, ad B, ita A E, ad C. Vt autem A E, ad C, ita est quadrans semidiametri A E, ad quadrantem semidiametri C, vt suprà ex Pappo dictum est. Igitur erit quoque vt D A, ad B, ita quadrans semidiametri B, ad quadrantem semidiametri C. Cùm ergo D A, æqualis sit, vt ostensum est, quadranti semidiametri A E, d Erit quoque B, aqualis quadranti semidiametri C. Quod est propositum.

d 14. quinti.

SED si lubeat per numeros explorare, quamnam proportionem plus minus, habeat ex hoc præclaro inuento circumferentia circuli ad eius

ad eius diametrum, vel (quod idem est) semicircumferentia ad semidiametrum, a cùm sit vt circumferentia ad diametrum, ita semicircumferentia ad semidiametrum, efficiemus id hoc modo. Cogitemus Quadrantem DB, in figura, in qua Quadratricem descripsimus, diuisum esse in grad. 90. & singulos gradus in Min. 60. vt totus arcus DB, complectatur 5400. particulas aequales. Si igitur latus DA, concipiamus in totidem aequales particulas diuisum esse, erit parallela ex vltima particula vsque ad Quadratricem educta fermè aequalis basi AE, ob exiguam distantiam illius parallelae, & basis AE, cùm in ea figura parallela quoque GH, auferens AG, particulam sextamdecimam, quae $\frac{1}{16}$. multò maior est quàm $\frac{1}{5400}$. vix à basi AE, superetur: ita vt sine errore notabili eam parallelam pro basi accipere possimus. Quia verò vltima illa particula lateris DA, est sinus arcus Min. 1. & parallela illa sinui complementi, nimirum arcus grad. 89. Min. 59. vt constat, si ponatur AG, vltima particula, & arcus BK, vltimum Minutum, ducaturque recta AH. Nam GH, erit sinus anguli GAH, grad. 89. Min. 59. ac proinde AG, sinus anguli AHG, Min. 1. posito sinu toto AH, vt in tractatione Sinuum ostendimus. Si igitur sinus totus AH, statuatur 10000000. (Ita enim exquisitius proportio optata inuenietur, quàm si sinus totus ponatur tantùm 100000. cùm in hoc sinus grad. 89. Min. 59. à sinu toto non differat.) erit AG, 2909. & GH, 9999999. at totum latus DA, earundem partium erit 15708600. vt constat, si 5400. particula lateris DA, ducantur in 2nam AG, quam diximus esse 2909. Duplum ergo lateris DA, erit 31417200. Et quoniam ex coroll. 2. huius propos. 4. duplum lateris DA, aequale est semicircumferentia, cuius semidiameter AE; erit proportio semicircumferentiae illius ad semidiametrum AE, eadem ferè, quae numeri 31417200. ad 9999999. denominata à $3\frac{14159261}{99999999}$ hoc est, in minimis terminis, à $3\frac{1}{7}\frac{22}{1}$. quae proportio minor est, quàm tripla sesquiseptima, siue tripla superdecupartiens septuagesimas, maior autem, quàm tripla superdecupartiens septuagesimas primas; inter quas duas proportiones vera proportio circumferentiae ad diametrum consistit, vt ab Archimede demonstratum est. a 15. quinti.



ITAQVE vt recta linea circumferentia circuli inueniatur aequalis, satis est punctum E, inuenire, etiamsi totu linea Quadratrix non sit descripta. Vt autem arcus, vel angulus in datam proportionem secetur, non indigemus puncto E, vt perspicuum est.

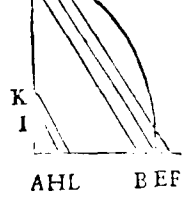
V.

DATO circulo quadratum æquale constituere.

