ELEMENTA
GEOMETRIÆ PLANÆ,
SEU
ELEMENTORUM EUCLIDIS
PRIORES SEX LIBRI
OPERA, AC STUDIO
NICOLAI
DE MARTINO
IN ILLUSTRI LYCEO NEAPOLITANO
MATHEMATUM PROFESSORIS
RECOGNITI, AC ILLUSTRATI.

Excudebat Neapoli Johannes de Simone
Superioribus annuentibus.
ANNO M. DCCLIV.
Expensis Stephani Elia.

GEOMETRIÆ STUDIOSÆ JUVENTUTI.

ELementa Geometriæ Planæ in Tui commodum, & usum edituri, non alia forma, ac methodo illa Tibi sistimus, quam prout in prioribus sex libris elementorum Euclidis continentur. Id autem nemo nobis vitio vertat. Primò, quia mutato ordine Euclideo perdifficilis evadit lectio Archimedis, Apollonii, Theodosii, aliorumque priscæ ætatis Geometrarum, in quibus elementares propositiones laudantur eo ordine, quo extant in Euclidis Elementis. Et deinde quia experientia edocti sumus, longe uberiorem fructum percipere Juventutem ex sola Euclidis lectione, quam si omnia illa Geometriæ Elementa perlustraret, quæ ætate nostra Viri alioquin doctissimi methodo alia adornare conati sunt. Interim priores illos sex libros Euclidis, Geometriæ Planæ Elementa continentes, non ita rudes, ac nudos Tibi exhibemus, quemadmodum Majores Nostri in hac nostra Urbe facere consueverunt, sed nonnihil recognitos, ac illustratos; quandoquidem & definitiones singulis libris præfixas brevibus quibusdam notis explicuimus, & demonstrationes ipsas propositionum paulo nitidiores reddere curavimus. Quin etiam, ne accedens ad hæc studia, Geometriæ penetralia sta-

tim ingredi cogaris, ad rem visum est, præliminarem quamdam dissertationem præmittere, quæ ostenderet cum naturam quantitatum, quas Geometria considerat, tum differentias principiorum, quæ in ea velut indubitata adhibentur, tum denique discrimina ipsarum propositionum, quæ ex iis principiis per demonstrationes deducuntur. Cæterum, quod de Geometriæ utilitate, cum ad mentem perficiendam, tum ad sanioris Physices intellectum in eadem dissertatione nihil adjecerim; non est, quod Exteros offendat, si ad eorum forte manus Opusculum istud, studiosæ nostræ Juventuti dumtaxat destinatum, pervenerit. Enimvero veritas ista in hac nostra Civitate adeo cunctis nota est, ac explorata, ut nec ipse sexus muliebris, qui dici vix potest, quantam disciplinis adipiscendis operam non impendat, a Geometriæ studio arceri patiatur. Vale.

DISSERTATIO

PRÆLIMINARIS.

GEometriæ nomine intelligitur pars illa Matheſeos, quæ circa extenſionem, ſeu quantitatem continuam occupatur: eaque tale nomen ſortita eſt a Terræ dimenſione; quia, ſi Proclo præſtanda fides, ad campos dimetiendos, quorum limites Nili alluvione confundebantur, primum fuit ab Ægyptiis adhibita. Vocatur autem extenſum, ſeu continuum omne id, quod tribus dimenſionibus conſtat, longitudine, latitudine, & profunditate: cujuſmodi ſunt corpora omnia, quæ in hac rerum univerſitate exiſtunt; quum nullum eorum ſit, quod tribus iis dimenſionibus non gaudeat.

Tres iſtæ dimenſiones, ex quibus conſtat extenſio, ſeu quantitas continua, ſemper quidem in hoc mundo ſimul conjunctæ reperiuntur: nec certe res perluſtranti occurret ulla, quæ vel unica dumtaxat dimenſione, vel etiam duabus tantum ſit referta. Interim eo mentis concipiendi modo, quem Scholæ abſtractionem appellant, poſſunt tres illæ dimenſiones a ſe mutuo ſeparari; atque hac ratione non modo corpora, verum etiam lineas, ſuperficies, & puncta Geometræ conſiderant.

Ubi enim a corpore profunditatem ſeparant id, quod remanet, vocant ſuperficiem, quæ proinde longitudine, & latitudine referta, omnino profunditate caret. Quotiescumque vero a superficie amovent latitudinem, gradum faciunt ad lineam, quæ idcirco dumtaxat longitudinem habens, caret tam latitudine, quam profunditate. Denique, quum a linea auferunt longitudinem, & attendunt tantum ad ejus extrema, puncta eis suboriuntur, quorum propterea nulla est pars, nulla dimensio.

Vicissim autem a puncto ad corpus ascendunt in hunc modum. Primo concipiunt, punctum fluere per planum aliquod: & quoniam puncti nulla est pars, nulla dimensio, relinquetur fluxu ipsius in plano vestigium, solam longitudinem habens; atque adeo linea describetur. Deinde lineam istam intelligunt moveri lateraliter: & quia motu isto laterali, accedit ei latitudo, orietur superficies, quæ longitudinem, & latitudinem habet. Denique superficiem istam concipiunt moveri, vel in altum, vel in profundum: & quia hac ratione adjungitur ei altitudo, seu profunditas, nascetur corpus, quod longitudine, latitudine, & profunditate refertur.

Ex quo patet, inanes, & ridiculas esse Scepticorum argutias, dum ipsam Geometriæ certitudinem in dubium revocare conantur ex eo, quod Geometræ præter corpora supponant dari puncta, lineas, & superficies, quæ nusquam sunt. Neque enim assumptum est unquam a Geometris, ut detur, aut dari possit punctum separatum a linea, linea sejuncta a superficie, & superficies a corpore avul-

sa.

sa. Sed quod supponunt, huc redit, ut tres corporis dimensiones, longitudo, latitudo, & profunditas possint, cum simul, tum separatim considerari: quod extra omnem dubitationis aleam est; nam in dimetiendo intervallo, quo Urbs ab Urbe distat, ipsam tantum viarum longitudinem metimur, nihil omnino solliciti de earumdem latitudine.

Sed deinde etsi puncta, lineæ, & superficies nec existant, nec existere possint a corpore separata, nihil tamen vetat, quominus dicamus, ea omnia vere, ac realiter existere in ipso corpore. Quum enim corpus non sit infinitum, suos habere debet terminos veros, ac realtes: qui quidem, quum profunditate careant oportet, habebunt tantum longitudinem, & latitudinem: proindeque non corpora, sed superficies erunt. Et quoniam istarum superficierum unaquæque nec etiam est infinita, sui in ea pariter erunt termini veri, ac reales: qui, quum latitudinis expertes esse debeant, habebunt dumtaxat longitudinem; atque adeo meræ lineæ erunt. Quumque demum quælibet harum linearum finita sit, ei quoque sui competent termini veri, ac reales: quibus quum nec longitudo, nec latitudo, nec profunditas inesse possint, non aliud erunt, quam puncta.

Hinc itaque perspicuum est, quod etsi puncta, lineæ, & superficies abstractione mentis a Geometris considerentur; in ipso tamen corpore vere, ac realiter existant. Sed exinde liquet etiam, ea omnia existere in corpore, non velut ejus partes physicas, sed tantum ut partes modales; quum suboriatur eorum omnium consideratio non ex ipsa corporis substantia, sed ex eo, quod corpus sit magnitudine finitum, ac terminatum: adeo nempe, ut si adesset corpus aliquod omni ex parte infinitum, in eo nec puncta, nec lineæ, nec superficies possent considerari; quum velut undique infinitum nullos terminos, seu fines admittat.

Sed licet puncta, lineæ, & superficies, prout a Geometris considerantur, ad physicam corporis compositionem non pertineant, quum solam habeant rationem terminorum; extitere tamen nonnulli, qui vi suæ imaginationis concedentes punctis, lineis, & superficiebus existentiam realem, & omnino distinctam a corporibus, ea omnia ut physicas corporis partes habuere, nec asserere veriti sunt, lineas quidem ex punctis, superficies vero ex lineis, ac denique corpora ex superficiebus proxime coalescere: ea fortasse decepti ratione, quod ipsi etiam Geometræ, ut paulo ante dictum est, ex motu puncti lineam, ex motu lineæ superficiem, & ex motu denique superficiei oriri corpus tradiderint.

Qui istam opinionem amplectuntur, non possunt in gravissima absurda non impingere. Nam primo, si lineæ constarent ex punctis, sequeretur, lineam majorem quamcunque minorem adæquare. Si enim circa idem centrum duas quascumque circumferentias, seu lineas circulares describamus, & ex centro illo intelligamus ductas ad puncta omnia cir-

cum-

cumferentiæ majoris rectas totidem; transibunt rectæ istæ per puncta totidem diversa circumferentiæ minoris. Unde, quum in utraque circumferentia sit idem punctorum numerus, constabit ex eodem numero partium utraque circumferentia: & propterea, quum earum circumferentiarum inæqualitas nec ex diverso partium numero, nec ex diversa partium mole repeti possit, eas inter se æquales esse oportebit.

Similiter autem, si superficies constarent ex lineis, ostendi posset, superficiem majorem aliam minorem adæquare. Constituantur etenim duo triangula, quorum bases sint æquales, altitudines autem utcumque inæquales. Hæc inter se altitudinum rationem habere, a Geometris demonstratur. Verumtamen, quia quælibet recta, quæ in uno triangulo aptari potest basi æquidistanter, duci etiam potest in altero similiter basi parallela; eædem lineæ, quæ erunt in uno triangulo, reperientur etiam in altero: & propterea, si lineæ forent partes superficierum, constaret utrumque triangulum eodem numero partium, atque adeo unum alterum adæquaret.

Nec aliter liceret ostendere, solidum majus alterum minus adæquare, si utique solida, seu corpora ex superficiebus coalescerent. Fiant etenim duo coni, quorum bases sint æquales, sed non item altitudines. Jam demonstrant Geometræ, conos istos habere inter se eamdem cum suis altitudinibus rationem. Sed quoniam quilibet circulus, qui oritur, secando conum unum plano æquidiſtante baſi, erui quoque poteſt ex cono altero, eum plano alio ſimiliter ſecando; iidem circuli, qui erunt in uno cono, reperientur etiam in altero. Quocirca, ſi ſuperficies eſſent partes ſolidorum, conſtaret uterque conus iiſdem omnino partibus; proindeque unus alterum adæquaret.

Ne igitur in hæc labamur abſurda, dicendum eſt, nec lineas ex punctis, nec ſuperficies ex lineis, nec corpora demum ex ſuperficiebus conſtare. Quod adeo quidem Euclidi innotuit, ut inter axiomata poſuerit, quod duæ lineæ non habeant ſegmentum commune, ſed in unico puncto ſe ſecent. Neque dicas, in indiviſibilium methodo a Cavalerio tradita id velut fundamentum aſſumi, ut omnis quantitas ex ſuis indiviſibilibus conſtet; hoc eſt, ut lineæ quidem ex punctis, ſuperficies vero ex lineis, ac denique corpora ex ſuperficiebus coaleſcant. Nam in methodi hujus applicatione aliud etiam adhibetur, quod falſum illud aſſumptum corrigit, ipſamque methodum veriſſimam reddit.

Ut enim per hanc methodum inter duas lineas, aut duas ſuperficies, vel etiam duo ſolida æqualitas adſtruatur, haud quidem ſatis eſt oſtendere, in utraque earum quantitatum eadem ſemper indiviſibilia capi poſſe: ſed neceſſe eſt ulterius, ut oſtendatur, inter ipſa illa indiviſibilia adeſſe quoque eadem intervalla. Indeque eſt, ut nec inter duas illas circumferentias, nec inter duo illa triangula, nec inter duos illos conos, de quibus modo locu-

locuti sumus, æqualitas consistat; quia etsi eadem indivisibilia sumi possint in utraque quantitate; attamen intervalla indivisibilium unius intervallis indivisibilium alterius nequaquam sunt æqualia.

Jam horum intervallorum consideratio, quæ indivisibilium contemplationi superadditur, hypothesim ipsam indivisibilium corrigit, eandemque veritati suæ restituit. Nam semper ac in quantitatum compositione, non modo ad ea indivisibilia, verum etiam ad eorumdem intervalla debeat attendi; vera quantitatum componentia erunt illa, quæ ex iis indivisibilibus per sua respective intervalla latis oriuntur. Quare lineæ, non quidem ex punctis, sed ex aliis lineolis; superfices, non jam ex lineis, sed ex aliis exiguis superficiebus; & corpora demum, non jam ex superficiebus, sed ex aliis corpusculis coalescent.

Hanc autem esse veram harum omnium quantitatum compositionem, facile sibi quisque in animum inducet, si sedulo consideret, in omni quantitatum genere partem debere esse semper ejusdem naturæ cum toto, ad quod refertur. Hinc etenim fit, ut pars corporis debeat esse similiter corpus, pars superficiei similiter superficies, & pars denique lineæ similiter linea. Quare corpus quidem constabit ex aliis corpusculis, superficies vero coalescet ex aliis exiguis superficiebus, & linea demum ex aliis lineolis componetur.

Nec ad rem facit, quod ipsi etiam Geometræ accipiant puncta in lineis, lineas in superficiebus, & superficies in corporibus. Hinc enim non sequitur, lineas ex punctis, superficies ex lineis, & corpora ex superficiebus constare. Nam in lineis accipiunt Geometræ puncta illa, quæ velut termini referuntur ad eas lineolas, ex quibus lineæ componuntur. Quare adsunt quidem puncta per totam cujusque lineæ longitudinem, sed linea ipsa ex punctis nequaquam composita erit. Et par est ratio de superficie relate ad lineas, nec non de corpore relate ad superficies.

Versatur itaque Geometria circa lineas, superficies, & corpora, nec aliud in iis considerat, quam magnitudinem, seu quantitatem. Propositum est autem Geometris, nihil prorsus asserere, cui possit contradici. Quem in finem omnes suas propositiones ex certis, indubitatisque principiis deducunt. Principia ista sunt triplicis generis: nempe definitiones, postulata, & axiomata. Definitiones sunt explicationes terminorum, quibus utuntur. Postulata autem, & axiomata sunt propositiones, in quibus nihil, quod difficultatem faciat, reperitur; & distinguuntur a se mutuo perinde, ac problemata, & theoremata a se invicem differunt.

Hinc, ut rectius discrimen intelligatur, quod inest inter postulata, & axiomata, sciendum est prius, propositiones illas, quas ex principiis antea positis colligunt Geometræ, esse duplicis speciei. Quædam etenim quidpiam faciendum docent, & dicuntur problemata; quædam vero quidpiam nobis ostendunt, & theoremata appellantur. Hæc autem differentia deprehenditur etiam inter eas propo-

sitio-

sitiones, in quibus nihil occurrit, quod difficultatem faciat, quæque velut principia indubitata ponuntur. Sed ut diversis nominibus distinguerentur, eæ, quæ opus respiciunt, dicuntur postulata; illæ vero, quæ veritatem aliquam continent, axiomata vocitantur.

Ex quo patet, postulatum non aliud esse, quam problema facile; pariterque axioma non aliud, quam facile theorema. Jam ut aliquod problema possit velut postulatum assumi, debet esse adeo facile, ut id, quod in problemate quæritur, unico mentis conceptu possit absolvi. Sic, a puncto ad punctum rectam lineam ducere, est problema; quod ultro velut postulatum habendum; quia ut id perficiatur, satis est concipere, ut unum punctum directe fluat versus aliud. Et similiter, rectam lineam terminatam in directum, & continuum protendere, est problema, quod a postulati natura non excidit; quia ut illud fiat, non aliud concipi debet, quam ut punctum, quod fluxu suo datam rectam lineam descripsit, directe fluere pergat.

Præter duo ista postulata, aliud etiam apud Euclidem reperitur; nempe quovis centro, & quovis intervallo circulum describere. Interim de sensu ejus non satis conveniunt Geometræ. Quidam etenim adeo late illud assumunt, ut etiamsi intervallum non sit prope centrum, adhuc tamen possit vi ejus postulati circulus describi. Alii vero paulo strictius illud accipiunt; scilicet, ut tunc demum liceat, dato centro, datoque intervallo circulum describere, quum datum centrum

est

eſt in extremitate una dati intervalli.

Quin ſecundo hoc ſenſu tale poſtulatum Euclides admiſerit, non eſt dubitandum; quia aliter fruſtra poſuiſſet inter problemata propoſitiones illas; ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere; datis duabus rectis lineis inæqualibus, de majore minori partem æqualem abſcindere: ut pote quæ in illo poſtulato continerentur. Sed num poſſit etiam admitti priore ſenſu, id ex tradita poſtulati natura dijudicandum. Itaque quia in illo ſenſu duo concipi debent; primum, ut intervallum transferatur prope centrum; & deinde, ut circa idem centrum revolvatur: dicendum eſt, excidere a natura poſtulati, quod unicum mentis conceptum debet involvere.

Quod autem illud tantum problema velut poſtulatum haberi debeat, cui ut ſatisfiat, unicus mentis conceptus exigitur; id extra omnem dubitationis aleam eſſe videtur. Nam ſemper ac in conſtructione alicujus problematis plura a nobis concipi debent, facile fieri poteſt, ut pluralitate eorum conceptuum mens diſtrahatur, nec ſatis attendat, num plura illa, quæ concipi debent, pugnent inter ſe. Quare, ut omnis errandi ſuſpicio arceatur, neceſſe eſt oſtendere, poſſe inter ſe mutuo convenire ea omnia, quæ ad ejus problematis conſtructionem concipi debent: proindeque tale problema velut poſtulatum haberi non poterit.

Quantum ad axiomata, ſciendum eſt, illud tantum theorema poni poſſe velut axioma, cujus veritas a nemine ſanæ mentis in dubium ver-

vertitur; quodque proinde demonſtratione ulla non eget. Id autem contingit, quum connexio idearum ſubjecti, & attributi innoteſcit nobis ſola earum idearum conſideratione, abſque eo, quod ideæ aliæ in ſubſidium advocentur. Nam ſemper, ac conſtat nobis ideam attributi contineri in idea ſubjecti ſine ſubſidio alterius ideæ, ſed iis ſolis inſpectis; nulla equidem adhibenda demonſtratio, ut quæ non aliud præſtat, quam aliis in ſubſidium accerſitis ideis connexionem idearum ſubjecti, & attributi in propatulo ponere.

Sed quod vulgo dici ſolet, axiomata demonſtratione non indigere, id non ita intelligendum eſt, quaſi omnis ratiocinatio procul ab axiomatibus eſſe debeat. Sunt enim nonnulla axiomata, quæ explicari debent, ut melius intelligantur. At hæc explicatio naturam eorum axiomatum non evertit; quum non ſit eorum demonſtratio, ſed tantum expoſitio clarior eorumdem aliis, uberioribuſque verbis concepta. Id cernere licet in illo axiomate, quod enunciat, æqualia eſſe, quæ inter ſe mutuo congruunt. Neque enim hoc axioma recte intelligi poteſt, niſi prius explicetur, quæ dicantur congruere inter ſe.

Notetur etiam hoc loco velim, fieri facile poſſe, ut aliquod theorema, quod uno loco poſitum ſua eget demonſtratione, ſi loco alio ponatur, ex ſe ſit evidens, ac apertum, atque adeo velut merum axioma poſſit admitti. Tale eſt Euclidis axioma decimum tertium: ſi in duas rectas lineas tertia incidat recta linea, & efficiat angulos internos ad eamdem partem duo-

duobus rectis minores; duæ illæ rectæ lineæ non erunt parallelæ, sed convenient versus eam partem, in qua anguli duobus rectis minores fiunt. Nam istud axioma non quidem in principio poni debet, sed meretur locum suum post propositionem vicesimam octavam libri primi; quum eo in loco omnem suam evidentiam, ac certitudinem nanciscatur.

Hujus igitur indolis sunt principia, ex quibus Geometræ omnes suas deducunt propositiones, sive sint problemata, sive theoremata. Jam quantum ad problemata, sciendum est in quolibet ipsorum, præter id, quod quæritur, contineri etiam quasdam conditiones, quibus quæsitum ipsum determinatur: ex quo fit, ut in omni problemate duo sedulo sint distinguenda, nempe datum, & quæsitum. Sic in primo problemate, quod in data recta linea terminata triangulum æquilaterum faciendum proponit; datum quidem est ipsa recta linea terminata, quæsitum vero est triangulum æquilaterum in ea discribendum. Atque ita quoque in secundo problemate, ubi ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam oportet applicare; data quidem sunt duo, scilicet punctum, & recta linea, quæsitum vero est, ut ad datum punctum ponatur recta, quæ alteri datæ sit æqualis.

Et puncta quidem, velut omnis magnitudinis expertia, non aliter, quam positione, dari possunt; sed lineæ, superficies, & corpora dari queunt non modo positione, verum etiam magnitudine. Sic in quinto problemate, in quo data recta linea terminata bifariam pro-

po-

ponitur dividenda, recta illa linea terminata magnitudine datur. Viciſſim autem in ſexto problemate, ubi ex puncto in recta linea dato oportet perpendicularem ad rectam illam erigere, datur poſitione tam punctum in recta linea, quam ipſa recta, cui perpendicularis ex puncto illo eſt erigenda.

Datum autem problematis quandoque determinat id, quod in problemate quæritur, interdum vero illud indeterminatum relinquit: indeque oritur vulgata problematum diſtinctio in determinata, & indeterminata. Sic problema, quod dato triangulo æquale parallelogrammum faciendum proponit in dato angulo rectilineo, indeterminatum eſt; quia per duo illa data problematis quæſitum parallelogrammum nequaquam determinatur, ſed poſſunt infinita exhiberi, quæ iiſdem datis correſpondeant. Viciſſim vero, quum ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum oportet applicare in dato angulo rectilineo, problema determinatum eſt, quia tribus iis datis determinatur parallelogrammum, quod quæritur.

Ne autem quiſquam decipiatur, notetur hic velim, quod ut problema dicatur determinatum, haud quidem opus ſit, unicam tantum ſolutionem habere. Fieri enim poteſt, ut problema ſit determinatum, & tamen ut duas, pluresve ſolutiones admittat: quod quidem contingit, quum aliquod ex datis varios caſus ſuſcipere poteſt. Sic problema de deſcribenda circuli portione ſuper data recta linea, quæ ſuſcipiat angulum æqualem dato angulo rectictilineo, determinatum quidem eſt. Sed nihilominus, quia angulus datus poteſt eſſe, vel rectus, vel acutus, vel obtuſus; hinc eſt, ut ob tres hoſce caſus, tres quoque problematis ejus ſolutiones afferantur. Atque ita quoque, quum data circuli portione, inveniendum eſt centrum ejus, problema tametſi determinatum tribus ſolutionibus gaudet: quia nempe data circuli portio poteſt eſſe, vel æqualis, vel minor, vel major ſemicirculo.

Itaque tunc demum problema dici debet, indeterminatum, quum defectu alicujus conditionis id, quod in problemate quæritur, infinitis plane modis poteſt exhiberi. Sed fieri quoque poteſt, ut problema ſit pluſquam determinatum: nempe ſi plures habeat conditiones appoſitas, quam quæ ad quæſiti determinationem requiruntur. Atque hoc caſu problema dicetur impoſſibile, ſi ſuperfluæ conditiones pugnent cum neceſſariis; dicetur vero redundans, ſi viciſſim cum iis conveniant. Sic problema de conſtituendo triangulo æquilatero in data recta linea, cujus omnes anguli ſint æquales, redundans dicendum eſſet; quia æqualitas angulorum pro trianguli æquilateri conſtitutione eſt quidem conditio ſuperflua, ſed non pugnat cum natura ejus trianguli. Per contrarium autem, ſi triangulum æquilaterum conſtituendum deberet habere duos, aut omnes angulos inæquales, problema foret impoſſibile; quia inæqualitas iſta pugnat cum natura trianguli æquilateri.

Quantum ad theoremata, in iis quoque duo

ſunt

sunt sedulo distinguenda; scilicet hypothesis, & conclusio. Hypothesis est id, quod in theoremate assumitur, seu supponitur. Conclusio autem est id, quod ex suppositione, seu assumpto deducitur. Sic, quod duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, itemque æquales angulos sub æqualibus lateribus contentos; id in primo theoremate horum Elementorum hypothesis quidem est. Quod autem sit basis basi æqualis, triangulum æquale triangulo, & reliqui anguli unius æquales reliquis angulis alterius, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur; id quum ex hypothesi illa consequatur, pro conclusione ejus theorematis haberi debet.

Quum theoremata conditionali particula sunt concepta, facile erit in iis tum hypothesim, cum conclusionem distinguere. Sic in tertio theoremate horum Elementorum nemo non videt, hypothesim esse, quod triangulum habeat duos angulos æquales; conclusionem veró, quod æqualia sint latera angulos illos subtendentia. Veruntamen, quum theoremata absolute proposita sunt, tunc facile erit, ut in distinguenda hypothesi hæreant Tyrones. Sic quum ostendit Euclides, angulos ad basim trianguli isoscelis æquales esse inter se; nulli quoque non constat, hypothesim hujus theorematis esse, quod triangulum sit isosceles. Sed in eo theoremate, in quo idem Euclides ostendit, angulos omnes cujuscumque trianguli simul esse duobus rectis æquales, quid pro hypothesi haberi de-

beat,

beat, non omnes peræque percipiunt.

Jam omnis difficultas in distinguenda hypothesi theorematis absolute propositi oritur ex eo, quod subjectum ejus non semper est complexum, hoc est duobus, aut pluribus terminis circumscriptum, sed quandoque incomplexum, ac unico tantum termino definitum. Neque enim aliunde evenit, ut in theoremate proprietatem trianguli isosceles ostendente, hypothesim quisque distinguat; quam quia subjectum illius theorematis est triangulum isosceles, quod duobus terminis designatur; atque adeo nemo non videt, posse idem theorema conditionali particula in hunc modum efferri: si triangulum sit isosceles, erunt anguli ad basim æquales. Neque etiam alia de causa accidit, ut in altero theoremate, quod ostendit æqualitatem angulorum cujuscumque trianguli duobus rectis; non ita facile sit hypothesim discernere, quam quia ejus subjectum est triangulum, quod unico tantum termino exprimitur, nec apparet, quo pacto tale theorema possit conditionaliter concipi.

Id quum ita sit, licebit in unoquoque theoremate hypothesim nullo negotio distinguere, si subjectum ex incomplexo fieri possit complexum. Fiet id autem, si loco termini, subjectum exprimentis, substituamus definitionem suam plures semper terminos involventem. Qua ratione in eo theoremate, in quo ostendit Euclides, omnes angulos cujuscumque trianguli simul duos rectos adæquare, cognoscetur hypothesis, si loco trianguli

de-

definitionem suam, hoc est figuram tribus lateribus contentam, subrogemus. Sic enim perspicuum est, subjectum theorematis evadere complexum, ipsumque adeo theorema posse conditionali particula in hunc modum concipi: si figura tribus lateribus sit contenta, erunt ejus anguli omnes simul duobus rectis æquales.

Theorema porro, vel est simplex, vel compositum. Simplex dicitur theorema; quum vel unica res in theoremate demonstratur, vel plures illæ, quæ ostenduntur, ex una eademque hypothesi descendunt. Sic simplex est, tum illud theorema; si trianguli duo anguli æquales fuerint, & latera angulos illos subtendentia pariter æqualia erunt; cum hoc aliud: si in duas rectas parallelas tertia incidat recta linea, hæc efficiet, & angulos alternos æquales, & exteriorem æqualem interiori, & opposito ad eamdem partem, & internos ad eamdem partem duobus rectis æquales. Nam in illo unica tantum res demonstratur; in isto autem ostenduntur quidem res plures, sed omnes ex una eademque hypothesi deducuntur.

Vicissim autem vocatur theorema compositum, quum plura illa, quæ in eo ostenduntur, non descendunt ex una, eademque hypothesi; cujusmodi est illud; si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima, & secunda erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores tertia, & quarta. Patet namque, conclusionem illius theorematis tripartitam esse, ut quæ asserit secundam magni-

gni-

gnitudinem posse, vel quartam adæquare, vel eam excedere, vel ab illa deficere. Sed perspicuum est quoque, tres illas conclusionis partes ex una, eademque hypothesi non fluere. Nam etsi in singulis partibus quatuor magnitudines semper proportionales supponantur; prima tamen magnitudo respectu tertiæ non semper ponitur in eodem statu manere, sed modo fingitur illam adæquare, modo eam excedere, modo demum ab illa deficere.

Sed simplex theorema subdividitur rursus in complexum, & incomplexum. Vocatur theorema incomplexum, quum unicam rem continet, tum ejus hypothesis, cum ejusdem conclusio; veluti est illud theorema, quod ostendit, duo latera cujuscumque trianguli simul reliquo majora esse, quomodocumque sumpta. Per contrarium vero vocatur complexum, quum vel sola hypothesis, vel sola conclusio, vel denique tam hypothesis, quam conclusio res plures involvit: adeo nempe ut theorema dicendum erit complexum, vel ratione solius hypothesis, vel ratione solius conclusionis, vel demum ratione tam hypothesis, quam conclusionis.

Et ratione quidem solius hypothesis complexa sunt omnia illa theoremata, quæ ostendunt æqualitatem parallelogrammorum, & triangulorum, eamdem vel æquales bases habentium, & in iisdem parallelis positorum. Ratione autem solius conclusionis complexum est illud, quod ostendit æquales angulos tam supra, quam infra basim isoscelium triangulorum. Ac denique ratione tam hypo-

the-

thesis, quam conclusionis complexum est primum theorema horum Elementorum; si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & angulos sub æqualibus lateribus contentos pariter æquales; habebunt & basim basi æqualem, erit triangulum æquale triangulo, & erunt reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur.

Ulterius circa theoremata notare etiam oportet, quod quum duo ex iis ejusmodi sunt, ut hypothesis unius sit conclusio alterius, & vicissim conclusio unius sit hypothesis alterius, tunc duo illa theoremata se mutuo convertere dicantur. Sic, quum ostenditur, in omni triangulo majus latus majorem angulum subtendere; hypothesis quidem est, quod unum trianguli latus sit altero majus; conclusio autem, quod majori lateri major quoque angulus opponatur. At vero, quum demonstratur, in omni triangulo majorem angulum majus latus subtendere; tunc hypothesis est, quod unus angulus trianguli sit altero major; conclusio autem, quod majori angulo majus quoque latus sit oppositum. Quocirca, quum duo ista theoremata talia sint; ut hypothesis unius sit conclusio alterius; & per contrarium conclusio unius sit hypothesis alterius; alterum alterius conversum appellabitur.

Sed præter istam conversionis speciem, in qua theoremata hypotheses, & conclusiones suas perfecte convertunt, alia quoque notari potest, in qua conclusio, quæ integra in hy-

hypothesim vertitur, aliquid retinet prioris hipothesis, & tantum id, quod relinquitur, conversi theorematis conclusio evadit. Id cernere licet in eo theoremate, in quo Euclides ostendit; triangula æqualia, & in eadem basi constituta, esse etiam in iisdem parallelis. Neque enim hoc theorema perfecte convertit illud, in quo idem Euclides ostenderat, æqualia esse triangula illa, quæ sunt in eadem basi, & in iisdem parallelis; sed adsciscens ejus conclusionem, quod triangula sint æqualia, retinet adhuc eam partem hypothesis, quod triangula habeant eamdem basim, tantumque infert partem alteram, quod eadem triangula debeant esse in iisdem parallelis.

Perspicuum est autem, hanc aliam conversionis speciem, quam imperfectam licebit appellare, non posse locum habere, nisi theorema saltem ratione hypothesis sit complexum. Sed manifestum est quoque, quod quum sic theoremata convertuntur, possint unius ejusdemque theorematis plures esse conversiones. Sic theorema, quod perpendicularis ex extremitate diametri ducta circulum contingat, non modo convertitur per illud, quod diameter, ducta ad punctum contactus, sit perpendicularis ad tangentem, verum etiam per hoc aliud, quod perpendicularis, erecta ad contingentem ex puncto contactus, sit circuli diameter.

Problemata quoque suas conversiones patiuntur; quod quidem contingit, quotiescunque datum alicujus problematis mutatur in

quæ-

quæsitum, & vicissim quæsitum mutatur in datum. Hujusmodi sunt duo illa problemata, in quorum altero describenda est in data recta linea circuli portio, quæ suscipiat angulum, æqualem angulo dato; in altero abscindenda ex dato circulo portio, quæ angulum, dato angulo, æqualem assumat. In illo enim quæritur circulus, in quo si data recta ponatur, abscindat ex eo portionem, quæ suscipiat angulum, æqualem angulo dato. In isto autem quæritur per contrarium recta, quæ posita in dato circulo, abscindat ex eo portionem, quæ dati anguli sit capax.

Tam constructiones problematum, quam theorematum conclusiones ex principiis antea positis per suas demonstrationes Geometræ deducunt. Est autem demonstratio duplicis speciei, una quidem directa, seu positiva, altera indirecta, seu negativa. Vocatur demonstratio directa, seu positiva, quum quid ostenditur per ipsa rei principia, hoc est quum inter demonstrandum tales adhibentur propositiones; ut ex iis directe fluat id, quod opportet ostendere. Vocatur vero demonstratio indirecta, seu negativa, aut etiam per impossibile, quum demonstratur per aliquod inde subsequuturum absurdum, si res aliter sese haberet.

Utraque demonstrationis species in his Geometriæ planæ Elementis adhibetur. Sic, quum ostendimus: isoscelium triangulorum angulos tum supra, cum infra basim æquales esse inter se, demonstratione utimur directa, ac positiva; quandoquidem ex iis triangulorum comparationibus, quas inter demonstrandum instituimus, proprietatem illam isoscelium triangulorum directe deducimus. At ubi per contrarium ostendimus, quod si trianguli duo anguli æquales fuerint inter se, & latera angulos illos subtendentia pariter æqualia sint, demonstrationem adhibemus indirectam, ac negativam; quum ostendamus, fore totum suæ parti æquale, si utique latera non essent æqualia.

Innititur autem demonstratio indirecta, ac negativa huic quidem principio, quod etsi ex hypothesi falsa possit quandoque colligi verum, ex hypothesi tamen vera nunquam falsum possit inferri. Hinc enim fit, ut semper ac quidpiam supponitur, & ex ea suppositione absurdum aliquod infertur, ipsam illam suppositionem falsam esse dicendum sit. Non posse autem ex hypothesi vera unquam falsum inferri, nemo non videt. Neque enim aliter esse possunt vitiosæ demonstrationes, hoc est consequentium ex antecedentibus deductiones, quam quia, vel antecedentia seorsim considerata vera non sunt, vel consequentia non sunt legitime ex antecedentibus deducta. Quocirca semper ac ex aliqua hypothesi legitime quidpiam deducitur; hoc quod infertur, non alia ratione falsum esse poterit, quam si ipsa hypothesis sit falsa.

GEO-

GEOMETRIÆ PLANÆ ELEMENTORUM LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

I.

Punctum est id, cujus nulla est pars, seu quod magnitudinem nullam habet. *Vel clarius, est signum in extensione, seu quantitate continua, quod concipitur expers longitudinis, latitudinis, & profunditatis.*

II.

Linea vero est longitudo latitudinis expers. *Sive etiam, est quantitas, quæ longitudinem, seu unam tantum dimensionem habere concipitur. Unde ex fluxu puncti vulgo dicitur oriri.*

III.

Lineæ fines sunt puncta. *Nam non modo latitudine, & profunditate, ad instar ipsius lineæ, verum etiam longitudine carent. Unde punctum definiri quoque potest, terminus lineæ.*

IV.

Superficies autem est id; quod longitudinem, & latitudinem tantum habet. *Sive etiam, est quantitas, quæ duas tantum dimensiones, longitudinem, & latitudinem, habere concipitur. Unde ex motu lineæ laterali vulgo intelligitur oriri.*

V.

Superficiei vero fines sunt lineæ. *Nam longitudinem, seu unicam tantum dimensionem habentes, cum latitudine, tum profunditate carent. Unde linea definiri quoque potest, terminus superficiei.*

Cæterum quantitas, in qua omnes tres dimensiones considerantur, corpus, seu solidum appellatur; & generari intelligitur ex motu superficiei vel in altum, vel in profundum. Quumque quantitas ista superficiebus terminetur; fit hinc, ut definiri quoque possit superficies, terminus corporis.

Linea duplex est, una recta, & altera curva.

VI.

Linea recta est, quæ ex æquali suis interjicitur punctis. *Hoc est, quæ ex æquo jacet inter sua extrema, ita ut ad neutram partem annuat. Unde linea curva erit illa, quæ inter sua puncta, seu extrema, ex æquo non jacet.*

Linea recta definiri quoque potest cum Archimede, quod sit brevissima omnium linearum, quæ duci possunt a puncto ad punctum. Atque hac ratione, quæ earum linearum brevissima non est, linea curva dicetur.

Similiter superficies duplex est, una plana, seu recta, & altera curva.

VII.

Superficies plana est, quæ ex æquali suis interjicitur lineis. *Hoc est, quæ ex æquo jacet inter sua extrema, ita ut nec sursum ascendat, nec descendat deorsum. Unde superficies curva erit illa, quæ inter suas lineas ex æquo non jacet.*

Superficies plana definiri quoque potest cum He-

Herone, quod sit illa, cui omni ex parte potest aptari recta linea. Atque hac ratione ea, cui non omni ex parte aptari potest recta linea, superficies curva dicetur.

VIII.

Angulus planus est duarum linearum in plano (*hoc est in superficie plana*) se mutuo tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio. *Unde ejus quantitas, seu magnitudo, non in longitudine; sed in inclinatione linearum consistit.*

Dividitur angulus ratione linearum, quæ ipsum continent, in rectilineum, curvilineum, & mixtilineum.

IX.

Quando lineæ, quæ angulum continent, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus dicetur. *Quum vero fuerint curvæ, dicetur curvilineus. Et denique, quum sub una recta, & altera curva continetur, mixtilineus appellabitur.*

Angulus rectilineus ratione inclinationis dividitur in rectum, acutum, & obtusum.

X.

Quum recta linea super aliam insistens rectam lineam efficit angulos deinceps (*hoc est hinc inde existentes*) æquales; rectus erit uterque æqualium angulorum; & linea insistens dicetur perpendicularis ad eam, cui insistit. *Unde definiri potest angulus rectus, quod sit ille, cui, uno latere producto, alter æqualis ex parte altera oritur.*

XI.

Angulus acutus est recto minor. *Sive etiam, cui, si unum latus produxeris, alter oritur ex parte altera major.*

XII.

Angulus obtusus est recto major. *Sive etiam, cui, uno latere producto, alter nascitur ex parte altera minor.*

XIII.

Terminus est, quod alicujus est extremum. *Sic punctum est terminus lineæ; linea est terminus superficiei; superficies vero est terminus corporis.*

XIV.

Figura est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur. *Sive clarius, est superficies uno, vel pluribus terminis comprehensa.*

XV.

Circulus est figura plana unius lineæ circuitu comprehensa, quæ circumferentia dicitur, ad quam omnes ab uno punctorum intra figuram existentium cadentes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

XVI.

Hoc vero punctum centrum circuli dicitur. *Unde circuli proprietas hæc est, ut æquales sint omnes rectæ lineæ, quæ ducuntur a centro ad circumferentiam.*

Circulus generari intelligitur ex revolutione rectæ lineæ circa unum ejus extremum fixum, & immobile, usque donec redeat ad eum locum, unde cæperat moveri.

Cujuscumque circuli circumferentia dividitur in tercentum sexaginta partes æquales, quæ gradus dicuntur. Unusquisque gradus in sexaginta minuta prima. Unumquodque minutum primum in sexaginta minuta secunda. Atque ita deinceps. Dia-

XVII.

Diameter circuli eſt recta linea, quæ ducta per centrum, utrimque ad circumferentiam terminatur. *Dicitur autem diameter, quia tranſit per medium circuli, eumque ſecat in duas partes æquales. Hinc.*

XVIII.

Semicirculus eſt figura plana contenta ſub diametro, & dimidia circuli circumferentia.

XIX.

Portio, ſeu ſegmentum circuli eſt figura plana contenta ſub qualibet alia recta linea, intra circulum ducta, & portione circumferentiæ, per eam abſciſſa.

Generaliter autem figuræ omnes ratione linearum, quibus continentur, dividuntur in rectilineas, curvilineas, & mixtilineas.

XX.

Rectilineæ figuræ ſunt, quæ ſub rectis lineis continentur. *Qua ratione curvilineæ erunt, quæ comprehenduntur ſub lineis curvis. Mixtilineæ vero, quæ rectis, & curvis clauduntur.*

Inſuper rectilineæ figuræ pro numero laterum, quibus continentur, dividuntur in trilateras, quadrilateras, & multilateras.

XXI.

Trilateræ ſunt, quæ ſub tribus lateribus continentur; *quæque, quum tres angulos pariter contineant, dici poſſunt quoque triangulæ.*

XXII.

Quadrilateræ vero, quæ quatuor lateribus clauduntur; *quæque dici poſſunt etiam quadrangulæ, quia quatuor angulis ſunt refertæ.*

XXIII.

Ac denique multilateræ, quæ sub pluribus, quam quatuor, lateribus comprehenduntur; *quæque dici possunt quoque multangulæ, quia plures, quam quatuor, angulos habent.*

Triangulum porro considerari potest vel quo ad latera, vel quo ad angulos. Ratione laterum dividitur in æquilaterum, isosceles, & scalenum.

XXIV.

Triangulum æquilaterum est illud, cujus omnia latera sunt æqualia.

XXV.

Triangulum isosceles, seu æquicrure, cujus duo tantum latera sunt æqualia.

XXVI.

Ac denique triangulum scalenum, quod omnia latera inæqualia habet.

Ratione autem angulorum dividitur triangulum in rectangulum, obtusangulum, & acutangulum.

XXVII.

Triangulum rectangulum, seu orthogonium, est illud, quod habet unum angulum rectum.

XXVIII.

Triangulum obtusangulum, seu ambligonium, quod habet unum angulum obtusum.

XXIX.

Ac denique triangulum acutangulum, seu oxygonium, cujus omnes anguli sunt acuti.

Quantum ad figuras quadrilateras, eæ multiplicis etiam speciei sunt, quas sequenti ordine recenset Euclides.

XXX.

XXX.

Quadratum est figura quadrilatera, rectangula simul, & æquilatera. *Hoc est, quæ latera omnia æqualia habet, & omnes angulos rectos.*

XXXI.

Quæ autem rectangula quidem est, sed non æquilatera, (*hoc est angulos habet rectos, sed non latera æqualia*) figura altera parte longior appellatur.

XXXII.

Rhombus porro est figura æquilatera, sed non rectangula. *Hoc est habet latera omnia æqualia, sed non item angulos rectos.*

XXXIII.

Quæ vero nec æquilatera est, nec rectangula, sed tantum habet latera opposita æqualia, Rhomboides appellatur.

XXXIV.

Omnis autem alia figura quadrilatera, quæ ad quatuor species recensitas non refertur, Trapetium dicitur.

XXXV.

Parallelæ, seu æquidistantes rectæ lineæ sunt, quæ in eodem plano existentes, & in infinitum utrimque productæ numquam conveniunt.

Hæc definitio parallelarum, ubi lineæ sunt rectæ, nullo vitio laborat; secus vero, si ad omnes lineas sit extendenda, quia dantur quamplures lineæ, quæ existentes in eodem plano, accedunt semper ad se mutuo, nec unquam conveniunt.

XXXVI.

Parallelogrammum eſt figura quadrilatera, cujus bina oppoſita latera ſunt parallela. *Ejus autem ſpecies ſunt quadratum, figura altera parte longior, rhombus, & rhomboides.*

Hinc figurarum quadrilaterarum duo ſunt ſumma genera, parallelogrammum & trapetium. Nam uel habent latera oppoſita parallela, & dicuntur parallelogramma; vel non habent, & trapetia appellantur.

Parallelogrammi porro vel omnia latera ſunt æqualia, vel tantum oppoſita. Si primum; vel eſt rectangulum, & dicitur quadratum; vel non eſt rectangulum, & vocatur rhombus. Si ſecundum; ſimiliter vel ejus anguli omnes ſunt recti, & dicitur figura altera parte longior; vel non ſunt recti, & rhomboides appellatur.

POSTULATA.

I.

A Puncto ad punctum rectam lineam ducere. *Perficitur in praxi hoc poſtulatum ope regulæ, una ſui parte iis punctis applicandæ.*

II.

Rectam lineam terminatam in directum, & continuum protendere. *Quod ope ejuſdem regulæ, una ſui parte ad datam rectam lineam applicata, in praxi peragitur.*

III.

Quovis centro, & quovis intervallo circulum deſcribere. *Quod perficitur in praxi ope circini, cujus pes alter ponitur in centro, alter in extremo altero dati intervalli, & fixo*

illo

illo manente, iste in gyrum agitur.

AXIOMATA.

I.

QUæ eidem sunt æqualia, inter se sunt æqualia. Et quod uno æqualium majus est, aut minus, erit etiam majus, aut minus altero æqualium.

II.

Si æqualibus æqualia addas, quæ fiunt sunt æqualia.

III.

Si ab æqualibus æqualia demas, quæ remanent sunt æqualia.

IV.

Si inæqualibus æqualia addas, quæ fiunt sunt etiam inæqualia.

V.

Si ab inæqualibus æqualia demas, quæ remanent sunt adhuc inæqualia.

VI.

Quæ ejusdem sunt dupla, tripla, aut quadrupla, inter se sunt æqualia.

VII.

Quæ ejusdem sunt dimidia, tertia, aut quarta pars, inter se sunt æqualia.

VIII.

Totum sua parte majus est; *omnibus autem suis partibus simul sumptis est æquale.*

IX.

Quæ congruunt, sunt æqualia. *Congruere autem dicuntur, quorum unum alteri superimpositum, nec illud excedit, nec ab eo deficit.*

X.

Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt. *Unde figura rectilinea omnium ſimpliciſſima triangulum eſt.*

XI.

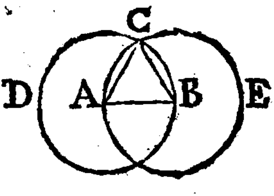
Duæ lineæ non habent ſegmentum commune, ſed in unico puncto ſe ſecant. *Hoc eſt, ubi duarum linearum fit interſectio, ibi lineæ ipſæ nihil habent commune, præter punctum.*

XII.

Omnes anguli recti ſunt æquales; *quia nempe anguli magnitudo conſiſtit non in longitudine, ſed in inclinatione linearum, quæ eſt eadem in omnibus angulis rectis.*

PROP. I. PROBL. I.

In data recta linea terminata triangulum æquilaterum conſtituere.



Sit data recta linea terminata AB. Oportet in ipſa triangulum æquilaterum conſtituere.

Centro quidem A, intervallo autem AB deſcribatur (1) circulus BCD. Rurſus centro quidem B, intervallo autem BA deſcribatur alter circulus ACE. Tum ex puncto C, in quo ſe ſecant cir-

(1) *Poſt.* 3.

circumferentiæ horum circulorum, ad puncta A, & B ducantur (1) rectæ CA, CB. Dico triangulum ACB æquilaterum esse.

Quoniam enim A centrum est circuli BCD, erit (2) AB æqualis AC. Et similiter, quoniam B centrum est circuli ACE, erit BA æqualis BC. Eidem itaque AB est æqualis, cum AC, tum BC. Quare & AC ipsi BC (3) æqualis erit; atque adeo triangulum ACB (4) æquilaterum erit.

In data igitur recta linea terminata AB descriptum est triangulum æquilaterum ACB. Quod fecisse oportebat.

SCHOLIUM.

Non dissimili ratione in data recta terminata AB *fiet triangulum isosceles, seu æquicrure: nempe si intervalla æqualium circulorum sumantur vel æque majora, vel æque minora, quam* AB.

PROP. II. PROBL. II.

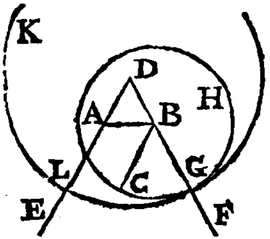
Ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

DAtum sit punctum A, data vero recta BC. Oportet, ad datum punctum A ponere rectam lineam æqualem ipsi BC.

Ab A ad B ducatur (5) AB, super qua con-

---

(1) *Post.*1. (2) *Def.*15. (3) *Axi.*1. (4) *Def.*24. (5) *Post.*1.



constituatur (1) triangulum æquilaterum ADB ; cujus latera DA , DB (2) protrahantur in directum versus E , & F . Tum centro B , intervallo BC describatur, (3) circulus CGH . Denique centro D , intervallo DG describatur alter circulus GLK . Dico , rectam AL æqualem esse ipsi BC .

Quoniam enim D centrum est circuli GLK erit (4) DG æqualis DL . Sed , ob triangulum æquilaterum ADB , est etiam DB æqualis DA . Itaque si ex DG auferatur DB, & ex DL auferatur DA remanebit (5) BG æqualis AL : Est autem B centrum circuli CGH ; adeoque (6) BG æqualis est ipsi BC. Quare & AL (7) eidem BC æqualis erit .

Ad datum igitur punctum A posita est recta AL æqualis datæ BC . Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

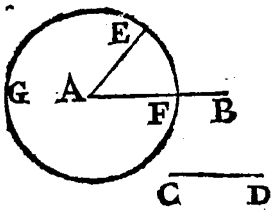
Nonnulli problemati huic satisfieri posse sibi persuadent , si per postulatum tertium centro A , *intervallo datæ rectæ* BC *circulus describatur . Sed perperam ; quia tunc demum quo-*

(1) *Prop.*1. (2) *Post.*2. (3) *Post.*3.
(4) *Def.*15. (5) *Axi.*3.
(6) *Def.*15. (7) *Axi.*1.

quovis centro, & quovis intervallo circulum describere licet, quum centrum est in una extremitate intervalli.

PROP. III. PROBL. III.

Datis duabus rectis lineis inæqualibus, de majore minori partem æqualem abscindere.



Datæ sint duæ rectæ inæquales, AB quidem major, CD vero minor. Oportet ex majore AB abscindere portionem æqualem minori CD.

Ponatur (1) ad punctum A recta AE æqualis ipsi CD. Tum contro A, intervallo AE describatur circulus (2) EFG. Dico, portionem abscissam AF æqualem esse ipsi CD.

Quoniam enim A centrum est circuli EFG, erit (3) AE æqualis ipsi AF. Est autem ex constructione AE æqualis CD. Quare & AF, ipsi CD (4) æqualis erit.

Ex majore itaque AB abscissa est portio AF æqualis minori CD. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

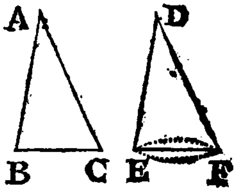
Hoc etiam problema resolvi posse nonnullis vi-

(1) *Prop.* 2. (2) *Post.* 3.
(3) *Def.* 15. (4) *Axi.* 1.

visum est, si per tertium postulatum centro A, intervallo rectæ minoris CD statim circulus describatur. Sed falluntur ob eamdem rationem, quam paulo superius indicavimus.

PROP. IV. THEOR. I.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, & angulos sub iis lateribus contentos æquales; habebunt & basim basi æqualem, erit triangulum æquale triangulo, & erunt reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur.



Sint duo triangula ABC, DEF, quæ habeant duo latera AB, AC æqualia duobus lateribus DE, DF, alterum alteri: nempe latus AB æquale lateri DE, & latus AC æquale lateri DF. Habeant quoque æquales angulos BAC, EDF, sub iis lateribus contentos. Dico, fore basim BC æqualem basi EF, triangulum ABC æquale triangulo DEF, angulum CBA æqualem angulo FED, & angulum BCA æqualem angulo EFD.

Concipiatur etenim triangulum ABC mente superimpositum triangulo DEF hac lege, ut punctum A incidat in punctum D, latus autem AB in latus DE. Et quoniam æquales ponuntur anguli BAC, EDF, incidet

det quoque latus AC in latus DF. Quumque ex hypothesi latera AB, AC æqualia sint lateribus DE, DF, alterum alteri; incidet etiam & punctum B in punctum E,& punctum C in punctum F. Quare & basis BC incidet in basim EF; quia aliter duæ rectæ lineæ clauderent spatium, quod plane (1) repugnat. Quum igitur congruant inter se tum bases, tum triangula, tum reliqui anguli; consequens est, ut (2) basis BC æqualis sit basi EF, triangulum ABC æquale triangulo DEF, angulus CBA æqualis angulo FED, & angulus BCA æqualis angulo EFD. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

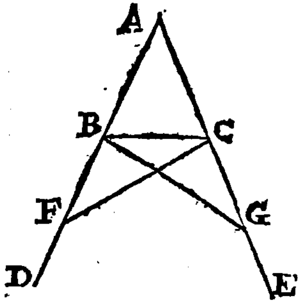
Sedulo autem notetur hoc loco velim, ex reliquis triangulorum angulis eos quidem inter se æquales fieri, quibus æqualia latera subtenduntur. Sic æquales ostensi sunt anguli CBA, FED, *quibus opponuntur latera æqualia* AC, DF; *pariterque æquales anguli* BCA, EFD, *qui habent sibi ipsis opposita latera æqualia* AB, DE. *Hinc vero liquet, quod si triangula* ABC, DEF *fuerint isoscelia, ita ut quatuor latera ipsorum* AB, AC, DE, DF *æqualia sint inter se; tunc quia latus* AC *est æquale cum* DF, *tum* DE; *erit angulus* CBA *æqualis tam angulo* FED, *quam angulo* EFD; *pariterque quia latus* AB *æquale est tum* DE, *cum* DF, *erit angulus* BCA *æqualis tam angulo* FED, *quam angulo* EFD. *Unde jam liquet veritas pri-*

(1) *Axi.* 10. (2) *Axi.* 9.

primæ partis theorematis subsequentis: nempe, quod isoscelium triangulorum anguli, qui supra basim sunt, inter se sint æquales. Nam semper ac eidem angulo CBA *æqualis est tam angulus* FED, *quam angulus* EFD, *per axioma primum æquales erunt inter se duo anguli* FED, EFD, *qui sunt supra basim trianguli isoscelis* DEF.

PROP. V. THEOR. II.

Isoscelium triangulorum anguli ad basim inter se sunt æquales, & productis æqualibus lateribus, anguli infra basim etiam inter se æquales erunt.



Sit triangulum isosceles ABC, habens latus AB æquale lateri AC, & producantur (1) latera æqualia AB, AC in directum versus D, & E. Dico æquales esse inter se, tam angulos supra basim ABC, ACB, quam angulos infra basim CBD, BCE.

Sumatur in BD quodvis punctum F, tum ex majore AE abscindatur (2) portio AG æqua-

(1) *Post.* 2. (2) *Prop.* 3.

æqualis minori AF, junganturque (1) BG.CF. Et quoniam ex hypothesi latus AB est æquale lateri AC; ex constructione autem latus AG æquatur lateri AF; erunt duo latera AB, AG trianguli BAG æqualia duobus lateribus AC., AF trianguli CAF, alterum alteri. Est vero angulus BAG, contentus sub lateribus illius, æqualis angulo CAF, contento sub lateribus istius; quum sit unus idemque angulus A. Quare erit (2) basis BG æqualis basi CF, angulus ABG æqualis angulo ACF, & angulus BGA æqualis angulo CFA.

Et quoniam tota AF est æqualis toti AG, pars vero AB æqualis parti AC; erit etiam (3) reliqua BF æqualis reliquæ CG. Ostensa est autem CF æqualis BG. Itaque duo latera BF, CF trianguli BFC æqualia erunt duobus lateribus CG, BG trianguli CGB, alterum alteri. Est vero ex ostensis angulus BFC, contentus sub lateribus illius, æqualis angulo CGB, contento sub lateribus istius. Quare erit (4) angulus FBC æqualis angulo GCB, (qui quidem anguli sunt infra basim trianguli isoscelis,) & angulus FCB æqualis angulo GBC.

Quum igitur angulus ABG ostensus sit æqualis angulo ACF, & angulus GBC æqualis angulo FCB; fit hinc, ut si ex angulo ABG auferatur angulus GBC, & ex angulo ACF auferatur angulus FCB, reliqui anguli ABC, ACB etiam inter se (5) sint æquales. Hi autem sunt supra basim trianguli isoscelis ABC;

qui

(1) *Post.*1. (2) *Prop.*4. (3) *Axi.*3.
(4) *Prop.*4. (5) *Axi.*2.

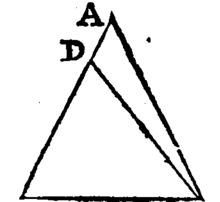
qui vero ſunt infra baſim, jam oſtenſi ſunt æquales. Quare iſoſcelium triangulorum tam anguli ſupra baſim, quam anguli infra baſim inter ſe æquales ſunt. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Hinc patet, triangulum æquilaterum eſſe etiam æquiangulum, hoc eſt non modo latera omnia æqualia habere, verum etiam angulos omnes. Nam triangulum æquilaterum, nihil obſtat, quominus velut iſoſceles conſideretur: quod utique ſi fiat, quodlibet ejus latus velut baſis ſumi poterit.

PROP. VI. THEOR. III.

Si trianguli duo anguli æquales fuerint, & latera eos angulos ſubtendentia pariter æqualia erunt.



Sit triangulum ABC, in quo angulus CBA æqualis ſit angulo BCA. Dico latera AB, AC angulos illos ſubtendentia etiam æqualia eſſe.

Si enim non ſint æqualia, alterum ipſorum majus erit. Sit itaque majus AB, ex quo abſcindatur (1) portio BD æqualis minori AC, & jungatur (2) CD. Quo-

(1) *Prop.* 3. (2) *Poſt.* 1.

Quoniam igitur BD eſt æqualis AC, BC vero communis; erunt duo latera BD, BC trianguli DBC æqualia duobus lateribus AC, BC trianguli ACB, alterum alteri. Eſt autem ex hypotheſi angulus DBC, contentus ſub lateribus illius, æqualis angulo ACB, contento ſub lateribus iſtius. Quare (1) triangulum DBC triangulo ACB æquale erit, hoc eſt pars æqualis toti, quod fieri (2) nequit.

Non itaque latus AB majus eſt latere AC. Sed ob eamdem rationem nec minus eſſe poteſt. Quare ei æquale erit: & propterea ſi trianguli duo anguli æquales fuerint, & latera eos angulos ſubtendentia pariter æqualia erunt. Quod demonſtrare oportebat.

COROLLARIUM.

Ex quo patet, triangulum æquiangulum eſſe etiam æquilaterum, hoc eſt non modo angulos omnes, ſed & latera omnia inter ſe æqualia habere.

SCHOLIUM.

Cæterum hoc theorema convertit primam partem theorematis præcedentis. Nam quemadmodum ibi ex æqualitate laterum deducta eſt æqualitas angulorum; ſic per contrarium in theoremate iſto ex æqualitate angulorum oſtenſa eſt æqualitas laterum.

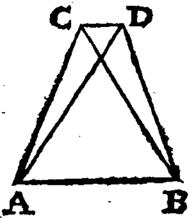
PROP.

---

(1) *Prop.*4. (2) *Axi.*8.

PROP. VII. THEOR. IV.

Ad eamdem rectam lineam duabus eisdem rectis lineis non constituentur aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, ad aliud, atque aliud punctum, ad eamdem partem, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.



Sit recta linea AB, ex cujus extremis A, & B ducantur duæ rectæ lineæ AC; BC, quæ conveniant in puncto C. Dico, ex eisdem extremis non posse duci alias duas rectas lineas ipsis AC, BC æquales, alteram alteri, ad eamdem partem, nisi conveniant in eodem puncto C.

Si enim fieri potest, ducatur A D æqualis AC, & BD æqualis BC, quæ conveniant in puncto D alio, quam C; & jungatur (1) CD.

Quia igitur ex hypothesi AC est æqualis AD, isosceles erit triangulum CAD; proindeque angulus ACD (2) æqualis erit angulo ADC. Jam vero angulus BDC major est angulo ADC. Quare idem angulus BDC erit etiam (3) major angulo ACD, & consequenter multo major angulo BCD.

Et quoniam ex hypothesi BC est æqualis BD, isosceles erit quoque triangulum CBD; adeoque angulus BDC æqualis erit (4) angulo

(1) *Post.*1. (2) *Prop.*5. (3) *Axi.*1. (4) *Prop.*5.

lo BCD. Ostensus est autem major. Itaque idem angulus BDC erit simul major, & æqualis angulo BCD, quod fieri nequit.

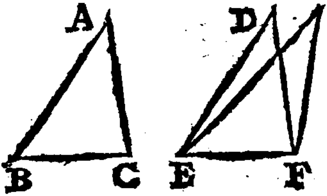
Ad eamdem igitur rectam lineam duabus eisdem rectis non constituentur aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, ad aliud, atque aliud punctum, ad eamdem partem, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes. Quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM.

Hoc theorema est lemma theorematis sequentis; nam ei ostendendo unice inservit, & de cætero alium usum non habet in his Elementis.

PROP. VIII. THEOR. V.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & basim basi æqualem; & angulos sub æqualibus lateribus contentos pariter æquales habebunt.



Sint duo triangula ABC, DEF, quæ habeant duo latera AB, AC æqualia duobus lateribus DE, DF, alterum alteri, & basim BC æqualem basi EF. Dico, angulum BAC æqualem esse angulo EDF.

Concipiatur etenim triangulum ABC men-

mente superimpositum triangulo DEF hac lege, ut punctum B incidat in punctum E, basis autem BC in basim EF. Et quoniam ex hypothesi æquales sunt bases BC, EF, incidet etiam punctum C in punctum F. Quumque latera AB, AC posita sint æqualia lateribus DE, DF, alterum alteri; necesse est, ut incidat quoque punctum A in punctum D; quia aliter in eadem recta linea EF duabus iisdem rectis lineis DE, DF constituentur duæ aliæ æquales, altera alteri, ad aliud, atque aliud punctum, ad eadem partem, eosdem, quos primæ, terminos habentes: quod fieri (1) nequit.

Quum igitur puncta A, B, C, incidant in puncta D, E, F, incident etiam latera AB, AC in latera DE, DF; atque adeo angulus BAC in angulum EDF. Unde quum congruant inter se duo isti anguli, erunt iidem inter se (2) æquales: & propterea, si duo tiangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & basim basi æqualem; & angulos sub æqualibus lateribus contentos pariter æquales habebunt. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

Hoc theorema priorem tantum partem convertit propositionis quartæ. In utroque enim Theoremate supponitur, quod duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri. Sed ibi ex æqualitate angulorum sub æqualibus lateribus contentorum ostensa est

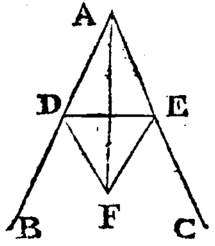
---

(1) *Prop.7.* (2) *Axi.9.*

est æqualitas basium, hic vero per contrarium ex æqualitate basium deducta est prædictorum angulorum æqualitas.

PROP. IX. PROBL. IV.

Datum angulum rectilineum bifariam dividere.



Esto angulus rectilineus BAC. Oportet, eum bifariam dividere.

Sumatur in AB quodvis punctum D. Tum ex majore AC abscindatur (1) portio AE æqualis minori AD. Jungatur porro (2) DE, super qua constituatur (3) triangulum æquilaterum DFE. Denique ab A ad F ducatur (4) recta AF. Dico, rectam AF dividere angulum BAC bifariam.

Quoniam enim ex constructione AD est æqualis AE, communis autem AF; erunt duo latera AD, AF trianguli DAF æqualia duobus lateribus AE, AF trianguli EAF. Jam vero æquales etiam sunt bases eorumdem triangulorum DF, EF, utpote latera trianguli æquilateri DEF. Quare erit (5) angulus DAF æqualis angulo EAF. Et propterea angulus BAC bifariam sectus est per rectam AF. Quod erat faciendum.

C SCHO-

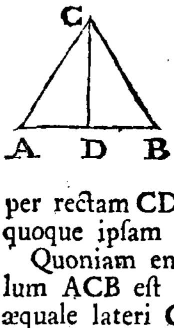
(1) *Prop.* 3. (2) *Post.* 1. (3) *Prop.* 1.
(4) *Post.* 1. (5) *Prop.* 8.

SCHOLIUM.

Ex ipsa hujus problematis demonstratione patet, super recta DE *non alia ratione constituendum esse triangulum æquilaterum, quam ut triangulorum* DAF , EAF *æquales oriantur bases* DF , EF . *Unde perinde res erit, si loco trianguli æquilateri constituatur super eadem recta* DE *per scholium propositionis primæ triangulum isosceles.*

PROP. X, PROBL. V.

Datam rectam lineam terminatam bifariam dividere.



Sit data recta linea terminata AB. Oportet, eam dividere bifariam.

Constituatur super AB (1) triangulum æquilaterum ACB. Tum angulus ejus ACB secetur (2) bifariam per rectam CD. Dico, rectam CD dividere quoque ipsam AB bifariam in puncto D.

Quoniam enim ex constructione triangulum ACB est æquilaterum, erit latus CA æquale lateri CB. Est autem CD commune. Quare duo latera CA , CD trianguli ACD æqualia erunt duobus lateribus CB , CD trianguli BCD, alterum alteri. Jam vero ex con-

(1) *Prop.*1. (2) *Prop.*9.

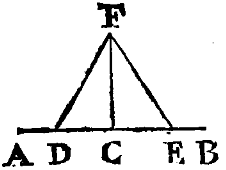
constructione angulus ACD, contentus sub lateribus illius, æqualis est angulo BCD, qui sub istius lateribus continetur. Itaque erit (1) basis AD æqualis basi BD. Et propterea recta AB secta est bifariam in D. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Hic quoque perspicuum est, non alia ratione constitui super AB *triangulum æquilaterum* ACB *quam ut latus* CA *æquale fiat lateri* CB. *Unde quod præstat triangulum æquilaterum, poterit etiam per triangulum isosceles obtineri.*

PROP. XI. PROBL. VI.

Ex puncto in recta linea dato perpendicularem rectam lineam excitare.



Data sit recta AB, & datum in ea punctum C. Oportet, ex puncto isto C erigere perpendicularem super AB. Sumatur in CA quodvis punctum D. Tum ex majore CB abscindatur portio CE æqualis (2) minori CD. Porro super DE constituatur (3) triangulum æquilaterum DFE. Ac demum a C ad F ducatur(4)recta CF. Dico, rectam CF perpendicularem esse super AB.

C 2 Quo-

(1) *Prop*.4. (2) *Prop*.3. (3) *Prop*.1. (4) *Post*.1.