QVONIAM Archimedes demonstrauit circulum quemcunq; æqualem esse triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum semidiametro circuli, alterum vero circumferentiæ eiusdem æquale est; atque hinc nos propos. 4. figurarum Isoperimetrarum in commentarijs in sphæram ostendimus, eundem circulum rectangulo comprehenso sub semidiametro, & semicircumferentia, æqualem esse: si ex coroll. præcedentis propos. inueniatur linea recta æqualis semicircumferentiæ dati circuli, & rectangulo contento sub illa recta, & a 14. secundi. *semidiametro a construatur quadratum æquale, erit idem hoc quadratum dato circulo æquale.*

INVENIETVR autem recta æqualis semicircumferentiæ, b 12. sexti. *vel Quadrantis, vel totius circumferentiæ, b si fiat vt basis Quadratricis descriptæ ad eiusdem latus, ita semidiameter dati circuli ad aliud. Inuenta enim quarta linea æqualis erit Quadrantis circuli, vt in coroll. 2. præcedentis propos. diximus, atq; adeo duplicata efficiet lineam semicircumferentiæ æqualem, quadruplicata autem rectam totæ circumferentiæ æqualem exhibebit.*

VERVM vt expeditius quilibet circulus possit quadrari, construenda erunt duæ figuræ quadrandis circulis aptissimæ, hoc modo. Constituatur angulus rectus D A E. sitq; A D, æqualis semidiametro Quadrantis, ex quo Quadratrix descripta est, & A E, basi eiusdem Quadratricis æqualis; Vel ex centro A, noua Quadratrix describatur D E, cuius latus A D, & basis A E. Ducta autem recta D E, constructum erit vnum instrumentum circulis quadrandis aptissimum. Si enim circuli quadrandi semidiameter æqualis sit rectæ A E, erit recta A D, circumferentiæ Quadrantis eiusdem circuli æqualis, vt ex coroll. 2. antecedentis propos. liquet. Si autem semidiameter minor sit, quàm A E, abscindemus ei æqualem A B, parallelamq; ipsi D E, agemus B C Si denig; semidiameter sit maior, quàm A E, abscindemus ei æqualem A F, ex A D producta, & per F, ipsi D E, parallelam agemus F G. Erit enim ex coroll. 2. præcedentis propos. recta A C, æqualis circumferentiæ Quadrantis, cuius semidiameter A B: Recta vero A G, circumferentiæ Quadrantis æqualis erit, cuius semi-

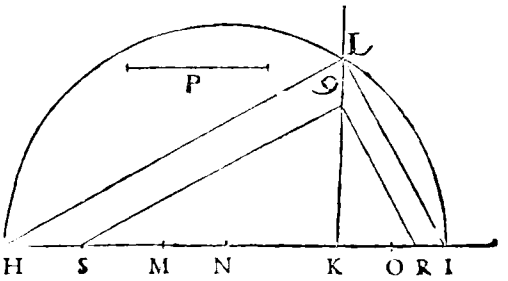


e 2. vel 4. sexti. *diameter A F: e propterea quod est, vt A E, ad A D, ita tam A B, ad A C, quàm A F, ad A G.*

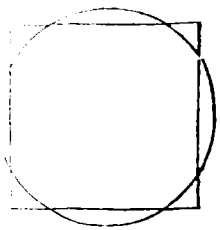
DEINDE ducta recta H I, cuiuscunq; longitudinis, excitetur ad eam

eam perpendicularis quamcunque K L; paratumq; erit alterum instrumentum quadrandis circulis accommodatum.

PER duo hæc instrumenta nullo negotio quemcunq; circulum quadrabimus hac ratione. Sit quadrandus circulus, cuius semidiametro in priori instrumento æqualis sit recta A B, & per B, ipsi D E,



parallela agatur B C. In posteriori vero instrumento sumantur duæ K M, M H, ipsi A C æquales, & recta K I, semidiametro A B, æqualis. Diuisa autem tota recta H I, bifariam in N, describatur ex N, ad interuallum N H, vel N I, semicirculus secans perpendicularem K L, in L. Dico quadratum ex K L, circulo dato, cuius semidiameter A B, in priori instrumento, vel K I, in posteriori, æquale esse. Quoniã enim K L, media proportionalis est inter K H, K I, ex scholio propos. 13. huius lib. 3 erit quadratum ex K L, rectangulo sub K H, K I, æquale. Cum ergo hoc rectangulum circulo dato sit æquale, & ad initium huius propos. diximus, quod K H, sit æqualis semicircumferentiæ, & K I, semidiametro; erit quoq; idem quadratum ex K L, dato circulo, cuius semidiameter A B, vel K I, æquale. Si igitur quadratum rectæ K L, describatur, & ex eius centro ad interuallum A B, in priori instrumento, vel K I, in posteriori circulus describatur, habebitur quadratum æquale circulo, & in apposita figura apparet. 2 17. 6. *primi.*



CÆTERVM diuisa recta H I, in posteriori instrumento in duas partes æquales facile sic fiet. Diuisa semidiametro K I, bifariam in O, (hæc enim quia minor est, quam H I, facile bifariam secabitur.) accipiatur recta K O, æqualis M N. Nam N, punctum erit medium rectæ H I. Cum enim æquales sint M N, O I; addita communi N O, erit N I,

ipsi M O, æqualis. Est autem M O, ipsi H N, æqualis. (quia enim æquales sunt H M, M K; additis æqualibus M N, K O, tota æquales fient H N, M O) igitur & N I, ipsi H N, æqualis erit.