Quoniam enim ex constructione recta CD æqualis est rectæ CE, communis autem CF; erunt duo latera CD, CF trianguli DCF æqualia duobus lateribus CE, CF trianguli ECF; alterum alteri. Jam vero æquales sunt etiam inter se eorumdem triangulorum bases DF, EF, utpote latera trianguli æquilateri DFE. Quare angulus DCF, contentus sub lateribus illius, (1) æqualis erit angulo ECF, qui sub istius lateribus continetur. Unde, quum recta CF subinde incidat super AB, ut efficiat angulos deinceps æquales, ea perpendicularis erit (2) ad AB: & propterea ex puncto C erecta est super AB perpendicularis CF. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

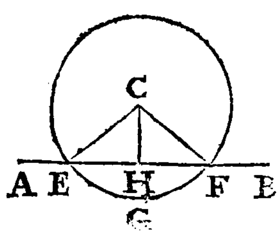
In hujus etiam problematis constructione præstat observare, triangulum æquilaterum DFE *non alia ratione constitui super recta* DE, *quam ut triangulorum* DCF, ECF *æquales oriantur bases* DF, EF. *Unde perinde res erit, si loco trianguli æquilateri describatur super eadem recta* DE *triangulum isosceles*.

PROP. XII. PROBL. VII.

Super rectam infinitam ex puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam demittere.

Data sit recta infinita AB, & datum extra eam punctum C. Oportet, ex puncto isto

(1) *Prop.* 8. (2) *Def.* 10.



isto C perpendicularem demittere super AB.

Respectu puncti C ad alteram partem ipsius AB capiatur punctum aliquod G. Tum centro C, intervallo CG describatur (1) circulus GEF, qui secabit rectam AB in punctis E, & F. Secetur porro recta EF (2) bifariam in H. Ac demum jungatur (3) CH. Dico, rectam CH perpendicularem esse super AB.

Nam ductis rectis CE, CF, quia ex constructione EH est æqualis FH communis vero CH; erunt duo latera EH, CH trianguli CHE æqualia duobus lateribus FH, CH trianguli CHF, alterum alteri. Sunt autem æquales etiam inter se eorumdem triangulorum bases CE, CF, utpote lineæ ductæ a centro ad circumferentiam. Quare æquales quoque erunt (4) anguli CHE, CHF. Unde, quum recta CH subinde incidat super AB, ut angulos deinceps efficiat æquales; ea erit perpendicularis ad AB. Et propterea ex puncto C, dato extra rectam infinitam AB, demissa est recta CH perpendicularis ad ipsam AB. Quod erat faciendum.

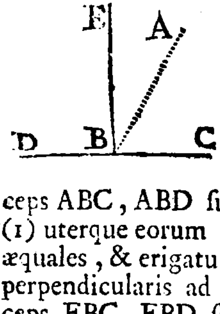
(1) *Post*.3. (2) *Prop*.10.
(3) *Post*.1. (4) *Prop*.8.

SCHOLIUM.

Apposite autem dicitur super rectam infinitam AB; *quia si sit finita, fieri potest, ut producta transeat per datum punctum* C: *quo casu nulla perpendicularis exinde demitti potest super* AB, *quia punctum datum in ipsa producta reperitur.*

PROP. XIII. THEOR. VI.

Recta linea insistens super aliam rectam lineam efficit angulos deinceps, vel rectos, vel duobus rectis æquales.



Recta AB insistat super rectam CD. Dico, angulos deinceps ABC, ABD vel esse rectos, vel simul sumptos duobus rectis æquales.

Nam, vel anguli deinceps ABC, ABD sunt æquales, & rectus erit (1) uterque eorum angulorum; vel non sunt æquales, & erigatur ex puncto B recta BE (2) perpendicularis ad CD, ita ut anguli deinceps EBC, EBD sint recti.

Quoniam itaque angulus EBC æqualis est duobus angulis EBA, ABC simul sumptis; apposito communi EBD, erunt (3) duo anguli EBC, EBD æquales tribus angulis ABC, EBA, EBD. Jam vero duo anguli EBA, EBD

(1) *Def.*10. (2) *Prop.*11. (3) *Axi.*2.

EBD æquales sunt simul angulo ABD; adeoque apposito communi ABC, fiunt tres anguli ABC, EBA, EBD æquales (1) duobus angulis ABC, ABD. Quare erunt duo anguli ABC, ABD (2) æquales duobus angulis EBC, EBD. Unde, quum uterque istorum sit rectus, erunt illi simul duobus rectis æquales. Et propterea recta linea insistens super aliam rectam lineam, efficiet angulos deinceps, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

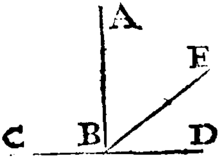
Alternativa est ista propositio, ob duplicem modum, quo recta AB insistere potest super aliam CD. Vel enim insistit perpendiculariter, & tunc efficiet angulos deinceps ABC, ABD æquales, adeoque rectos. Vel insistit oblique, & tunc unum ex iis angulis efficiet acutum, alterum obtusum. Verum quia erecta perpendiculari BE, quantum angulus acutus ABC deficit a recto EBC, tandundem obtusus ABD excedit rectum alium EBD; fit hinc, ut duo anguli deinceps ABC, ABD, etsi unus acutus, alter obtusus, simul tamen æquivaleant duobus rectis EBC, EBD.

PROP. XIV. THEOR. VII.

Si e puncto unius rectæ lineæ ducantur ad partes oppositas duæ aliæ rectæ lineæ, quæ con-

(1) *Axi.* 2. (2) *Axi.* 1.

constituant cum illa angulos deinceps duobus rectis æquales, in directum erunt duæ illæ rectæ lineæ.



Sit recta aliqua AB, ex cujus puncto B ducantur ad partes oppositas aliæ duæ rectæ linæ BC, BD, quæ constituant cum ipsa AB angulos deinceps ABC, ABD, duobus rectis æquales. Dico, BD ipsi BC in directum esse.

Si enim ipsi BC non sit BD in directum, ponatur ei in directum BE. Et quoniam super rectam CBE insistit AB, erunt anguli deinceps ABC, ABE (1) duobus rectis æquales. Sed ex hypotesi anguli ABC, ABD sunt etiam æquales duobus rectis. Quare erunt (2) duo anguli ABC, ABE æquales duobus angulis ABC, ABD: proindeque ablato communi ABC, supererit (3) angulus minor ABE æqualis majori ABD, quod fieri (4) non potest. Non igitur BE in directum est ipsi BC. Quare erit ei in directum recta BD. Et propterea, si e puncto unius rectæ lineæ ducantur ad partes oppositas duæ aliæ rectæ lineæ, quæ constituant cum illa angulos deinceps duobus rectis æquales, in directum erunt duæ istæ rectæ lineæ. Quod erat ostendendum.

SCO-

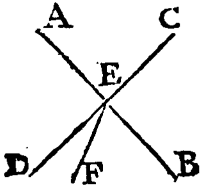
(1) *Prop.* 13. (2) *Axi.* 1.
(3) *Axi.* 3. (4) *Axi.* 8.

SCHOLIUM.

Hoc theorema est conversum praecedentis. In illo enim ex eo quod rectae BC, BD sint in directum, hoc est unicam rectam lineam constituant; ostensum est, angulos deinceps ABC, ABD duobus rectis aequales esse. Vicissim autem in isto ex eo, quod anguli deinceps ABC, ABD sint aequales duobus rectis, ostenditur rectas BC, BD, in directum esse.

PROP. XV. THEOR. VIII.

Si duae rectae lineae se mutuo secent, anguli, quos ad verticem faciunt, inter se sunt aequales.



Rectae duae AB, CD se mutuo secent in E. Dico, angulos, qui ad verticem sunt, inter se aequales esse; hoc est angulum AEC aequalem esse angulo BED, & angulum AED aequalem angulo BEC.

Nam anguli AEC, AED, velut anguli deinceps, sunt (1) aequales duobus rectis; & ob eandem rationem duobus etiam rectis aequales sunt anguli DEB, DEA. Quare duo anguli AEC, AED sunt aequales (2) duobus angulis DEB, DEA: & propterea ablato

C 5 com-

(1) *Prop.* 13. (2) *Axi.* 1.

communi AED, supererit (1) angulus AEG æqualis angulo BED.

Simili modo ostendetur, angulum AED æqualem esse angulo CEB: nempe, quia duobus rectis æquales sunt, tam anguli DEA, DEB, quam anguli BEC, BED. Quare, si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, anguli, quos ad verticem faciunt, inter se æquales sunt. Quod demonstrare oportebat.

S C H O L I U M.

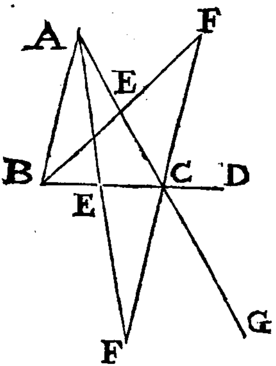
Conversum hujus theorematis etiam obtinet; nempe, quod si in recta AB sumatur punctum aliquod E, ex quo ducantur ad partes oppositas duæ aliæ rectæ lineæ EC, ED, quæ efficiant cum priori angulos ad verticem æquales, in directum sint ipsæ EC, ED. Nam si ipsi EC non sit in directum ED, sit ei in directum EF. Quare per ostensum theorema erit angulus AEC æqualis angulo BEF. Ponitur autem angulus AEC æqualis angulo BED. Quare erit angulus BEF æqualis angulo BED; quod fieri non potest.

PROP. XVI. THEOR. IX.

Omnis trianguli, uno latere producto; exterior angulus est major utrolibet interiore, & opposito.

Sit triangulum ABC, & producatur unum ejus

(1) *Axi.* 3.



ejus latus BC versus D. Dico, angulum exteriorem ACD majorem esse utrolibet interiore, & opposito, hoc est majorem, cum angulo CAB, tum angulo CBA.

Secetur namque latus AC (1) bifariam in E, & juncta (2) BE, quæ producatur (3) ad F, & ponatur ipsi BE (4) æqualis EF. Jungatur porro (5) CF, & AC producatur (6) ad G.

Quoniam igitur ex constructione AE est æqualis EC, & BE æqualis EF; erunt duo latera EA, EB trianguli AEB æqualia duobus lateribus EC, EF trianguli CEF. Sed angulus AEB, contentus sub lateribus illius, æqualis est (7) angulo CEF, qui sub istius lateribus continetur; quum sint anguli ad verticem. Quare & anguli BAE, ECF, oppositi lateribus æqualibus BE, EF, similiter (8) æquales erunt; adeoque, quum angulus ACD major sit angulo ACF, erit etiam (9) major angulo CAB.

 Quem-

(1) *Prop*. 10. (2) *Post*. 1.
(3) *Post*. 2. (4) *Prop*. 3.
(5) *Post*. 1. (6) *Post*. 2.
(7) *Prop*. 15. (8) *Prop*. 4.
(9) *Axi*. 1.

Quemadmodum autem ostensus est angulus ACD major angulo CAB; ita quoque ostendetur angulum BCG majorem esse angulo CBA. Sed angulus BCG æqualis est (1) angulo ACD; quum sint anguli ad verticem. itaque erit idem angulus ACD major quoque angulo CBA. Et propterea omnis trianguli uno latere producto exterior angulus est major utrolibet interiore, & opposito. Quod erat ostendendum.

S C H O L I U M.

De angulo ACB, qui respectu exterioris ACD dici potest interior deinceps, nihil quidem determinari potest; quum ipse exterior ACD possit esse major, minor, & æqualis angulo ACB. quum enim duo anguli ACD, ACB, velut hinc inde existentes, sint æquales duobus rectis; fit hinc, ut si ACD sit rectus, rectus sit etiam ACB, si vero ACD acutus, obtusus sit ACB; & si demum ACD obtusus, acutus sit ACB.

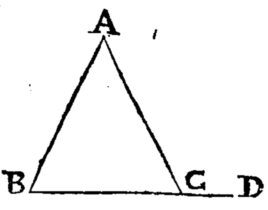
PROP. XVII. THEOR. X.

Omnis trianguli duo anguli simul duobus rectis minores sunt quomodocumque sumpti.

Sit triangulum ABC. Dico, duos ejus angulos, quomodocumque sumptos, puta CBA, BCA, simul duobus rectis minores esse.

Pro-

(1) *Prop.* 15.



Producatur etenim latus BC in directum versus D. Et quoniam angulus exterior ACD est major (1) interiore, & opposito CBA, apposito communi BCA, erunt duo anguli ACD ACB majores (2) duobus angulis CBA BCA. Jam vero duo anguli ACD, ACB, velut hinc inde existentes, sunt æquales (3) duobus rectis. Quare duo anguli CBA BCA simul duobus rectis minores erunt. Et propterea omnis trianguli duo anguli simul duobus rectis minores sunt, quomodocumque sumpti. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

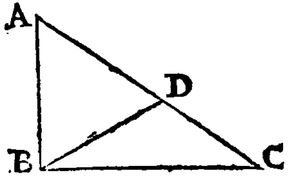
Hinc patet, ex puncto A ad lineam BC unicam tantum perpendicularem duci posse. Nam si duci possent duæ perpendiculares AB, AC forent in triangulo ABC duo anguli CBA, BCA duobus rectis æquales: quod est absurdum. Et ob eamdem rationem, si ex duobus punctis B, & C unius, ejusdemque rectæ BC erigantur ad rectam istam duæ perpendiculares, hæ numquam inter se convenient, atque adeo parallelæ erunt.

PROP.

(1) *Prop.* 16. (2) *Axi.* 4.
(3) *Prop.* 13.

PROP. XVIII. THEOR. XI.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.



Sit triangulum ABC, in quo latus AC majus sit latere AB. Dico, angulum ABC, oppositum majori lateri, majorem esse angulo ACB, qui opponitur lateri minori.

Quoniam enim latus AC majus est latere AB, abscindatur ex eo (1) portio AD æqualis minori AB, jungaturque (2) BD.

Quia igitur AD est æqualis AB, erit triangulum BAD isosceles, adeoque angulus ABD æqualis (3) angulo ADB. Sed angulus ABC major est angulo ABD. Quare idem angulus ABC erit etiam (4) major angulo ADB.

Et quoniam in triangulo BDC latus CD productum est in A, erit angulus exterior ADB (5) major interiori, & opposito ACB. Ostensus est autem angulus ABC major angulo ADB. Quare idem angulus ABC multo major erit angulo ACB. Et propterea omnis trian-

(1) *Prop.*3. (2) *Post.*1.
(3) *Prop.*5. (4) *Axi.* 1.
(5) *Prop.* 16.

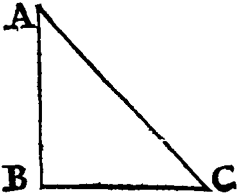
trianguli majus latus majorem angulum subtendit. Quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM.

Hoc theorema supplet casum omissum in theoremate quintæ propositionis. Ibi enim ostensum est, quod si triangulum sit isosceles, hoc est habeat duo latera æqualia, anguli, iis lateribus oppositi, sint etiam æquales. Hic autem ostenditur, quod si unum ex iis lateribus sit altero majus, major sit angulus ille, qui majori lateri opponitur.

PROP. XIX. THEOR. XII.

Omnis trianguli major angulus majus latus subtendit.



Sit triangulum ABC, habens angulum ABC majorem angulo ACB. Dico latus AC, oppositum angulo majori, majus esse latere AB, quod opponitur angulo minori.

Si enim latus AC non est majus latere AB, erit vel ei æquale, vel eodem minus. Æquale autem esse non potest, quia aliter foret (1) angulus ABC æqualis angulo ACB, quod est contra hypotesim. Neque etiam mi-

(1) *Prop.* 5.

minus, quia esset (1) angulus ABC minor angulo ACB, quod est etiam contra hypothesim. Quare erit latus AC majus latere AB. Et propterea in omni triangulo majori angulo majus latus opponitur. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

Hoc theorema est conversum præcedentis. Nam quemadmodum in eo ostensum est, majori lateri majorem angulum opponi; sic vicissim in isto ostenditur, quod majori angulo majus semper latus sit oppositum. Sed idem theorema supplet quoque casum omissum in theoremate propositionis sextæ. In eo enim ostensum est, æquales angulos trianguli æqualia quoque latera subtendere; in isto autem demonstratur, majori angulo majus semper latus opponi.

PROP. XX. THEOR. XIII.

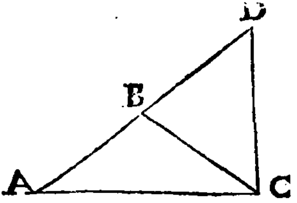
In omni triangulo duo latera simul majora sunt reliquo, quemodocumque sumpta.

Sit triangulum ABC. Dico, duo quælibet ipsius latera simul, puta AB, BC, majora esse reliquo AC.

Protrahatur AB (2) versus D, & fiat (3) BD æqualis BC, jungaturque (4) CD.

Et

(1) *Prop.* 18. (2) *Post.*2.
(3) *Prop.*3. (4) *Post.* 1.



Et quoniam BD eſt æqualis BC, erit BCD triangulum iſoſceles; adeoque angulus BCD (1) æqualis angulo BDC. Eſt autem angulus ACD major angulo BCD. Quare idem angulus ACD erit etiam (2) major angulo BDC: atque adeo, quia majori angulo (3) majus ſemper latus opponitur, erit latus AD majus, quam AC. Sed ex conſtructione AD eſt æquale ipſis AB, BC ſimul ſumptis. Duo igitur latera AB, BC ſimul ſumpta reliquo AC majora ſunt. Et propterea in omni triangulo duo latera ſimul majora ſunt reliquo, quomodocumque ſumpta. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIUM.

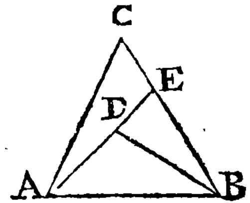
Hoc theorema nulla eget demonſtratione, & velut axioma ultro ab omnibus concedi debet, ſi lineæ rectæ Archimedeam definitionem admittamus. Definitur etenim ab Archimede linea recta, quod ſit breviſſima omnium linearum, quæ duci poſſunt a puncto ad punctum. Itaque, quia AC eſt linea recta, AB vero, & BC ſimul unicam rectam non conſtituunt, ſed angulum continent; erit AC minor ipſis AB, BC ſimul ſumptis.

PROP.

(1) *Prop.* 5. (2) *Axi.* 1. (3) *Prop.* 19.

PROP. XXI. THEOR. XIV.

Si ex terminis unius lateris trianguli ducantur intra triangulum duæ rectæ lineæ; eæ simul minores erunt duobus aliis lateribus trianguli, angulum vero majorem continebunt.



Sit triangulum ABC, & ex punctis A, & B ducantur intra triangulum rectæ duæ AD, BD. Dico, rectas istas AD, BD simul minores esse ipsis AC, BC simul sumptis; at vero angulum ADB majorem esse angulo ACB.

Protrahatur etenim (1) AD usque donec cum BC conveniat in E. Et quoniam in triangulo ACE duo latera AC, CE simul (2) majora sunt reliquo AE; addito communi EB, erunt duo latera AC, CB (3) majora quoque duobus AE, EB.

Rursus quoniam in triangulo DEB duo latera DE, EB simul (4) majora sunt reliquo DB; apposito communi AD, erunt duo latera AE, EB (5) majora etiam duobus AD, DB. Ostensum est autem, latera duo AC, CB ma-

(1) *Post.* 2. (2) *Prop.* 20.
(3) *Axi.* 4. (4) *Prop.* 20.
(5) *Axi.* 4.

CB majora esse duobus AE, EB. Quare eadem AC, CB ipsis AD, DB multo majora erunt.

Deinde quoniam in triangulo BED latus ED productum est in A, erit angulus exterior ADB (1) major interiore, & opposito BED. Atque ita quoque, quoniam in triangulo ACE latus CE productum est in B, erit angulus exterior BED major interiore, & opposito ACE.

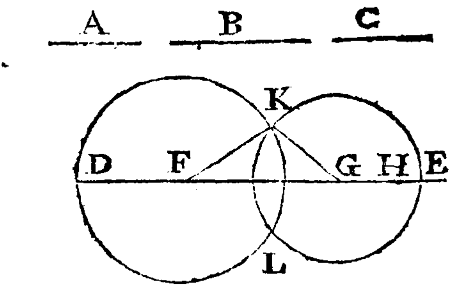
Quum itaque angulus ADB major sit angulo BED, & angulus BED major angulo ACB, erit idem angulus ADB multo major angulo ACB. Quare, si ex terminis unius lateris trianguli ducantur intra triangulum duæ rectæ lineæ, eæ simul minores erunt duobus aliis lateribus trianguli, angulum vero majorem continebunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXII. PROBL. VIII.

Ex tribus rectis lineis, quæ tribus aliis datis sint æquales, triangulum constituere. Oportet autem, ut ex tribus datis duæ simul reliqua majores sint, quomodocumque sumptæ.

Datæ sint tres rectæ lineæ A, B, C, quæ ejusmodi sint, ut duæ simul majores sint reliqua, quomodocumque sumantur. Oportet, ex tribus rectis lineis, quæ tribus iis datis equales sint, triangulum constituere. Ex-

(1) *Prop.* 16.



Exponatur recta quævis DE, terminata verſus D, & indefinita verſus E, ex qua (1) abſcindatur primo DF æqualis A, tum FG æqualis B, ac denique GH æqualis C. Deinde centro F, & intervallo FD deſcribatur (2) circulus DKL; nec non centro G, & intervallo GH alter circulus HKL. Demum ex puncto K, in quo ſe ſecant circumferentiæ horum circulorum ducantur (3) ad puncta F & G rectæ KF, KG. Dico, FKG eſſe triangulum quæſitum.

Quoniam enim F centrum eſt circuli DKL, erit (4) FD æqualis FK. Sed ex conſtructione FD eſt æqualis A. Quare & FK (5) ipſi A æqualis erit. Similiter, quoniam G centrum eſt circuli HKL, erit GH (6) æqualis GK. Sed ex conſtructione GH eſt æqualis C. Quare & GK (7) ipſi C equalis erit.

Sunt itaque trianguli FKG latera duo FK GK æqualia rectis datis A, & C: ſed & latus FG ex

(1) *Prop.* 3. (2) *Poſt.* 3.
(3) *Poſt.* 1. (4) *Def.* 15.
(5) *Axi.* 1. (6) *Def.* 15.
(7) *Axi.* 1

FG ex constructione æquale est alteri B. Constitutum est igitur triangulum FKG, cujus latera FK, FG, GK æqualia sunt tribus rectis datis A, B, C. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

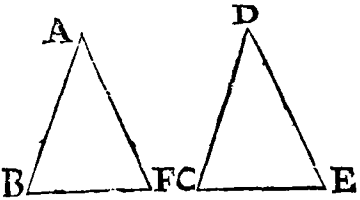
Hoc problema majorem extensionem habet, quam problema primæ propositionis. Ibi enim agebatur de construendo triangulo æquilatero, cujus latera æqualia datæ essent longitudinis. Hic vero agitur de construendo quolibet triangulo, cujus latera singula datam habent longitudinem. Necesse est autem, ut datæ tres rectæ lineæ, quibus æqualia esse debent tria latera trianguli constituendi, ejusmodi sint, ut duæ simul reliqua majores sint, quomodocumque sumptæ; quia, ut superius ostensum est, hæc est proprietas essentialis trianguli, ut duo latera simul majora sint reliquo, quomodocumque sumpta.

PROP. XXIII. PROBL. IX.

Ad datam rectam lineam, atque ad datum in ea punctum angulum dato angulo rectilineo æqualem constituere.

Data sit recta AB, & datum in ea punctum A; datus vero angulus rectilineus CDE. Oportet ad datam rectam AB, atque ad datum in ea punctum A constituere angulum æqualem angulo rectilineo dato CDE.

In



In lateribus anguli dati DC, DE sumantur duo quævis pūcta C, & E, quæ jungantur (1) per rectam CE. Itaque, quia tres rectæ lineæ DC, DE, CE constituunt triangulum DCE, eæ ejusmodi erunt (2), ut duæ simul majores sint reliqua, quomodocumque sumptæ. Quare ad rectam datam AB constituatur (3) aliud triangulum ABF, cujus latera tria AB, AF, BF æqualia sint tribus rectis DC, DE, CE. Dico, angulum BAF æqualem esse angulo CDE.

Quoniam enim ex costructione AB est æqualis DC, & AF æqualis DE; erunt duo latera AB, AF trianguli BAF æqualia duobus lateribus DC, DE trianguli CDE, alterum alteri. Est etiam ex constructione basis illius BF æqualis basi istius CE. Quare erit (4) angulus BAF æqualis angulo CDE. Et propterea ad datam rectam AB, atque ad datum in ea punctum A constitutus est angulus BAF æqualis angulo dato CDE. Quod erat faciendum.

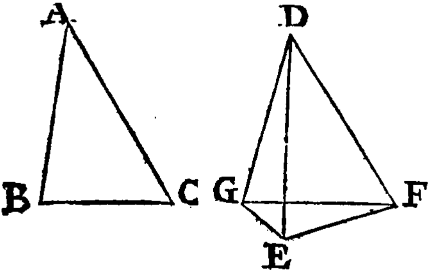
PROP.

---

(1) *Post*. 1. (2) *Prop*. 20.
(3) *Prop*.22. (4) *Prop*. 8.

PROP. XXIV. THEOR. XV.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & angulum sub iis lateribus contentum angulo majorem; & basim basi majorem pariter habebunt.



Sint duo triangula ABC, DEF quæ habeant duo latera AB, AC æqualia duobus lateribus DE DF, alterum alteri, angulum vero BAC majorem angulo EDF, Dico habere quoque basim BC majorem basi EF.

Quoniam enim angulo BAC minor est angulus EDF; fiat ad lineam DF, atque ad datum in ea punctum D (1) angulus FDG æqualis angulo BAC. Tum fiat quoque (2) DG æqualis ipsi AB. Ac denique jungantur (3) GE, GF.

Et quoniam ex constructione AB est æqualis DG, ex hypotesi autem AC est æqualis DF;

(1) *Prop.*23. (2) *Prop.*3.
(3) *Post.*1.

DF; erunt duo latera AB, AC trianguli ABC æqualia duobus lateribus DG, DF trianguli DGF, alterum alteri. Eſt etiam ex conſtructione angulus BAC, contentus ſub lateribus illius, æqualis angulo GDF, qui ſub iſtius lateribus continetur. Quare & baſis BC (1) baſi GF pariter æqualis erit.

Rurſus, quoniam ex conſtructione DG eſt æqualis AB, ex hypotheſi autem eidem AB æqualis eſt etiam DE, erit (2) DE æqualis DG: atque adeo, quum iſoſceles ſit triangulum GDE, erit (3) angulus DGE æqualis angulo DEG. Eſt autem angulus FEG major angulo DEG. Quare idem angulus FEG (4) major quoque erit angulo DGE; ac propterea multo major angulo FGE.

Quum igitur in triangulo GEF angulus FEG major ſit angulo FGE, erit (5) latus GF, oppoſitum majori angulo, majus latere EF, quod opponitur angulo minori. Ipſi autem GF oſtenſa eſt æqualis BC. Quare & BC eadem EF major quoque erit. Et propterea, ſi duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & angulum ſub lateribus iis contentum angulo majorem; & baſim baſi majorem pariter habebunt. Quod erat oſtendendum.

SCHO-

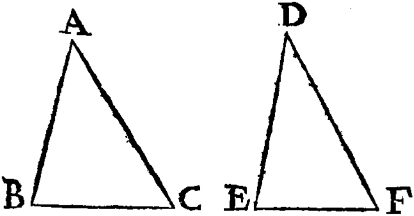
(1) *Prop.* 4. (2) *Axi.* 1.
(3) *Prop.* 5. (4) *Axi.* 1.
(5) *Prop.* 19.

SCHOLIUM.

Hoc theorema ſupplet caſum omiſſum in theoremate propoſitionis quartæ. Ibi enim oſtenſum eſt, quod duorum triangulorum, duo latera duobus lateribus æqualia habentium, alterum alteri, ſi æquales fuerint anguli ſub lateribus iis contenti, baſes etiam ſint æquales. In hoc autem oſtenditur, quod eorumdem triangulorum ſi angulus angulo major ſit, & baſis baſi etiam major erit.

PROP. XXV. THEOR. XVI.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & baſim baſi majorem; habebunt & angulum, ſub iis lateribus contentum, angulo quoque majorem.



Sint duo triangula ABC, DEF, quæ habeant duo latera AB, AC æqualia duobus lateribus DE, DF alterum alteri; habeant vero baſim BC majorem baſi EF. Dico, habere quoque angulum BAC majorem angulo EDF.

Si enim angulus BAC major non ſit angulo lo EDF; erit vel ei æqualis, vel eodem minor. Æqualis autem esse non potest, quia aliter foret (1) basis BC æqualis basi EF, quod est contra hypotesim. Neque etiam minor, quia esset (2) basis BC minor basi EF, quod est etiam contra hypotesim. Quare consequens est, ut angulus BAC major sit angulo EDF. Et propterea, si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & basim basi majorem; habebunt & angulum, sub iis lateribus contentum angulo quoque majorem. Quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM.

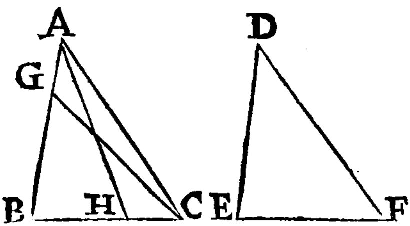
Hoc theorema, licet non omni ex parte, convertit, quod præcedenti propositione positum est. In utroque enim supponitur, quod duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; sed in illo ex eo, quod angulus, sub æqualibus lateribus contentus, sit angulo major ostensum est, & basim basi majorem esse: in isto vero vicissim ex eo, quod basis sit major basi, ostenditur, angulum angulo majorem esse. Idem etiam theorema supplet casum omissum in theoremate propositionis octavæ: quum ostensum sit in illo, quod si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & basim basi æqualem; angulos sub æqualibus lateribus contentos etiam æquales sint habitura.

PROP.

(1) *Prop.*4. (2) *Prop.*24.

PROP. XXVI. THEOR. XVII.

Si duo triangula habeant duos angulos duobus angulis æquales, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, sive quod æqualibus adjacet angulis, sive quod uni æqualium angulorum opponitur; omnia alia etiam æqualia habebunt.



Sint duo triangula ABC, DEF, quæ habeant duos angulos CBA, BCA æquales duobus angulis FED, EFD, alterum alteri. Et habeant primum æqualia quoque latera BC, EF, quæ adjacent æqualibus angulis. Dico omnia alia æqualia esse, nempe latus AB æquale lateri DE, latus AC æquale lateri DF, angulum BAC æqualem angulo EDF, ipsumque triangulum ABC æquale triangulo DEF.

Si enim latus AB æquale non sit lateri DE, alterum ipsorum majus erit. Sit itaque majus latus AB, ex quo abscindatur (1) portio BG æqualis minori DE, & jungatur (2) CG.

Quoniam itaque ex constructione GB est

 æqua-

(1) *Prop.* 3. (2) *Post.* 1.

æqualis DE; ex hypothesi vero BC æqualis EF, erunt duo latera BG, BC trianguli GBC æqualia duobus lateribus DE, EF trianguli DEF, alterum alteri. Est etiam angulus GBC, sub illius lateribus contentus, æqualis ex hypotesi angulo DEF, qui sub lateribus istius continetur. Quare erit (1) angulus BCG æqualis quoque angulo EFD. Sed angulo EFD æqualis est ex hypotesi angulus BCA. Itaque erit angulus BCG (2) æqualis angulo BCA: quod plane (3) repugnat.

Non igitur latus AB majus est latere DE. Sed ob eamdem rationem nec etiam minus esse potest. Quare consequens est, ut latus AB æquale sit lateri DE. Quumque ex hypothesi latus BC æquale sit lateri EF, & angulus CBA æqualis angulo FED; habebunt duo triangula ABC, DEF duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & angulos sub æqualibus lateribus contentos æquales. Unde omnia alia etiam (4) æqualia erunt.

Sed eadem triangula ABC, DEF habeant secundo æqualia latera duo AB, DE, quæ opponuntur angulis æqualibus BCA, EFD. Dico quoque, omnia alia æqualia esse; scilicet latus AC æquale lateri DF, latus BC æquale lateri EF, angulum BAC æqualem angulo EFD, ipsumque triangulum ABC æquale triangulo DEF.

Si enim latus BC non sit æquale lateri EF, alterum ipsorum majus erit. Sit itaque majus

(1) *Prop.* 4. (2) *Axi.* 1.
(3) *Axi.* 8. (4) *Prop.* 4.

jus latus BC, ex quo abſcindatur (1) portio BH æqualis minori EF, & jungatur (2) AH.

Quoniam itaque ex hypotheſi AB eſt æqualis DE, ex conſtructione autem BH eſt æqualis EF, erunt duo latera AB, BH trianguli ABH æqualia duobus lateribus DE, EF trianguli DEF, alterum alteri. Eſt etiam ex hypotheſi angulus ABH, contentus ſub lateribus illius, æqualis angulo DEF, qui ſub iſtius lateribus continetur. Quare erit (3) angulus BHA æqualis angulo EFD. Sed ex hypotheſi angulo EFD æqualis eſt angulus BCA. Itaque erit angulus BHA (4) æqualis angulo BCA, hoc eſt exterior æqualis interiori, & oppoſito: quod plane (5) repugnat.

Non igitur latus BC majus eſt latere EF. Sed ob eamdem rationem neque etiam minus eſſe poteſt. Quare conſequens eſt, ut latus BC æquale ſit lateri EF. Quumque ex hypotheſi latus AB æquale ſit lateri DE, & angulus CBA æqualis angulo FED; habebunt triangula duo ABC, DEF duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & angulos ſub æqualibus lateribus contentos pariter æquales. Quare omnia alia, (6) etiam æqualia erunt.

Itaque ſi duo triangula habeant duos angulos duobus angulis æquales, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, ſive

 quod

(1) *Prop.* 3. (2) *Poſt.* 1.
(3) *Prop.* 4. (4) *Axi.* 1.
(5) *Prop.* 16. (6) *Prop.* 4.

quod æqualibus adjacet angulis, sive quod uni æqualium angolorum opponitur; & omnia alia æqualia pariter habebunt. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

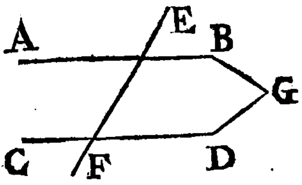
Theorematis hujus pars prior perfecte convertit id, quod propositione quarta positum est. Nam quemadmodum ibi ex eo, quod triangula duo ABC, DEF habeant duo latera AB, AC æqualia duobus lateribus DE, DF, alterum alteri, & angulum BAC æqualem angulo EDF, ostensum est, basim BC æqualem esse basi EF, angulumCBA æqualem angulo FED, & angulum BCA æqualem angulo EFD; sic vicissim in theorematis hujus parte priore ex eo quod triangula duo ABC, DEF habeant duos angulos CBA, BCA æquales duobus angulis FED, EFD, alterum alteri, & basim BC æqualem basi EF, ostenditur, latus AB æquale esse lateri DE, latus AC æquale lateri DF, & angulum BAC æqualem angulo EDF.

PROP. XXVII. THEOR. XVIII.

Si in duas rectas lineas, in eodem plano jacentes, tertia incidat recta linea, & efficiat angulos alternos æquales; parallelæ erunt duæ illæ rectæ lineæ.

Sint duæ rectæ linæ AB, CD, quæ existant in uno, eodemque plano, & in eas incidat tertia recta linea EF, quæ effici-

ci-



ciat angulos alternos æquales, hoc eſt angulum AEF æqualem angulo EFD. Dico, rectas duas AB, CD parallelas eſſe inter ſe.

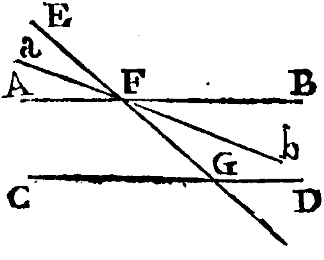
Si enim non ſint parallelæ, eæ productæ verſus aliquam partem convenient. Producantur itaque, & conveniant in G. Figura igitur EFG, velut contenta ſub tribus rectis lineis, triangulum eſt. Unde, quum latus GE productum ſit in A, erit (1) angulus exterior major utrolibet interiore, & oppoſito, hoc eſt angulus AEF major tam angulo EGF, quam angulo EFG. Eſt autem ex hypotheſi angulus AEF æqualis angulos EFG. Idem igitur angulus AEF eſt major ſimul, & æqualis angulo EFG: quod fieri non poteſt. Non igitur rectæ duæ AB, CD productæ convenient inter ſe. Quare, quum in eodem conſiſtant, plano, (2) eædem parallelæ erunt. Et propterea, ſi in duas rectas lineas, in eodem plano jacentes, tertia incidat recta linea, & efficiat angulos alternos æquales; parallelæ erunt duæ illæ rectæ lineæ. Quod erat demonſtrandum.

PROP. XXVIII. THEOR. XIX.

Si in duas rectas lineas, in eodem plano jacentes, tertia incidat recta linea, & efficiat, vel angulum exteriorem æqualem interiori, & op-

(1) *Prop.* 16. (2) *Def.* 35.

opposito ad eandem partem, vel duos angulos interiores ad eandem partem positos, duobus rectis aequales; parallelae erunt duae illae rectae lineae.



Sint duæ rectæ lineæ AB,CD, quæ existant in uno eodemque plano,& in eas incidat tertia recta linea EFG. Dico primo, quod si angulus exterior EFB sit æqualis interiori, & opposito ad eamdem partem FGD, duæ illæ rectæ lineæ AB, CD inter se sint parallelæ.

Anguli enim AFG EFB, velut ad verticem positi, inter se (1) sunt æquales. Unde semper ac angulus EFB æqualis ponitur angulo FGD; erit etiam (2) angulus AFG æqualis angulo FGD. Jam vero isti duo anguli sunt alterni. Itaque lineæ AB, CD (3) parallelæ erunt inter se.

Dico secundo, quod si duo anguli interiores, ad eandem partem positi, BFG, FGD sint simul duobus rectis æquales, duæ illæ rectæ lineæ AB, CD etiam inter se sint parallelæ.

Nam anguli AFG, BFG, velut hinc inde positi, sunt simul (4) duobus rectis æquales. Sed ex hypothesi æquales sunt etiam duobus re-

(1) *Prop.*15. (2) *Axi.* 1.
(3) *Prop.*27. (4) *Prop.* 13.

rectis anguli duo BFG, FGD. Quare erunt duo anguli AFG, BFG æquales (1) duobus angulis BFG, FGD; & propterea, ablato communi BFG, supererit (2) angulus AFG æqualis angulo FGD. Sunt autem anguli isti alterni. Itaque lineæ AB, CD (3) parallelæ erunt inter se. Et propterea, si in duas rectas lineas, in eodem plano jacentes, tertia incidat recta linea, & efficiat vel angulum exteriorem æqualem interiori, & opposito ad eandem partem, vel duos angulos interiores, ad eandem partem positos, duobus rectis æquales; duæ illæ rectæ lineæ parallelæ erunt inter se. Quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM I.

Ex duabus propositionibus præcedentibus perspicuum fit parallelismum linearum tripliciter cognosci posse. Primo nempe, si in iis anguli alterni sint æquales. Secundo, si angulus exterior sit æqualis interiori, & opposito ad eandem partem. Ac tertio demum, si duo anguli interiores, ad eandem partem positi, sint simul duobus rectis æquales.

SCHOLIUM II.

Rectæ igitur AB, CD, parallelæ sunt inter se siquidem duo anguli BFG, FGD simul sint duobus rectis æquales. Revolvatur jam recta AB circa punctum F, ita ut positionem acquirat rectæ ab *: & perspicuum est, revolu-*

(1) *Axi.* 1. (2) *Axi.* 3. (3) *Prop.* 27.

tione ista nec rectas ab, *CD esse amplius parallelas, utpote convenientes versus* b *D, nec angulos* b *FG, FGD æquales esse simul duobus rectis, utpote minores. Unde nihil obstat, quominus hoc loco tamquam verum agnoscamus sequens axioma Euclideum.*

AXIOMA XIII.

Si in duas rectas lineas, in eodem plano jacentes, tertia incidat recta linea, & efficiat duos angulos interiores, ad eandem partem positos, duobus rectis minores; duæ illæ rectæ lineæ non erunt parallelæ, sed convenient versus eam partem, in qua fiunt duo illi anguli, qui simul duobus rectis minores sunt.

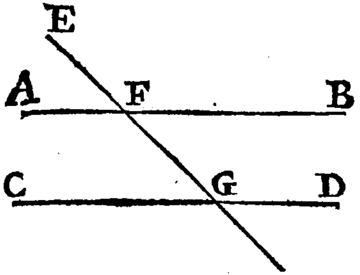
PROP. XXIX. THEOR. XX.

Si in duas rectas lineas parallelas tertia incidat recta linea; hæc efficiet & angulos alternos æquales; & angulum exteriorem æqualem interiori, & opposito ad eandem partem; & duos angulos interiores ad eandem partem positos, duobus rectis æquales.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB, CD, in quas incidat tertia EFG. Dico primo, angulos alternos AFG FGD æquales esse inter se.

Si enim non sint æquales, alter ipsorum major erit. Sit itaque angulus AFG major angulo FGD. Quare apposito communi BFG, erunt (1) duo anguli AFG, BFG

(1) *Axi.* 4.



BFG majores duobus angulis BFG, FGD. Sunt autem duo anguli AFG, BFG (1) æquales duobus rectis. Itaque anguli duo BFG, FGD, qui sunt interiores ad eandem partem positi duobus rectis minores erunt; & propterea rectæ AB, CD (2) non erunt parallelæ: quod est contra hypothesim. Non itaque angulus AFG major est angulo FGD. Et quoniam ob eandem rationem nec minor etiam esse potest, concludendum est, angulum AFG æqualem esse angulo FGD.

Dico secundo, angulum exteriorem EFB æqualem esse interiori, & opposito ad eandem partem FGD.

Angulus enim AFG ostensus est æqualis angulo FGD. Jam vero idem angulus AFG (3) æqualis est etiam angulo EFB. Quare erit (4) angulus EFB æqualis angulo FGD.

Dico tertio, duos angulos BFG, FGD, qui sunt interiores, ad eandem partem positi, esse simul duobus rectis æquales.

Nam quum angulus AFG ostensus sit æqualis angulo FGD; apposito communi BFG, erunt (5) duo anguli AFG, BFG æquales duobus

(1) *Prop.* 13. (2) *Axi.* 13. (3) *Prop.* 15.
(4) *Axi.* 1. (5) *Axi.* 2.

bus angulis BFG, FGD. Sed duo anguli AFG, BFG ſimul (1) ſunt æquales duobus rectis. Quare etiam (2) duobus rectis æquales erunt duo anguli BFG, FGD.

Igitur, ſi in duas rectas lineas parallelas tertia incidit recta linea, hæc efficiet & angulos alternos æquales; & angulum exteriorem æqualem interiori, & oppoſito ad eandem partem; & duos angulos interiores, ad eandem partem poſitos, duobus rectis æquales. Quod demonſtrare oportebat.

SCHOLIUM.

Convertit hæc propoſitio utramque propoſitionum præcedentium. In iis enim ex hypotheſi, quod vel anguli alterni ſint æquales, vel angulus exterior æqualis ſit interiori & oppoſito ad eandem partem, vel duo anguli interiores, ad eandem partem poſiti, ſint æquales duobus rectis, colligitur ſemper lineas eſſe parallelas. Viciſſim autem in iſta, ex ſuppoſito parallelismo linearum tria illa neceſſario conſequi, demonſtratur.

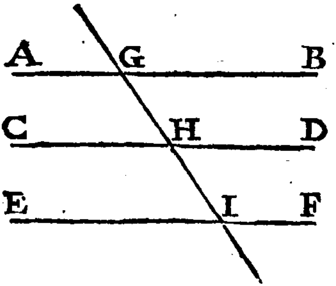
PROP. XXX. THEOR. XXI.

Quæ eidem ſunt parallelæ, inter ſe ſunt parallelæ

EIdem rectæ lineæ EF parallela ſit tam recta AB, quam recta CD. Dico, rectas AB, CD parallelas eſſe inter ſe.

Du-

(1) *Prop.* 13. (2) *Axi.* 1.



Ducatur enim recta alia, GHI, quæ eas utcumque secet in tribus punctis G, H, I. Et quoniam ex hypothesi rectæ AB, EF, sunt parallelæ; erunt (1) anguli alterni AGI, GIF æquales inter se. Pariterque quoniam ex hypothesi parallelæ sunt rectæ CD, EF; erit (2) angulus exterior GHD æqualis interiori, & opposito ad eandem partem GIF. Eidem igitur angulo GIF æqualis est tam angulus AGH, quam angulus GHD. Quare erit (3) angulus AGH æqualis angulo GHD: qui quum sint alterni, erunt lineæ AB, CD (4) inter se parallelæ. Et propterea, quæ eidem sunt parallelæ, inter se parallelæ sunt. Quod erat demonstrandum.

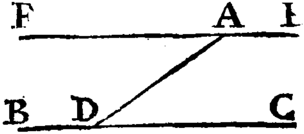
PROP. XXXI. PROBL. X.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Datum sit punctum A, data vero recta BC. Oportet, per datum punctum A ducere rectam parallelam datæ BC.

Capiatur in BC punctum quodvis D, & jun-

(1) *Prop.* 29. (2) *Prop.* 29.
(3) *Axi.* 1. (4) *Prop.* 27.

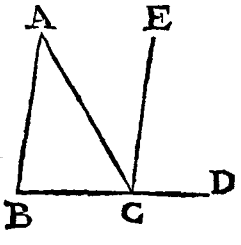


juncta (1) AD fiat (2) ad rectam istam AD, atque ad datum in ea punctum A angulus DAE æqualis angulo ADB, & extendatur (3) EA versus F. Dico, rectam EF parallelam esse ipsi BC.

Sunt enim ex constructione æquales inter se anguli DAE, ADB. Sed isti anguli sunt alterni. Quare rectæ EF, CB (4) parallelæ erunt inter se. Et propterea per datum punctum A ducta est recta EF parallela datæ BC. Quod erat faciendum.

PROP. XXXII. THEOR. XXII.

Cujuscumque trianguli, uno latere producto, angulus exterior est æqualis duobus interioribus, & oppositis simul sumptis; & anguli omnes simul duobus rectis sunt æquales.



Sit triangulum ABC, & unum ejus latus BC extendatur versus D. Dico, angulum exteriorem ACD æqualem esse duobus interioribus, & oppositis simul sumptis CAB, ABC.

Per punctum C ducatur (5) recta CE ipsi AB

(1) *Post.* 1. (2) *Prop.* 23. (3) *Post.* 2.
(4) *Prop.* 27. (5) *Prop.* 31.

AB parallela. Et quoniam parallelæ ſunt rectæ lineæ AB, CE, & in ipſas incidit AC, erit (1) angulus ACE æqualis angulo CAB. Similiter, quoniam rectæ AB, CE ſunt parallelæ, & in ipſas incidit BD, erit (2) angulus exterior DCE æqualis interiori, & oppoſito ad eandem partem ABC. Oſtenſum eſt autem angulus ACE æqualis angulo CAB. Itaque erit totus angulus ACD æqualis duobus angulis ſimul ſumptis CAB, ABC.

Dico etiam, omnes angulos ejuſdem trianguli ABC ſimul duobus rectis æquales eſſe.

Oſtenſum eſt enim, angulum ACD æqualem eſſe duobus angulis CAB, ABC. Quare appoſito communi BCA, erunt (3) duo anguli BCA, ACD æquales tribus angulis CAB, ABC, BCA. Sed duo anguli BCA, ACD ſimul (4) ſunt æquales duobus rectis. Itaque tres anguli CAB, ABC, BCA ſimul etiam duobus rectis æquales erunt. Et propterea cujuſcumque trianguli, non modo uno latere producto angulus exterior eſt æqualis duobus interioribus, & oppoſitis ſimul ſumptis, ſed & anguli omnes ſimul duobus rectis æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

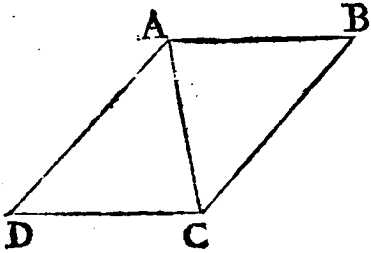
Theorematis hujus duæ ſunt partes, quarum altera paulo ſpecialius determinat id, quod propoſitione XVI. poſitum eſt; altera ſpecialiorem

(1) *Prop.* 29. (2) *Prop.* 29.
(3) *Axi.* 2. (4) *Prop.* 13.

rem continet determinationem ejus, quod propositione XVII. posuimus. In iis enim ostensum est, cujuscumque trianguli, uno latere producto, angulum exteriorem majorem esse unoquoque ex duobus interioribus, & oppositis; nec non duos angulos simul duobus rectis minores esse. Hic autem ostenditur cujuscumque trianguli angulum exteriorem æqualem esse duobus interioribus, & oppositis simul sumptis, omnesque angulos internos simul duos rectos adæquare.

PROP. XXXIII. THEOR. XXIII.

Quæ æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectas lineas, sunt etiam æquales, & parallelæ.



Sint rectæ duæ AB, DC æquales, & parallelæ, quæ conjugantur ad easdem partes per duas alias rectas lineas AD, BC. Dico, rectas istas AD, BC illas conjungentes ad easdem partes, esse etiam æquales, & parallelas.

Ducatur etenim (1) recta AC. Et quoniam AB,

(1) *Post.* 1.

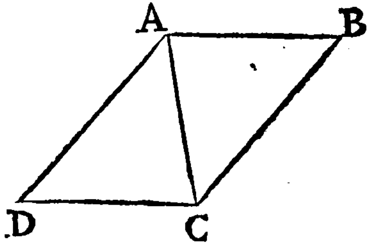
AB, DC sunt parallelæ, & in ipsas incidit AC; erit (1) angulus BAC æqualis angulo ACD. Unde, quum duo triangula BAC, DCA habeant duo latera AB AC æqualia duobus lateribus CD, CA alterum alteri, nec non æquales angulos, sub iis lateribus contentos: habebunt (2) & basim BC æqualem basi AD, & angulum ACB æqualem angulo DAC. Quare quum in duas rectas AD, BC incidat tertia AC, & efficiat angulos alternos æquales; eæ erunt (3) inter se parallelæ. Ostensæ sunt autem æquales. Erunt igitur æquales, & parallelæ. Et propterea, quæ æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectas lineas, sunt etiam æquales, & parallelæ. Quod erat ostendendum.

PROP. XXXIV. THEOR. XXIV.

Parallelogrammorum spatiorum latera, quæ ex adverso sunt, inter se sunt æqualia; similiter autem & anguli; diagonalis vero ea bifariam dividit.

Sit parallelogrammum ABCD. Dico, latera opposita inter se æqualia esse, hoc est latus AB æquale esse lateri DC, & latus AD æquale lateri BC; similiter æquales esse inter se angulos oppositos, hoc est angulum BAD æqualem esse angulo BCD, & angulum ABC æqualem angulo ADC; ac denique diagonalem AC ipsum bifariam, hoc

(1) *Prop.* 29. (2) *Prop.*4. (3) *Prop.* 27.



hoc eſt in duo triangula æqualia, dividere.

Quoniam enim ABCD parallelogrammum eſt, erunt (1) latera ejus oppoſita inter ſe parallela: proindeque erit (2) tam angulus BAC æqualis angulo ACD, quam angulus DAC æqualis angulo ACB. Unde, quum duo triangula ABC, CDA habeant duos angulos BAC, ACB æquales duobus angulis ACD, DAC, alterum alteri, & latus AC, quod æqualibus adjacet angulis, commune; omnia alia ſimiliter æqualia (3) habebunt. Quare erit latus AB æquale lateri DC, latus BC æquale lateri AD, angulus ABC æqualis angulo ADC, ipſumque triangulum ABC ipſi triangulo CDA æquale erit. Sed & angulus BAD æqualis etiam eſt angulo BCD, quum partes illius oſtenſæ ſint æquales partibus iſtius. Itaque parallelogrammorum ſpatiorum latera, quæ ex adverſo ſunt inter ſe ſunt æqualia; ſimiliter autem & anguli; diagonalis vero ea bifariam dividit. Quod erat oſtendendum.

SCOLIUM.

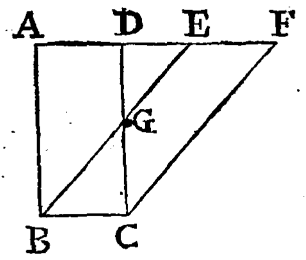
Quemadmodum autem, ſi figura ABCD ſit pa-

(1) *Def.* 36. (2) *Prop.* 29. (3) *Prop.* 26.

parallelogramma, habebit ea latera, quæ ex adverſo ſunt, inter ſe æqualia. Sic viciſſim oſtendere licet, quod ſi figuræ ABCD oppoſita latera ſint æqualia, ea ſit parallelogramma. Nam ſemper ac figuræ ABCD oppoſita latera ſunt æqualia, habebunt triangula ABC, CDA ſingula latera ſingulis lateribus æqualia. Quare per octavam hujus habebunt etiam ſingulos angulos ſingulis angulis æquales; atque adeo per vigeſimam ſeptimam erit tam recta AB parallela ipſi DC, quam recta AD parallela ipſi BC.

PROP. XXXV. THEOR. XXV.

Parallelogramma in eadem baſi, & in iiſdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia.



Sint duo parallelogramma ABCD, EBCF, quæ habeant eandem baſim BC, & ſint conſtituta in iiſdem parallelis BC, AF. Dico, iſta duo parallelogramma inter ſe æqualia eſſe.

Quoniam enim ABCD parallelogrammum eſt, erit (1) latus AD æquale lateri BC. Et

(1) *Prop.* 34.

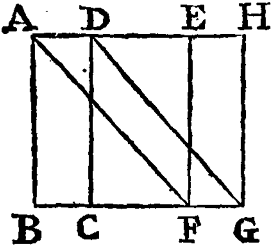
Et similiter, quoniam EBCF est parallelogrammum, erunt ejus latera opposita EF, BC inter se æqualia. Eidem itaque BC æqualis est, tam recta AD, quam recta EF. Quare erit (1) AD æqualis EF: & propterea addita communi DE, erit (2) AE æqualis DF. Est autem, propter parallelogrammum ABCD, AB æqualis etiam DC. Quare latera duo AE, AB trianguli BAE æqualia erunt lateribus duobus, DF, DC trianguli CDF, alterum alteri. Est etiam propter parallelas AB, DC angulus BAE, contentus sub lateribus illius, æqualis angulo CDF, qui sub istius lateribus continetur. Quare erit (3) triangulum BAE æquale triangulo CDF; atque adeo, ablato communi triangulo DGE, erit (4) trapetium BADG æquale trapetio CGEF; additoque triangulo communi BGC, fiet (5) parallelogrammum ABCD æquale parellelogrammo EBCF. Parallelogramma igitur in eadem basi, & in iisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod erat ostendendum.

PROP. XXXVI. THEOR. XXVI.

Parallogramma in æqualibus basibus, & in iisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

Sint duo parallelogramma ABCD, EFGH, quæ constituta in eisdem parallelis AH, BG, ha-

(1) *Axi.* 1. (2) *Axi.* 2. (3) *Prop.* 4.
(4) *Axi.* 3. (5) *Axi.* 2.



habeant bases æquales BC, FG. Dico, ista duo parallelogramma inter se æqualia esse.

Ducantur etenim rectæ (1) AF, DG. Et quoniam ABCD est parallelogrammum, erunt (2) latera ejus opposita AD, BC inter se æqualia. Est autem ex hypothesi BC æqualis FG. Quare & AD (3) ipsi FG æqualis erit. Quum igitur rectæ duæ AD, FG sint æquales, & parallelæ; erunt etiam (4) æquales, & parallelæ rectæ AF, DG, quæ illas conjungunt ad easdem partes: & propterea ADGF parallelogrammum erit. Et quoniam parallelogramma duo ABCD, ADGF habent eandem basim AD, & sunt in iisdem parallelis, erunt ea (5) æqualia inter se. Pariterque, quoniam parallelogramma duo EFGH, ADGF, habent eandem basim FG, & sunt in iisdem parallelis, erunt ea inter se æqualia. Eidem igitur parallelogrammo ADGF æquale est tam paralelogrammum ABCD, quam parallelogammum EFGH. Quare erit (6) parallelogrammum ABCD æquale parallelogrammo EFGH. Et propterea parallelogramma in æqualibus basibus, & in iisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt. Quod erat ostendendum.

SCHO-

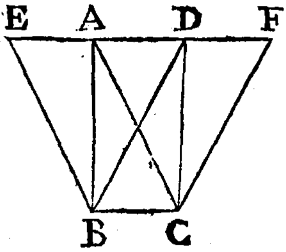
(1) *Post*. 1. (2) *Prop*. 34. (3) *Axi*. 1.
(4) *Prop*. 33. (5) *Prop*. 35. (6) *Axi*. 1.

SCHOLIUM.

Perſpicuum eſt igitur ex duabus præcedentibus propoſitionibus, parallelogramma, quæ in iiſdem parallelis ſunt conſtituta, æqualia eſſe inter ſe, ſive habeant eandem baſim, ſive baſes æquales. Sed hoc idem in duabus ſequentibus propoſitionibus de triangulis etiam oſtenditur.

PROP. XXXVII. THEOR. XXVII.

Triangula in eadem baſi, & in iiſdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia.



Sint duo triangula ABC, DBC, quæ habeant eandem baſim BC, & ſint conſtituta in iiſdem parallelis AD, BC. Dico, iſta duo triangula inter ſe æqualia eſſe.

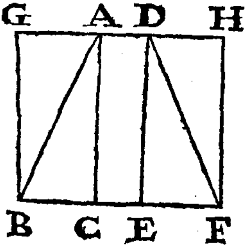
Producatur enim AD (1) utrinque verſus E, & F; tum per puncta B, & C (2) ducantur rectæ BE, CF parallelæ ipſis CA, BD. Sunt igitur ACBE, DBCF parallelogramma duo, quæ quum habeant eandem baſim BC, & conſtituta ſint in iiſdem parallelis, æqualia ea erunt

(1) *Poſt.* 2. (2) *Prop.* 31.

erunt (1) inter se. Jam vero diagonalis dividit (2) parallelogrammum bifariam; atque adeo triangula ABC, DBC semisses sunt eorum parallelogrammorum. Itaque triangula ABC, DBC similiter inter se sunt (3) æqualia. Et propterea triangula in eadem basi, & in iisdem parallelis constituta æqualia sunt iter se. Quod erat demonstrandum.

PROP. XXXVIII. THEOR. XXVIII.

Triangula in æqualibus basibus, & in iisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.



Sint duo triangula ABC, DEF, quæ constituta in iisdem parallelis AD, BF, habeant æquales bases BC, EF. Dico, ista duo triangula inter se æqualia esse.

Producatur etenim AD (4) utrinque versus puncta G, & H. Tum per punctum B agatur (5) recta BG parallela ipsi AC; & per punctum F recta FH parallela ipsi DE. Sunt igitur ACBG, DEFH parallelogramma duo, quæ quum habeant bases æquales BCEF, & sint constituta in iisdem parallelis, æqualia ea erunt (6) inter se. Jam vero diagonalis dividit (7) parallelo-

(1) *Prop.* 35. (2) *Prop.* 34. (3) *Axi.* 7.
(4) *Post.* 2. (5) *Prop.* 31.
(6) *Prop.* 36. (7) *Prop.* 34.

logrammum bifariam, atque adeo triangula ABC, DEF semisses sunt eorum parallelogrammorum. Itaque triangula ABC, DEF similiter inter se sunt (1) æqualia. Et propterea triangula in æqualibus basibus, & in iisdem parallelis constituta æqualia sunt inter se. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

Non solum igitur parallelogramma, verum etiam triangula, quæ in iisdem parallelis sunt constituta, æqualia inter se sunt, sive habeant eandem basim, sive bases æquales. Unde quatuor præcedentes propositiones sic poterunt in unum contrahi: triangula, & parallelogramma in iisdem parallelis, & in eadem vel æqualibus basibus constituta, inter se sunt æqualia.

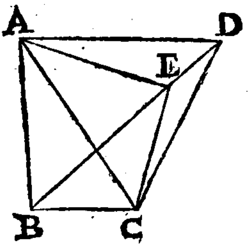
PROP. XXXIX. THEOR. XXIX.

Triangula æqualia, in eadem basi & ad eandem partem constituta, sunt etiam in iisdem parallelis.

Sint duo triangula æqualia ABC, DBC, quæ constituta sint ad eandem partem in eadem basi BC. Dico, duo ista triangula esse etiam in iisdem parallelis, hoc est rectam AD parallelam esse ipsi BC.

Si enim recta AD non sit parallela ipsi BC, huic

(1) *Axi.* 7.



BC, huic BC per punctum A parallela agatur (1) AE, quæ conveniat cum DB in puncto E, & jungatur (2) CE.

Quoniam igitur triangula duo ABC, EBC, habent eandem basim BC, & sunt constituta in iisdem parallelis AE, BC, æqualia ea erunt (3) inter se. Sed ex hypothesi triangulum ABC æquale est triangulo DBC. Quare erit (4) triangulum EBC æquale triangulo DBC, quod fieri non potest. Non igitur AE, sed AD parallela est ipsi BC. Et propterea triangula æqualia in eadem basi, & ad eandem partem constituta, sunt etiam in iisdem parallelis. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

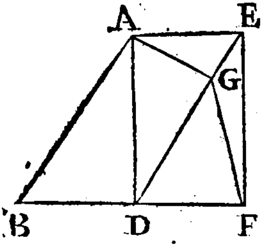
Hoc theorema, licet non omni ex parte, convertit id, quod propositione trigesima septima positum est. Nimirum ibi ex eo, quod triangula duo habeant eandem basim, & constituta sint in iisdem parallelis, deducitur æqualitas eorum triangulorum. Hic autem ex eo, quod duo triangula sint æqualia, & ad eandem partem in eadem basi sint E *con-*

(1) *Prop.* 31. (2) *Post.* 1.
(3) *Prop.* 37. (4) *Axi.* 1.

constituta, colligitur vicissim, ea triangula esse in iisdem parallelis.

PROP. XL. THEOR. XXX.

Triangula æqualia, in æqualibus basibus, ac indirectum jacentibus ad eandem partem constituta, sunt etiam in iisdem parallelis.



Sint duo triangula æqualia ABD, DEF, quæ constituta sint ad eandem partem, in basibus BD, DF, quæ æquales sint, & in directum jaceant. Dico, duo ista triangula esse etiam in iisdem parallelis, hoc est rectam AE parallelam esse ipsi BF.

Si enim recta AE non sit parallela ipsi BF, huic per punctum A parallela (1) ducatur AG, quæ conveniat cum DE in puncto G, & jungatur (2) FG.

Et quoniam triangula duo ABD, GDF habent æquales bases BD, DF, & constituta sunt in iisdem parallelis AG, BF; erunt ea (3) æqualia inter se. Sed ex hypothesi triangulum ABD est æquale triangulo DEF. Quare erit (4) triangulum DEF æquale triangulo GDF,

(1) *Prop.* 31. (2) *Post.* 1.
(3) *Prop.* 38. (4) *Axi.* 1.

GDF, quod est absurdum. Non igitur AG, sed AE parallela est ipsi BF. Et propterea triangula æqualia in æqualibus basibus, & in directum jacentibus ad eandem partem constituta, sunt etiam in iisdem parallelis. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM I.

Hoc theorema, licet non omni ex parte, convertit id, quod propositione trigesima octava positum est. Ibi enim ex eo, quod triangula duo habeant bases æquales, & constituta sint in iisdem parallelis, deducitur æqualitas eorum triangulorum. Hic autem ex eo quod duo triangula sint æqualia, & ad eandem partem in basibus æqualibus, ac in directum jacentibus sint constituta, colligitur vicissim ea triangula in iisdem esse parallelis.

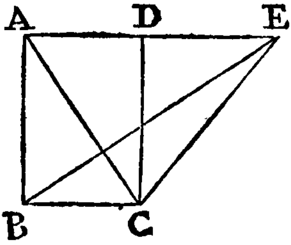
SCHOLIUM II.

Ex duabus autem præcedentibus propositionibus liquet, triangula, quæ æqualia sunt, esse quoque in iisdem parallelis, si constituta ad eandem partem habeant, vel eandem basim, vel bases æquales ac in directum positas. Quod quidem verum est etiam de parallelogrammis; ut cuilibet demonstrationes a præcedentibus non dissimiles instituenti notum fiet.

PROP. XLI. THEOR. XXXI.

Si parallelogrammum, & triangulum habeant eandem basim, & sint in iisdem parallelis constituta, erit parallelogrammum duplum trianguli.

SIt parallelogrammum ABCD, sitque triangulum EBC, quæ constituta in iisdem pa-



rallelis AE, BC habeant eandem basim BC. Dico, parallelogrammum ABCD duplum esse trianguli EBC.

Ducatur etenim (1) AC. Et quoniam diagonalis dividit (2) parallelogrammum bifariam, erit parallelogrammum ABCD duplum trianguli ABC. Sed triangulum ABC (3) est æquale triangulo EBC, quum sint in eadem basi, & constituta in iisdem parallelis. Quare erit parallelogrammum ABCD duplum quoque trianguli EBC. Et propterea, si parallelogrammum, & triangulum habeant eandem basim, & constituta sint in iisdem parallelis, erit parallelogrammum duplum trianguli. Quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM.

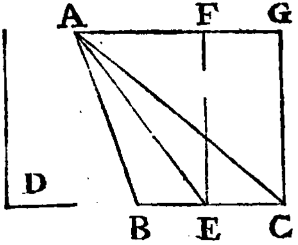
Non dissimiliter ostendetur parallelogrammum duplum esse trianguli, si constituta in iisdem parallelis habuerint non eandem, sed æquales bases. Sed tam hujus, quam præcedentis conversum pariter etiam obtinet: nempe si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, & constituta ad eandem partem habuerint, vel eandem basim, vel bases æquales, ac

(1) *Post.* 1. (2) *Prop.* 34. (3) *Prop.* 37.

ac in directum positas, ea erunt etiam in iisdem parallelis.

PROP. XLII. PROBL. XI.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.



Datum sit triangulum ABC, datus vero angulus rectilineus D. Oportet constituere parallelogrammum, quod sit æquale dato triangulo ABC; habeatque angulum æqualem dato angulo rectilineo D.

Secetur BC (1) bifariam in E; tum ad lineam CE, atque ad datum in ea punctum E constituatur (2) angulus CEF æqualis angulo D. Agatur deinde (3) tam per punctum A recta AG ipsi BC parallela, quam, per punctum C recta CG parallela ipsi FF, eæque conveniant in G. Dico, CEFG esse parallelogrammum quæsitum.