VI.

DATO quadrato circulum æqualem describere.

SIT datum quadratum, cuius latus P. Huic in posteriori instrumento antecedentis propos. ex perpendiculari K L, abscindatur æqualis K Q. Proposito autem quouis circulo, cuius semidiameter K I, inueniatur per antecedentem propos. ei quadratum æquale, cuius latus K L. Deinde ducta recta L I, agatur ei parallela Q R. Dico circulum, cuius semidiameter K R, æqualem esse quadrato, cuius latus K Q, vel P. Inuenta namque per propos. antecedentem recta K H, quæ semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter K I, sit æqualis, ductaque recta L H, agatur ei parallela Q S. Quoniam igitur, ob triangulorum similitudinem, est vt H K, ad K L, ita S K, ad K Q; & vt K L, ad K I, ita K Q, ad K R: erit ex æquo, vt H K, ad K I, ita S K, ad K R. Cùm ergo H K, æqualis sit semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter K I, erit quoque ex coroll. 2. propos. 4. S K, æqualis semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter K R. Quia verò K Q, ex coroll. propos. 8. huius lib. media proportionalis est inter S K, K R, quòd angulus R Q S, rectus sit, a *quippe cùm eius partes R Q K, S Q K, partibus I L K, H L K,* a 29. primi. *recti anguli H L I, æquales sint: (Nam* b *angulus H L I, rectus est,* b 31. tertij. *cùm sit in semicirculo, vt patet ex praxi antecedentis propos. quæ K L, media proportionalis inter H K, K I, reperitur.)* c *erit quadratum ex* c 17. sexto. *K Q, æquale rectangulo sub S K, K R, hoc est, circulo, cuius semidiameter K R, hoc est, circulus semidiametri K R, æqualis est quadrato lateris K R, vel P. Quod est propositum.*

COROLLARIVM.

EX his, quæ demonstrata sunt, constituemus circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem; & contrà, cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem constituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque similis sit. Nam si datæ figuræ rectilineæ *d* describamus quadratum æquale, & huic quadrato circulum æqualem constituamus, ex propos. 6. erit hic idem circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis. d 14. secundi.

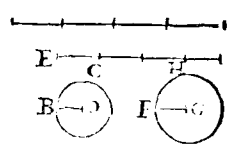
RVRSVS si per propos. 5. dato circulo quadratum æquale constituamus, huic autem quadrato *e* constituamus figuram rectilineam æqualem, & similem alteri datæ rectilineæ figuræ, erit eadem hæc figura rectilinea constituta, dato circulo æqualis. Quod est propositum. e 25. sexti.

VII.

DATÆ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

QVO facto recta linea reperiatur circumferentia dati circuli æqualis.

qualis, docuimus propos. 5. nunc autem, vt siciſſim recta data circumferentiæ circuli æqualis inueniatur, ita agendum erit. Sit data recta A, cui circumferentia æqualis inuenienda eſt. Deſcripto quouis circulo BC, excentro D, inue-

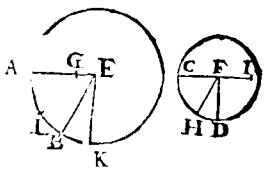


matur ei recta æqualis EF, quod fieri poſſe tradidimus. In priori enim ſimilis propoſ. 5. ſumatur AH, æqualis ſemidiametro ED, deſcripto circulo, & per H, agatur ipſi DE, parallela HF. Nam AE, quadrupla erit ipſius AH, quadruplex autem dabit rectam E, circumferentiæ circuli BC, æqualem, vt propoſ. 5. diximus. Deinde de tribus rectis E, A, & FD, inueniatur quarta proportionalis FG, atque ex G, ad interuallum GF, circulus deſcribatur FH. Dico huius circumferentiam eſſe rectæ A, æqualem. Cum enim ſit, vt E, ad A, ita FD, ad FG, hoc eſt, a tota diameter circuli BC, ad a 15. totam diametrum circuli FH. Vt autem vt diameter ad diametrum, quinti. ita circumferentia BC, ad circumferentiam FH, vt Pappus demonſtrauit: b erit quoque vt E, ad A, ita circumferentia BC, ad cir- b 11. cumferentiam FH. Cum ergo E, facta ſit æqualis circumferentiæ quinti. BC, c erit & recta A, circumferentiæ FH, æqualis, hoc eſt, cir- c 14. cumferentiæ circuli FH, inuenta eſt data recta A, æqualis. Quod eſt quintum propoſitum.

ALITER, & facilius. Quarta parti rectæ datæ A, accipiatur æqualis AK, in priori ſupplemento propoſ. 5. & per K, agatur KL, ipſi DE, parallela. Nam circumferentia circuli, cuius ſemidiameter AL, æqualis erit datæ rectæ A, propterea quod eius circumferentia quadruplus æqualis eſt rectæ AK, quartæ parti datæ rectæ A, vt propoſ. 5. declarauimus.

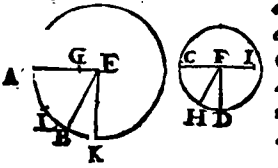
VIII.

DATIS duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in vno eorum, ex altero arcum æqualem abſcindere. Oportet autem arcum in maiore circulo datum non eſſe maiorem circumferentia minoris circuli.



SINT duo circuli inæquales AB, CD, quorum centra E, F, & ſint diametri AE, CF, ſitque AB, maior, & CD, minor. Datus autem primum ſit in maiori circulo arcus CD, cui æqualis abſcindendus ſit ex maiore. Quoniam circulus AB, circulo CD, maior eſt, erit & ſemidiameter AE, ſemidiametro CF, maior. Abſcindatur ergo

AG, ipsi CF, aqualis, secetur que arcus CD, ita in H, ex propos. 2. Vt eadem sit proportio arcus CH, ad arcum DH, qua recta AG, ad rectam GE; arcusq; CH, similis auferatur arcus AB. quod facilè fiet, si ducta recta FH, angulo CFH, aqualis fiat angulus AEB. Dico arcum AB, dato arcui CD, aqualem esse. Quoniam enim est, Vt AG, ad GE, ita arcus CH, ad arcum HD. Et conuertendo, Vt EG, ad AG, ita arcus DH, ad arcum CH; erit componendo quoque AE, ad AG, hoc est, ad CF, ipsi AG, aqualem, Vt arcus CD, ad arcum CH: Est autem, Vt AE, semidiameter ad semidiametrum CF, a hoc est, Vt totus diameter ad totum diametrum, ita circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, Vt Pappus demonstrauit, hoc est, ita arcus AB, ad similem arcum CH. b Igitur erit quoq; Vt arcus CD, ad arcum CH, ita arcus AB, ad eundem arcum CH; ac proinde arcus CD, AB, c aquales inter se erunt. Quod est propositum.



a 15. quinti.
b 11. quinti.
c 9. quinti.

DATVS deinde sit in maiore circulo arcus AB, non maior, quàm circumferentia circuli CD, minoris, ex quo arcus AB, aqualis arcus abscindendus est. Quoniam circulus AB, maior est circulo CD, erit & semidiameter AE, semidiametro CF, maior. Producta ergo CF, ad I, Vt CI, ipsi AE, sit aqualis, secetur per propos 2. arcus AB, in L, Vt eadem sit proportio AB, ad BL, qua CF, ad FI; arcusq; BL, sumatur aqualis arcus BK, ac totis arcui AK, similis auferatur CD, quod facile fiet, si ducta recta EK, angulo AEK, angulus CFD, aqualis fiat. Dico arcum CD, arcui dato AB, aqualem esse. Quoniam enim est, Vt CF, ad FI, ita arcus AB, ad arcum BL, ad est, ad arcum BK, ipsi BL, aqualem; erit componendo quoque, Vt CI, ad FI, ita arcus AK, ad arcum BK: Et per conuersionem rationis, Vt CI, ad CF, hoc est, Vt AE, ad CF, ita arcus AK, ad arcum AB, Est autem, Vt semidiameter AE, ad semidiametrum CF, d hoc est: Vt totus diameter ad totum diametrum, ita, ex demonstratis à Pappo, circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, id est, ita arcus AK, ad arcum similem CD. e Igitur erit etiam, Vt arcus AK, ad arcum AB, ita idem arcus AK, ad arcum CD, propterea f arcus AB, CD, f aquales erunt inter sese. Quod est propositum.

d 15. quinti.
e 11. quinti.
f 9. quinti.