Jungatur enim (4) AE. Et quoniam triangula duo ABE, ACE habent bases æquales BE, CE, & constituta sunt in iisdem parallelis BC, AG; erunt ea (5) æqualia inter se;

(1) *Prop.*10. (2) *Prop.*23. (3) *Prop.*31.
(4) *Post.*1. (5) *Prop.*38.

proindeque triangulum totum ABC duplum erit ipsius ACE. Sed ejusdem trianguli ACE duplum est (1) etiam parallelogrammum CEFG. Quare erit (2) parallelogrammum CEFG æquale triangulo ABC. Habet autem idem parallelogrammum ex constructione angulum CEF æqualem angulo dato D. Constitutum est igitur parallelogrammum CEFG, æquale triangulo ABC, habens angulum æqualem dato angulo D. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

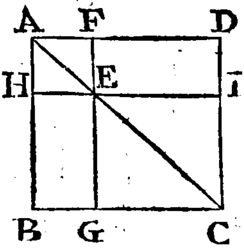
Ex ipsa autem problematis hujus demonstratione inferre licet, quod si triangulum, & parallelogrammum sint in iisdem parallelis & basis trianguli dupla sit basis parallelogrammi, ea æqualia sint inter se. Ostensum est enim, triangulum ABC æquale esse parallelogrammo CEFG, quæ quidem non modo sunt in iisdem parallelis BC, AG, verum etiam bases habent tales, ut quæ triangulo competit, dupla sit ejus, quæ ad parallelogrammum refertur.

PROP. XLIII. THEOR. XXXIII.

Parallelogrammorum spatiorum, eorum quæ circa diametrum sunt, complementa, inter se sunt æqualia.

SIt parallelogrammum ABCD, in cujus diagonali AC sumpto puncto quovis E, agan-

(1) *Prop.* 41. (2) *Axi.* 6.



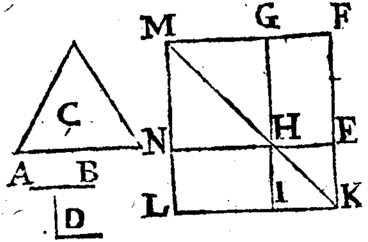
agantur per illud (1) rectæ FG, HI parallelæ lateribus AB, BC. Dico æqualia esse parallelogramma BGEH, EFDI, quæ sunt supplementa eorum, quæ sunt circa diametrum, seu diagonalem AC. Quoniam diagonalis dividit (2) parallelogrammum in duo triangula æqualia erit tum triangulum ABC æquale triangulo ADC, tum triangulum AHE æquale triangulo AFE, cum denique triangulum CGE æquale triangulo CIE. Quo circa, si ex triangulo ABC auferantur triangula AHE, CGE, & ex triangulo ADC auferantur triangula AFE, CIE; quia ex æqualibus æqualia auferuntur remanebit (3) parallelogrammum BGEH æquale parallelogrammo EFDI. Et propterea in parallelogrammis spatiis eorum, quæ circa diametrum sunt, complementa inter se æqualia sunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XLIV. PROBL. XII.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo.

DAta quidem sit recta AB, datum vero triangulum C, & datus demum angulus D. Opor-

(1) *Prop.* 31. (2) *Prop.* 34. (3) *Axi.* 3.



D. Oportet, ad rectam ipsi AB æqualem constituere parallelogrammum æquale triangulo C, habens angulum æqualem angulo D.

Costituatur parallelogrammum (1) EFGH æquale triangulo C, habens angulum GHE æqualem angulo D; tum extendatur (2) GH versus I, & ponatur (3) HI æqualis ipsi AB. Ducatur deinde per punctum I (4) recta KL ipsis EH, FG parallela, quæ conveniant cum FE producta in K.

Et quoniam parallelæ sunt rectæ FG, KI, & in ipsas incidit FK, erunt (5) duo anguli GFK, FKI duobus rectis æquales: & propterea, quia, juncta KH, fiunt duo anguli GFK, FKH duobus rectis minores, conveniet (6) KH producta cum FG similiter producta in puncto aliquo. conveniant itaque in puncto M, per quod agatur recta ML ipsi FK parallela, quæ conveniat cum EH in N, & cum KI in L. Dico, HILN esse parallelogrammum quæsitum. Nam

(1) *Prop.* 42. (2) *Post.* 2. (3) *Prop.* 2.
(4) *Prop.* 31. (5) *Prop.*29. (6) *Axi.* 13.

Nam parallelogramma duo EFGH , HI LN velut supplementa eorum , quæ sunt circa diametrum æqualia sunt (1) inter se. Sed ex constructione parallelogrammum E FGH est æquale triangulo C. Quare eidem triangulo C erit etiam æquale (2) parallelogrammum HILN . Est autem HI æqualis AB , & angulus NHI , velut æqualis angulo EHG , adæquat angulum D , cui ipse EHG ex constructione æqualis est . Constitutum est igitur super rectam HI ipsi AB æqualem , parallelogrammum HILN , æquale triangulo C , habens angulum NHI æqualem angulo D. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

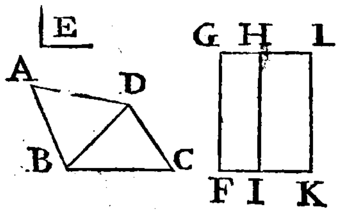
Hoc problema determinat magis id , quod propositione quadragesima secunda positum est. Ibi enim quærebatur parallelogrammum duplici conditione refertum ; una , ut æquale esset dato triangulo ; altera , ut angulum haberet dato angulo æqualem . Hic autem quæritur parallelogrammum , quod præter duas illas conditiones debet quoque tertiam habere : scilicet , ut constitutum sit super rectam , alteri datæ rectæ lineæ æqualem .

PROP. XLV. PROBL. XIII.

Dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo .

DAta sit figura quævis rectililinea ABCD, datus vero angulus E.Oportet,constitue-

(1) *Prop.* 43. (2) *Axi.* 1.



re parallelogrammum, quod æquale ipsi ABCD, habeat angulum æqualem angulo E.

Dividatur figura ABCD per rectam BD in duo triangula ABD, BCD. Tum constituatur pararalellogrammum FGHI (1) æquale triangulo ABD, habens angulum GFI æqualem angulo E. Constituatur porro super rectam HI parallelogrammum aliud (2) HIKL, quod æquale alteri triangulo BCD, habeat, quoque angulum HIK æqualem eidem angulo E. Dico, FGLK esse parallelogrammum quæsitum.

Quoniam enim ex constructione eidem angulo E æqualis est tum angulus GFI, cum angulus HIK, erit (3) angulus GFI æqualis angulo HIK. Quare apposito communi HIF, erunt (4) duo anguli GFI, HIF, æquales duobus angulis HIK, HIF. Sunt autem propter parallelas GF, HI duo anguli GFI, HIF (5) duobus rectis æquales. Erunt igitur æquales etiam duobus rectis duo anguli HIK, HIF: & propterea rectæ duæ IF, IK (6) erunt in directum. Simili modo ostendetur in directum esse rectas

(1) *Prop.* 42. (2) *Prop.* 44. (3) *Axi.* 1.
(4) *Axi.* 2. (5) *Prop.* 29. (6) *Prop.* 14.

rectas duas GH, HL: quandoquidem anguli GHI, HLK, velut æquales (1) angulis GFI, HIK æquales sunt inter se. Unde quum sit ex constructione GH parallela ipsi FI, erit tota GL toti FK pariter parallela. Est autem GF ipsi LK (2) etiam parallela, quum utraque ex constuctione parallela sit eidem HI. Parallelogramnium est igitur FGLK, quod quum æquale si rectilineo ABCD, habeatque angulum GFK æqualem angulo E, ipsum erit illud quod quæritur. Constitutum est itaque parallelogrammum FGLK, æquale rectilineo ABCD, habens angulum æqualem angulo E. Quod facere oportebat.

SCHOLIUM I.

Hoc problema paulo generalius est illo, quod propositum est propositione quadragesima secunda. Ibi enim quærebatur parallelogrammum, quod habens angulum, dato angulo æqualem æquale esset dato triangulo. Hic vero quæritur parallelogrammum, quod habeat quidem angulum æqualem dato angulo, sed æquale sit ipsum datæ cuilibet figuræ rectilineæ.

SCHOLIUM II.

Cæterum si figura rectilinea data plura habeat latera, quam quatuor, atque adeo dividenda esset in plura triangula, quam duo: tum oportet super rectam LK constituere aliud

E 6 *pa-*

(1) *Prop.* 34. (2) *Prop.* 30.

parallelogrammum æquale tertio triangulo, habens in K angulum æqualem angulo E; sicque pergendum erit in infinitum. Demonstratio autem semper est eadem, ut rem attentè consideranti liquido patet.

SCHOLIUM III.

Sed quemadmodum in propositione quadragesima quarta ex tradita ratione constituendi parallelogrammum, quod æquale dato triangulo habeat angulum dato angulo æqualem, licuit nobis ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo; ita quoque ex tradita ratione construendi parallelogrammum, quod aquale dato rectilineo, habeat angulum æqualem angulo dato, licebit nobis methodo non dissimili ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum cnstitituere in angulo dato.

PROP. XLVI. PROBL. XVI.

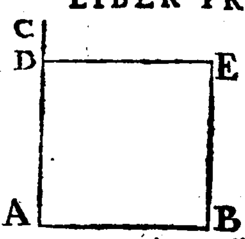
In data recta linea terminata quadratum constituere.

SIt data recta linea terminata AB. Oportet, in ipsa quadratum constituere.

Ipsi AB ex puncto A (1) perpendicularis erigatur AC, ex qua abscindatur (2) portio AD eidem AB æqualis. Ducantur deinde (3) per puncta B, & D rectæ BE, DE

---

(1) *Prop.* 11. (2) *Prop.* 3. (3) *Prop.* 31.



DE ipsis AD, AB respective æquidistntes. Dico, ABED esse quadratum quæsitum.

Est enim ABED ex constructione parallelogrammum. Quare, quum in parallelogrammo latera (1) opposita sit æqualia, erit tum AB æqualis ipsi DE, cum AD æqualis ipsi BE. Est autem ex constructione & AB ipsi AD æqualis. Quatuor itaque AB, AD, DE, BE æquales sunt inter se: proindequæ figura AB ED æquilatera erit.

Et quoniam ex constructione rectus est angulus BAD, ob perallelas verò AD, BE duo anguli BAD, ABE (2) duobus rectis æquales sunt; erit etiam rectus angulus ABE. Jam vero in parallelogrammis anguli oppositi (3) æquales sunt inter se. Itaque anguli ADE, BED, velut æquales angulis ABE, BAD recti patiter erunt: proindeque eadem figura ABED non solum æquilatera, verum etiam rectangula erit; & consequenter erit (4) quadratum. Constitutum est igitur in data recta linea terminata AB quadratum ABED. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM I.

Ex ipsa autem problematis hujus demonstratione colligere licet, quod si in parallelogrammo

(1) *Prop.*34. (2) *Prop.*29.
(3) *Prop.*44. (4) *Def.*30.

mo unus angulorum sit rectus, reliqui etiam recti sint. Ex eo enim, quod in parallelogrammo ABED rectus sit ex constructione angulus BAD, ostensum est, reliquos quoque angulos rectos esse.

COROLLARIUM II.

Sed ex definitione quadrati, vel etiam ex ipsa problematis constructione perspicuum est, quoque, quadrata super æqualibus rectis lineis descripta, æqualia esse inter se. Unde & illud facile consequitur, quod si vicissim æqualia sint quadrata, æquales etiam esse debeant rectæ lineæ, super quibus quadrata illa sunt descripta.

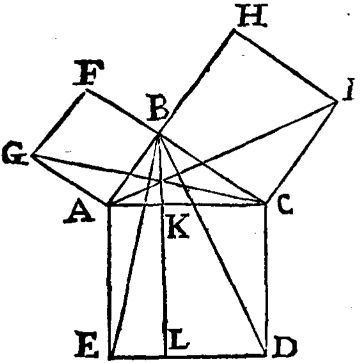
PROP. XLVII. THEOR. XXXIII.

In triangulis rectangulis quadratum, quod fit ex latere, rectum angulum subtendente æquale est quadratis laterum, rectum angulum continentium.

SIt triangulum ABC rectum habens angulum in B. Dico, quadratum ex latere AC, subtendente angulum rectum, æquale esse quadratis, quæ fiunt ex lateribus BA, BC, eundem angulum rectum continentibus.

Describantur (1) ex singulis trianguli lateribus quadrata. Deinde ducta (2) BL ipsis AE,

(1) *Prop.* 46. (2) *Prop.* 31.



AE, CD parallela, jungantur tum rectæ BE, BD, cum rectæ CG. AI (1).

Et quoniam ex hypothesi rectus est angulus ABC, & ABF, velut angulus quadrati, similiter est rectus; erunt duo anguli ABC, ABF duobus rectis æquales; & propterea in directum erunt (2) rectæ duæ BC, BF. Unde non modo BF, sed & tota CF ipsi AG parallela erit. Simili ratione ostendetur, in directum esse rectas duas AB, BH, atque adeo non modo BH, sed & totam AH ipsi CI parallelam esse.

Rursus, quia propter quadrata ABFG, AEDC, æqualia sunt inter se, tum latera AB, AG, cum latera AC, AE; erunt duo latera AB, AE trianguli BAE æqualia duobus lateribus AG, AC trianguli GAC, alterum alteri. Jam vero æquales sunt etiam anguli BAE, GAC, sub lateribus illis comprehensi; quum uterque ipsorum CAE, BAG ex constructione sit rectus, & utrique communis sit angulus BAC. Erit igitur

(1) *Post.* 1. (2) *Prop.* 14.

igitur triangulum BAE æquale (1) triangulo GAC. Est autem (2) trianguli BAE duplum parallelogrammum AELK, & trianguli CAG duplum parallelogrammum, seu quadratum ABFG. Quare erit (3) parallelogrammum AELK æquale quadrato ABFG. Simili modo ope triangulorum DCB, ACI ostendetur, parallelogrammum CDLK æquale esse quadrato BCIH. Unde erit quadratum totum ACDE, æquale duobus quadratis simul sumptis ABFG, BCIH. Et propterea in triangulis rectangulis quadratum ex latere, rectum angulum subtendente, æquale est quadratis, quæ fiunt ex lateribus rectum angulum continentibus. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

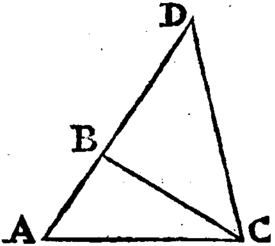
Latus, quod in triangulis rectangulis rectum angulum subtendit, græce dicitur hypothenusa. Unde idem theorema enunciari quoque solet a nonnullis in hunc modum in triangulis rectangulis quadratum hypothenusæ æquale est quadratis laterum simul sumptis.

PROP. XLVIII. THEOR. XXXIV.

Si quadratum ex uno latere trianguli æquale sit quadratis, quæ ex aliis duobus lateribus fiunt; angulus, sub his lateribus contentus, rectus erit.

SIt triangulum ABC, & in eo quadratum ex latere AC æquale sit quadratis, quæ

(1) *Prop.* 4. (2) *Prop.* 41. (3) *Axi.* 6.



quæ fiunt ex lateribus AB, BC. Dico, angulum ABC rectum esse.

Erigatur (1) ex puncto B, super BC perpendicularis BD, quæ constituatur (2) ipsi AB æqualis, & jungatur (3) DC.

Quoniam igitur ex constructione AB est æqualis BD, erit etiam quadratum ex AB æquale quadrato ex BD. Quare apposito communi quadrato ex BC, erunt quadrata duo, alterum ex AB, alterum ex BC æqualia (4) duobus quadratis, quæ fiunt ex BD, & BC. Est autem ex hypothesi quadratum lateris AC æquale quadratis laterum AB, BC; & ob triangulum DBC, rectum habens angulum in B, quadratum hypothenusæ DC est æquale (5) quadratis laterum BD, BC. Itaque erit (6) quadratum ex AC æquale quadrato ex DC: & propterea AC ipsi DC æqualis erit.

Quum igitur triangula duo ABC, DBC habeant duo latera BA, BC æqualia duobus lateribus BD BC, alterum alteri, itemque basim AC æqualem basi DC; habebunt quoque (7) angulum ABC æqualem angulo DBC.

(1) *Prop.*11. (2) *Prop.*3. (3) *Post.*1.
(4) *Axi.*2. (5) *Prop.*47. (6) *Axi* 1.
(7) *Prop.*8.

DBC. Est autem angulus DBC ex constructione rectus: itaque rectus quoque erit angulus ABC. Et propterea, si quadratum ex uno latere trianguli æquale sit quadratis, quæ ex aliis duobus lateribus fiunt, angulus sub his lateribus contentus rectus erit. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

Hoc theorema est conversum præcedentis. Ibi enim ex eo, quod triangulum sit rectangulum, ostensum est, quadratum lateris, rectum angulum subtendentis, æquale esse quadratis, quæ fiunt ex lateribus rectum angulum continentibus. Hic vero per contrarium ex eo, quod quadratum lateris unius æquale sit quadratis, quæ fiunt ex aliis duobus lateribus, ostenditur, triangulum esse rectangulum, & rectum esse angulum illum, quem latus illud subtendit.

GEO-

GEOMETRIÆ PLANÆ ELEMENTORUM LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

I.

Omne parallelogrammum rectangulum dicitur factum, seu contentum sub duobus lateribus, quæ rectum angulum comprehendunt. *Nempe quia alterum ex iis lateribus designat longitudinem, alterum latitudinem parallelogrammi rectanguli. Quod de parallelogrammmo obliquangulo dici non potest, quia ex duobus lateribus, quæ sunt circa ipsius angulum aliquem, etsi unum designet longitudinem ejus, alterum tamen, velut inclinatum ad primum, ejusdem latitdinem nequaquam ostendit.*

Parallelogrammum rectangulum vocabitur in posterum simpliciter rectangulum, ejusque contentum habebitur, multiplicando inter se mutuo latera, quæ rectum angulum comprehendunt. Unde, si fuerit quadratum, propter æqualitatem laterum, satis erit, unum ex ejus lateribus in se ipsum ducere, ut quadrati area, seu contentum habeatur.

Sed notandum hoc loco est, aream rectanguli oriri quidem ex multiplicatione laterum, quæ

sunt

ſunt circa angulum rectum, eamque quadrati ex multiplicatione unius ex ejus lateribus per ſeipſum; verum aliam eſſe menſuram laterum, aliam menſuram rectangulorum, vel quadratorum: nempe longitudines laterum menſurantur per pedes lineares, areas vero rectangulorum, vel quadratorum per pedes quadratos, hoc eſt per quadrata, ſuper pedibus linearibus deſcripta.

Itaque ſi ex lateribus, quæ ſunt circa angulum rectum alicujus parallelogrammi rectanguli, unum quidem ſit pedum trium, alterum pedum quinque, area rectanguli erit pedem quadratorum 15. quia multiplicando 3. per 5. producitur 15. Et ſimiliter ſi latus quadrati ſit pedum ſex; quadrati area erit pedum quadratorum 36. quia multiplicando numerum 6. per ſe ipſum, producitur 36.

II.

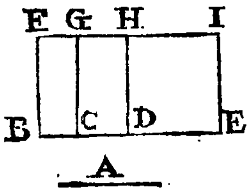
Unumquodque parallelogrammorum circa diametrum una cum duobus ſupplementis, Gnomon vocetur. *Unde ſi Gnomoni addatur parallelogrammum alterum circa diametrum exiſtens, figura tota orietur.*

PROP. I. THEOR. I.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, una quidem ſecta in quotcumque partes, altera vero inſecta, rectangulum, quod fit ex tota, & inſecta æquale erit rectangulis, quæ fiunt ex partibus totius, & eadem inſecta.

SInt duæ rectæ lineæ A quidem inſecta, BE vero ſecta in tres partes BC, CD, DE.

Di-



Dico, rectangulum, quod fit ex BE in A; æquale esse tribus rectangulis, uni ex BC in A, alteri ex CD in A, tertio ex DE in A.

Erigatur (1) ex puncto B super BE perpendicularis BF, quæ ipsi A (2) constituatur æqualis. Tum ducta per punctum F recta FI ipsi BE parallela (3), excitentur ex punctis C, D, E perpendiculares aliæ CG, DH, EI, quæ conveniant cum FI in punctis G, H, I.

Et quoniam rectæ BF, CG, DH (4) æquales sunt inter se, estque BF ipsi A æqualis ex constructione; erit eidem A æqualis, tam recta CG, quam recta DH. Jam vero ex quatuor rectangulis EF, CF, DG, EH primum quidem continetur sub lateribus BE, BF, secundum sub lateribus BC, BF, tertium sub lateribus CD, CG, & quartum sub lateribus DE, DH. Quare ex iisdem quatuor rectangulis EF, CF, DG, EH primum quidem fiet ex BE in A, secundum ex BC in A, tertium ex CD in A, & quartum ex DE in A. Est autem rectangulum EF ipsis CF, DG, EH simul sumptis æquale: totum enim omnes suas partes simul sumptas adæquat. Itaque rectangulum, quod fit ex tota BE in A, æquale erit

(1) *Prop.* 11. *lib.* 1. (2) *Prop.* 3. *lib.* 1.
(3) *Prop.* 31. *lib.* 1. (4) *Prop.* 34. *lib.* 1.

erit tribus rectangulis, uni ex BC in A, alteri ex CD in A, & tertio ex DE in A. Ac propterea, si duæ fuerint rectæ lineæ, una quidem secta in quotcumque partes, altera vero insecta, rectangulum, quod fit ex tota, & insecta, æquale erit rectangulis, quæ fiunt ex partibus totius, & eadem insecta. Quod erat demonstrandum.

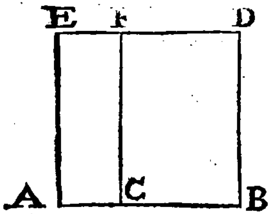
SCHOLIUM.

Hæc cum sequentibus novem propositionibus potest numeris illustrari. Nempe si A sit quatuor pedum, & BE pedum quatuordecim, subinde divisa in punctis C, & D, ut BC sit pedum duorum, CD quinque, & DE septem; erit rectangulum ex BE in A pedum quadratorum 56; rectangulum ex BC in A pedum quadratorum 8; rectangulum ex CD in A pedum quadratorum 20; & rectangulum ex DE in A pedum quadratorum 28. Unde quia postremi isti tres numeri 8, 20, & 28 simul sumpti adæquant priorem numerum 56; liquet, rectangulum ex tota BE in A æquale esse tribus rectangulis, uni ex BC in A, alteri ex CD in A, & tertio ex DE in A.

PROP. II. THEOR. II.

Si recta linea secta fuerit utcumque, quadratum, quod fit a tota, æquale erit rectangulis, quæ fiunt ex tota, & partibus.

SIt recta AB, secta utcumque in C. Dico, quadratum ex AB, æquale esse duobus re-



rectangulis, uni ex AB in AC, alteri ex AB in BC.

Describatur (1) super AB quadratũ ABDE, & ducatur (2) per punctum C recta CF ipsis AE, BD parallela.

Quoniam igitur ABDE, quadratum est, erit ipsi AB æqualis, tum AE, cum BD. Jam vero ex duobus rectangulis CE, CD primum quidem continetur sub lateribus AE, AC, alterum sub lateribus BD, BC. Quare ex iisdem duobus rectangulis CE, CD primum quidem fiet ex AB in AC, alterum ex AB in BC. Est autem quadratum totum ABDE rectangulis CE, CD simul sumptis æquale: totum enim omnes suas partes simul sumptas adæquat. Itaque quadratum, quod fit ex tota AB, æquale erit duobus rectangulis, uni ex AB in AC, alteri ex AB in BC. Et propterea, si recta linea secta fuerit utcumque, quadratum, quod fit a tota, æquale erit rectangulis, quæ fiunt ex tota, & partibus. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

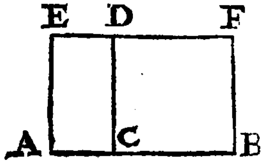
Sit AB pedum decem, subinde divisa in C, ut AC sit pedum quatuor, BC pedum sex. Erit igitur quadratum ex AB pedum quadratorum 100; *rectangulum ex AB in AC*

(1) *Prop.* 46. *lib.* 1. (2) *Prop.* 31. *lib.* 1.

AC pedum quadratorum 40 ; *& rectangulum ex AB, in BC pedum quadratorum* 60. *Duo autem isti numeri* 40, *&* 60 *simul conficiunt* 100. *Itaque quadratum ex AB æquale est rectangulis duobus, uni ex AB in AC, alteri ex AB in BC.*

PROP. III. THEOR. III.

Si recta linea secta fueri utcumque, rectangulum ex tota, & parte una æquale erit rectangulo sub partibus, una cum quadrato quod fit ex parte prædicta.



Sit recta AB secta utcumque in C. Dico, rectangulum ex tota AB, & parte una BC æquale esse rectangulo sub ipsis partibus AC, BC, una cum quadrato, quod fit ex parte illa BC.

Describatur (1) etenim super BC quadratum BCDF, & ducatur per punctum A recta AE (2) ipsis CD, BF parallela, quæ conveniat cum FD producta in E.

Quoniam igitur BCDF ex constructione quadratum est, erit ipsi BC æqualis tum recta BF, cum recta CD. Unde, quum rectangulum AF contineatur sub lateribus AB, BF, & rectangulum AD sub lateribus AC, CD; fiet rectangulum quidem AF ex tota

AB,

(1) *Prop.* 46. *lib.* 1. (2) *Prop.* 31. *lib.* 1.

AB, & parte una BC, rectangulum vero AD ex ipsis partibus AC, BC. Est autem rectangulum AF ipsis AD, CF simul sumptis æquale. Rectangulum igitur ex tota AB, & parte una BC æquale erit rectangulo sub ipsis partibus AC, BC, una cum quadrato, quod fit ex parte illa BC. Et propterea, si recta linea secetur utcumque, rectangulum, quod fiet ex tota, & parte una, æquale erit rectangulo sub partibus, una cum quadrato, quod fit ex parte prædicta. Quod erat demonstrandum.

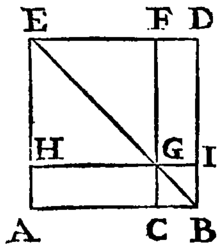
SCHOLIUM.

Sit recta tota AB pedum octo, secta subinde in puncto C, ut AC sit pedum trium, BC pedum quinque. Erit igitur rectangulum ex tota AB, & parte una BC pedum quadratorum 40; rectangulum sub ipsis partibus AC, BC pedum quadratorum 15; & quadratum ex parte BC pedum quadratorum 25. Unde, quum duo isti posteriores numeri 15, & 25 simul additi conficiant priorem 40; erit rectangulum ex tota AB, & parte una BC æquale rectangulo sub ipsis partibus AC, BC, una cum quadrato ex parte illa BC.

PROP. IV. THEOR. IV.

Si recta linea secetur utcumque, quadratum, quod fit a tota; æquale erit quadratis partium, una cum rectangulo, bis sub partibus contento.

SIt recta AB secta utcumque in C. Dico, quadratum ex AB æquale esse qua-



dratis partium AC, BC, una cum rectãgulo, quod bis sub ipsis partibus AC, BC continetur.

Describatur etenim (1) super AB quadratum ABDE, & juncta BE, agatur (2) per punctum C recta CF ipsis AE, BD parallela, quæ secet ipsam BE in G. Denique per punctum G ducatur recta HI parallela ipsis AB, ED.

Et quoniam propter quadratum ABDE æqualia sunt latera AB, AE, erit triangulum BAE isosceles; adeoque (3) angulus ABE æqualis erit angulo AEB. Est autem, propter parallelas AE, CF, angulus AEB (4) æqualis angulo CGB. Itaque erit (5) angulus ABE æqualis angulo CGB; atque adeo latera CB, CG, quæ in triangulo BCG angulos illos subtendunt, inter se (6) æqualia erunt. Unde, quum sit (7) CB æqualis GI, & CG æqualis BI, erunt quatuor lineæ BC, CG, GI, IB inter se æquales; & consequenter figura BCGI æquilatera erit. Sed est etiam rectangula: habet enim, propter quadratum ABDE, angulum CBI rectum; & in parallelogrammis ubi unus angulorum est rectus, reliqui etiam recti esse de-

(1) *Prop.* 46. *lib.* 1. (2) *Prop.* 31. *lib.* 1.
(3) *Prop.* 5. *lib.* 1. (4) *Prop.* 29. *lib.* 1.
(5) *Axi.* 1. (6) *Prop.* 6. *lib.* 1.
(7) *Prop.* 34. *lib.* 1.

debent. Eſt igitur figura BCGI æquilatera, & rectangula; adeoque quadratum, & quadratum, quod fit ex parte BC.

Simili ratione oſtendetur, figuram EFGH quadratum eſſe ex HG, ſeu AC. Nam, propter quadratum ABDE. æqualia ſunt latera DB, DE. Quare triangulum BDE iſoſceles erit: adeoque angulus DBE æqualis erit angulo DEB. Sed, propter parallelas BD, CF, idem angulus DBE æqualis eſt angulo FGE. Itaque erit angulus DEB, æqualis angulo FGB: & propterea latera FE, FG, quæ in triangulo, EFG angulos illos ſubtendunt, pariter æqualia erunt. Eſt autem EF æqualis HG, & FG æqualis EH. Quatuor igitur EF, FG, GH, HE inter ſe mutuo æquales erunt; atque adeo figura EFGH æquilatera erit. Eſtque etiam rectangula, quum propter quadratum ABDE habeat angulum FEH rectum. Itaque quadratum erit; & quadratum, quod fit ex parte AC, quæ eſt æqualis ipſi HG.

Sunt igitur FH, CI quadrata partium AC, BC. Sed rectangulum AG, velut contentum ſub lateribus AC, CG, fit ex ipſis partibus AC, BC. Et rectangulum DG, velut æquale (1) ipſi AG, fit ſimiliter ex ipſis partibus AC, BC. Quare, quum quadratum totum ABDE ipſis FH, CI, AG, DG ſimul ſumptis æquale ſit; erit quadratum ex tota AB æquale quadratis partium AC, BC, una cum rectangu-

(1) *Prop.* 43. *lib.* 1.

lo, quod bis sub ipsis partibus AC, BC continetur. Et propterea, si recta linea secetur utcumque, quod a tota fit quadratum, æquale erit quadratis partium, una cum rectangulo bis sub partibus contento. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Ex ipsa autem hujus theorematis demonstratione perspicuum est, parallelogramma, quæ sunt circa diagonalem quadrati, esse etiam quadrata. Sunt enim FH, CI parallelogramma, exsistentia circa diagonalem quadrati ABDE, quorum utrumque, ostensum est, quadratum esse.

SCHOLIUM.

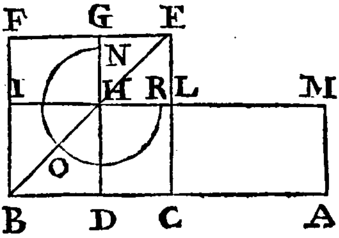
Sit recta AB pedum octo, secta subinde in C, ut AC sit pedum quinque, BC pedum trium. Erit igitur quadratum ex tota AB pedum quadratorum 64; quadratum ex parte AC pedum quadratorum 25; quadratum ex parte alia BC pedum quadratorum 9; & rectangulum bis contentum sub ipsis partibus AC, BC pedum quadratorum 30. Unde, quia tres isti posteriores numeri 25, 9, 30 simul additi dant priorem 64; liquidò patet, quadratum ex tota AB æquale esse quadratis partium AC, BC, una cum rectangulo, quod bis sub ipsis partibus AC, BC continetur.

PROP. V. THEOR. V.

Si recta linea secetur bifariam, & non bifariam, erit rectangulum ex partibus inæqua-

qua-

qualibus, una cum quadrato portionis, quæ inter utramque sectionem interjicitur, æquale ei, quod a dimidia describitur quadrato.



Sit recta AB secta bifariã in C, & non bifariam in D. Dico, rectangulum ex partibus inæqualibus AD, DB, una cum quadrato portionis CD, inter utramque sectionem interjectæ, æquale esse quadrato ex dimidia BC.

Describatur etenim (1) super BC quadratum BCEF; & compleatur figura, prout eam schema repræsentat.

Quoniam igitur CH, HF sunt supplementa eorum, quæ sunt circa diametrum, erunt ea (2) æqualia inter se. Quare, addito communi DI, erit (3) CI æquale ipsi DF. Est autem (4) CI æquale CM: sunt enim parallelogramma, quæ habent bases æquales, & sunt in iisdem parallelis constituta. Et igitur (5) DF ipsi CM æquale erit; adeoque apposito rursus communi CH, erit rectangulum totum AH æquale gnomoni NOR.

(1) *Prop.* 46. *lib.* 1. (2) *Prop.* 43. *lib.* 1.
(3) *Axi.* 2. (4) *Prop.* 36. *lib.* 1.
(5) *Axi.* 1.

Jam rectangulum istud AH continetur sub lateribus AD, DH. Sed parallelogrammum DI, quum existat circa diagonalem quadrati, est etiam quadratum; adeoque DH est æqualis DB. Fiet igitur rectangulum idem AH ex partibus AD, DB; & consequenter rectanglum ex partibus AD, DB æquale erit gnomoni NOR. Addatur commune GL, quod est quadratum ex parte intermedia CD; & erit rectangulum ex partibus inæqualibus AD, DB, una cum quadrato portonis intermediæ CD æquale gnomoni NOR una cum GL. Gnomon autem NOR, una cum GL, est quadratum totum BGEF. Itaque rectangulum sub partibus inæqualibus AD, DB una cum quadrato portionis CD, inter utramque sectionem interjectæ, æquale erit quadrato, quod fit ex dimidia BC. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Ex quo patet, rectangulum ADB æquale esse differentiæ quadratorum BC, CD. Ostensum est enim, rectangulum ADB, hoc est sub partibus AD, DB una cum quadrato ex CD, æquale esse quadrato ex CB. Quare dempto communi quadrato ex CD, fiet rectangulum ADC æquale differentiæ quadratorum, quæ sunt ex BC, & CD.

SCHOLIUM.

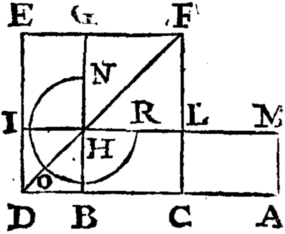
Sit recta AB pedum decem, quæ quum secta sit bifariam in C, erit tam AC quam

BC

BC pedum quinque. Sit autem eadem AB ſubinde ſecta non biſariam in D ut AD ſit pedum ſeptem, BD pedum trium: adeo ut portio inter utramque ſectionem interjecta CD ſit pedum duorum. Erit igitur rectangulum ADB pedum quadratorum 21; quadratum ex CD pedum quadratorum 4; & quadratum ex BC pedum quadratorum 25. Unde, quum priores duo numeri 21. & 4 ſimul additi dent poſtremum 25; erit rectangulum ADB, una cum quadrato portonis intermediæ CD, æquale quadrato ex dimidia BC.

PROP. VI. THEOR. VI.

Si recta linea ſecetur biſariam, eique alia in directum adjiciatur; erit rectangulum, quod fit ex tota, & adjecta, velut ex unica linea, in ipſam adjectam, una cum quadrato dimidiæ, æquale quadrato, quod fit ex dimidia, & adjecta, ſimiliter tamquam ex unica linea.



SIt recta AB ſecta biſariam in C, eique indirectum ſit adjecta alia BD. Dico, rectangulum, quod fit ex AD in BD, una cum quadrato dimidiæ BC, æquale eſſe quadrato, quod fit ex CD.

Deſcribatur etenim ſuper CD (1) quadra-

(1) *Prop.46. lib.1.*

tum CDEF, & compleatur figura, quam schema repræsentat.

Et quoniam AL, CH sunt parallelogramma duo quæ habent bases æquales, & sunt in iisdem parallelis constituta, ea æqualia (1) erunt inter se. Est autem (2) CH æquale ipsi HE, quum sint suplementa eorum, quæ sunt circa diametrum. Quare erit AL ipsi HE æquale (3); & consequenter apposito communi CI, erit rectangulum totum AI (4) æquale gnomoni NOR.

Jam restangulum AI continetur sub lateribus AD, DI. Sed parallelogrammum BI, quum existat circa diagonalem quadrati, est etiam quadratum; adeoque DI est æqualis DB. Fiet igitur rectangulum idem AI ex AD in DB; & consequenter rectangulum ex AD in DB æquale erit gnomoni NOR. Addatur commune GL, quod est quadratum, quod fit ex BC. Itaque erit rectangulum ex AD in DB, una cum quadrato ex BC, æquale Gnomoni NOR, una cum GL. Gnomon autem NOR, una cum GL, constituit quadratum totum CDEF. Idem igitur rectangulum ex AD in BD una cum quadrato dimimidiæ BC, æquale erit quadrato, quod fit ex CD. Quod erat demonstrandum.

GOROLLARIUM.

Unde patet rectangulum ADB æquale esse differentiæ quadratorum BC, CD. Ostensum

---

(1) *Prop.* 36. *lib.* 1. (2) *Prop.* 43. *lib.* 1.
(3) *Axi.* 1. (4) *Axi.* 2.

ſum eſt enim, rectangulum ADB, una cum quadrato ex BC., æquale eſſe quadrato, quod fit ex CD. Quare dempto communi quadrato ex BC, ſupererit rectangulum ADB æquale differentiæ quadratorum BC, CD.

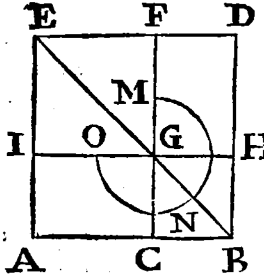
SCHOLIUM.

Sit recta AB pedum decem, quæ quum ſecta ſit biſariam in C, erit tam AC, quam BC pedum quinque. Sit portio BD pedum duorum, ita ut ipſa AD, quæ componitur ex tota AB, & adjecta BD, ſit pedum duodecim, & ipſa CD, quæ componitur ex dimidia AC, & adjecta BD, ſit pedum ſeptem. Erit igitur rectangulum ADB pedum quadratorum 24; quadratum ex BC pedum quadratorum 25; & quadratum ex CD pedum quadratorum 49. Unde, quia priores duo numeri 24, & 25 ſimul additi conſtituunt poſtremum 49; dicendum eſt rectangulum ADB, una cum quadrato ex BC, æquale eſſe quadrato ex CD.

PROP. VII. THEOR. VII.

Si recta linea ſecetur uteumque, quadrata, quæ fiunt ex tota, & parte una, æqualia erunt rectangulo bis contento ſub tota, & dicta parte, una cum quadrato partis alterius.

SIt recta AB, ſecta utcumque in C. Dico, quadrata duo alterum ex tota AB alterum ex parte BC, ſimul ſumpta, æqualia



lia esse rectangulo bis contento sub tota AB, & dicta parte BC, una cum quadrato quod fit ex parte altera AC,

Describatur etenim (1) super AB quadratum ABDE, & compleatur figura, prout eam schema repræsentat.

Quoniam igitur parallelogramma duo AG, DG, velut supplementa eorum quæ circa diametrum sunt, inter se sunt (2) æqualia; addito communi CH. erit totum AH toti CD (3) pariter æquale, adeoque utraque simul AH, CD dupla erunt unius AH. Sed AH, CD simul constituunt gnomonem MNO, una cum CH, quod est quadratum ex BC, & rectangulum AH, velut contentum sub lateribus AB, BH, fit ex tota AB, & parte BC. Gnomoni igitur MNO una cum quadrato ex BC, æqualis erit rectangulo bis contento sub tota AB, & parte BC. Addatur rursus IF, quod est quadratum ex AC. Et erit quadratum ex tota AB una cum quadrato ex parte BC, æquale Rectangulo bis contento sub tota AB, & dicta parte BC una cum quadrato partis alterius AC. Proindeque, si recta linea secetur utcumque, quæ a tota, & parte una describuntur quadrata, æqualia erunt rectangulo bis contento sub tota,

(1) *Prop.46.lib.1.* (2) *Prop.43.lib.1.* (3) *Axi.2.*

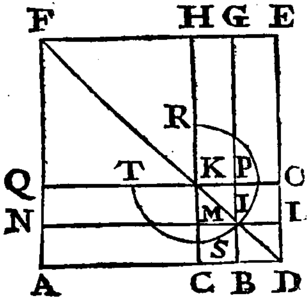
tota, & dicta parte, una cum quadrato partis alterius. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

Sit recta AB pedum decem ſecta ſubinde in C, ut AC ſit pedum ſeptem, BC pedum trium. Erit igitur quadratum ex tota AB pedum quadratotum 100; *quadratum ex parte BC pedum quadratorum* 9; *rectangulum bis contentum ſub tota AB; & dicta parte BC pedum quadratorum* 60; *& quadratum ex parte altera AC pedum quadratorum* 47. *Unde quia priores duo numeri* 100, *&* 9 *ſimul tantundem conſtituunt, quantum poſteriores duo* 60, *&* 49; *liquet, quadrata, quæ fiunt ex tota AB, & parte una BC, æqualia eſſe rectangulo bis contento ſub tota AB & dicta parte BC una cum quadrato partis alterius AC.*

PROP. VIII. THEOR. VIII.

Si recta linea ſecetur utcumque, quadratum, quod fit ex tota, & parte una, velut ex unica linea, æquale erit rectangulo quater contento ſub tota, & dicta parte, una quadrato partis alterius.



SIt recta AB, ſecta utcumque in C, extendaturque uſque in D, ut ſit BD æqualis BC. Dico, quadratum ex AD, quæ componitur ex tota AB, & parte una BC, æquale eſſe rectangulo quater contento ſub tota AB, & dicta parte BC, una cum quadrato partis alterius AC.

Deſcribatur etenim (1) ſuper AD quadratum ADEF, & compleatur figura, prout eam ſchema exhibet.

Quoniam igitur ex conſtructione BC eſt æqualis BD, erit quoque IM æqualis IL, & FK æqualis PO: unde erit, tum BM æquale BL, cum PM æquale (2) PL. Eſt autem BM (3) æquale PL. Quatuor igitur BM, PM, PL, BL inter ſe mutuo æqualia erunt: & propterea omnia ſimul, conſtituentia quadratum CDOK, æqualia erunt quadruplo unius BM.

Rurſus, quia BL quadratum eſt, erit BD ipſi DL, ſeu CM, æqualis. Eſt autem BD æqualis BC, ſeu PK; & propter quadratum, PM, PK eſt æqualis KM. Itaque erit CM ipſi KM æqualis; proindeque parallelogramma duo CN, MQ, velut conſtituta in æqualibus baſibus, & in iiſdem parallelis, inter ſe æqualia erunt.

Jam ob eandem rationem æqualia ſunt quoque parallelogamma PE, PH. Quum igitur duo MQ, PH, velut ſupplementa eorum, quæ circa diametrum ſunt, inter ſe ſint æqualia; erunt quatuor CN, MQ, PE, PH æqualia inter ſe mutuo; & propterea omnia ſimul æqualia erunt quadruplo unius CN.

Oſtenſum eſt autem, quatuor BM, PM, PL,

(1) *Prop.46.lib* 1. (2) *Ptop.36. lib.* 1.
(3) *Ptop.43. lib.*1.

PL, BL simul esse etiam quadrupla unius BM. Octo igitur BM, PM, PL, BL, CN, MQ, PE, PH, constituentia gnomonem RST, quadrupla erunt ipsius AI: atque adeo, quia AI rectangulum est ex AB, & BC, quum BI sit æqualis ipsi BD, seu BC, erit gnomon RST æqualis rectangulo quater contento sub AB, & BC.

Addatur jam commune QH, quod est quadratum ex AC; & erit gnomon RST una cum QH, hoc est quadratum totum ADEF, æquale rectangulo quater contento sub AB, & BC, una cum quadrato ipsius AC. Proindeque, si recta secetur utcumque, erit quadratum, quod fit ex tota, & parte una velut ex unica linea, æquale rectangulo quater contento sub tota, & dicta parte, una cum quadrato partis alterius. Quod erat demonstrandum.

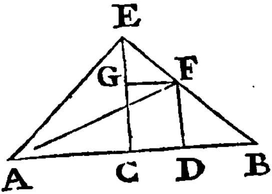
SCHOLIUM.

Sit recta AB pedum octo, secta subinde in C, ut AC sit pedum sex, BC pedum duorum. Itaque quia AD sit pedum decem, erit quadratum ex AD pedum quadratorum 100. *Est autem rectangulum quater contentum sub AB, & BC pedum quadratorum* 64, *& quadratum ex AC pedum quadratorum* 36. *Quum igitur duo isti numeri* 64, *&* 36 *simul additi constituant priorem* 100; *evidens est, quadratum ex AD æquale esse rectangulo quater contento sub tota AB, & parte una BC, una cum quadrato alterius partis AC.*

PROP.

PROP. IX. THEOR. IX.

Si recta linea secetur bifariam, & non bifariam, quadrata partium inæqualium dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia, & portione inter utramque sectionem interjecta.



Sit recta AB, secta bifariam in C, & non bifariam D. Dico, quadrata quæ fiunt ex partibus inæqualibus AD, BD, dupla esse quadratorum, quæ fiunt ex dimidia AC, & portione inter utramque sectionem interjecta CD.

Erigatur (1) etenim ex puncto C perpendicularis CE, quæ ipsi AC, seu BC constituatur (2) æqualis. Jungantur deinde rectæ AE BE, & erecta ex puncto D perpendiculari alia DF, agatur (3) per punctum F recta FG parellela ipsi AB, jungaturque AF.

Quia igitur ex constructione AC est æqualis CE, isosceles est triangulum ACE, adeoque angulus CAE æqualis (4) erit angulo CEA. Est autem angulus ACE rectus. Itaque, quum omnes anguli cujuscumque trianguli duobus rectis æquales (5) esse debeant, semi-

(1) *Prop.* 11. *lib.* 1. (2) *Prop.* 3. *lib.* 1.
(3) *Prop.* 31. *lib.* 1. (4) *Prop.* 5. *lib.* 1.
(5) *Prop.* 32. *lib.* 1.

ſemirectus erit tam angulus CAE, quam angulus CEA. Eadem ratione oſtendetur, ſemirectum eſſe, tum angulum CBE, cum angulum CEB: ex quo ſequitur, totum angulum AEF rectum eſſe.

Rurſus, quoniam in triangulo BDF, rectangulo in D, angulus DBF; velut æqualis angulo CBE, ſemirectus eſt, erit alter angulus DFB pariter ſemirectus. Quare latera BD, DF, angulos illos ſubtendentia, etiam (1) æqualia erunt. Atque ita quoque, quoniam in triangulo EGF, rectangulo in G, ſemirectus eſt angulus GFE, erit itidem ſemirectus angulus alter GEF; proindeque latera EG, GF, quæ ſubtentunt angulos illos, inter ſe pariter æqualia erunt.

Præterea, quia triangulum ACE eſt rectangulum in C; erit (2) quadratum ex AE æquale quadratis, quæ fiunt ex AC, & CE. Sed duo iſta quadrata ſunt æqualia, quum ex conſtructione æquales ſint ipſæ AC, CE. Itaquæ erit quadratum ex AE duplum quadrati ex AC. Eadem ratione, quia triangulum EGF eſt rectangulum in G, erit quadratum ex EF æquale quadratis, quæ fiunt ex EG, & GF; atque adeo, quum æqualia ſint duo iſta quadrata, erit quadratum ex EF duplum quadrati ex GF, ſeu CD.

Quum igitur oſtenſum ſit, quadratum ex AE duplum eſſe quadrati ex AC, & quadratum ex EF duplum quadrati ex CD; erunt

---

(1) *Prop. 6. lib. 2.* (2) *Prop. 47. lib. 1.*

erunt quadrata ex AE, & EF dupla quadratorum, quæ fiunt ex AC, & CD. Jam vero propter triangulum AEF, rectangulum in E, quadrata ex AE, & EF æqualia sunt quadrato ex AF; quod rursus propter triangulum ADF, rectangulum in D, æquale est quadratis ex AD, & DF, sive etiam ex AD, & DB. Quadrata igitur ex AD, & DB dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex AC, & CD. Proindeque, si recta linea secta fuerit bifariam, & non bifariam, quadrata partium inæqualium dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia, & portione inter utramque sectionem interjecta. Quod demonstrare oportebat.

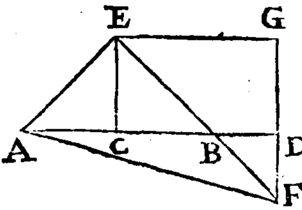
SCHOLIUM.

Sit recta AB pedum decem, quæ quum secta sit bifariam in C, erit tam AC, quam BC pedum quinque. Secetur autem eadem AB subinde non bifariam in D, ut AD sit pedum septem, & DB pedum trium, adeo ut portio inter utramque sectionem interjecta CD sit pedum duorum. Erit igitur quadratum ex AD pedum quadratorum 49; quadratum ex DB pedum quadratorum 9: quadratum ex AC pedum quadratorum 25; & quadratum ex CD pedum quadratorum 4. Unde, quia priores duo numeri 49, & 9 simul additi conficiunt 58, posteriores autem 25, & 4 simul conjuncti dant 29, estque numerus 58 duplus ipsius 29; liquet, quadrata partium inæqualium AD, BD dupla esse quadratorum,

rum, quæ fiunt ex dimidia AC, & portione intermedia CD.

PROP. X. THEOR. X.

Si recta linea secetur bifariam, eique alia in directum adjiciatur; quadrata duo, unum ex tota, & adjecta, velut ex unica linea, alterum ex ipsa adjecta, dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia, & ea, quæ componitur ex dimidia, & adjecta.



Sit recta AB, secta bifariã in C, eique in directum sit adjecta alia BD. Dico, quadrata duo, alterum ex AD, quæ componitur ex tota AB, & adjecta BD; alterum ex ipsa adjecta BD, dupla esse quadratorum, quæ fiunt ex AC dimidia, & ex CD, quæ componitur ex dimidia BC, & adjecta BD.

Erigatur etenim (1) ex puncto C perpendicularis CE, quæ ipsi AC, seu CB constituatur (2) æqualis. Jungantur deinde rectæ AE, BE; & erecta ex punto D perpendiculari alia DF, quæ conveniat cum EB producta in F, jungatur AF; & ducatur (3) per punctum E recta EG, ipsi AB pa-

(1) *Prop.* 11. *lib.* 1. (2) *Prop.* 3. *lib.* 1.
(3) *Prop.* 31. *lib.* 1.

parallela, quæ cum FD producta conveniat in G.

Quia igitur ex constructione AC est æqualis CE, isosceles est triangulum ACE; adeoque angulus CAE æqualis (1) erit angulo CEA. Est autem angulus ACE rectus. Itaque, quum omnes anguli cujuscumque trianguli simul duobus rectis æquales (2) esse debeant, semirectus erit, tam angulus CAE, quam angulus CEA. Eadem ratione ostendetur, semirectum esse, tum angulum CBE, cum angulum CEB: ex quo sequitur, totum angulum AEF rectum esse.

Rursus, quoniam in triangulo BDF, rectangulo in D, angulus DBF, velut (3) æqualis angulo CFE, semirectus est, erit alter angulus DFB pariter semirectus. Quare latera DB, DF, angulos illos subtendentia, etiam (4) æqualia erunt. Atque ita quoque quoniam in triangulo EGF, rectangulo in G, semirectus est angulus GFE, erit itidem semirectus angulus alter GEF; proindeque latera EG, GF, quæ subtendunt angulos illos, inter se pariter æqualia erunt.

Præterea, quia triangulum ACE est rectangulum in C, erit (5) quadratum ex AE æquale quadratis, quæ fiunt ex AC, & CE. Sunt autem duo ista quadrata æqualia

lia

(1) *Prop.* 5. *lib.* 1. (2) *Prop.* 32. *lib.* 1.
(3) *Prop.* 15. *lib.* 1. (4) *Prop.* 6. *lib.* 1.
(5) *Prop.* 47. *lib.* 1.

lia inter se, quum ex constructione æquales sint ipsæ AC, CE. Itaque erit quadratum ex AE duplum quadrati ex AC. Eadem ratione, quia triangulum EGF est rectangulum in G, erit quadratum ex EF æquale quadratis, quæ fiunt ex EG, & GF; atque adeo, quum æqualia sint duo ista quadrata, erit quadratum ex EF duplum quadrati ex EG, seu CD.

Quum igitur ostensum sit, quadratum ex AE duplum esse quadrati ex AC, & quadratum ex EF duplum quadrati ex CD; erunt quadrata ex AE,& EF simul dupla quadratorum, quæ fiunt ex AC, & CD. Jam vero propter triangulum AEF, rectangulum in E, quadrata ex AE, & EF simul æqualia sunt quadrato ex AF; quod rursus propter triangulum ADF, rectangulum in D, æquale est quadratis ex AD, & DF, sive etiam ex AD, & DB. Quadrata igitur ex AD, & BD dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex AC, & CD. Proindeque, si recta linea secetur bifariam, eique alia in directum adjiciatur: quadrata duo, unum ex tota, & adjecta, velut ex unica linea, alterum ex ipsa adjecta, dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia, & ex ea, quæ componitur ex dimidia, & adjecta. Quod demonstrare oportebat.

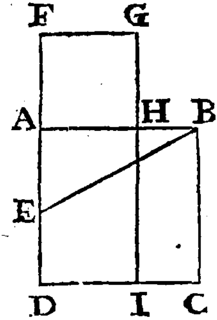
SCHOLIUM.

Sit recta AB pedum octo, quæ quum secta sit bifariam in C, erit tam AC, quam BC pedum quatuor. Sit autem adjecta BD pe-

pedum duorum; ita, ut AD, quæ componitur ex tota, & adjecta, sit pedum decem; & CD, quæ componitur ex dimidia, & adjecta, sit pedum sex. Erit igitur quadratum ex AD pedum quadratorum 100, *quadratum ex BD pedum quadratorum* 4; *quadratum ex AC pedum quadratorum* 16, *& quadratum ex CD pedum quadratorum* 36. *Unde, quia priores duo numeri* 100, *&* 4 *simul additi conficiunt* 104, *posteriores autem* 16, *&* 36 *simul conjuncti dant* 52, *estque numerus* 104 *duplus ipsius* 52; *liquet, quadrata ex AD, & BD dupla esse quadratorum, quæ fiunt ex AC, & CD.*

PROP. XI. PROBL. I.

Datam rectam lineam subinde dividere, ut rectangulum, quod fit ex tota, & parte una, æquale sit quadrato partis alterius.



DAta sit recta AB. Oportet, eam subinde dividere in puncto aliquo, ut rectangulum, sub tota, & parte una contentum, adæquet quadratum, quod describitur ex parte altera.

Describatur (1) super AB quadratum ABCD, & secetur (2) latus AD bifariam in E. Jungatur deinde BE, & extendatur DA usque in F, ut sit EF ipsi BE æqualis. De-

(1) *Prop.* 46. *lib.* 1. (2) *Prop.* 10. *lib.* 1.

Denique super AF describatut quadratum AFGH. Dico, rectam AB subinde divisam esse in H, ut rectangulum ex tota AB, & parte una BH æquale sit quadrato alterius partis AH.

Quoniam enim recta AD secta est bifariam in E, eique in directum est adjecta alia AF, erit rectangulum ex DF in FA, una cum quadrato ex AE æquale (1) quadrato ex EF. Est autem quadratum ex EF æquale quadrato ex EB, quum ex constructione æquales sint ipsæ EB, EF. Itaque erit rectangulum ex DF in FA, una cum quadrato ex AE æquale quadrato, quod fit ex BE.

Jam quadratum ex BE, propter triangulum BAE, rectangulum in A est æquale (2) quadratis, quæ fiunt ex AB, & AE. Idem igitur rectangulum ex DF in FA, una cum quadrato ex AE æquale erit quadratis, quæ fiunt ex AB, & AE. Quare ablato communi quadrato ex AE, supererit rectangulum ex DF in FA æquale quadrato ex AB.

Porro, quia AFGH quadratum est, erit FA ipsi FG æqualis; adeoque rectangulum DG, velut contentum sub lateribus DF, FG, illud erit, quod fit ex DF in FA. Est autem ABCD quadratum ex AB. Erit igitur rectangulum DG æquale ipsi ABCD. Unde ablato communi DH, fiet AG æquale ipsi BI.

Quum itaque AG sit quadratum ex AH, & re-

---

(1) *Prop. 6. hujus* (2) *Prop. 47. lib. 1.*

& rectangulum BI, velut contentum sub lateribus CB, BH, fiet ex AB in BH; erit rectangulum ex AB in BH æquale quadrato ex AH. Et propterea recta data AB subinde secta est in puncto H, ut rectangulum, quod fit ex tota AB, & parte una BH, æquale sit quadrato alterius partis AH. Quod erat faciendum.

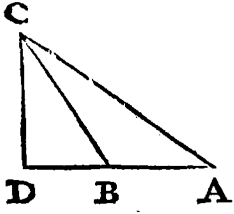
SCHOLIUM.

Hæc propositio nullis numeris potest illustrari. Neque enim duos numeros licet reperire, qui hujusmodi sint; ut id, quod oritur, multiplicando summam ipsorum per unum eorumdem, æquale sit quadrato alterius numeri.

PROP. XI. THEOR. XI.

In triangulis obtusangulis, quadradratum, quod fit ex latere, obtusum angulum subtendente majus est quadratis; quæ fiunt ex lateribus, obtusum angulum continentibus, rectangulo bis contento sub uno dictorum laterum, & portione, quam prope angulum obtusum adjungit ei perpendicularis ex opposito angulo demissa.

SIt rectangulum ABC, quod habeat in B angulum obtusum. Dico quadratum ex latere AC, subtendente angulum otbusum, majus esse quadratis, quæ fiunt ex lateribus AB, BC, angulum obtusum continen-



nentibus, rectangulo bis contento sub uno eorum laterum AB, & portione BD, quam prope angulum obtusum adjungit ei perpendicularis CD, quæ demittitur ex angulo opposito.

Quoniam enim recta AC secta est utcumque in B, erit (1) quadratum ex tota AD æquale quadratis partium AB, BD, una cum rectangulo bis contento sub ipsis partibus AB, BD. Apponatur commune quadratum ex DC. Et erunt quadrata ex AD, & DC æqualia quadratis ex AB, BD, & DC, una cum rectangulo bis contento sub AB, & BD.

Jam duo quadrata AD, DC, propter triangulum ADC, rectangulum in D, æqualia sunt (2) quadrato ex AC. Itaque erit quadratum ex AC æquale quadratis ex AB, BD, & DC, una cum rectangulo bis contento sub AB, & BD. Sunt autem propter triangulum BDC, rectangulum in D, quadrata ex BD, & DC æqualia quadrato ex BC. Quare erit quadratum ex AC æquale quadratis ex AB, & BC, una cum rectangulo bis contento sub AB, & BD.

Quum igitur quadratum ex AC æquale sit quadratis ex AB, & BC, una cum rectangulo bis contento sub ipsis AB, BD; erit quadratum ex AC majus quadratis ex AB,

(1) *Prop.4.hujus.* (2) *Prop.47. lib.1.*

AB, & BC eodem illo rectangulo bis contento ſub AB, & BD. Proindeque in triangulis obtuſangulis quadratum ex latere, obtuſum angulum ſubtendente, majus eſt quadratis laterum, obtuſum angulum comprehendentium, rectangulo bis contento ſub uno dictorum laterum, & portione, quam prope angulum obtuſum adjungit ei perpendicularis ex oppoſito angulo demiſſa. Quod erat demonſtrandum.

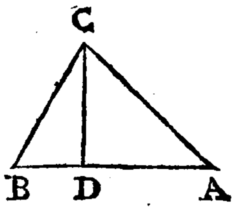
COROLLARIUM.

Si perpendiculari CD in infinitum diminutâ, vertex trianguli C ad baſim accedat, fiet AC æqualis AD, & BC æqualis BD; proindeque propoſitio iſta in quartam hujus vertetur. Nam quum oſtenſum ſit, quadratum ex AC æquale eſſe quadratis ex AB, & BC una cum rectangulo bis contento ſub ipſis AB, BD; ſubrogatis loco ipſarum AC BC lineis AD, BD fiet quadratum totius AD æquale quadratis partium AB, BD, una cum rectangulo bis contento ſub ipſis partibus AB, BD.

PROP. XII. THEOR. XII.

In triangulis acutangulis quadratum, quod fit ex latere, acutum angulum ſubtendente, minus eſt quadratis, quæ fiunt ex lateribus, acutum angulum continentibus, rectangulo bis contento ſub uno dictorum laterum, & portione, quam prope angulum acutum abſcindit ex eo perpendicularis ex oppoſito angulo demiſſa.

SIt triangulum ABC, habens angulum acutum in B. Dico, quadratum ex latere AC,



AC, subtendente angulum acutum B, minus esse quadratis laterum AB, BC, eundem angulum acutum comprehendentium, rectangulo bis contento sub uno eorum laterum AB, & portione BD, quam prope angulum acutum abscindit ex eo perpendicularis CD ex opposito angulo demissa.

Quoniam enim recta AB secta est utcumque in D; erunt (1) quadrata duo, unum ex tota AB, alterum ex parte BD æqualia rectangulo bis contento sub tota AB, & dicta parte BD, una cum quadrato alterius partis AD. Quare apposito communi quadrato ex CD, erunt quadrata tria, unum ex AB, alterum ex BD, tertium ex DC, æqualia rectangulo bis contento sub AB, & BD, una cum quadratis ipsarum AD, CD. Sunt autem duo ista quadrata, propter triangulum ADC, rectangulum in D, æqualia (2) quadrato ex AC. Itaque eadem tria quadrata ex AB, BD, & CD æqualia erunt rectangulo bis contento sub AB, & BD, una cum quadrato ex AC.

Quadratum igitur ex AC una cum rectangulo bis contento sub AB, & BD, æquale est quadratis, quæ fiunt ex AB, BD, & CD. Jam vero quadrata ex BD, & CD,

 ob

(1) *Prop.7.hujus.* (2) *Prop.47.lib.1.*

ob triangulum BDC, rectangulum in D, æqualia sunt quadrato ex BC. Quare erit quadratum ex AC; una cum rectangulo bis contento sub AB, & BD æquale quadratis, quæ fiunt ex AB, & BC, proindequæ quadratum ex AC minus erit quadratis, quæ fiunt ex AB, & BC rectangulo bis contento sub AB, & BD. In triangulis igitur acutangulis quadratum ex latere, acutum angulum subtendente, minus est quadratis laterum, acutum angulum comprehendentium, rectangulo bis contento sub uno dictorum laterum, & portione quam prope angulum acutum abscindit ex eo perpendicularis ex opposito angulo demissa. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

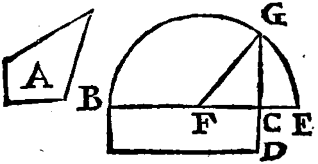
Si perpendiculari CD in infinitum diminuta, accedat trianguli vertex ad basim, cadet AC super AD, & BC super BD: quare propositio ista vertetur in septimam hujus. Ostensum est enim quadrata ex AB, & BC æqualia esse rectangulo bis contento sub AB, & BD, una cum quadrato ex AC. Itaque substitutis loco ipsarum AC, BC portionibus AD, BD, fient quadradrata duo, alterum ex tota AB, alterum ex parte BD, æqualia rectangulo bis contento sub tota AB, & dicta parte BD, una cum quadrato alterius partis AD.

PROP. XIV. PROBL. II.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

DAta sit figura quævis rectilinea A. Oportet, ei æquale quadratum constituere.

De-



Describatur parallelogrammum BCD æquale (1) datæ figuræ rectilineæ A, habens angulum BCD rectum. Tum siquidem BC æqualis sit ipsi CD, erit eadem figura non solum rectangula, verum etiam æquilatera; adeoque, quum quadratum sit, ea problemati satisfaciet. Quod si vero BC non sit æqualis CD extendatur BC versus E, & constituatur CE æqualis (2) CD. Porro secetur BE (3) bifariam in F, & descripto centro F, intervalloque FB, seu FE semicirculo BGE, extendatur DC usque in G. Dico, quadratum ex CG æquale esse figuræ rectilineæ datæ A.

Jungatur enim FG. Et quoniam recta BE secta est bifariam in F, & non bifariam in G, erit (4) rectangulum ex partibus inæqualibus BC, CE, una cum quadrato portionis intermediæ CF, æquale quadrato dimidiæ FE. Est autem FE æqualis FG, quum sint lineæ ductæ a centro ad circumferentiam. Idem igitur rectangulum ex BC in CE, una cum quadrato ex CF, æquale est quadrato ex FG. Sed propter triangulum FCG, rectangulum in C, quadratum ex FG æquale est quadratis quæ

G 2 fiunt

(1) *Prop.* 45. *lib.* 1. (2) *Prop.* 3. *lib.* 1.
(3) *Prop.* 10. *lib.* 1. (4) *Prop.* 5. *hujus.*

fiunt ex CF, & CG. Itaque rectangulum ex BC in CE, una cum quadrato ex CF, æquale erit quadratis, quæ fiunt ex CF, & CG. Auferatur commune quadratum ex CF, & remanebit (1) rectangulum ex BC in CE æquale quadrato ex CG. Est autem BD rectangulum ex BC in CE, quum ex constructione sit CD æqualis CE. Rectangulum igitur BD æquale est quadrato ex CG. Unde, quum idem rectangulum BD factum sit æquale figuræ A, erit eidem A æquale quoque quadratum ex CG. Et propterea datæ figuræ rectilineæ A constitutum est æquale quadratum ex CG. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM I.

Ex ipsa autem problematis hujus demonstratione liquet, quod si ex puncto aliquo, in circuli circumferentia sumpto perpendicularis ad diametrum demittatur, quadratum ejus æquale sit rectangulo, sub diametri segmentis comprehenso. Ostensum est enim, quadratum, quod fit ex CG, æquale esse rectangulo, quod fit ex BC in CE.

COROLLARIUM II.

Vicissim verò, si quadratum ex CG æquale sit rectangulo ex BC in CE, locabitur punctum G in circumferentia circuli, quæ refertur ad diame-

(1) *Axi.3.*

diametrum BE. Nam, quum quadratum ex CG æquale sit rectangulo BCE, apposito communi quadrato ex CF, erunt quadrata ex CG, & CF æqualia rectangulo BCE, una cum CF quadrato. Sed quadrata ex CG, & CF æqualia sunt quadrato ex FG, & rectangulum BCE, una cum CF quadrato æquale est quadrato ex FE. Quare erit quadratum ex FG æquale quadrato ex FE: & propterea, quum FG æqualis sit ipsi FE, locabitur punctum G in circumferentia circuli, quæ describitur centro F, intervalloque FE.

GEOMETRIÆ PLANÆ ELEMENTORUM LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

I.

Circuli æquales dicuntur illi quorum radii, vel diametri sunt æquales. *Oritur namque circulus ex revolutione radii circa suum centrum. Quare semper ac radii sunt æquales, æquales etiam necesse est, ut sint circuli, qui ex eorum radiorum revolutione describuntur.*

II.