BREVIVS. Arcui CD, reperiatur aqualis recta, per coroll. 1. propos. 4 Quadratricis; & huic recta aqualis arcus AB, Vt in sequenti coroll 1. dicetur. Eodem pacto arcus AB, reperiatur recta aqualis & huic recta aqualis arcus CD: facilumq; erit, quod iubetur.

COROL-

COROLLARIVM I.

EX his, quæ demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, cuiuis datæ rectæ abſcindi poſſe ex circulo quouis, cuius circumferentia minor non ſit, quam recta data, circumferentiam æqualem, quemadmodum ſupra oſtenſum eſt in coroll. 1. propoſ. 4. datæ cuilibet circumferentiæ inueniri poſſe rectam æqualem: hoc modo. Inueniatur per ea, quæ paulo ante in coroll. 1. propoſ. 4. oſtendimus, recta linea quadranti dati circuli æqualis; & ſi quidem hæc linea inuenta æqualis fuerit rectæ lineæ datæ, erit circumferentia quadrantis datæ rectæ lineæ æqualis.

SI vero illa recta quadranti circuli inuenta æqualis, fuerit maior, quam data recta linea; ſecetur quadrantis circumferentia in duas partes, ex propoſ. 2. ita vt quadrans ad vnam partem habeat eandem proportionem, quam inuenta recta linea ad lineam rectam datam. Pars enim illa quadrantis datæ rectæ lineæ erit æqualis. Nam cum ſit, vt inuenta recta ad datam rectam, ita quadrans ad illum arcum abſciſſum; ſit autem recta inuenta quadranti æqualis, *a* erit quoque data linea recta arcui abſciſſo æqualis, *a* 14. quinti.

SI denique recta illa inuenta æqualis quadranti, fuerit minor, quam recta linea data; ſumatur illius dupla, quæ nimirum circumferentiæ ſemicirculi ſit æqualis. Nam ſi hæc æqualis fuerit datæ rectæ lineæ, erit circumferentia ſemicirculi eidem datæ rectæ æqualis.

SI autem dupla illa recta linea fuerit maior, quam data linea recta, ſecetur ſemicirculi circumferentia in duos arcus, ita vt ſemicircumferentia ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam dupla illa recta linea ad datam rectam, quod quidem facile fiet, ſi datæ rectæ ex dupla illa linea recta abſcindatur æqualis, & ſemicircumferentia ſecetur, per propoſ. 2. vt ſecta eſt recta illa dupla. Erit enim componendo, vt tota illa recta dupla ad partem abſciſſam, hoc eſt, ad datam rectam, ita

tota ſemicircumferentia ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille datæ rectæ æqualis erit. Cum enim ſit, vt dupla illa recta ad rectam datam, ita ſemicircumferentia ad eum arcum; ſit autem recta illa dupla æqualis ſemicircumferentiæ; *a* erit quoq; data recta illi arcui æqualis.

a 14. quinti.

SI denique dupla illa recta linea fuerit minor, quam data linea recta, addatur ei prior linea inuenta, quæ nimirum quadranti circuli eſt æqualis, vt tota recta compoſita æqualis ſit circumferentiæ trium quadrantum, & tripla prioris lineæ inuentæ. Nam ſi hæc linea tripla fuerit datæ rectæ æqualis; erit arcus trium quadrantum eidem datæ rectæ æqualis.

SI vero tripla illa linea recta fuerit maior, quam recta linea data, ſecetur circumferentia trium quadrantum in duos arcus, ex propoſ. 2. ita vt ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam tripla illa recta ad rectam datam, quod facile etiam fiet, ſi datæ rectæ ex tripla illa linea recta abſcindatur recta æqualis, & circumferentia trium quadrantum ſecetur, per propoſ. 2. vt recta illa tripla ſecta eſt. Nam componendo erit, vt tota illa recta tripla ad partem abſciſſam, id eſt, ad datam rectam, ita tota circumferentia trium quadrantum ad arcum abſciſſum. Arcus enim ille datæ rectæ lineæ erit æqualis. Quoniam enim eſt, vt tripla illa recta ad rectam datam, ita circumferentia trium quadrantum ad arcum abſciſſum; eſtque tripla illa recta circumferentiæ trium quadrantum æqualis; *b* erit quoque data linea recta æqualis illi arcui abſciſſo.

b 14. quinti.