Recta linea dicitur tangere circulum, quum ei ita quidem occurrit, ut producta eum non secet. *Quod si autem recta linea subinde circulum offendat, ut producta illum secet, tunc recta illa dicetur circulum secare.*

III.

Circulus circulum contingere dicitur, quando ita quidem sibi mutuo occurrunt, ut portio unius, non cadat intra portionem alterius. *Quod si autem occurrant sibi invicem circuli duo, sed portio unius cadat intra portionem alterius, tunc dicentur duo illi circuli se mutuo secare.*

IV.

Duæ rectæ lineæ dicuntur æqualiter distare a centro circuli, quum perpendiculalares, quæ a centro super iis demittuntur, inter se sunt æquales. *Dimetiendæ sunt enim distantiæ per rectas omnium brevissimas, cujusmodi non aliæ sunt, quam perpendiculares.*

V.

Quod si autem perpendicularis, quæ a centro super unam demittitur, major sit perpendiculari, quæ ab eodem centro ducitur super aliam, tunc illa dicetur magis a centro distare quam ista.

VI.

Angulus ad centrum vocatur ille, qui habet verticem in ipso centro. Is verò, cujus vertex est in circumferentia, angulus ad circumferentiam vocitatur. *Ostendetur autem in hoc libro, quod quum duo isti anguli super eundem arcum insistunt, angulus ad centrum duplus sit anguli ad circumferentiam.*

VII.

Angulus in portione est angulus rectilineus, cujus vertex est in portione, latera vero transeunt per extremitates portionis. *Patebit autem ex inferius ostendendis, eos, qui in eadem portione sunt, angulos inter se equales esse.*

VIII.

Angulus portionis est angulus mixtilineus, quem arcus ejus portionis constituit cum recta, quæ arcum illum subtendit. *Recta autem, quæ in circulo arcum aliquem subtendit, chorda ejus arcus vocitatur.*

IX.

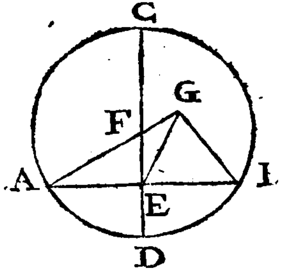
Similes circulorum portiones dicuntur illæ, quæ suscipiunt angulos æquales: *hoc* *est, quando anguli in iis portionibus existentes sunt æquales inter se. In quo autem consistat hæc similitudo, libro sexto ostendetur.*

X.

Sector circuli est portio ejus, quam duæ rectæ lineæ, è centro egredientes, & angulum ibidem constituentes, continent cum arcu, quem intercipiunt. *Unde si duæ rectæ lineæ non egrediantur e centro, aut etiam angulum ibidem non constituant, portio circuli iis rectis, & intercepto arcu contenta, nequaquam sector appellabitur.*

PROP. I. PROBL. I.

Dati circuli centrum invenire.



DAtus sit circulus ABC. Oportet, centrum ejus invenire. Sumantur in ejus circumferentia duo quælibet puncta A, & B, quæ jungantur per rectam AB. Tum secetur (1) AB bifariam in puncto E, ex quo perpendicularis (2) erigatur EF, eaque extendatur usque donec circuli circumferentiam utrimque secet in C, & in D. Denique secetur ipsa CD

(1) *Prop.10.lib.1.* (2) *Prop.11.lib.1.*

CD bifariam quoque in puncto F. Dico, in CD esse centrum circuli, & esse proprie punctum F.

Si enim fieri potest, sit centrum circuli extra rectam CD in G, & jungantur AG, EG, BG. Quia igitur ex constructione AE est æqualis BE, communis vero GE; erunt duo latera AE, GE trianguli GEA æqualia duobus lateribus BE, GE trianguli GEB, alterum alteri. Est etiam basis unius GA æqualis basi alterius GB, quum sint ductæ a puncto G, quod supponitur esse centrum circuli, ad circumferentiam ipsius. Quare erit (1) angulus GEA æqualis angulo GEB. Unde, quum recta GE efficiat cum AB angulos deinceps æquales, rectus erit (2) uterque æqualium angulorum. Rectus igitur est angulus GEA: Sed ex constructione rectus est angulus FEA. Quare erit angulus GEA æqualis angulo FEA: Quod fieri non potest. Non igitur centrum circuli est extra rectam CD; proindeque erit in ipsa CD, eritque propriè punctum F, quod eam dividit bifariam. Et propterea dati circuli ABC inventum est certrum F. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

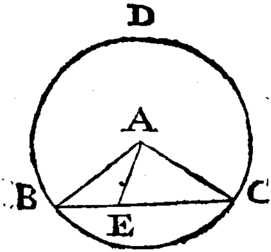
Ex hoc perspicuum est, quod si in circulo recta quædam linea secet aliam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos, in secante sit centrum circuli. Ostensum est enim centrum

(1) *Prop.* 8. *lib.* 1. (2) *Def.* 10. *lib.* 1.

dati circuli ABC esse in recta CD, quæ dividit ex constructione ipsam AB bifariam, & ad angulos rectos in E.

PROP. II. THEOR. I.

Si in circuli circumferentia duo puncta sumantur: quæ puncta ista conjungit recta linea, intra circulum cadet.



IN circumferentia circuli BCD sumantur duo quævis puncta B, & C, quæ jungantur per rectam BC. Dico rectam istam BC intra circulum cadere.

Sumatur etenim in ipsa BC punctum aliquod E, & reperto (1) centro circuli A, jungantur AB, AE, AC.

Quia igitur AB est æqualis AC, erit triangulum BAC isosceles; adeoque angulus ABC æqualis erit (2) angulo ACB. Jam autem in triangulo ABE latus BE productum est in C, atque adeo angulus AEC (3) major est angulo ABE. Idem igitur angulus AEC major erit quoque angulo ACE: & propterea, quia majori lateri (4) major angulus

(1) *Prop. 1. hujus.* (2) *Prop. 5. lib. 1.* (3) *Prop. 16. lib. 1.* (4) *Prop. 19. lib. 1.*

lus opponitur, erit AC major, quam AE. Unde, quum AC pertingat ad circuli circumferentiam, AE ad eam usque pertingere nequit. Cadit igitur punctum E intra circulum. Sed eadem est demonstratio de omnibus aliis punctis ipsius BC. Tota igitur BC intra circulum cadit. Et propterea si in circuli circumferentia duo puncta sumantur, quæ puncta ista conjungit recta linea, intra circulum cadet. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Liquet autem ex hoc theoremate, circuli circumferentiam concavitate sua centrum respicere. Nam omnis curva linea ad eam semper partem est concava, ad quam cadit recta linea, quæ duo ejus puncta contingit: Id, quod ex ipsa circuli generatione liquet etiam abunde.

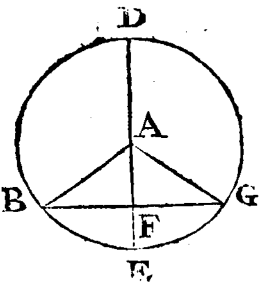
COROLLARIUM II.

Sed illud etiam ex hoc theoremate licet inferre, tangentem in unico tantum puncto circuli circumferentiæ occurrere. Nam, si ei occurreret in duobus punctis, caderet intra circulum; adeoque non tangens, sed secans esset.

PROP. III. THEOR. II.

Si recta linea per centrum ducta aliam rectam lineam non ductam per centrum bifariam secet, secabit ad angulos rectos; & si secet ad angulos rectos, secabit bifariam.

PEr centrum circuli A ducatur recta DE, quæ secet aliam BG non ductam per centrum bifariam in F. Dico secare quoque eam ad angulos rectos.



Jungantur enim rectæ AB, AG. Et quoniam ex hypothesi BF est æqualis GF, communis vero AF; erunt duo latera AF, BF trianguli AFB æqualia duobus lateribus AF, CF, trianguli AFG alterum alteri. Est etiam basis unius AB æqualis basi alterius AG, quum sint linæ ductæ a centro ad circumferentiam. Quare erit (1) angulus AFB æqualis angulo AFG: & propterea, quum recta DE secet ipsam BG ad angulos æquales, secabit eandem ad angulos rectos (2).

Sed eadem recta DE, ducta per centrum circuli A, secet aliam BG ad angulos rectos in F. Dico, secare quoque eam bifariam.

Nam Junctis adhuc rectis AB, AG, ob istarum æqualitatem, isosceles erit triangulum BAG; adeoque angulus ABG æqualis erit angulo AGB. Est autem angulus AFB æqualis quoque angulo AFG, quum uterque ex hypothesi sit rectus. Duo igitur anguli ABF, AFB trianguli BAF æquales sunt duobus angulis AGF, AFG, trianguli GAF, alterum alteri. Unde quum eadem triangula habeant latus AF commune, habebunt quoque (3) latus BF æquale lateri GF: & propte-

(1) *Prop.8.lib.1.* (2) *Def.10.lib.1.*
(3) *Prop.26.lib.1.*

pterea recta BG secta erit bifariam in F. Itaque si in circulo recta linea, per centrum ducta, secet aliam non ductam per centrum bifariam, secabit eam ad angulos rectos; & si secet ad angulos rectos, secabit bifariam. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

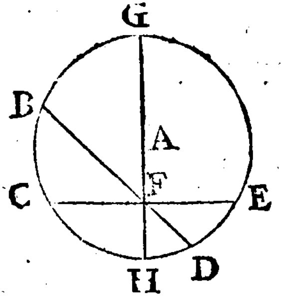
Hujus theorematis, ut vides, duæ sunt partes, quarum altera alteram convertit. Sed utraque convertit quoque id quod in Corollario primæ hujus ostensum est. Unde non abs re erit hic advertere, quod quum in circulo aliqua recta linea secat aliam non ductam per centrum, tria contingere possint; primum, ut linea secans transeat per centrum circuli; alterum, ut secet aliam bifariam; & tertium, ut eandem secet ad angulos rectos. Ex his autem tribus si duo qualibet ponantur, tertium quoque necessario poni debet. Nempe primo, si transeat per centrum circuli, & secet aliam non transeuntem per centrum bifariam, secabit eam ad angulos rectos. Secundo, si transeat per centrum circuli, & secet aliam ad angulos rectos, secabit bifariam. Et tertio si secet aliam cum bifariam, tum ad angulos rectos, transibit per centrum circuli.

PROP. IV. THEOR. III.

In circulo si duæ rectæ lineæ sese in centro non secent utraque bifariam non secabitur.

IN circulo BCDE, cujus centrum sit punctum A rectæ duæ BD, CE se mutuo secent in puncto F, quod diversum sit

a pun-



a puncto A. Dico, utramque earum rectarum bifariam non posse secari.

Si enim fieri potest secetur utraque ipsarum BD, CE bifariam in F, jungaturque AF. Quia igitur recta AF per centrum ducta secat ipsas BD, CE non ductas per centrum bifariam in F, secabit quoque eas (1) ad angulos rectos. Rectus itaque erit, tum angulus AFB cum angulus AFC. Quod cum fieri non possit, dicendum est, utramque ipsarum BD, CE non posse bifariam secari. Et propterea, si in circulo duæ rectæ lineæ sese in centro non secent, utraque bifariam non secabitur. Quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM.

In hac propositiono sedulo notare oportet; duarum linearum, quæ in circulo sese in centro non secant, utramque quidem bifariam non secari. Nam, quin una secari queat bifariam nulli dubium esse potest.

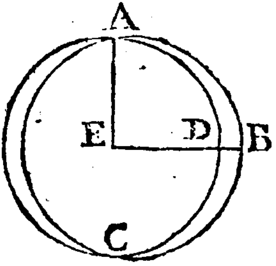
PROP. V. THEOR. IV.

Circuli, qui se mutuo secant, non possint unum, idemque centrum habere.

Sint duo circuli ABC, ADC, qui se mutuo secent in punctis A, & C. Di-

oc

(1) *Prop.3.hujus.*



co, duos iſtos circulos non poſſe unum, idemque centrum habere.

Si enim fieri poteſt, habeant, unū, idemque centrum & ſit punctum E. Tum juncta AE, ducatur utcumque recta EDB, quæ utriuſque circumferentiam ſecet in punctis D, & B.

Quia igitur E centrum eſt circuli ABC, erit AE æqualis EB. Et ſimiliter, quia E centrum eſt circuli ADC, erit AE æqualis ED. Eidem igitur AE æqualis eſt tum EB, cum ED. Sed quæ eidem ſunt æqualia inter ſe ſunt (1) æqualia, Erit igitur EB æqualis ED, quod fieri non poteſt. Non igitur duo circuli, qui ſe mutuo ſecant, poſſunt unum idemque centrum habere. quod erat oſtendendum.

PROP. VI. THEOR. V.

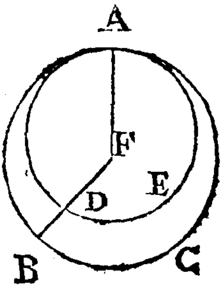
Si duo circuli ſeſe intus contingant, non poſſunt unum idemque centrum habere.

SInt duo circuli ABC, ADE, qui ſeſe intus contingant in A. Dico, duos iſtos circulos non poſſe unum idemque centrum habere.

Si enim fieri poteſt, habeant unum, idemque

---

(1) *Axi.* 1.



que centrum, quod ſit punctum F. Tum juncta AF, ducatur utcumque recta FDB, quæ ſecet utriuſque circumferentiam in punctis D, & B.

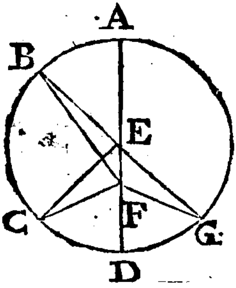
Quia igitur F centrum eſt circuli ABC, erit AF æqualis FB. Pariterque, quia F centrum eſt circuli ADE, erit AF æqualis FD. Eidem igitur AF æqualis eſt, tum FB, cum FD. Sed quæ eidem ſunt æqualia, inter ſe ſunt (1) æqualia. Erit igitur FB æqualis FD, quod fieri non poteſt. Non igitur duo circuli, qui intus ſeſe contingunt, poſſunt unum, idemque centrum habere. Quod erat oſtendendum.

PROP. VII. THEOR. VI.

Si in circuli diametro capiatur punctum aliquod, quod non ſit centrum, & ex eo ducantur ad circumferentiam plures aliæ rectæ lineæ; earum omnium maxima quidem erit illa quæ tranſit per centrum; minima vero reliqua portio diametri aliarum autem, quæ maximæ propinquiores ſunt, majores erunt ſemper remotioribus; & ab illo eodem puncto nonniſi duæ rectæ lineæ equales duci poterunt.

SIt circulus ABCD, cujus diameter recta AD, centrum punctum E. Sumatur in dia-

(1) *Axi.1.*



diametro AD punctũ quodvis aliud F, ex quo ducantur ad circumferentiã plures aliæ rectæ lineæ, ut FB, FC. Dico primo, omnium istarum linearum maximam esse rectam FA, quę trãsit per centrũ circuli E.

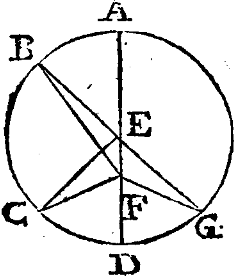
Jungantur enim EB, EC. Et quoniam EB est æqualis EA, addita communi EF, erunt duæ EF, EB æquales (1) ipsi FA. Sunt autem duæ EF, EB majores, (2) quam FB: nempe, quia in omni triangulo duo latera simul sunt reliquo majora. Quare FA eadem FB etiam major erit. Simili ratiocinio, ostendetur FA majorem esse quacumque alia recta linea, quæ a puncto F cadit ad circumferentiam. Igitur FA erit omnium maxima.

Dico secundo, reliquam portionem diametri FD esse omnium minimam.

Nam in triangulo CEF duo latera, EF, FC majora sunt reliquo EC. Sed propter circulum EC est æqualis ED. Duæ igitur EF, FC majores erunt ipsa ED: proindeque ablata communi EF, erit FC major quoque quam FD (3). Est igitur FD minor, quam FC. Unde, quum simili ratiocinio ostendatur,

FD

(1) *Axi* 2. (2) *Prop.* 20. *lib.* 1
(3) *Axi.* 3



FD minorē esse quacumque alia recta linea, quæ a puncto F cadit ad circumferentiam, erit FD omnium minima.

Dico tertio, aliarum linearum, quæ ipsi FA propinquiores sunt, majores esse semper remotioribus, nempe FB majorem esse, quam FC.

Nam quum propter circulum EB sit æqualis EC communis vero EF; erunt duo latera EB, EF trianguli BEF æqualia duobus lateribus EC, EF trianguli CEF, alterum alteri. Est autem angulus BEF, contentus sub lateribus illius major angulo CEF, qui sub istius lateribus continetur. Itaque erit basis FB major quoque (1) basi FC. Quumque eadem sit demonstratio de omnibus aliis rectis lineis, quæ a puncto F cadunt ad circumferentiam, dicendum est, rectas ipsi FA propinquores, majores esse remotioribus.

Dico denique, ab eodem puncto F nonnisi duas rectas æquales duci posse: nempe ipsi FC unicam tantum ex parte altera duci posse æqualem, & non plures.

Fiat enim ad rectam AD, atque ad datum in ea punctum E angulus FEG æqualis (2) an-

(1) *Prop.24.lib.* 1. (2) *Prop.23.lib.*1.

angulo FEC, & jungatur FG. Quia igitur duo latera EC, EF trianguli CEF æqualia sunt duobus lateribus EG, EF trianguli GEF, alterum alteri, & anguli sub lateribus illis comprehensi ex constructione pariter sunt æquales; erunt quoque æquales (1) bases eorundem triangulorum FC, FG. Ipsi igitur FC ducta est ex parte altera alia æqualis FG. Plures autem duci non possunt. Nam, vel cadunt superne, & velut ipsi FA propinquiores majores sunt, quam FG, atque adeo majores quoque, quam FC; vel cadunt inferne, & per contrarium velut magis distantes ab FA minores sunt, quam FG, ac propterea minores quoque, quam FC.

Concludamus igitur, quod si in circuli diametro sumatur punctum aliquod, quod non sit centrum, & ab eo ducantur ad circumferentiam plures aliæ rectæ lineæ; omnium istarum linearum maxima quidem sit illa, quæ transit per centrum circuli; minima vero reliqua portio diametri; aliarum autem, quæ maximæ sunt propinquiores, majores sint semper remotioribus; & ab illo eodem puncto nonisi duæ rectæ lineæ æquales duci possint. Quod erat demonstrandum.

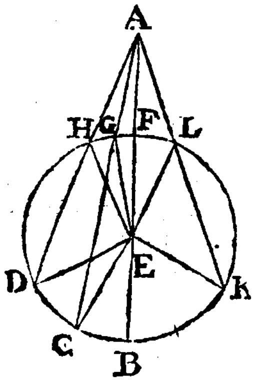
PROP. VIII. THEOR. VII.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ex quo ducantur plures rectæ lineæ, tum ad concavam, cum ad convexam circuli

cir-

(1) *Prop.4.lib.1.*

circumferentiam ; earum utique, quæ pertingunt ad concavam maxima quidem erit illa, quæ transit per centrum, aliarum verò, quæ maximæ sunt propinquiores; majores erunt semper remotioribus; vicissim autem illarum, quæ pertingunt ad convexam, minima quidem erit illa, quæ producta transit per centrum, aliarum vero, quæ minimæ sunt propinquiores, minores erunt semper remotioribus; & ab illo eodem puncto, tum ad concavam, cum ad convexam circuli circumferentiam nonnisi duæ rectæ lineæ æquales duci poterunt.



EX puncto A, sumpto extra circulum BCD, ducantur primo ad concavam ejus circumferentiam plures rectæ lineæ AB, AC, AD, quarum prior AB transeat per centrum circuli E. Dico; omnium istarum linearum maximam quidem esse ipsam AB aliarum vero, quæ ipsi AB propinquiores sunt majores esse semper remotioribus, nempe AC majorem esse, quam AD.

Jungantur enim rectæ EC, ED. Et quoniam propter circulum EB est æqualis EC, communis vero AE, erit tota AB æqualis duabus AE, EC. Sed duæ istæ AE, EC majores

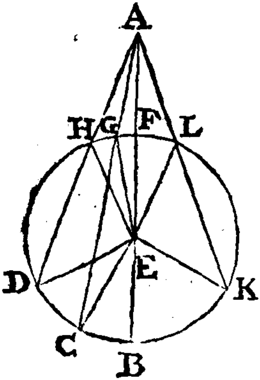
jores sunt ipsa AC: in omni enim triangulo (1) duo latera simul reliquo majora sunt, quomodocumque sumpta. Igitur AB major quoque erit, quam AG. Et quum eadem ratione ostendatur major quacumque alia recta linea, quæ ab assumto puncto A cadit ad concavam circuli circumferentiam, erit AB omnium maxima.

Deinde, quia propter circulum EC est æqualis ED, communis vero AE, erunt duo latera AE, EC trianguli AEC æqualia duobus lateribus AE, ED trianguli AED alterum alteri. Est autem angulus AEC, contentus sub lateribus illius, major angulo AED, qui sub istius lateribus continetur. Itaque erit (2) basis AC major quoque basi AD. Quumque eadem sit demonstratio de omnibus aliis rectis lineis, quæ a puncto A cadunt ad concavam circuli circumferentiam, dicendum est, rectas ipsi AB propinquiores majores esse semper remotioribus.

Ex eodem puncto A ducantur secundo ad convexam circuli circumferentiam plures rectæ lineæ AF, AG, AH, quarum prior AF transeat producta per centrum E. Dico, omnium aliarum istarum linearum minimam esse rectam AF, reliquarum vero, quæ ipsi AF propinquiores sunt, minores esse semper remotioribus, nempe AG minorem esse, quam AH.

Jungantur enim rectæ EG, EH. Et quoniam, propter triangulum AGE, duo latera AC,

(1) *Prop.20.lib.1.* (1) *Prop.24.lib.1.*



AG, GE majora sunt (1)reliquo AE,estque, propter circulum,GE æqualis FE; erit AG major etiam, quam AF.Pariterque, quia, propter triangulum AHE,duo latera AH, HE majora sunt reliquo AE, estque propter circulum HE æqualis FE; erit AH major etiam, quam AF. Quumque eadem ratione ostendatur, omnem aliam rectam lineam, quæ ab assumpto puncto A cadit ad convexam circuli circumferentiam, majorem esse, quam AF; erit AF omnium minima.

Deinde quia propter circulum EH est æqualis EG communis vero AE; erunt duo latera AE, EH trianguli AEH æqualia duobus lateribus AE, EG trianguli AEG, alterum alteri. Est autem angulus AEH, contentus sub lateribus illius, major angulo AEG, qui sub istius lateribus continetur. Itaque erit basis AH major quoque (2) basi AG. Quumque eadem sit demonstratio de omnibus aliis rectis lineis, quæ a puncto A cadunt ad convexam circuli circumferentiam, dicendum est, rectas ipsi AF propinquiores, minores esse semper remotioribus.

Di-

(2) *Prop.20.lib.1.* (2) *Prop.24.lib.1.*

Dico demum, ab eodem puncto A, tum ad concavam, cum ad convexam circuli circumferentiam nonnisi duas rectas æquales duci posse: nempe cuique ipsarum AD, AH unicam tantum ex parte altera duci posse æqualem, & non plures.

Fiat enim ad rectam AB, atque ad datum in ea punctum E angulus AEK æqualis (1) angulo AED, & jungatur EK. Quia igitur duo latera AE, ED trianguli AED æqualia sunt duobus lateribus AE, AK trianguli AEK, alterum alteri, & anguli sub lateribus illis comprehensi ex constructione pariter sunt æquales; erunt quoque æquales (2) bases eorundem triangulorum AD, AK. Ipsi igitur AD ducta est ex parte altera alia æqualis AK. Plures autem duci non possunt. Nam vel cadunt inferne, & velut ipsi AB propinquiores, majores sunt, quam AK, atque adeo majores quoque, quam AD; vel cadunt superne, & per contrarium velut magis distantes ab eadem AB, minores sunt, quam AK, & consequenter minores quoque, quam AD.

Simili ratione hoc idem ostendetur relate ad rectam AH. Nam siquidem ad rectam AB, atque ad datum in ea punctum E constituatur angulus AEL æqualis angulo AEH, jungaturque AL, æquales erunt inter se rectæ duæ AH, AL; adeoque ipsi AH ducta, est ex parte altera alia æqualis AL. Plures autem duci non possunt. Nam eadem omni-

(2) *Prop.23.lib.1.* (1) *Prop.4.lib.1.*

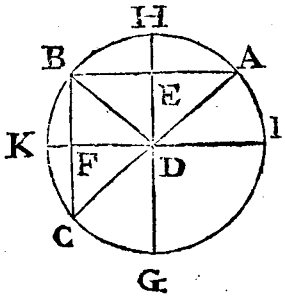
no ratione vel accedunt ad AF, & velut minores, quam AL, minores quoque erunt, quam AH; vel recedunt ab eadem AF, & quia majores sunt, quam AL, majores etiam erunt, quam AH.

Concludamus igitur, quod si extra circuum sumatur punctum aliquod, & ex eo ducantur, tum ad concavam, cum ad convexam circuli circumferentiam plures rectæ lineæ, earum quidem, quæ pertingunt ad concavam, maxima sit illa, quæ transit per centrum; aliarum vero, quæ maximæ propinquiores sunt, majores sint semper remotioribus; vicissim autem illarum, quæ pertingunt ad convexam, minima sit illa, quæ producta transit per centrum, aliarum vero, quæ minimæ propinquiores sunt, minores sint semper remotioribus; & ab illo eodem puncto, tam ad concavam, quam ad convexam circuli circumferentiam nonnisi duæ rectæ lineæ æquales duci possint. Quod erat demonstrandum.

PROP. IX. PROBL. VIII.

Si e puncto, intra circulum sumpto, cadant ad ejus circumferentiam plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales: assumptum punctum erit centrum circuli.

Intra circulum ABC capiatur punctum aliquod D, ex quo cadant ad ejus circumferentiam tres rectæ lineæ æquales DA, DB, DC. Dico, assumptum punctum D esse



D esse centrum circuli.

Jungantur enim rectæ AB, BC, quæ secentur (1) bifariam in punctis E, & F, junganturque DE, DF, quarum utraque extendatur ulterius, illa quidem versus G, & H ista autem versus K, & L.

Et quoniam ex constructione AE est æqualis BE, communis vero DE; erunt duo latera AE, DE trianguli ADE æqualia duobus lateribus BE, DE trianguli BDE, alterum alteri. Est autem ex hypothesi basis illius DA æqualis basi istius DB. Itaque erit quoque (2) angulus DEA æqualis angulo DEB: & propterea, quum GH secet ipsam AB bifariam, & ad angulos rectos in E, in recta GH erit (3) centrum circuli.

Eadem ratione, quoniam ex constructione BF est æqualis CF, communis vero DF, erunt duo latera BF, DF trianguli BDF æqualia duobus lateribus CF, DF trianguli CDF, alterum alteri. Est autem ex hypothesi basis illius DB æqualis basi istius DC. Erit igitur angulus DFB æqualis quoque angulo DFC; atque adeo, quum recta KL se-

H cet

(1) *Prop.10.lib.1.* (2) *Prop.8.lib.1.*
(3) *Corol.1.hujus.*

cet ipsam BC bifariam, & ad angulos rectos in F, in recta KL erit centrum circuli.

Est igitur centrum circuli ABC, tam in recta GH, quam in recta KL. Quare erit in puncto, quod utrique earum linearum commune sit. Jam vero rectæ duæ GH, KL non aliud punctum commune habent, quam D; quandoquidem duæ rectæ lineæ in unico puncto se secant. Punctum igitur D centrum est circuli ABC. Et propterea, si e puncto, intra circulum sumpto, cadant ad ejus circumferentiam plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales, assumptum punctum erit centrum circuli. Quod demonstrare oportebat.

SCHOLIUM.

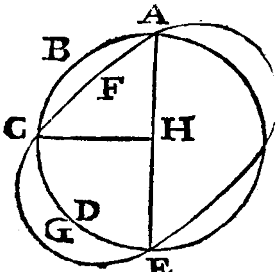
Poterat hoc idem ostendi per septimam hujus. Quum enim in ea ostensum sit, duas tantum rectas lineas æquales duci posse ad circumferentiam circuli e puncto, quod non sit centrum ejus; liquido patet, debere esse centrum circuli punctum illud, ex quo cadunt ad ejus circumferentiam plures, quam duæ rectæ lineæ æquales.

PROP. X. THEOR. IX.

Circulus circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat.

SInt duo circuli ABCDE, AFCGE, qui se mutuo intersecent. Dico, eos in pluribus, quam duobus, punctis non posse secari.

Si

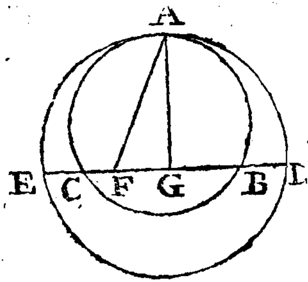


Si enim fieri potest, se mutuo secent in tribus punctis A, C, E. Et invento circuli ABCDE (1) centro H, jungantur rectæ HA, HC, HE, quæ quum ductæ sint a centro ad circumferentiam ipsius ABCDE, erunt eæ æquales inter se. Et quoniam intra circulum AFCGE sumptum est punctum H, & ab eo cadunt ad ejus circumferentiam tres rectæ lineæ æquales HA, HC, HE, erit idem punctum H (2) centrum quoque circuli AFCGE. Duo igitur circuli ABCDE, AFCGE, qui se mutuo secant, habent unum idemque centrum H. Hoc autem fieri non potest: ostensum est enim circulos, qui se mutuo secant, non posse unum, idemque centrum habere (3). Non igitur duo circuli ABCDE, AFCGE se secant in tribus punctis A, C, E. Proindeque circulus circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat. Quod erat ostendendum.

(1) *Prop.1.hujus.* (2) *Prop.9.hujus.*
(3) *Prop.5.hujus,*

PROP. XI. THEOR. X.

Si duo circuli ſeſe intus contingant, recta conjungens centra ipſorum tranſibit per punctum contactus.



Sint duo circuli ABC, ADE, qui ſeſe intus contingant in A. Sit autem F centrum circuli ABC & G centrum alterius ADE. Dico, rectam FG, conjungentem contra illa, tranſire per punctum contractus A.

Si enim fieri poteſt, non tranſeat per punctum A, ſed ſecet circulum quidem ABC in punctis B, & C, circulum vero ADE in punctis D, & E. Jungantur rectæ AF, AG.

Quia igitur F centrum eſt circuli ABC, erit AF æqualis CF. Quare appoſita communi FG, erunt duæ AF, FG ſimul (1) æquales toti CG; Duæ autem AF, FG majores ſunt ipſa AG, in tringulo enim (2) duo latera ſimul reliquo majora ſunt, quomodocumque ſumpta. Itaque CG major quoque erit, quam AG. Jam vero, quum G centrum ſit circuli ADE, AG eſt æqualis

GE

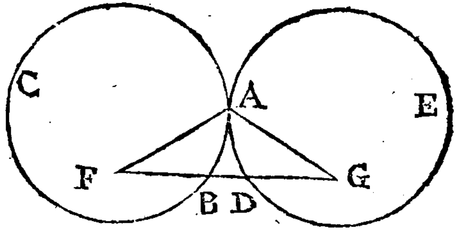
(1) *Axi.2.*
(2) *Prop.20.hujus.*

GE. Eadem igitur CG erit etiam major, quam GE. Quod fieri non poteſt.

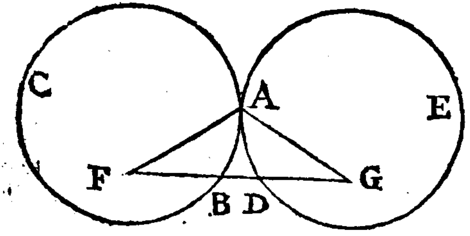
Quod ſi ponatur, G eſſe centrum circuli ABC, F vero centrum alterius ADE, demonſtratio fiet ex parte altera. Nimirum, quum G centrum ſit circuli ABC, erit AG æqualis BG. Quare appoſita communi GF, erunt duæ AG, GF æquales toti BF. Sunt autem duæ AG, GF majores ipſa AF. Itaque BF major quoque erit, quam AF: atque adeo, quum rectæ duæ AF, DF velut ductæ a centro F ad circumferentiam ADC inter ſe ſint æquales, erit eadem BF major etiam, quam DF. Quod adhuc fieri non poteſt. igitur ſi duo circuli ſeſe intus contingant, recta conjungens centra ipſorum tranſibit per punctum contactus. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XII. THEOR. XI.

Si duo circuli ſeſe extra contingant; recta, conjungens contra ipſorum, tranſibit per punctum contactus.



Sint duo circuli ABC, ADE, qui, ſe extra contingant in A. Sit autem F



centrum circuli ABC, G vero centrum alterius ADE. Dico rectam FG, conjungentem centra illa transire per punctum contactus A.

Si enim fieri potest, non transeat per punctum A, sed secet circulum quidem ABC in puncto B, circulum vero ADE in puncto D. Jungantur rectæ AF, AG.

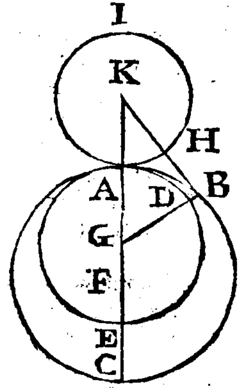
Et quoniam in omni triangulo duo latera simul (1) sunt reliquo majora, quomodocumque sumpta; erunt duæ AF, AG majores ipsa FG. Sunt autem puncta F, & G centra circulorum, atque adeo rectæ AF, AG æquales ipsis BF, DG. Duæ igitur BF, DG, simul majores sunt quoque ipsa FG: quod quum falsum sit, dicendum est, rectam FG transire per punctum A. Et propterea, si duo circuli sese extra contingant, recta conjungens ipsorum centra per punctum contractus transibit. Quod erat demonstrandum.

PROP.

(1) *Prop.20.lib.1.*

PROP. XIII. THEOR. XII.

Circulus circulum in pluribus, quam uno puncto, non contingit sive intra, sive extra eum contingat.



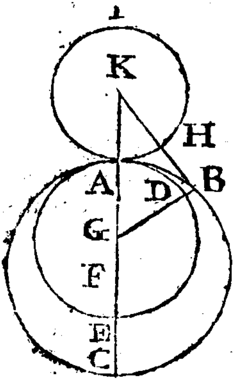
Circulum ABC contingat primo intra in puncto A circulus alter ADE. Dico, in solo puncto A eum contingere.

Esto etenim F centrum circuli ABC, & G centrum alterius ADE. Recta igitur FG, conjungens centra illa, transibit per punctum contactus A. (1) Producatur eadem usque ad C, & ex G ducatur utcumque recta GDB, quæ secet circulum quidem ABC in puncto B, circulum vero ADE in puncto D.

Et quoniam in AC diametro circuli ABC sumptum est punctum G, quod non est centrum, & ab eo cadunt ad circumferentiam plures rectæ lineæ GA, GB, GC, erit (2) omnium istarum linearum maxima quidem GC, quæ transit per centrum F, minima vero reliqua portio diametri GA. Est igitur GA minor, quam GB. Jam vero G centrum est circuli ADE, adeoque GA est æqualis GD.

Ita-

(1) *Prop.* 11. *hujus.* (2) *Prop.* 7. *hujus.*



Itaque GD minor quoque erit, quam GB, & propterea punctum B erit ultra punctum D. Simili ratione oſtendetur, omnia alia puncta circuli ABC eſſe ultra puncta correſpondentia alterius circuli ADE: Quare circulus ADE contingens, circulum ABC intra in puncto A, in ſolo hoc puncto eum continget.

Sed eundem circulum ABC contingat ſecundo extra circulus alter AHI in eodem puncto A. Dico quoque, in ſolo puncto A eum contingere,

Eſto etenim F centrum circuli ABC, & K centrum alterius AHI. Recta igitur KF, conjungens centra illa, tranſibit per punctum contactus A (1). Ducatur autem ex K utcumque recta KHB, quæ ſecet circulum quidem AHI in puncto H; circulum vero ABC in puncto B.

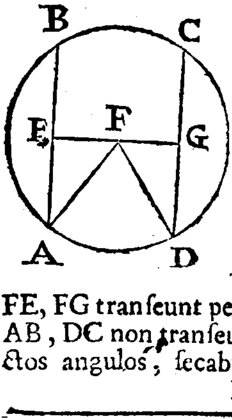
Et quoniam extra circulum ABC ſumptum eſt punctum K, & ab eo ductæ ſunt ad convexam circuli circumferentiam plures rectæ lineæ KA, KB; erit (2) omnium iſtarum linearum minima recta KA, quæ producta tranſit per centrum circuli F. Eſt igitur KA minor, quam

(1) *Prop.12.hujus.* (2) *Prop.8.hujus.*

quam KB. Jam vero punctum K centrum est circuli AHI, adeoque KA est æqualis KH. Itaque KH minor quoque erit, quam KB: & propterea punctum B erit infra punctum H. Simili ratione ostendetur, omnia alia puncta circuli ABC esse infra puncta correspondentia alterius circuli AHI. Duo igitur circuli ABC, AHI, sese extra contingentes in A, in solo isto puncto A sese mutuo contingent. Et propterea circulus circulum in pluribus, quam uno puncto, non contingit, sive intra, sive extra eum contingat. Quod erat demonstrandum.

PROP. XIV. THEOR. XIII.

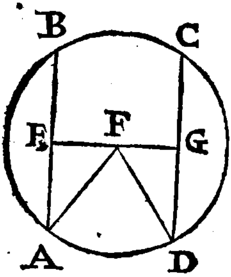
In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter a centro distant; & quæ æqualiter a centro distant, inter se sunt æquales.



IN circulo ABCD, cujus centrum est punctum F, constituantur primo duæ rectæ linæ æquales AB, DC. Dico, eas æqualiter distare a centro F, hoc est æqualia esse perpendicula FE, FG, quæ a centro super iis demittuntur.

Quoniam enim rectæ FE, FG transeunt per centrum, & secant alias AB, DC non transeuntes per centrum ad rectos angulos, secabunt eas (1) bifariam. Sunt

(1) *Prop.3.hujus.*



igitur AE, DG semisses ipsarum AB, DC: & propterea, quum ex hypothesi duæ AB, DC inter se sint æquales, erunt etiam (1) æquales inter se duæ AE, DG, Jungatur AF, DF.

Et quoniam triangulum AFE rectum habet angulum in E, erit quadratum ex AF æquale (2) quadratis, quæ fiunt ex AE, & EF. Pariterque, quia triangulum DGE rectum habet angulum in G, erit quadratum ex DF æquale quadratis, quæ fiunt ex DG, & FG. Sunt autem æqualia inter se quadrata ex AF, & DF, quum ipsæ AF, DF, velut ductæ a centro ad circumferentiam, inter se sint æquales. Quadrata igitur, quæ fiunt ex AE, & EF, æqualia quoque erunt quadratis ex DG, & GF: adeoque, quum AE quadratum æquale sit DG quadrato erit etiam EF quadratum æquale GF quadrato; & consequenter EF, GF æquales erunt inter se.

Sint secundo rectæ duæ AB, DC æqualiter distantes a centro circuli F, ita nempe, ut æqualia sint perpendicula FE, FG, quæ a centro super iis demittuntur. Dico, & ipsas AB, DC etiam inter se æquales esse.

Ob triangula etenim AFE, DFG rectangula in E, & G, ostendetur rursus, quadrata ex

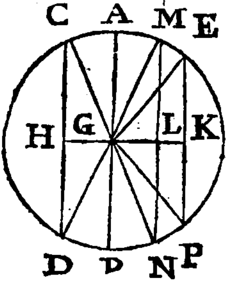
(1) *Axi.* 7. (2) *Prop.* 47. *lib.* 1.

ex AE, & EF æqualia esse quadratis ex DG, & GF. Est autem modo EF quadratum æquale GF quadrato. Itaque quadratum ex AE etiam æquale erit quadrato ex DG: & propterea, quum æquales sint ipsæ AE, DG, erunt quoque æquales rectæ AB, DC, quæ illarum sunt duplæ.

In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter a centro distant; & per contrarium, quæ æqualiter a centro distant, inter se sunt æquales. Quod erat demonstrandum.

PROP. XV. THEOR. XIV.

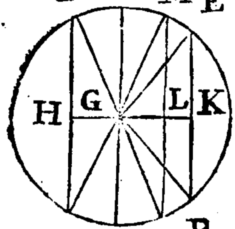
In circulo maxima linearum in ipso ductarum est diameter, seu quæ transit per centrum; aliarum autem, quæ centro sunt propinquiores majores sunt semper remotioribus.



INtra circulum ABC ducantur plures rectæ lineæ AB, CD, EF, quarum quidem AB transeat per centrum G. Dico primo rectam AB esse omnium maximam.

Jungantur etenim, tum rectæ CG, DG, cum recta EG, FG. Et quoniam propter circulum CG est æqualis AG, & DG æqualis BG, erunt duæ CG, DG æquales toti AB. Jam vero propter triangulum CGD, duæ CG, DG simul majores sunt ipsa CD (1). Erit igitur AB major quoque, quam CD. Si-

(1) *Prop.20.lib.1.*



mili ratione oſtendetur eandem AB majorem eſſe quam EF. Nempe, quum propter circulum, ſit AG æqualis EG, & BG, æqualis FG, erit tota AB æqualis duabus EG, FG. Sed propter triangulum EGF duæ EG, FG ſimul majores ſunt ipſa EF. Erit igitur & AB major quoque, quam EF: & propterea AB erit omnium maxima.

Dico ſecundo, quod ſi CD propinquior ſit centro G, quam EF, CD major ſit, quam EF.

Nam, ſi ex centro G ſuper ipſis CD, EF perpendicula demittantur GH, GK, quia ex hypotheſi EF magis diſtat a centro G, quam CD, erit GK major, quam GH. Quocirca, ſi ex GK abſcindatur portio GL (1) æqualis GH, & per punctum L ducatur recta MN ipſi EF parallela (2); rectæ duæ CD, MN, velut æqualiter diſtantes a centro G, æquales erunt (3) inter ſe. Eſt autem MN major, quam EF (4): ſunt enim baſes triangulorum MGN, EGF, quæ habent duo latera MG, NG æqualia duobus lateribus EG, FG alterum alteri, & angulum MGN majorem angulo EGF: quare CD major quoque

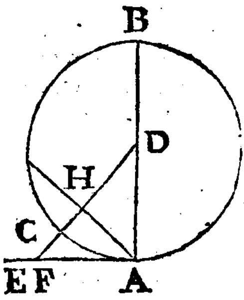
erit

(1) *Prop.3.lib.1.* (2) *Prop.31.lib.1.*
(3) *Prop.14.huj.* (4) *Prop.24.lib.1.*

erit, quam EF. Et propterea in circulo maxima linearum, intra ipſum ductarum, eſt diameter, ſeu quæ tranſit per centrum aliarum autem, quæ centro propinquiores ſunt, majores ſunt ſemper remotioribus. Quod erat oſtendendum.

PROP. XVI. THEOR. XV.

Si ex extremitate diametri perpendicularis ad eam erigatur; hæc tota cadet extra circulum; & in locum ipſius, & circuli circumferentia contentum nulla alia recta linea duci poterit.

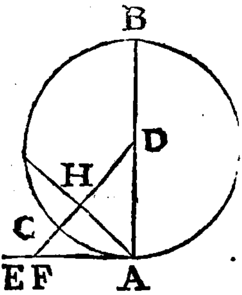


SIt circulus ABC, cujus centrum ſit punctum D, diameter rectaAB. Erigatur ex extremitate diametri A perpendicularis ad eam AE. Dico, rectam iſtam AE cadere totam extra circulum, adeoque in ſolo puncto A circulum ipſum contingere.

Capiatur etenim in AE punctum quodvis F, & jungatur DF. Quia igitur in triangulo DAF angulus DAF eſt rectus, & duo anguli ejuſdem trianguli ſimul duobus rectis minores ſunt (1); erit angulus DFA recto minor. In omni autem triangulo (2) majori angulo majus latus opponitur. Latus igitur, DF, oppoſitum angulo majori DAF, majus erit late-

re

(1) *Prop.* 17. *lib.* 1. (2) *Prop.* 19. *lib.* 1.



re DA, quod opponitur angulo minori DFA. Sed propter circulum DA est æqualis DC. Itaque DF major quoque erit, quam DC: & propterea punctum F erit extra circulum. Quumque eadem sit demonstratio de omnibus aliis punctis rectæ AE; consequens est, ut recta AE tota cadat extra circulum: atque adeo, ut in solo puncto A eum contingat.

Dico secundo, in locum contentum tangente AE, & circuli circumferentia ex eodem puncto A aliam rectam lineam duci non posse.

Ducatur etenim ex puncto A supra ipsam AE alia quævis recta linea AH. Et quoniam angulus DAE rectus est, erit angulus DAH recto minor: proindeque, quum DA non sit perpendicularis ad AH, demittatur ex centro D super AH (1) perpendicularis DH. Quia igitur in triangulo DAH angulus DHA major est angulo DAH, erit latus DA, oppositum angulo majori, majus latere DH, quod opponitur angulo minori. Est autem propter circulum DA æqualis DC. Itaque DC major quoque erit, quam DH: & propterea punctum H erit intra circuli circumferentiam. Non igitut recta AH cadit in locum

(1) *Prop.*12.*lib.*1.

cum contentum tangente AE, & circuli circumferentia. Quumque eadem ſit demonſtratio de qualibet alia recta linea; conſequens eſt, ut in locum contenfum tagente AE, & circuli circumferentia nulla recta linea duci poſſit ex puncto A.
Igitur, ſi ex extremitate diametri perpendicularis ad eam erigatur, hæc tota extra circulum cadet; & in locum ipſa & circuli circumferentia contentum nulla alia recta linea duci poterit. Qnod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Atque hinc nullo negotio ducetur tangens ad punctum in circuli circumferentia datum. Si enim A ſit punctum datum, ſatis erit ex eo per centrum ducere rectam ADB, & ad iſtam perpendicularem erigere ex eodem puncto A. Quod ſi autem ducenda ſit tangens ad circulum ex puncto dato extra ipſum, id ſequens propoſitio, quo pacto fieri poſſit, nobis oſtendet.

SCHOLIUM I.

In hac propoſitione, præter ea, quæ poſuimus, adjungi ſolent hæc alia duo: unum, quod angulus contactus, hoc eſt tangente, & circuli circumferentia contentus, minor ſit quocumque angulo acuto rectilineo: alterum, quod angulus ſemicirculi, hoc eſt diametro, & circuli circumferentia comprehenſus, quocumque angulo acuto rectilineo ſit major. Horum autem utrumque exinde deducitur, quod in locum tangente, & circuli circumferentia contentum alia recta linea ex puncto contactus duci non poſſit. Nam profecto ſemper ac ex puncto A non poteſt duci alia recta linea inter

ter tangentem AE, & circuli circumferentiam AC; necesse est, ut tam angulus, contentus sub tangente AE, & circuli circumferentia, minor sit quocumque angulo acuto rectilineo, quam angulus, contentus sub diametro AB, & eadem circuli circumferentia major sit quocumque angulo acuto rectilineo.

SCHOLIUM. II.

Inde vero nolim inferatur, angulum contactus nullius esse quantitatis. Etsi enim angulus ille, velut minor quocumque angulo acuto rectilineo, sit indefinite parvus respectu anguli BAE, usque adeo, ut angulus semicirculi BAC considerari possit tamquam sensibiliter non differens ab ipso angulo BAE; attamen, quin suam is habeat quantitatem, nemo ibit inficias, si sedulo attendat ad hæc duo. Primo, quod quantitatis nomine veniat apud Mathematicos id omne, quod plus, minusve suscipiens, augeri potest, ac minui. Et deinde, quod angulus contactus, etsi minui nequeat per rectam lineam, minui tamen optime possit per aliam circuli circumferentiam descriptam per punctum A intervallo majore, quam AD.

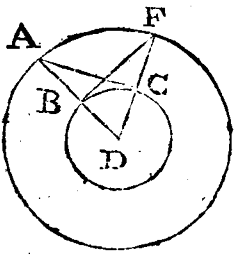
PROP. XVII. PROBL. II.

Ex dato extra circulum puncto tangentem ad circulum ducere.

SIt punctum A datum extra circulum BC. Oportet, ex puncto A ducere tangentem ad ipsum circulum BC.

Circuli BC inveniatur (1) centrum, & sit pun-

(1) *Prop.1.hujus.*



punctum D. Tum juncta DA, describatur centro D, intervalloque DA circulus alter AF. Porro ex puncto B, in quo recta DA secat circulum BC, erigatur (1) super DA perpendicularis BF, quæ secet circulumAF, in puncto F. Denique, ducta recta DF quæ secet circulum BC in C, jungatur AC. Dico, rectam istam AC esse tangentem quæsitam.

Quoniam enim punctum D centrum est, tam circuli BC, quam circuli AF; erit tum DC æqualis DB, cum DF æqualis DA. Quare duo latera DA, DC trianguli ADC æqualia erunt duobus lateribus DF, DB alterius trianguli FDB, alterum alteri. Est autem utrique triangulo communis angulus D, qui sub æqualibus ipsorum lateribus continetur. Itaque erit (2) angulus DBF æqualis angulo DCA: adeoque, quum ex constructione rectus sit angulus DBF, erit etiam rectus angulus DCA. Unde, quum ex puncto C extremitate semidiametri DC, erecta sit perpendicularis CA, hæc tota extra cirulum (3) cadet; & consequenter tangens erit. Quare ex puncto A, dato extra circulum BC ducta est ad circulum ipsum tangens AC Quod erat faciendum.

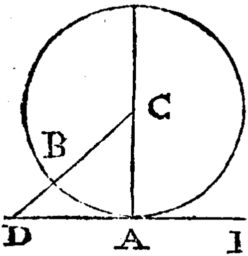
PROP.

---

(1)*Prop.* 11.*lib.*1. (2) *Prop.*4. *li.*1q.
(3) *Prop.*16. *hujus*.

PROP. XVIII. THEOR. XVI.

Si circulum recta contingat linea; quæ centrum cum puncto contactus conjungit, perpendicularis erit ad tangentem.



SIt circulus AB, cujus centrum sit punctum C, eumque contingat in A recta DE. Dico, lineam CA, conjungentem centrum C cum puncto contactus A, perpendicularem esse ad tangentem DE.

Si enim CA non sit perpendicularis super DE, demittatur (1) ex centro C perpendicularis ad ipsam DE, & sit CD, quæ secabit circulum in puncto aliquo B, propterea quod recta DE, velut tangens, tota cadit extra circulum.

Quia igitur angulus CDA rectus est, & duo anguli cujusque trianguli simul duobus rectis (2) minores sunt; erit angulus CAD recto minor. Jam autem majori angulo majus quoque latus (3) opponitur. Latus itaque CA oppositum angulo majori CDA, majus est latere CD, quod opponitur angulo minori CAD. Est autem propter circulum CA æqualis CB. Itaque CB major quoque erit, quam CD. Quod quum fieri non possit, consequens est, ut non quidem CD, sed

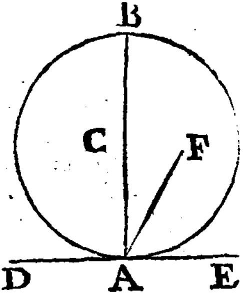
CA

(1) *Prop.* 12. *lib.* 1. (2) *Prop.* 17. *lib.* 1.
(3) *Prop.* 19. *lib.* 1.

CA perpendicularis sit super DE. Et propterea, si circulum recta contingat linea, quæ centrum cum puncto contractus conjungit, perpendicularis erit ad tangentem. Quod erat ostendendum,

PROP. XIX. THEOR. XVII.

Si circulum recta contingat linea, & ex puncto contactus perpendicularis ad tangentem erigatur, hæc transibit per centrum circuli.



CIrculum AB contingat in puncto A recta DE, ex quo erigatur ad ipsam DE perpendicularis AB. Dico, lineam istam AB transire per centrum circuli: adeo ut si ea secetur bifariam in C, erit punctum C centrum ipsius circuli.

Sit enim, si fieri potest, centrum circuli extra rectam AB, velut in F, & ducatur ex F ad A recta FA. Quia igitur FA conjungit centrum circuli cum puncto contactus, ea erit (1) perpendicularis ad rectam DE. Quare rectus erit angulus FAD. Ex hypothesi autem rectus est angulus BAD. Itaque angulus FAD æqualis erit (2) angulo BAD. Quod quum fieri non possit, consequens est, ut in ipsa AB sit centrum circuli. Et propterea si circulum recta contingat linea, & ex pun-

. cto

(1) *Prop.* 18. *hujus*. (2) *Axi* 12.

cto contactus perpendicularis ad tangentem erigatur; hæc transibit per centrum circuli. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

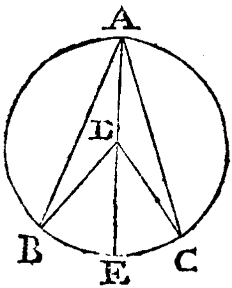
Si intra circulum ponatur aliqua recta linea, & ex uno ejus extremo alia extra circulum ducatur, tria contingere possunt: primo, ut linea intra circulum posita sit diameter, seu transeat per centrum: secundo, ut ea, quæ ducitur extra circulum sit tangans: ac tertio demum, ut una alteri ad angulos rectos insistat. Jam per ea, quæ ostensa sunt in propositione decimasexta, & duabus præcedentibus, si duo ex hisce tribus supponantur, tertium etiam habebitur. Nempe primo, si una earum linearum sit diameter, & altera ei insistat ad angulos rectos, erit ista tangens. Secundo, si una sit diameter, & altera tangens, hæc illi ad rectos angulos insistet. Et denique, si secunda sit tangens, eique prior insistat ad angulos rectos, erit hæc altera diameter.

PROP. XX. THEOR. XVIII.

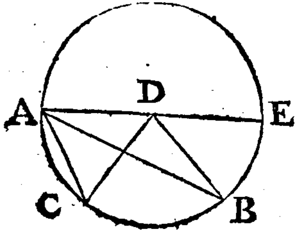
Angulus ad centrum duplus est anguli ad circumferentiam, quum super eodem arcu insistunt.

ESto circulus ABC, ejusque centrum sit punctum D. Ad centrum hujus circuli D constituatur angulus BDC, ponaturque angulus alter ad circumferentiam BAC, qui insistant super eodm arcu BC. Dico, angulum ad centrum BDC duplum esse anguli ad circumferentiam BAC.

Jungatur recta AD, quæ producta versus E cadat primo intra angulum BDC. Quia igi-



igitur AD eſt æqualis DB, erit triangulum ADB iſoſceles; adeoque angulus DAB (1) æqualis erit angulo DBA. Jam vero in triangulo ADB latus AD productum eſt in E; atque adeo angulus exterior BDE (2) æqualis eſt duobus interioribus, & oppoſitis DAB, DBA. Quum igitur duo anguli DAB, DBA æquales ſint inter ſe, erit angulus BDE duplus unius DAB. Simili ratione oſtendetur, angulum CDE duplum eſſe anguli ADC: ex quo ſequitur, totum angulum ad centrum BDC duplum eſſe totius anguli ad circumferentiam BAC.



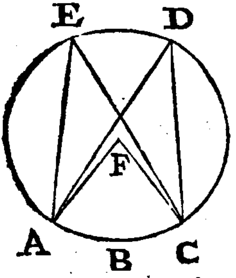
Cadat ſecundo recta AD producta verſus E extra angulum BDC. Et eadem omnino ratione oſtendetur, tum angulum BDE duplum eſſe anguli DAB, cum angulum CDE duplum anguli DAC. Quare ſi ex angulo CDE auferatur angulus BDE, & ex

(1) *Prop.* 5. *lib.*1. (2) *Prop.* 32. *lib.*1.

ex angulo DAC auferatur angulus DAB, remanebit angulus ad centrum BDC duplus quoque anguli ad circumferentiam BAC. Erit igitur in omni casu angulus ad centrum duplus anguli ad circumferentiam, quum super eodem arcu insistunt. Quod erat demonstrandum.

PROP. XXI. THEOR. XIX.

Qui in eadem portione sunt anguli, inter se sunt æquales.



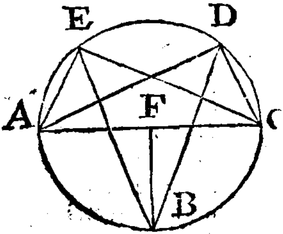
ESto circulus ABCDE, in quo capiatur portio aliqua AEDC. Ponantur autem in ista portione duo anguli AEC, ADC. Dico, angulos istos æquales esse inter se.

Inveniatur etenim (1) centrum circuli, & sit punctum F, junganturque rectæ AF, CF. Quia igitur AFC est angulus ad centrum, & AEC est angulus ad circumferentiam, quorum uterque insistit super eodem arcu ABC; erit angulus ad centrum AFC (2) duplus anguli ad circumferentiam AEC. Similiter, quia AFC est angulus ad centrum, & ADC est angulus ad circumferentiam, quorum uterque insistit super eodem arcu ABC; erit angulus ad centrum AFC duplus anguli ad circumferentiam ADC. Ejusdem igitur anguli AFC se-

(1) *Prop.* 1. *hujus.* (2) *Prop.* 20. *hujus.*

semissis est tum angulus AFC, cum angulus ADC. Sed quæ ejusdem sunt dimidia, inter se sunt (1) æqualia. Erit igitur angulus AEC æqualis angulo ADC. Et propterea qui in eadem portione sunt anguli, inter se æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.



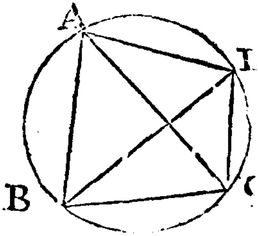
Fieri autem potest, ut rectæ AF, CF nullum angulum constituant in centro F, sed in directum jaceant. Hoc igitur quum contingit, ostendetur angulus AEC æqualis angulo ADC in hunc modum. Capiatur in altera portione ABC punctum aliquod B, & jungantur rectæ BF, BD, BE. Quia igitur angulus AFB est ad centrum, & angulus ADB est ad circumferentiam; erit angulus ad centrum AFB duplus anguli ad circumferentiam ADB. Et eadem ratione, quia angulus BFC est ad centrum, & angulus BDC est ad circumferentiam; erit angulus ad centrum BFC duplus anguli ad circumferentiam BDC. Unde duo anguli AFB, BFC simul dupli erunt totius anguli ADC. Simili ratiocinio ostendetur, eosdem angulos AFC, BFC simul duplos esse anguli AEC: ex quo sequitur, angulum ADC æqualem esse angulo AEC. Sed fieri quoque potest, ut cæ-

(1) *Axi.* 7.

eadem rectæ AF, CF constituant quidem angulum in centro F, sed versus eam partem, in qua sunt ipsi anguli AED, ADC. Quo rursus in casu, poterit eadem, ac præcedentis casus, demonstratio adhiberi.

PROP. XXII. THEOR. XX.

Quadrilaterorum in circulo inscriptorum anguli oppositi duobus rectis sunt æquales.



Esto circulus ABCD, in quo inscribatur figura aliqua quadrilatera ABCD. Dico, angulos ejus oppositos duobus rectis æquales esse.

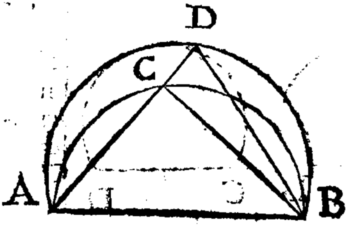
Jungantur etenim rectæ AC, BD. Et quoniam anguli ABD, ACD sunt in eadem portione, erunt ii (1) æquales inter se. Pariterque, quia anguli ADB, ACB sunt in eadem portione, isti etiam inter se æquales erunt. Est igitur angulus ABD æqualis angulo ACD, & angulus ADB æqualis angulo ACB. Quare erunt duo anguli ABD, ADB simul æquales toti angulo BCD: & propterea apposito communi BAD, erunt tres anguli ABD, ADB, BAD æquales duobus angulis BCD, BAD. Sunt autem tres anguli ABD, ADB, BAD (2) æquales duobus rectis. Erunt igitur duobus rectis pariter æquales anguli duo BCD, BAD.

(1) *Prop.21.hujus.* (1) *Prop.32.lib.1.*

BAD. Simili ratione oſtendetur, duobus re-ctis æquales eſſe duos angulos ABC, ADC. Quare quadrilaterorum in circulo inſcriptorum anguli oppoſiti duobus rectis æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

PROP. XXIII. THEOR. XXI.

In eadem recta linea duæ circulorum portiones ſimiles, & inæquales conſtitui non poſſunt.



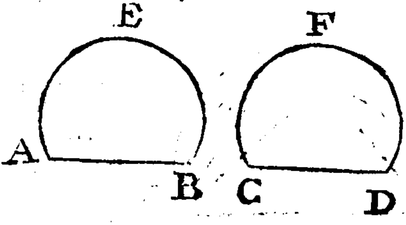
Sit recta AB, in qua conſtituatur aliqua circuli portio ACB. Dico, in eadem recta AB non poſſe conſtitui aliam circuli portionem, quæ ſit ſimilis ipſi ACB, eidem autem inæqualis.

Si enim fieri poteſt, conſtituatur hæc altera portio circuli, & ſit ADB. Ducatur autem ex puncto A recta ACD quæ utramque portionem ſecet in punctis C, & D; junganturque rectæ BC, BD.

Quia igitur portiones ACB, ADB ponuntur ſimiles, & ſimiles circulorum portiones ſunt illæ, quæ ſuſcipiunt angulos æquales; erit angulus ACB, quem ſuſcipit portio ACB, æqualis angulo ADB, quem ſuſcipit altera portio ADB. Hoc autem fieri non poteſt: in triangulo enim BDC latus DC productum eſt in A, adeoque angulus exterior ACB major est (1) interiore, & opposito mDB. Non igitur portio ADB similis est portioni ACB. Et propterea in eadem recta linea duæ circulorum portiones similes, & inæquales constitui non possunt. Quod erat demonstrandum.

PROP. XXIV. THEOR. XXII.

In æqualibus rectis lineis similes circulorum portiones constitutæ, sunt etiam æquales.



Sint duæ rectæ lineæ æquales AB, CD, in quibus constitutæ sint duæ circulorum portiones AEB, CFD similes inter se. Dico, easdem portiones esse etiam æquales.

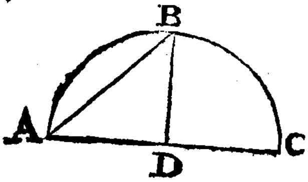
Capiatur etenim cogitatione portio AEB, & ponatur super portione CFD hac lege, ut punctum A incidat in punctum C, recta vero AB in rectam CD. Et quoniam ex hypothesi æquales sunt rectæ AB, CD, incidet quoque punctum B in punctum D. Unde necesse est, ut ipsa portio AEB incidat in portionem CFD: aliter enim in eadem recta linea constitui possent duæ circulorum portiones similes, & inæquales: quod fieri (2) nequit. Congruit itaque portio AEB cum

(1) *Prop.16.lib.1.* (2) *Prop.23.hujus.*

cum portione CFD. Quæ autem congruunt, inter se (1) sunt æqualia. Æqualis est igitur portio AEB portioni CFD. Et propterea in æqualibus rectis lineis similes circulorum portiones constitutæ, sunt etiam æquales. Quod erat demonstrandum.

PROP. XXV. PROBL. III.

Circuli portione data, invenire centrum circuli, cujus ea est portio, & circulum perficere.

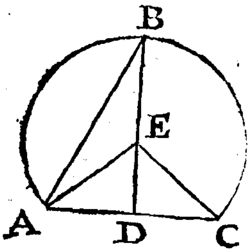


DAta sit circuli portio ABC. Oportet, invenire centrum circuli, cujus ea est portio, ipsumque circulum perficere.

Ex puncto A ad punctum C ducatur recta AC, quæ secetur (2) bifariam in D. Excitetur porro super AC (3) perpendicularis DB, & jungatur AB. Et siquidem angulus ABD æqualis sit angulo DAB. Erit D centrum circuli, cujus ABC est portio.

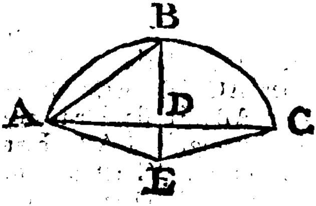
Nam semper ac angulus ABD æqualis est angulo DAB, erit etiam (4) DA æqualis DB. Est autem ex constructione DA æqualis DC. Tres igitur DA, DB, DC æquales erunt inter se. Unde, quum intra circulum ABC sumptum sit punctum D, ex quo cadunt ad ejus circumferentiam plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales, erit D centrum (5) ipsius circuli. I 2 Quod

(1) *Axi.*8. (2) *Prop.*10.*lib.*1. (3) *Prop.*11.*lib.*1. (4) *Prop.*6.*lib.*1. (5) *Prop.*9.*hujus.*



Quod si autem angulus ABD non sit æqualis angulo DAB; tunc fiat ad lineam AB, atque ad datum in ea punctum A angulus BAE æqualis angulo ABD, & punctum E, in quo recta AE ipsi BD occurrit, centrum erit circuli, cujus ABC est portio.

Nam, quum ex constructione æquales sint anguli ABE, BAE; erunt etiam æqualia latera EA, EB, quæ in triangulo AEB angulos illos subtendunt. Sunt autem duo latera AD, DE trianguli ADE æqualia duobus lateribus CD, DE alterius trianguli CDE, alterum alteri, itemque angulus ADE, contentus sub lateribus illius, æqualis est angulo CDE, qui



sub istius lateribus continetur, quum uterque ex constructione sit rectus. Itaque erit EA æqualis (1) etiam ipsi EC: & propterea tres EA, EB, EC æquales erunt inter se. Unde rursus, quum intra circulum ABC sumptum sit punctum E, ex quo cadunt ad ejus circumferentiam plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales, erit E centrum ipsius circuli.

Data

(1) *Prop.4.lib.1.*

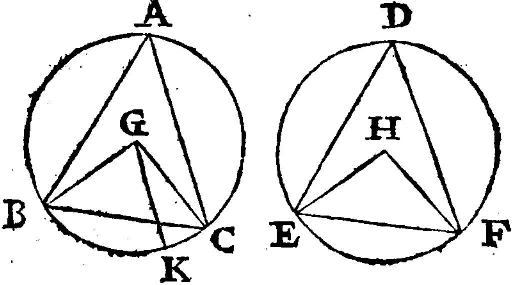
Data itaque circuli portione ABC, inventum eſt centrum circuli, cujus ea eſt portio. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Patet igitur, problematis hujus tres eſſe caſus. Vel enim angulus ABD æqualis eſt angulo DAB; & tunc centrum circuli erit in recta AC, datam circuli portionem ſubtendente. Vel angulus ABD minor eſt angulo DAB; & in iſto caſu locabitur centrum circuli intra datam portionem. Vel denique angulus ABD major eſt angulo DAB; & quum id contingit, extra datam portionem circuli centrum reperietur. Diſtinguendi ſunt autem tres iſti caſus, quia data circuli portio ABC poteſt eſſe vel ſemicirculus, vel ſemicirculo major, vel denique ſemicirculo minor.