DENIQVE ſi tripla illa linea recta fuerit minor, quam data recta linea, addatur ei rurſus prior linea inuenta quadranti æqualis, vt tota recta compoſita fiat æqualis toti circumferentiæ circuli, & prioris lineæ inuentæ quadrupla. Si namque linea hæc quadrupla fuerit æqualis datæ rectæ lineæ, erit tota circumferentia dati circuli datæ lineæ rectæ æqualis.

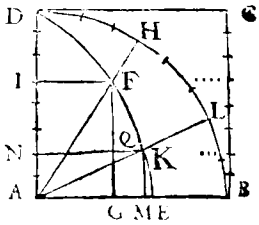
AT vero ſi illa linea quadrupla maior fuerit, quàm data

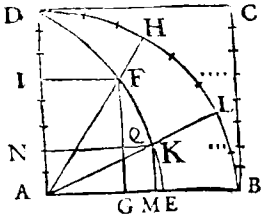
data recta linea, (minor esse non potest: alioquin data recta esset maior, quam circumferentia dati circuli, quod est contra hypothesin) secetur recta circumferentia in duos arcus, ex propos. 2. vt ad vnum eorum eandem proportionem habeat, quam quadrupla illa linea ad datam rectam. quod facile etiam fiet, si ex quadrupla illa recta auferatur recta æqualis datæ rectæ, & tota circumferentia circuli secetur, vt quadrupla illa recta est secta. Erit itaque componendo, vt tota illa quadrupla recta ad partem ablatam, id est, ad datam rectam ita tota circumferentia circuli ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ erit æqualis. Cum enim fuerit quadrupla illa linea ad rectam lineam datam, ita tota circumferentia ad arcum abscissum; sit autem illa linea quadrupla totius circumferentiæ æqualis; *a* erit quoque data recta linea arcui abscisso æqualis. a 14. quinti.

ALITER, & breuius. Inuenta ex coroll. 1. propos. 2. Quadratricis, vel ex propos. 5. eiusdem, recta æquali circumferentiæ dati circuli, abscindatur ex ea datæ rectæ lineæ æqualis, & tota circumferentia per propos. 2. secetur, vt secta est inuenta illa recta in duas partes. Nam componendo erit, vt tota illa recta ad eius partem ablatam, hoc est, ad datam rectam, ita tota circumferentia ad arcum abscissum. Cum ergo tota illa recta sit æqualis totius circumferentiæ, *b* erit quoque data recta arcui abscisso æqualis. Quod est propositum. b 14. quinti.

COROLLARIVM II.

EX iis quoque, quæ dicta sunt, inferri potest, tam arcus, quam angulos rectilineos reperiri incommensurabiles inter se. Sit enim arcus H B, & angulus rectilineus I A B. Dico tam arcum H B, secari posse in duos arcus inter se incommensurabiles, quam angulum





lum HAB, in duos angulos incommensurabiles inter se. Descripta enim Quadratrice DE, quæ rectam HA, secet in F, ducatur per F, basi AE, parallela FI. Deinde inuentis duabus rectis inter se incommensurabilibus, vt libro 10. docetur, diuidatur recta IA, in N, ex scholio propos. 10. huius lib. ita vt IN, ad NA, eandem proportionem habeat, quam duæ rectæ inuentæ; atque adeo & IN, NA, incommensurabiles quoque sint. Ducta autem recta NK, ipsi AE, parallela, quæ Quadratricem secet in K, ducatur ex centro A, per K, recta secans arcum HB, in L. Dico tam arcus HL, LB, quam angulos HAL, LAB, inter se esse incommensurabiles. Quoniam enim per propos. 1. est, vt IN, ad NA, ita arcus HL, ad arcum LB: sunt autem IN, NA, incommensurabiles; erunt & arcus HL, LB, incommensurabiles. Cum ergo sit quoque, *a* vt arcus HL, ad arcum LB, ita angulus HAL, ad angulum LAB; erunt etiam anguli HAL, LAB, incommensurabiles inter se. Quod est propositum.

a 33. *sexti.*

FINIS ELEMENTI SEXTI.