PROP. XXVI. THEOR. XXIII.

In circulis æqualibus æquales anguli æqualibus arcubus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias sint positi.



SInt duo circuli æquales ABC, DEF, quorum centra sint puncta G, & H. ponantur autem ad centra istorum circulorum duo anguli æquales BGC, EHF; vel etiam ponantur ad circumferentias, & sint BAC, EDF. Dico arcus BC, EF, quibus anguli isti insistunt, esse etiam æquales inter se.

Jungantur etenim rectæ BC, EF. Et quoniam propter æqualitatem circulorum ABC, DEF duo latera BG, CG trianguli BGC sunt æqualia duobus lateribus EH, FH alterius trianguli EHF, alterum alteri, suntque etiam ex hypothesi æquales anguli BGC, EHF sub iis lateribus contenti; erit quoque (1) basis BC æqualis basi EF. Jam vero portiones BAC, EDF sunt similes inter se, quia ex hypothesi æquales sunt anguli BAC, EDF, quos illæ

(1) *Prop.4.lib.1.*

illæ suscipiunt. Quum igitur eædem illæ portiones constitutæ sint in rectis aqualibus BC, EF, eæ non modo similes, verum etiam æquales (1) erunt inter se: adeoque, quia integræ circulorum circumferentiæ positæ sunt inter se æquales, erunt & reliquæ portiones BC, EF (2) pariter æquales inter se. Et propterea in circulis æqualibus æquales anguli æqualibus arcubus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias sint positi. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

Notetur autem hoc loco velim, quod etsi propositio disjunctiva sit, & loquatur vel de angulis positis ad centra circulorum æqualium, vel de angulis constitutis ad circumferentias eorundem circulorum; attamen si æquales ponantur illi, æquales quoque sint isti, & vicissim si isti ponantur æquales, illi etiam æquales esse debeant: quum ostensum sit superius, angulum ad centrum duplum esse anguli ad circumferentiam, quotiescumque super eodem arcu insistunt. Id vero notare sedulo oportet, quia in demonstratione tum angulorum ad centra, cum eorum, qui sunt ad circumferentias, æqualitas adhibetur.

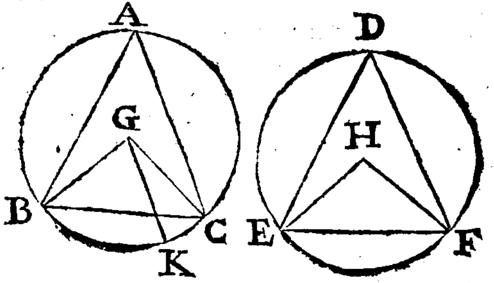
PROP. XXVII. THEOR. XXIV.

In circulis æqualibus anguli, qui sive ad centra, sive ad circumferentias positi, ... quo-
arcubus insistunt, sunt etiam ... & H. Capian-

Sint duo circuli ... I 4 tur

rum ...

(1) *Prop. 24. hujus.* (2) *Axi. 3.*



tur autem in circumferentiis eorum circulorum duo arcus æquales BC, EF, quibus insistant tum anguli BGC, EHF constituti ad centra, cum anguli BAC, EDF positi ad circumferentias eorum circulorum. Dico, æquales esse inter se, tam angulos BGC, EHF, quam angulos BAC, EDF.

Si enim anguli BGC, EHF non sint æquales inter se, alter ipsorum major erit. Sit itaque major angulus BGC, & fiat ad rectam BG, atque ad datum in ea punctum G (1) angulus BGK æqualis angulo EHF. Quia igitur anguli BGK, EHF, constitui ad centra circulorum æqualium, inter se ex constructione sunt æquales, erunt etiam æquales (2) arcus BK, EF, quibus ii insistunt. Est quum ex hypothesi arcus EF æqualis arcui lum BGC æquale BC (3) æqualis BK. Quod ...endum est, angu- ... Est au-

(1) *Prop.23.lib.1.* (2) *Prop.26.hujus.*
(3) *Axi.1.*

tem angulus BGC duplus (1) anguli BAC, itemque angulus EHF duplus anguli EDF. Quare erit angulus BAC (2) æqualis quoque angulo EDF. Et propterea in circulis æqualibus anguli, qui ſive ad centra, ſive ad circumferentias poſiti, æqualibus arcubus inſiſtunt, ſunt etiam æquales inter ſe. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

Hæc propoſitio eſt converſa præcedentis. Ibi enim oſtenſum eſt, in circulis æqualibus æquales angulos æqualibus arcubus inſiſtere, ſive ad centra, ſive ad circumferentias ſint poſiti. Hic vero per contrarium demonſtratur, in circulis æqualibus angulos, qui ſive ad centra, ſive ad circumferentias poſiti, æqualibus arcubus inſiſtunt, æquales etiam eſſe inter ſe.

PROP. XXVIII. THEOR. XXV.

In circulis æqualibus æquales rectæ lineæ æquales arcus abſcindunt, majorem quidem æqualem majori, minorem vero minori. Vide eamdem Figuram.

SInt duo circuli æquales ABC, DEF, quorum centra ſint puncta G, & H. Ponantur autem in iis duæ rectæ BC, EF æquales inter ſe. Dico, rectas iſtas æquales abſcindere etiam arcus æquales, nempe majorem

(1) *Prop.20.hujus.* (2) *Axi.7.*

ABC æqualem majori DEF, minorem vero BC æqualem minori EF.

Jungantur etenim tum rectæ BG, CG, cum rectæ EH, FH. Et quoniam ex hypothesi æquales sunt circuli ABC, DEF, erunt duo latera BG, CG trianguli BGC æqualia duobus lateribus EH, FH alterius trianguli EHF, alterum alteri. Sunt autem bases eorundem triangulorum BC, EF ex hypothesi etiam æquales inter se. Itaque erit (1) angulus BGC æqualis angulo EHF. Jam vero in circulis æqualibus æquales anguli (2) æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad circumferentias, sive ad centra sint positi. Erit igitur arcus BC æqualis arcui EF: atque adeo, quum æquales sint integræ circulorum circumferentiæ, erit quoque arcus BAC æqualis arcui EDF. Et propterea in circulis æqualibus æquales rectæ lineæ æquales arcus abscindunt, majorem quidem majori, minorem vero minori. Quod erat demonstrandum.

PROP. XXIX. THEOR. XXVI.

In circulis æqualibus æquales arcus æquales rectæ lineæ subtendunt. Vide supra positam Figuram.

SInt duo circuli æquales ABC, DEF, quorum centra sint puncta G, & H. Abscindantur autem ex iis duo arcus æquales BC, EF. Dico rectas BC, EF arcus illos æquales subtendentes esse etiam æquales inter se.

Jun.

(1) *Prop.8.lib.1.* (2) *Prop.26.hujus.*

Jungantur etenim, tum rectæ BG, CG, cum rectæ EH, FH. Et quoniam ex hypothesi arcus BC æqualis est arcui EF, & in circulis equalibus anguli, qui sive ad centra, sive ad circumferentias positi, æqualibus arcubus insistunt, æquales (1) sunt etiam inrer se; erit angulus BGC æqualis angulo EHF. Unde, quum duo triangula BGC, EHF habeant duo latera BG, CG æqualia duobus lateribus EH, FH, alterum alteri, itemque æquales angulos sub lateribus illis comprehensos; habebunt quoque (2) basim BC æqualem basi EF. Et propterea in circulis æqualibus æquales arcus æquales rectæ lineæ subtendunt. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Hæc propositio est conversa præcedentis. Ibi enim ostensum est, in circulis æqualibus æquales rectas lineas æquales quoque arcus abscindere. Hic vero per contrarium demonstratur, in circulis æqualibus æquales arcus æquales quoque rectas subtendere.

PROP. XXX. PROBL. IV.

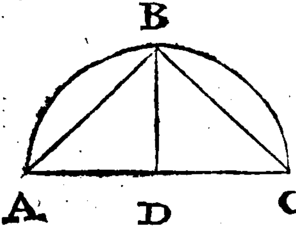
Datam circuli portionem bifariam dividere.

DAta sit circuli portio ABC. Oportet portionem istam bifariam dividere.

Ex puncto A ad punctum C. ducatur recta

I 6 AC,

(1) *Prop. 27. hujus.* (2) *Prop. 4. lib. 1.*



AC, quæ ſecet ur bifariam (1) in D. Erigatur deinde (2) ſuper AC perpendicularis DB, quæ ſecet datam circuli portionem in B. Dico, portionem ABC ſectam eſſe bifariam in B.

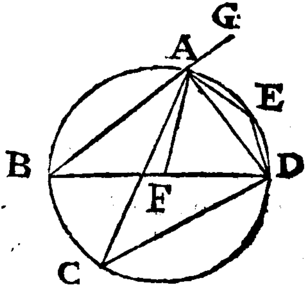
Jungantur enim rectæ AB, CB. Et quoniam ex conſtructione AD eſt æqualis CD, communis vero DB, erunt duo latera AD, DB trianguli ADB æqualia duobus lateribus CD, DB alterius trianguli CDB, Eſt etiam angulus ADB, contentus ſub lateribus illius æqualis angulo CDB, qui ſub lateribus iſtius continetur, quum uterque ex conſtructione ſit rectus. Itaque erit baſis unins AB (3) æqualis quoque baſi alterius CB. Oſtenſum eſt autem, in æqualibus circulis, & conſequenter eo magis in eodem circulo æquales rectas lineas aquales quoque arcus abſcindere (4). Erit igitur arcus AB æqualis arcui CB. Et propterea data circuli portio ABC ſecta eſt bifariam in B. Quod erat faciendum.

PROP.

(1) *Prop.10.lib.1.* (2) *Prop.11.lib.1.*
(3) *Prop.4.lib.1.* (4) *Prop.28.hujus.*

PROP. XXXI. THEOR. XXVII.

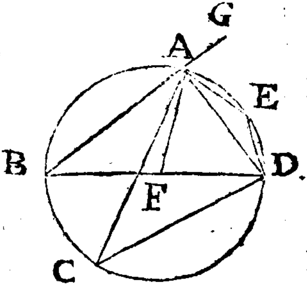
Angulus in semicirculo est rectus; qui vero est in portione majore, est recto minor; & qui in portione minore, est recto major.



Esto circulus ABCDE, habens pro centro punctum F. Ducatur in eo diameter BD, quæ eundem dividat in duos semicirculos & in altero eorum, ut BA ED, ponantur angulus BAD Dico, angulum istum BAD rectum esse.

Jungatur etenim AF, & extendatur BA versus G. Quia igitur propter circulum AF est æqualis BF, triangulum AFB isosceles erit; atque adeo angulus BAF æqualis erit (1) angulo ABF. Simili ratione, quia propter circulum AF est æqualis DF, erit triangulum AFD isosceles; & consequenter angulus DAF æqualis erit angulo ADF. Quum itaque sit angulus quidem BAF æqualis angulo ABF, angulus vero DAF æqualis angulo ADF; erit totus angulus BAD æqualis duobus ABF, ADF. Sed, quum in triangulo BAD latus BA productum sit in G iisdem duobus angulis ABF, ADF æqualis est etiam (2) angulus DAG. Erit igitur

(1) *Prop. 5. lib. 1.*
(2) *Prop. 32. lib. 1.*



tur (1) angulus BAD æqualis angulo DAG: & propterea, quum ſint deinceps, uterque rectus erit. Rectus itaque eſt angulus BAD, qui exiſtit in ſemicirculo BA ED.

Ponatur ſecundo in portione ABCD, ſemicirculo majore angulus alter ACD. Dico, angulum iſtum ACD eſſe acutum, ſeu minorem recto.

Quoniam enim in triangulo ABD angulus BAD eſt rectus, erit alter CBD acutus ſeu recto minor; quum in omni triangulo duo quilibet anguli ſimul duobus rectis minores ſint (2). Eſt autem angulus CBD æqualis angulo ACD, quum ſint in eadem portione ABCD (3). Quare erit angulus ACD etiam acutus, ſeu recto minor.

Denique in portione AED, ſemicirculo minore ponatur angulus AED. Dico angulum iſtum AED eſſe obtuſum, ſeu majorem recto.

Quoniam enim quadrilaterorum in circulo inſcriptorum anguli oppoſiti ſunt (4) æquales duobus rectis, & ACDE eſt figura quadrilatera inſcripta in circulo ABCDE, erunt anguli ejus oppoſiti ACD, AED ſimul

mul

(1) *Axi.1.* (2) *Prop.17.lib.1.*
(3) *Prop.21.hujus.* (4) *Prop.22.hujus.*

simul æquales duobus rectis. Ostensum est autem, angulum ACD esse acutum, seu minorem recto. Erit igitur alter AED obtusus, seu recto major.

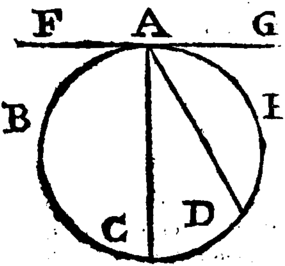
Quo circa angulus in semicirculo est rectus; qui vero est in portione majore est recto minor & qui in portione minore est recto major. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM I.

In hac propositione solent etiam apponi hæc alia duo. Primum quod majoris quidem portionis angulus sit recto major. Et alterum, quod angulus minoris portionis sit recto minor. Horum autem utrumque ex eo vulgo deduci solet, quod anguli deinceps, quos recta AD facit cum BG, prout ostensum est in prima parte hujus propositionis, sint recti. Inde enim sequitur, angulum, quem ipsa AD constituit cum portione ABCD semicirculo majore esse recto majorem; angulum vero, quem eadem AD constituit cum portione AED, semicirculo minore, esse recto minorem. Quorsum autem hæc adjiciantur, & ostendantur nescio, num omnibus peræque notum sit. Nimirum, quum alibi ostensum sit, angulum contactus minorem esse quocumque angulo acuto rectilineo; sequitur exinde angulum portionis, quæ semicirculum adæquat, majorem esse omni angulo acuto rectilineo, atque adeo posse velut angulum rectum considerari. At vero, quum ostenditur hic, majoris quidem portionis angulum esse recto majorem, angulum autem minoris portionis esse recto minorem; ostenduntur hæc in hunc finem, ut sciamus utrumque eorum angulorum

lorum ita quidem differre ab angulo recto, ut neuter possit unquam velut rectus considerari.

SCHOLIUM II.



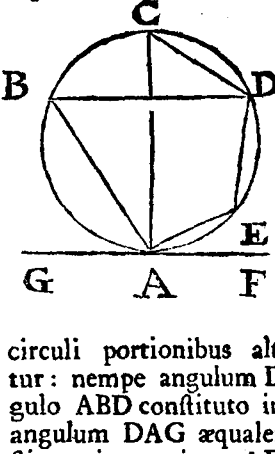
H*Inc ea, de quibus est quæstio, congruentius ostendentur in hunc modum. Esto circulus ABCDE, qui dividatur per rectam AD in duas portiones inæquales, quarum altera ABCD sit semicirculo major, altera AED semicirculo minor. Ducantur ad punctum A tangens FG, cui perpendicularis erigatur AC, quæ quum transeat per centrum circuli, erit diameter dividetque adeo eundem circulum in duos semicirculos. Itaque, quia ex A duci possunt intra angulum CAD, non una, sed infinitæ rectæ lineæ; multum abest, ut ipse angulus CAD minor sitquocumque angulo acuto rectilineo: proindeque angulus majoris portionis DAB sensibiliter major erit angulo semicirculi CAB. Quare etsi, ob angulum contactus BAF omni angulo acuto rectilineo minorem, angulus semicirculi CAB non differat sensibiliter ab angulo recto CAF ipse tamen majoris portionis angulus DAB sensibiliter major erit angulo recto CAF. Simili ratione angulus minoris portionis DAE sensibiliter minor est angulo semicirculi CAE. Itaque*

etsi

etsi, ob angulum contactus EAG omni angulo acuto rectilineo minorem, angulus semicirculi CAE non differat sensibiliter ab angulo recto CAG; ipse tamen minoris portionis angulus DAF sensibiliter minor erit angulo recto CAG.

PROP. XXXII. THEOR. XXVIII.

Si circulum recta contingat linea, & ex puncto contactus alia utcumque circulum secans ducatur; anguli sub tangente, & secante contenti æquales erunt iis qui in alternis circuli portionibus constituuntur.

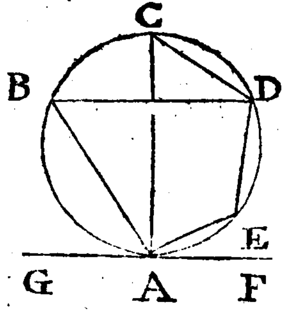


CIrculum ABCD contingat recta FG in puncto A, ex quo ducatur recta alia AD, quæ dividat circulum in duas portiones ABCD, AED. Dico, angulos tangente, & secante contentos equales esse eis, qui in iis circuli portionibus alternatim constituuntur: nempe angulum DAF æqualem esse angulo ABD constituto in portione ABCD; & angulum DAG æqualem angulo AED constituto in portione AED.

Ex puncto etenim contactus A erigatur (1) super FG perpendicularis AC, quæ quum (2) transeat per centrum circuli erit diame-

(1) [illegible]

(2) *Prop. 19. hujus.*



meter, atque adeo dividet circulum in duos semicirculos. Quia igitur CDEA semicirculus est, juncta CD, erit (1) angulus CDA rectus. Sunt autem cujuscumque trianguli anguli omnes simul (2) duobus rectis æquales. Erunt itaque alii duo anguli ACD, DAC simul uni recto æquales: & propterea, quum rectus sit ex constructione angulus CAF, erit angulus CAF æqualis duobus angulis ACD, DAC: & consequenter, ablato communi DAC, erit angulus DAF (3) æqualis angulo ACD. Jam vero angulus ACD æqualis est (4) angulo ABD, quum sit in eadem portione ABCD. Quare idem angulus DAF æqualis quoque erit angulo ABD.

Rursus, quia ABDE est figura quadrilatera inscripta in circulo ABCDE, & quadrilaterorum in circulo inscriptorum anguli oppositi simul (5) duobus rectis sunt æquales; erunt duo anguli ABD, AED simul duobus rectis æquales. Sunt autem duo anguli DAF, DAG simul etiam (6) æquales duobus rectis. Erunt igitur duo anguli DAF, DAG æquales

(1) *Prop.* 31. *hujus.* (2) *Prop.* 32. *lib.* 1.
(3) *Axi.* 3. (4) *Prop.* 21. *hujus.*
(5) *Prop.* 22. *hujus.* (6) *Prop.* [illegible]

les duobus angulis ABD, AED: & proptererea, quum ostensum sit, angulum DAF æqualem esse angulo ABD, erit alter angulus DAG æqualis alteri angulo AED. Quocirca, si circulum recta contingat linea, & ex puncto contactus alia utcumque circulum secans ducatur; anguli tangente, & secante contenti æquales erunt iis, qui in alternis circuli portionibus constituuntur. Quod erat demonstrandum.

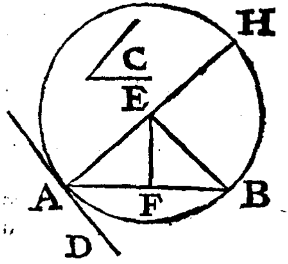
SCHOLIUM.

Fieri autem potest, ut recta, quæ circulum secat, sit perpendicularis ipsa AC, quo casu angulos tangente, & secante contentos æquales esse eis, qui in alternis circuli portionibus constituuntur, nullo negotio ostendetur. Est enim uterque eorum angulorum rectus ex hypothesi, & profecto recti sunt etiam anguli, qui constituuntur in portionibus ABC, ADC: quandoquidem recta AC, velut perpendicularis ad tangentem FG, transibit per centrum circuli; adeoque, tanquam diameter, dividet circulum in duos semicirculos, in quibus angulos, qui constituuntur, rectos esse, jam superius ostensum fuit.

PROP. XXXIII PROBL V.

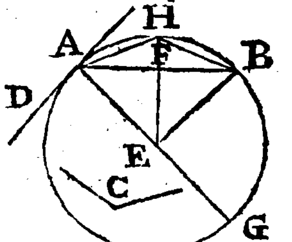
In data recta linea describere portionem circuli, quæ suscipiat angulum æqualem angulo dato.

DAta sit recta AB, datus vero angulus C. Oportet in data recta AB describere portionem circuli, quæ suscipiat angu-



gulum, æqualem dato angulo C.

Ad rectam AB, atque ad datum in ea punctum A constituatur (1) angulus BAD æqualis angulo C. Tum super AD erigatur (2) ex puncto A perpendicularis AE; & secta AB (3) bifariam in F, erigatur super AB perpendicularis altera FE, conveniens cum AE in puncto E, jungaturque BE.



Quia igitur ex constructione AF est æqualis BF communis vero FE; erunt duo latera AF, FE trianguli AFE æqulia duobus lateribus BF, FE trianguli BFE, alterum alteri. Sunt etiam æquales anguli, qui sub lateribus iis continentur, quum uterque ex constructione sit rectus. Erit igitur basis unius AE (4) æqualibus basi alterius BE: & propterea si centro E, intervalloque EA circulus describatur AGH, transibit circulus iste per punctum B. Sed descripto hoc circulo, dico,

por-

(1) *Prop.23.lib.1.* (2) *Prop.11.lib.1.*
(3) *Prop.10.lib.1.* (4) *Prop.4.lib.1.*

portionem ejus AHB suscipere angulum æqualem dato angulo C.

Quoniam enim AE est circuli semidiameter, eique ad rectos angulos insistit AD, erit AD, circuli tangens (1). Est autem AB secans. Quare angulus tangente, & secante contentus BAD æqualis (2) erit ei, qui constituitur in alterna circuli portione AHB. Jam vero ex constructione angulus BAD æqualis est angulo C. Angulus igitur, qui constituitur in portione AHB æqualis quoque erit angulo C. Et propterea in data recta AB descripta est circuli portio AHB, quæ suscipit angulum æqualem dato angulo C. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Quia recta AE, perpendiculariter erecta super AD, cadit inter angulum BAD, quum est obtusus, & extra eundem angulum, quum est acutus; liquet, centrum descripti circuli E esse extra portionem AHB, quotiescumque datus angulus C est obtusus, & intra portionem, ubi idem angulus C est acutus. Quod si autem angulus C fuerit rectus, tunc quia rectus est etiam angulus BAD, cadet AE super AB & coincidentibus punctis E, & F, fiet F centrum circuli, quod proinde erit in ipsa recta AB, quæ subtendit portionem AHB. Unde hoc casu ut problemati fiat satis, satis erit, rectam AB dividere bifariam in F, & centro F, intervalloque FA, vel FB describere semicirculum.

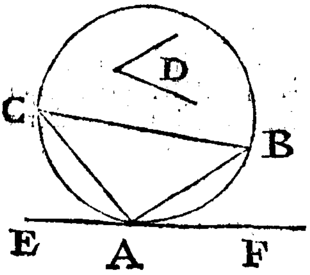
AHB

(1) *Prop. 16, hujus.* (2) *Prop. 32. hujus.*

AHB. Nam, quum angulus in semicirculo sit rectus suscipiet semicirculus iste angulum æqualem dato angulo C.

PROP. XXXIV. PROBL. VI.

Ex dato circulo abscindere portionem, quæ suscipiat angulum æqualem angulo dato,



DAtus sit circulus ABC, datus vero angulus D. Oportet, ex circulo ABC abscindere portionem, quæ suscipiat angulum æqualem dato angulo D.

Ducatur recta EF, (1) quæ circulum contingat in puncto aliquo A. Tum ad rectam AF, atque ad datum in ea punctum A constituatur (2) angulus EAC æqualis angulo D. Dico portionem ABC, abscissam ex circulo per rectam AC ad partem alteram anguli EAC, suscipere angulum æqualem angulo D.

Quoniam enim ex constructione EF est tangens, circuli AC vero secans, erit angulus EAC tangente, & secante contentus æqua-

(1) *Prop.17.hujus.* (2) *Prop.23.lib.1.*

æqualis (1) angulo, qui conſtituitur in alterna circuli portione, ABC. Eſt autem ex conſtructione angulus EAC æqualis angulo D. Angulus igitur, qui coſtituitur in portione ABC, æqualis eſt quoque angulo D. Et propterea ex dato circulo abſciſſa eſt portio quæ ſuſcipit angulum æqualem angulo dato D. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Hoc problema eſt converſum præcedentis. Ibi enim quærebatur circulus, in quo ſi data recta ponatur, abſcindat ex eo portionem, quæ ſuſcipiat angulum æqualem, angulo dato. Hic vero quæritur per contrarium recta, quæ poſita in dato circulo, abſcindat ex eo portionem, quæ dati anguli ſit capax.

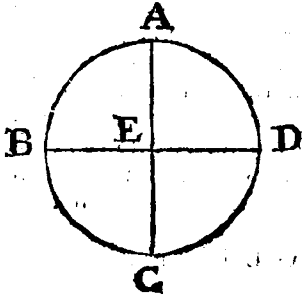
PROP. XXXV. THEOR. XXIX.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecent; erit rectangulum ſub ſegmentis unius æquale rectangulo ſub ſegmentis alterius.

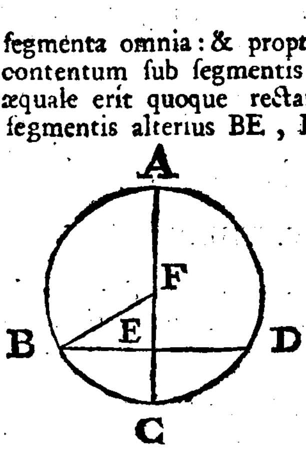
IN circulo ABCD rectæ duæ AC, BD ſe ſecent in E. Dico, rectangulum contentum ſub ſegmentis unius AE, EC æquale eſſe ei, quod ſub ſegmentis alterius BE, ED continetur.

Tranſeat primo utraque linearum per centrum circuli, vel quod idem eſt ſit punctum

(1) *Prop.32.hujus.*



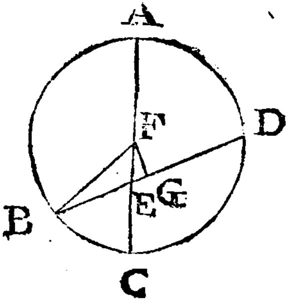
ctum E, in quo duæ rectæ AC, BD se mutuo secant, ipsius circuli centrum. Et quoniam æquales sunt rectæ omnes, quæ ducuntur a centro ad circumferentiam, æqualia erunt inter se earum rectarum segmenta omnia: & propterea rectangulum contentum sub segmentis unius AE, EC æquale erit quoque rectangulo, quod sub segmentis alterius BE, ED continetur.



Transeat secundo earum linearum una quidem AC per centrum circuli F, altera vero BD nequaquam. Et siquidem AC secat BD ad angulos rectos, secabit (1) eandem bifariam: adeoque, quum rectangulum sub iis BE, ED idem sit, ac BE quadratum; eo res redit, ut ostendamus, BE quadratum æquale esse rectangulo, quod fit ex AE in EC. Id, quod

(1) *Prop.* 3.*hujus.*

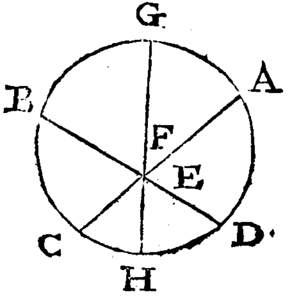
quod jam alibi a nobis ostensum est: nempe, quum ex ultima propositione libri præcedentis velut corollarium deduximus, quod si ex puncto aliquo in circuli circumferentia sumpto perpendicularis ad diametrum demittatur, quadratum ejus æquale sit rectangulo sub diametri segmentis comprehenso.



Quod si vero recta AC transiens per centrum circuli F non secet ad angulos rectos aliam BD non transeuntem per centrum; tum ex centro F super BD (1) perpendicularis demittatur FG, quæ eandem secabit bifariam in G, & jungatur BF. Quia igitur recta AC secta est bifariam in F, & non bifariam in E; erit (2) rectangulum sub partibus inæqualibus AE, EC, una cum quadrato portionis intermediæ EF, æquale quadrato, quod fit ex dimidia CF, seu BF. Est autem propter angulum rectum BGF quadratum quidem ex EF (3) æquale quadratis ex EG, & GF, quadratum vero ex BF æquale quadratis ex BG, & GF. Quare erit rectangulum ex AE in EC, una cum quadratis ex EG, & GF, æquale quadratis ex BG, & GF: propterea-

(1) *Prop.*12.*lib.*1. (2) *Prop.*5.*lib.*2.
(3) *Prop.*47.*lib.*1.

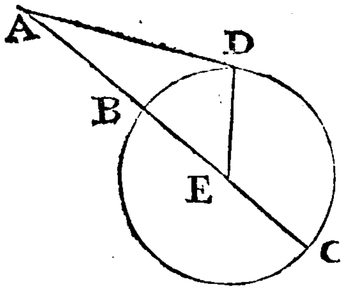
que dempto communi quadrato ex GF, erit rectangulum ex AE in EC, una cum EG quadrato, æquale quadrato ex BG. Jam vero, quum recta BD secta sit bifariam in G, & non bifariam in E, quadratum ex BG æquale est rectangulo ex BE in ED, una cum EG quadrato. Itaque erit rectangulum ex AE in EC, una cum EG quadrato, æquale rectangulo ex BE in ED, una cum eodem quadrato, quod fit ex EG. Auferatur commune istud quadratum. Et erit rectangulum ex AE in EC æquale rectangulo ex BE in ED.



Denique si neutra linearum AC, BD transeat per centrum circuli F, tunc jungatur EF, quæ extendatur usque donec circumferentiam secet in punctis G, & H. Quia igitur recta GH transit per centrum circuli F, & secat in E aliam AC non transeuntem per centrum; erit rectangulum ex GE in EH æquale rectangulo ex AE in EC. Et similiter, quia recta GH transiens per centrum circuli F secat in E aliam BD non transeuntem per centrum, erit rectangulum ex GE in EH æquale rectangulo ex BE in ED. Eidem igitur rectangulo ex GE in EH æquale est, tum rectangulum ex AE in EC, cum rectanctangulum ex BE in ED. Sed quæ eidem sunt æqualia, inter se sunt æqualia. Rectangulum igitur ex AE in EC æquale est rectangulo ex BE in ED. Et propterea si in circulo duæ rectæ lineæ se mutuo secent, erit rectangulum sub segmentis unius æquale rectangulo sub segmentis alterius. Quod erat ostendendum.

PROP. XXXVI. THEOR. XXX.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, & ex eo ducantur duæ rectæ lineæ, quarum una circulum contingat, altera eundem utcumque secet; rectangulum sub secante tota, & portione extra circulum existente contentum æquale erit quadrato, quod fit ex tangente.

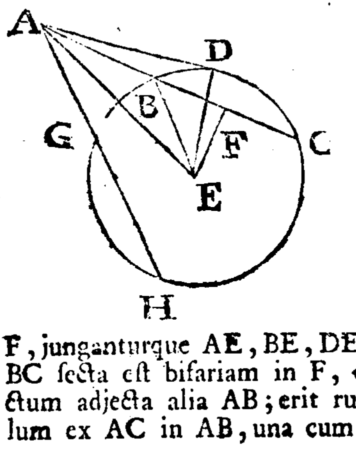


Extra circulum BCD, cujus centrum est punctum E, sumatur punctum aliquod A, ex quo ducantur duæ rectæ lineæ AC, AD, quarum ista circulum tangat in D, illa vero circulum utcumque secet in punctis B, & C. Dico, rectangulum, quod fit ex AC in AB, æquale esse quadrato tangentis AD.

Transeat namque primo secans AC per

 cen-

centrum circuli D, & jungatur DE. Quia igitur BC secta est bifariam in E, eique in directum adjecta alia AB, erit rectangulum ex AC in AB, una cum quadrato ex BE, æquale (1) quadrato ex AE. Est autem ob tangentem AD (2) angulus ADE rectus; adeoque quadratum ex AE æquale (3) quadratis, quæ fiunt ex AD, & DE. Quare erit rectangulum ex AC in AB, una cum quadrato ex BE, æquale quadratis, quæ fiunt ex AD, & DE. Unde, quum propter circulum BE quadratum æquale sit DE quadrato, iis ablatis, supererit rectangulum ex AC in AB æquale quadrato tangentis AD,



Quod si vero secans AC non transeat per centrum circuli E, tunc demittatur super AC (4) perpendicularis EF, quæ secabit BC (5) bifariam in F, junganturque AE, BE, DE. Et quoniam BC secta est bifariam in F, eique in directum adjecta alia AB; erit rursus rectangulum ex AC in AB, una cum BF quadrato, æqua-

(1) *Prop.6.lib.2.* (2) *Prop.18.hujus.*
(3) *Prop.47.lib.1.* (4) *Prop.12.lib.1.*
(5) *Prop.3.hujus.*

æquale quadrato, quod fit ex AF: proindeque apposito communi quadrato ex EF, erit rectangulum ex AC in AB, una cum quadratis ex BF, & EF, æquale quadratis, quæ fiunt ex AF, & EF. Sunt antem propter angulum rectum AFE quadrata quidem ex BF, & FE æqualia quadrato ex BE, quadrata vero ex AF, & FE æqualia quadrato ex AE. Erit igitur rectangulum ex AC in AB, una cum BE quadrato, æquale quadrato, quod fit ex AE. Jam vero propter tangentem AD angulus ADE est rectus; adeoque quadratum ex AE æquale est quadratis, quæ fiunt ex AD, & DE. Quare erit rectangulum ex AC in AB, una cum BE quadrato; æquale quadratis, quæ fiunt ex AD, & DE. Unde rursus, quum propter circulum BE quadratum æquale sit DE quadrato; his ablatis, supererit rectangulum ex AC in AB æquale quadrato tangentis AD. Et propterea, si extra circulum capiatur punctum aliquod, ex quo ducantur duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum contingat, altera eum utcumque secet; rectangulum sub secante tota, & portione extra circulum existente contentum æquale erit quadrato, quod fit ex tangente. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Hinc si extra circulum BCD capiatur punctum aliquod A, & ex eo ducantur duæ rectæ lineæ AC, AH, quæ circulum secent; erit rectangulum ex AC in AB æquale rectangulo *ex AH in AG. Nam, si ex eodem puncto A ducatur recta AD, quæ circulum contingat in D; erit per istam propositionem quadrato ex AD æquale, tum rectangulum ex AC in AB, cum rectangulum ex AH in AG. Jam vero æqualia sunt inter se, quæ eidem sunt æqualia. Rectangulum igitur ex AC in AB æquale erit rectangulo ex AH in AG.*

SCHOLIUM.

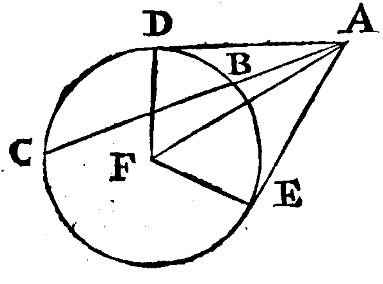
Unde non abs re erit hoc loco animadvertere id, quod propositione antecedenti ostensum est de rectis, quæ intra circulum se mutuo secant, verum esse etiam de rectis, quæ extra circulum sibi invicem occurrunt. Nempe, quemadmodum quum duæ rectæ lineæ se mutuo intra circulum secant, & utrimque ad circumferentiam terminantur, æqualia sunt rectangula, quæ fiunt ex earum segmentis, hoc est ex partibus puncto sectionis, & circuli circumferentia interceptis; ita quoque si rectæ duæ utrinque ad circumferentiam circuli terminatæ, sibi mutuo extra circulum occurrant, æqualia erunt rectangula, quæ fiunt ex earum portionibus, sumptis a puncto occursus, & ad circuli circumferentiam terminatis.

PROP. XXXVII. THEOR. XXXI.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, & ex eo ducantur duæ rectæ lineæ, quarum una circulum secet, altera incidat in eum, sitque rectangulum sub secante tota, & portione

ne

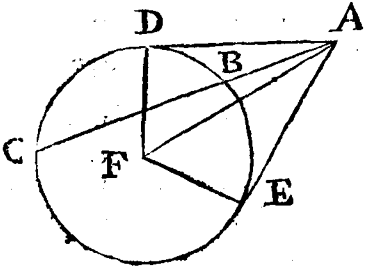
ne extra circulum existente contentum æquale quadrato incidentis; incidens ista recta linea tangens erit.



Extra circulum BCD capiatur punctum aliquod A, ex quo ducantur duæ rectæ lineæ AC, AD, quarum illa circulum secet in punctis B, & C, ista incidat in eum, ipsi occurrens in D. Dico, quod si rectangulum ex AC in AB æquale sit quadrato ipsius AD, recta ista AD circulum contingat in D.

Ducatur etenim ex puncto A recta AF, quæ circulum contingat in E (1). Tum invento centro circuli F (2) jungantur DF, AF, EF. Quia igitur AE est tangens, erit (3) rectangulum ex AC in AB æquale quadrato ipsius AE. Est autem ex hypothesi idem rectangulum ex AC in AB æquale quadrato rectæ AD. Itaque erit AE quadratum æquale AD quadrato, & propterea erit AE æqualis AD. Unde, quum propter circulum æquales fiant EF, DF; erunt duo latera AE, EF trianguli AEF æqualia duobus lateribus

(1) *Prop.17.hujus.* (2) *Prop.1.hujus.*
(3) *Prop.36.hujus.*



AD, DF trianguli ADF, alterum alteri. Est vero basis AF communis. Quare erit angulus AEF contentus sub lateribus illius æqualis (1) angulo ADF, qui sub istius lateribus continetur. Quumque propter tangentem AE rectus sit (2) angulus AEF, erit quoque rectus angulus alter ADF. Unde, quum ex puncto D, extremitate semidiametri DF, erecta sit perpendicularis DA, hæc tota (3) extra circulum cadet, atque adeo tangens erit. Et propterea si extra circulum capiatur punctum aliquod, ex quo ducantur duæ rectæ lineæ, quarum una circulum secet, altera incidat in eum, sitque rectangulum ex secante tota, & portione extra circulum existente æquale quadrato incidentis; incidens ista recta linea tangens erit. Quod demonstrare oportebat.

COROLLARIUM.

Patet autem ex hac propositione, æquales esse tangentes, quæ ex eodem puncto ad circulum ducu-

(1) *Prop.8.lib.1.* (2) *Prop.18.hujus.*
(3) *Prop.16.hujus.*

ducuntur. Ostensum est enim, æquales esse rectas AD, AE, quarum utraque circulum contingit: id, quod etiam ostendi potest in hunc modum. Quoniam AD, AE sunt tangentes, rectus erit uterque angulorum ADF, AEF. Unde, quum sit AF quadratum æquale tum quadratis, quæ fiunt ex AD, & DF, cum quadratis, quæ fiunt ex AE, & EF; erunt quadrata ex AD, & DF, æqualia quadratis ex AE, & EF. Est vero propter circulum DF quadratum æquale EF quadrato. His igitur ablatis, supererit AD quadrutum æquale AE quadrato. & propterea AD ipsi AE æqualis erit.

SCHOLIUM.

Cæterum hæc propositio est conversa præcedentis. Quemadmodum enim ibi ex eo, quod AD sit tangens, ostensum est rectangulum ex AC in AB æquale esse quadrato, quod fit ex AD; ita hic per contrarium ex eo, quod rectangulum ex AC in AB æquale sit quadrato ex AD ostenditur ipsam AD circulum contingere in puncto D.

GEOMETRIÆ PLANÆ ELEMENTORUM LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

I.

Figura rectilinea in figura rectilinea deſcribi dicitur, quando unuſquiſque figuræ, quæ deſcribitur, angulus unumquodque figuræ, in qua deſcribitur, latus contingit.

II.

Viciſſim vero figura rectilinea circa figuram rectilineam deſcribi dicitur, quando unumquodque figuræ, quæ deſcribitur, latus unumquemque figuræ, circa quam deſcribitur, angulum contingit.

III.

Similiter autem figura rectilinea in circulo deſcribi dicitur, quando unuſquiſque figuræ, quæ deſcribitur, angulus contingit circumferentiam circuli, in quo deſcribitur.

IV.

Atque ita quoque figura rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, quando unumquodque figuræ, quæ deſcribitur, latus contingit circumferentiam circuli, circa quem deſcribitur.

V.

Ad hæc: circulus in figura rectilinea deſcribi dicitur, quando circumferentiam ejus con-

contingit unumquodque latus figura in qua deſcribitur.

VI.

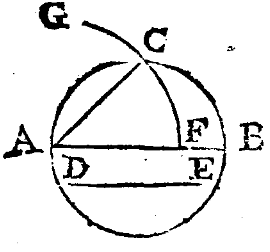
Viciſſim vero circulus circa figuram rectilineam deſcribi dicitur, quando circumferentiam ejus contingit unuſquiſque angulus figuræ, circa quam deſcribitur.

VII.

Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ita quidem ponitur intra circulum ' ut extrema ejus in circuli circumferentia reperiatur.

PROP. I. PROBL. I.

In dato circulo aptare rectam lineam, quæ alteri datæ ſit æqualis. Oportet autem, ut data recta linea non ſit major diametro dati circuli.



DAtus ſit circulus ABC, data vero recta DE, non major diametro dati circuli. Oportet, in circulo ABC aptare rectam lineam quæ ſit æqualis ipſi DE.

Ducatur in circulo diameter AB. Et ſiquidem AB ſit æqualis datæ DE, quoniam extrema ipſius AB ſunt in circuli circumferentia, ea problemati ſatisfaciet. Quod ſi vero illi non ſit æqualis, abſcindatur ex AB portio AF (1) æqualis DE. Tum centro A, interval-

(1) *Prop.* 3. *lib.* 1.

valloque AF circulus describatur FCG, qui alium secet in C, jungaturque AC. Dico, AC esse rectam quæsitam.

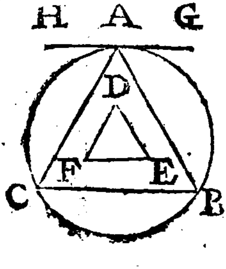
Quum enim A centrum sit circuli FCG, erit AF æqualis AC. Est autem ex constructione AF æqualis DE. Erit igitur AC æqualis DE. Sunt vero extrema ejusdem AC in circumferentia circuli ABC. Aptata est igitur in circulo ABC recta AC æqualis datæ DE. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Necesse est autem, ut data recta linea, cui æqualis altera aptari debet in dato circulo, major non sit diametro dati circuli, ob id, quod ostensum est propositione decima quinta libri præcedentis, nempe quod diameter sit maxima omnium rectarum, quæ intra circulum aptari possunt.

PROP. II. PROBL. II.

In dato circulo describere triangulum æquiangulum alteri triangulo dato.



Datus sit circulus ABC, datum vero triangulum DEF. Oportet, in circulo ABC describere triangulum, quod ipsi DEF sit æquiangulum, ita nempe, ut singuli anguli unius æquales sint singulis angulis alterius.

Ducatur (1) GH, quæ circulum contingat

(1) *Prop.17.lib.3.*

gat in A. Tum ad rectam GH, atque ad datum in ea punctum A constituatur(1)primo angulus GAC æqualis angulo DEF, deinde angulus HAB æqualis angulo DFE. Denique jungantur puncta B, & C, in quibus rectæ AB, AC secant circumferentiam dati circuli, per rectam BC. Dico, ABC esse triangulum quæsitum.

Quoniam enim GH est tangens, AG vero secans, erit (2) angulus GAC tangente, & secante contentus æqualis angulo ABC, constituto in alterna circuli portione. Est autem ex constructione angulus GAC æqualis angulo DEF. Erit igitur angulus ABC æqualis quoque angulo DEF.

Simili ratione, quoniam GH est tangens, AB vero secans, erit angulus BAH tangente, & secante contentus æqualis angulo ACB, constituto in alterna circuli portione. Est autem ex constructione angulus BAH æqualis angulo DFE. Itaque erit angulus ACB æqualis quoque angulo DFE.

Rursus, quia omnes anguli cujuscumque trianguli simul (3) duobus rectis æquales sunt; erunt anguli omnes simul supmti trianguli ABC æquales angulis omnibus simul sumptis trianguli DEF. Ostensum est autem, angulum quidem ABC æqualem esse angulo DEF. angulum vero ACB æqualem angulo DFE. Erit igitur reliquus angulus BAC æqualis reliquo angulo EDF.

Est

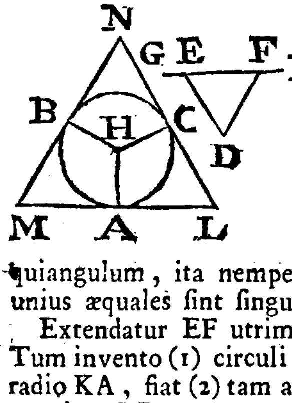
---

(1) *Prop.*23.*lib.*1. (2) *Prop.*32.*lib.*3.
(3) *Prop.*32.*lib.*1.

Est itaque triangulum ABC æquiangulum triangulo DEF. Estque etiam descriptum in dato circulo: omnes etenim anguli ejus circumferentiam dati circuli contingunt. In dato igitur circulo ABC descriptum est triangulum ABC æquiangulum dato triangulo DEF. Quod erat faciendum.

PROP. III. PROBL. III.

Circa datum circulum describere triangulum æquiangulum alteri triangulo dato.



DAtus sit circulus ABC, datum vero triangulum DEF. Oportet, circa datum circulum ABC describere triangulum, quod ipsi DEF sit æquiangulum, ita nempe, ut singuli anguli unius æquales sint singulis angulis alterius.

Extendatur EF utrimque versus C, & H. Tum invento (1) circuli centro K, actoque radio KA, fiat (2) tam angulus AKB æqualis angulo DEG; quam angulus BKC æqualis angulo DFH. Deinde ex punctis A, B, C ipsis KA, KB, KC perpendiculares respective erigantur (3) LM, MN, NL convenientes in

in

(1) *Prop.* 1. *lib.* 3. (2) *Prop.* 23. *lib.* 1.
(3) *Prop.* 11. *lib.* 1.

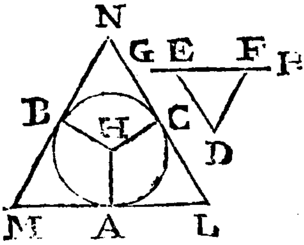
in punctis L, M, N. Dico, LMN esse triangulum quæsitum.

Quoniam enim quadrilaterum AKBM per diagonalem AB, vel KM dividitur in duo triangula, erunt quatuor ejus anguli simul sumpti rectis totidem æquales, quum omnes anguli cujuscumque trianguli simul duos rectos (1) adæquent. Est autem ex constructione rectus; tum angulus KAM, cum angulus KBM. Itaque alii duo anguli AKB, AMB simul duobus rectis æquales erunt: & propterea; quum duo anguli DEG, DEF pariter duobus rectis æquales sint; erunt duo anguli AKB, AMB æquales duobus angulis DEG, DEF: atque adeo, quia ex constructione angulus AKB æqualis est angulo DEG, erit alter angulus AMB æqualis alteri angulo DEF. Simili ratione, ope quadrilateri KBNC, ostendetur angulus BNC æqualis angulo DFE: ex quo fit ut tertius angulus EDF etiam sit æqualis tertio angulo ALC. Quare triangulum LMN æquiangulum erit triangulo DEF. Est autem idem triangulum LMN descriptum circa circulum ABC, quandoquidem latera ejus LM, MN, NL contingunt ejus circuli circumferentiam, propterea quod ex constructione radiis KA, KB, KC ad rectos angulos insistunt. Circa datum itaque circulum ABC descriptum est triangulum LMN æquiangulum dato triangulo DEF. Quod erat faciendum.

SCHO-

(1) *Prop.32.lib.1.*

SCHOLIUM.



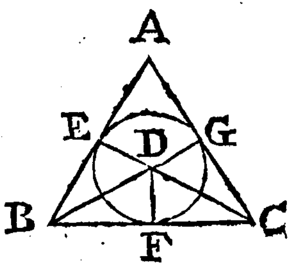
PErpendiculares LM, MN, NL, quæ ex punctis A, B, C super radiis KA KB, KC respective eriguntur, debere sibi mutuo occurrere, haud difficile erit ostendere. Quum enim ex constructione recti sint anguli KAM, KBM si jungantur puncta A, & B per rectam AB, anguli, quos perpendicula AM, BM cum recta ista AB constituunt, erunt simul duobus rectis minores; atque adeo per axioma decimum tertium eadem perpendicula producta convenient tandem in puncto aliquo M, similiter, quum rectus sit ex constructione uterque angulorum KBN, KCN, junctis punctis B, & C per rectam BC, erunt anguli, quos perpendicula BN, CN constituunt cum recta ista BC, simul duobus rectis minores; adeoque per idem axioma decimum tertium eadem perpendicula producta convenient tandem in puncto aliquo N. Major est difficultas de perpendicularibus ML, NL. Verum quum ostensum sit, angulum AMB æqualem esse angulo DEF, & angulum BNC æqualem angulo DFE; erunt duo anguli AMB, BNC æquales duobus angulis DEF, DFE.

Sunt

Sunt autem per decimam septimam primi duo anguli DEF, DFE simul duobus rectis minores. Quare erunt etiam minores duobus rectis anguli duo AMB BNC: propterea que per axioma decimum tertium perpendiculares ML, NL, producta convenient, tandem in puncto aliquo L. Quum igitur perpendicula tria LM, MN, NL sibi mutuo occurrant eadem mutuo ipsorum occursu quæsitum triangulum constituere, nemo non videt.

PROP. IV. PROBL. IV.

In dato triangulo circulum describere.



Esto triangulum ABC. Oportet in triangulo isto ABC describere circulum. Secētur anguli ABC, BCA (1) bifariam per rectas BD, CD, quæ occurrant sibi mutuo in D. Tum ex puncto D ipsis AB, BC, CA perpendiculares respective (2) demittantur DE, DF, DG. Dico, circulum, qui describitur centro D, intervalloque DE, esse circulum quæsitum.

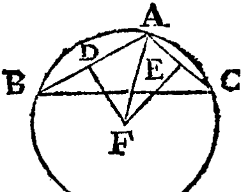
Quoniam enim ex constructione æquales sunt tum anguli DEB, DFB, cum anguli DBE,

(1) *Prop.9.lib.1.* (2) *Prop.12.lib.1.*

DBE, DBF; erunt duo anguli DEB, DBE trianguli BDE, æquales duobus angulis DFB, DBF trianguli BDF, alter alteri. Eſt autem latus BD utrique triangulo commune. Itaque æqualia quoque erunt (1) latera DE, DF. Simili ratione, ope triangulorum CDF, CDG, oſtendentur æqualia latera DF, DG. Tres igitur DE, DF, DG æquales ſunt inter ſe. Et propterea circulus, qui deſcribitur centro D, intervalloque DE tranſibit etiam per puncta F, & G. Contingunt autem circuli hujus circumferentiam latera trianguli AB, BC, CA: idem igitur circulus deſcriptus erit in triangulo ABC. Adeoque in dato triangulo ABC deſcriptus eſt circulus EFG. Quod erat faciendum.

PROP. V. PROBL. V.

Circa datum triangulum circulum deſcribere.



ESto triangulm ABC. Oportet, circa triangulum iſtud ABC deſcribere circulum.

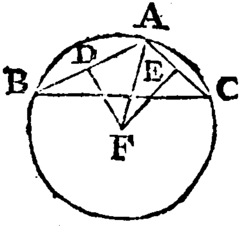
Secentur latera AB, AC (2) bifariam in punctis D, & E, ex quibus erigantur (3) ſuper iiſdem AB, AC perpendiculares DF, EF, ſibi mutuo occurrentes in F. Dico circulum qui deſcribitur centro F in-

(1) *Prop.26.lib.*1. (2) *Prop.*10.*lib.* 1.
(3) *Prop.* 11.*lib.*1.

F, intervalloque FA, esse circulum quæsitum.

Jungantur etenim rectæ FA, FB, FC. Et quoniam ex constructione AD est æqualis BD, communis vero DF; erunt duo latera AD, DF trianguli ADF, æqualia duobus lateribus BD, DF trianguli BDF, alterum alteri. Sunt autem æquales quoque anguli sub lateribus iis comprehensi, quum uterque ex construnctione sit rectus. Quare erit (1) basis unius FA æqualis basi alterius FB. Simili ratione, ope triangulorum AEF, CEF, ostendatur FA æqualis FC. Tres igitur FA, FB, FC æquales sunt inter se: & propterea circulus, qui describitur centro F, intervalloque FA, quum transeat quoque per puncta B, & C, descriptus erit circa triangulum ABC. Quod erat faciendum.

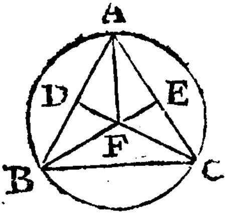
SCHOLIUM.



Perpendiculares DE EF, quæ ex punctis D, & E super ipsis AB, AC eriguntur debere sibi mutuo occurrere in puncto aliquo F, nemo non videt. Sunt enim anguli ADF AEF recti. Quare si jungantur puncta D, & E per rectam DE anguli quos cum recta

---

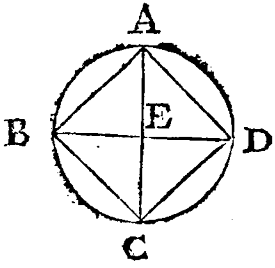
(1) *Prop.4. lib.1.*



cta ista DE eadem perpendiculares efficiunt, erunt duobus rectis minores: atque adeo per axioma decimum tertium productæ tandem convenient inter se. Jam punctum F, in quo perpendiculares illæ sibi mutuo occurrunt, potest esse, vel intra triangulum: vel in basi ipsius, vel denique extra triangulum: nempe prout angulus BAC vel est acutus, vel rectus, vel obtusus.

PROP. VI. PROBL. VI.

In dato circulo quadratum describere.



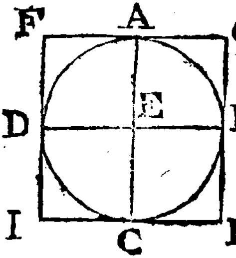
DAtus sit circulus ABCD. Oportet, in eo quadratum describere.

Ducantur in circulo duæ diametri AC, BD, quæ in centro E se secent ad angulos rectos. Tum jungantur rectæ AB, BC, CD, DA. Dico, ABCD esse quadratum quæsitum.

Quoniam enim E centrum est circuli ABCD, erit AE æqualis CE. Est autem BE communis. Erunt igitur duo latera AE, BE trianguli AEB æqualia duobus lateriribus CE, BE, trianguli CEB, alterum alteri. Sunt etiam æquales anguli ſub lateribus iis contenti, quum uterque ipſorum ex conſtructione ſit rectus. Quare erit (1) baſis unius AB æqualis baſi alterius BC. Simili ratione oſtendetur & BC æqualis CD, & CD æqualis DA. Quatuor igitur AB, BC, CD, DA æquales erunt inter ſe: proptereaque figura ABCD æquilatera erit. Eſt etiam rectangula, Sunt enim AC, BD diametri; adeoque quum unaquæque ipſarum dividat circulum in duos ſemicirculos, erit quilibet angulus figuræ ABCD, in ſemicirculo, & conſequenter (2) rectus. Figura igitur ABCD quum æquilatera ſit, & rectangula, quadratum erit. Proindeque in dato circulo deſcriptum eſt quadratum ABCD. Quod erat faciendum.

PROP. VII. PROBL. VII.

Circa datum circulum quadratum deſcribere.



Esto circulus ABCD. Oportet, circa ipſum quadratum deſcribere.

Ducantur etiam binæ diametri AC, BD, quæ in centro E ſe ſecent ad angulos rectos. Tum ex punctis A, B, C, D ipſis AC, BD perpendiculares (3) reſpective erigantur FG, GH,

(1) *Prop.4. lib.1.* (2) *Prop.31. lib.3.*
(3) *Prop.11. lib.1.*

GH, HI, IF, quæ conveniant in punctis F, G, H, I. Dico, FGHI esse quadratum quæsitum.

Quoniam enim rectæ GF, BD, HI insistunt ad angulos rectos super AC, eæ parallelæ erunt inter se. Et similiter quoniam rectæ FI, AC, CH insistunt ad angulos rectos super BD, istæ quoque inter se parallelæ erunt. Quum igitur CF, CG parallelogramma sint, erit (1) ipsi AC æqualis tam FI, quam GH. Quumque similiter parallelogramma sint BF, BI, erit ipsi BD æqualis utraque ipsarum GF, HI. Sunt autem AC, BD, tanquam diametri ejusdem circuli, æquales inter se. Quatuor itaque FG, GH, HI, IF etiam inter se æquales erunt: proptereaque figura FGHI æquilatera erit. Est etiam rectangula, quum propter parallelogramma EF, EG, EH, EI anguli ejus æquales sint iis, quos binæ diametri AC, BD mutua sectione constituunt in centro F. Erit igitur figura FCHI æquilatera simul, & rectangula, adeoque quadratum erit. Itaque circa datum circulum descriptum est quadratum FGHI. Quod erat faciendum.

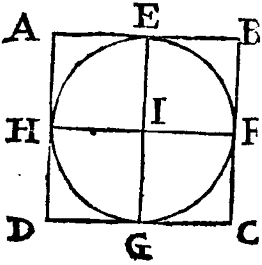
PROP. VIII. PROBL. VIII.

In dato quadrato circulum describere.

DAtum sit quadratum ABCD. Oportet, in ipso circulum describere.

Se-

(1) *Prop.* 34. *lib.* 1.



Secentur latera AB, BC bifariam (1) in E, & F, ex quibus super iisdem AB, BC perpendiculares excitentur (2) EG, FH, se mutuo secantes in I. Dico, circulum, qui describitur centro I, intervalloque IE, esse circulum quæsitum.

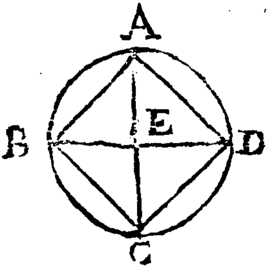
Quoniam enim ABCD quadratum est, erit AB æqualis BC. Sunt autem ex constructione duæ AB, BC sectæ bifariam in E, & F. Quatuor igitur AE, EB, BF, FC æquales erunt inter se. Jam vero unumquodque ipsorum AI, BI, CI, DI parallelogrammum est; adeoque (3) AE est æqualis HI, EB æqualis IF, BF æqualis EI, & FC æqualis IG. Itaque quatuor HI, IF, EI, IG etiam inter se æquales erunt. Et propterea circulus, qui describitur centro I, intervalloque IE, transibit etiam per puncta F, G, H. Contingunt autem circuli hujus circumferentiam latera dati quadrati AB, BC, CD, DA, quum diametris EG, FH ad rectos angulos insistant. Quare in dato quadrato ABCD descriptus est circulus EFGH. Quod erat faciendum.

PROP.

(1) *Prop.*10.*lib.*1. (2) *Prop.*11.*lib.*1.
(3) *Prop.*34.*lib.*1.

PROP. IX. PROBL. IX.

Circa datum quadratum circulum describere.



ESto quadratum ABCD. Oportet, circa ipsum describere circulum.

Ducantur diagonales AC, BD, se mutuo secantes in E. Dico, circulum, qui describitur centro E, intervalloque EA, esse circulum quæsitum.

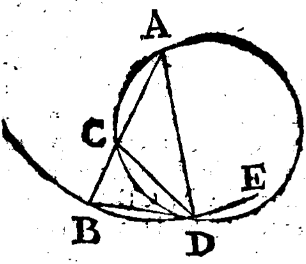
Quoniam enim ABCD quadratum est, erit AB æqualis BC; adeoque, quum isosceles sit triangulum ABC, erit (1) angulus BAC æqualis angulo BCA. Sunt autem anguli omnes cujuscumque trianguli simul (2) duobus rectis æquales. Quum igitur propter quadratum rectus sit angulus ABC, semirectus, erit tum angulus BAC, cum angulus BCA. simili ratione ostendetur semirectos esse angulos ABD, ADB: ex quo sequitur, angulos quadrati sectos esse bifariam per diagonales AC, BD; adeoque non modo ipsos verum etiam & eos, in quos secti sunt æquales esse inter se. Quum igitur anguli BAE, ABE æquales inter se sint, erunt etiam æqua-

(3) *Prop.5.lib.1.* (2) *Prop.32.lib.1.*

(1) æqualia latera EA, EB, quæ angulos illos subtendunt. Quumque eadem ratione ostendatur BE æqualis EC, & EC æqualis ED; erunt quatuor EA, EB, EC, ED æquales inter se; atque adeo circulus, qui describitur centro E, intervalloque EA, transibit etiam per puncta B, C, D. Unde quum anguli dati quadrati contingant circuli hujus circumferentiam, idem descriptus erit circa quadratum. Quod erat faciendum.

PROP. X. PROBL. X.

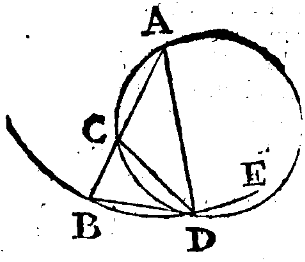
Equicrure triangulum constituere, cujus uterque angulorum ad basim duplus sit anguli verticalis.



EXponatur recta quævis AB, que secetur subinde in C, (2) ut rectangulum ex AB in BC æquale sit quadrato ex AC. Tum centro A, intervalloque AB descripto circulo BDE, applicetur (3) in circulo isto recta BD æqualis ipsi AC, jungaturque AD. Dico, ABD esse triangulum isosceles, seu æquicrure quæsitum.

L Jun-

(1) *Prop.6.lib.*1. (2) *Prop.* 11.*lib.*2.
(3) *Prop.* 1.*hujus.*



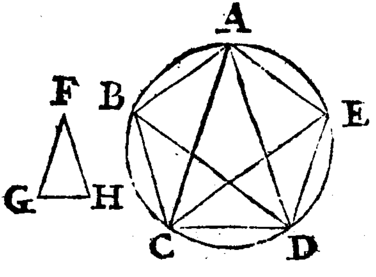
Jungatur etenim CD, & circa triangulum ACD (1) circulus describatur. Quia igitur rectangulum ex AB in BC æquale est quadrato ex AC, estque ex constructione AC æqualis BD; erit idem rectangulum ex AB in BC æquale quadrato ex BD. Unde, quum extra circulum ACD sumptum sit punctum B, ex quo cadunt ad ejus circumferentiam duæ rectæ lineæ BA, BD, & rectangulum ex AB in BC æquale sit quadrato ex BD; erit recta ista BD (2) tangens ejus circuli: adeoque angulus BDC, tangente, & secante contentus, æqualis erit (3) angulo CAD, in alterna circuli portione constituto; & consequenter apposito communi CDA, erit totus angulus BDA, sive etiam DBA, æqualis duobus angulis CAD, CDA. Jam vero in triangulo ABD latus AC productum est in B; atque adeo iisdem duobus angulis CAD, CDA æqualis est etiam angulus exterior BCD (4). Itaque erit angulus DBA æqualis angulo BCD. Et propterea latera BD, CD, quæ subtendunt angulos illos, æqualia erunt (5) inter se. Est vero BD æqualis AC. Quare & CD ipsi CA æqua-

(1) *Prop.5.hujus.* (2) *Prop.37.lib.3.*
(3) *Prop.32.lib.3.* (4) *Prop.32.lib.1.*
(5) *Prop.6.lib.1.*

æqualis erit. Unde, quum iſoſceles ſit triangulum ACD erit angulus CDA æqualis angulo CAD. Oſtenſus eſt autem angulus CDB æqualis eidem angulo CAD. Totus itaque angulus BDA ſive DBA duplus erit ipſius CAD. Et propterea conſtitutum eſt triangulum iſoſceles BAD; cujus uterque angulorum ad baſim duplus eſt anguli verticalis. Quod erat faciendum.

PROP. XI. PROBL. XI.

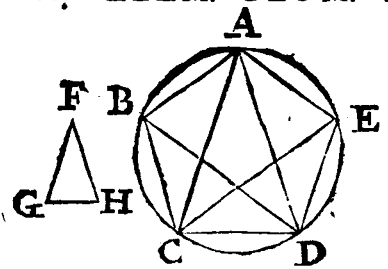
In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.



DAtus ſit circulus ABCDE. Oportet, in eo deſcribere pentagonum æquilaterum & æquiangulum hoc eſt figuram, quæ habeat tum quinque latera, ex quibus conſtet, æqualia, cum angulos, quos latera illa mutuo occurſu conſtituunt, æquales.

Conſtituatur triangulum iſoſceles GFH, cujus uterque angulorum ad baſim duplus ſit anguli verticalis (1). Tum in dato circu-

(1) *Prop. 10. hujus.*



culo ABC DE describatur (1) triangulum CAD æquiangulm ipsi GFH, quod proinde similiter isosceles erit, eritque etiam in eo uterque angulorum ad basim duplus anguli verticalis. Deinde secentur anguli ACD, ADC bifariam (2) per rectas CE, DB, junganturque puncta A, B, C, D, E per rectas, AB, BC, CD, DE, EA. Dico, ABCDE esse figuram quæsitam.

Quoniam enim uterque angulorum ACD, ADC, duplus est anguli CAD, iidemque anguli ACD, ADC secti sunt bifariam per rectas CE, DB; erunt quinque anguli ADB, BDC, CAD, DCE, ECA æquales inter se. Sed in æqualibus circulis, atque adeo eo magis in eodem circulo, æquales anguli æqualibus arcubus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias sint positi (3). Quinque igitur arcus AB, BC, CD, DE, EA, quibus insistunt ii quinque anguli, æquales erunt inter se. Quare æqualia quoque erunt inter se ipsa quinque figuræ latera AB, BC, CD, DE, EA, quum in æqualibus circulis, & consequenter eo

(1) *Prop.2.hujus.* (2) *Prop.9.lib.* 1.
(3) *Prop.26.lib.3.*

eo magis in eodem circulo, æquales arcus æquales quoque rectæ subtendant (1). Est igitur figura ABCDE æquilatera. Sed est etiam æquiangula. Quum enim arcus BC æqualis sit arcui EA, apposito communi CDE, erit arcus BCDE æqualis quoque arcui CDEA. In æqualibus autem circulis anguli, qui sive ad centra sive ad circumferentias positi, æqualibus arcubus insistunt, æquales (2) sunt inter se. Erit igitur angulus BAE æqualis angulo CBA. Eademque ratione & reliqui figuræ anguli inter se æquales ostendentur. In dato itaque circulo ABCDE descriptum Est pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod erat faciendum.

PROP. XII. PROBL. XII.

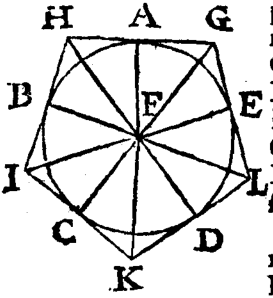
Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

DAtus sit cirulus ABCDE. Oportet, circa eum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Describatur (3) primum in eo pentagonum æquilaterum: & æquiangulum; sintque A, B, C, D, E puncta circumferentiæ, quæ, illud determinant, ita ut æquales sint arcus AB, BC, CD, DE, EA. Tum invento (4) circuli centro F, ducantur radii AF, BF, CF, DF, EF, quibus ex punctis A, B, C, D, E

L 3 per-

(1) *Prop.29.lib.3.* (2) *Prop. 27.lib.3.*
(3) *Prop.11.hujus.* (4) *Prop.1.lib.3.*



perpendiculares (1) respective erigantur GH, HI, IK, KL, LG, quæ conveniant inter se in punctis C, H, I, K, L. Dico GHIKL esse figuram quæsitam.

Jungantur etenim rectæ FG, FH, FI, FK, FL. Et quoniam triangula FAH, FBH sunt rectangula ex constructione, erit (2) quadratum ex FH æquale, tum quadratis quæ fiunt ex AF, & AH, cum quadratis, quæ fiunt ex BF, & BH. Quare quadrata ex AF, & AH æqualia erunt quadratis ex BF, & BH. Est autem AF quadratum æquale BF quadrato. His igitur demptis supererit AH quadratum æquale BH quadrato. Et propterea AH ipsi BH æqualis erit. Unde, quum sint duo latera AF, AH trianguli FAH æqualia duobus lateribus BF, BH trianguli FBH, alterum alteri, & æquales quoquæ anguli sub iis lateribus contenti, utpote recti ex constructione; erit (3) tum angulus AFH æqualis angulo BFH, cum angulus AHF æqualis angulo BHF: adeoque uterque ipsorum AFB, AHB sectus erit bifariam per rectam FH. Nec dissimiliter ostendetur, sectum esse bifariam per rectam FI utrumque angulorum BFC, BIC. Et

(1) *Prop.11.lib.1.* (2) *Prop.47.lib.1.*
(3) *Prop.4.lib.1.*

Et quoniam æquales ſunt arcus AB, BC, erunt (1) etiam æquales anguli AFB, BFC, qui arcubus illis inſiſtunt. Ex oſtenſis autem anguli illi ſecti ſunt biſariam per rectas FH, FI. Erit igitur angulus BFH æqualis angulo BFI. Sed æquales pariter ſunt anguli FBH. FBI, quum uterque ex conſtructione ſit rectus. Duo igitur triangula BFH, BFI habent duos angulos duobus angulis æquales alterum alteri. Unde, quum habeant latus BF commune, habebunt quoque (2) latus BH æquale lateri BI, & latus FH æquale lateri FI. Eſt igitur HI ſecta biſariam in B. Similiter autem oſtendetur, & GH ſectam eſſe biſariam in A. Quare, quum ſit AH æqualis BH, erit tota GH toti HI pariter æqualis. Quumque eadem ratione oſtendantur æqualia inter ſe reliqua figuræ latera; figura GHIKL æquilalera erit.

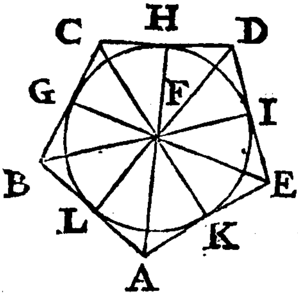
Rurſus, quum duæ FH, FI oſtenſæ ſint æquales inter ſe, triangulum HFI iſoſceles erit. Quare angulus FHI æqualis erit (3) angulo FIH. Oſtenſum eſt autem, angulos AHB, BIC ſectos eſſe biſariam per rectas FH, FI, atque adeo duplos eſſe angulorum FHI, FIH. Itaque & ipſi anguli AHB, BIC inter ſe æquales erunt. Quumque eadem ratione oſtendantur æquales inter ſe reliqui figuræ anguli; erit figura GHIKL æquiangula. Oſtenſum autem eſt, eandem figuram eſſe etiam æquilateram. Erit igitur figura GHIKL æquila-

(1) *Prop.27.lib.3.* (2) *Prop.26.lib.1.*
(3) *Prop. 5.lib.1.*

tera simul, & æquiangula. Et propterea circa datum circulum ABCDE descriptum est pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod erat faciendum.

PROP. XIII. PROBL. XIII.

In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum describere.



DAtum sit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE. Oportet, in eo circulum describere.

Secentur (1) anguli ABC, BCD bifariam per rectas BF, CF, quæ inter se conveniant in F, & super BC perpendicularis (2) demittatur FG. Dico, circulum, qui describitur centro F, intervalloque FG, esse circulum quæsitum.

Jungantur etenim rectæ AF, EF, DF, & super aliis pentagoni lateribus CD, DE, FA, AB perpendicula respective demittantur FH, FI, FK, FL. Quia igitur ex hypothesi pentagonum est æquilaterum, erit AB æqualis BC. Est vero communis BF. Quare duo latera AB, BF trianguli ABF æqualia erunt duo-

(1) *Prop.9.lib.*1. (2) *Prop.*12.*lib.*1.

duobus lateribus BC, BF trianguli CBF, alterum alteri. Sunt autem æquales quoque anguli sub iis lateribus contenti, quum ex constructione angulus ABC sectus sit bifariam per rectam BF. Erit igitur (1) angulus BAF æqualis angulo BCF. Et propterea, quemadmodum angulus BCF semissis est ipsius BCD, ita quoque erit angulus BAF semissis ipsius BAE; quum propter pentagonum æquilaterum simul, & æquiangulum æquales sint anguli BCD, BAE. Ex quo sequitur, angulum BAE etiam sectum esse bifariam per rectam AF.

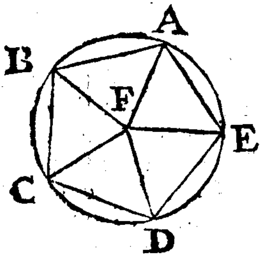
Simili autem ratiocinio ostendetur, sectos esse quoque bifariam per rectas EF, DF angulos AED, CDE. Unde facile erit ostendere, æqualia esse inter se dimissa perpendicula FG, FH, FI, FK, FL. Si enim considerentur, exempli gratia, triangula duo CGF, CHF, hæc habere comperientur duos angulos duobus angulis æquales, alterum alteri, & latus CF commune. Quare erit etiam (2) FG æqualis FH. Ita igitur quoque ostendetur FH æqualis FI; FI æqualis FK, & FK æqualis FL: proindeque, quum omnes FG, FH, FI, FK, FL inter se sint æquales; circulus, qui describitur centro F, intervalloque FG, transibit non modo per punctum G, verum etiam per puncta H, I, K, L. Contingunt autem circuli hujus circumferentiam latera BC, CD, DE, EA, AB, quum radiis FG, FH, FI, FK, FL ad

(1) *Prop.4.lib.1.* (2) *Prop.26.lib.1.*

rectos angulos insistant. Itaque circulus GHIKL descriptus erit in dato pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE. Quod erat faciendum.

PROP. XIV. PROBL. XIV.

Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.



DAtum sit pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE. Oportet, circa ipsum circulum describere.

Secentur anguli (1) ABC, BCD bifariam per rectas BF, CF, quæ inter se conveniant in F. Dico, circulum, qui describitur centro F, intervalloque FB, esse circulum quæsitum.

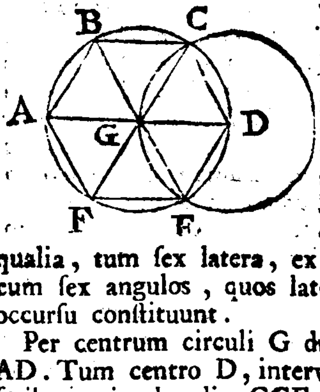
Jungantur etenim rectæ AF, EF, DF. Et perinde, ac in antecedente, ostendetur quoque sectos esse bifariam per rectas istas angulos BAE, AED, EDC. Ex quo sequitur, æquales esse inter se, non modo angulos pentagoni dati, verum etiam eos, in quos ii secti sunt. Unde facile erit ostendere, æquales esse inter se rectas AF, BF, CF, DF,

(1) *Prop.9.lib.1.*

DF, EF: nempe, quia triancula AFB, BFC, CFD, DFE, EFA ob angulos, quos ad bases habent æquales, fiunt (1) isoscelia. Quum autem æquales sint rectæ AF, BF, CF, DF, EF, circulus, qui describitur centro F, intervalloque FB, transibit non modo per punctum B, verum etiam per puncta C, D, E, A, & consequenter descriptus erit circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod erat faciendum.

PROP. XV. PROB. XV.

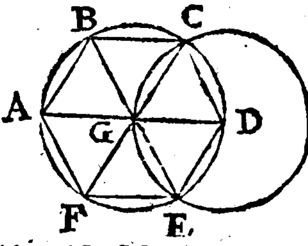
In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.



Datus sit circulus ABC DEF. Oportet, in eo describere hexagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc est figuram, quæ habeat æqualia, tum sex latera, ex quibus constat, cum sex angulos, quos latera illa mutuo occursu constituunt.

Per centrum circuli G ducatur diameter AD. Tum centro D, intervalloque DG describatur circulus alius GCE, priorem secans in punctis C, & E. Jungantur porro rectæ CG

(1) *Prop.6.lib.1.*



CG, EG, quæ producantur usque donec dati circuli circumferentiam secent in F, & B. Denique puncta A, B, C, D, E, F jungantur per rectas totidem AB, BC, CD, DE, EF, FA. Dico, figuram ABCDEF, his rectis comprehensam, esse hexagonum quæsitum.

Quum enim G centrum sit circuli ACE, rectæ GC, GD, GE, velut ductæ a centro ad circumferentiam, æquales erunt inter se. Et similiter, quia D centrum est circuli CGE, erunt rectæ DC, DG, DE etiam ductæ a centro ad circumferentiam, atque adeo pariter æquales inter se. Eidem igitur DG æqualis est tam utraque ipsarum GC, GE, quam utraque ipsarum DC, DE. Quare & omnes DC, CG, GD, CE, DE inter se æquales erunt. Et propterea utrumque triangulorum CDG, DEG æquilaterum erit.

Jam triangulum æquilaterum est etiam æquiangulum; adeoque, quum omnes anguli cujuscumque trianguli simul (1) duos rectos adæquent, uterque angulorum CGD, DGE duorum rectorum tertia pars erit. Sunt autem duo anguli BGC, CGE simul (2) duobus rectis æquales. Quare duorum rectorum tertia quoque pars erit angulus BGC. Et pro-

(1) *Prop.32.lib.1.* (2) *Prop.13.lib.1.*

propterea tres anguli BGC, CGD, DGE æquales erunt inter se, quibus quum sint æquales (1) totidem alii anguli EGF, FGA, AGB, velut ad verticem cum iis constituti; erunt sex anguli AGB, BGC, CGD, DGE, EGF, FGA omnes inter se æquales: & consequenter æquales quoque erunt inter se, tum arcus AB, BC, CD, DE, EF, FA (2), quibus insistunt anguli illi; cum rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, quæ (3) arcus illos subtendunt.

Est igitur figura ABCDEF æquilatera. Sed est etiam æquiangula. Nam quum arcus CD æqualis sit arcui AB; apposito communi DEFA; erit arcus CDEFA æqualis arcui DEFAB. Et propterea, quia æqualibus arcubus (4) æquales quoque anguli insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias sint positi; erit angulus ABC æqualis angulo BCD. Nec dissimiliter ostendetur, æquales esse inter se reliquos figuræ angulos. Itaque in dato circulo descriptum est hexagonum æquilaterum, & æquangulum ABCDEF. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

Patet autem, latus prædicti hexagoni CD æquale esse radio ipsius circuli DG; atque adeo in praxi longe facilius describi posse in dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum:

---

(1) *Prop.15.lib.1.* (2) *Prop.26.lib.3.*
(3) *Prop.29.lib.3.* (4) *Prop.27.lib.3.*

lum: nempe, si sumpto radio circuli, is circino ex uno circumferentiæ puncto eousque intra circumferentiam aptetur, donec ad primum illud punctum perveniatur. Sed liquet etiam, circuli circumferentiam magis, quam ter, diametrum continere. Sex enim latera hexagoni triplum diametri constituunt, quæ tamen simul minora sunt circumferentia circuli.

SCHOLIUM.

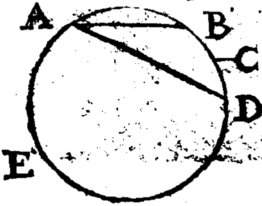
Quemadmodum post problema de describendo pentagono æquilatero, & æquiangulo in dato circulo subjunxit Euclides tria alia problemata, unum de eo describendo circa datum circulum; alterum de circulo in ipso describendo; & tertium de circulo circa idem describendo: ita quoque post appositum problema de describendo hexagono æquilatero, & æquiangulo in dato circulo, subnectenda erant tria alia ejusdem generis problemata; hoc est unum de descriptione ejus circa datum circulum; alterum de descriptione circuli in data illa figura; & tertium de descriptione circuli circa eandem datam figuram. At hæc omisit Euclides, non quod de iis non cogitaverit, sed forte quia novit, ea facili negotio solvi posse eadem omnino ratione, qua eadem soluta sunt, quum de pentagono æquilatero, & æquiangulo quæstio erat. Unde monitum Lectorem hic velim, in hac materia problema, quod omnem involuit difficultatem, esse de describenda figura, quæ æquilatera, & æquiangula sit, in dato circulo. Nam quantum ad problemata de descriptione ejusdem

dem figuræ circa datum circulum, vel de descriptione circuli in ipsa, vel circa ipsam, hæc nullam habent difficultatem: quum methodus ea solvendi sit ipsissima illa, qua soluta fuerunt, quum de pentagono agebatur.

PROP. XVI. PROBL. XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

DAtus sit circulus ABCDE. Oportet, in eo describere quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc est figuram quindecim laterum æqualium, & totidem angulorum similiter æqualium.



Res igitur eo redit, ut datam circumferentiam in quindecim partes æquales dividamus. Quod quidem obtinebimus hac ratione. Describatur primo in dato circulo (1) triangulum æquilaterum, sitque AD unum ex ejus lateribus. Quindecim itaque partium, in quas dividenda est tota circuli circumferentia, quinque continebit arcus AD. Describatur deinde in eodem circulo dato (2) pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, sitque AB unum ex ejus lateribus. Et earundem quindecim partium tres erunt in arcu

(1) *Prop.2.hujus.* (2) *Prop.11.hujus.*

arcu AB ; atque adeo duæ in arcu reliquo BD. Et propterea, si arcus iste BD (1) secetur bifariam in C, erit BC, aut CD una ex quindecim illis partibus. Unde, si cæteræ omnes capiantur, & in iis subtensæ ducantur, figuræ subtensis istis contenta erit quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum quæsitum.

GEO-

(1) *Prop.30.lib.3.*

GEOMETRIÆ PLANÆ ELEMENTORUM LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

I.

Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metimur; hoc est, quando minor aliquoties sumpta majorem adæquat. Sic numerus 2 est pars numeri 10; quia quinquies sumptus, conficit 10. Et numerus 3 est pars numeri 12; quia quater acceptus adæquat 12.

Hujusmodi pars, quæ totum, ad quod refertur, exacte metitur, vocatur speciatim pars aliquota: idque ad differentiam partis aliquantæ, quæ totum suum nequaquam metimur exacte, sed aliquoties sumpta, vel illud excedit, vel ab eo deficit; veluti est numerus 2 respectu alterius 9; vel numerus 3 relate ad alium 13.

Quod si contingat; magnitudinem aliquam minorem duas, aut plures alias majores metiri; tunc magnitudo illa minor vocabitur pars communis aliarum. Sic numerus 2 est pars communis numerorum 6, 8, 10; quia unumquemque istorum exacte metitur.

Sed si fuerint duæ magnitudines minores, quæ æque metiantur duas alias majores; tunc eæ dicentur partes similes, aut æquæ partes

tes

tes istarum; veluti sunt numeri 2, & 3 respectu numerorum 8, & 12: nam sicuti 2 quater metitur 8, ita 3 quater etiam metitur 12.

II.

Multiplex vero est magnitudo magnitudinis, major minoris, quando majorem metitur minor; hoc est, quando majorem adæquat minor aliquoties sumpta. Sic numerus 10 est multiplex numeri 2; quia si iste quinquies sumatur, prodibit 10. Atque ita quoque numerus 12 est multiplex numeri 3; quia iste quater acceptus conficit 12.

Hujusmodi totum, quod a parte, ad quam refertur, exacte mensuratur, vocari quoque potest totum aliquotum: idque ad differentiam alterius totius, quod a parte sua nequaquam mensuratur exacte, quodque proinde totum aliquantum potest appellari; veluti est numerus 9 respectu alterius 1; vel numerus 13 relate ad alium 3.

Quod si contingat, magnitudinem aliquam majorem a duabus, aut pluribus aliis minoribus mensurari; tunc magnitudo illa major vocabitur multiplex communis aliarum. Sic numerus 12 est multiplex communis numerorum 2, 3, 4, 6; quia ab horum unoquoque exacte mensuratur.

Sed si fuerint duæ magnitudines majores, quas æque metiantur duæ aliæ magnitudines minores; tunc illæ dicentur multiplices similes, aut æquemultiplices istarum; velut sunt numeri 8 & 12 respectu numerorum 2, & 3: nam sicuti 2 quater metitur 8, sic 3 quater etiam metitur 12.

III.

III.

Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua quædam secundum quantitatem habitudo. Nempe, si comparentur inter se magnitudines duæ ejusdem generis, & in earum comparatione non ad aliud attendatur, quam ad ipsarum quantitates; ejuscemodi comparatio rationis vocabulo appellabitur.

Ex quo colliges, comparationem duarum magnitudinum vocandam esse rationem, quotiescumque habentur hæc duo. Primum, ut magnitudines, quæ comparantur inter se, sint ejusdem generis: quæ quidem quales sint, sequens ostendet definitio. Et deinde, ut in iis comparandis non ad aliud, quam ad proprias ipsarum quantitates attendatur.

Cœterum ex magnitudinibus, inter quas ratio subsistit, ea, quæ confertur, vocatur antecedens; illa vero, cum qua confertur, consequens rationis nuncupatur. Ita si ratio sit inter duas magnitudines, quas voco A, & B, conferaturque A cum B; dicetur A antecedens rationis, & B consequens appellabitur.

IV.

Magnitudines dicuntur esse ejusdem generis, quum multiplicatæ (hoc est aliquoties acceptæ,) *possunt se mutuo superare*. Unde non inter alias magnitudines ratio subsistere potest, quam inter eas, quæ ejusmodi sunt, ut si minor ipsarum aliquoties capiatur, valeat tandem majorem superare.

Linea igitur est ejusdem generis cum alia linea, & consequenter comparatæ inter se ratio-

ratione quantitatis, possunt rationem habere: quandoquidem linea minor, si aliquoties sumatur, hoc est bis, ter, quater, &c. poterit tandem lineam majorem superare. Et eadem ratione, tam duæ superficies, quam corpora duo dici debent magnitudines ejusdem generis.

Linea autem cum superficie nequaquam est ejusdem generis, nec proinde comparatæ inter se mutuo ratione quantitatis, possunt inter se rationem habere: nam tantum abest, ut linea aliquoties sumpta superficiem excedat, ut neque etiam in superficiem verti possit. Atque ita quoque nec linea, nec superficies est ejusdem generis cum corpore.

V.

Proportio autem est duarum rationum æqualitas, seu identitas. Nempe, si habeantur duæ rationes, quæ sint eædem, seu æquales inter se; æqualitas, seu identitas ista earum rationum proportionis vocabulo appellabitur. Quæ vero rationes dicendæ sint eædem, seu æquales inter se, sequens definitio nobis explicabit.

Ex eo autem, quod proportio sit æqualitas, seu identitas duarum rationum, fit, ut in omni proportione sint duo antecedentes, & duo consequentes. Ita si ratio, quam habet A ad B, æqualis sit rationi, quam habet C ad D; adeo, ut A sit ad B, veluti est C ad D: erunt A, & C duo antecedentes, B autem, & D duo consequentes.

VI.

VI.

Duæ rationes dicuntur eædem, seu æquales inter se, quum antecedentium æquemultiplicia quævis vel una deficiunt, vel una adæquant, vel una superant æquemultiplicia consequentium utcumque sumpta. Sic ratio, quam habet A ad B, dicetur æqualis rationi, quam habet C ad D, si antecedentium A, & C æquemultiplicia quælibet M, & N vel una deficiant, vel una adæquent, vel una superent consequentium B, & D æquemultiplicia utcumque sumpta P, & Q.

Sedulo autem notare hoc loco oportet, quod ut duæ rationes juxta hanc definitionem dicantur eædem, seu æquales inter se; haud quidem satis sit, aliqua antecedentium æquemultiplicia, vel una deficere, vel una adæquare, vel una excedere aliqua consequentium æquemultiplicia: sed necesse sit, ut id de omnibus omnino æquemultiplicibus, quæ sumi possunt, tam respectu antecedentium, quam respectu consequentium, verum sit. Nam si utique vel in uno casu id locum non habuerit, procul est, ut duæ rationes dici possint eædem, seu æquales inter se.

VII.

Una ratio dicitur altera major, quum talia reperire licet æquemultiplicia antecedentium, & consequentium, ut multiplex antecedentis prioris rationis excedat multiplex sui consequentis, sed multiplex antecedentis alterius rationis non excedat multiplex sui consequentis. Ita ratio, quam habet A ad B, dicetur

cetur major ratione, quam habet C ad D, si utique reperiri possint antecedentium A, & C talia æquemultiplicia M, & N, nec non & consequentium B, & D talia æquemultiplicia, P, & Q, ut M superet P, sed N non superet Q.

Atque hic quoque notare sedulo oportet, quod, ut una ratio juxta hanc definitionem dicatur altera major, haud quidem necesse sit, omnia, tum antecedentium, cum consequentium æquemultiplicia esse talis naturæ, ut multiplex antecedentis prioris rationis excedat multiplex sui consequentis, multiplex vero antecedentis alterius rationis non excedat multiplex sui consequentis; sed satis sit, si id vel in uno tantum casu reperiatur.

VIII.

Magnitudines, quæ eandem rationem inter se habent, dicuntur proportionales. Ita si ratio, quam habet A ad B, æqualis sit rationi, quam habet C ad D; quatuor magnitudines A, B, C, D dicentur proportionales. Quod si autem ratio, quæ est inter A, & B, non sit æqualis rationi, quæ est inter C, & D; tunc quatuor magnitudines A, B, C, D nequaquam dicendæ sunt proportionales.

IX.

Proportio autem in tribus paucissimis terminis consistit. Etsi enim proportio, velut duarum rationum æqualitas, natura sua quatuor terminos exigat, hoc est duos antecedentes, & duos consequentes; attamen, ut ista docet definitio, potest in tribus quoque consistere: scilicet, quum terminus medius fungitur munere

nere consequentis in prima ratione, & munere antecedentis in secunda.

Ita, si ratio, quam habet A ad B, æqualis sit rationi, quam habet B ad C; harum rationum æqualitas consistet in tribus terminis, qui sunt A, B, C. Sed perspicuum est, id exinde contingere, quia terminus medius B tenet locum consequentis in prima ratione, & vicissim locum antecedentis in secunda.

Hinc autem colliges, proportionem duplicem esse posse, discretam unam, continuam alteram. Erit enim proportio discreta: quæ quatuor habet terminos distinctos; veluti, si ratio, quam habet A ad B, æqualis fuerit rationi, quæ est inter C, & D. Erit vero proportio continua, quæ in tribus tantum terminis subsistit; ut, si ratio, quam habet A ad B, æqualis sit ei, quæ est inter B, & C.

X.

Homologæ, seu similes ratione magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, & consequentes consequentibus. Ita, si quatuor magnitudines A, B, C, D proportionales fuerint, adeo ut A ad B habeat eandem rationem, quam C ad D; dicentur magnitudines homologæ, seu similes ratione, tum antecedentes A, & C, cum consequentes B, & D.

XI.

Permutata ratio est sumptio antecedentis cum antecedente, & consequentis cum consequente. Ita, si A ad B habeat eandem rationem, quam C ad D; erit *permutando*, ut A ad C, ita B ad D.

XII.

Inversa ratio est sumptio antecedentis ut consequentis, consequentis vero ut antecedentis. Ita, si A sit ad B, ut est C ad D; erit *invertendo*, ut B ad A, ita D ad C.

XIII.

Compositio rationis est sumptio antecedentis cum consequente ad ipsam consequentem. Ita, si A ad B habeat eandem rationem, quam C ad D; erit *componendo*, ut A & B simul ad B, ita C & D simul ad D.

XIV.

Divisio rationis est sumptio excessus, quo antecedens superat consequentem ad ipsam consequentem. Ita, si A sit ad B, ut est C ad D; erit *dividendo*, ut excessus, quo A superat B, ad B, ita excessus, quo C superat D, ad D.

XV.

Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens superat consequentem. Ita, si A ad B habeat eandem rationem, quam C ad D; erit *convertendo*, ut A ad excessum, quo C superat D.

XVI.

Plures magnitudines dicuntur esse in ordinata ratione cum aliis totidem magnitudinibus, quum illarum rationes directe correspondent rationibus istarum. Ita magnitudines A, B, C, D dicentur esse in ordinata ratione cum magnitudinibus E, F, G, H, si fuerit, ut A ad B, ita E, ad F; ut B ad C, ita F ad G; & ut C ad D, ita G ad H.

XVII.

Vicissim vero plures magnitudines dicuntur

esse

esse in perturbata ratione cum aliis totidem magnitudinibus, quum rationes illarum inverse correspondent rationibus istarum. Qua ratione eædem magnitudines A, B, C, D dicentur esse in perturbata ratione cum iisdem magnitudinibus E, F, G, H, si fuerit, ut A ad B, ita G ad H; ut B ad C; ita F ad G; & ut C ad D, ita E ad F,

XVIII.

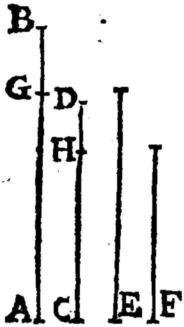
Quum plures magnitudines sunt in eadem, sive ordinata, sive perturbata ratione cum aliis totidem magnitudinibus, sumptio extremarum per subductionem mediarum dicetur æqualitas rationis. Ita, si magnitudines A, B, C, D sint in eadem, sive ordinata, sive perturbata ratione cum magnitudinibus E, F, G, H; erit *ex æquali*, sive *ordinando*, sive *perturbando*, ut A ad D, ita E ad H.

PROP. I, THEOR. I.

Si fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æquemultiplices; quotuplex est una unius, totuplices erunt & omnes omnium.

SInt quotcumque magnitudines AB, CD æquemultiplices totidem magnitudinum E, F. Dico, magnitudines AB, CD simul tam esse multiplices magnitudinum E, F simul, quam est multiplex AB ipsius E, vel CD ipsius F,

Quum enim AB, CD sint ex hypothesi

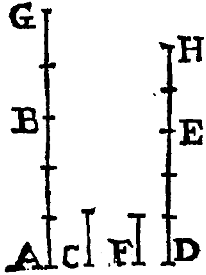


æquemultiplices ipſarum E,F, quoties E metitur AB, toties F metietur CD. Et propterea quot partes ſunt in AB æquales ipſi E, totidem erunt in CD æquales ipſi F. Dividatur itaque AB in partes AG, GB, æquales ipſi E; pariterque CD dividatur in partes CH, HD æquales ipſi F. Et quoniam multitudo partium, quæ ſunt in AB æquales ipſi E, eſt æqualis multitudini partium, quæ ſunt in CD æquales ipſi F; erunt etiam in ipſis AB, CD ſimul tot partes æquales ipſis E, & F ſimul, quot ſunt in AB æquales ipſi E, vel in CD æquales ipſi F. Quare E, & F ſimul toties metientur AB, & CD ſimul, quoties E metitur AB, vel F metitur CD. Et propterea magnitudines AB, CD ſimul tam multiplices erunt magnitudinum E, F ſimul, quam eſt multiplex AB ipſius E, vel CD ipſius F. Quod erat demonſtrandum.

PROP. II. THEOR. II.

Si prima ſecundæ fuerit tam multiplex, quam tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundæ tam multiplex, quam ſexta quartæ; erit compoſita ex prima & quinta tam multiplex ſecundæ, quam compoſita ex tertia & ſexta multiplex quartæ.

Sit prima AB tam multiplex ſecundæ C, quam eſt tertia DE multiplex quartæ F. Rur-



Rursus quinta BG sit etiam tam multiplex secundæ C, quam est sexta EH multiplex quartæ F. Dico, composita ex prima, & quinta AG tam multiplicem esse secundæ C, quam est composita ex tertia, & sexta DH multiplex quartæ F.

Quoniam enim ex hypothesi AB, DE sunt æquemultiplices ipsarum C, F; erunt in AB tot partes æquales ipsi C, quot sunt in DE æquales ipsi F. Et similiter, quoniam ex hypothesi earumdem C, F sunt etiam æquemultiplices BG, EH; erunt in BG tot partes æquales ipsi C, quot sunt in EH æquales ipsi F. Unde etiam in tota AG erunt tot partes æquales ipsi C, quot sunt in DH æquales ipsi F. Et propterea AG tam multiplex erit ipsius C, quam est DH multiplex ipsius F. Quod erat demonstrandum.

PROP. III. THEOR. III.

Si prima secundæ tam multiplex fuerit, quam tertia quartæ; æquemultiplices primæ & tertiæ erunt etiam æquemultiplices secundæ & quartæ.

PRima A secundæ B tam multiplex sit, quam tertia C quartæ D. Sint autem EF, GH æquemultiplices primæ A, & tertiæ C. Dico, easdem EF, GH esse quoque æque-

multiplices secundæ B, & quartæ D.

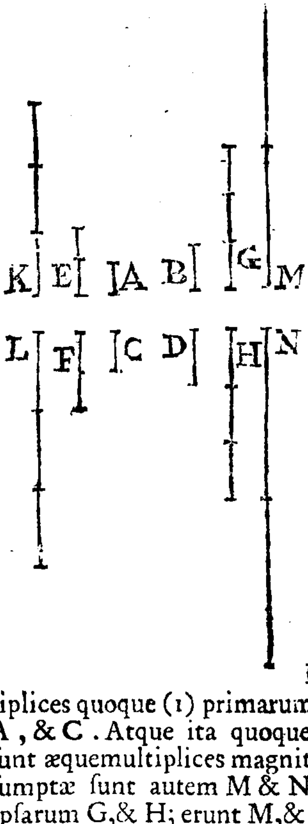
Quoniam enim EF, GH sunt æquemultiplices ipsarum A, & C; erunt in EF tot partes æquales ipsi A, quot sunt in GH æquales ipsi C. Dividatur itaque tam EF in partes EK, KF æquales ipsi A, quam GH in partes GL, LH æquales ipsi C. Et quoniam KF, LH æquales sunt ipsis A, & C; atque sunt A, & C æquemultiplices ipsarum B, & D; erunt KF, LH earumdem B, & D etiam æquemultiplices. Pariterque, quia EK, GL æquales sunt ipsi A, & C, quæ sunt æquemultiplices ipsarum B, & D; erunt EK, GL earumdem B, & D similiter æquemultiplices. Et propterea (1) tota EF tam multiplex erit ipsius B, quam est tota GH multiplex ipsius D. Quod demonstrare oportebat.

PROP. IV. THEOR. IV.

Si prima ad secundam eamdem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; æquemultiplices primæ & tertiæ, ad æquæmultiplices secundæ & quartæ, eamdem quoque rationem habebunt.

PRima A ad secundam B habeat eamdem rationem, quam tertia C ad quartam D. Sint autem E, & F æquemultiplices primæ A, &

(1) *Prop.2.hujus.*



A, & tertiæ C; atque G, & H æquemultiplices ſecundæ B, & quartæ D. Dico, E ad G habere quoque eamdem rationem, quam F ad H.

Sumantur etenim ipſarum E, & F æquemultiplices K, & L; nec non ipſarum G,& H æquemultiplices M, & N. Et quoniam E,& F ſunt æquemultiplices magnitudinum A, & C; ſumptæ ſunt autem K,& L æquemultiplices ipſarum E,& F: erunt K, & L æquemultiplices quoque (1) primarum magnitudinum A, & C. Atque ita quoque, quia G, & H ſunt æquemultiplices magnitudinum B, & D; ſumptæ ſunt autem M & N æquemultiplices ipſarum G,& H; erunt M,& N æquemultiplices etiam primarum magnitudinum B, & D.

Et quoniam ex hypotheſi prima A eſt ad

M 3 ſe-

(1) *Prop.3.hujus.*

secundam B, ut est tertia C ad quartam D; suntque K, & L æquemultiplices primæ, & tertiæ; itemque M, & N æquemultiplices secundæ, & quartæ: fiet hinc (1) ut si K superet M, etiam L superet N; vel si K deficiat ab M, etiam L deficiat ab N; vel denique si K sit æqualis M, etiam L sit æqualis N. Unde, quum habeantur quatuor magnitudines E, G, F, H, & ostensum sit K, & L, quæ sunt æquemultiplices primæ, & tertiæ, vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare M & N, quæ sunt æquemultiplices secundæ, & quartæ: habebit (2) E ad G eamdem rationem, quam F ad H. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

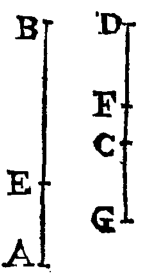
Ex hac propositione manifestum est, quod si quatuor magnitudines A, B, C, D proportionales sint, eædem invertendo etiam sint proportionales. Nam, quemadmodum K, & L, quæ sunt æquemultiplices primæ A, & tertiæ C, vel una superant, vel una deficiunt, vel una adæquant M, & N, quæ sunt æquemultiplices secundæ B, & quartæ D: sic per contrarium M, & N vel una majores, vel una minores, vel una æquales erunt ipsis K, & L: proindeque erit, ut B ad A ita D ad C.

PROP.

(1) *Def.6.hujus.* (2) *Def.6.hujus.*

PROP. V. THEOR. V.

Si tota totius tam multiplex ſit, quam ablata ablatæ; erit reliqua reliquæ tam multiplex, quam tota totius.



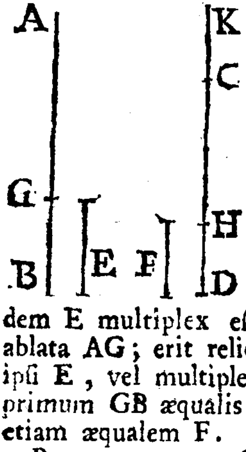
TOta AB tam multiplex ſit totius CD, quam ablata AE eſt multiplex ablatæ CF. Dico, reliquam EB reliquæ FD eſſe quoque tam multiplicem, quam tota AB, eſt multiplex totius CD.

Ponatur enim EB tam multiplex ipſius CG, quam eſt AB ipſius CD, vel AE ipſius CF. Et quoniam AE, EB æquemultiplices ſunt ipſarum CF, CG; erit (1) tota AB totius FG tam multiplex, quam eſt AE ipſius CF. Ex hypotheſi autem AE eſt tam multiplex ipſius CF, quam tota AB totius CD. Quare eadem AB tam erit multiplex ipſius FG; quam eſt ipſius CD: atque idcirco æquales erunt CD, FG. Unde ablata communi CF, æquales quoque erunt CG, FD. Poſita eſt autem EB tam multiplex ipſius CG, quam eſt AB ipſius CD. Erit igitur eadem EB tam multiplex quoque ipſius FD, quam eſt AB ipſius CD. Quod demonſtrare oportebat.

(1) *Prop.1.hujus.*

PROP. VI. THEOR. VI.

Si duæ magnitudines æquemultiplices fuerint duarum magnitudinum, & ex iis ablatæ quædam sint earumdem æquemultiplices: erunt & reliquæ, vel iisdem æquales, vel earumdem æquemultiplices.



Sint AB, CD æquemultiplices ipsarum E, F, quarum quoque æquemultiplices sint detractæ quædam ex iis AG, CH. Dico, reliquas GB, HD, vel esse æquales ipsis E, F; vel esse earumdem æquemultiplices.

Quoniam enim ejusdem E multiplex est tam tota AB quam ablata AG; erit reliqua GB, vel æqualis ipsi E, vel multiplex ejusdem. Sit itaque primum GB æqualis E. Dico, & HD esse etiam æqualem F.

Ponatur namque CK æqualis F, & quoniam ex hypothesi AG, CH sunt æquemultiplices ipsarum E, F, quibus quoque æquales sunt GB, CK; erunt AB, KH earumdem E, F etiam æquemultiplices. Erit igitur AB tam multiplex ipsius E, quam est KH ipsius F. Ex hypothesi autem AB tam est multiplex ipsius E, quam est CD ipsius F. Quare ejusdem F

æque-

æquemultiplices erunt CD, KH; ideoque æquales erunt inter se. Unde ablata communi CH, remanebunt HD, CK etiam inter se æquales. Posita est autem CK æqualis F. Quare & HD eidem F pariter æqualis erit.

Sit secundo GB multiplex ipsius E. Dico, & HD esse multiplicem ipsius F.

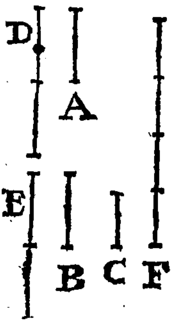
Ponatur namque CK tam multiplex ipsius F, quam est GB ipsius E. Et quoniam ipsarum E, F æquemultiplices sunt tam AG, CH, quam GB, CK; erunt (1) AB, KH earumdem E, F etiam æquemultiplices. Unde, quum adhuc oriantur æquales CD, KH, ablata rursus communi CH, remanebit quoque HD æqualis CK, Posita est autem CK tam multiplex ipsius F, quam est GB ipsius E. Quare & HD ipsius F erit quoque tam multiplex, quam est GB ipsius E.

Si igitur duæ magnitudines æquemultiplices fuerint duarum magnitudinum, & ex iis ablatæ quædam sint earumdem æquemultiplices; erunt & reliquæ vel iisdem æquales, vel earumdem æquemultiplices. Quod erat demonstrandum.

(1) *Prop. 2. hujus.*

PROP. VII. THEOR. VII.

Æquales ad eamdem, eamdem habent rationem: & eadem ad æquales.



SInt A, & B duæ æquales magnitudines, ſitque tertia quævis C. Dico primo, quod A ad C habeat eamdem rationem, quam B ad C.

Sumantur enim ipſarum A, & B æquemultiplices D, & E; ipſius vero C multiplex utcumque capiatur, & ſit F. Quia igitur A, & B ponuntur æquales inter ſe; ipſarum æquemultiplices D, & E inter ſe etiam æquales erunt. Et propterea vel una excedent, vel una deficient, vel una adæquabunt F. Quum ergo habeantur quatuor magnitudines. A prima, C ſecunda, B tertia, C quarta, & æquemultiplices primæ & tertiæ, vel una excedant, vel una deficiant, vel una adæquent æquemultiplices ſecundæ, & quartæ; habebit (1) A ad C eamdem rationem, quam B ad C.

Dico ſecundo quod C ad A habeat quoque eamdem rationeam, quam C ad B.

Nam ſumptis rurſus, tum ipſarum A, & B æque-

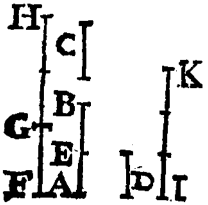
(1) *Def.6.hujus.*

æquemultiplicibus D, & E, cum ipsius C multiplice quoquis F; quia propter æquales A, & B, æquales sunt etiam D, & E, perspicuum est, F vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare ipsas D, & E. Unde, quum etiam habeantur quatuor magnitudines, C prima, A secunda, C tertia, B quarta, & æquemultiplices primæ, & tertiæ, vel una excedant, vel una deficiant, vel una adæquent æquemultiplices secundæ, & quartæ; habebit (1) C ad A eamdem rationem, quam C ad B.

Æquales igitur ad eamdem eamdem habent rationem: & eadem ad æquales. Quod erat demonstrandum.

PROP. VIII. THEOR. VIII.

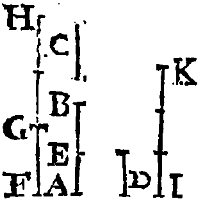
Inæqualium magnitudinum major ad eamdem majorem habet rationem: & eadem ad minorem.



Sint AB, & C duæ magnitudines inæquales AB major, & C minor; sitque D tertia magnitudo. Dico primo quod AB ad D majorem habeat rationem, quam C ad D.

Quoniam enim AB major est, quam C, abscindatur ex AB portio aliqua AE, ita ut reliqua EB sit æqualis ipsi C. Tum ipsarum

(1) *Def.6.hujus.*



AE, EB æquemultiplices capiantur FG, GH hac lege, ut FG multiplex ipsius AE major sit, quam D. Ipsius vero D multiplex sumatur IK, excedens GH magnitudine non majori, quam D.

Et quoniam FG,GH æquemultiplices sunt ipsarum AE, EB; erit (1) FH tam multiplex ipsius AB, quam est GH multiplex ipsius EB, seu C. Et rursus quoniam IK excedit GH magnitudine non majore, quam D, atque est FG major, quam D; erit FH major, quam IK. Quum ergo habeantur quatuor magnitudines, AB prima, D secunda, C tertia, D quarta; & sumptæ sint tales æquemultiplices primæ, & tertiæ, & tales secundæ, & quartæ, ut multiplex primæ superet multiplicem secundæ, at multiplex tertiæ non superet multiplicem quartæ; habebit (2) AB ad D majorem rationem, quam C ad D.

Dico secundo, quod D ad C majorem habeat rationem, quam ad AB.

Fiat etenim eadem constructio, & rursus ostendetur, quod IK multiplex ipsius D excedat quidem GH multiplicem ipsius C, sed non excedat FH multiplicem ipsius AB. Unde, quum habeantur quatuor magnitudines, D prima, C secunda, D tertia, AB quarta; & sumptæ sint tales æquemultiplices primæ, & ter-

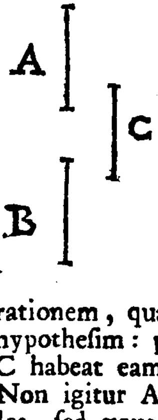
(1) *Prop.1.hujus.* (2) *Def.7.hujus.*

& tertiæ, & tales ſecundæ, & quartæ, ut multiplex primæ ſuperet multiplicem ſecundæ, at multiplex tertiæ non ſuperet multiplicem quartæ; habebit (1) D ad C majorem rationem quam D ad AB.

Inæqualium igitur magnitudinum major ad eamdem majorem habet rationem; & eadem ad minorem. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. IX. THEOR. IX.

Quæ ad eamdem, eamdem habent rationem, inter ſe ſunt æquales: & ad quas eadem eamdem rationem habet, etiam inter ſe æquales ſunt.



HAbeat primo A ad C eamdem rationem, quam B ad C. Dico, A, & B æquales eſſe inter ſe.

Si enim inter ſe non ſint æquales, altera ipſarum major erit, ſit igitur A major. Et quoniam inæqualium magnitudinum major ad eamdem majorem (2) habet rationem; habebit A ad C majorem rationem, quam B ad C. Sed hoc eſt contra hypotheſim: poſitum eſt enim, quod A ad C habeat eamdem rationem, quam B ad C. Non igitur A, & B inter ſe ſunt inæquales, ſed æquales.

Habeat ſecundo C ad B eamdem rationem

nem

(1) *Def.7.hujus.* (2) *Prop.8.hujus.*

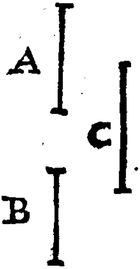
nem, quam C ad B. Dico, A, & B esse etiam æquales inter se.

Si enim inter se non sint æquales, altera ipsarum minor erit. Sit igitur A minor. Et quoniam eadem majorem habet rationem (1) ad minorem, quam ad majorem; habebit C ad A majorem rationem, quam C ad B. Sed hoc est contra hypothesim: positum est enim, quod C ad A habeat eamdem rationem, quam C ad B. Non igitur A, & B inter se sunt inæquales, sed æquales.

Quæ igitur ad eamdem eamdem habent rationem inter se sunt æquales, & ad quas eadem eamdem rationem habet, etiam inter se æquales sunt, quod erat ostendendum.

PROP. X. THEOR. X.

Ad eamdem magnitudinem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major est: ad quam vero eadem majorem habet rationem, illa est minor.



HAbeat primo A ad C majorem rationem, quam B ad C. Dico, A majorem esse, quam B.

Si enim non est major, erit vel ei æqualis, vel eadem minor. Sit igitur primo A æqualis B. Et quoniam æqualis (2) ad eamdem eamdem habet rationem; habebit A ad C eamdem rationem, quam B ad C; quod est contra hypothesim. Sit deinde A mi-

(1) *Prop.8.hujus.* (2) *Prop.7.hujus.*

A minor quam B. Et quoniam (1) minor ad eandem minorem habet rationem; habebit A ad C minorem rationem, quam B ad C: quod etiam eſt contra hypoteſim. Quare reliquum eſt, ut A major ſit, quam B.

Habeat ſecundo C ad B majorem rationem, quam C ad A. Dico, B minorem eſſe, quam A.

Si enim non eſt minor, erit vel ei æqualis, vel eadem major. Sit igitur primo B æqualis A. Et quoniam eadem ad æquales (2) eamdem habet rationem; habebit C ad B eamdem rationem, quam C ad A: quod eſt contra hypotheſim. Sit deinde B major, quam A. Et quoniam eadem ad majorem (3) minorem habet rationem; habebit C ad B minorem rationem, quam C ad A: quod etiam eſt contra hypotheſim. Quare reliquum eſt, ut B minor ſit, quam A.

Ad eamdem itaque magnitudinem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major eſt: ad quam vero eadem majorem habet rationem, illa eſt minor. Quod erat demonſtrandum.

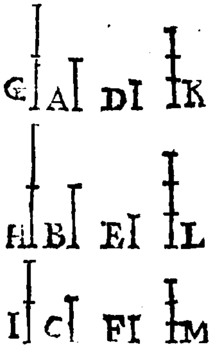
PROP.

---

(1) *Prop.8.hujus.* (2) *Prop.7.hujus.*
(3) *Prop.8. hujus.*

PROP. XI. THEOR. XI.

Rationes, quæ eidem sunt æquales, inter se sunt etiam æquales.



RAtioni, quæ eſt inter B, & E æqualis ſit tum ea, quæ eſt inter A, & D, cum illa, quæ eſt inter C, & F: adeo nempe, ut A ſit ad D, veluti eſt B ad E; & B ſit ad E, ut eſt C ad F. Dico, rationem, quæ eſt inter A, & D eſſe æqualem rationi, quæ eſt inter C & F; hoc eſt A eſſe ad D, ut eſt C ad F.

Sumantur etenim æquemultiplices, tum antecedentium A, B, C, quæ ſint G,H,I; cum conſequentium D, E, F, quæ ſint K, L, M. Et quoniam A eſt ad D, ut B ad E; fiet hinc (1), ut G, & H æquemultiplices ipſarum A, & B, vel una ſuperent, vel una deficiant, vel una adæquent K, & L æquemultiplices ipſarum D, & E. Atque ita quoque, quia B, eſt ad E, ut C ad F; fiet hinc, ut H, & I, æquemultiplices ipſarum B, & C, vel una majores, vel una minores, vel una æquales ſint L, & M. æquemultiplicibus ipſarum E, & F. Un-

(1) *Def. 6. hujus.*

Unde etiam, ſublatis mediis H, & L, erunt G, & I vel una majores, vel una minores, vel una æquales K, & M. Quum ergo habeantur quatuor magnitudines, A prima, D ſecunda, C tertia, F quarta, & oſtenſum ſit, æquemultiplices primæ, & tertiæ, vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare æquemultiplices ſecundæ, & quartæ; erit (1) ut A ad D, ita C ad F. Quod erat demonſtrandum.

PROP. XII. THEOR. XII.

Si fuerint quotcumque magnitudines proportionales; erit ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

Sint quotcumque magnitudines proportionales A, D, B, E, C, F: ita nempe, ut A ſit ad D, veluti eſt B ad E; & B ſit ad E, ut eſt C ad F. Dico, omnes antecedentes A, B, C ad omnes conſequentes D, E, F habere eamdem rationem, quam habet una antecedentium ad unam conſequentium hoc eſt vel A ad D, vel B ad E, vel C ad F.

Capiantur etenim æquemultiplices tam antecedentium A,B,C, quæ ſint G,H, I, quam conſequentium D, E, F, quæ ſint K,L, M. Et quoniam A eſt ad D, ut B ad E; æquemultiplices ipſarum A, & B, quæ ſunt G, & H, erunt (2) vel una majores, vel una minores, vel

(1) *Def.6. hujus.* (2) *Def.6.hujus.*

vel una æquales æquemultiplicibus ipſarum D, & E, quæ ſunt K, & L. Atque ita quoque, quia B, eſt ad E, ut C ad F; æquemultiplices ipſarum B, & C, quæ ſunt H, & I, erunt vel una majores, vel una minores, vel una æquales æquemultiplicibus ipſarum E & F, quæ ſunt L, & M. Unde etiam omnes G, H, I perinde excedent, deficient, vel adæquabunt omnes K, L, M, ac una G excedit, deficit, vel adæquat unam K.

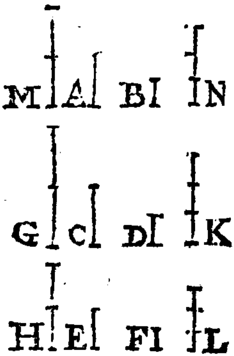
Rurſus, quia G, H, I ſunt æquemultiplices ipſarum A, B, C: erunt omnes G, H, I tam multiplices omnium A, B, C, quam eſt (1) una G multiplex unius A. Atque ita quoque, quia K, L, M ſunt æquemutiplices ipſarum D, E, F; erunt omnes K, L, M tam multiplices omnium D, E, F, quam eſt una K multiplex unius D. Unde quum habeantur quatuor magnitudines, prima quæ componitur ex A, B, C, ſecunda, quæ componitur ex D, E, F, tertia A, & quarta D, & oſtenſum ſit æquemultiplices primæ, & tertiæ vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare æquemultiplices ſecundæ, & quartæ; habebunt omnes A, B, C (2) ad omnes D, E, F eamdem rationem, quam habet una A ad unam D. Quod erat oſtendendum.

PROP.

(1) *Prop.1.hujus.* (2) *Def.6. hujus.*

PROP. XIII. THEOR. XIII.

Si prima habuerit ad ſecundam eamdem rationem, quam tertia ad quartam: tertia autem ad quartam habuerit rationem majorem, quam quinta ad ſextam; & prima ad ſecundam majorem quoque rationem habebit, quam quinta ad ſextam.



PRima A ad ſecundam B habeat eamdem rationem, quam tertia C ad quartam D. Tertia vero C ad quartam D habeat majorem, rationem, quam quinta E ad ſextam F. Dico, & primam A ad ſecundam B habere quoque rationẽ majorem, quam quinta E ad ſextam F.

Quoniam enim C ad D habet majorem rationem, quam E ad F; ſumi poterunt (1) tales æquemultiplices ipſarum C, & E, & tales ipſarum D, & F, ut ſi ea, quæ refertur ad C, excedat illam, quæ refertur ad D, viciſſim ea, quæ refertur ad E, non excedat illam, quæ refertur ad F. Sumantur itaque huiuſmodi æquemultiplices; & ipſarum

(1) *Def. 7. hujus.*

rum quidem C, & E sint G, & H; ipsarum vero D, & F sint K, & L. Deinde fiat, ut M tam multiplex sit ipsius A, quam est multiplex G ipsius C, vel H ipsius E; & ut N tam sit multiplex ipsius B, quam est K ipsius D, vel L ipsius F.

Ex constructione igitur G superat K, sed H non superat L. Jam vero ex hypothesi C est ad D, ut A ad B; atque adeo (1) si G superat K, etiam M superat N. Quare M superante N, H non superat L. Quum ergo habeantur quatuor magnitudines A prima, B secunda, E tertia, F quarta; & sumptæ sint tales æquemultiplices primæ, & tertiæ, & tales secundæ, & quartæ, ut multiplex primæ superet multiplicem secundæ, sed multiplex tertiæ non superet multiplicem quartæ; habebit A ad B majorem (2) rationem, quam E ad F. Quod erat ostendendum.

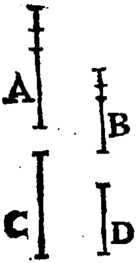
PROP. XIV. THEOR. XIV.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima, & secunda erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores tertia, & quarta.

SInt A, B, C, D quatuor magnitudines proportionales. Dico primo, quod si A sit æqualis C, etiam B sit æqualis D.

Quum

(1) *Def.6.hujus* (2) *Def.7.hujus.*



Quum enim A sit æqualis C, habebit (1) A ad B eamdem rationem quam C ad B. Sed A est ad B ut C ad D. Quare C ad B habebit (2) eamdem rationem, quam C ad D proindeque B (3) æqualis erit D.

Dico secundo, quod si A major sit, quam C, etiam B major sit, quam D.

Quoniam enim A major est, quam C; habebit (4) A ad B majorem rationem, quam C ad B. Sed A est ad B, ut C ad D quare C ad D majorem quoque (5) habebit rationem, quam C ad B: proindeque B (6) major erit, quam D.

Dico denique, quod si A minor sit, quam C, etiam B minor sit, quam D.

Quoniam enim A minor est quam C; habebit C ad B (7) majorem rationem, quam A ad B. Sed A est ad B, ut C ad D. Quare C ad B (8) majorem quoque rationem habebit, quam C ad D: proindeque B (9) minor erit, quam D.

Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima, & secunda erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores tertia, & quarta. Quod erat ostendendum.

PROP.

(1) *Prop.7.hujus.* (2) *Prop.11.hujus*
(3) *Prop.9.hujus.* (4) *Prop.8.hujus*
(5) *Prop.12.hujus.* (6) *Prop.10.hujus.*
(7) *Prop.8.hujus.* (8) *Prop.13. hujus.*
(6) *Prop.10.hujus.*

PROP. XV. THEOR. XV.

Partes cum suis æquemultiplicibus comparatæ eamdem cum iis servant rationem.

PArtium A, B æquemultiplices sinr CF, GK. Dico, A esse ad B, ut est CF ad GK.

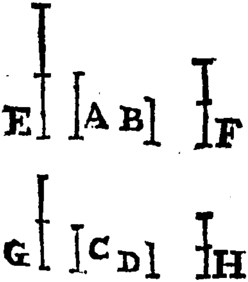
Quoniam enim CF, GK sunt æquemultiplices ipsarum AB; quot partes sunt in CF æquales A, tot erunt in GK æquales B. Dividatur ergo tam CF in partes CD, DE, EF æquales A, quam GK in partes GH, HL, in LK æquales B. Et quoniam æquales (1) ad eamdem, vel etiam ad æquales eamdem habent rationem; erit ut CD ad GH, ita DE ad HL; & ut DE ad HL, ita EF ad LK. Et propterea omnes CD, DE, EF ad omnes GH, HL, LK habebunt (2) eamdem rationem, quam una CD ad unam GH. Est igitur, ut CF ad GK, ita CD ad GH. Sed CD est æqualis A, & GH æqualis B. Quare erit etiam, ut CF ad GH, ita A ad B. Quod erat demonstrandum

PROP.

(1) *Prop.7.hujus.* (2) *Prop.12.hujus.*

PROP. XVI. THEOR. XVI.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; & permutando etiam proportionales erunt.



SIt A ad B, ut C ad D: Dico, permutando A esse ad C, ut est B ad D.

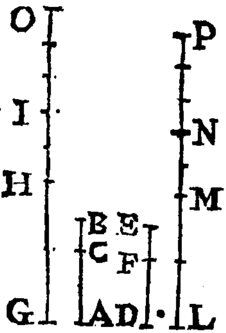
Sumantur enim ipsarum A, & B æquemultiplices E, & F; ipsarum vero C, & D æquemultiplices G, & H; eritque (1) tum E ad F, ut A ad B; cum G ad H, ut C ad D. Sed ex hypothesi A est ad B, ut C ad D. Quare erit (2) ut E ad F, ita G ad H. Et propterea (3) E, & F erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores ipsis G, & H. Quum ergo habeantur quatuor magnitudines, A prima, C secunda, B tertia, D quarta, & ostensum sit æquemultiplices primæ, & tertiæ vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare æquemultiplices secundæ, & quartæ; habebit (4) A ad C eamdem rationem, quam B ad D. Quod erat ostendendum.

PROP.

(1) *Prop.12.hujus.* (2) *Prop.15.hujus.*
(3) *Prop.11.hujus.* (4) *Def.6.hujus.*

PROP. XVII. THEOR. XVII.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & dividendo etiam proportionales erunt.



HAbeat AB ad BC eamdem rationem, quam DE ad EF. Dico, dividendo AC esse ad CB, ut est DF ad FE.

Ipsarum AC, CB, DF, FE capiantur eodem ordine æquemultiplices: & sint GH, HI, LM, MN. Ipsarum autem CB, FE aliæ quævis æquemultiplices sumantur, & sint IO, NP.

Quia igitur ipsarum AC, CB æquemultiplices sunt GH, HI; erit (1) tota GI tam multiplex totius AB, quam est una GH unius AC. Atque ita quoque, quia ipsarum DF, FE æquemultiplices sunt LM, MN; erit tota LN tam multiplex totius DE, quam est una LM unius DF. Est autem ex constructione GH tam multiplex ipsius AC, quam est LM ipsius DF. Quare & GI tam quoque multiplex erit ipsius AB, quam est LN ipsius DE.

Rursus quia earundem CB, FE æquemul-

(1) *Prop. 1. hujus.*

multiplices sunt ex constructione, tam HI, MN, quam IO, NP; erit (1) & HO tam multiplex ipsius CB, quam est MP ipsius FE. Sunt igitur GI, LN æquemultiplices ipsarum AB, DE, & HO, MP æquemultiplices ipsarum CB, FE. Est autem ex hypothesi, ut AB ad BC, ita DE ad EF. Quare (2) GI, LN erunt vel una majores, vel una minores, vel una æquales HO, MP; atque adeo demptis communibus HI, MN erunt etiam reliquæ GH, LM vel una majores, vel una minores, vel una æquales reliquis IO, NP. Sunt autem GH, LM æquemultiplices ipsarum AC, DF; suntque etiam IO, NP æquemultiplices ipsarum CB, FE. Quum ergo habeantur quatuor magnitudines AC prima, CB secunda, DF tertia, FE quarta, & ostensum sit æquemultiplices primæ, & tertiæ, vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare æquemultiplices secundæ, & quartæ; habebit (3) AC ad CB eamdem rationem, quam DF ad FE. Quod erat ostendendum.

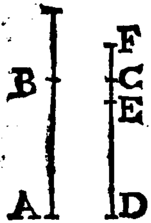
PROP. XVIII. THEOR. XVIII.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; & componendo etiam proportionales erunt.

HAbeat AB ad BC eamdem rationem, quam DE ad EF. Dico, componen-

N do

(1) *Prop.2.hujus.* (2) *Def.6.hujus.*
(3) *Def.6.hujus.*

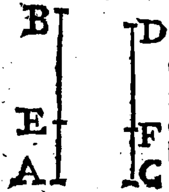


do AC eſſe ad CB, ut eſt DF ad FE.

Si enim AC non ſit ad CB, ut eſt DF ad FE; ſit ut AC ad CB, ita DF ad FG. Et quoniam AC eſt adCB,ut DF ad FG;erit dividendo (1) ut AB ad BC, ita DG ad GF. Ex hypotheſi autem AB eſt ad BC, ut DE ad EF. Quare erit (2) ut DG ad GF, ita DE ad EF: quod quidem eſt abſurdum; quum ſi quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima & tertia debeant (3) eſſe vel una æquales, vel una majores, vel una minores tertia, & quarta. Non igitur AC eſt ad CB, ut DF ad FG. Et propterea erit ut AC ad CB, ita DF ad FE. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XIX. THEOR. XIX.

Si fuerit, ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; erit & reliqua ad reliquam, ut tota ad totam.



TOta AB ad totam CD habeat eamdem rationem, quam ablata AE ad ablatam CF. Dico, & reliquam EB ad reliquam FD habere quoque eamdem rationem, quam habet tota AB ad totam CD.

Quoniam enim ex hypotheſi AB

(1) *Prop.*14.*hujus.* (2) *Prop.*11.*hujus.*
(3) *Prop.*16.*hujus.*

AB est ad CD, ut AE ad CF; erit (1) permutando, ut AB ad AE, ita CD ad CF; atque adeo dividendo (2), ut EB ad AE, ita FD ad CF. Unde, quum rursus permutando sit ut EB ad FD, ita AE ad CF; atque ex hypothesi AE sit ad CF, ut est AB ad CD; erit tandem (3), ut EB ad FD, ita AB ad CD. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

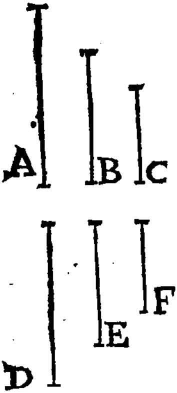
Atque hinc facile colligi potest, quod si quatuor magnitudines proportionales fuerint, eædem convertendo etiam proportionales sint. Sit enim, ut AB ad AE, ita CD ad CF. Dico, convertendo esse, ut AB ad EB, ita CD ad FD. Quum enim AB sit ad AE, ut CD ad CF; erit permutando, ut AB ad CD, ita AE ad CF; atque adeo per hanc propositionem erit, ut EB ad FD, ita AB ad CD; sive etiam, ut AB ad CD, ita EB ad FD. Unde rursus permutando erit, ut AB ad EB, ita CD ad FD.

PROP. XX. THEOR. XX.

Si tres magnitudines fuerint in ordinata ratione cum aliis totidem; primæ ipsarum erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores ultimis earumdem.

SInt tres magnitudines A, B, C in ordinata ratione cum aliis tribus magni-

(1) *Prop.16.hujus.* (2) *Prop.17.hujus.*
(3) *Prop.11.hujus.*



tudinibus D, E, F: ita nempe, ut A sit ad B, veluti est D ad E; & B sit ad C, ut est E ad F. Dico primo, quod si A sit æqualis C, etiam D sit æqualis F.

Quoniam enim A est æqualis C; habebit (1) A ad B eamdem rationem, quam C ad B. Sed A est ad B, ut est D ad E; & ex eo, quod B sit ad C, ut E ad F, est invertendo, ut C ad B, ita F ad E. Quare erit (2) ut D ad E, ita F ad E: proindeque (3) D æqualis erit F.

Dico secundo, quod si A major sit, quam C, etiam D sit major, quam F.

Quoniam enim A est major, quam C; habebit (4) A ad B majorem rationem, quam C ad B. Sed A est ad B, ut D ad E; & ex eo, quod B sit ad C, ut E ad F; est invertendo, ut C ad B, ita F ad E. Quare D ad E (5) majorem quoque habebit rationem, quam F ad E: proindeque (6) D major erit, quam F.

Dico denique, quod si A minor sit, quam C, etiam D sit minor, quam F.

Quoniam enim A minor est, quam C; habebit (7) C ad B majorem rationem, quam A ad

(1) *Prop.7.hujus.* (2) *Prop.11.hujus.*
(3) *Prop.9.hujus.* (4) *Prop.8.hujus.*
(5) *Prop.13.hujus.* (6) *Prop.10.hujus.*
(7) *Prop.8.hujus.*

A ad B. Sed A est ad B, ut D ad E; & ex eo, quod B sit ad C, ut E ad F, est invertendo, ut C ad B; ita F ad E. Quare F ad E majorem (1) quoque rationem habebit, quam D ad E. Et propterea (2) D minor erit, quam F.

Si igitur tres magnitudines fuerint in ordinata ratione cum aliis tribus magnitudinibus; primæ ipsarum erunt, vel una æquales, vel una majores, vel una minores ultimis earumdem. Quod erat ostendendum.

PROP. XXI. THEOR. XXI.

Si tres magnitudines fuerint in perturbata ratione cum aliis tribus magnitudinibus; primæ ipsarum quoque erunt, vel una æquales, vel una majores, vel una minores ultimis earundem.

SInt tres magnitudines A, B, C in perturbata ratione cum aliis tribus magnitudinibus D, E, F: ita nempe, ut A sit ad B, veluti est E ad F; & B sit ad C, ut est D ad E. Dico primo, quod si A sit æqualis C, etiam D sit æqualis F.

Quoniam enim A est æqualis C; erit (3) ut A ad B, ita C ad B. Sed A est ad B, ut E ad F; & ex eo, quod B sit ad C, ut D ad E, est invertendo, ut C ad B, ita E ad D. Quare erit (4), ut E ad F, ita E ad D: proindeque (5) D æqualis erit F.

(1) *Prop.13.hujus.* (2) *Prop.10.hujus.*
(3) *Prop.7.hujus.* (4) *Prop.11.hujus.*
(5) *Prop.9.hujus.*

Dico secundo, quod si A sit major, quam C, etiam D major sit, quam F.

Quoniam enim A major est, quam C; habebit (1) A ad B majorem rationem, quam C ad B. Sed A est ad B, ut E ad F; & ex eo, quod B sit ad C, ut D ad E, est invertendo, ut C ad B, ita E ad D. Quare E ad F majorem (2) quoque rationem habebit, quam E ad D: proindeque (3) D major erit, quam F.

Dico denique, quod si A sit minor, quam C, etiam D minor sit, quam F.

Quoniam enim A minor est, quam C; habebit (4) C ad B majorem rationem, quam A ad B. Sed A est ad B, ut E ad F; & ex eo, quod B sit ad C, ut D ad E, est invertendo, ut C ad B, ita E ad D. Quare E ad D habebit quoque (5) majorem rationem, quam E ad F. Et propterea (6) D minor erit, quam F.

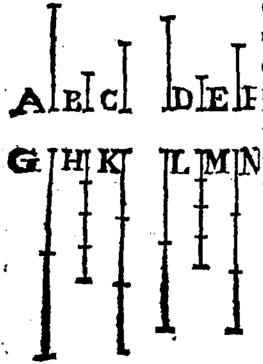
Si igitur tres magnitudines fuerint in perturbata ratione cum aliis tribus magnitudinibus; primæ ipsarum erunt, vel una æquales, vel una majores, vel una minores ultimis earundem. Quod erat demonstrandum.

PROP.

(1) *Prop.8.hujus.* (2) *Prop.13.hujus.*
(3) *Prop.10.hujus.* (4) *Prop.8.hujus.*
(5) *Prop.13.hujus.* (6) *Prop.10.hujus.*

PROP. XXII. THEOR. XXII.

Si tres magnitudines fuerint in ordinata ratione cum aliis tribus magnitudinibus; primæ ipsarum ad ultimas ex æquali in eadem ratione erunt.