QVID

QVID IN SINGVLIS xv. Libris agat Euclides.

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN primo libro disputat de rectilineis figuris, videlicet de triangulis, ac parallelogrammis. Et primum triangulorum ortus, proprietatesque tradit, tum iuxta angulos, tum iuxta latera, ipsa inter se comparans. Deinde parallelarum proprietates interiiciens ad parallelogramma transit, eorumque ortum declarat: & symptomata, quae in ipsis sunt, demonstrat. Postea triangulorum, parallelogrammorumque communicationem ostendit, & quonam pacto parallelogrammum fiat aequale triangulo. Denique de iis, quae in triangulis rectangulis à lateribus describuntur, quadratis; quam habeat proportionem, quod à subtendente rectum angulum describitur, ad ea, quae à comprehendentibus ipsum fiunt.

IN secundo libro parallelogrammum rectangulum, & gnomon definitur. Deinde parallelogrammorum rectangulorum, & quadratorum, quae ex rectarum linearum sectionibus fiunt, proportiones declarantur. Postea de quadratis, quae à lateribus obtusangulorum, & acutangulorum triangulorum describuntur, quam habeant proportionem, quae à subtendentibus obtusum, & acutum

tum angulum fiunt, ad ea, quæ à comprehendentibus describuntur. Denique qua ratione dato rectilineo æquale quadratum constituatur.

IN tertio libro agitur de iis, quæ circulis accidunt, & de rectis lineis in circulo, vel ad circulum ductis: itemque de angulis, qui ad circulorum centra, vel ad circumferentias consistunt.

IN quarto libro de figurarum planarum inscriptionibus, & circumscriptionibus.

IN quinto de analogiis.

IN sexto de proportionibus figurarum inter sese: de figuris similibus, & reciprocis: de rectis lineis proportionalibus: de parallelogrammorum applicationibus ad rectas lineas, quæ vel deficiant parallelogrammis similibus, vel excedant: quomodo recta linea terminata, extrema ac media ratione secetur: de proportionibus circumferentiarum, & angulorum, itemque Sectorum, in circulis æqualibus.

IN septimo agitur de numeris primis, & compositis, & quo pacto numerorum non primorum maxima communis mensura inueniatur: de numerorum parte, & partibus: de numeris multiplicibus: de proportionalibus: & quæcunque in quinto libro de magnitudinibus generatim, eadem fere & de numeris particulatim hic demonstrantur.

IN octauo de numeris deinceps proportionalibus: de numeris planis: de quadratis: de cubis, & solidis: de similibus planis, & similibus solidis.

IN nono item de similibus planis: de cubis, & solidis: & de numeris deinceps proportionalibus siue ab vnitate, siue simpliciter: de numeris primis: de numeris paribus,

ribus, de imparibus, de pariter paribus, de pariter imparibus, de pariter paribus & pariter imparibus: de numeris perfectis.

IN decimo de commensurabilibus, & incommensurabilibus magnitudinibus, itemque de rationalibus, & irrationalibus.

IN undecimo primum agitur de rectis lineis, quatenus ad solida corpora referuntur, videlicet quando sint in uno plano; quando rectæ, seu perpendiculares ad planum; quando parallelæ: quomodo à puncto in sublimi dato ad planum perpendicularis ducatur. Deinde vero de planis simul disserit, tum de solidis angulis. Postremo de solidis parallelepipedis, & nonnulla de Prismatibus.

IN duodecimo de pyramidibus, & prismatibus: postea de conis, & cylindris: demum de sphæris.

IN tertiodecimo de constitutione quinque figurarum mundanarum, quas corpora regularia appellant: videlicet tetraedri vel pyramidis, hexaedri vel cubi, octaedri, dodecaedri, & icosaedri; ad quorum euidentiam præmittit nonnulla de iis, quæ accidunt rectæ lineæ extremæ ac mediæ ratione sectæ: de pentagono æquilatero, de hexagoni, & decagoni lateribus, & de triangulo æquilatero.

IN quartodecimo de dodecaedri; & icosaedri in eadem sphæra descriptorum comparatione.

IN quintodecimo & ultimo de inscriptione quinque figurarum iam dictarum, & de earundem lateribus, & angulis.