SInt tres magnitudines A, B, C in ordinata ratione cum aliis tribus magnitudinibus D, E, F: ita nempe, ut A sit ad B, veluti est D ad E; & B sit ad C, ut E ad F. Dico, ex æquali A esse ad C, ut est D ad F.

Capiantur enim ipsarum quidem A, & D æquemultiplices G, & L; ipsarum vero B, & E æquemultiplices H, & M; ac denique ipsarum C, & F æquemultiplices K, & N. Quia ergo A est ad B, ut D ad E; erit etiam (1) ut G ad H, ita L ad M. Pariterque, quia B est ad C, ut E ad F; erit quoque ut H ad K, ita M ad N. Unde tres magnitudines G, H, K erunt etiam in ordinata ratione cum aliis tribus magnitudinibus L, M, N. Et propterea G, & L erunt (2) vel una æquales, vel una majores, vel una minores K, & N. Quum itaque habeantur qua-

(1) *Prop.4.hujus.* (2) *Prop.20.hujus.*

tuor magnitudines, A prima, C secunda, D tertia, F quarta, & ostensum sit, æquemultiplices primæ, & tertiæ vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare æquemultiplices secundæ, & quartæ; habebit (1) A ad C eamdem rationem, quam D ad F. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

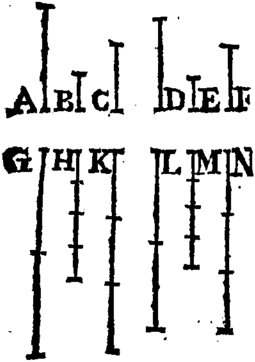
Quod si magnitudines, quæ sunt in ordinata ratione cum aliis totidem, plures fuerint, quam tres; adhuc primæ ipsarum ad ultimas ex æquali in eadem ratione erunt. Ponatur enim, quod non modo A sit ad B, ut D ad E; & B ad C, ut E ad F; verum etiam, quod C sit ad aliam quæ vocetur N, ut F ad aliam quæ vocetur O. Dico, ex æquali A esse ad N, ut est D ad O. Nam in tribus magnitudinibus ostensum jam est, A esse ad C, ut est D ad F. Quum ergo C sit ad N, ut est F ad O; erunt tres magnitudines A, C, N in ordinata ratione cum aliis tribus magnitudinibus D, F, O. Et propterea per hanc propositionem A erit ad N, ut est D ad O.

PROP. XXIII. THEOR. XXIII.

Si tres magnitudines fuerint in perturbata ratione cum aliis totidem magnitudinibus; primæ ipsarum ad ultimas ex æquali in eadem ratione erunt.

SInt tres magnitudines A, B, C in perturbata ratione eum aliis tribus magnitudinibus

(1) *Def.6.hujus.*



nibus D, E, F : ita nempe, ut A ſit ad B, veluti eſt E ad F; & B ſit ad C, ut D ad E. Dico, ex æquali A eſſe ad C, ut eſt D ad F.

Sumantur etenim, ipſarum quidem A,B,D æquemultiplices G, H, L, ipſarum vero C, E,F æquemultiplices K, M, N. Et quoniam G, & H ſunt æquemultiplices ipſarum A,& B; erit, ut G ad H (1), ita A ad B. Pariterque, quia M, & N ſunt æquemultiplices ipſarum E, & F; erit, ut M ad N, ita E ad F. Eſt autem ex hypotheſi, ut A ad B, ita E ad F. Quare erit (2) quoque, ut G ad H, ita M ad N.

Rurſus, quia ex hypotheſi B eſt ad C, ut D ad E; & ipſarum quidem B, & D æquemultiplices ſunt H,& L, ipſarum vero C,& E æquemultiplices ſunt K, & M; erit quoque (3) ut G ad K, ita L ad M. Oſtenſum eſt autem, G eſſe ad H, ut eſt M ad N. Tres ergo magnitudines G, H, K ſunt etiam in perturbata ratione cum aliis tribus magnitudinibus L, M, N; & idcirco G, & K erunt (4) vel una æquales, vel una majores, vel una minores L, & N.

Quum ergo habeantur quatuor magnitu-

N 5 dines,

---

(1) *Prop.15.hujus.* (2) *Prop.11.hujus.*
(3) *Prop.4.hujus.* (4) *Prop.21.hujus.*

dines, A prima, C secunda, D tertia, F quarta, atque primæ, & tertiæ æquemultiplices G, & K vel una excedant, vel una deficiant, vel una adæquent æquemultiplices secundæ, & quartæ L, & N; habebit (1) A ad C eandem rationem, quam D ad F. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

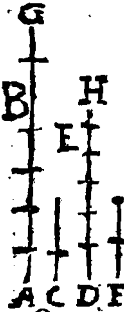
Quod si magnitudines, quæ sunt in perturbata ratione cum aliis totidem, plures fuerint, quam tres; adhuc primæ ipsarum ad ultimas ex æquali in eadem ratione erunt. Sint enim quatuor magnitudines A, B, C, N in perturbata ratione cum quatuor magnitudinibus D, E, F, O; ita nempe, ut A sit ad B, veluti est F ad O; B ad C, ut E ad F; & C ad N, ut D ad E. Dico, ex æquali esse, ut A ad N, ita D ad O. Nam in tribus magnitudinibus ostensum jam est, A esse ad C, ut est E ad O. Quum ergo C sit ad N, ut est D ad E; erunt tres magnitudines A, C, N in perturbata ratione cum tribus magnitudinibus D, E, O. Et propterea per hanc propositionem A erit ad N, ut est D ad O.

PROP. XXIV. THEOR. XXIV.

Si prima ad secundam habuerit eamdem rationem, quam tertia ad quartam: fuerit autem, ut quinta ad secundam, ita sexta ad quartam;

(1) *Def. 6. hujus.*

tam; erit composita ex prima, & quinta ad secundam, ut composita ex tertia, & sexta ad quartam.



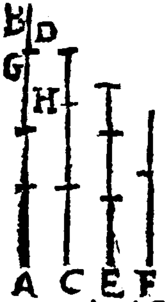
PRima AB ad secundam C habeat eamdem rationem, quam tertia DE ad quartam F. Quinta autem BG ad secundam C habeat quoque eamdem rationem, quam sexta EH ad quartam F. Dico, compositam ex prima, & quinta AG esse ad secundam C, ut est composita ex tertia, & sexta DH ad quartam F.

Quoniam enim BG est ad C, ut EH ad F; erit invertendo, ut C ad BG, ita F ad EH. Unde, quum sit ut AB ad C, ita DE ad F; erunt tres magnitudines AB, C, BG in ordinata ratione cum tribus magnitudinibus DE, F, EH: proindeque ex æquali ordinando (1) erit, ut AB ad BG, ita DE ad EH; atque adeo, componendo (2), ut AG ad BG, ita DH ad EH. Est autem, ut BG ad C, ita EH ad F. Tres itaque magnitudines AG, BG, C erunt etiam in ordinata ratione cum aliis tribus magnitudinibus DH, EH, F. Unde rursus ex æquali ordinando erit, ut AG ad C, ita DH ad F. Quod erat demonstrandum.

(1) *Prop.22.hujus.* (2) *Prop.18.hujus.*

PROP. XXV. THEOR. XXV.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; maxima, & minima simul reliquis duabus majores erunt.



HAbeat AB ad CD eamdem rationem, quam E ad F; sitque AB omnium maxima, & F omnium minima. Dico, duas AB, & F simul sumptas majores esse reliquis duabus CD, & E simul etiam acceptis.

Auferantur ex AB quidem portio AG æqualis E, ex CD vero portio CH æqualis F. Et quoniam ex hypothesi AB est ad CD ut E ad F, atque est AG æqualis E, & CH æqualis F; erit etiam, ut AB ad CD, ita AG ad CH. Unde, quum sit, ut tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam CH; erit quoque (1) ut tota AB ad totam CD, ita reliqua GB ad reliquam HD. Et propterea, quemadmodum AB, velut omnium maxima, major est, quam CD, ita (2) erit GB major, quam HD. Sunt autem ex constructione æquales inter se, tum AG, & E, cum F, & CH. Quare, si istæ iis addantur, fient AB, & F majores, quam CD, & E: ac proinde, si quatuor magnitudines proportionales fuerint, ma-

(1) *Prop. 19. hujus.* (2) *Prop. 14. hujus.*

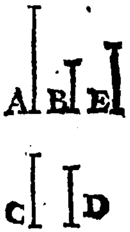
maxima, & minima reliquis duabus majores erunt. Quod erat demonstrandum.

MONITUM.

Quæ sequuntur Propositiones Euclidis non sunt, sed a Campano, & aliis adjectæ, quia apud gravissimos Auctores frequens est usus ipsarum, nec minus, quam præcedentes, quasi Euclidis essent, citari solent.

PROP. XXVI. THEOR. XXVI.

Si prima ad secundam habuerit majorem rationem, quam tertia ad quartam; habebit invertendo secunda ad primam minorem vicissim rationem, quam quarta ad tertiam.



Habeat A ad B majorem rationem, quam C ad D. Dico, invertendo B ad A habere vicissim minorem rationem, quam D ad C.

Intelligatur etenim E esse ad B, ut est C ad D. Et quoniam ex hypothesi A ad B habet majorem rationem, quam C ad D; habebit (1) etiam A ad B majorem rationem, quam E ad B: proindeque A major (2) erit, quam E. Quum igitur A major sit, quam E, habebit (3) B ad E majorem rationem, quam B ad

(1) *Prop.13.hujus.* (2) *Prop.10.hujus.*
(3) *Prop.8.hujus.*

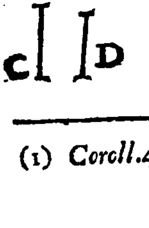
B ad A. Sed invertendo B est ad E (1) ut D ad C. Quare D ad C (2) majorem quoque rationem habebit, quam B ad A. Et propterea, si prima ad secundam habuerit majorem rationem, quam tertia ad quartam; habebit invertendo secunda ad primam minorem vicissim rationem, quam quarta ad tertiam. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Simili autem ratione ostendetur, quod si prima ad secundam habuerit minorem rationem, quam tertia ad quartam; invertendo secunda ad primam habeat vicissim majorem rationem, quam quarta ad tertiam.

PROP. XXVII. THEOR. XXVII.

Si prima ad secundam habuerit majorem rationem, quam tertia ad quartam; habebit permutando prima ad tertiam majorem quoque rationem, quam secunda ad quartam.



Habeat A ad B majorem rationem, quam C ad D. Dico, permutando A ad C habere quoque majorem rationem, quam B ad D.

Intelligatur etenim E esse ad B, ut est C ad D. Et quoniam ex hypothesi A ad B majorem rationem

(1) *Coroll. 4. hujus.* (2) *Prop. 15. hujus.*

nem habet, quam C ad D; habebit etiam (1) A ad B majorem rationem, quam E ad B: proindeque A major (2) erit quam E. Quum igitur A major ſit, quam E; habebit (3) A ad C majorem rationem, quam E ad C. Eſt autem permutando (4) ut E ad C, ita B ad D. Quare A ad C (5) majorem quoque rationem habebit, quam B ad D. Et propterea, ſi prima ad ſecundam habuerit majorem rationem, quam tertia ad quartam; habebit permutando prima ad tertiam majorem quoque rationem, quam ſecunda ad quartam. quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

Simili autem ratione oſtendetur; quod ſi prima ad ſecundam habuerit minorem rationem, quam tertia ad quartam; permutando prima ad tertiam minorem quoque rationem habeat, quam ſecunda ad quartam.

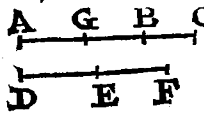
PROP. XXVIII. THEOR. XXVIII.

Si prima ad ſecundam habuerit majorem rationem, quam tertia ad quartam; habebit componendo prima cum ſecunda ad ſecundam majorem quoque rationem, quam tertia cum quarta ad quartam.

HAbeat AB ad BC majorem rationem, quam DE ad EF. Dico, componendo AC ad BC habere quoque majorem rationem, quam DF ad EF.

Intelligatur etenim, GB eſſe ad BC, ut DE

(1) *Prop.* 13. *hujus.* (2) *Prop.* 10. *hujus.*
(3) *Prop.* 8. *hujus.* (4) *Prop.* 16. *hujus.*
(5) *Prop.* 13. *hujus.*



DE ad EF. Et quoniam ex hypothesi AB ad BC majorem rationem habet, quam DE ad EF; habebit (1) etiam AB ad BC majorem rationem, quam GB ad BC: proindeq; AB major (2) erit quam GB; additaque communi BC, erit etiam AC major quam GC. Quum igitur AC major sit, quam GC; habebit (3) AC ad BC majorem rationem, quam GC ad ad BC. Sed componendo GC, est ad BC, ut (4) DF ad EF. Quare AC, ad BC (5) majorem quoque rationem habebit, quam DF ad FE. Et propterea, si prima ad secundam habuerit majorem rationem, quam tertia ad quartam; habebit componendo prima cum secunda ad secundam majorem quoque rationem, quam tertia cum quarta ad quartam. Quod erat demonstrandum,

SCHOLIUM.

Simili autem ratione ostendetur, quod si prima ad secundam habuerit minorem rationem, quam tertia ad quartam: componendo prima cum secuda ad secundam minorem quoque rationem habeat, quam tertia cum quarta ad quartam.

PROP. XXIX. THEOR, XXIX.

Si prima ad secundam habuerit majorem rationem, quam tertia ad quartam; habebit divi-

vi-

(1) *Prop.* 13. *hujus*. (2) *Prop.* 10. *hujus.*
(3) *Prop.* 8. *hujus.* (4) *Prop.* 18. *hujus.*
(5) *Prop.* 13. *hujus.*

videndo excessus, quo prima superat secundam ad secundam majorem quoque rationem, quam excessus, quo tertia superat quartam ad quartam.

HAbeat AC ad BC majorem rationem, quam DF ad EF. Dico, dividendo AB ad BC habere quoque majorem rationem quam DE ad EF.

Intelligatur etenim GC esse ad BC, ut est DF ad EF. Et quoniam ex hypothesi AC est ad BC in majore ratione, quam DF ad EF; habebit etiam (1) AC ad BC majorem rationem, quam GC ad BC: proindeque AC (2) major erit, quam GC; & ideo ablata communi BC, erit etiam AB major, quam GB. Quum igitur AB major sit, quam GB; habebit AB ad BC (3) majorem rationem, quam GB ad BC. Est autem dividendo (4), ut GB ad BC., ita DE ad EF; quare AB ad BC (5) majorem quoque rationem habebit', quam DE ad EF. Et propterea, si prima ad secundam habuerit majorem rationem, quam tertia ad quartam; habebit dividendo excessus, quo prima superat secundam ad secundam majorem quoque rationem, quam excessus, quo tertia superat quartam ad quartam. Quod demonstrare oportebat.

SCHO-

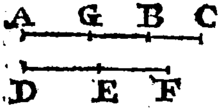
(1) *Prop.13.hujus* (2) *Prop.10,hujus.*
(3) *Prop.8.hujus.* (4) *Prop. 17. hujus.*
(5) *Prop.23.hujus.*

SCHOLIUM,

Simili autem ratione ostendetur quod si prima ad secundam habuerit minorem rationem quam tertia ad quartam; dividendo excessus, quo prima superat secundam ad secundam minorem quoque habeat rationem, quam excessus quo tertia superat quartam ad quartam.

PROP. XXX. THEOR. XXX.

Si prima ad secundam habuerit majorem rationem, quam tertia ad quartam; habebit convertendo prima ad excessum, quo prima superat secundam, minorem vicissim rationem, quam tertia ad excessum, quo tertia superat quartam.



HAbeat AC ad BC majorem rationem, quam DF ad EF. Dico, convertendo AC ad AB habere vicissim minorem rationem, quam, DF ad DE.

Quoniam enim ex hypothesi AC ad BC habet majorem rationem, quam, DF ad EF; habebit (1) dividendo AB ad BC majorem quoque rationem, quam DE ad EF. Unde, quum invertendo (2) BC ad AB habeat vicissim minorem rationem, quam EF ad DE; habebit componendo (3) AC ad AB

(1) *Prop.29.hujus.* (2) *Prop.26.hujus.*
(3) *Prop.28.hujus.*

AB minorem quoque rationem, quam DF ad DE. Proindeque, si prima ad secundam habuerit majorem rationem, quam tertia ad quartam, habebit convertendo prima ad excessum, quo prima superat secundam minorem vicissim rationem, quam tertia ad excessum, quo tertia superat quartam. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

Simili autem ratione ostendetur, quod si prima ad secundam habuerit minorem rationem, quam tertia ad quartam; convertendo prima ad excessum, quo prima superat secundam, habeat vicissim majorem rationem quam tertia ad excessum, quo tertia superat quartam.

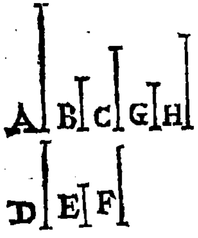
PROP. XXXI. THEOR. XXXI.

Si tres magnitudines habuerint cum aliis tribus rationem ordinatam majorem; habebit ex æquali ordinando prima priorum ad ultimam majorem quoque rationem, quam prima posteriorum ad ultimam.

TRes magnitudines A, B, C cum aliis tribus D, E, F servent rationem ordinatam majorem: ita nempe, ut A ad B habeat majorem rationem, quam D ad E; & B ad C majorem, quam E ad F. Dico, ex æquali ordinando A ad C habere quoque majorem rationem, quam D ad F.

Intelligatur etenim G esse ad C, ut est E

ad



ad F. Et quoniam ex hypothesi B ad C majorem rationem habet, quam E ad F; habebit quoque (1) B ad C majorem rationem, quam G ad C: proindeque (2) B major erit, quam G. Quum igitur B major sit, quam G; habebit (3) A ad G majorem rationem, quam ad B: ex hypothesi autem A ad B majorem rationem habet, quam D ad E. Quare A ad G multo majorem rationem habebit, quam D ad E.

Intelligatur rursus H esse ad G, ut est D ad E. Et quoniam ex ostensis A ad G majorem rationem habet, quam D ad E; habebit A ad G majorem quoque rationem, quam H ad G: proindeque A major erit, quam H; eritque propterea A ad C in majore ratione, quam H ad C. Jam vero ex æquali ordinando H ad C habet eamdem rationem, quam D ad F (4). Quare A ad C majorem quoque rationem (5) habebit, quam D ad F. Et propterea, si tres magnitudines servent cum aliis tribus rationem ordinatam majorem; habebit ex æquali ordinando prima priorum ad ultimam majorem quoque rationem,

(1) *Prop.13.hujus.*
(2) *Prop.10.hujus.*
(3) *Prop.8.hujus.*
(4) *Prop.22.hujus.*
(5) *Prop.13.hujus.*

nem, quam prima posteriorum ad ultimam; Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM I.

Quod si magnitudines servantes rationem ordinatam majorem cum aliis totidem plures fuerint, quam tres; ostendetur, primam priorum ad ultimam habere quoque majorem rationem, quam prima posteriorum ad ultimam, idque eadem methodo, qua usi sumus in Scholio propositionis vigesimæ secundæ.

SCHOLIUM II.

Simili autem ratione ostendemus, quod si plures magnitudines cum aliis totidem fuerint in ratione ordinata minore, ex æquali ordinando prima priorum ad ultimam minorem quoque rationem habeat, quam prima posteriorum ad ultimam.

PROP. XXXII. THEOR. XXXII.

Si tres magnitudines servent cum aliis tribus rationem perturbatam majorem; habebit ex æquali perturbando prima priorum ad ultimam majorem quoque rationem, quam prima posteriorum ad ultimam.

TRes magnitudines A, B, C servent cum aliis tribus D, E, F rationem perturbatam majorem: ita nempe, ut A ad B habeat majorem rationem, quam E ad F:

& B

& B ad C majorem, quam D ad E. Dico, ex æquali perturbando A ad C habere quoque majorem rationem, quam D ad F.

Intelligatur enim G esse ad C, ut est D ad E. Et quoniam ex hypothesi B ad C majorem rationem habet, quam D ad E; habebit quoque (1) B ad C majorem rationem, quam G ad C; proindeque (2) B major erit, quam G. Quum igitur B major sit, quam G; habebit (3) A ad G majorem rationem, quam A ad B. Ex hypothesi autem A habet ad B majorem rationem, quam E ad F. Quare A ad G multo majorem rationem habebit, quam E ad F.

Intelligatur rursus H esse ad G, ut est E ad F. Et quoniam ex ostensis A ad G habet majorem rationem, quam E ad F; habebit A ad G majorem quoque rationem, quam H ad G: proindeque A major erit, quam H; eritque propterea A ad C in majore ratione, quam H ad C. Jam vero ex æquali perturbando (4) H est ad C, ut D ad F. Quare A ad C (5) majorem quoque rationem habebit, quam D ad F: proindeque, si tres magnitudines cum aliis tribus fuerint in ratio-

(1) *Prop.13.hujus.*
(2) *Prop.10.hujus.*
(3) *Prop.8.hujus.*
(4) *Prop.23.hujus.*
(5) *Prop.15.hujus.*

tione perturbata majore; ex æquali perturbando prima priorum ad ultimam majorem quoque rationem habebit, quam prima posteriorum ad ultimam. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM I.

Quod si magnitudines servantes rationem perturbatam majorem cum aliis totidem fuerint plures, quam tres; ostendemus primam priorum ad ultimam majorem quoque rationem habere, quam prima posteriorum ad ultimam, idque eadem omnino methodo, qua usi sumus in Scholio propositionis vigesimæ tertiæ.

SCHOLIUM II

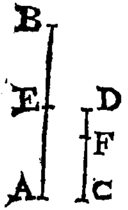
Simili autem ratione ostendemus, quod si plures magnitudines cum aliis totidem fuerint in ratione perturbata minore, ex æquali perturbando prima priorum ad ultimam minorem quoque habeat rationem, quam prima posteriorum ad ultimam.

PROP. XXXIII. THEOR. XXXIII.

Si tota ad totam habeat majorem rationem, quam ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam majorem quoque rationem habebit, quam tota ad totam.

HAbeat tota AB ad totam CD majorem rationem, quam ablata AE ad abla-

tam



tam CF. Dico, reliquam EB ad reliquam FD majorem quoque rationem habere, quam tota AB ad totam CD.

Quoniam enim ex hypothesi AB ad CD habet majorem rationem, quam AE ad CF; habebit permutando AB ad AE majorem quoque rationem (1), quam CD ad CF. Jam vero convertendo (2) AB ad EB minorem rationem habet, quam CD ad FD. Quare rursus permutando AB ad CD habebit minorem quoque rationem, quam EB ad FD. Et propterea ratio, quam habet EB ad FD, major erit ratione, quam habet AB ad CD. Si igitur tota ad totam habuerit majorem rationem, quam ablata ad ablatam, & reliqua ad reliquam majorem quoque rationem habebit, quam tota ad totam. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

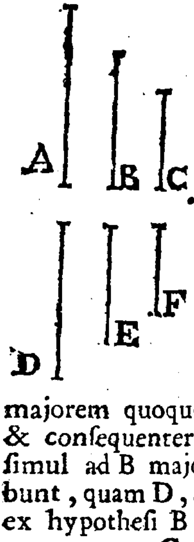
Ex ipso autem demonstrandi modo patet, quod si tota ad totam habuerit minorem rationem, quam ablata ad ablatam; reliqua ad reliquam minorem quoque rationem habeat, quam tota ad totam.

PROP.

(1) *Prop.27.hujus.* (2) *Prop.30.hujus.*

PROP. XXXIV. THEOR. XXXIV.

Si quotcumque magnitudines comparatæ cum aliis totidem constituant rationes, quarum antecedens subsequente semper major sit; habebunt omnes priores ad omnes posteriores majorem quidem rationem, quam ultima priorum ad ultimam posteriorum; minorem vero, quam prima priorum ad primam posteriorum.

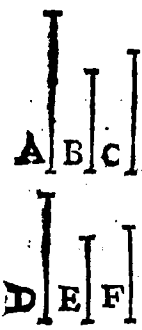


SInt magnitudines A, B, C, & aliæ iis numero æquales D, E, F, habeatque A ad D majorem rationem quam B ad E; itemque B ad E majorem, quam C ad F. Dico primo, quod omnes A, B, C ad omnes D, E, F habeant majorem rationem, quam C ad F.

Quoniam enim ex hypothesi A ad D majorem habet rationem, quam B ad E; habebit permutando (1) A ad B majorem quoque rationem, quam D ad E; & consequenter componendo (2) A, & B simul ad B majorem adhuc rationem habebunt, quam D, & E simul ad E. Et quoniam ex hypothesi B ad E majorem habet rationem, quam C ad F; habebit permutando B ad C majorem quoque rationem, quam E

O ad

(1) *Prop.27.hujus.* (2) *Prop.28.hujus.*



ad F. Unde ex æquali ordinando (1) A, & B simul ad C habebunt majorem adhuc rationem, quam D, & E simul ad F. Quumque rursus componendo habeant A, B, C simul ad C majorem rationem, quam D, E, F simul ad F; habebunt tandem permutando omnes A, B, C ad omnes D, E, F majorem quoque rationem, quam C ad F.

Dico secundo, quod omnes A, B, C ad omnes D, E, F minorem habeant rationem, quam A ad D.

Quoniam enim ex hypothesi B ad E majorem habet rationem, quam C ad F; habebit permutando B (2) ad C majorem quoque rationem, quam E ad F; & consequenter componendo (3) B, & C simul ad C majorem adhuc rationem habebunt, quam E, & F simul ad F. Unde, quum convertendo (4) B, & C simul ad B minorem habeant rationem, quam E, & F simul ad E, & invertendo (5) B ad A minorem habeat rationem, quam E ad D; habebunt ex æquali ordinando (6) B, & C simul ad A minorem quoque rationem, quam E, & F simul ad D. Quare, quum rursus componendo omnes A, B, C ad A minorem habeant rationem, quam omnes D, E, F ad D; habebunt tandem permu-

(1) *Prop.31.hujus.* (2) *Prop.27.hujus.*
(3) *Prop.28.hujus.* (4) *Prop.30.hujus.*
(5) *Prop.26.hujus.* (6) *Prop.31.hujus.*

mutando omnes A, B, C ad omnes D, E, F minorem adhuc rationem, quam A ad D.

Si igitur quotcumque magnitudines comparatæ cum aliis totidem constituant rationes, quarum antecedens subsequente semper major sit; habebunt omnes priores ad omnes posteriores majorem quidem rationem, quam ultima priorum ad ultimam posteriorum; minorem vero quam prima priorum ad primam posteriorum. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Non dissimiliter autem ostendetur, quod si quotcumque magnitudines comparatæ cum aliis totidem constituant rationes, quarum antecedens subsequente semper minor sit; omnes priores ad omnes posteriores minorem quidem rationem habeant, quam ultima priorum ad ultimam posteriorum; majorem vero, quam prima priorum ad primam posteriorum.

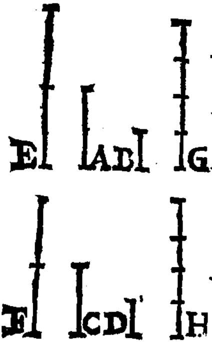
SCHOLIUM GENERALE.

In tradenda proportionum doctrina, ab Euclidis methodo eam per æquemultiplicia ostendentis, nihil quidem recessimus: quod sane nemo, opinor, vitio nobis vertet; quum, si res attente perpendatur, ejusmodi proportionum doctrina Euclidea nullo vitio laborare comperiatur. Neque enim alia ratione doctrinam istam putant communiter Recentiores mancam esse, ac imperfectam, quam quia lex illa æque-

multiplicium, quæ cognoscuntur magnitudines proportionales, velut principium ab Euclide fuit assumpta, quum tamen ex ipsorum sententia sua deberet ratione fulciri. Sed immerito ab Euclide id exigunt, ut qui magno mentis acumine talem cuderit rationis definitionem, ut sine illa lege quæ sint quatuor magnitudines proportionales, seu eamdem rationem habentes in systemate suo nemo cognoscere queat. Jure id autem exigent ab iis, qui vocantes rationem, comparationem duarum magnitudinum ejusdem generis, factam ratione continentiæ, sine ulla demostratione eamdem illam legem usurparent. Nam, qui ita se gererent, jam quatuor magnitudinum proportionalium duas notas diversas assumerent, unam nempe, quum prima toties continet secundam, quoties tertia continet quartam; & alteram, quum æquemultiplicia primæ, & tertiæ, vel una superant, vel una deficiunt, vel una adæquant æquemultiplicia secundæ, & quartæ. Itaque quum apud Recentiores jam invaluerit rationem definire, comparationem duarum magnitudinum ejusdem generis institutam ratione continentiæ; atque adeo vocare magnitudines proportionales, quæ ejusmodi sunt, ut quoties prima continet secundam, toties tertia contineat quartam: proinde, ut doctrina Euclidea etiam juxta has rationis, ac proportionis definitiones subsistere possit, visum est sequentia theoremata hoc loco subjungere.

THEOR.

THEOR. I.



Si prima toties contineat secundam, quoties tertia continet quartam; æquemultiplices primæ, & tertiæ, vel una excedent, vel una deficient, vel una adæquabunt æquemultiplices secundæ, & quartæ.

Prima A toties contineat secundam B, quoties tertia C continet quartam D. Sumantur autem ipsarum quidem A, & C æquemultiplices E, & F; ipsarum vero B, & D æquemultiplices G, & H. Dico, E, & F vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare G, & H.

Ponamus etenim primo, quod E major sit, quam G. Jamque, si F non sit major, quam H, sed vel minor, vel æqualis; continebit E magis G, quam F continet H. Sed G, & H sunt æquemultiplices ipsarum B, & D; atque adeo G toties continet B, quoties H continet D. Quare etiam E magis continebit B, quam F continet D. Ex hypothesi autem B toties continetur in A, quoties D continetur in C. Quare rursus E magis continebit A, quam F continet C: quod quidem est falsum; quum E, & F sint æquemultiplices ipsarum A, & C.

Ponamus secundo, quod E minor sit, quam G. Jamque si F non minor, quam H, sed vel *major, vel æqualis; continebit E minus G, quam F continet H. Sed G, & H sunt æquemultiplices ipsarum B & D; atque adeo G toties continet B, quoties H continet D. Quare etiam E minus continebit B, quam F continet D. Ex hypothesi autem B toties continetur in A, quoties D continetur in C. Quare rursus E minus continebit A, quam F continet C: quod quidem adhuc est falsum; quum E, & F sint æquemultiplices ipsarum A, & C.*

Ponamus denique, quod E sit æqualis G. Jamque, si F non sit æqualis H; erit vel major, vel minor. Unde, quum in primo casu E minus continet G, quam F continet H, & in secundo E magis contineat G, quam F continet H; semper ostendetur, E non perinde continere A, ac F continet C: quod quum falsum sit, concludendum est, quod si prima toties contineat secundam, quoties tertia continet quartam; æquemultiplices primæ, & tertiæ vel una deficiant, vel una adæquent, vel una excedant æquemultiplices secundæ, & quartæ. Quod erat demonstrandum.

THEOR. II.

Si prima magis contineat secundam, quam tertia continet quartam, sumi poterunt tales æquemultiplices primæ, & tertiæ, itemque tales secundæ, & quartæ, ut si multiplex primæ excedat multiplicem secundæ, multiplex tertiæ non excedat multiplicem quartæ.

Prima AB magis contineat secundam D, quam tertia E continet quartam F. Dico, tales æquemultiplices sumi posse ipsarum AB, & E,

item-

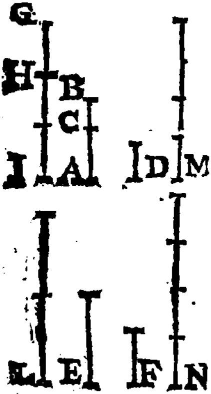
itemque tales ipsarum D, & F, ut si multiplex ipsius AB excedat multiplicem ipsius D, multiplex ipsius E non excedat multiplicem ipsius F.

Quoniam enim ex hypothesi AB magis continet D, quam E continet F, abscindi potest ex AB portio aliqua BC, ita ut reliqua CA toties contineat D, quoties E continet F. Tum ipsarum BC, CA, & E æquemultiplices capiantur GH, HI, & L, hac tamen lege, ut GH multiplex ipsius BC major sit, quam D. Denique ipsarum D, & F sumantur æquemultiplices M, & N, hac rursus lege, ut M multiplex ipsius D superet HI magnitudine non majore, quam D, sed vel æquali, vel minore.

Et quoniam GH, HI sunt æquemultiplices ipsarum BC, CA; erit per primam hujus GI tam multiplex ipsius AB, quam est GH ipsius BC, vel HI ipsius CA, vel denique L ipsius E. Sunt igitur GI, & L æquemultiplices ipsarum AB, & E. Suntque etiam ex constructione M, & N æquemultiplices ipsarum D, & F. Dico itaque quod GI excedat M, sed vicissim L non excedat N.

Quod enim GI excedat M, id liquet abunde. Nam ex constructione, M superat HI magnitudine non majore, quam D. Sed posuimus GH majorem esse quam D. Itaque M superat HI magnitudine miniore, quam GH: &

propterea tota GI excedet M. Quod vero vicissim L non excedat N, demonstrabimus id quidem hoc pacto.



Si fieri potest L excedat N. Et quoniam HI minor est, quam M, continebit L magis N, quam HI continet M. Sed M, & N sunt æquemultiplices ipsarum D, & F; atque adeo M toties continet D, quoties N continet F. Quare etiam L magis continebit F, quam HI continet D. Ex constructione autem D toties continetur in CA, quoties F continetur in E. Quare rursus L magis continebit E, quam HI continet CA: quod quidem est falsum: quum HI, & L sint æquemultiplices ipsarum CA, & E.

Concludamus igitur, quod si prima magis Continet secundam, quam tertia continet quartam; tales æquemultiplices sumi possint primæ, & tertiæ, itemque tales secundæ, & quartæ, ut si multiplex primæ excedat multiplicem secundæ, multiplex tertiæ non excedat multiplicem quartæ. Quod erat demonstrandum.

THEOR. III.

Si æqemultiplices primæ, & tertiæ vel una ex-

excedant, vel una deficiant, vel una adæquent æquemultiplices secundæ, & quartæ; continebit prima toties secundam, quoties tertia continet quartam.

Nam si ita non sit, sed prima magis contineat secundam, quam tertia continet quartam; jam per theorema secundum sumi poterunt tales æquemultiplices primæ, & tertiæ, itemque tales secundæ, & quartæ, ut si multiplex primæ excedat multiplicem secundæ, multiplex tertiæ non excedat multiplicem quartæ. Posuimus autem æquemultiplices primæ, & tertiæ vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare æquemultiplices secundæ, & quartæ. Necesse est igitur, ut prima toties contineat secundam, quoties tertia continet quartam. Quod erat demonstrandum.

THEOR. IV.

Si sumi possunt tales æquemultiplices primæ, & tertiæ, itemque tales secundæ, & quartæ, ut multiplex primæ excedat multiplicem secundæ, sed multiplex tertiæ non excedat multiplicem quartæ; prima magis continebit secundam, quam tertia continet quartam.

Sint quatuor magnitudines, AB prima, D secunda, E tertia, & F quarta. Dico, quod si sumi possint tales æquemultiplices primæ, & tertiæ, itemque tales secundæ, & quartæ, ut multiplex primæ superet multiplicem secundæ, at multiplex tertiæ non superet multiplicem quartæ, prima AB magis contineat secundam D, quam tertia E continet quartam F.

Sumantur enim ejusmodi æquemultiplices;

& ipsarum quidem AB, & E, sint GI, & L; ipsarum vero D, & F sint M, & N. Quoniam igitur ex hypothesi GI superat M, sed L non superat N; continebit GI magis M, quam L continet N. Jam vero M, & N sunt æquemultiplices ipsarum D, & F; atque adeo quoties M continet D, toties N continet F. Quare etiam GI magis continebit D, quam L continet F. Sunt autem GI, & L æquemultiplices ipsarum AB, & E; ac proinde quoties GI continet AB, toties L continet F. Quare etiam AB magis continebit D, quam E continet F. Et propterea, si fuerint quatuor magnitudines, & sumi possint tales æquemultiplices, primæ, & tertiæ itemque tales secundæ, & quartæ, ut multiplex primæ superet multiplicem secundæ, sed multiplex tertiæ non superet multiplicem quartæ; prima magis continebit secundam, quam tertia continet quartam. Quod erat demonstrandum.

GEO-

GEOMETRIÆ PLANÆ ELEMENTORUM LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

I.

Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos, singulos singulis, æquales habent, & latera circum æquales angulos proportionalia. Unde ad adstruendam duarum figurarum rectilinearum similitudinem, duo quidem ostendi debent. Primum, ut habeant angulos, singulos singulis æquales. Deinde, ut habeant latera, quæ circum æquales angulos sunt proportionalia. Quocirca, si anguli unius figuræ æquales fuerint angulis alterius figuræ, singuli singulis, at latera circa æquales angulos existentia non fuerint proportionalia; vel contra latera unius figuræ proportione correspondeant lateribus alterius figuræ, sed anguli circa quos sunt latera proportionalia, non fuerint æquales: ejuscemodi figuræ nequaquam similes dici possunt.

II.

Reciprocæ autem figuræ sunt, quum in utraque ipsarum sunt antecedentes, & consequentes rationum. Vel clarius, quum in una quidem figura est antecedens primæ rationis, & consequens secundæ; in altera vero figura est consequens primæ rationis, & antecedens secundæ. Num autem termini isti diversarum rationum debeant esse circum æquales angulos. Interpretum quisquam advertit sed crediderim, hanc quoque conditionem requiri, ut figuræ dicantur reciprocæ; quemadmodum colligere licet ex propositionibus decimaquarta, & decimaquinta hujus libri, in quibus de his figuris differitur.

III.

Recta linea dicitur secari extrema ac media ratione, quum ita quidem dividitur, ut tota recta linea sit ad majus segmentum, ut est majus ad minus. Patebit autem inferius, secari quidem rectam lineam extrema, ac media ratione, si per undecimam secundi ita quidem dividatur, ut rectangulum, quod fit ex tota, & uno segmentorum, æquale sit quadrato alterius segmenti. Cæterum lineæ hoc modo divisæ utilitates innumeræ penæ sunt: unde nonnulli rationem, qua linea hoc pacto dividitur, divinam appellarunt. Sed dicitur vulgo divisa extrema, ac media ratione, quia unum segmentorum, in quæ dividitur

tur sit medius terminus propositionis continuæ, alterum terminus extremus.

IV.

Altitudo cujuscumque figuræ; est perpendicularis, quæ a vertice ad basim demittitur: nempe quia perpendicularis est minima omnium rectarum, quæ a vertice ad basim duci possunt; & utpote talis, est certæ, ac determinatæ longitudinis; cujusmodi profecto debent esse rerum mensuræ. Hinc itaque patet, duas figuras æquales altitudines habere, si utique æquales fuerint perpendiculares, quæ ex ipsarum verticibus ad bases demittuntur. Erunt vero dictæ perpendiculares æquales, quum bases figurarum, & vertices vel sunt in iisdem parallelis, vel saltem in iisdem parallelis constitui possunt.

V.

Quantitas, seu exponens, vel denominator rationis est id, quod indicat quoties antecedens continent consequentem. Sic quantitas rationis, quam habet 10 ad 2, est 5; quia 10 quinquies continet 2. Pariterque quantitas rationis quam habet 12 ad 3, est 4; quia 12 quater continet 3. Unde patet, rationes æquales eamdem quantitatem habere. Nam vocantur rationes æquales, quum antedentium æquemultiplicia quævis vel una deficiunt, vel una adæquant, vel una superant æquemultiplicia consequentium utcumque

sum-

sumpta: quod profecto quum accidi ostensum fuit a nobis, antecedentem unius rationis toties continere suum consequentem, quoties consequentem suum continet antecedens alterius rationis.

VI.

Ratio dicitur componi ex duabus, aut pluribus rationibus, quum ejus quantitas prodit ex multiplicatione quantitatum illarum rationum. Sic ratio, quam habet 18 ad 3, componitur ex ratione, quam habet 4 ad 2, & ex ratione, quam habet 12 ad 4; nam quantitas illius est 6 quantitates vero istarum sunt 2, & 3: profecto autem, si 2 multiplicetur per 3, prodibit 6. Atque ita quoque ratio, quam habet 48 ad 2, componitur ex ratione, quam habet 4 ad 2, ex ratione quam habet 9 ad 3, & ex ratione, quam habet 12 ad 3, nam quantitas illius quæ est 24 oritur multiplicando inter se quantitates istarum, quæ sunt 2, 3, & 4.

Ex quo patet, quod si fuerint plures magnitudines, ratio, quam prima habet ad ultimam, componatur ex rationibus, quas eæ, excepta ultima, habent ad suas subsequentes. Ut si fuerint plures magnitudines 48, 12, 6, 2; habebit 48 ad 2 rationem compositam ex rationibus, quas habent 48 ad 12, 12 ad 6, & 6 ad 2, Nam quantitas rationis, quam habet 48 ad 2, est 24: quæ quidem oritur, multiplicando inter se quantitates rationum, quas habent 48 ad 12; 12, ad 6; & 6 ad 2, quæ sunt 4, 2, & 3.

Ra-

VII.

Ratio quæ componitur ex duabus rationibus æqualibus, dicitur duplicata cujusque illarum; quemadmodum triplicata quum componitur ex tribus rationibus æqualibus; quadruplicata, quum ex quatuor; atque ita deinceps. Ita ratio, quam habet 18 ad 2, componitur ex rationibus, quas habent 6 ad 2, & 12 ad 4. Unde, quia, duæ iste rationes sunt æquales inter se; dicetur illa duplicata cujusque istarum. Atque ita quoque, quia ratio, quam habet 54 ad 2, componitur ex tribus rationibus æqualibus, quas habent 6 ad 2, 12 ad 4, & 15 ad 5; dicetur illa triplicata cujusque istarum.

Ex quo patet, quod si fuerint tres magnitudines continue proportionales A, B, C, ita nempe ut A sit ad B, veluti est B ad C; ratio, quam habet prima A ad tertiam C duplicata sit ejus, quam habet vel prima A ad secundam B, vel secunda B ad tertiam C. Nam ratio, quam habet A ad C, componitur ex rationibus, quas habent A ad B, & B ad C. Unde quum ex hypothesi duæ istæ rationes sint æquales inter se; erit cujusque ipsarum duplicata ratio, quam habet A ad C.

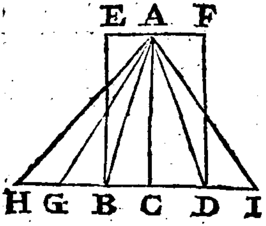
Similiter autem, si fuerint quatuor magnitudines continuè proportionales A, B, C, D, ita nempe, ut A sit ad B, veluti est B ad C, & B sit ad C, veluti est C ad D; ratio, quam habet prima A ad quartam D triplicata erit ejus, quam habet vel prima A ad secundam B, vel

se-

secunda B ad tertiam C, vel tertia C ad quartam D. Nam ratio, quam habet A ad D componitur ex rationibus, quas habent A ad B, B ad C, & C ad D. Unde quum tres istæ rationes sint æquales inter se; erit cujusque ipsarum triplicata ratio, quam habet A ad D.

PROP. I. THEOR. I.

Triangula, & parallelogramma eamdem altitudinem habentia inter se sunt ut bases.



SInt primum duo triangula ABC, ACD, quæ posita super eamdem rectam BD habeant eumdem verticem A, & consequenter eamdem altitudinem: dico triangulum ABC esse ad triangulum ACD ut est basis BC ad basim CD.

Extendatur enim tum BC in directum versus H, quum DC in directum versus I: deinde super CH capiantur portiones BG, GH æquales ipsi BC, & super CI portio DI æqualis CD. Denique jungantur AG, AH, AI.

Et quoniam ex constructione æquales inter se sunt tum rectæ CB, BG, GH, quum rectæ CD, DI: erunt æqualia etiam inter se tum triangula ACB, ABG, AGH, quum triangula ACD, ADI; quare quoties BC, CD metiuntur CH, CI, toties triangula ABC, ACD me-

metientur triangula ACH, ACI. Jam vero triangulum ACH eſt æquale, majus, vel minus triangulo ACI pro ut baſis CH eſt æqualis, major, vel minor baſi CI. Itaque quum habeantur quatuor magnitudines triangulum ABC prima, triangulum ACD ſecunda, baſis BC tertia, & baſis CD quarta; & oſtenſum ſit æquemultiplices primæ, & tertiæ vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare æquemultiplices ſecundæ, & quartæ, erit ut triangulum ABC ad triangulum ACD ita baſis BC ad baſim CD.

Sint ſecundo duo parallelogramma AB, AD, quæ ſint conſtituta inter eaſdem parallas BD, EF, & conſequenter, non ſecus ac triangula, eamdem habeant altitudinem. Dico, parallelogrammum AB ad parallelogrammum AD eſſe etiam, ut baſis BC ad baſim CD.

Quoniam enim diagonalis dividit parallelogrammum (1) in duo triangula æqualia; erit tam parallelogrammum AB duplum trianguli ABC, quam parallelogrammum AD duplum trianguli ACD. Quare erit, ut parallelogrammum AB ad parallelogrammum AD; ita triangulum ABC ad triangulum ACD. Oſtenſum eſt autem, triangulum ABC eſſe ad triangulum ACD, ut eſt baſis BC ad baſim CD. Erit igitur quoque (2) ut parallelogrammum AB ad parallelegrammum AD, ita baſis BC ad baſim CD.

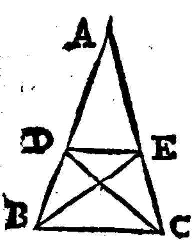
Trian-

(1) *Prop.* 34. *lib.* 1.
(2) *Prop.* 11. *lib.* 5.

Triangula igitur, & parallelogramma, quæ eamdem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod erat demonstrandum.

PROP. II. THEOR. II.

Si uni laterum trianguli parallela recta linea ducatur, ea secabit alia duo latera proportionaliter; & vicissim si secet proportionaliter duo latera trianguli, ea tertio lateri parallela erit.



Sit triangulum ABC, in quo ducatur recta DE, quæ secans latera AB, AC in punctis D, & E parallela sit ipsi BC. Dico, rectam istam DE proportionaliter secare latera AB, AC: ita nempe, ut AD sit ad DB, ut est AE ad EC.

Jungantur etenim rectæ BE, CD. Et quoniam triangula BDE, CDE, habent eamdem basim DE, & constituta sunt in iisdem parallelis DE, BC; erit triangulum BDE (1) æquale triangulo CDE. Quare erit (2), ut triangulum ADE ad triangulum BDE, ita idem triangulum ADE ad triangulum CDE. Jam vero triangulum ADE est ad triangulum BDE (3), ut est AD ad BD; itemque triangulum ADE est ad triangulum CDE, ut est AE

(1) *Prop.37.lib.1.*
(2) *Prop.7.lib.5.*
(3) *Prop.1.hujus.*

AE ad EC. Quare erit (1) ut AD ad DB, ita AE ad EC.

Sed secet vicissim recta DE proportionaliter latera AB, AC in punctis D, & E. Dico rectam DE parallelam esse ipsi BC.

Jungantur similiter rectæ BE, CD. Et quoniam ex hypothesi AD est ad DB, ut AE ad EC; atque est AD ad DB (2), ut triangulum ADE ad triangulum BDE; & AE ad EC, ut triangulum ADE ad triangulum CDE; erit ut triangulum ADE ad triangulum BDE (3), ita idem triangulum ADE ad triangulum CDE: proindeque triangulum BDE (4) æquale erit triangulo CDE. Unde, quum duo ista triangula habeant eamdem basim DE, & sint ad eamdem partem posita; erunt etiam (5) in iisdem parallelis. Et propterea DE parallela erit ipsi BC.

Si igitur uni laterum trianguli parallela recta linea ducatur, ea secabit alia duo latera proportionaliter; & vicissim si secet proportionaliter duo trianguli latera, ea parallela erit lateri tertio. Quod erat demonstrandum.

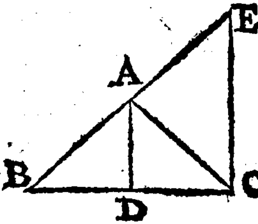
PROP. III. THEOR. III.

Recta, quæ secat angulum verticalem alicujus trianguli bifariam, secabit basim in ratione laterum; & vicissim recta, quæ secat basim alicujus

---

(1) *Prop.11.lib.5.* (2) *Prop.1.hujus.*
(3) *Prop.11.lib.5.*
(4) *Prop.9.lib.5.*
(5) *Prop.39.lib.1.*

cujus trianguli in ratione laterum, secabit angulum verticalem bifariam.



SIt triangulum ABC, ejusque angulus verticalis BAC secetur bifariam per rectam AD. Dico, rectam istam AD secare basim BC in ratione laterum AB, AC: ita nempe, ut BD sit ad DC veluti est latus AB ad latus AC.

Ducatur enim (1) per punctum C recta CE ipsi AD parallela, quæ conveniat cum latere AB producto in E. Et quoniam rectæ AD, CE sunt parallelæ, & in ipsas incidit AC; erunt (2) anguli alterni DAC, ACE æquales inter se. Est autem ex hypothesi angulus DAC æqualis angulo BAD. Quare eidem angulo BAD æqualis quoque erit angulus ACE. Jam vero, propter easdem parallelas AD, CE, angulus BAD æqualis est angulo AEC. Quare erit angulus AEC æqualis angulo ACE. Et propterea latera AC, AE angulos illos subtendentia (3) æqualia erunt inter se. Quum igitur AC sit æqualis AE, habebit (4) AB ad AC eamdem

(1) *Prop.* 31. *lib.*1.
(2) *Prop.*29.*lib.*1.
(3) *Prop.*6.*lib.*1.
(4) *Prop.*7.*lib.*5.

dem rationem, quam AB ad AE. Sed AB eſt ad AE (1), ut BD ad DC. Erit itaque (2) ut AB ad AC, ita BD ad DC.

Sed recta AD ſecet viciſſim baſim BC in ratione laterum AB, AC. Dico, eamdem rectam AD ſecare quoque bifariam angulum verticalem BAC.

Nam ex hypotheſi BD eſt ad DC, ut AB ad AC. Sed (3) BD eſt ad DC, ut AB ad AE. Quare erit (4) ut AB ad AC, ita AB ad AE. Et propterea AC, AE æquales erunt inter ſe (5). Quum itaque triangulum ACE iſoſceles ſit, erit (6) angulus ACE æqualis angulo AEC. Sed propter parallelas AD, CE (7) angulus ACE æqualis eſt angulo CAD, & angulus AEC æqualis eſt angulo BAD. Quare erit angulus CAD æqualis quoque angulo BAD: & ideo angulus BAC ſectus erit bifariam per rectam AD.

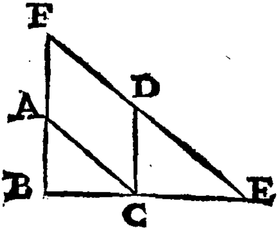
Recta igitur, quæ ſecat angulum verticalem alicujus trianguli bifariam, ſecabit baſim in ratione laterum; & viciſſim recta, quæ ſecat baſim alicujus trianguli in ratione laterum, ſecabit angulum verticalem bifariam.

PRO-

(1) *Prop.2. hujus.*
(2) *Prop.11.lib.5.*
(3) *Prop.2.hujus.*
(4) *Prop.11.lib.5.*
(5) *Prop.9.lib.5.*
(6) *Prop.5.lib.1.*
(7) *Prop.29.lib.1.*

PROP. IV. THEOR. IV.

Triangula æquiangula habent latera circum æquales angulos proportionalia; & homologa sunt latera illa, quæ æquales angulos subtendunt.



SInt ABC, DCE duo triangula æquiangula, quæ nempe habeant angulum ABC æqualem angulo DCE, angulum BCA æqualem angulo CED, & angulum CAB æqualem angulo EDC. Dico, eadem triangula habere quoque latera circum æquales angulos proportionalia, & illa quidem latera proportione sibi correspondere, quæ angulos æquales subtendunt; hoc est esse, ut AB ad BC, ita DC ad CE; ut BC ad CA, ita CE ad ED; & ut CA ad AB, ita ED ad DC.

Disponantur etenim triangula ABC, DCE ita quidem, ut latera BC, CE jaceant in directum. Et quoniam duo anguli (1) ABC, BCA sunt minores duobus rectis, atque est ex hypothesi angulus BCA æqualis angulo CED, erunt duo anguli ABC, CED similiter duobus rectis minores. Quum igitur in rectas AB, DE incidat tertia BE, & efficiat augu-

(1) *Prop.17.lib.1.*

angulos internos ad eamdem partem duobus rectis minores; rectæ AB, DE nequaquam (1) erunt parallelæ, sed convenient productæ ad eam partem, in qua fiunt anguli minores duobus rectis. Producantur itaque rectæ AB, DE, & conveniant in F.

Et quoniam ex hypothesi in rectas BF, CD tertia incidens BE efficit angulum exteriorem DCE æqualem interiori, & opposito ad eamdem partem ABC; erunt (2) rectæ BF, CD inter se parallelæ. Similiter, quia in rectas CA, EF tertia incidens BE efficit ex hypothesi angulum exteriorem BCA æqualem interiori, & opposito ad eamdem partem CED; erunt rectæ CA, EF etiam inter se parallelæ. Quare parallelogrammum erit ACDF; eritque adeo (3) tum AC æqualis FD, cum AF æqualis CD.

Et quoniam in triangulo BFE ducta est AC ipsi EF parallela, erit (4) ut AB ad AF, ita BC ad CE. Est autem AF æqualis CD. Quare erit quoque, ut AB ad CD, ita BC ad CE. Et propterea permutando erit (5) ut AB ad BC, ita DC ad CE. Similiter, quia in eodem triangulo BEF ducta est CD ipsi BF parallela, erit ut BC ad CE, ita DF ad DE. Est autem DF æqualis AC. Quare erit quoque ut BC ad CE, ita AC ad DE; atque adeo permutando erit, ut BC ad CA, ita CE ad ED. Quum igitur ostensum sit, AB esse ad BC,

---

(1) *Axi.13.* (2) *Prop.28.lib.1.*
(3) *Prop.34.lib.1.* (4) *Prop.2.hujus.*
(5) *Prop.16.lib.5.*

BC, ut est DC ad CE, & BC esse ad CA, ut est CE ad ED; erit etiam ex æquali ordinando (1) ut AB ad AC, ita DC ad DE; atque adeo invertendo, ut CA ad AB, ita ED ad DC. Quod erat demonstrandum.

Triangula igitur æquiangula habent etiam latera circum æquales angulos proportionalia, & homologa sunt latera illa, quæ angulos æquales subtendunt.

COROLLARIUM.

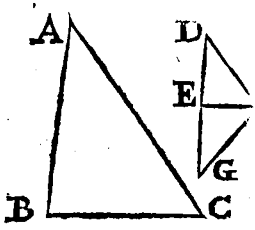
Ex quo patet, triangula æquiangula esse etiam similia inter se. Nam figuræ similes dicuntur illæ, quæ habent angulos angulis æquales, singulos singulis, & latera circum æquales angulos proportionalia. Quum igitur ostensum sit, triangula æquiangula habere quoque latera circa angulos æquales proportionalia; consequens est, ut triangula æquiangula sint etiam inter se similia.

PROP. V. THEOR. V.

Triangula, quæ latera habent proportionalia, erunt etiam æquiangula; & æquales habebunt eos angulos, quos homologa latera subtendunt.

SInt duo triangula ABC, DEF, quæ habeant latera proportionalia; hoc est AB sit ad BC, ut DE ad EF; BC sit ad CA,

(1) *Prop.21.lib.1.*



CA, ut EF ad FD. & AC sit ad AB veluti est DF ad DE. Dico, eadem triangula esse etiam æquiangula, & æquales habere angulos illos, qui ab homologis lateribus subtenduntur: nempe angulum BAC æqualem esse angulo EDF, angulum ABC æqualem angulo DEF, & angulum ACB æqualem angulo DFE.

Fiat enim (1) angulus FEG æqualis angulo ABC, & angulus EFG æqualis angulo ACB; conveniantque rectæ EG, FG in G, eritque reliquus angulus EGF, æqualis quoque reliquo angulo BAC. Quum igitur duo triangula ABC, GEF sint æquiangula; erit (2) ut AB ad BC, ita GE ad EF; & ut BC ad CA, ita EF ad FG. Sed ex hypothesi AB est ad BC, ut DE ad EF; & BC est ad CA, ut EF ad FD. Quare erit (3), ut DE ad EF, ita GE ad EF; & ut EF ad FD, ita EF ad FG. Quum itaque DE, GE habeant ad EF eamdem rationem; erunt (4) DE, GE æquales inter se. Pariterque, quum eadem EF habeat eamdem rationem ad FD, quam ad FG; erunt FD, FG etiam inter se æquales. Quare, quum duo triangula DEF, GEF habeant duo latera DE, DF æqualia duobus

 la-

(1) *Prop.23. lib.1.* (2) *Prop.4. hujus.*
(3) *Prop.11. lib.5.* (4) *Prop.9. lib.5.*

lateribus GE, GF, alterum alteri, nec non basim EF communem; habebunt quoque (1) angulum EDF æqualem angulo EGF; atque adeo æquales pariter (2) reliquos angulos, singulos singulis, hoc est angulum DEF æqualem angulo GEF, & angulum DFE æqualem angulo GFE. Est autem ex constructione angulus EGF æqualis angulo BAC, angulus GEF æqualis angulo ABC, & angulus GFE æqualis angulo ACB. Quare erit angulus BAC æqualis angulo EDF, angulus ABC æqualis angulo DEF, & angulus ACB æqualis angulo DFE. Et propterea triangula, quæ latera habent proportionalia, erunt etiam æquiangula, & æquales habebunt angulos illos, quos homologa latera subtendunt. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

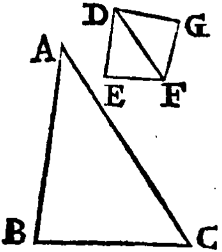
Ex quo patet, triangula, quæ latera habent proportionalia, esse etiam similia inter se. Nam figuræ similes dicuntur illæ, quæ non modo latera habent proportionalia, verum etiam æquales angulos, circa quos sunt latera proportionalia. Quum igitur ostensum sit, triangula, quæ latera proportionalia habent, esse etiam æquiangula, & æquales habere angulos illos, quos homologa latera subtendunt; consequens est, ut triangula, quæ latera proportionalia habent, sint etiam similia inter se.

PROP.

(1) *Prop.8.lib.1.* (2) *Prop.4.lib.1.*

PROP. VI. THEOR. VI.

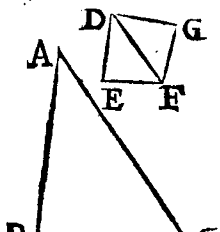
Triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, & latera circum illos angulos proportionalia, sunt etiam æquiangula, & æquales habent angulos illos, quos homologa latera subtendunt.



Sint duo triangula ABC, DEF, quæ habeant angulum BAC æqualem angulo EDF, nec non latera circum istos angulos proportionalia: ita nempe, ut BA sit ad AC, ut est ED ad DF. Dico, eadem triangula esse etiam æquiangula, & æquales habere angulos illos, quos homologa latera subtendunt; hoc est angulum ABC æqualem esse angulo DEF, angulum vero ACB æqualem angulo DFE.

Fiat enim (1) angulus FDG æqualis angulo BAC, seu EDF, & angulus DFG æqualis angulo ACB; conveniantque rectæ DG, FG in G; eritque reliquus angulus DGF æqualis quoque reliquo angulo ABC. Quum igitur duo triangula ABC, DGF ex constructione sint æquiangula; erit (2) ut AB ad AC, ita DG ad DF. Est autem ex hypothesi,

(1) *Prop.32.lib.1.*
(2) *Prop.4.hujus.*



ut AB ad AC, ita DE ad DF. Quare erit (1) ut DE ad DF, ita DG ad DF. Et propterea, quum duæ DE, DG habeant ad DF eamdem rationem erunt (2) DE, DG æquales inter se. Unde, quia duo triangula DEF, DGF habent duo latera DE, DF æqualia duobus lateribus DG, DF, alterum alteri, nec non æquales angulos sub æqualibus lateribus contentos; habebunt quoque (3) reliquos angulos reliquis angulis æquales, singulos singulis, hoc est angulum DGF æqualem angulo DEF, & angulum DFG æqualem angulo DFE. Jam vero ex constructione angulus DGF æqualis est angulo ABC, & angulus DFG æqualis est angulo ACB. Quare erit angulus ABC æqualis angulo DEF, & angulus ACB æqualis angulo DFE: proindeque triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, & latera circum istos angulos proportionalia, erunt etiam æquiangula, & æquales habebunt angulos illos, quos homologa latera subtendunt. Quod erat demonstrandum.

CO-

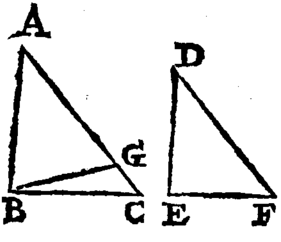
(1) *Prop.* 11. *lib.* 5. (2) *Prop.* 9. *lib.* 5.
(3) *Prop.* 4. *lib.* 1.

COROLLARIUM.

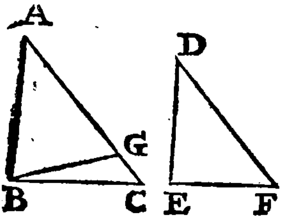
Ex quo patet, triangula, quæ habent unum angulum uni angulo æqualem, & latera circum istos angulos proportionalia, esse etiam similia inter se. Nam hujusmodi triangula ostensa sunt inter se æquiangula. Sed triangula æquiangula sunt pariter similia. Quare & ipsa illa triangula similia erunt inter se.

PROP. VII. THEOR. VII.

Triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, latera vero circum alios angulos proportionalia, & reliquos angulos ejusdem speciei inter se, hoc est vel utrumque acutum, vel utrumque obtusum, erunt etiam æquiangula, & æquales habebunt angulos illos, circa quos sunt latera proportionalia.



Sint duo triangula ABC, DEF, quæ habeant angulum BAC æqualem angulo EDF. Sint deinde proportionalia latera, quæ sunt circa angulos ABC, DEF hoc est AB sit ad BC; ut est DE ad EF. Denique reliqui anguli ACB, DFE sint ejusdem speciei inter se; hoc est, vel, ambo acuti, seu recto minores, vel ambo ob-



tusi, seu recto majores. Dico, eadem triangula esse etiam aquiangula inter se, & æquales habere angulos illos, circa quos sunt latera proportionalia, nempe angulum ABC æqualem esse angulo DEF.

Si enim angulus ABC non sit æqualis angulo DEF, alter ipsorum major erit. Sit itaque major angulus ABC. Quare fiat angulus ABG (1) æqualis angulo DEF. Quumque angulus BAC positus sit æqualis angulo EDF; erit reliquus angulus AGB æqualis reliquo angulo DFE; atque adeo duo triangula ABG, DEF quum æquiangula sint, erit (2) ut AB ad BG, ita DE ad EF. Est autem ex hypothesi, ut AB ad BC, ita DE ad EF. Quare erit (3), ut AB ad BC, ita AB ad BG. Et propterea, quum eadem AB habeat eamdem rationem ad BC, quam ad BG; erunt (4) CB, BG æquales inter se. Isosceles est itaque triangulus BCG; eritque adeo (5) angulus BCG æqualis angulo BGC. Jam vero ex hypothesi angulus BCG est ejusdem speciei cum angulo EFD, qui ex constructione adæquat angulum BGA. Quare angulus CGB erit etiam ejusdem speciei

---

(1) *Prop.23.lib.1.* (2) *Prop.4.hujus.*
(3) *Prop.11.lib.5.* (4) *Prop.9.lib.5.*
(5) *Prop.5.lib.1.*

ciei cum angulo BGA; eruntque adeo ambo vel recto minores, vel recto majores. Sed hoc fieri non potest: debent enim simul (1) duos rectos adæquare. Non igitur angulus ABC major est, sed æqualis angulo DEF. Et propterea triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, latera vero circum alios angulos proportionalia, & reliquos angulos ejusdem speciei inter se, erunt etiam æquiangula, & æquales habebunt angulos illos, circa quos sunt latera proportionalia. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Ex quo patet, triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, latera vero circum alios angulos proportionalia, & reliquos angulos ejusdem speciei inter se, esse etiam similia. Nam hujusmodi triangula ostensa sunt inter se æquiangula. Sed triangula æquiangula sunt pariter similia. Quare & ipsa illa triangula similia erunt inter se.

SCHOLIUM.

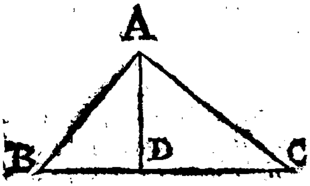
Vides igitur, similitudinem duorum triangulorum quatuor modis ostendi posse. Primo nempe, si triangula sint æquiangula. Secundo, si habeant latera proportionalia. Tertio, si habeant unum angulum uni angulo æqualem, & latera circum istos angulo poroportionalia.

(1) *Prop.13.lib.1.*

ualia. Et quarto demum, ſi habeant unum angulum uni angulo æqualem, latera vero circum alios angulos proportionalia, & reliquos angulos ejuſdem ſpeciei inter ſe.

PROP. VIII. THEOR. VIII.

Si in triangulo rectangulo ex angulo recto ad baſim perpendicularis demittatur; hæc dividet triangulum in duo alia triangula quæ tum toti, quum inter ſe ſimilia erunt.



SIt triangulum ABC, rectum habens angulum in A ex quo demittatur ab baſim BC perpendicularis AD. Dico, perpendicularē iſtam AD dividere triangulum ABC in duo alia triangula ABD, ACD, quæ ſimilia ſunt, tum toti triangulo ABC. quum etiam inter ſe.

Quoniam enim in triangulis ABC, ABD anguli BAC, ADB ſunt recti, itemque angulus B communis; erunt & reliqui anguli ACB, BAD etiam æquales inter ſe. Quare triangula ABC, ABD, æquiangula erunt; atque adeo ſimilia. Similiter, quia in triangulis ACB, ACD, anguli BAC, ADC ſunt recti, itemque angulus C communis; erunt &-reliqui anguli ABC, CAD etiam

æqua-

æquales inter se: proindeque triangula ACB, ACD æquiangula erunt; atque adeo similia. Denique, quum in triangulis ADB, ADC ostensi sint æquales, tum anguli ABD, CAD, quum anguli BAD, ACD, sintque reliqui anguli ADB, ADC recti; erunt triangula ADB, ADC etiam æquiangula; atque adeo pariter similia inter se. Quare, si in triangulo rectangulo demittatur ex angulo recto ad basim perpendicularis, hæc dividet triangulum in duo alia triangula, quæ tum toti, quum inter se similia erunt. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM I.

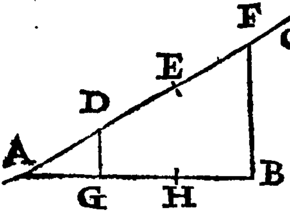
Hinc patet primo, unumquodque latus trianguli rectanguli medium esse proportionale inter hypothenusam, & segmentum, quod ei adjacet: nempe latus AB medium esse proportionale inter hypothenusam BC, & segmentum CD. Quum enim triangula ABC, ABD ostensa sint æquiangula; habebunt latera circa æquales angulos proportionalia; eritque adeo, ut BC, ad AB, ita AB ad BD. Atque ita quoque, quum ex ostensis æquiangula sint triangula ACB, ACD; erit ut BC ad AC ita AC ad CD.

COROLLARIUM II.

Liquet secundo, demissam, perpendicularem AD mediam esse proportionalem inter segmenta BD, CD. Triangula enim ABD, ADC *ostensa sunt inter se æquiangula. Quare latera habebuut circum æquales angulos proportionalia. Et propterea erit, ut BD ad AD, ita AD ad CD.*

PROP. IX. PROBL. I.

A data recta linea optatam partem abscindere.



DAta sit recta AB. Oportet ab ea optatã quamvis partem, puta tertiam, abscindere.

Ex puncto A ducatur recta AC, quæ efficiat cum AB quemvis angulum BAC. Tum super AC capiantur tot partes æquales cujusvis magnitudinis, quota pars abscindenda est ex AB: nempe in proposito exemplo capiantur tres partes æquales, quæ sint AD, DE, EF, Denique, juncta BF, ei per punctum D parallela (1) agatur DG. Dico, AG esse tertiam partem ipsius AB.

Quoniam enim in triangulo ABF ducta est recta DG parallela lateri BF; ea (2) secabit latera AB, AF proportionaliter in punctis G, & D; eritque propterea, ut AG ad GB, ita AD ad DF, sive etiam invertendo,

(1) *Prop.31.lib.1.* (2) *Prop. 2.hujus.*

do, ut GB ad AG, ita DF ad AD. Est autem componendo (1) ut AB ad AG, ita AF ad AD. Quare quemadmodum AF tripla est ipsius AD, ita & AB tripla erit ipsius AG. Ex data igitur recta AB abscissa est tertia pars AG. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

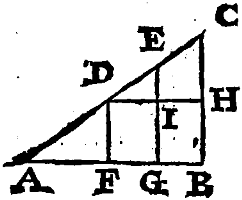
Quod, si ex AB abscindenda sit portio quæ sit ad AB, non ut unitas ad datum numerum, sed ut unus numerus ad alium, puta, ut 2 ad 3; tunc ducta similiter recta AC faciente cum AB angulum BAC, & sumptis adhuc super AC tribus portionibus æqualibus AD, DE, EF, ducenda erit per punctum E recta EH parallela ipsi BF. Nam quemadmodum AE ad AF est, ut 2 ad 3; ita in hac eadem ratione erit quoque AH ad AB.

PROP. X. PROBL. II.

Datam rectam lineam secare in partes proportionales partibus, in quas secta est alia data recta linea.

SIt recta AB insecta, AC vero secta in partes AD, DE, EC. Oportet, rectam AB secare in partes, quæ proportionales sint

(1) *Prop.18. lib.5.*



partibus AD, DE, EC.

Jungantur duæ datæ rectæ lineæ AB, AC ita, ut faciant angulum BAC, & a B ad C ducatur recta BC. Tum huic BC (1) parallelæ agantur DF, EG. Dico partes AF, FG, GB proportionales esse partibus AD, DE, EC.

Agatur enim per punctum D recta DH ipsi AB parallela. Et quoniam parallelogramma sunt DG, IB; erit (2) tum DI æqualis FG, cum IH æqualis GB: quare erit, ut DI ad IH (3) ita FG ad GB. Est autem (4) DI ad IH, ut DE ad EC. Erit igitur (5) ut FG ad GB ita DE ad EC. Et propterea partes FG, GB proportionales sunt partibus DE, EC. Sed partes AF, FG proportionales quoque sunt partibus AD, DE; quum sit ut AF ad FG, ita AD, ad DE divisa est igitur AB in partes AF, FG, GB proportionales partibus AD, DE, EC, in quas secta est altera AC. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

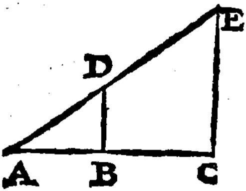
Hoc problema viam nobis aperit, dividendi datam rectam AB in quotcumque partes æquales. Si enim alteram ei adjungamus AC, fa-

(1) *Prop.* 31. *lib.* 1.
(2) *Prop.* 34. *lib.* 1.
(3) *Prop.* 7. *lib.* 5.
(4) *Prop.* 2. *hujus.*
(5) *Prop.* 11. *lib.* 5.

facientem cum ipsa angulum BAC, super qua capiamus tot partes æquales AD, DE, EC, &c. in quot ipsa AB est dividenda; eo res redibit, ut dividamus AB in partes proportionales partibus AD, DE, EC, &c. Quod qua fiat ratione, jam in hoc problemate ostensum est.

PROP. XI. PROBL. III.

Duabus datis rectis lineis, tertiam proportionalem invenire.



Sint datæ duæ rectæ lineæ AB, BC Oportet, invenire tertiam, ad quam BC ita se habeat quemadmodum est AB ad BC.

Datæ rectæ lineæ AB BC disponantur in directum. Tum ipsi AC alia addatur AE, quæ faciat cum ea angulum CAE. Super AE porro capiatur AD æqualis ipsi BC. Ac denique, juncta BD, huic per punctum C (1) parallela agatur CE, conveniens cum AE in puncto E. Dico, DE esse tertiam proportionalem quæsitam.

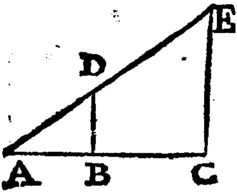
Quoniam enim in triangulo CAE ducta est recta BD parallela latari CE; erit quidem (2) ut AB ad BC, ita AD ad DE. Est autem ex constructione AD æqualis BC. Quare

(1) *Prop.*31. *lib.* 1. (2) *Prop.*1 *hujus.*

re erit ut AB ad BC, ita BC ad DE. Datis igitur duabus rectis lineis AB, BC, inventa est tertia DE, ad quam BC ita se habet quemadmodum est AB, ad BC. Quod erat faciendum.

PROP. XII. PROBL. IV.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem invenire.



Sint datæ tres rectæ lineæ, AB prima, BC secunda, AD tertia. Oportet invenire quartam, ad quam AD, ita se habeat, quemadmodum est AB ad BC.

Disponantur in directum duæ primæ AB, BC. Tum ipsi AC addatur tertia AD, quæ faciat cum ea angulum CAD. Jungatur porro BD. Ac denique per punctum C ducatur (1) recta CE parallela ipsi BD, quæ conveniat cum AD in puncto E. Dico, DE esse quartam proportionalem quæsitam.

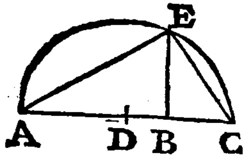
Quoniam enim in triangulo CAE ducta est recta BD parallela lateri CE; erit (2) ut AB ad BC, ita AD ad DE. Quare datis tribus rectis lineis AB, BC, AD inventa est quarta DE, ad quam AD eamdem

(1) *Prop.* 31. *lib.* 1. (2) *Prop.* 2. *hujus*.

dem habet rationem, quam AB ad BC. Quod erat faciendum.

PROP. XIII. PROBL. V.

Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem invenire.



DAtæ ſint duæ rectæ AB, BC. Oportet invenire mediam proportionalem, hoc eſt aliam rectam lineam, ad quam AB habeat eamdem rationem, quam ipſa habet ad BC.

Diſponantur in directum duæ datæ rectæ lineæ AB, BC. Tum ſecta AC (1) bifariam in D, deſcribatur centro D, & intervallo DA, ſeu DC ſemicirculus AEC. Ac denique ex puncto B erigatur perpendicularis BE (2) quæ occurrat circumferentiæ deſcripti ſemicirculi in E. Dico perpendicularem iſtam BE eſſe mediam proportionalem quæſitam.

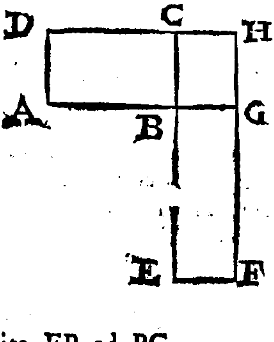
Jungantur enim rectæ AE, CE; & rectus erit (3) angulus AEC, velut in ſemicirculo exiſtens. Unde, quum in triangulo rectangulo AEC ex angulo recto ad hypothenuſam demiſſa ſit perpendicularis EB; erit (4) ut AB ad BE, ita BE ad BC. Et pro-

(1) *Prop.10.lib.1.* (2) *Prop.11.lib.1.*
(3) *Prop.31.lib.3.* (4) *Coroll.2.prop.8.hujus.*

propterea datis duabus rectis lineis AB, BC inventa est media proportionalis BE. Quod erat faciendum.

PROP. XIV. THEOR. IX.

Parallelogramma, quæ æqualia sunt, & habent unum angulum uni angulo æqualem, habent quoque latera circum æquales angulos reciproce proportionalia. Et vicissim parallelogramma, quæ circum æquales angulos latera habent reciproce proportionalia, sunt etiam æqualia inter se.



Sint duo parallelogramma æqualia AC, BF, quæ habeant angulū ABC æqualem angulo EBG. Dico, eadem parallelogramma habere quoque latera circum æquales angulos reciproce proportionalia, hoc est esse, ut AB ad BG, ita EB ad BC.

Conjungantur parallelogramma ad angulos æquales, ita ut latera AB, BG jaceant in directum. Et quoniam æquales sunt anguli ABC, EBG; erunt (1) etiam in directum latera EB, BC. Extendantur denique

(1) *Schol.prop.15.lib.1.*

que DC, FG usque donec conveniant in H, tertiumque constituant parallelogrammum BH.

Quia igitur parallelogramma AC, BF æqualia sunt inter se; erit (1) ut AC ad BH, ita BF ad BH. Sed AC est ad BH (2), ut AB ad BG; itemque BF est ad BH, ut EB ad BC. Quare erit (3) ut AB ad BG, ita EB ad BC.

Sed eadem parallelogramma AC, BF habeant per contrarium circa æquales angulos ABC, EBG latera reciproce proportionalia: adeo nempe, ut AB sit ad BG, veluti est EB ad BC. Dico parallelogrammum AC æquale esse parallelogrammo BF.

Fiat enim eadem constructio; eritque ut AB ad BG, ita parallelogrammum AC ad parallelogrammum BH (4); pariterque ut EB ad BC, ita parcllelogrammum BF ad parallelogrammum BH. Est autem ex hypothesi, ut AB ad BG, ita EB ad BC. Quare erit (5) ut parallelogrammum AC ad parallelogrammum BH, ita parallelogrammum BF ad idem parallelogrammum BH. Et propterea, quum parallelogramma duo AC, BF habeant eamdem rationem ad tertium BH; erit (6) parallelogrammum AC æquale parallelogrammo BF.

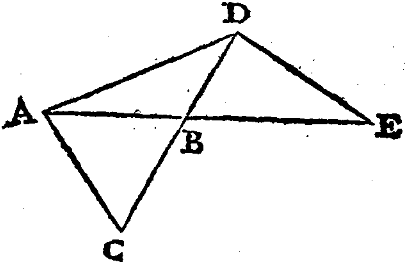
Parallelogramma igitur, quæ æqualia sunt, & habent unum angulum uni angulo æqualem,

(1) *Prop.7.lib.1.* (2) *Prop.1.hujus.*
(3) *Prop.11.lib.5.* (4) *Prop.1.hujus.*
(5) *Prop.11.lib.5.* (6) *Prop.9.lib.5.*

lem, habent quoque latera circum æquales angulos reciproce proportionalia. Et viciſſim parallelogramma, quæ circum æquales angulos latera habent reciproce proportionalia, ſunt etiam æqualia inter ſe. Quod erat demonſtrandum.

PROP. XV. THEOR. X.

Triangula, quæ æqualia ſunt, & habent unum angulum uni angulo æqualem, habent quoque latera circum æquales angulos reciproce proportionalia. Et viciſſim triangula, quæ circum æquales angulos latera habent reciproce proportionalia; ſunt etiam æqualia inter ſe.



Sint duo triangula æqualia ABC, DBE, quæ habeant angulum ABC æqualem angulo DBE. Dico, eadem triangula habere quoque latera circum æquales angulos proportionalia reciproce; hoc eſt eſſe, ut AB ad BE, ita BD ad BC.

Conjungantur triangula ad angulos æquales,

les, ita ut latera AB, BE jaceant in directum. Et quoniam æquales sunt anguli ABC, DBE; erunt (1) etiam in directum latera CB, BD. Denique jungatur AD ita ut oriatur tertium triangulum ABD.

Quia igitur triangula ABC, DBE æqualia sunt inter se; erit (2) ut triangulum ABC ad triangulum ABD, ita triangulum DBE ad idem triangulum ABD. Sed triangulum ABC est ad triangulum ABD, ut CB ad BD (3); itemque triangulum DBE est ad triangulum ABD, ut EB ad BA. Quare erit (4) ut CB ad BD ita EB ad BA.

Sed eadem triangula ABC, DBE habeant per contrarium circa æquales angulos ABC, DBE latera reciproce proportionalia: adeo nempe, ut AB sit ad BE, veluti est DB ad BC. Dico, triangulum ABC æquale esse triangulo DBE.

Fiat enim eadem constructio; eritque ut AB ad BE, ita triangulum ABD ad triangulum DBE (5); pariterque, ut DB ad BC, ita triangulum ABD ad triangulum ABC. Est autem ex hypothesi, ut AB ad BE, ita DB ad BC. Quare erit (6) ut triangulum ABD ad triangulum DBE, ita idem triangulum ABD ad triangulum ABC. Et propterea, quum ad triangula ABC, DBE habeat eamdem rationem idem triangulum ABD; erit (7) trian-

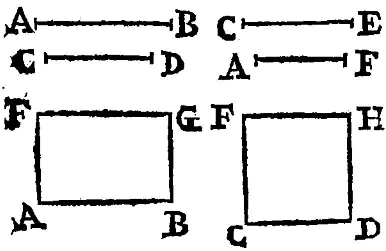
(1) *Sch.prop.15.lib.1.* (2) *Prop.7.lib.5.*
(3) *Prop.1.hujus.* (4) *Prop.11.lib.5.*
(5) *Prop.1.hujus.* (6) *Prop.11.lib.5.*
(7) *Prop.9.lib.5.*

triangulum ABC æquale triangulo DBE.

Triangula igitur, quæ æqualia ſunt, & habent unum angulum uni angulo æqualem, habent quoque latera circum æquales angulos reciproce proportionalia. Et viciſſim triangula, quæ circum æquales angulos latera habent reciproce proportionalia, ſunt etiam æqualia inter ſe. Quod erat demonſtrandum.

PROP. XVI. THEOR. XI.

Si ſint quatuor rectæ lineæ proportionales; erit rectangulum ex mediis æquale rectangulo ex extremis. Et viciſſim, ſi rectangulum ex mediis æquale ſit rectangulo ex extremis, quatuor rectæ lin eæ proportionales erunt.



Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB prima, CD ſecunda, CE tertia, & AF quarta ita nempe, ut AB ſit ad CD, ut eſt CE ad AF. Dico, rectangulum contentum ſub mediis CD, CE æquale eſſe rectangulo contento ſub extremis AB, AF.

Eſto enim AG rectangulum contentum ſub extremis AB, AF, & CH rectangulum contentum ſub mediis CD, CE.

Quia

Quia igitur AG, CH ſunt duo parallelogramma, quæ rectos habent angulos FAB, FCD, & in quibus AB eſt ad CD, ut CF ad AF; habebunt ea circum æquales angulos latera reciproce proportionalia. Quare parallelogrammum AG æquale (1) erit parallelogrammo CH; hoc eſt rectangulum ſub extremis AB, AF æquale erit rectangulo ſub mediis CD, CE.

Sed viciſſim ſint æqualia inter ſe parallelogramma duo rectangula AG, CH. Dico, proportionales eſſe quatuor rectas lineas AB, CD, CF, AF; hoc eſt AB eſſe ad CD, ut eſt CF ad AF. Quoniam enim parallelogramma duo AG, CH ſunt æqualia, & habent etiam angulos FAB, FCD rectos, adeoque æquales; habebunt quoque (2) latera circum æquales angulos reciproce proportionalia. Quare erit, ut AB ad CD, ita FC ad AF.

Si igitur ſint quatuor rectæ lineæ proportionales; erit rectangulum ex mediis æquale rectangulo ex extremis. Et viciſſim ſi rectangulum ex mediis æquale ſit rectangulo ex extremis; quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

Vera eſt etiam hæc propoſitio, ſi parallelogramma facta ex mediis, & extremis non ſint rectangula, ſed utcumque æquiangula: dummodo tamen æquales ſint anguli illi, qui ſub ipſis

---

(1) *Prop.14.hujus.* (2) *Prop.14.hujus.*

ipsis rectis lineis continentur. Nam perspicuum est eamdem demonstrationem etiam in hoc casu sibi locum vindicare.

PROP. XVII THEOR. XII.

Si sint tres rectæ lineæ proportionales; erit rectangulum ex extremis æquale quadrato, quod describitur a media. Et vicissim, si rectangulum ex extremis, æquale sit quadrato a media descripto; tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ lineæ proportionales, AB prima, CD secunda, AF tertia: ita nempe, ut AB sit ad CD, ut est CD ad AF. Dico, rectangulum AG contentum sub extremis AB, AF æquale esse quadrato CH descripto super media CD.

Quoniam enim AG CH sunt duo parallelogramma, quæ rectos habent angulos FAB, FCD, & in quibus AB est ad CD, ut CF, seu CD ad AF; habebunt ea circum æquales angulos latera reciproce proportionalia. Quare parallelogrammum AG (1) æquale erit parallelogrammo CH; Hoc est rectangulum sub extremis AB, AF æquale erit quadrato, quod describitur a media CD.

Sed vicissim sit rectangulum AG contentum sub extremis AB, AF æquale quadrato CH, quod describitur a media CD, Dico, proportionales esse tres rectas lineas AB, CD, AF;

(1) *Prop. 14. hujus.*

AF; hoc est AB esse ad CD, ut est CD ad AF.

Quoniam enim paralleogramma duo AG, CH sunt æqualia, & habent etiam angulos FAB, FCD rectos, adeoque æquales; habebunt quoque latera circum æquales angulos(1) reciproce proportionalia. Quare erit, ut AB ad CD, ita CF ad AF. Est autem CH, quadratum descriptum ex CD; adeoque CF est æqualis CD. Erit igitur, ut AB ad CD, ita CD ad AF.

Si igitur sint tres rectæ lineæ proportionales; erit rectangulum ex extremis æquale quadrato quod describitur a media; vicissim, si rectangulum ex extremis æquale sit quadrato a media descripto, tres rectæ lineæ proprtionales erunt. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

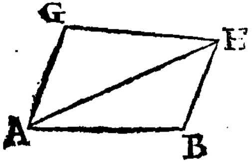
Vera est etiam hæc propositio, si parallelogrammum factum ex extremis, non sit rectangulum, sed utcumque obliquangulum; & a media non quadratum, sed rhomboides ei æquiangula describatur. Nam eamdem demonstrationem etiam in hoc casu sibi locum vindicare, nemo non videt.

PROP. XVIII. PROBL. VI.

A data recta linea dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum descibere.

DAta sit recta linea AB, datum vero rectilineum CDFE. Oportet, super AB

(1) *Prop.* 14. *hujus.*



AB describere rectilineum, quod sit simile similiterque positum rectilineo dato GDFE.

Dividatur rectilineum datum per rectam CF in duo triangula CDF, CEF. Deinde fiat angulus (1) ABH æqualis angulo CDF, & angulus BAH æqualis angulo DCF; coëantque rectæ AH, BH in H; ubi efficient angulum AHB æqualem angulo CFD; ipsumque adeo triangulum ABH æquiangulum erit triangulo CDF. Similiterque autem fiat angulus GAH æqualis angulo ECF, & angulus AHG æqualis angulo CFE; coeantque rectæ AG, HG in G ubi constituent angulum AGH æqualem angulo CEF; eritque adeo triangulum AGH æquiangulum triangulo CEF. Hoc facto, dico, rectilineum ABHG esse simile similiterque positum rectilineo dato CDFE.

Quum enim ex constructione angulus BAH æqualis sit angulo DCF, & angulus GAH æqualis angulo ECF; erit totus angulus BAG æqualis toti angulo DCE. Atque ita quoque, quia ex constructione angulus AHB æqualis est angulo CFD, & angulus AHG æqualis angulo CFE erit totus angulus BHG æqualis toti angulo DFE. Est autem & angulus ABH æqualis angulo CDF, nec non angulus AGH æqualis angulo CEF. Quare rectilineum ABHG æqui-

(2) *Prop.23.lib.1,*

G æquiangulum erit rectilineo CDFE.

Rursus quum triangula ABH, CDF æquiangula sint erit ut AB ad BH (1). ita CD ad DF; & ut BH ad HA, ita DF ad FC. Sed propter triangula AGH, CEF similiter æquiangula, AH est ad GH, ut CF ad EF, & GH est ad GA, ut EF ad EC. Quare erit (2) ut BH ad GH, ita DF ad EF, & ut GA ad AB, ita EC ad CD. Unde, quum rectilinea duo ABHG, CDFE, non modo sint æquiangula verum etiam latera habeant circum æquales angulos proportionalia; erunt ea similia, similiterque descripta. Et propterea super datam rectam AB descriptum est rectilineum ABHG simile similiterque positum dato rectilineo CDFE. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

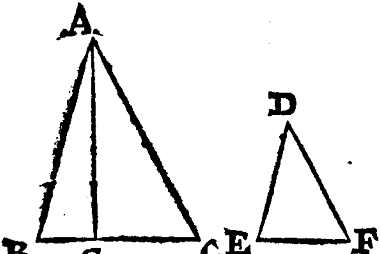
Ne Tyrones hic hæreant, monendi sunt, quod duo rectilinea, super rectas duas descripta dicantur a Geometris similia, similiterque posita, quando super ipsas rectas constituuntur anguli æquales; & reliqui æquales eodem semper ordine sese consequuntur: ita, ut & latera homologa ab iisdem rectis incipiant, eodemque quoque ordine semper subsequantur. Cæterum, si datum rectilineum contineat plura latera, quam quatuor; tunc ex aliquo ejus angulo ad omnes angulos oppositos ducendæ sunt totidem rectæ lineæ. Nam,

(1) *Prop.4.hujus.* (2) *Prop.22.lib.5.*

quum adhuc rectilineum in plura triangula divisum oriatur; fiet problemati satis, si singulis illis triangulis alia æquiangulá totidem eodem ordine disposita describantur.

PROP. XIX. THEOR. XIII.

Triangula similia sunt inter se in ratione duplicata laterum homologorum.



SInt ABC, DEF duo triãgula similia, quæ nempe habeant angulum ABC æqualem angulo DEF, angulum BCA æqualem angulo EFD, & angulum CAB æqualem angulo FDE, & in quibus sit etiam ut AB ad BC, ita DE ad EF; ut BC ad CA, ita EF ad FD; & ut CA ad AB, ita FD ad DE. Dico, triangula ABC, DEF habere inter se rationem duplicatam ejus, quam habent latera homologa BC, EF.

Ponatur enim BG (1) tertia proportionalis in ordine duarum BC, EF: adeo nempe, ut BC sit ad EF ut est EF ad BG; junga-

(1) *Prop.* 11. *hujus*

gaturque AG. Et quoniam AB est ad BC, ut DE, ad EF; erit (1) permutando, ut AB ad DE, ita BC ad EF. Est autem ex constructione ut BC ad EF, ita EF ad BG. Quare erit, ut AB ad DE, ita EF ad BG (2). Et propterea, quum duo triangula ABG, DEF habeant latera circum æquales angulos reciproce proportionalia, erit triangulum ABG (3) æquale triangulo DEF.

Jam triangula ABC, ABG habent eamdem altitudinem. Quare erit (4) ut triangulum ABC ad triangulum ABG; ita basis BC ad basim BG. Ostensum est autem triangulum ABG æquale triangulo DEF. Erit igitur quoque, ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita BC ad BG. Sed ob rectas BC, EF, BG in continua proportione exsistentes, ratio, quam habet BC ad BG, duplicata est ejus, quam habet BC ad EF. Quare triangulum ABC ad triangulum DEF (5) erit etiam in duplicata ratione ejus, quam habet BC ad EF. Similia igitur triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum. Qud erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

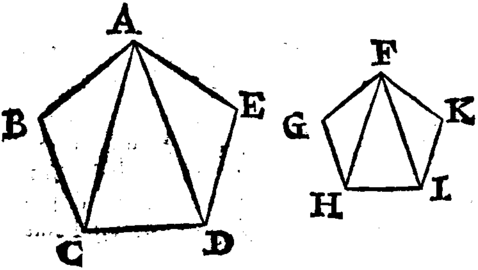
Patet hinc, quod si tres rectæ lineæ fuerint

(1) *Prop.16.lib.5.* (2) *Prop.11.lib.5.*
(3) *Prop.27.hujus.*
(4) *Prop.30.hujus.*
(5) *Prop.4.lib.1.*

rint proportionales; triangula similia, similiterque descripta super primam, & secundam habere inter se eamdem rationem, quam habet prima ad tertiam. Tres etenim rectæ lineæ BC, EF, BG sunt proportionales ex constructione: & ostensum est in hoc theoremate triangulum ABC esse ad triangulum DEF, ut est BC ad BG.

PROP. XX. THEOR. XIV.

Polygona similia dividuntur in triangula numero æqualia similia, & homologa totis; duplicatamque habent rationem laterum homologorum.



Sint ABCDE, FGHIK duo polygona similia, habentia angulum ABC æqualem angulo FGH, angulum BCD æquale angulo GHI, atque ita deinceps; & in quibus AB sit ad BC, ut FG ad GH; BC sit ad CD, ut GH ad HI; atque ita de aliis. Dico primo, polygona ista dividi in triangula numero æqualia.

Ex

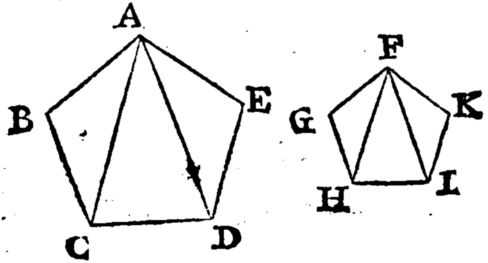
Ex punctis enim A, & F, in quibus consistunt anguli æquales BAE, GFK, ducantur ad angulos oppositos rectæ totidem. Et quoniam, propter similitudinem polygonorum, quot anguli in polygono ABCDE oppositi sunt angulo BAE totidem in polygono FGHIK opponuntur angulo GFK; fiet hinc, ut si in uno duci possint ex puncto A duæ rectæ AC, AD, in altero ex puncto F duæ etiam FH, FI duci queant & non plures; propterea, quemadmodum polygonum ABCDE per ductas rectas scinditur in tria triangula ABC, ACD, ADE; ita quoque polygonum FGHIK per ductas rectas dividetur in tria, & non plura triangula, quæ erunt FGH, FHI, FIK.

Dico secundo, triangula ista esse similia inter se; hoc est triangulum ABC simile triangulo FGH, triangulum ACD simile triangulo FHI, & triangulum ADE simile triangulo FIK.

Nam in triangulis ABC, FGH ex hypothesi angulus ABC æqualis est angulo FGH, & latera AB, BC proportionalia sunt lateribus FG, GH. Quare, quum ea habeant unum angulum uni angulo æqualem, & latera circum æquales angulos proportionalia; habebunt quoque reliquos angulos BAC, BCA æquales reliquis GFH, GHF; & ipsa adeo triangula ABC, FGH similia erunt inter se (1). Simili ratione ostendentur similia triangula ADE, FIK; quum habeant ex hypothesi angulum DEA æqualem an-

 gulo

(1) *Prop.6.hujus.*



gulo IKF, & latera DE, EA proportionalia lateribus IK, KF: propter quorum triangulorum ſimilitudinem erit angulus DAE æqualis angulo IFK, & angulus ADE æqualis angulo FIK. Quum autem anguli BCD, CDE ex hypotheſi æquales ſint angulis GHI, HIK, & anguli ACB, ADE oſtenſi ſint æquales angulis FHG, FIK; erunt reliqui anguli ACD, ADC æquales reliquis angulis FHI, FIH. Quare triangula ACD, FHI æquiangula erunt, habebuntque latera circum æquales angulos proportionalia, atque adeo ſimilia (1) erunt inter ſe.

Dico tertio, triangula iſta eſſe homologa polygonis totis; hoc eſt, quodlibet triangulorum unius polygoni eſſe ad triangulum ſibi correſpondens alterius polygoni, ut eſt primum polygonum ad ſecundum.

Quum enim triangula ABC, FGH oſtenſa ſint ſimilia inter ſe; erit (2) triangulum ABC

(1) *Prop.4.hujus.* (2) *Prop.19.hujus.*

ABC ad triangulum FGH in duplicata ratione laterum homologorum AC, FH. Et ſimiliter, quia ex oſtenſis ſimilia ſunt triangula ACD, FHI; erit triangulum ACD ad triangulum FHI in duplicata ratione eorumdem laterum homologorum AC, FH. Quare erit (1) ut triangulum ABC ad triangulum FGH, ita triangulum ACD ad triangulum FHI. Non diſſimili autem ratione oſtendetur, triangulum ACD eſſe ad triangulum FHI, ut eſt triangulum ADE ad triangulum FIK. Erunt igitur triangula unius polygoni proportionalia triangulis alterius: ita quidem, ut triangula unius ſint antecedèntia, triangula alterius conſequentia. Jam vero, ſi fuerint quotcumque magnitudines, quotcumque magnitudinibus proportionales, ut eſt una antecedentium ad unam conſequentium, ita ſunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes (2). Erit igitur, ut quodlibet triangulum polygoni ABCDE ad correſpondens ſibi triangulum polygoni FGHIK, ita polygonum ABCDE ad polygonum FGHIK.

Dico denique, polygona ipſa habere inter ſe duplicatam rationem ejus, quam habent inter ſe duo ipſorum latera homologa AB, FG.

Oſtenſum eſt enim, polygonum ABCDE eſſe ad polygonum FGHIK, ut eſt triangulum ABC ad triangulum FGH. Sunt autem ex oſtenſis triangula ABC, FGH ſimilia inter ſe; atque adeo triangulum ABC eſt

(1) *Prop.11.lib.5.* (2) *Prop.12.lib.5.*

ad triangulum FGH in duplicata ratione laterum homologorum AB, FG. Quare in eadem duplicata ratione erit etiam polygonum ABCDE ad polygonum FGHIK Et propterea polygona similia, non modo dividuuntur in triangula numero æqualia, similia, & homologa totis; verum etiam duplicatam habent rationem laterum homologorum. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

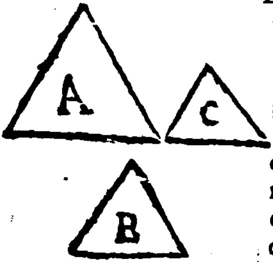
Atque hinc modo patet, quod si fuerint tres rectæ lineæ proportionales, polygona similia, similiterque descripta super primam, & secundam habeant inter se eamdem rationem quam prima habet ad tertiam. Sunt enim per hoc theorema in duplicata ratione ejus, quæ est inter primam & secundam. Sed in hac eadem duplicata ratione est etiam prima ad tertiam; quum tres rectæ lineæ ponantur proportionales: Quare, & ipsa polygona erunt inter se, ut prima ad tertiam.

PROP. XXI. THEOR. XV.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt.

EIdem rectilineo A simile sit tam rectilineum B, quam rectilineum C. Dico, rectilinea B, & C similia esse inter se.

Quum enim, propter similitudinem, angulis



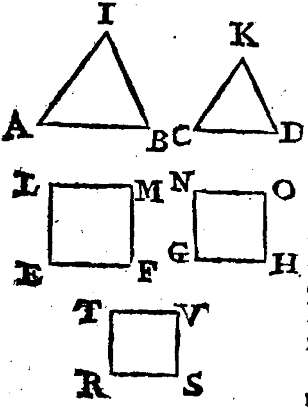
gulis rectilinei A æquales sint tum anguli rectilinei B, cum anguli rectilinei C; erunt anguli rectilinei B æquales angulis rectilinei C. Et rursus, quia, ob eamdem similitudinem, lateribus rectilinei A proportionalia sunt, tum latera rectilinei B, cum latera rectilinei C; erunt (1) latera rectilinei B proportionalia lateribus rectilinei C. Unde, quum duo rectilinea B, & C sint æquiangula, habeantque latera circum æquales angulos proportionalia; similia ea erunt inter se. Et propterea, quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt. Quod erat demonstrandum.

PROP. XXII. THEOR. XVI.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; erunt rectilinea similia, similiterque ab eis descripta etiam proportionalia. Et vicissim, si rectilinea proportionalia sunt; ipsæ rectæ lineæ etiam proportionales erunt.

SInt quatuor rectæ lineæ proportionales AB prima, CD secunda, EF tertia, GH quarta. Describantur autem super primam, & secundam duo quæcumque rectilinea AIB,

(1) *Prop.* 11. *lib.* 5.



CKD similia, similiterque posita; & alia duo ELMF, GNOH itidem similia, similiterque posita super tertiam, & quartam. Dico, rectilineum AIB esse ad rectilineum CKD, ut est rectilineum ELMF ad rectilineum CNOH.

Inveniatur enim, tum rectis AB,CD tertia proportionalis, quæ dicatur P, cum rectis EF, GH tertia proportionalis, quæ dicatur Q (1). Erit igitur, ut AB ad CD, ita CD ad P; & ut EF ad GH, ita GH ad Q. Est autem ex hypothesi, ut AB ad CD, ita EF ad GH. Quare erit etiam (2) ut CD ad P, ita GH ad Q; atque adeo ex æquali ordinando (3) erit ut AB ad P, ita EF ad Q. Jam vero rectilineum AIB est ad rectilineum CKD, ut AB ad P (4); itemque rectilineum ELMF est ad rectilineum GNOH, ut EF ad Q. Quare erit (5) ut rectilineum AIB ad rectilineum CKD, ita rectilineum ELMF ad rectilineum GNOH.

Per

(1) *Prop.*11.*hujus.* (2) *Prop.*11.*lib.*5.
(3) *Prop.*22.*lib.*5. (4) *Corol.prop.*20.*hujus.*
(5) *Prop.*11.*lib.*5.

Per contrarium autem ponantur proportionalia quatuor rectilinea similia, similiterque descripta a rectis AB, CD, EF, GH. Dico, rectas istas etiam inter se proportionales esse: adeo nempe, ut AB sit ad CD, veluti est EF ad GH.

Inveniatur enim tribus rectis lineis AB, CD, EF quarta proportionalis RS (1), super quam describatur rectilineum RTVS simile, similiterque positum rectilineo ELMF (2). Et quoniam AB est ad CD, ut EF ad RS; per ea, quæ jam ostensa sunt, erit ut rectilineum AIB ad rectilineum CKD, ita rectilineum ELMF ad rectilineum RTVS. Ex hypothesi autem, ut est rectilineum AIB ad rectilineum CKD, ita est rectilineum ELMF ad rectilineum GNOH. Erit igitur, ut rectilineum ELMF ad rectilineum RTVS (3), ita idem rectilineum ELMF ad rectilineum GNOH: proindeque rectilinea duo RTVS, GNOH æqualia erunt inter se (4). Sunt autem duo ista rectilinea similia, similiterque descripta a rectis RS, GH; quum utrumque sit simile, similiterque positum rectilineo ELMF, descripto a recta EF. Quare æquales quoque erunt rectæ RS, GH. Et propterea, quum sit AB ad CD, ut EF ad RS; erit etiam AB ad CD. ut EF ad GH.

Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; erunt rectilinea similia, similiterque ab eis descripta etiam proportiona-

Q 6 lia.

(1) *Prop.12.hujus.* (2) *Prop.18.hujus.*
(3) *Prop.11.lib.5.* (4) *Prop.9.lib.5.*

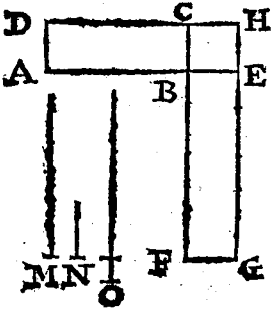
lia. Et vicissim, si rectilinea proportionalia sunt; ipsæ rectæ lineæ etiam proportionales erunt. Quod ostendere oportebat.

SCHOLIUM.

Quod autem æqualia rectilinea similia similiterque descripta, æqualia sunt RTVS, GNOH, consistant super rectas æquales RS, GH, ostendetur in hunc modum. Quoniam enim duo illa rectilinea sunt similia, similiterque descripta a rectis RS, GH; erunt ea inter se in duplicata ratione ipsarum RS, GH. Sed ratio rectilineorum est æqualitatis; quum eadem rectilinea ponantur etiam æqualia. Quare duplicata ratio rectarum RS, GH pariter æqualitatis erit: quod fieri non potest, nisi ipsæ rectæ RS, GH fuerint æquales.

PROP. XXIII. THEOR. XVII.

Parallelogramma æquiangula habent inter se rationem ex lateribus compositam.



Sint parallelogramma duo AC, BG, quæ habeant angulum ABC æqualem angulo EBF. Dico, eam habere rationem inter se duo ista parallelogramma, quæ componitur ex lateribus eorundem, hoc est ex AB ad BE, & ex

& ex CB ad BF.

Conjungantur parallelogramma ad angulos æquales, ita ut AB, BE jaceant in directum. Et quoniam æquales sunt anguli ABC, EBF; erunt etiam (1) in directum rectæ CB, BF. Producantur deinde latera DC, GE usque donec conveniant in H, & constituant tertium parallelogrammum BH.

Sumatur jam recta quælibet M; & fiat (2), ut AB ad BE; ita M ad N; itemque ut CB ad BF, ita N ad O. Quia igitur AC est ad BH, ut AB ad BE, & AB est ad BE, ut M ad N: erit (3) ut AC ad BH, ita M ad N. Rursus quia BH est ad BG, ut CB ad BF; & CB est ad BF, ut N ad O: erit, ut BH ad BG, ita N ad O.

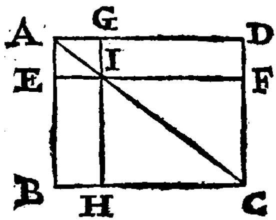
Et quoniam AC est ad BH, ut M ad N; & BH est ad BG, ut N ad O: erit ex æquali ordinando (4), ut AC ad BG, ita M ad O. Jam vero M est ad O in ratione composita ex M ad N, & ex N ad O; sive etiam in ratione composita ex AB ad BE, & ex CB ad BF, quare AC ad BG (5) erit etiam in ratione composita ex AB ad BE, & ex CB ad BF. Et propterea parallelogramma æquiangula habent inter se rationem ex lateribus compositam. Quod erat ostendendum.

PROP.

(1) *Sch.Prop.15.lib.1.* (2) *Prop.12.hujus.*
(3) *Prop.11.lib.5.* (4) *Prop.22.lib.5.*
(5) *Prop.11.lib.5.*

PROP. XXIV. THEOR. XVIII.

Parallelogramma, quæ sunt circa diametrum alterius, tum toti, cum inter se similia sunt.



SIt parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet ejus punctum I agantur rectæ EF, GH parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico, parallelogramma circa diametrum EG, FH, similia esse, tum toti BD, cum etiam inter se.

Quoniam enim rectæ EF, BC sunt parallelæ; erit (1) angulus exterior AEI æqualis interiori, & opposito ad eamdem partem ABC. Pariterque, quia rectæ GH, DC sunt parallelæ; erit angulus exterior AGI æqualis interiori, & opposito ad eamdem partem ADC. Unde, quum duo parallelogramma EG, BD habeant communem angulum A & prætera duos alios angulos æquales duobus aliis angulis, alterum alteri; habebunt quoque quartum æqualem quarto. Et propterea æquiangula erunt inter se. Sed habent etiam latera circum æquales angulos proportionalia, quum sit (2) ut AE ad EI, ita AB ad BC; & ut AG ad GI, ita AD ad DC. Quare paral-

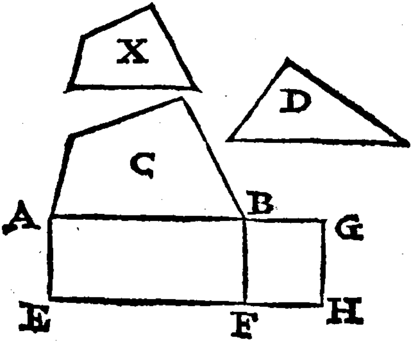
(1) *Prop.29.hujus.* (2) *Prop.2. hujus.*

parallelogramma duo EG, BD similia erunt inter se.

Eadem ratione ostendetur, parallelogrammum FH esse etiam simile parallelogrammo BD. Sed quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se (1) similia sunt. Quare parallelogramma EG, FH etiam similia erunt inter se. Et propterea parallelogramma, quæ sunt circa diametrum alterius, tum toti, cum inter se similia sunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXV. PROBL. VII.

Rectilineum constituere, quod sit simile uni dato, & æquale alteri dato.



DAta sint duo rectilinea C, & D. Oportet, constituere tertium, quod simile quidem sit ipsi C, æquale vero alteri D.

Super AB unum latus rectilinei C (2) constituantur parallelogrammum AF in quovis angu-

(1) *Prop.21.hujus.* (2) *Prop.13.hujus.*

angulo, æquale ipsi rectilineo C. Et super BF constituatur aliud parallelogrammum BH, æquale alteri rectilineo D, quod tamen habeat angulum FBG æqualem angulo EAB. Inveniatur deinde inter AB, & BG (1) media proportionalis X, super quam constituatur rectilineum X (2) simile, similiterque positum ipsi C. Dico X esse rectilineum quæsitum.

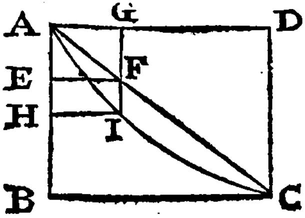
Quum enim rectæ AB, X, BG sint proportionales, erit rectilineum C ad rectilineum X (3), ut AB ad BG. Sed AB est ad BG (4), ut parallelogrammum AF ad parallelogrammum BH, sive etiam ut rectilineum C ad rectilineum D. Quare erit (5) ut rectilineum C ad rectilineum X, ita idem rectilineum C ad rectilineum D. Et propterea rectilineum X æquale erit rectilineo D. Est autem idem rectilineum X simile ipsi C. Datis igitur duobus rectilineis C, & D, constitutum est tertium X, simile quidem ipsi C, æquale vero ipsi D. Quod erat faciendum.

PROP. XXVI. THEOR. XIX.

Si ex parallelogrammo aliud auferatur, quod communem cum eo angulum habens, sit eidem simile, similiterque positum; consistet etiam cum illo circa eamdem diagonalem.

Sit parallelogrammum ABCD, ex quo auferatur aliud parallelogrammum AEFG, quod

(1) *Prop.18.hujus.* (2) *Corol.prop.20.hujus.*
(3) *Prop.1.hujus.* (4) *Prop.11.lib.5.*
(5) *Prop.9.lib.5.*



quod habens cum eo communem angulum A, ſit eidem ſimile, ſimiliterque poſitum. Dico, ablatum parallelogrammum EG conſiſtere circa eamdem diagonalem cum toto BD.

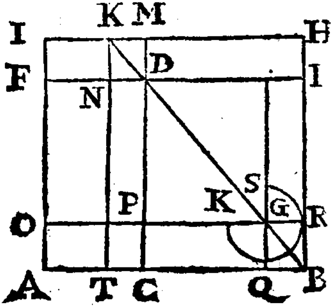
Sit enim AC diagonalis ipſius BD, quæ ſi non tranſeat per punctum F, ſecet latus GF, productum ſi opus in I, ex quo ducatur (1) IH ipſi EF parallela. Et quoniam BD, HG ſunt parallelogramma, quæ conſiſtunt circa eamdem diametrum AIC; erunt ea (2) ſimilia ſimiliterque poſita inter ſe. Sed eidem parallelogrammo BD eſt etiam ex hypotheſi ſimile, ſimiliterque poſitum parallelogrammum EG. Quare parallelogramma duo EG, HG erunt ſimilia (3) ſimiliterque poſita inter ſe. Et propterea erit, ut AG ad AE, ita AG ad AH: unde ſequitur (4) AE, AH æquales eſſe inter ſe: quod eſt abſurdum. Non igitur diagonalis AC tranſit per aliud punctum, quam F: & proinde ſi ex parallelogrammo aliud auferatur, quod communem cum eo angulum habens, ſit eidem ſimile, ſimiliterque poſitum; conſiſtet etiam cum illo circa eamdem diagonalem. Quod oſtendere oportebat.

PROP.

(1) *Prop.3.lib.1.* (2) *Prop.24.hujus.*
(3) *Prop.21.hujus.* (4) *Prop.9.lib.3.*

PROP. XXVII. THEOR. XX.

Omnium parallelogrammorum, quæ ad eamdem rectam applicata, deficiunt parallelogrammis alicui dato similibus, maximum est illud, quod applicatur super dimidium.



DEtur recta AB, & intelligatur mente parallelogrammum aliquod Z. Dico, omnium parallelogrammorum, quæ applicata ad rectam AB deficiunt parallelogrammis ipsi Z similibus, maximum esse illud, quod applicatur super dimidiam ipsius AB.

Secetur enim recta AB bifariam in C, & super BC constituatur parallelogrammum BCDE simile ipsi Z. Ducatur denique in hoc parallelogrammo diagonalis BD, per cujus etiam si vis productæ, punctum aliquod G, vel K ducantur rectæ OR, LQ, IH, KT, ipsis AB, BE parallelæ; eritque tum parallelogrammum BRGQ quum parallelogrammum BHKT simile quoque ipsi Z, quum sint circa eamdem diagonalem parallelogrammi BCDE. Quocirca, si compleantur parallelogramgramma duo AG, AK; ambo applicata ad eamdem rectam AB, ea deficient parallelogrammis similibus dato Z: proindeque eo res redit, ut ostendamus parallelogramma AG, AK majora esse parallelogrammo AD.

Et quidem, quum punctum G est in ipsa diagonali BD, ostendetur id in hunc modum. Quoniam CG est æquale (1) GE; apposito communi QR, erit CR æquale QE. Est autem CR (2) æquale AP, quum sint parallelogramma duo in æqualibus basibus, & in iisdem parallelis constituta. Quare erit AP æquale QE. Et propterea apposito rursus communi CG, erit AG æquale gnomoni KGS. Sed AD est æquale CE, quod majus est gnomone KGS. Quare erit AD majus quoque, quam AG.

Quotiescumque vero punctum K est in diagonali producta, idem ostenditur hoc pacto. Producatur DE usque donec cum AI in F conveniat. Et quoniam AC est æqualis CB, erit etiam FD æqualis DE; & propterea parallelogramma duo FM, DH inter se æqualia erunt. Est autem DH æquale DT; quum sint supplementa in parallelogrammo TH. Quare erit FM æquale DT; atque adeo DT majus, quam FK: Unde addito communi AN, erit AD majus quoque quam AK.

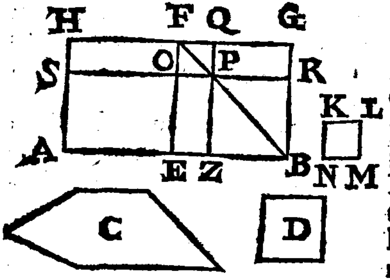
Omnium itaque parallelogrammorum, quæ ad eamdem rectam lineam applicata deficiunt parallelogrammis alicui dato similibus, maximum

(1) *Prop.* 43. *lib.* 1.
(2) *Prop.* 36. *lib.* 1.

ximum eſt illud, quod applicatur ſuper dimidiam. Quod erat demonſtrandum.

PROP. XXVIII. PROBL. VIII.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens parallelogrammo, quod alteri dato ſit ſimile. Oportet autem, ut datum rectilineum non majus ſit eo parallelogrammo, quod applicatum ſuper dimidiam datæ rectæ lineæ, deficit parallelogrammo, quod eidem dato ſit ſimile.



Data ſit recta AB, datum rectilineum C, & datum parallelogrammum D. Sit autem rectilineum C non majus parallelogrammo AF quod applicatum ſuper AE dimidiam ipſius AB, deficiat parallelogrammum EG, ſimili dato D. Oportet, ſuper AB applicare parallelogrammum æquale dato rectilineo C, & deficiens parallelogrammo alio, quod ſit ſimile dato D, vel etiam ipſi EG.

Quoniam enim datum rectilineum C non eſt majus parallelogrammo AF; proinde erit, vel ei æquale, vel eodem minus. Itaque, ſi rectilineum C ſit æquale parallegrammo AF,

quia

quia idem est applicatum super rectam AB, & deficit parallelogrammo EG, quod est simile dato D; erit AF parallelogrammum quæsitum. Quod si vero rectilineum C minus sit parallelogammo AF, inveniatur istius super illud excessus, qui vocetur X. Tum constituatur parallelogrammum KLMN (1) æquale excessui invento X, & simile ipsi D, vel EG: ita, ut propter similitudinem sit, ut EF ad FG, ita NK ad KL. Abscindantur deinde (2) ex EF, & FG portiones OF, FQ æquales ipsis NK, KL; & completo parallelogrammo OFQP, erit hoc æquale parallelogammo superius constituto KLMN, itemque simile, similiterque positum ipsi EG: quare cum eodem EG (3) consistet etiam circa eamdem diametrum BF. Denique producatur tum recta PO in directum versus R, & S cum recta QP in directum versus Z. Et dico, AZPS esse parallelogrammum quæsitum.

Nam, quod ita sit applicatum super rectam AB, ut deficiat parallelogrammo simili dato D; id quidem patet. Est enim ejus defectus parallelogrammum ZR, quod est simile (4); similiterque positum ipsi EG, quum consistant circa eamdem diametrum BF. Quod vero sit æquale rectilineo dato C id ostendetur in hunc modum. Quoniam parallelogrammum OQ, velut æquale ipsi NL, seu X, est excessus, quo parallelogrammum AF, seu EG superat datum rectilineum C; erit Gno-

(1) *Prop.25.hujus.* (2) *Prop.31.lib.1.*
(4) *Prop.26.hujus.* (1) *Prop.24.hujus.*

Gnomon reliquis ipsi C æqualis. Sed propter æqualitatem supplementorum PE, PG, est BO, seu AO æquale BQ; atque adeo AP æquale gnomoni. Quare erit parallelogrammmum AP æquale rectilineo C. Et propterea ad datam rectam lineam dato rectirectilineo æquale parallelogrammum applicatum est, deficiens parallelogrammo simili alteri dato. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM

Conditio illa, ut datum rectilineum non sit majus eo parallelogrammo, quod applicatum super dimidiam datæ rectæ lineæ, deficit parallelogrammo simili eidem dato, non est frustra ab Euclide apposita. Quum enim per propositionem precedentem ejuscemodi parallelogrammum sit maximum omnium applicatorum, dummodo defectus sint similes; perspicuum est ad datam rectam lineam non posse ullum applicari, quod æquale sit dato rectilineo, sed omnia minora fore.

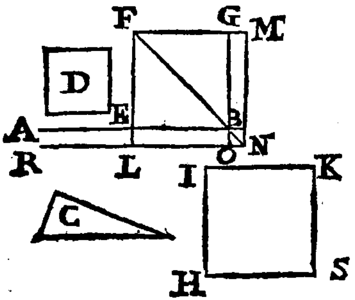
SCHOLIUM

Excessus duorum rectilineorum facile invenietur, si super eamdem rectam lineam, ad eamdem partem, & ad eumdem angulum constituantur per propositionem quadragesimam quintam libri primi parallelogramma duo æqualia datis rectilineis; nam excessus horum parallegrammorum, qui ex ipsa constructione habetur, erit etiam excessus rectilineorum.

PROP.

PROP. XIX. PROBL. IX.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens parallelogrammo, quod alteri dato sit simile.



Data sit recta AB, datum rectilineum C, & datum parallelogrammum D. Oportet, super AB applicare parallelogrãmum, æquale dato rectilineo C, excedens parallelogrammo alio, quod sit simile ipsi D.

Secetur AB bifariam in E, & super EB (1) constituatur parallelogrammum EG, simile ipsi D. Tum addantur in unum, datum rectilineum C, & constitutum parallelogrammum EG, voceturque X summa ipsorum. Fiat deinde parallelogrammum IKSH æquale (2) ipsi X, & similiterque positum ipsi D, vel EG: ita ut propter similitudinem sit, ut EF ad FG, ita IH ad IK. Producantur porro rectæ FE, FG, usque ad L, & M, ita ut FL, FM æquales fiant ipsis IH, IK: & completo parallelogrammo FLNM,

(1) *Prop.* 18.*hujus.* (2) *Prop.* 18.*hujus.*

FLNM, erit hoc æquale parallelogrammo ſuperius conſtituto IKHS, itemque ſimile, ſimiliterque poſitum ipſi EG: quare cum eodem EG(1) conſiſtet etiam circa eamdem diametrum BF. Denique extendatur AB verſus P, NL verſus R, ducaturque AR, ipſi FL parallela. Et dico, ARPN eſſe parallelogrammum quæſitum.

Nam, quod ita ſit applicatum ſuper rectam AB, ut excedat parallelogrammo ſimili dato D; id quidem patet. Eſt enim ejus exceſſus parallelogrammum OP, quod eſt ſimile, ſimiliterque poſitum (2) ipſi EG, quum ſint circa eamdem diagonalem BF. Quod vero ſit æquale dato rectilineo C; id oſtendetur in hunc modum. Quoniam parallelogrammum LM, velut æquale ipſi HK, ſeu X, eſt ſumma rectilinei C, & parallelogrammi EG; dempto communi parallelogrammo EG, erit gnomon reliquus æqualis rectilineo C. Sed, quum BM ſit æquale ipſi BL, ſeu AL, erit idem gnomon æquale parallelogrammo AN. Quare erit parallogrammum AN æquale rectilineo C. Et propterea ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicatum eſt, excedens parallelogrammo ſimili alteri dato. Quod erat faciendum.

SCHO-

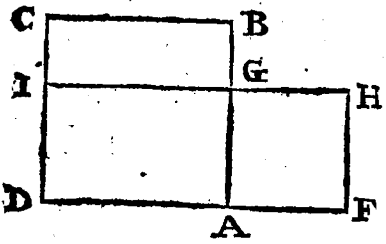
(1) *Prop.25.hujus.* (2) *Prop.26.hujus.*
(3) *Prop.24.hujus.*

SCHOLIUM.

Summa duorum rectilineorum facile invenietur, si super eamdem rectam lineam ad contrarias partes in augulis, qui simul duobus rectis sint æquales constituantur per propositionem quadragesimam quintam libri primi parallelogramma duo æqualia datis rectilineis. Nam summa horum parallelogrammorum, quæ ex ipsa constructione habetur, erit etiam summa rectilineorum.

PROP. XXX. PROBL. X.

Datam rectam lineam terminatam extrema ac media ratione dividere.



Data sit recta terminata AB. Oportet, eam extrema ac media ratione dividere; hoc est ea lege, ut tota recta linea sit ad majus segmentum, ut est majus segmentum ad minus.

Describatur super AB(1) quadratum ABCD.

(1) *Prop. 46. lib. 1*

Tum super rectam AD (1) costituatur parallelogrammum DH, æquale quadrato AC, & excedens alia figura quadrata AH. Dico, rectam AB, sectam esse extrema ac media ratione in puncto G.

Quum enim ex constructione æqualia sint DH, AC; ablato communi DG, erit AH æquale CG; Est autem AH quadratum ex AG, itemque CG rectangulum ex AB in BG. Quare erit rectangulum ex AB in BG æquale quadrato ex AG; propterea, quum sit (2) ut AB ad AG, ita AG ad BG, erit recta AB secta extrema, ac media ratione in puncto G. Data igitur recta linea divisa est extrema, ac media ratione. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Ejusdem problematis solutio potest etiam haberi per undecimam secundi. Nempe si data recta AB subinde dividatur in G, ut rectangulum, quod sit ex tota AB, & parte una BG, sit æquale quadrato alterius partis AG. Nam erit rursus, ut AB ad AG, ita AG ad BG.

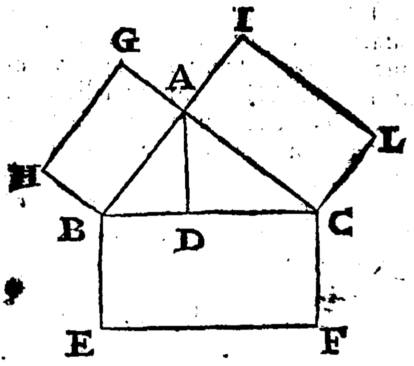
PROP. XXXI. THEOR. XXI.

In triangulis rectangulis figura quævis, a latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis erit figuris, quæ illi similes, & simi-

mi-

(1) *Prop.29.hujus.* (4) *Prop.17.hujus.*

militer positæ, describuntur a lateribus rectum angulum continentibus.



SIt triangulum ABC rectangulum in A, super cujus lateribus describãtur figuræ toti-dem similes similiterque positæ inter se. Dico, figuram descriptam super BC æqualem esse figuris descriptis super AB, AC.

Nam propter similitudinem figurarum, figura descripta super BC, est ad figuram descriptam super AB in duplicata ratione laterum BC, AB (1). Sed quadrata ex iisdem lateribus, quum sint etiam similia inter se, sunt in eadem duplicata ratione. Quare erit (2) ut figura descripta super BC ad figuram descriptam super AB, ita quadratum ex BC ad quadratum ex AB.

Simili ratione ostendetur, figuram descriptam super BC esse ad figuram descriptam super AC, ut est quadratum ex BC ad quadra-

R 2 tum

(1) *Prop.20.hujus.* (1) *Prop. 11. lib. 5.*

ctum ex AC. Quare erit (1) ut figura descripta super BC ad ad figuras descriptas super AB, AC, ita quadatum ex BC ad quadrata ex AB, AC. Est autem quadratum ex BC æquale quadratis (1), quæ fiunt ex AB, AC. Quare figura descripta super BC figuris descriptis super AB, AC etiam æqualis erit.

In triangulis itaque rectangulis figura quævis a latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis erit figuris, quæ illi similes, ac similiter positæ describuntur a lateribus rectum angulum continentibus. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

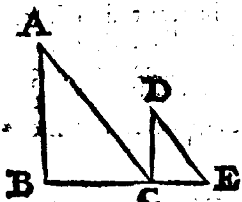
Hoc theorema est longe universalius eo, quod in penultima primi continetur. Illud enim solum quadrata includit, hoc autem ad omnes figuras similes similiterque descriptas se extendit. Sed quemadmodum in illo obtinet etiam conversum, quod ostensum est in ultima primi; sic & istud quoque converti poterit: nec dissimilis a converso illius erit ejus demonstratio.

PROP.

(1) *Prop.24.lib.5.*
(2) *Prop.47.lib.1.*

PROP. XXXII. THEOR. XXII.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus proportionalia, & composita ad eumdem angulum habeant quoque latera homologa parallela; reliqua eorum latera in directum erunt.



Sint duo triangula ABC, DCE habentia latera AB, AC proportionalia lateribus DC, DE: ita quidem, ut AB sit ad AC, ut DC ad DE. Componantur triangula ista ad angulum ACD, & sic composita, habeant quoque latera homologa parallela. Dico reliqua ipsorum latera BC, CE in directum esse.

Quoniam enim AB, CD sunt parallelæ erit (1) angulus BAC æqualis angulo ACD. Et similiter, quia AC, DE sunt parallelæ, erit eidem angulo ACD æqualis quoque angulus CDE; & propterea angulus BAC æqualis erit angulo CDE. Unde, quum duo triangula ABC, DCE habeant circa æquales angulos latera proportionalia; erunt ea (2) æquiangula inter se; eritque proinde angulus ABC æqualis angulo DCE. Ostensus est autem angulus BAC æqualis angulo ACD. Quare erit totus angulus ACE æ-

(1) *Prop.29.lib.1.* (2) *Prop.6.hujus.*

qualis duobus angulis ABC, BAC; atque adèo apposito communi ACB, erunt duo anguli ACE, ACB æquales tribus angulis ABC, BAC, ACB. Sed isti tres auguli, quum ad idem triangulum pertineant, simul sunt æquales (1) duobus rectis. Quare erunt etiam duobus rectis æquales duo anguli ACE, ACB: ac proindè rectæ duæ BC, CE, (2) in directum erunt.

Si igitur duo triangula habeant duo latera duobus lateribus proportionalia, & composita ad eumdem angulum, habeant quoque latera homologa parallela; reliqua eorum latera in directum erunt. Quod erat demonstrandum.

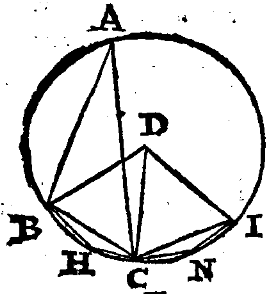
PROP. XXXIII. THEOR. XXIII.

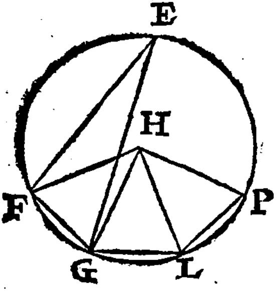
In æqualibus circulis anguli, sive ad centra, sive ad circumferentias positi, eamdem habent rationem cum arcubus, quibus insistunt; similiter autem, & sectores.

SInt duo circuli æquales ABC, EFG, quorum centra sint puncta D, & H. Constituantur primo ad centra ista duo quilibet anguli BDC, FHG. Dico, angulum BDC esse ad angulum FHG, ut est arcus BC ad arcum FG.

Fiant etenim ad eadem centra plures alii anguli, æquales ipsis BDC, FHG; hoc est, vitandæ confusionis causa, unus quidem ad centrum D, qui sit CDI; duo vero ad centrum

(1) *Prop. 32. lib. 1.* (2) *Prop. 14. lib. 1.*

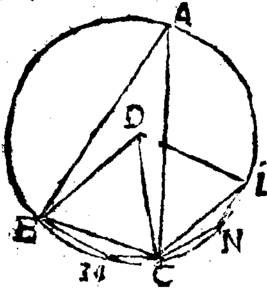


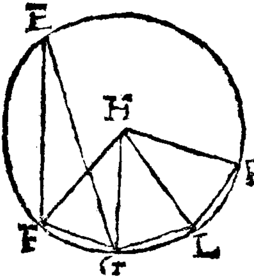


trum H, qui sint GHL, LHP. Itaque, quemadmodum æquales sunt anguli BDC, CDI, ita quoque æquales erunt arcus BC, CI, quibus insistunt anguli illi. Et similiter, quemadmodum æquales sunt anguli FHG, GHL, LHP, ita pariter æquales erunt arcus FG, GL, LP, quibus ii anguli insistunt. Quare angulus BDI tam multiplex erit anguli BDC, quam arcus BI est multiplex arcus BC; & similiter angulus FHP tam multiplex erit anguli FHG, quam arcus FP est multiplex arcus FG. Jam vero angulus BDI est æqualis, major, vel minor angulo FHP, prout arcus BI est æqualis, major, aut minor arcu FP. Quare erit, ut angulus BDC ad angulum FHG, ita arcus BC ad arcum FG.

Constituantur secundo ad circumferentias eorumdem circulorum duo quilibet anguli BAC, FEG. Dico, angulum BAC ad angulum FEG habere quoque eamdem rationem, quam habet arcus BC ad arcum FG.

Fiant etenim ad centra eorum circulorum an-





anguli BDC, FHG, qui insistant iisdem arcubus BC, FG, quibus insistunt anguli BAC, FEG, constituti ad circumferentias. Et quoniam anguli BAC, FEG sunt semisses angulorum (1) BDC, FHG; erit ut angulus BAC ad angulum FEG, ita angulus BDC ad angulum FHG (2). Ostensum est autem, angulum BDC esse ad angulum FHG, ut est arcus BC ad arcum FG. Quare erit (3) ut angulus BAC ad angulum FEG, ita arcus BC ad arcum FG.

Denique in iisdem circulis æqualibus capiantur duo quilibet sectores BCD, FGH. Dico, sectorem BCD ad sectorem FGH habere etiam eamdem rationem, quam habet arcus BC ad arcum FG.

Jungantur etenim rectæ BC, FG, & in iisdem circulis aptentur (4) plures aliæ rectæ, æquales ipsis BC, FG; hoc est, vitandæ confu-

(1) *Prop.20.lib.3.* (2) *Prop.15.lib.5.*
(3) *Prop.11.lib.5.* (4) *Prop.1.lib.4.*

fusionis causa, una quidem in circulo ABC, quæ sit CI; duæ vero in circulo EFG, quæ sint GL, LP. Et quoniam in eodem circulo æquales rectæ (1) æquales arcus abscindunt; erit arcus BAC æqualis arcui CAI. Et propterea in segmentis BC, CI constitutis duobus angulis BHC, CNI, fient anguli isti æquales inter se (2); atque adeo ipsa segmenta BC, CI similia erunt. Sunt autem segmenta ista constituta super rectis æqualibus. Quare erunt etiam æqualia: proindeque additis triangulis BDC, CDI similiter æqualibus, fiet sector BCD æqualis sectori CID. Et propterea sector BID tam multiplex erit sectoris BCD, quam arcus BI est multiplex arcus BC. Simili ratione ostendetur, æquales esse sectores FGH, GLH, LPH, totumque sectorem FPH tam multiplicem esse sectoris FGH, quam arcus FP est multiplex arcus FG. Jam vero sector BID est æqualis, major, vel minor sectore FPH, prout arcus BI est æqualis, major, vel minor arcu FP; quare erit, ut sector BCD ad sectorem FGH, ita arcus BC ad arcum FG.

In æqualibus itaque circulis anguli, sive ad centra, sive ad circumferentias positi, eamdem habent rationem cum arcubus, quibus insistunt; similiter autem & sectores. Quod erat demonstrandum.

CO-

(1) *Prop*28.*lib*.3. (2) *Prop*.27.*lib*.3.

COROLLARIUM.

Angulus itaque ad centrum constitutus cum ipso arcu cui insistit, proportionaliter augetur. Unde pro mensura anguli rectilinei adhiberi potest arcus circuli ex vertice anguli tamquam centro descriptus, & inter latera ejusdem anguli comprehensus: quippe qui metietur anguli quantitatem tam longitudine sua, quam numero partium, quas continet, quum datum est intervallum; & vero metietur eam solo suarum partium numero, quum intervallum utcumque assumitur.

FINIS.